线性代数知识点总结

1 行列式

（一）行列式概念和性质

1、逆序数：所有的逆序的总数

2、行列式定义：不同行不同列元素乘积代数和

3、行列式性质：（用于化简行列式）

（1）行列互换（转置），行列式的值不变

（2）两行（列）互换，行列式变号

（3）提公因式：行列式的某一行（列）的所有元素都乘以同一数k，等于用数 k 乘此行列式

（4）拆列分配：行列式中如果某一行（列）的元素都是两组数之和，那么这个行列式就等于两个行列式之和。

（5）一行（列）乘 k 加到另一行（列），行列式的值不变。

（6）两行成比例，行列式的值为 0。

（二）重要行列式

4、上（下）三角（主对角线）行列式的值等于主对角线元素的乘积

5、副对角线行列式的值等于副对角线元素的乘积乘$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

6、Laplace展开式：（A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵），则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|$$

7、n 阶（n≥ 2）范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

数学归纳法证明

★8、对角线的元素为 a，其余元素为 b 的行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

（三）按行（列）展开

9、按行展开定理：

（1）任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和等于行列式的值

（2）行列式中某一行（列）各个元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于 0

（四）行列式公式

10、行列式七大公式：

（1）$|kA|=k^n|A|$

（2）$|AB|=|A| \cdot |B|$

（3）$|A^T|=|A|$

（4）$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

（5）$|A^*|=|A|^{n-1}$

（6）若 A 的特征值 λ1、λ2、,,,, λn，则 $|A|=\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

（7）若 A 与 B 相似，则|A|=|B|

（五）克莱姆法则

11、克莱姆法则：

（1）非齐次线性方程组的系数行列式不为 0，那么方程为唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D},\quad j=1,2,\cdots,n$$

（2）如果非齐次线性方程组无解或有两个不同解，则它的系数行列式必为 0

（3）若齐次线性方程组的系数行列式不为 0，则齐次线性方程组只有 0 解；如果方程组有非零解，那么必有 D=0。

2 矩阵

（一）矩阵的运算

1、矩阵乘法注意事项：

（1）矩阵乘法要求前列后行一致；

（2）矩阵乘法不满足交换律；（因式分解的公式对矩阵不适用，但若 B=E,O,A^{-1}，A*,f(A)时，可以用交换律）

（3）AB=O 不能推出 A=O 或 B=O。

2、转置的性质（5 条）

（1）$(A+B)^T=A^T+B^T$

（2）$(kA)^T=kA^T$

（3）$(AB)^T=B^TA^T$

（4）$|A|^T=|A|$

（5）$(A^T)^T=A$

（二）矩阵的逆

3、逆的定义：

AB=E 或 BA=E 成立，称 A 可逆，B 是 A 的逆矩阵，记为 $B=A^{-1}$

注：A 可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$

4、逆的性质：（5 条）

（1）$(kA)^{-1}=1/k\cdot A^{-1}$ $(k\neq 0)$

（2）$(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

（3）$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

（4）$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

（5）$(A^{-1})^{-1}=A$

5、逆的求法：

（1）A 为抽象矩阵：由定义或性质求解

（2）A 为数字矩阵：（A|E）→初等行变换→（E|A^{-1}）

（三）矩阵的初等变换

6、初等行（列）变换定义：

（1）两行（列）互换；

（2）一行（列）乘非零常数 c

（3）一行（列）乘 k 加到另一行（列）

7、初等矩阵：单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵。

8、初等变换与初等矩阵的性质：

（1）初等行（列）变换相当于左（右）乘相应的初等矩阵

（2）初等矩阵均为可逆矩阵，且 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$（i，j 两行互换）；

E_i^{-1}（c）=E_i（1/c）（第 i 行（列）乘 c）

E_{ij}^{-1}（k）=E_{ij}（-k）（第 i 行乘 k 加到 j）

★（四）矩阵的秩

9、秩的定义：非零子式的最高阶数

注：（1）r（A）=0 意味着所有元素为 0，即 A=O

（2）r（$A_{n\times n}$）=n（满秩）←→|A| ≠ 0←→A 可逆；

r（A）＜n←→|A|=0 ←→A 不可逆；

（3）r（A）=r（r=1、2、„、 n-1）←→r 阶子式非零且所有 r+1 子式均为 0。

10、秩的性质：（7 条）

（1）A 为 m× n 阶矩阵，则 r（A）≤ min（m,n）

（2）r（A± B）≤ r（A）±（ B）

（3）r（AB）≤ min{r（A），r（B）}

（4）r（kA）=r（A）（k≠ 0）

（5）r（A）=r（AC）（C 是一个可逆矩阵）

（6）r（A）=r（A^T）=r（A^TA）=r（AA^T）

（7）设 A 是 m× n 阶矩阵，B 是 n× s 矩阵，AB=O，则 r（A）+r（B）≤ n

11、秩的求法：

（1）A 为抽象矩阵：由定义或性质求解；

（2）A 为数字矩阵：A→初等行变换→阶梯型（每行第一个非零元素下面的元素均为 0），则 r（A）=非零行的行数

（五）伴随矩阵

12、伴随矩阵的性质：（8 条）

（1）$AA^*=A^*A=|A|E$→★$A^*=|A|A^{-1}$

（2）$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

（3）$(AB)^*=B^*A^*$

（4）$|A^*|=|A|^{n-1}$

（5）$(A^T)^*=(A^*)^T$

（6）$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=A|A|^{-1}$

（7）$(A^*)^*=|A|^{n-2}\cdot A$

★（8）$r(A^*)=n$（$r(A)=n$）；

$r(A^*)=1$　（$r(A)=n-1$）；

$r(A^*)=0$　（$r(A)<n-1$）

（六）分块矩阵

13、分块矩阵的乘法：要求前列后行分法相同。

14、分块矩阵求逆：

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

3 向量

（一）向量的概念及运算

1、向量的内积：$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$

2、长度定义：$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{\alpha^T\alpha}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

3、正交定义：$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+,, +a_nb_n=0$

4、正交矩阵的定义：A 为 n 阶矩阵，$AA^T=E\longleftrightarrow A^{-1}=A^T\longleftrightarrow A^TA=E\rightarrow|A|=\pm 1$

（二）线性组合和线性表示

5、线性表示的充要条件：

非零列向量β 可由α_1，α_2，„， α_s线性表示

(1)←→非齐次线性方程组（α_1，α_2，„， α_s）（x_1，x_2，„， x_s）^{T}=β 有解。

★(2)←→r（α_1，α_2，„， α_s）=r（α_1，α_2，„， α_s，β ）（系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，用于大题第一步的检验）

6、线性表示的充分条件：（了解即可）

若α_1，α_2，„， α_s线性无关，α_1，α_2，„， α_s，β 线性相关，则β 可由α_1，α_2，„， α_s线性表示。

7、线性表示的求法：（大题第二步）

设α_1，α_2，„， α_s线性无关，β 可由其线性表示。

（α_1，α_2，„， α_s| β ）→初等行变换→（行最简形| 系数）

行最简形：每行第一个非 0 的数为 1，其余元素均为 0

（三）线性相关和线性无关

8、线性相关注意事项：

（1）α 线性相关←→α =0

（2）α_1，α_2线性相关←→α_1，α_2成比例

9、线性相关的充要条件：

向量组α_1，α_2，„， α_s线性相关

（1）←→有个向量可由其余向量线性表示；

（2）←→齐次方程（α_1，α_2，„， α_s）（x_1，x_2，„， x_s）^{T}=0 有非零解；

★（3）←→r（α_1，α_2，„， α_s）＜s 即秩小于个数

特别地，n 个 n 维列向量α_1，α_2，„， α_n线性相关

（1）←→r（α_1，α_2，„， α_n）＜n

（2）←→|α_1，α_2，„， α_n |=0

（3）←→（α_1，α_2，„， α_n）不可逆

10、线性相关的充分条件：

（1）向量组含有零向量或成比例的向量必相关

（2）部分相关，则整体相关

（3）高维相关，则低维相关

（4）以少表多，多必相关

★推论：n+1 个 n 维向量一定线性相关

11、线性无关的充要条件

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关

（1）$\longleftrightarrow$任意向量均不能由其余向量线性表示；

（2）$\longleftrightarrow$齐次方程（$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$）$(x_1, x_2, \ldots, x_s)^T=0$只有零解

（3）$\longleftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)=s$

特别地，n 个 n 维向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性无关

$\longleftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=n \longleftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| \neq 0 \longleftrightarrow$矩阵可逆

12、线性无关的充分条件：

（1）整体无关，部分无关

（2）低维无关，高维无关

（3）正交的非零向量组线性无关

（4）不同特征值的特征向量无关

13、线性相关、线性无关判定

（1）定义法

★（2）秩：若小于阶数，线性相关；若等于阶数，线性无关

【专业知识补充】

（1）在矩阵左边乘列满秩矩阵（秩=列数），矩阵的秩不变；在矩阵右边乘行满秩矩阵，矩阵的秩不变。

（2）若 n 维列向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$可以由其线性表示，即$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C$，则$r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=r(C)$，从而线性无关。

$\longleftrightarrow r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=3 \longleftrightarrow r(C)=3 \longleftrightarrow |C| \neq 0$

（四）极大线性无关组与向量组的秩

14、极大线性无关组不唯一

15、向量组的秩:极大无关组中向量的个数成为向量组的秩

对比：矩阵的秩:非零子式的最高阶数

★注:向量组α_1，α_2，„，α_s的秩与矩阵 A=（α_1，α_2，„，α_s）的秩相等

★16、极大线性无关组的求法

（1）α_1，α_2，„，α_s为抽象的：定义法

（2）α_1，α_2，„，α_s为数字的：

（α_1，α_2，„，α_s）→初等行变换→阶梯型矩阵

则每行第一个非零的数对应的列向量构成极大无关组

（五）向量空间

17、基（就是极大线性无关组）变换公式：

若α_1，α_2，„，α_n与β_1，β_2，„，β_n是 n 维向量空间 V 的两组基，则基变换公式为（β_1，β_2，„，β_n）=（α_1，α_2，„，α_n）$C_{n\times n}$

其中，C 是从基α_1，α_2，„，α_n到β_1，β_2，„，β_n的过渡矩阵。

C=（α_1，α_2，„，α_n）$^{-1}$（β_1，β_2，„，β_n）

18、坐标变换公式：

向量γ 在基α_1，α_2，„，α_n与基β_1，β_2，„，β_n的坐标分别为 x=（x_1，x_2，„，x_n）^{T}，y=（y_1，y_2，„，y_n）^{T},，即$\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+$„$+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+y_2\beta_2+$„$+y_n\beta_n$，则坐标变换公式为 x=Cy或 y=$C^{-1}$x。其中，C 是从基$\alpha_1$，$\alpha_2$，„，$\alpha_n$到$\beta_1$，$\beta_2$，„，$\beta_n$的过渡矩阵。C=（$\alpha_1$，$\alpha_2$，„，$\alpha_n$）$^{-1}$（$\beta_1$，$\beta_2$，„，$\beta_n$）

（六）Schmidt正交化

19、Schmidt 正交化

设α_1，α_2，α_3线性无关

（1）正交化

令$\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

（2）单位化

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$$

4 线性方程组

（一）方程组的表达形与解向量

1、解的形式：

(1)一般形式

(2)矩阵形式：$Ax=b$;

(3)向量形式：$A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

2、解的定义：

若$\eta=(c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$满足方程组 $Ax=b$，即 $A\eta=b$，称η 是 $Ax=b$的一个解（向量）

（二）解的判定与性质

3、齐次方程组：

（1）只有零解$\longleftrightarrow r(A)=n$（n 为 A的列数或是未知数 x 的个数）

（2）有非零解$\longleftrightarrow r(A)<n$

4、非齐次方程组：

（1）无解$\longleftrightarrow r(A)<r(A|b) \longleftrightarrow r(A)=r(A)-1$

（2）唯一解$\longleftrightarrow r(A)=r(A|b)=n$

（3）无穷多解$\longleftrightarrow r(A)=r(A|b)<n$

5、解的性质：

（1）若ξ_1，ξ_2是 $Ax=0$的解，则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$是 $Ax=0$的解

（2）若ξ 是 $Ax=0$的解，η 是 $Ax=b$的解，则$\xi+\eta$ 是 $Ax=b$的解

（3）若η_1，η_2是 $Ax=b$的解，则$\eta_1-\eta_2$是 $Ax=0$的解

【推广】

（1）设η_1，η_2，„，η_s是 Ax=b的解，则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+„+k_s\eta_s$为

$$\begin{cases} Ax=b\text{的解（当}\Sigma k_i=1\text{）} \\ Ax=0\text{的解（当}\Sigma k_i=0\text{）} \end{cases}$$

（2）设η_1，η_2，„，η_s是 Ax=b的 s 个线性无关的解，则$\eta_2-\eta_1$，$\eta_3-\eta_1$，„，$\eta_s-\eta_1$为 Ax=0的 s-1 个线性无关的解。

变式：①$\eta_1-\eta_2$，$\eta_3-\eta_2$，„，$\eta_s-\eta_2$

②$\eta_2-\eta_1$，$\eta_3-\eta_2$，„，$\eta_s-\eta_{s-1}$

（三）基础解系

6、基础解系定义：

（1）ξ_1，ξ_2，„，ξ_s是 Ax=0的解

（2）ξ_1，ξ_2，„，ξ_s线性相关

（3）Ax=0的所有解均可由其线性表示

→基础解系即所有解的极大无关组

注：基础解系不唯一。

任意 n-r（A）个线性无关的解均可作为基础解系。

★7、重要结论：（证明也很重要）

设 A 施 m× n 阶矩阵，B 是 n× s 阶矩阵，AB=O

（1）B 的列向量均为方程 Ax=0的解

（2）r（A）+r（B）≤ n（第 2 章，秩）

8、总结：基础解系的求法

（1）A 为抽象的：由定义或性质凑 n-r（A）个线性无关的解

（2）A 为数字的：A→初等行变换→阶梯型

自由未知量分别取 1,0,0；0,1,0；0,0,1；代入解得非自由未知量得到基础解系

（四）解的结构（通解）

9、齐次线性方程组的通解（所有解）

设 r（A）=r，ξ_1，ξ_2，„，ξ_{n-r}为 Ax=0的基础解系，

则 Ax=0的通解为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+„+k_{n-r}\eta_{n-r}$（其中 k_1，k_2，„，k_{n-r}为任意常数）

10、非齐次线性方程组的通解

设 r（A）=r，ξ_1，ξ_2，„，ξ_{n-r} 为 Ax=0的基础解系，η 为 Ax=b的特解，

则 Ax=b的通解为$\eta+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$（其中 k_1，k_2，„，k_{n-r} 为任意常数）

（五）公共解与同解

11、公共解定义：

如果α 既是方程组 Ax=0的解，又是方程组 Bx=0的解，则称α 为其公共解

12、非零公共解的充要条件：

方程组 Ax=0与 Bx=0有非零公共解

$\longleftarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x=0$ 有非零解$\longleftarrow r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}<n$

13、重要结论（需要掌握证明）

（1）设 A是 m× n 阶矩阵，则齐次方程 ATAx=0与 Ax=0同解，r（ATA）=r（A）

（2）设 A是 m× n 阶矩阵，r（A）=n，B是 n× s 阶矩阵，则齐次方程 ABx=0与 Bx=0同解，r（AB）=r（B）

5 特征值与特征向量

（一）矩阵的特征值与特征向量

1、特征值、特征向量的定义：

设 A为 n 阶矩阵，如果存在数λ 及非零列向量α ，使得 Aα =λ α ，称α 是矩阵 A属于特征值λ 的特征向量。

2、特征多项式、特征方程的定义：

|λ E-A|称为矩阵 A的特征多项式（λ 的 n 次多项式）。

|λ E-A |=0 称为矩阵 A的特征方程（λ 的 n 次方程）。

注:特征方程可以写为|A-λ E|=0

3、重要结论：

（1）若α 为齐次方程 Ax=0的非零解，则 Aα =0· α ，即α 为矩阵 A特征值λ =0 的特征向量

（2）A的各行元素和为 k，则$(1，1，\cdots，1)^T$为特征值为 k 的特征向量。

（3）上（下）三角或主对角的矩阵的特征值为主对角线各元素。

△4、总结：特征值与特征向量的求法

（1）A 为抽象的：由定义或性质凑

（2）A 为数字的：由特征方程法求解

5、特征方程法：

（1）解特征方程$|\lambda E-A|=0$，得矩阵 A 的 n 个特征值λ_1，λ_2，,,， λ_n

注：n 次方程必须有 n 个根(可有多重根，写作$\lambda_1=\lambda_2=,,=\lambda_s$=实数，不能省略)

（2）解齐次方程$(\lambda_i E-A)=0$，得属于特征值λ_i的线性无关的特征向量，即其基础解系（共 $n-r(\lambda_i E-A)$ 个解）

6、性质：

（1）不同特征值的特征向量线性无关

（2）k 重特征值最多 k 个线性无关的特征向量

$$1\le n-r(\lambda_i E-A)\le k_i$$

（3）设 A 的特征值为λ_1，λ_2，,,， λ_n，则$|A|=\Pi\lambda_i$，$\Sigma\lambda_i=\Sigma a_{ii}$

（4）当 $r(A)=1$，即 $A=\alpha\beta^T$，其中α，β 均为 n 维非零列向量，则 A 的特征值为$\lambda_1=\Sigma a_{ii}=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$，$\lambda_2=,,=\lambda_n=0$

（5）设α 是矩阵 A 属于特征值λ 的特征向量，则

A	f（A）	A^T	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$（相似）
λ	$f(\lambda)$	λ	λ^{-1}	$\lvert A\rvert\lambda^{-1}$	λ
α	α	/	α	α	$P^{-1}\alpha$

（二）相似矩阵

7、相似矩阵的定义：

设 A、B 均为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P 使得 $B=P^{-1}AP$，称 A 与 B 相似，记作 A~B

8、相似矩阵的性质

（1）若 A 与 B 相似，则 f（A）与 f（B）相似

（2）若 A 与 B 相似，B 与 C 相似，则 A 与 C 相似

（3）相似矩阵有相同的行列式、秩、特征多项式、特征方程、特征值、迹（即主对角线元素之和）

【推广】

（4）若 A 与 B 相似，则 AB 与 BA 相似，A^T 与 B^T 相似，A^{-1} 与 B^{-1} 相似，A*与 B*也相似

（三）矩阵的相似对角化

9、相似对角化定义：

如果 A 与对角矩阵相似，即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，称 A 可相似对角化。

注：$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$（$\alpha_i\neq 0$，由于 P 可逆），故 P 的每一列均为矩阵 A 的特征值λ_i的特征向量

10、相似对角化的充要条件

（1）A 有 n 个线性无关的特征向量

（2）A 的 k 重特征值有 k 个线性无关的特征向量

11、相似对角化的充分条件：

（1）A 有 n 个不同的特征值（不同特征值的特征向量线性无关）

（2）A 为实对称矩阵

12、重要结论：

（1）若 A 可相似对角化，则 r（A）为非零特征值的个数，n-r（A）为零特征值的个数

（2）若 A 不可相似对角化，r（A）不一定为非零特征值的个数

（四）实对称矩阵

13、性质

（1）特征值全为实数

（2）不同特征值的特征向量正交

（3）A 可相似对角化，即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

（4）A 可正交相似对角化，即存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$

6 二次型

（一）二次型及其标准形

1、二次型：

（1）一般形式

（2）矩阵形式（常用）

2、标准形：

如果二次型只含平方项，即 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \ldots + d_nx_n^2$

这样的二次型称为标准形（对角线）

3、二次型化为标准形的方法：

（1）配方法：

通过可逆线性变换 $x=Cy$（C 可逆），将二次型化为标准形。其中，可逆线性变换及标准形通过先配方再换元得到。

★（2）正交变换法：

通过正交变换 $x=Qy$，将二次型化为标准形 $\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，Q 为 A 的正交矩阵

注:正交矩阵 Q 不唯一，γ_i 与 λ_i 对应即可。

（二）惯性定理及规范形

4、定义：

正惯性指数：标准形中正平方项的个数称为正惯性指数，记为 p；

负惯性指数：标准形中负平方项的个数称为负惯性指数，记为 q；

规范形：$f = z_1^2 + \ldots z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_{p+q}^2$ 称为二次型的规范形。

5、惯性定理：

二次型无论选取怎样的可逆线性变换为标准形，其正负惯性指数不变。

注：（1）由于正负惯性指数不变，所以规范形唯一。

（2）p=正特征值的个数，q=负特征值的个数，p+q=非零特征值的个数=r（A）

（三）合同矩阵

6、定义：

A、B 均为 n 阶实对称矩阵，若存在可逆矩阵 C，使得 $B=C^TAC$ 称 A 与 B 合同

△7、总结：n 阶实对称矩阵 A、B 的关系

（1）A、B 相似（$B=P^{-1}AP$）←→相同的特征值

（2）A、B 合同（$B=C^TAC$）←→相同的正负惯性指数←→相同的正负特征值的个数

（3）A、B 等价（$B=PAQ$）←→r（A）=r（B）

注：实对称矩阵相似必合同，合同必等价

（四）正定二次型与正定矩阵

8、正定的定义

二次型 x^TAx，如果任意 $x\neq 0$，恒有 $x^TAx>0$，则称二次型正定，并称实对称矩阵 A 是正定矩阵。

9、n 元二次型 x^TAx 正定充要条件：

（1）A 的正惯性指数为 n

（2）A 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C，使得 $A=C^TC$ 或 $C^TAC=E$

（3）A 的特征值均大于 0

（4）A 的顺序主子式均大于 0（k 阶顺序主子式为前 k 行前 k 列的行列式）

10、n 元二次型 x^TAx 正定必要条件：

（1）$a_{ii}>0$

（2）$|A|>0$

11、总结：二次型 x^TAx 正定判定（大题）

（1）A 为数字：顺序主子式均大于 0

（2）A 为抽象：①证 A 为实对称矩阵：$A^T=A$；②再由定义或特征值判定

12、重要结论：

（1）若 A 是正定矩阵，则 kA（k>0），A^k，A^T，A^{-1}，A^*正定

（2）若 A、B 均为正定矩阵，则 A+B 正定