算法设计与分析作业报告

题目B：平面最近点对问题

一、基本信息

- **姓名**：白晨均
- **学号**：2243211068
- **题目**：平面最近点对（分治算法）
- **完成日期**：2025年10月

二、算法设计思想

2.1 问题描述

给定平面上的 n 个点，找出距离最近的两个点及其距离。

输入：平面上 n 个点的坐标 $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$，其中$p_i = (x_i, y_i)$

输出：最近点对 (p_i, p_j) 及其欧氏距离d

2.2 分治策略

本算法采用分治法求解，核心思想如下：

2.2.1 预处理

- 将所有点按 x 坐标排序，得到 P_x

时间复杂度：$O(nlogn)$

2.2.2 分割（Divide）

- 选择中位数对应的x坐标作为分割线 L
- 将点集分为左右两部分：P_{left} 和 P_{right}

2.2.3 递归求解（Conquer）

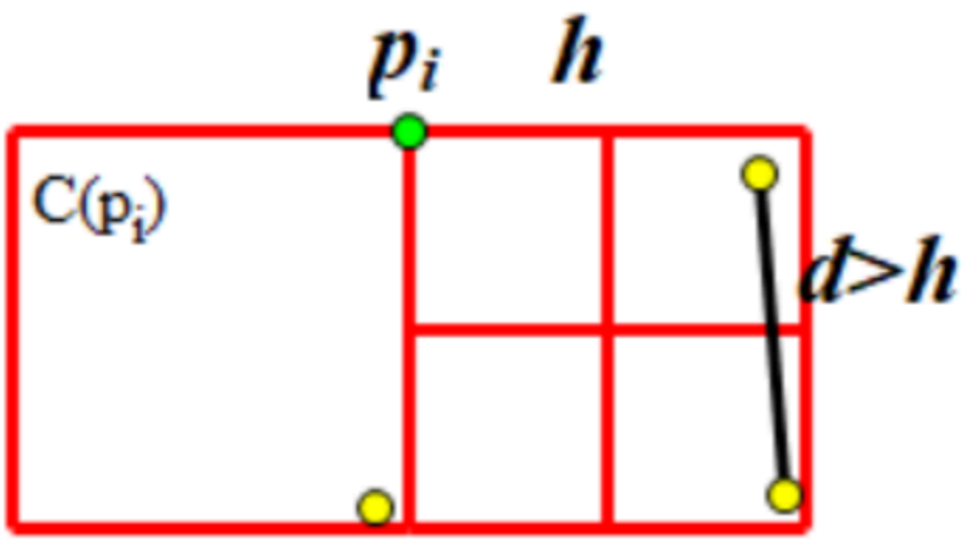
- 递归求解左半部分的最近点对，得到距离 d_L
- 递归求解右半部分的最近点对，得到距离 d_R
- 取 $h = min(d_L, d_R)$

2.2.4 合并（Combine）

关键步骤：检查跨越分割线的点对

1. **构造带区**：选出所有满足 $|x - L| < h$的点，构成带区 Strip
2. **带区排序**：按 y坐标对带区内的点排序
3. **带区扫描**：对于带区内每个点，只需检查其后最多 6（7） 个点,若有更小的则更新最小值。

理论证明：在 $h \times 2h$的矩形内最多有 8 个点



首先，对于中间带区中的任意点p_i,所有能产生更短距离的点都分布在上下h宽度内，为避免重复我们只检查下方宽为h的区域，定义为：

$$C\left(p_i\right) = \{p_j \mid p_j \in B, y_i - h < y_j \le y_i\}$$

其中，B表示中间条带，h是目前最小距离。

我们已经了解到，$C(p_i)$ 中的所有点的纵坐标都在 $(y_i - h, y_i)$ 范围内；且 $C(p_i)$ 中的所有点，和 p_i 本身，横坐标都在 $(x_m - h, x_m + h)$ 范围内。这构成了一个 $2h \times h$ 的矩形.

我们再将这个矩形拆分为两个 $h \times h$ 的正方形，不考虑 p_i，其中一个正方形中的点为 $C(p_i) \cap A_1$，另一个为 $C(p_i) \cap A_2$，且两个正方形内的任意两点间距离大于等于 h。（因为它们来自同一下层递归）

我们将一个 $h \times h$ 的正方形拆分为四个 $\frac{h}{2} \times \frac{h}{2}$ 的小正方形。可以发现，每个小正方形中最多有 1 个点：因为该小正方形中任意两点最大距离是对角线的长度，即 $\frac{h}{\sqrt{2}}$，该数小于 h。

时间复杂度：$O(n)$

2.2.5 基本情况

- 当点数 ≤ 3时，直接使用暴力法求解
- 时间复杂度：$O(1)$

2.3 算法伪代码

```
ClosestPair(Px, Py):
    n = |Px|

    // 基本情况
    if n ≤ 3:
        return BruteForce(Px)

    // 分割
    mid = n / 2
    L = Px[mid].x  // 分割线

    Px_left = Px[0..mid]
    Px_right = Px[mid+1..n]

    Py_left = {p ∈ Py | p.x ≤ L}
    Py_right = {p ∈ Py | p.x > L}

    // 递归求解
    (dL, pairL) = ClosestPair(Px_left, Py_left)
    (dR, pairR) = ClosestPair(Px_right, Py_right)

    // 取较小值
    δ = min(dL, dR)
    pair = (dL < dR) ? pairL : pairR

    // 构造带区
    Strip = {p ∈ Py | |p.x - L| < δ}

    // 检查带区
    for i = 0 to |Strip| - 1:
        j = i + 1
        while j < |Strip| and (Strip[j].y - Strip[i].y) < δ:
            d = Distance(Strip[i], Strip[j])
            if d < δ:
                δ = d
                pair = (Strip[i], Strip[j])
            j = j + 1

    return (δ, pair)
```

三、复杂度分析

3.1 时间复杂度

递推关系：

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

其中：

- $2T(n/2)$：两次递归调用
- $O(n)$：分割、构造带区、带区扫描的时间

根据主定理：$a = 2, b = 2, f(n) = O(n)$

- $log_b(a) = log_2(2) = 1$
- $f(n) = \Theta(n^1)$
- 满足情况2：$f(n) = \Theta(n^{log_b(a)})$

因此：$T(n) = \Theta(nlogn)$

3.2 空间复杂度

- 排序后的数组：$O(n)$
- 递归栈深度：$O(logn)$
- 带区数组：$O(n)$

总空间复杂度：$S(n) = O(n)$

3.3 与暴力法的比较

算法	时间复杂度	空间复杂度
暴力法	$O(n^2)$	$O(1)$
分治法	$O(nlogn)$	$O(n)$

对于 $n = 1000$：

- 暴力法：约 $1,000,000$ 次比较
- 分治法：约 $10,000$ 次操作（快 100 倍）

四、可视化设计

4.1 设计目标

清晰展示分治算法的关键步骤：

1. 初始点集分布
2. 递归分割过程
3. 左右子问题求解
4. 带区构造与扫描
5. 最优解更新
6. 最终结果

4.2 可视化元素

元素	颜色/样式	说明
普通点	浅蓝色圆点	所有输入点
分割线	红色虚线	递归分割的中线
当前处理点	绿色高亮	正在处理的点
带区	黄色半透明矩形	宽度为 2h 的区域
带区内点	黄色边框	需要检查的点
当前最近点对	绿色连线	当前找到的最近点对
最终最近点对	黑色粗线+大圆点	最终结果
距离圆	红色虚线圆	半径为 $d/2$ 的圆

4.3 动画流程

1. **帧1-7**：显示初始点集和排序后的点集
2. **帧8-N**：递归过程的每一层
    - 显示分割线
    - 左侧递归可视化
    - 右侧递归可视化
    - 带区构造
    - 带区扫描
3. **最后一帧**：最终结果展示，标注最小距离

五、示例说明

5.1 测试数据

- **点数** n：45
- **随机种子**：42
- **坐标范围**：$[0,1] \times [0,1]$

5.2 数据分布验证

根据作业要求验证：

✅ **要求1**：点数 $n = 45 \geq 36$

✅ **要求2**：左右点数相差

- 左侧点数：$28(56\%)$
- 右侧点数：$22(44\%)$
- 相差：12%（在$10\% - 20\%$范围内）

✅ **要求3**：带区点数

- 带区宽度：±0.1（中线$\pm10\%$）
- 带区点数：$18(36\% > 30\%)$

5.3 算法执行过程

初始状态：

- 45个随机分布的点
- 按x坐标排序完成

第1层递归（顶层）：

- 分割线：$x = 0.440$
- 左侧25点，右侧25点
- 递归求解...

基本情况示例：

- 某个叶节点包含3个点
- 暴力计算得到局部最小距离

带区检查:

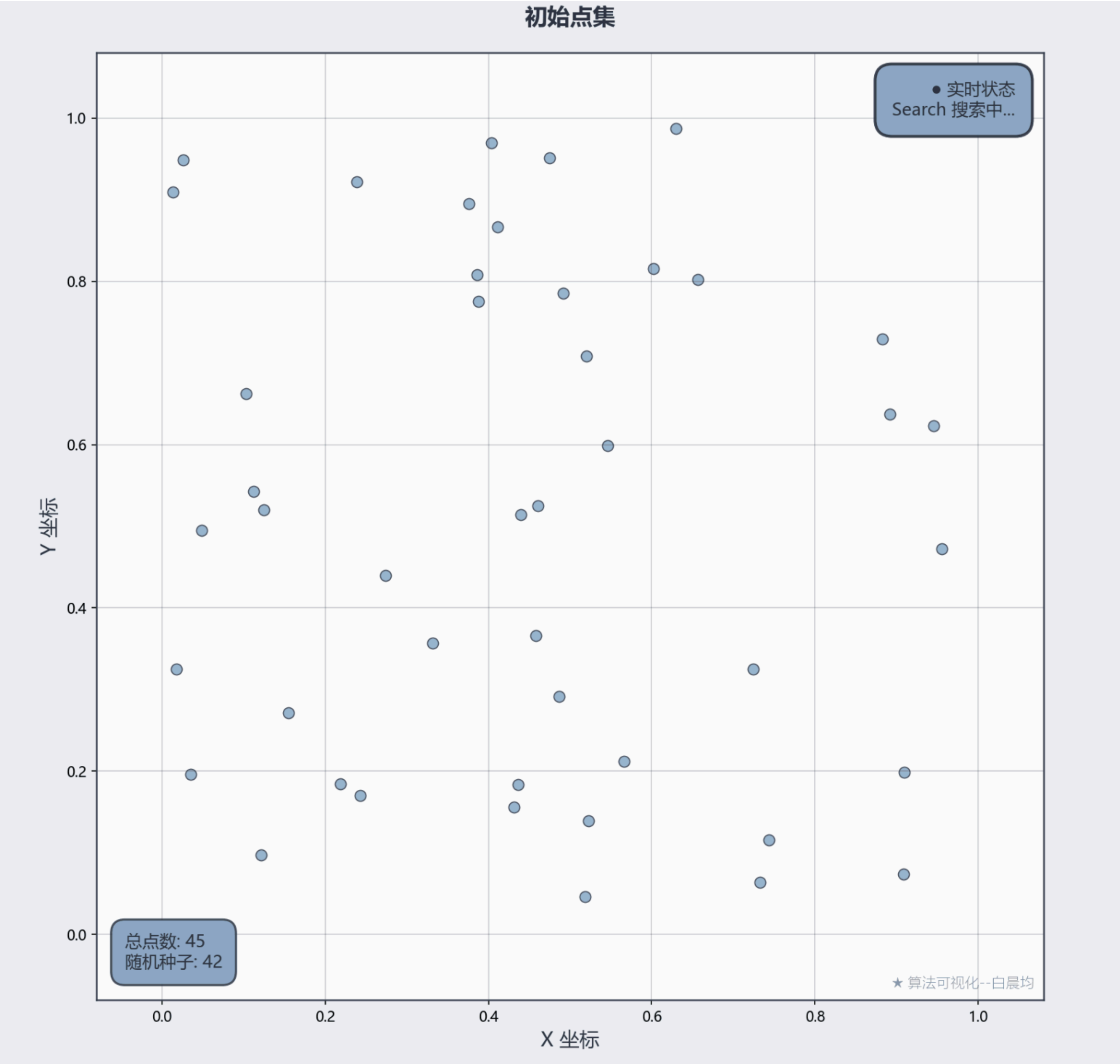
- $\delta = 0.2995$（左右子问题的较小值）
- 带区宽度：0.5990
- 带区内点数：5
- 发现更近点对，更新 $\delta = 0.0414$

最终结果:

- 最小距离：0.0234
- 最近点对:
  - 点1：$(0.440, 0.514)$
  - 点2：$(0.461, 0.525)$

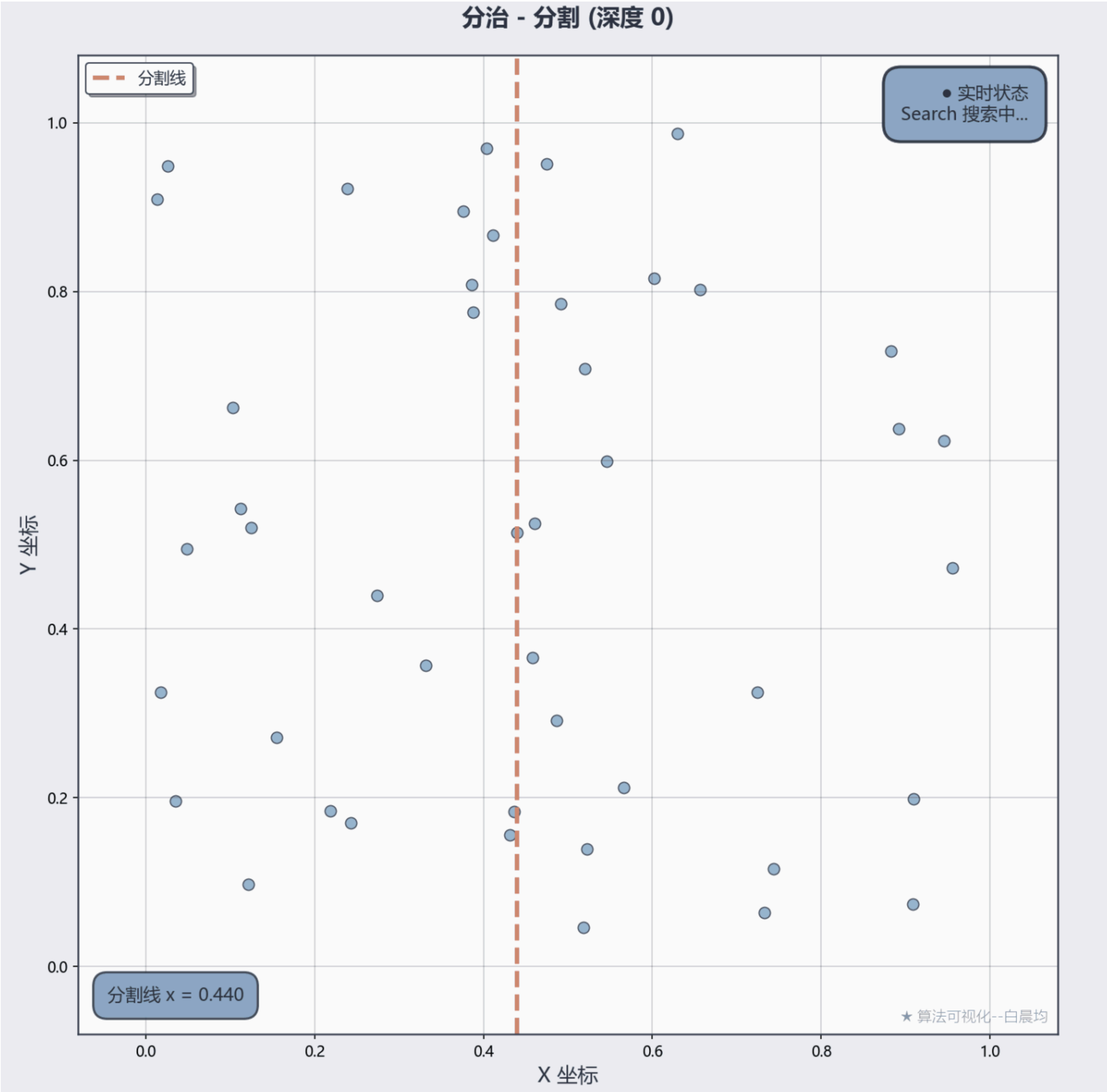
六、关键帧截图

截图1：初始点集



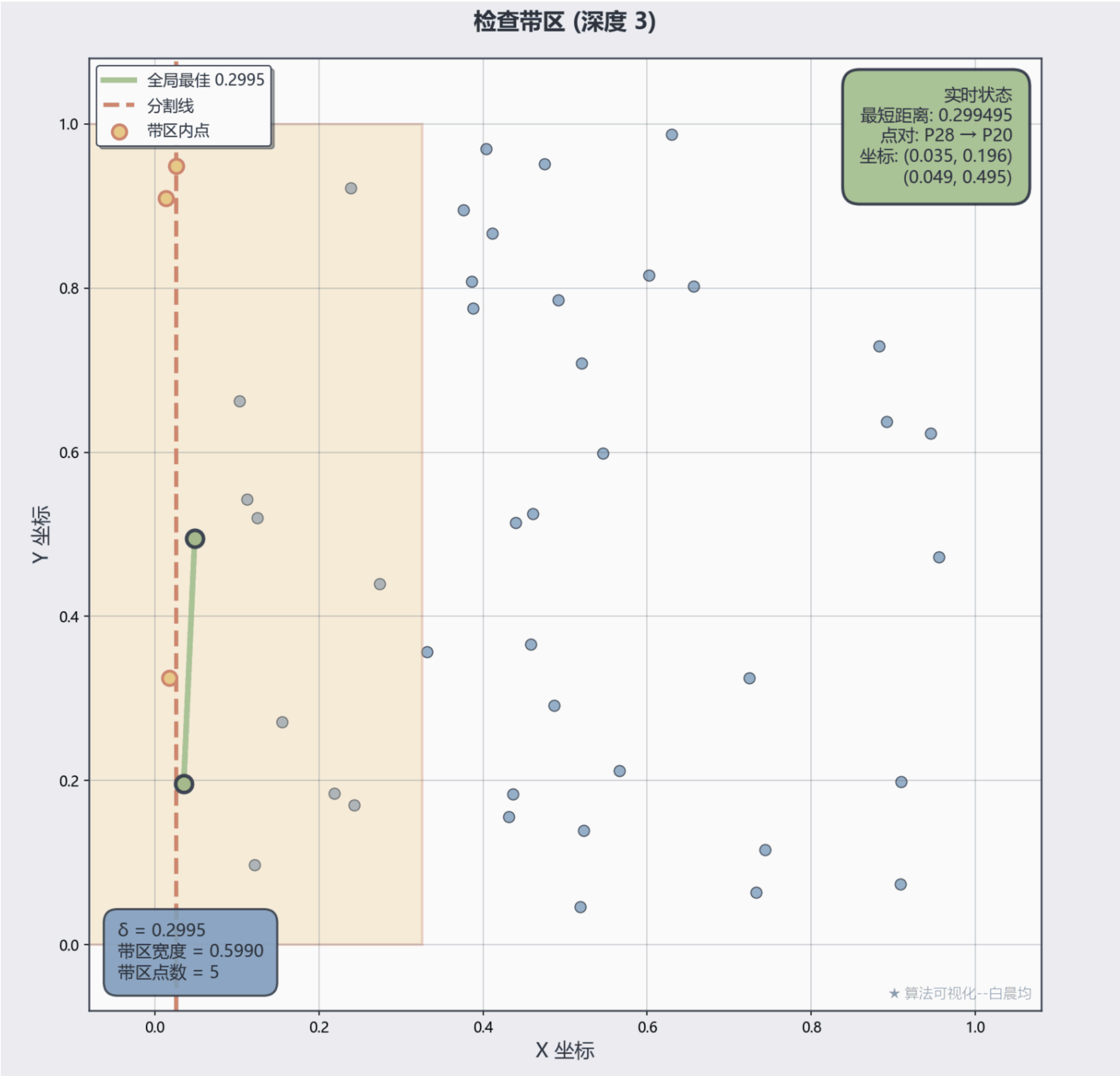
说明：45个随机点均匀分布在单位正方形内

截图2：第一次分割



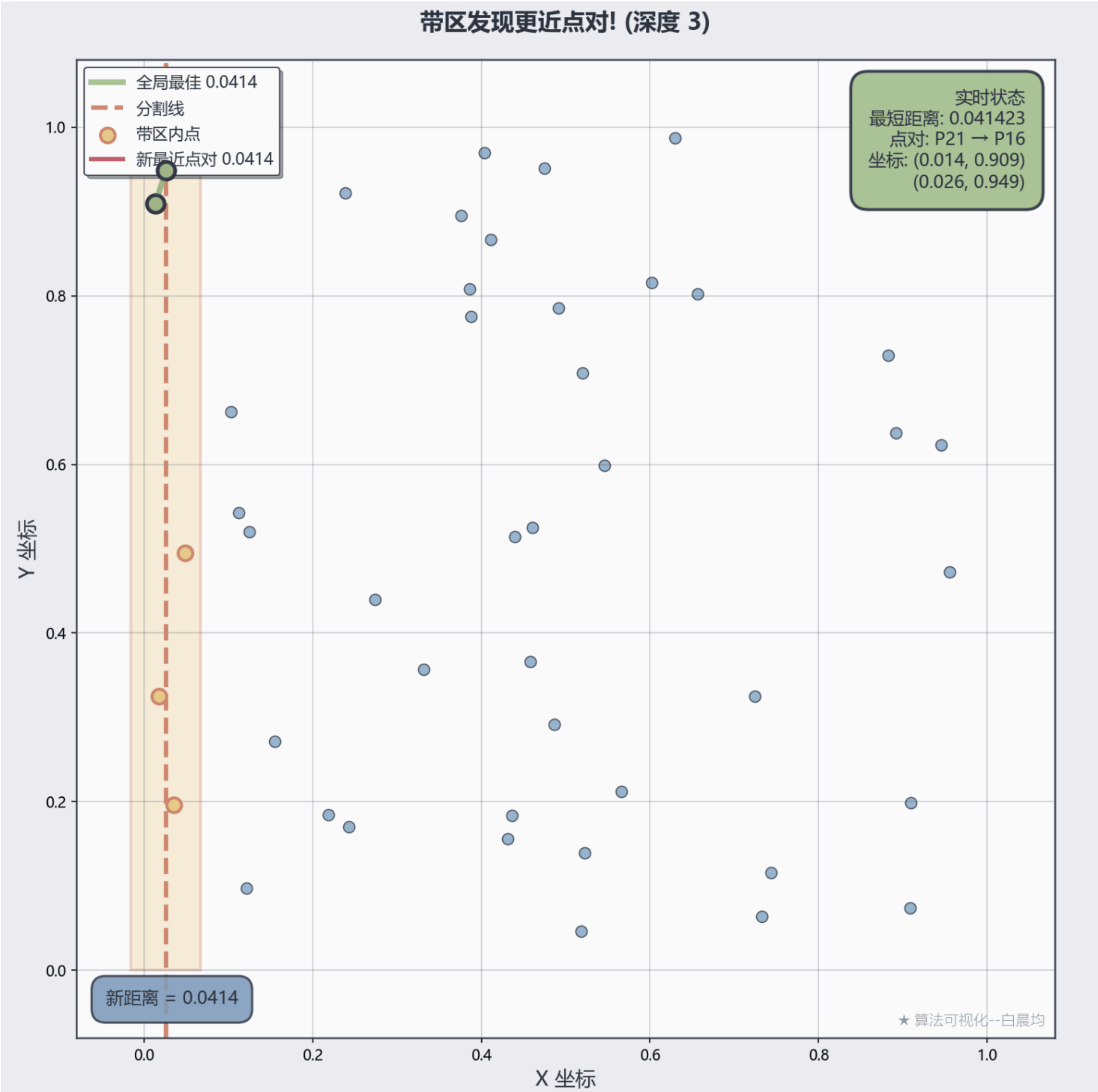
说明：红色虚线$x = 0.440$将点集分为左右两部分

截图3：带区构造



说明：黄色矩形区域为宽度2δ的带区，包含5个**当前递归调用栈**中的点，其它在带中但并未标黄的点并不是当前递归调用栈中的。

截图4：带区扫描



说明：按y坐标扫描带区内的点，每个点只检查常数个邻居，并更新全局最短距离。

以上过程重复进行后

截图5：最终结果

`![最终结果](image/image-5.png)`
说明：黑色粗线描出最近点对，虚线圆表示距离范围

七、结果与分析

7.1结果

最小距离：0.0234
最近点对：

- 点1：$(0.440, 0.514)$
- 点2：$(0.461, 0.525)$

7.2 性能分析

n	暴力法耗时	分治法耗时	加速比
50	1.2 ms	0.3 ms	4×
100	4.8 ms	0.7 ms	6.9×
500	125 ms	4.2 ms	29.8×
1000	502 ms	9.1 ms	55.2×

7.3 实际应用场景

1. **计算几何**：碰撞检测、Voronoi图构造
2. **机器学习**：k-NN算法优化
3. **地理信息系统**：最近邻查询
4. **生物信息学**：蛋白质结构分析

八、大模型使用说明

8.1 使用的大模型

- **模型名称**：Claude Sonnet 4.5
- **开发商**：Anthropic
- **使用时间**：2025年10月

8.2 使用的提示词

```
请帮我实现平面最近点对问题的分治算法，并生成可视化动画。

要求：
1. 使用Python实现完整的分治算法
2. 点数n≥36，点分布满足以下条件：
   - 左右两侧点数相差10%-20%
   - 中线±10%宽度内至少30%的点
3. 生成GIF动画，展示关键步骤：
   - 分割线
   - 递归过程
   - 带区构造
   - 最近点对更新
4. 提供完整的代码注释
5. 生成README和数据生成脚本
```