中国传媒大学

2014—2015 学年第二学期期末考试试卷(B 卷)

考试科目：数学物理方程　　课程编码：123023

考试班级：13 电信广电工通信等　　考试方式：闭卷

题目	一	二	三	四	五	总分
得分						

得分	评卷人

一、解答题（本大题 40 分）

1、试分别写出一维波动方程、二维拉普拉斯方程和三维热传导方程的表示式。（本小题 5 分）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

2、试分别写出一维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0\le x\le l)$ 在左端点 $x=0$ 处的的三类边界条件。（本小题 5 分）

1、固定端边界条件，$u\big|_{x=0}=0$　**2**、自由端边界条件，$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$

3、弹性支承边界条件，$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\right|_{x=0}=0$

3、试写出$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},-\infty<x<\infty,t>0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$ 的达朗贝尔公式（本小题 5 分）

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

4、试写出二维拉普拉斯方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$在极坐标系下的表示式（本小题 5 分）

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

5、试分别写出n阶贝塞尔方程和n阶第一类贝塞尔函数$J_n(x)$的表示式。（本小题 5 分）

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)},n\geq 0$$

6、试写出n次勒让德多项式$P_n(x)$的表示式，并将x^2和x^3展开为勒让德多项式的级数（本小题 5 分）

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

$$x^2=\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3}P_0(x)\qquad x^3=\frac{2}{5}P_3(x)+\frac{3}{5}P_1(x)$$

7、定解问题$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \quad 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u\big|_{x=0} = B \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = C \\ u\big|_{t=0} = \cos\dfrac{\pi x}{l} \end{cases}$，$A, B, C$ 均为常数，选用函数代换$u(x,t) = V(x,t) + W(x)$将方程和边界条件都化为齐次的，求$W(x)$，写出关于$V(x,t)$的具有齐次边界条件的定解问题。（本小题 5 分）

设 $\boldsymbol{u = v(x,t) + w(x)}$

则有：$\begin{cases} a^2 w''(x) + A = 0 \\ w(0) = B \\ w'(l) = C \end{cases}$ $\qquad w(x) = -\dfrac{A}{2a^2}x^2 + c_1 x + c_2$

带入边界条件得

$$w(x) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + (C + \frac{Al}{a^2})x + B$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le l \qquad t > 0 \\ v\big|_{x=l} = 0 \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \\ v\Big|_{t=0} = \cos\dfrac{\pi x}{l} + \dfrac{A}{2a^2}x^2 - (C + \dfrac{Al}{a^2})x - B \end{cases}$$

8、求单位脉冲函数$\delta(t)$的傅里叶变换，并分别求解$\delta(t)$和单位阶跃函数$u(t)$的拉普拉斯变换。（本小题 5 分）

$$F(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$

$$L[u(t)] = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt$$

当 $Re(p)>0$ 时，$\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=(-\frac{1}{p}e^{-pt})\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}$

从而 $L[u(t)]=\frac{1}{p}$，$Re(p)>0$

$$L[\delta(t)]=L[u'(t)]=pL[u(t)]-u(0)=p\cdot\frac{1}{p}=1$$

得分	评卷人

二、试用分离变量法计算下列定解问题（本题 **15** 分）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} & 0<x<l \qquad t>0 \\ u\big|_{x=0}=0 \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0 & t>0 \\ u\big|_{t=0}=\sin\dfrac{5\pi x}{2l} \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & 0\le x\le l \end{cases}$$

解：设该定解问题的解为 $u(x,t)=X(x)T(t)$

则 $\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$

$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$

$X''(x)+\lambda X(x)=0$

由 $u\big|_{x=0}=0$，$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$ 得 $X(0)=0, X'(l)=0$

解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$$

通过讨论得:

1、$\lambda \le 0$ 时， $X(x)=0$

2、$\lambda > 0$ ， $\lambda=\beta^2$ ， $X(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$

由 $X(0)=0$ ，知 $A=0$ ， $X'(l)=0$ ，知 $B\cos(\beta l)\beta=0$ ，从而

$\beta=\frac{(2n+1)\pi}{2l}$ ， $\lambda=(\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2$， $(n=0,1,2,...)$,

特征函数 $X(x)=B\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$

将特征值 $\lambda=(\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2$ 代入 $T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$，得

$T_n(t)=C_n' cos\frac{a(2n+1)\pi}{2l}t+D_n' sin\frac{a(2n+1)\pi}{2l}t, n=0,1,2,\cdots$

设

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(C_n cos\frac{a(2n+1)\pi t}{2l}+D_n sin\frac{a(2n+1)\pi t}{2l})sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \quad n=0,1,2,\cdots$$

由于 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$，所以 $D_n=0$

代入初始条件 $\left.u\right|_{t=0}=sin\frac{5\pi x}{2l}$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}=sin\frac{5\pi x}{2l}$$

所以，$C_2=1$，$C_n=0, n\ne 2$，于是

$$u(x,t)=cos\frac{5a\pi}{2l}t\,sin\frac{5\pi}{2l}x$$

得分	评卷人

三、试用函数代换法将下列方程化为齐次方程齐次边界条件的形式（不解方程）（本大题 **15** 分）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \quad 0 < x < l \quad t > 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad u\big|_{x=l} = B \quad t > 0 \\ u\big|_{t=0} = 2x \qquad 0 \le x \le l \end{cases}$$

解：设 $\boldsymbol{u = v(x,t) + w(x)}$

则有：$\begin{cases} a^2 w''(x) + A = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(l) = B \end{cases}$ $\qquad w(x) = -\dfrac{A}{2a^2}x^2 + c_1 x + c_2$

带入边界条件得

$$w(x) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + B + \frac{Al^2}{2a^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le l \quad t > 0 \\ v\big|_{x=l} = 0 \qquad \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \\ v\Big|_{t=0} = 2x + \dfrac{A}{2a^2}x^2 - B - \dfrac{Al^2}{2a^2} \end{cases}$$

得分	评卷人

四、利用傅里叶变换求解该定解问题（本题 **15** 分）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解：记 $U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$，

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\omega x}dx，\ \hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)e^{-i\omega x}dx$$

对方程和初始条件关于 x 做傅里叶变换，得

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U(\omega,t)}{dt^2} = -a^2\omega^2U(\omega,t) \\ U(\omega,t)\big|_{t=0} = \hat{\varphi}(\omega), \qquad \dfrac{dU(\omega,t)}{dt}\Big|_{t=0} = \hat{\psi}(\omega) \end{cases}$$

方程的通解为 $U(\omega,t) = A(\omega)e^{ia\omega t} + B(\omega)e^{-ia\omega t}$

利用初始条件得 $\begin{cases} A(\omega) = \dfrac{1}{2}(\hat{\varphi}(\omega) + \dfrac{1}{a\omega i}\hat{\psi}(\omega)) \\ B(\omega) = \dfrac{1}{2}(\hat{\varphi}(\omega) - \dfrac{1}{a\omega i}\hat{\psi}(\omega)) \end{cases}$，带入得

$$U(\omega,t) = \frac{1}{2}\hat{\varphi}(\omega)e^{a\omega ti} + \frac{1}{2}\hat{\varphi}(\omega)e^{-a\omega ti} + \frac{1}{2a\omega i}\hat{\psi}(\omega)e^{a\omega ti} - \frac{1}{2a\omega i}\hat{\psi}(\omega)e^{-a\omega ti}$$

$$F^{-1}(\hat{\varphi}(\omega)e^{a\omega ti}) = \varphi(x+at)，\ F^{-1}(\hat{\varphi}(\omega)e^{-a\omega ti}) = \varphi(x-at)$$

$$F^{-1}(\hat{\psi}(\omega)e^{a\omega ti}) = \psi(x+at)，\ F^{-1}(\hat{\psi}(\omega)e^{-a\omega ti}) = \psi(x-at)$$

$$F(f(x)) = i\omega F(\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi)，$$

$$F^{-1}(\frac{F(f(x))}{i\omega}) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$$，从而有

$$F^{-1}(\frac{\psi(\omega)e^{ia\omega t}}{i\omega}) = F^{-1}(\frac{F(\psi(x+at))}{i\omega}) = \int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi)d\xi$$

$$F^{-1}\left(\frac{\psi(\omega)e^{-ia\omega t}}{i\omega}\right)=F^{-1}\left(\frac{F(\psi(x-at))}{i\omega}\right)=\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi$$

对$U(\omega,t)$进行傅里叶反变换，得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))\\&\quad+\frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi\right)\\&=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi\right)\\&=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\end{aligned}$$

得分	评卷人

五、**试计算下列定积分（本大题 15 分）**

（1） $\int_0^1 rJ_0(r)dr$ **（6 分）** **（2）** $\int_0^1 r^3J_0(r)dr$ **（9 分）**

（1）$\int_0^1 rJ_0(r)dr=rJ_1(r)\Big|_0^1=J_1(1)$

（2）$\int_0^1 r^3J_0(r)dr=\int_0^1 r^2d(rJ_1(r))$

$$\begin{aligned}&=r^3J_1(r)\Big|_0^1-2\int_0^1 r^2J_1(r)dr\\&=J_1(1)-2r^2J_2(r)\Big|_0^1=J_1(1)-2J_2(1)\end{aligned}$$