第四章 不确定性推理

4.1 概述
4.2 可信度方法
4.3 证据理论
4.4 模糊推理方法

4.1、概述

在现实生活中遇到的问题通常都具有不确定性，能够进行精确描述的问题只占较少的一部分。对于这些不确定性的问题，若采用前面所讨论的精确性推理方法显然是无法解决的。因此，为了满足现实世界问题求解的需求，人工智能需要研究不精确性的推理方法。可以将知识分为确定性知识和不确定性知识，不确定性是智能问题的一个本质特征，是建立在不确定性知识和证据的基础上的推理。而知识的不确定性主要体现在两个方面：随机性和模糊性。

为什么要采用不确定性推理

采用不确定性推理是客观问题的需求，其原因主要包括以下几个问题：

1）所需知识不完备、不精确
2）所需知识描述模糊
3）多种原因导致同一结论
4）问题的背景知识不足
5）方案不唯一

总之，在人类的知识和思维行动中，确定性只是相对的，而不确定性才是绝对的。人工智能要解决这些不确定性问题，必须采用不确定性的知识表示和推理方法。

不确定性推理要解决的问题

可将不确定性推理要解决的问题概括为以下5类。

1) 如何进行知识和证据表示的问题

不确定性表示要解决的问题包括知识的不确定性表示和证据的不确定性表示。不确定性推理中，知识是否能够很好地被表示直接影响推理的运行效率。一般地，用数值刻画知识的不确定性，该数值称为知识的静态强度或者知识可信度。证据通常包括两部分，其一是求解问题时已有的初始证据；其二是将求解问题得到的中间结果放入综合数据库，作为后续推理的证据。

2) 如何进行匹配问题

3) 如何进行证据组合的问题

4) 不确定性的遗传问题

5) 如何合成结论的问题

什么是不确定性推理

- 什么是不确定性推理呢？
  - 不确定性推理从不确定的初始证据出发，通过运用不确定性知识，根据某种策略实现证据和知识的不精确匹配和计算，最终得到具有一定合理性但不绝对成立的结论。
- 从定义上来看，不确定性推理与确定性推理有基本一致的结构，都依赖于事实证据、推理知识，都需要某种推理策略进行推理，最后得到结论。不同点在于过程中的每个环节都是不确定的，这些不确定包括：
  - （1）不确定性有哪些？如何度量？
  - （2）如何进行不精确的推理？
  - （3）如何从不精确的推理中得到合理的结论？

4.2 可信度方法

- 1975年肖特里菲（E. H. Shortliffe）等人在确定性理论（theory of confirmation）的基础上，结合概率论等提出的一种不确定性推理方法。
- 优点：直观、简单，且效果好。

4.2 可信度方法

- 可信度：根据经验对一个事物或现象为真的相信程度。
- 可信度带有较大的主观性和经验性，其准确性难以把握。
- C－F模型：基于可信度表示的不确定性推理的基本方法。

4.2 可信度方法

1. 知识不确定性的表示

- **产生式规则表示:**

$$\text{IF} \quad E \quad \text{THEN} \quad H \quad (CF(H,E))$$

$CF(H,E)$：可信度因子（certainty factor），反映前提条件与结论的联系强度。

IF 头痛 AND 流涕 THEN 感冒 （0.7）

4.2 可信度方法

1. 知识不确定性的表示

- *CF*（*H*，*E*）的取值范围: [-1,1]。
- 若由于相应证据的出现增加结论 *H* 为真的可信度，则 *CF*（*H*，*E*）> 0，证据的出现越是支持 *H* 为真，就使*CF*（*H*，*E*) 的值越大。
- 反之，*CF*（*H*，*E*）< 0，证据的出现越是支持 *H* 为假，*CF*（*H*，*E*）的值就越小。
- 若证据的出现与否与 *H* 无关，则 *CF*（*H*，*E*）= 0。

4.2 可信度方法

2. 证据不确定性的表示

$CF(E)=0.6$： E的可信度为0.6

- 证据E的可信度取值范围：**[-1，1]** 。
- 对于初始证据，若所有观察S能肯定它为真，则$CF(E)=1$。
- 若肯定它为假，则 $CF(E)=-1$。
- 若以某种程度为真，则 $0<CF(E)<1$。
- 若以某种程度为假，则 $-1<CF(E<0$ 。
- 若未获得任何相关的观察，则 $CF(E)=0$。

4.2 可信度方法

2. 证据不确定性的表示

- **静态强度***CF*（*H*，*E*）：知识的强度，即当 *E* 所对应的证据为真时对 *H* 的影响程度。
- **动态强度** *CF*（*E*）：证据 *E* 当前的不确定性程度。

4.2 可信度方法

3. 组合证据不确定性的算法

- 组合证据：多个单一证据的合取

$$E=E_1 \quad \text{AND} \quad E_2 \quad \text{AND} \quad \cdots \quad \text{AND} \quad E_n$$

则 $CF(E)=\min\{CF(E_1), CF(E_2), \ldots, CF(E_n)\}$

- 组合证据：多个单一证据的析取

$$E=E_1 \quad \text{OR} \quad E_2 \quad \text{OR} \quad \cdots \quad \text{OR} \quad E_n$$

则 $CF(E)=\max\{CF(E_1), CF(E_2), \quad , CF(E_n)\}$

4. 不确定性的传递算法

- C－F模型中的不确定性推理：从不确定的初始证据出发，通过运用相关的不确定性知识，最终推出结论并求出结论的可信度值。结论 H 的可信度由下式计算：

$$CF(H) = CF(H,E) \times \max\{0, CF(E)\}$$

当 $CF(E) < 0$时， 则 $CF(H) = 0$

当 $CF(E)=1$时， 则 $CF(H) = CF(H,E)$

5. 结论不确定性的合成算法

- 设知识：

$$\text{IF} \quad E_1 \quad \text{THEN} \quad H \qquad (CF(H, E_1))$$

$$\text{IF} \quad E_2 \quad \text{THEN} \quad H \qquad (CF(H, E_2))$$

（1）分别对每一条知识求出*CF*（*H*）：

$$CF_1(H) = CF(H, E_1) \times \max\{0, CF(E_1)\}$$

$$CF_2(H) = CF(H, E_2) \times \max\{0, CF(E_2)\}$$

5. 结论不确定性的合成算法

（2）求出E_1与E_2对H的综合影响所形成的可信度 $CF_{1,2}(H)$：

$$CF_{1,2}(H)=\begin{cases} CF_1(H)+CF_2(H)-CF_1(H)CF_2(H) & \text{若} CF_1(H)\geq 0,\quad CF_2(H)\geq 0 \\ CF_1(H)+CF_2(H)+CF_1(H)CF_2(H) & \text{若} CF_1(H)<0,\quad CF_2(H)<0 \\ \dfrac{CF_1(H)+CF_2(H)}{1-\min\{|CF_1(H)|,|CF_2(H)|\}} & \text{若} CF_1(H)\text{与}\quad CF_2(H)\text{异号} \end{cases}$$

4.2 可信度方法

例4.1 设有如下一组知识：

r_1: $IF \quad E_1 \quad THEN \quad H \quad (0.8)$

r_2: $IF \quad E_2 \quad THEN \quad H \quad (0.6)$

r_3: $IF \quad E_3 \quad THEN \quad H \quad (-0.5)$

r_4: $IF \quad E_4 \quad AND \quad (E_5 \quad OR \quad E_6) \quad THEN \quad E_1 \quad (0.7)$

r_5: $IF \quad E_7 \quad AND \quad E_8 \quad THEN \quad E_3 \quad (0.9)$

已知：$CF(E_2)=0.8,\ CF(E_4)=0.5, CF(E_5)=0.6,\ CF(E_6)=0.7,$

$CF(E_7)=0.6,\ CF(E_8)=0.9.$

求：$CF(H)$

解：

第一步：对每一条规则求出*CF*（*H*）。

r_4 :

$$
\begin{aligned}
CF(E_1) &= 0.7 \times \max\{0, CF[E_4 \quad AND \quad (E_5 \quad OR \quad E_6)]\} \\
&= 0.7 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), CF(E_5 \quad OR \quad E_6)\}\} \\
&= 0.7 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), \max\{CF(E_5), CF(E_6)\}\}\} \\
&= 0.7 \times \max\{0, \min\{0.5, \max\{0.6, 0.7\}\}\} \\
&= 0.7 \times \max\{0, 0.5\} \\
&= 0.35
\end{aligned}
$$

4.2 可信度方法

解：

第一步：对每一条规则求出*CF*（*H*）。

r_5：

$$
\begin{aligned}
CF(E_3) &= 0.9 \times \max\{0, CF(E_7 \quad AND \quad E_8)\} \\
&= 0.9 \times \max\{0, \min\{CF(E_7), CF(E_8)\}\} \\
&= 0.9 \times \max\{0, \min\{0.6, 0.9\}\} \\
&= 0.9 \times \max\{0, 0.6\} \\
&= 0.54
\end{aligned}
$$

r_1：

$$
\begin{aligned}
CF_1(H) &= 0.8 \times \max\{0, CF(E_1)\} \\
&= 0.8 \times \max\{0, 0.35\} \\
&= 0.28
\end{aligned}
$$

4.2 可信度方法

解:

第一步：对每一条规则求出*CF*（*H*）。

r_2：

$$CF_2(H) = 0.6 \times \max\{0, CF(E_2)\}$$
$$= 0.6 \times \max\{0, 0.8\}$$
$$= 0.48$$

r_3：

$$CF_3(H) = -0.5 \times \max\{0, CF(E_3)\}$$
$$= -0.5 \times \max\{0, 0.54\}$$
$$= -0.27$$

4.2 可信度方法

第二步：根据结论不确定性的合成算法得到：

$$CF_{1,2}(H) = CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H) \times CF_2(H)$$

$$=0.28+0.48-0.28\times0.4 \quad =0.6$$

$$CF_{1,2,3}(H) = \frac{CF_{1,2}(H) + CF_3(H)}{1 - \min\{|CF_{1,2}(H)|, |CF_3(H)|\}}$$

$$= \frac{0.63 - 0.27}{1 - \min\{0.63, 0.27\}} = \frac{0.36}{0.73} = 0.49$$

综合可信度：$CF(H) = 0.49$

练习题:

设有如下一组推理规则:

r1: IF E1 THEN E2 (0.6)

r2: IF E2 AND E3 THEN E4 (0.8)

r3: IF E4 THEN H (0.7)

r4: IF E5 THEN H (0.9)

且已知CF（E1）=0.5, CF（E3）=0.6, CF（E5）=0.4,结论H的初始可信度一无所知。求CF（H）为多少？

$$CF(E_2) = 0.6\times\max\{0, CF(E_1)\} = 0.6\times\max\{0, 0.5\} = 0.3$$

$$CF(E_4) = 0.8\times\max\{0, CF(E_2 \quad \text{AND} \quad E_3)\}$$

$$= 0.8\times\max\{0, \min\{CF(E_2), CF(E_3)\}\} = 0.24$$

$$CF_3(H) = 0.7\times\max\{0, CF(E_4)\} = 0.168$$

$$CF_4(H) = 0.9\times\max\{0, CF(E_5)\} = 0.36$$

又因为 $CF_3(H)>0, CF_4(H)>0$，故

$$CF(H) = CF_3(H)+CF_4(H)-CF_3(H)CF_4(H) = 0.47$$

4.3 证据理论

- 证据理论(theory of evidence)：又称D－S理论，是德普斯特（A. P. Dempster）首先提出，沙佛（G. Shafer）进一步发展起来的一种处理不确定性的理论。
- 1981年巴纳特（J. A. Barnett）把该理论引入专家系统中，同年卡威（J. Garvey）等人用它实现了不确定性推理。
- 目前，在证据理论的基础上已经发展了多种不确定性推理模型。

4.3 证据理论

- **4.3.1** 概率分配函数
- **4.3.2** 信任函数
- **4.3.3** 似然函数
- **4.3.4** 概率分配函数的正交和（证据的组合）
- **4.3.5** 基于证据理论的不确定性推理

4.3.1 概率分配函数

- 设 D 是变量 x 所有可能取值的集合，且 D 中的元素是互斥的，在任一时刻 x 都取且只能取 D 中的某一个元素为值，则称 D 为 x 的样本空间。

- 在证据理论中，D 的任何一个子集 A 都对应于一个关于 x 的命题，称该命题为“ x 的值是在 A 中”。

- 设 x：所看到的颜色，D={红，黄，蓝}，

则 A={红}：“ x 是红色”；

A={红，蓝}：“x 或者是红色，或者是蓝色”。

4.3.1 概率分配函数

- 设D为样本空间，领域内的命题都用D的子集表示，则**概率分配函数**（**basic probability assignment function**）定义如下：

定义4.1 设函数 M: $2^D \to [0,1]$，（对任何一个属于D的子集A，命它对应一个数$M \in [0，1]$） 且满足

$$M(\Phi) = 0$$

$$\sum_{A \subseteq D} M(A) = 1$$

则 M: 2^D 上的基本概率分配函数，M（A）: A的基本概率数。

4.3.1 概率分配函数

几点说明：

（1）设样本空间D中有n个元素，则D中子集的个数为2^n个。

- 设 D={红，黄，蓝}

2^D：

- 设 D={红，黄，蓝}

则其子集个数 $2^3=8$，具体为：

A={红}，　A={黄}，　A={蓝}，　A={红，黄}，

A={红，蓝}，　A={黄，蓝}，　A={红，黄，蓝}，　A={ Φ }

上的一

$A \subset D$

- 例如，设 A={红}，　M（A）=0.3：命题“x是红色”的信任度是0.3。

（2）概率分配函数：把D的任意一个子集A都映射为[0，1]上的一个数M（A）。

4.3.2 信任函数

定义4.2 命题的信任函数（**belief function**）Bel：

$$2^D \to [0,1] \text{ 且 } \quad Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} M(B) \qquad \forall A \subseteq D$$

$Bel(A)$：对命题A为真的总的信任程度。

- 设 D={红，黄，蓝}

M（{红}）=0.3， M（{黄}）=0，M（{红，黄}）=0.2，

$$Bel(\{红,黄\}) = M(\{红\}) + M(\{黄\}) + M(\{红,黄\})$$
$$= 0.3 + 0.2 = 0.5$$

- 由

B

Be $\sum_{B \subseteq D}$

信任函数及概率分配函数的定义推出：

$$Bel(\Phi) = M(\Phi) = 0 \qquad Bel(D) = \sum_{B \subseteq D} M(B) = 1$$

4.3.3 似然函数

- 似然函数（plansibility function）：不可驳斥函数或上限函数。

定义4.3 似然函数 $Pl: 2^D \to [0,1]$ 且

$$Pl(A) = 1 - Bel(\neg A) \quad 对所有的\ A \subseteq D$$

- **设 D ={红，黄，蓝}**

M（{红}）=0.3，M（{黄}）=0，M（{红，黄}）=0.2，

$$Bel(\{红,黄\}) = M(\{红\}) + M(\{黄\}) + M(\{红,黄\})$$
$$= 0.3 + 0.2 = 0.5$$

$$Pl(\{蓝\}) = 1 - Bel(\neg\{蓝\}) = 1 - Bel(\{红，黄\}) = 1 - 0.5 = 0.5$$

4.3.4 概率分配函数的正交和（证据的组合）

定义4.4 设 M_1 和 M_2 是两个概率分配函数；则其正交和 $M=M_1 \oplus M_2$ ： $M(\Phi)=0$

$$M(A)=K^{-1}\sum_{x\cap y=A} M_1(x)M_2(y)$$

其中： $K=1-\sum_{x\cap y=\Phi} M_1(x)M_2(y)=\sum_{x\cap y\neq\Phi} M_1(x)M_2(y)$

如果 $K\neq 0$，则正交和 M 也是一个概率分配函数；

如果 $K=0$，则不存在正交和 M，即没有可能存在概率函数，称 M_1 与 M_2 矛盾。

4.3.4 概率分配函数的正交和

- **例4.2 设 D={黑，白}，且设**

$$M_1(\{黑\},\{白\},\{黑,白\},\Phi)=(0.3,0.5,0.2,0)$$

$$M_2(\{黑\},\{白\},\{黑,白\},\Phi)=(0.6,0.3,0.1,0)$$

求M1与M2的正交和。

则：

$$K=1-\sum_{x\cap y=\Phi}M_1(x)M_2(y)$$

$$=1-[M_1(\{黑\})M_2(\{白\})+M_1(\{白\})M_2(\{黑\})]$$

$$=1-[0.3\times0.3+0.5\times0.6]\quad=0.61$$

$$M(\{黑\})=K^{-1}\sum_{x\cap y=\{黑\}}M_1(x)M_2(y)$$

$$=\frac{1}{0.61}[M_1(\{黑\})M_2(\{黑\})+M_1(\{黑\})M_2(\{黑,白\})+$$

$$M_1(\{黑,白\})M(\{黑\})]$$

$$=\frac{1}{0.61}[0.3\times0.6+0.3\times0.1+0.2\times0.6]\quad=0.54$$

4.3.4 概率分配函数的正交和

- 同理可得： $M(\{白\}) = 0.43$

  $M(\{黑,白\}) = 0.03$

- 组合后得到的概率分配函数：

  $M(\{黑\}), \{白\}, \{黑,白\}, \Phi) = (0.54, 0.43, 0.03, 0)$

4.3.5 基于证据理论的不确定性推理

- 基于证据理论的不确定性推理的步骤：

（1）建立问题的样本空间D。

（2）由经验给出，或者由随机性规则和事实的信度度量算基本概率分配函数。

（3）计算所关心的子集的信任函数值、似然函数值。

（4）由信任函数值、似然函数值得出结论。

4.3.5 基于证据理论的不确定性推理

例4.3 设有规则：

（1）如果 流鼻涕 则 感冒但非过敏性鼻炎（0.9）

或 过敏性鼻炎但非感冒（0.1）。

（2）如果 眼发炎 则 感冒但非过敏性鼻炎（0.8）

或 过敏性鼻炎但非感冒（0.05）。

有事实：

（1）小王流鼻涕（0.9）。

（2）小王发眼炎（0.4）。

问：小王患的什么病？

4.3.5 基于证据理论的不确定性推理

取样本空间：$D=\{h_1, h_2, h_3\}$

h_1 表示“感冒但非过敏性鼻炎”，

h_2 表示“过敏性鼻炎但非感冒”，

h_3 表示“同时得了两种病”。

取下面的基本概率分配函数：

$$M_1(\{h_1\})=0.9\times 0.9=0.81$$

$$M_1(\{h_2\})=0.9\times 0.1=0.09$$

$$M_1(\{h_1,h_2,h_3\})=1-M_1(\{h_1\})-M_1(\{h_2\})=1-0.81-0.09=0.1$$

$$M_2(\{h_1\})=0.4\times 0.8=0.32$$

$$M_2(\{h_2\})=0.4\times 0.05=0.02$$

$$M_2(\{h_1,h_2,h_3\})=1-M_2(\{h_1\})-M_2(\{h_2\})=1-0.32-0.02=0.66$$

将两个概率分配函数组合：

$$K = 1/\{1-[M_1(\{h_1\})M_2(\{h_2\}) + M_1(\{h_2\})M_2(\{h_1\})]\}$$
$$= 1/\{1-[0.81\times 0.02 + 0.09\times 0.32]\}$$
$$= 1/\{1-0.045\} = 1/0.955 = 1.05$$

$$M(\{h_1\}) = K[M_1(\{h_1\})M_2(\{h_1\}) + M_1(\{h_1\})M_2(\{h_1, h_2, h_3\}$$
$$+ M_1(\{h_1, h_2, h_3\})M_2(\{h_1\})]$$
$$= 1.05\times 0.8258 = 0.87$$

$$M(\{h_2\}) = K[M_1(\{h_2\})M_2(\{h_2\}) + M_1(\{h_2\})M_2(\{h_1, h_2, h_3\}$$
$$+ M_1(\{h_1, h_2, h_3\})M_2(\{h_2\})]$$
$$= 1.05\times 0.0632 = 0.066$$

$$M(\{h_1, h_2, h_3\}) = 1 - M(\{h_1\}) - M(\{h_2\}) = 1 - 0.87 - 0.066 = 0.064$$

信任函数：

$$Bel(\{h_1\}) = M(\{h_1\}) = 0.87$$

$$Bel(\{h_2\}) = M(\{h_2\}) = 0.066$$

似然函数：

$$Pl(\{h_1\}) = 1 - Bel(\neg\{h_1\}) = 1 - Bel(\{h_2, h_3\})$$
$$= 1 - [M(\{h_2\} + M(\{h_3\}) = 1 - [0.066 + 0] = 0.934$$

$$Pl(\{h_2\}) = 1 - Bel(\neg\{h_2\}) = 1 - Bel(\{h_1, h_3\})$$
$$= 1 - [M(\{h_1\} + M(\{h_3\}) = 1 - [0.87 + 0] = 0.13$$

结论：小王可能是感冒了。

练习：

4.4　设样本空间 $D=\{a,b,c,d\}$，M_1、M_2 为定义在 2^D 上的概率分布函数：

M_1：$M_1(\{b,c,d\})=0.7$，$M_1(\{a,b,c,d\})=0.3$，M_1 的其余基本概率数均为 0；

M_2：$M_2(\{a,b\})=0.6$，$M_2(\{a,b,c,d\})=0.4$，M_2 的其余基本概率数均为 0。

求它们的正交和 $M=M_1\oplus M_2$。

4.4 因为 $K=\sum_{X\cap Y\neq\varnothing}M_1(X)M_2(Y)$

$$=M_1(\{b,c,d\})M_2(\{a,b\})+M_1(\{b,c,d\})M_2(\{a,b,c,d\})$$

$$+M_1(\{a,b,c,d\})M_2(\{a,b\})+M_1(\{a,b,c,d\})M_2(\{a,b,c,d\})$$

$$=0.7\times0.6+0.7\times0.4+0.3\times0.6+0.3\times0.4=1$$

所以 $M(A)=K^{-1}\times\sum_{X\cap Y=A}M_1(X)M_2(Y)=\sum_{X\cap Y=A}M_1(X)M_2(Y)$

所以 $M(b)=M_1(\{b,c,d\})\times M_2(\{a,b\})=0.7\times0.6=0.42$

$$M(b,c,d)=M_1(\{b,c,d\})\times M_2(\{a,b,c,d\})=0.7\times0.4=0.28$$

$$M(a,b)=M_1(\{a,b,c,d\})\times M_2(\{a,b\})=0.3\times0.6=0.18$$

$$M(a,b,c,d)=M_1(\{a,b,c,d\})\times M_2(\{a,b,c,d\})=0.3\times0.4=0.12$$

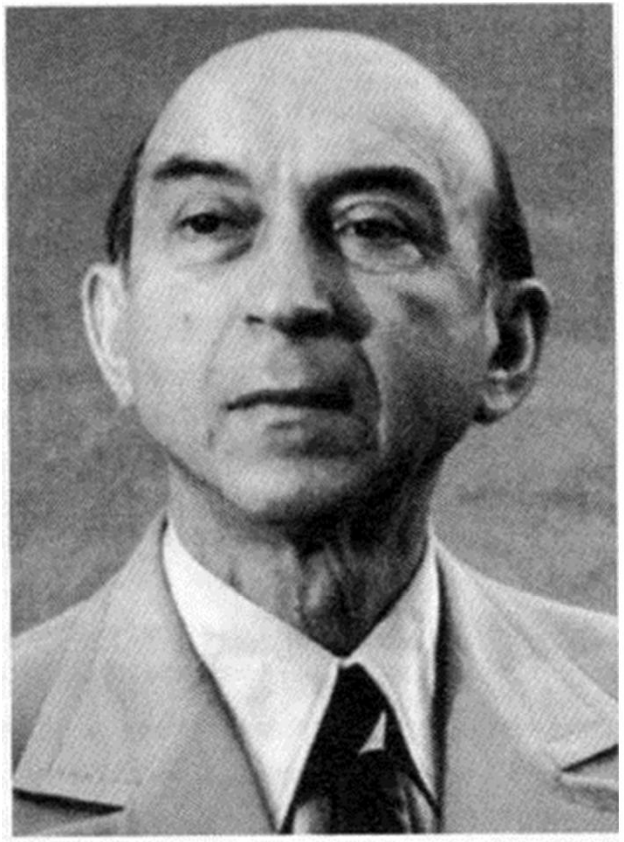
M 的其余基本概率分配函数为 0。

4.4模糊推理方法

- 4.4.1 模糊逻辑的提出与发展
- 4.4.2 模糊集合
- 4.4.3 模糊集合的运算
- 4.4.4 模糊关系与模糊关系的合成
- 4.4.5 模糊推理
- 4.4.6 模糊决策

4.4.1 模糊逻辑的提出与发展

- 1965年，美国L. A. Zadeh发表了“fuzzy set”的论文，首先提出了模糊理论。



Lotfi A. Zadeh

4.4.1 模糊逻辑的提出与发展

- 2008年10月，Zadeh在北京现代智能国际会议上做报告。

4.4.1 模糊逻辑的提出与发展

- 从1965年到20世纪80年代，在美国、欧洲、中国和日本，只有少数科学家研究模糊理论。
- 1974年，英国Mamdani首次将模糊理论应用于热电厂的蒸汽机控制。
- 1976年，Mamdani又将模糊理论应用于水泥旋转炉的控制。

4.4.1 模糊逻辑的提出与发展

- 1983年日本Fuji Electric公司实现了饮水处理装置的模糊控制。
- 1987年日本Hitachi公司研制出地铁的模糊控制系统。
- 1987年－1990年在日本申报的模糊产品专利就达319种。
- 目前，各种模糊产品充满日本、西欧和美国市场，如模糊洗衣机、模糊吸尘器、模糊电冰箱和模糊摄像机等。

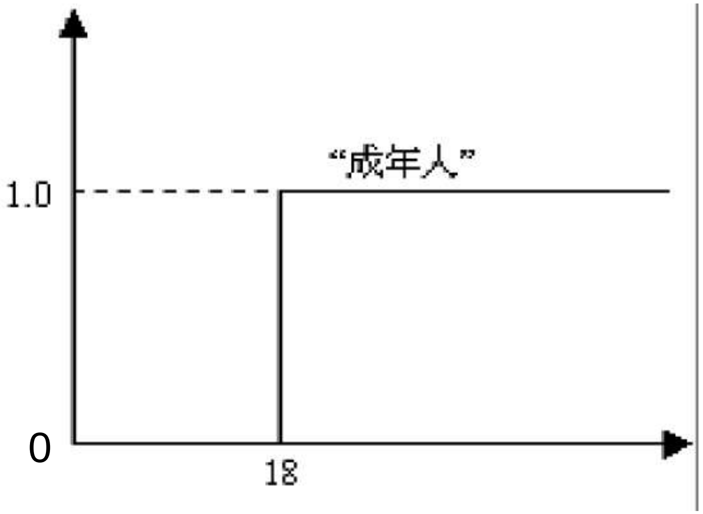
1. 模糊集合的定义

- 论域：所讨论的全体对象，用 U 等表示。
- 元素：论域中的每个对象，常用a,b,c,x,y,z表示。
- 集合：论域中具有某种相同属性的确定的、可以彼此区别的元素的全体，常用A，B等表示。
- 元素a和集合A的关系：a属于A或a不属于A，即只有两个真值“真”和“假”。
- 模糊逻辑给集合中每一个元素赋予一个介于0和1之间的实数，描述其属于一个集合的强度，该实数称为元素属于一个集合的隶属度。集合中所有元素的隶属度全体构成集合的隶属函数。

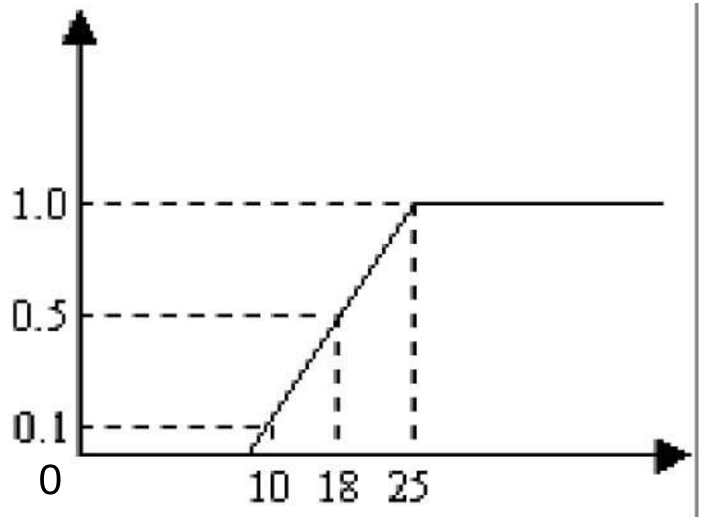
讨论：什么是模糊性？请举出几个日常生活中的模糊概念。

1. 模糊集合的定义

- 例如，“成年人”集合 $\mu_{成年人}(x)=\begin{cases}1 & x\geq 18\\ 0 & x<18\end{cases}$



“成年人”特征函数图



“成年人”隶属度函数图

2．模糊集合的表示方法

- 当论域中元素数目有限时，模糊集合 A的数学描述为

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

$\mu_A(x)$：元素 x 属于模糊集 A 的隶属度，X 是元素 x 的论域。

2．模糊集合的表示方法

（1）Zadeh表示法

（1）论域是离散且元素数目有限：

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

或

$$A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \ldots, \mu_A(x_n)/x_n\}$$

（2）论域是连续的，或者元素数目无限：

$$A = \int_{x \in U} \mu_A(x)/x$$

4.4.2 模糊集合

2．模糊集合的表示方法

（2）序偶表示法

$$A=\{(\mu_A(x_1),x_1),(\mu_A(x_2),x_2),\quad,(\mu_A(x_n),x_n)\}$$

（3）向量表示法

$$A=\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2),\quad,\mu_A(x_n)\}$$

3. 隶属函数

- 常见的隶属函数有正态分布、三角分布、梯形分布等。
- **隶属函数确定方法:**

（1）模糊统计法

（2）专家经验法

（3）二元对比排序法

（4）基本概念扩充法

4.4.2 模糊集合

3．隶属函数

- 例如：以年龄作论域，取 $U=[0,200]$，扎德给出了“年老”O 与“年青”Y 两个模糊集合的隶属函数为

$$\mu_O(u)=\begin{cases}0 & 0\le u\le 50\\ \left[1+\left(\dfrac{5}{u-50}\right)^2\right]^{-1} & 50<u\le 200\end{cases}\qquad \mu_Y(u)=\begin{cases}1 & 0\le u\le 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 25<u\le 200\end{cases}$$

- 采用Zadeh表示法：

$$O=\int_{50<\mu\le 200}\left[1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\Big/u \qquad Y=\int_{0<\mu\le 25}1/u+\int_{25<\mu\le 200}\left[1+\left(\frac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}\Big/u$$

4.4.3 模糊集合的运算

（1）模糊集合的包含关系

- 若 $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$，则 $A \supseteq B$

（2）模糊集合的相等关系

- 若 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$，则 $A = B$

（3）模糊集合的交并补运算

①交运算(intersection)$A \cap B$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

4.4.3 模糊集合的运算

② **并运算(union)** $A \cup B$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

③ **补运算(complement)** $\overline{A}$ **或者** A^C

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

例4.4 设论域 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，$A$及$B$是论域上的两个模糊集合，已知：

$$A = 0.3/x_1 + 0.5/x_2 + 0.7/x_3 + 0.4/x_4$$

$$B = 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.8/x_3$$

求 $\overline{A}$、$\overline{B}$、 $A \cap B$ 、 $A \cup B$

解：

$$\overline{A} = 0.7/x_1 + 0.5/x_2 + 0.3/x_3 + 0.6/x_4$$

$$\overline{B} = 0.5/x_1 + 0.2/x_3 + 1/x_4$$

$$A \cap B = \frac{0.3 \wedge 0.5}{x_1} + \frac{0.5 \wedge 1}{x_2} + \frac{0.7 \wedge 0.8}{x_3} + \frac{0.4 \wedge 0}{x_4}$$

$$= 0.3/x_1 + 0.5/x_2 + 0.7/x_3$$

$$A \cup B = \frac{0.3 \vee 0.5}{x_1} + \frac{0.5 \vee 1}{x_2} + \frac{0.7 \vee 0.8}{x_3} + \frac{0.4 \vee 0}{x_4}$$

$$= 0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.8/x_3 + 0.4/x_4$$

（4）模糊集合的代数运算

① **代数积：** $\mu_{AB}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x)$

② **代数和：** $\mu_{A+B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_{AB}(x)$

③ **有界和：**

$$\mu_{A\oplus B}(x)=\min\{1,\mu_A(x)+\mu_B(x)\}=1\wedge[\mu_A(x)+\mu_B(x)]$$

④ **有界积：**

$$\mu_{A\otimes B}(x)=\max\{0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1\}=0\vee[\mu_A(x)+\mu_B(x)-1]$$

4.4.3 模糊集合的运算

- **例4.5** 设论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，***A* 及 *B* 是论域上的两个模糊集合，已知：**

$$A=0.2/x_1+0.4/x_2+0.9/x_3+0.5/x_5$$

$$B=0.1/x_1+0.7/x_3+1.0/x_4+0.3/x_5$$

求$A\cdot B$、$A+B$、$A\oplus B$、$A\otimes B$。

解：

$$A\cdot B=0.02/x_1+0.63/x_3+0.15/x_5$$

$$A+B=0.28/x_1+0.4/x_2+0.97/x_3+1.0/x_4+0.65/x_5$$

$$A\oplus B=0.3/x_1+0.4/x_2+1.0/x_3+1.0/x_4+0.8/x_5$$

$$A\otimes B=0.6/x_3$$

4.4.4 模糊关系与模糊关系的合成

1. 模糊关系

- 例4.6 某地区人的身高论域*X*={140,150,160,170,180}（单位：cm），体重论域 *Y*={40,50,60,70,80}。

身高与体重的模糊关系表

X R Y	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

- 从*X*到*Y*的一个模糊关系*R*，用模糊矩阵表示：

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 模糊关系

- 模糊关系的定义：
- **A、B**：模糊集合，模糊关系用叉积**(cartesian product)**表示：

$$R : A \times B \to [0,1]$$

- 叉积常用最小算子运算：

$$\mu_{A\times B}(a,b) = \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}$$

- **A、B**：离散模糊集，其隶属函数分别为：

$$\mu_A = [\mu_A(a_1), \mu_A(a_2), \quad, \mu_A(a_n)], \quad \mu_B = [\mu_B(b_1), \mu_B(b_2), \quad, \mu_B(b_n)]$$

则其叉积运算： $\mu_{A\times B}(a,b) = \mu_A^T \circ \mu_B$

1. 模糊关系

- **例4.7 已知输入的模糊集合*A*和输出的模糊集合*B*：**

$$A = 1.0/a_1 + 0.8/a_2 + 0.5/a_3 + 0.2/a_4 + 0.0/a_5$$

$$B = 0.7/b_1 + 1.0/b_2 + 0.6/b_3 + 0.0/b_4$$

- **求*A*到*B*的模糊关系*R*。**
- **解：**

$$R = A' B = \mu_A^{\mathrm{T}} \circ \mu_B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.8 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.0 \end{bmatrix} \circ [0.7 \quad 1.0 \quad 0.6 \quad 0.0]$$

4.4.4 模糊关系与模糊关系的合成

1. 模糊关系

$$R=\begin{bmatrix} 1.0\wedge 0.7 & 1.0\wedge 1.0 & 1.0\wedge 0.6 & 1.0\wedge 0.0 \\ 0.8\wedge 0.7 & 0.8\wedge 1.0 & 0.8\wedge 0.6 & 0.8\wedge 0.0 \\ 0.5\wedge 0.7 & 0.5\wedge 1.0 & 0.5\wedge 0.6 & 0.5\wedge 0.0 \\ 0.2\wedge 0.7 & 0.2\wedge 1.0 & 0.2\wedge 0.6 & 0.2\wedge 0.0 \\ 0.0\wedge 0.7 & 0.0\wedge 1.0 & 0.0\wedge 0.6 & 0.0\wedge 0.0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

4.4.4 模糊关系与模糊关系的合成

2. 模糊关系的合成

- 例8 设模糊集合 $X=\{x_1,x_2x_3,x_4\}, Y=\{y_1,y_2,y_3\}, Z=\{z_1,z_2\}$

$Q\in X\times Y, R\in Y\times Z, S\in X\times Z$, 求$S$。

$$Q=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \qquad R=\begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

2. 模糊关系的合成

- **解：**

$$S = Q \circ R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0.5 \wedge 0.2) \vee (0.6 \wedge 0.8) \vee (0.3 \wedge 0.5) & (0.5 \wedge 1) \vee (0.6 \wedge 0.4) \vee (0.3 \wedge 0.3) \\ (0.7 \wedge 0.2) \vee (0.4 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.5) & (0.7 \wedge 1) \vee (0.4 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.3) \\ (0 \wedge 0.2) \vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (0 \wedge 0.5) & (0 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.4) \vee (0 \wedge 0.3) \\ (1 \wedge 0.2) \vee (0.2 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.5) & (1 \wedge 1) \vee (0.2 \wedge 0.4) \vee (0.9 \wedge 0.3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4.5 模糊推理

1. 模糊知识表示

- 人类思维判断的基本形式：

如果 （条件） → 则 （结论）

- 例如：如果 压力较高且温度在慢慢上升 则 阀门略开

- 模糊规则：从条件论域到结论论域的模糊关系矩阵 ***R***。通过条件模糊向量与模糊关系 ***R*** 的合成进行模糊推理，得到结论的模糊向量，然后采用“清晰化”方法将模糊结论转换为精确量。

2. 对 IF *A* THEN *B* 类型的模糊规则的推理

- 若已知输入为 ***A***，则输出为 ***B***；若现在已知输入为A'，则输出 B' 用合成规则求取 $B' = A' \circ R$

  其中模糊关系***R***：$\mu_R(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

- 控制规则库的***N*** 条规则有***N*** 个模糊关系：$R_1, R_2, \quad , R_n$

对于整个系统的全部控制规则所对应的模糊关系***R***：

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots R_n = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

2. 对 IF *A* THEN *B* 类型的模糊规则的推理

- **例9 已知输入的模糊集合*A*和输出的模糊集合*B*：**

$$A = 1.0/a_1 + 0.8/a_2 + 0.5/a_3 + 0.2/a_4 + 0.0/a_5$$

$$B = 0.7/b_1 + 1.0/b_2 + 0.6/b_3 + 0.0/b_4$$

- **前面已经求得模糊关系为：**

$$R=\begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

2. 对 IF *A* THEN *B* 类型的模糊规则的推理

- 当输入： $A' = 0.4/a_1 + 0.7/a_2 + 1.0/a_3 + 0.6/a_4 + 0.0/a_5$

$$B' = A' \circ R = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.7 \\ 1.0 \\ 0.6 \\ 0.0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} = (0.7, 0.7, 0.6, 0.0)$$

则： $B' = 0.7/b_1 + 0.7/b_2 + 0.6/b_3 + 0.0/b_4$

4.4.6 模糊决策

□ “模糊决策”(“模糊判决”、“解模糊”或“清晰化”)：由模糊推理得到的结论或者操作是一个模糊向量，转化为确定值的过程。

1. 最大隶属度法

- 例如，得到模糊向量：

$$U' = 0.5/-3 + 0.5/-2 + 0.5/-1 + 0.0/0 + 0.0/1 + 0.0/2 + 0.0/3$$

取结论：

$$U = \frac{-3-2-1}{3} = -2$$

2. 加权平均判决法

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(u_i) u_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu(u_i)}$$

- 例如 $U' = 0.1/2 + 0.6/3 + 0.5/4 + 0.4/5 + 0.2/6$

则 $$U' = \frac{0.1 \times 2 + 0.6 \times 3 + 0.5 \times 4 + 0.4 \times 5 + 0.2 \times 6}{0.1 + 0.6 + 0.5 + 0.4 + 0.2} = 4$$

3. 中位数法

- 例如

$$U' = 0.1/-4 + 0.5/-3 + 0.1/-2 + 0.0/-1 + 0.1/0 + 0.2/1 + 0.4/2 + 0.5/3 + 0.1/4$$

$u^* = u_6$时，$\sum_{u_1}^{u_6} \mu(u_i) = \sum_{u_7}^{u_9} \mu(u_i) = 1$

所以中位数$u^* = u_6$，则$U = 1$

3. 中位数法

- 例如

$$U' = 0.1/-4+0.5/-3+0.3/-2+0.1/-1+0.1/0+0.4/1+0.5/2+0.1/3+0.2/4$$

用线性插值处理，即 $\Delta u = 1.2/(1.1+1.2) = 0.522$

所以 $u^* = u_5 + \Delta u = 0.522$

例4.10 设有模糊控制规则：“如果温度低，则将风门开大”。设温度和风门开度的论域为{1，2，3，4，5}。

“温度低”和“风门大”的模糊量：

“温度低”=1/1+0.6/2+0.3/3+0.0/4+0/5

“风门大”=0/1+0.0/2+0.3/3+0.6/4+1/5

已知事实“温度较低”，可以表示为“温度较低”=0.8/1+1/2+0.6/3+0.3/4+0/5

试用模糊推理确定风门开度。

□ **解：（1）确定模糊关系 *R***

$$R=\begin{bmatrix}1.0\\0.6\\0.3\\0.0\\0.0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0\\0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6\\0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{bmatrix}$$

- **解：**

（2）模糊推理

$$B' = A' \circ R = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.0 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.0 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$=(0.0，0.0，0.3，0.6，0.8)$$

（3）模糊决策 用最大隶属度法进行决策得

风门开度为**5**。

用加权平均判决法和中位数法进行决策得风门开度为**4**。

练习题

4.8 设有如下三个模糊关系

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.7\\ 0.3 & 0.2 & 0.0\\ 0.0 & 0.5 & 1.0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}0.6 & 0.6 & 0.0\\ 0.0 & 0.6 & 0.1\\ 0.0 & 0.1 & 0.0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.7\\ 0.0 & 1.0 & 0.0\\ 0.7 & 0.0 & 1.0\end{bmatrix}$$

求模糊关系的合成 $\boldsymbol{R}_1\circ\boldsymbol{R}_2$，$\boldsymbol{R}_1\circ\boldsymbol{R}_3$，$\boldsymbol{R}_1\circ\boldsymbol{R}_2\circ\boldsymbol{R}_3$。

$$\boldsymbol{R}_1 \circ \boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.0 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{R}_1 \circ \boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{R}_1 \circ \boldsymbol{R}_2 \circ \boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$$