

第二章 逻辑代数基础

主要要求：

- 掌握逻辑代数的基本公式和定理。
- 掌握逻辑函数的表示方法及相互转换。
- 掌握逻辑函数的化简方法。

2.1 概述

一、逻辑代数

用于描述客观事物逻辑关系的数学工具，
又称布尔代数 或开关代数。

逻辑指事物因果关系的规律。

2.1 概述



逻辑代数中的 1 和 0 不表示数量大小，仅表示两种相反的状态。

例如：开关闭合为 1 晶体管导通为 1 电位高为 1
 断开为 0 截止为 0 低为 0

二、逻辑体制

正逻辑

规定高电平为逻辑 1、低电平为逻辑 0

负逻辑

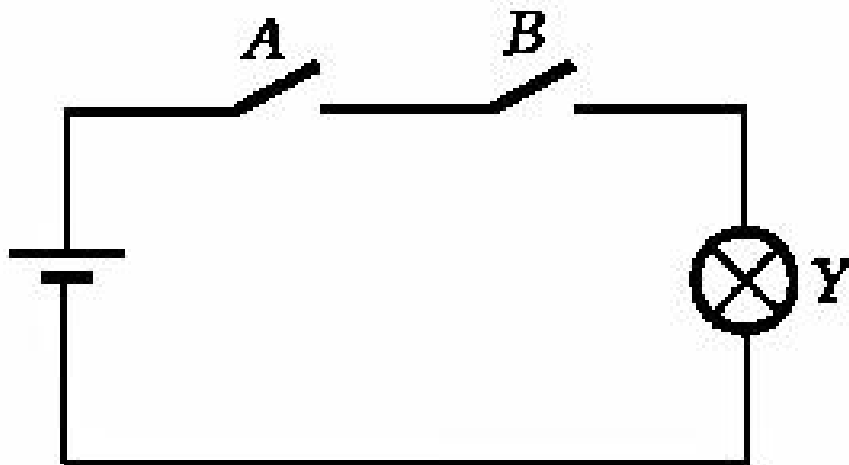
规定低电平为逻辑 1、高电平为逻辑 0

通常未加说明，则为正逻辑体制

2.2 逻辑代数中的三种基本运算

与 (**AND**) 或 (**OR**) 非 (**NOT**)

与 条件同时具备，结果发生。



逻辑式 $Y = A \cdot B = AB$

真值表

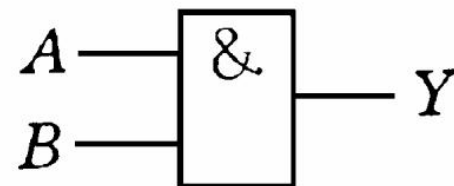
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

与 逻辑式 $Y = A \cdot B = AB$

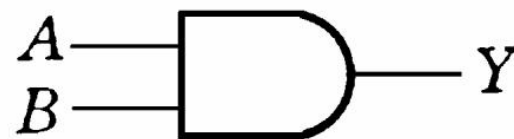
真 值 表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

逻辑符号

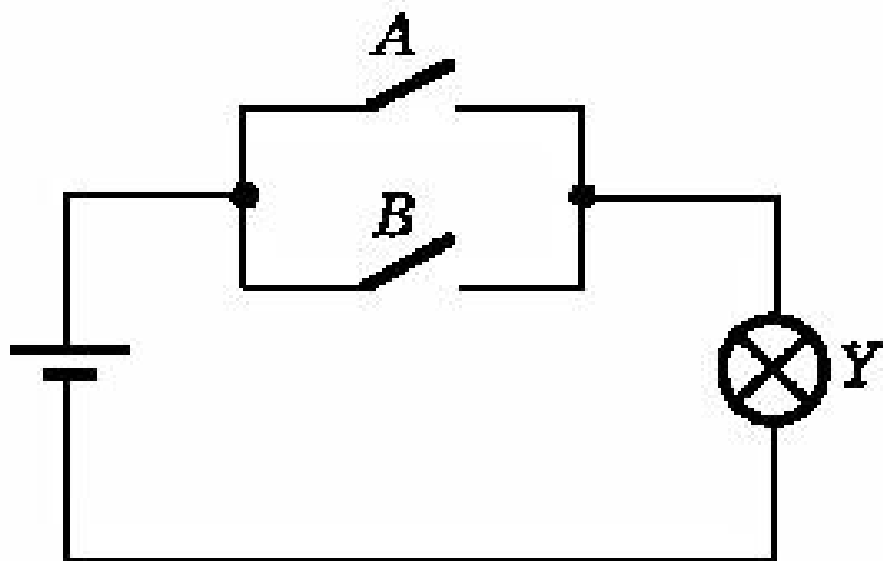


与



或 条件之一具备，结果发生。

逻辑式 $Y = A + B$



真值表

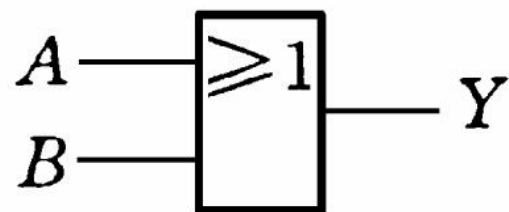
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

或 逻辑式 $Y = A + B$

真 值 表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

逻辑符号

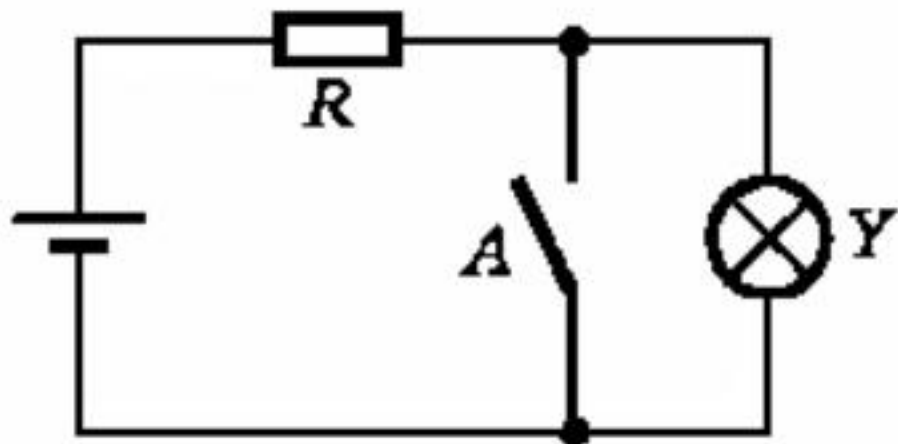


或



非 条件不具备，结果发生。

逻辑式 $Y = A'$



真值表

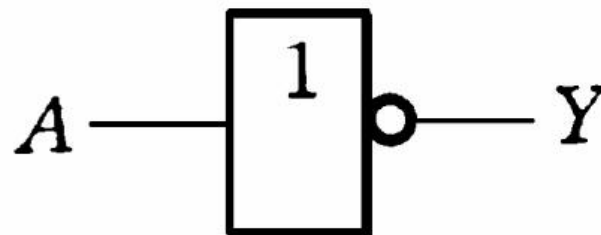
A	Y
0	1
1	0

非 $Y = A'$

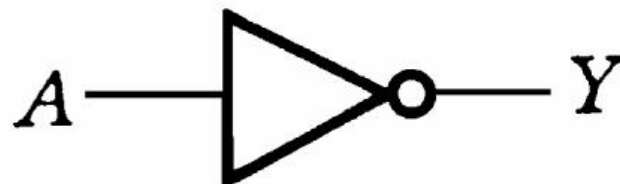
真值表

A	Y
0	1
1	0

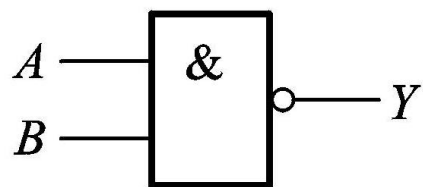
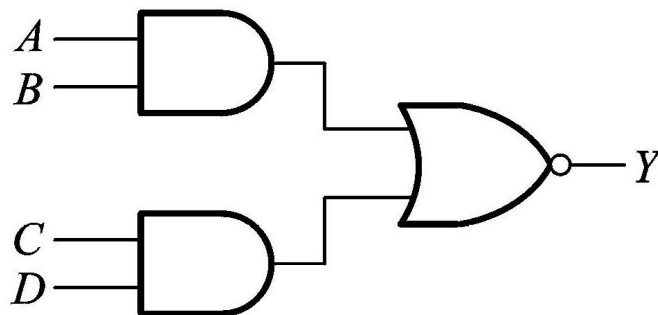
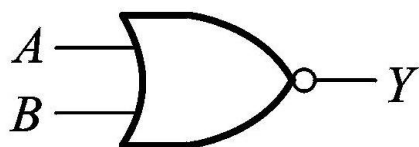
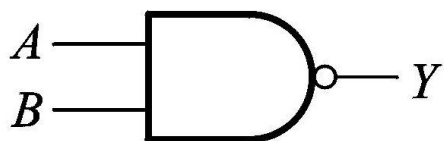
逻辑符号



非

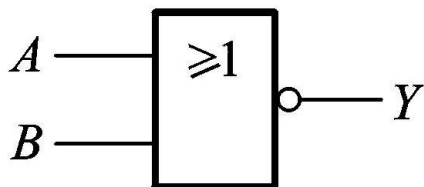


几种常用的复合逻辑运算



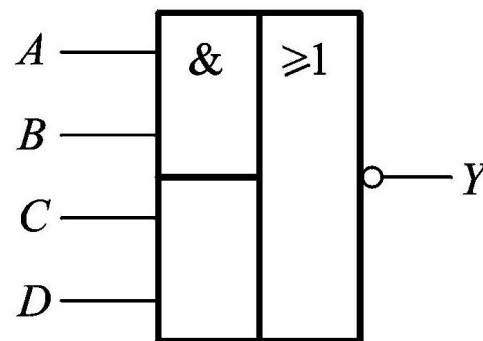
与非

$$Y=(A \cdot B)'$$



或非

$$Y=(A+B)'$$



与或非

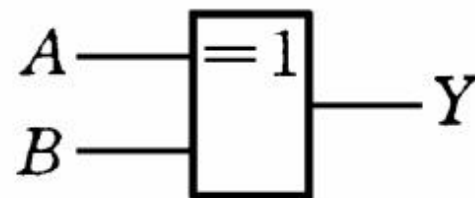
$$Y=(A \cdot B + C \cdot D)'$$

异或 $Y = A'B + AB' = A \oplus B$

不同出 1

相同出 0

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



异或



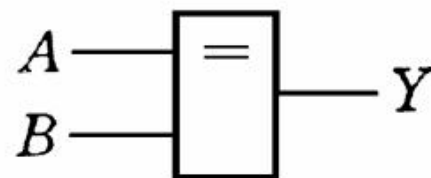
$$Y = A \oplus B$$

同或 $Y = AB + A'B' = A \odot B$

相同出 1

不同出 0

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



同或



$$Y = A \odot B$$

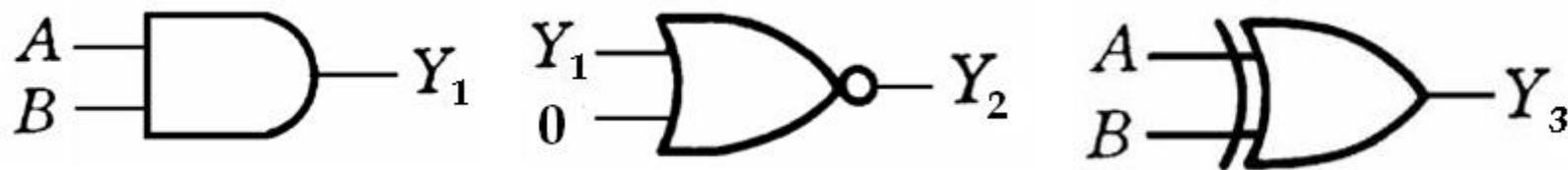
注意： 异或和同或互为反运算，即

$$A \odot B = (A \oplus B)'$$

证明： 设 $Y = AB + A'B'$

$$\begin{aligned} Y' &= (AB + A'B')' \\ &= (AB)' \cdot (A'B')' \\ &= (A' + B')(A + B) \\ &= A'B + AB' \\ &= A \oplus B \end{aligned}$$

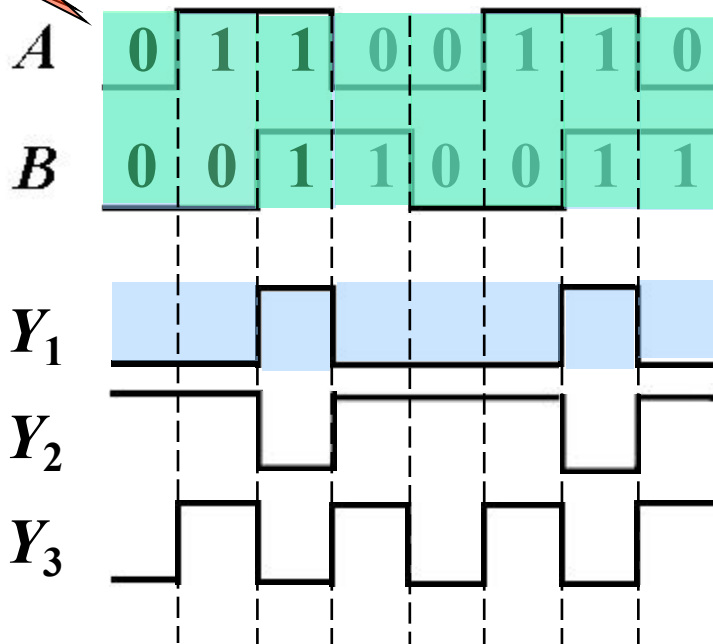
[例] 试对应输入信号波形分别画出下图各电路的输出波形。



解:

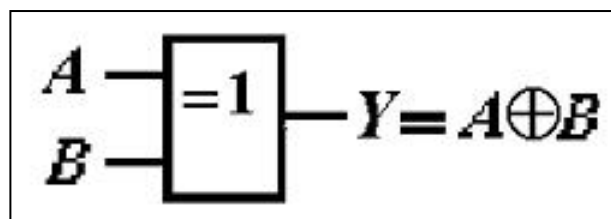
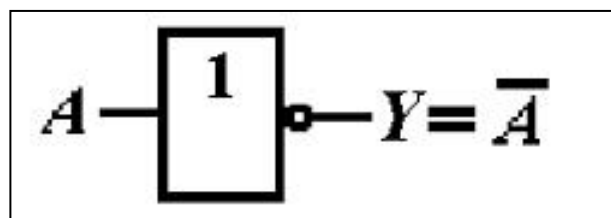
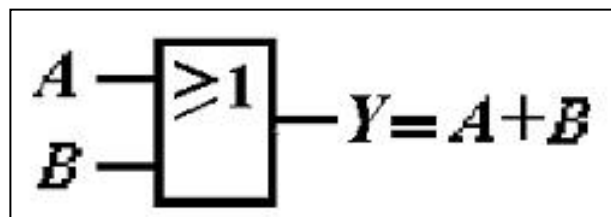
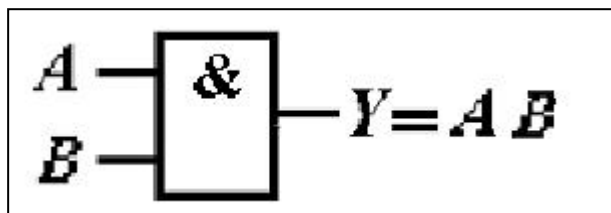
相同出0

不同出1

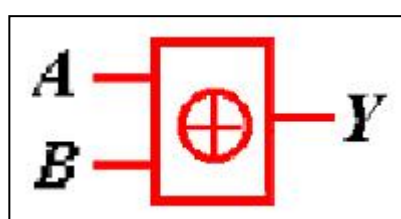
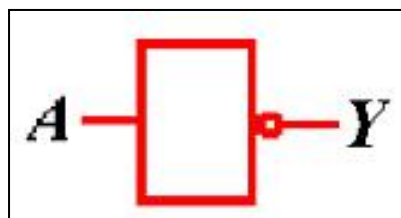
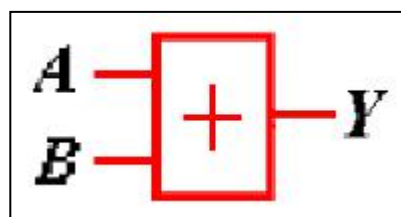
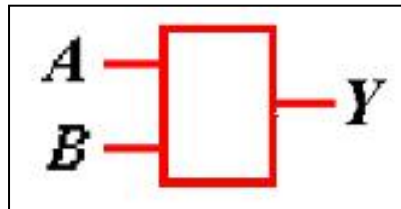


逻辑符号对照

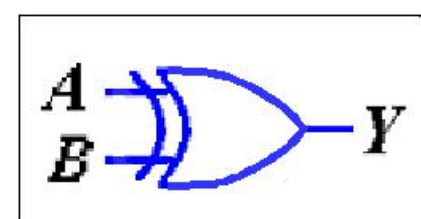
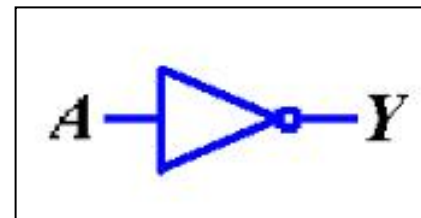
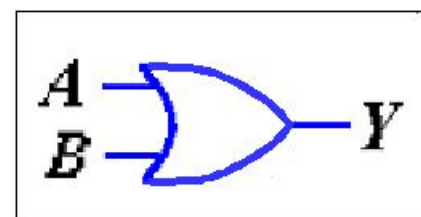
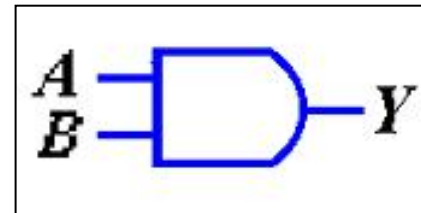
国家标准



曾用标准



美国标准



2.3 逻辑代数的基本公式 和常用公式

2.3.1 基本公式

2.3.2 常用公式

2.3.1 基本公式

证明方法：推演 真值表

序号	公 式	序号	公 式
		10	$1' = 0; 0' = 1$
1	$0 A = 0$	11	$1 + A = 1$
2	$1 A = A$	12	$0 + A = A$
3	$A A = A$	13	$A + A = A$
4	$A A' = 0$	14	$A + A' = 1$
5	$A B = B A$	15	$A + B = B + A$
6	$A (B C) = (A B) C$	16	$A + (B + C) = (A + B) + C$
7	$A (B + C) = A B + A C$	17	$A + B C = (A + B)(A + C)$
8	$(A B)' = A' + B'$	18	$(A + B)' = A' B'$
9	$(A')' = A$		

公式 $A + B C = (A + B) (A + C)$ 的证明

$$\begin{aligned}\text{右} &= (A + B)(A + C) \\ &= A + AC + AB + BC \\ &= A(1 + B + C) + BC \\ &= A + BC = \text{左}\end{aligned}$$

公式 $A + B C = (A + B) (A + C)$ 的证明
(真值表法)

ABC	BC	$A+BC$	$A+B$	$A+C$	$(A+B) (A+C)$
000	0	0	0	0	0
001	0	0	0	1	0
010	0	0	1	0	0
011	1	1	1	1	1
100	0	1	1	1	1
101	0	1	1	1	1
110	0	1	1	1	1
111	1	1	1	1	1

2.3.2 若干常用公式

序 号	公 式
21	$A + A B = A$
22	$A + A' B = A + B$
23	$A B + A B' = A$
24	$A (A + B) = A$
25	$A B + A' C + B C = A B + A' C$ $A B + A' C + B C D = A B + A' C$
26	$A (A B)' = A B' ; A' (A B)' = A'$

2.4 逻辑代数的基本定理

(一) 代入定理

将逻辑等式两边的某一变量均用同一个逻辑函数替代，等式仍然成立。

应用举例：

$$A+BC = (A+B)(A+C)$$

$$\begin{aligned} A+B(CD) &= (A+B)(A+CD) \\ &= (A+B)(A+C)(A+D) \end{aligned}$$

(二) 反演定理

对任一个逻辑函数式 Y ，将“ \cdot ”换成“ $+$ ”，“ $+$ ”换成“ \cdot ”，“ 0 ”换成“ 1 ”，“ 1 ”换成“ 0 ”，原变量换成反变量，反变量换成原变量，则得到原逻辑函数的反函数 Y' 。

变换时注意：

- (1) 不能改变原来的运算顺序。
- (2) 反变量换成原变量只对单个变量有效，而长非号保持不变。

$$\star Y = A \cdot (B + C)' + CD \quad Y' = (A' + (B'C'))(C' + D')$$

原运算次序为

求逻辑函数的反函数有两种方法：利用反演定理或摩根定律。

(三) 对偶定理

对任一个逻辑函数式 Y ，将“ \cdot ”换成“ $+$ ”，“ $+$ ”换成“ \cdot ”，“ 0 ”换成“ 1 ”，“ 1 ”换成“ 0 ”，则得到原逻辑函数式的对偶式 Y^D 。

对偶定理：两个函数式相等，则它们的对偶式也相等。

变换时注意：(1) 变量不改变
(2) 不能改变原来的运算顺序

$$\star A + AB = A \Rightarrow A \cdot (A + B) = A$$

$$\star AB + A'C + BC = AB + A'C$$



$$(A + B)(A' + C)(B + C) = (A + B)(A' + C)$$

应用对偶定理可将基本公式和定律扩展。

2.5 逻辑函数及其表示方法

2.5.1 逻辑函数

$$Y=F(A,B,C,\dots)$$

若以逻辑变量为输入，运算结果为输出，则输入变量值确定以后，输出的取值也随之而定。输入/输出之间是一种函数关系。

注：在二值逻辑中，输入/输出都只有两种取值**0/1**。

2.5.2 逻辑函数的表示方法

- 1、真值表
 - 2、逻辑式
 - 3、逻辑图
 - 4、波形图
 - 5、卡诺图
 - 6、计算机软件中的描述方式
- 各种表示方法之间可以相互转换

1. 真值表

列出输入变量的各种取值组合及其对应输出逻辑函数值的表格称真值表。

列真值表方法

输入变量 <i>A B C</i>	输出变量 <i>Y₁ Y₂</i>
遍历所有可能的输入变量的取值组合	输出对应的取值

例如 求函数 $Y = (AB + CD)'$ 的真值表。

4 个输入
变量有 2^4
= 16 种取
值组合。

输 入 变 量				输出变量
A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

2. 逻辑函数式

表示输出函数和输入变量逻辑关系的表达式。又称逻辑表达式，简称逻辑式。

真值表 \longleftrightarrow 逻辑式

例：奇偶判别函数的真值表

ABC有三种取值都可以使 **$Y=1$**

$A=0, B=1, C=1$ 即 **$A'BC=1$**

$A=1, B=0, C=1$ 即 **$AB'C=1$**

$A=1, B=1, C=0$ 即 **$ABC'=1$**

所以 **$Y= ?$**

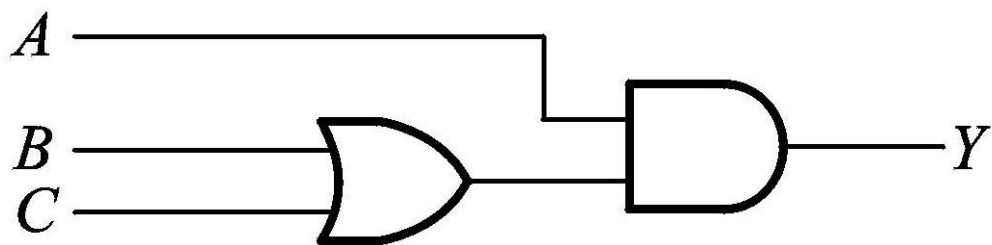
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

3. 逻辑图

逻辑式 \rightarrow 逻辑图

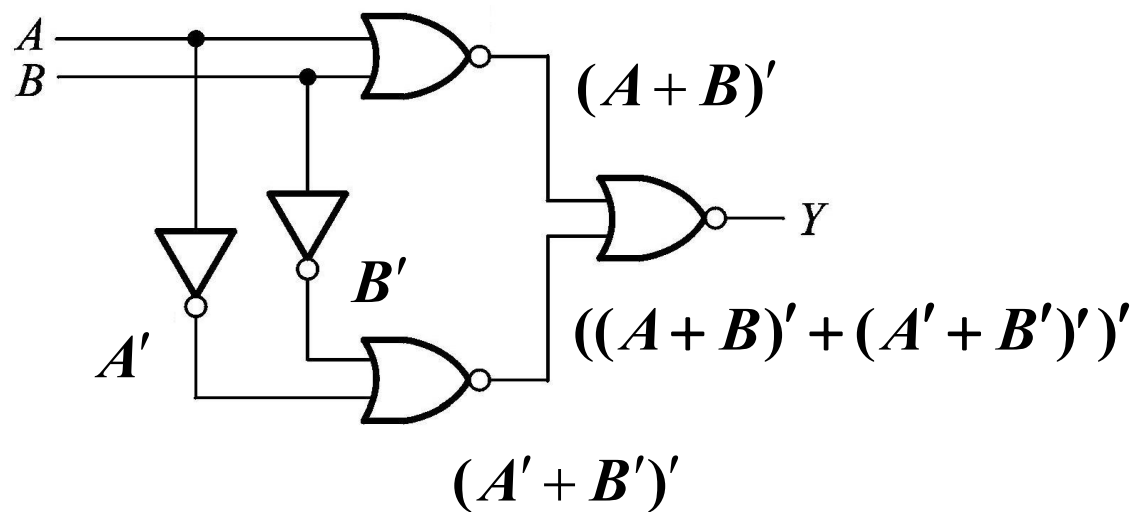
用图形符号代替逻辑式中的逻辑运算符。

$$Y = A \cdot (B + C)$$



逻辑图 → 逻辑式

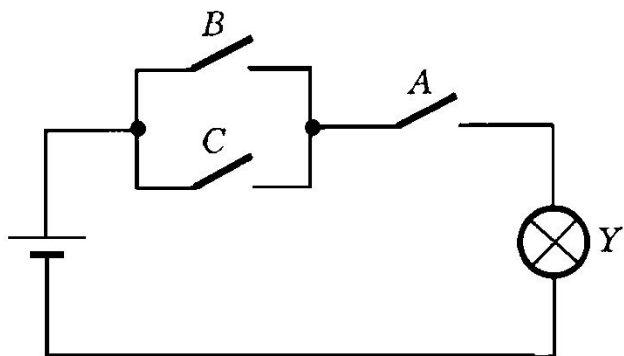
从输入到输出逐级写出每个图形符号对应的逻辑运算式。



$$\begin{aligned} & ((A+B)' + (A'+B')')' \\ &= (A+B)(A'+B') \\ &= AB' + A'B \\ &= A \oplus B \end{aligned}$$

例：举重裁判电路

(1) 分析逻辑问题，建立逻辑函数的真值表

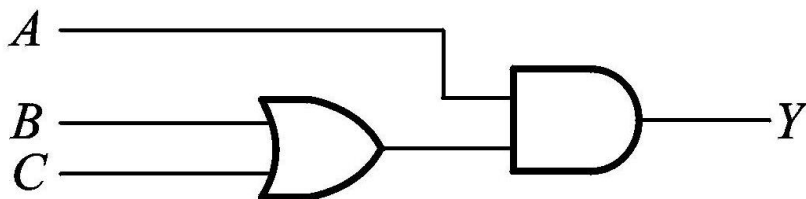


A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

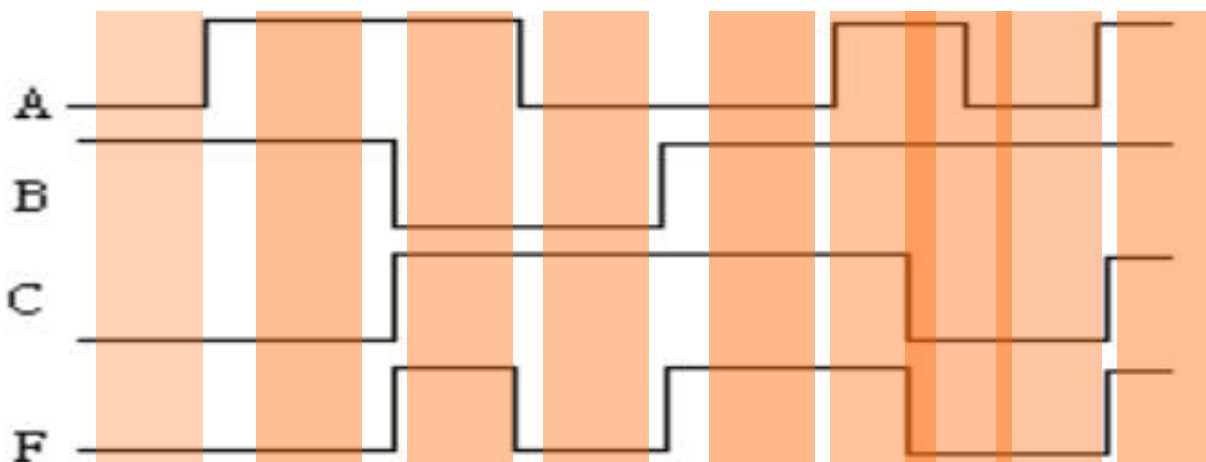
(2) 根据真值表写出逻辑式

$$Y = A \cdot (B + C)$$

(3) 画逻辑图



4. 波形图



A	B	C	F
0	0	0	×
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	×
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

作业

习题 **2.1** (1)~(4) 、 **2.2** (1) (3)、
2.3、 **2.5(2)**、 **2.7**、 **2.8**

2.5.3 逻辑函数的标准形式

最小项之和

最大项之积

最小项 m : 在 n 变量的逻辑函数中, m 是包含 n 个因子的乘积项, 这 n 个变量均以原变量或反变量的形式在 m 中出现一次。

例如:

$$\begin{aligned} F &= AB + A'C = AB(C + C') + A'C(B + B') \\ &= \underline{ABC + ABC' + A'BC + A'B'C} \end{aligned}$$

最小项之和式

最小项举例：

对于n变量函数
有 2^n 个最小项

两变量**A, B**的最小项

$A'B', A'B, AB', AB$ ($2^2 = 4$ 个)

三变量**A,B,C**的最小项

$A'B'C', A'B'C, A'BC', A'BC$

$AB'C', AB'C, ABC', ABC$ ($2^3 = 8$ 个)

三变量最小项的编号表

最小项	取值	对应	编号
	<i>A B C</i>	十进制数	
<i>A'B'C'</i>	0 0 0	0	m₀
<i>A'B'C</i>	0 0 1	1	m₁
<i>A'BC'</i>	0 1 0	2	m₂
<i>A'BC</i>	0 1 1	3	m₃
<i>AB'C'</i>	1 0 0	4	m₄
<i>AB'C</i>	1 0 1	5	m₅
<i>ABC'</i>	1 1 0	6	m₆
<i>ABC</i>	1 1 1	7	m₇

最小项的性质

1. 输入变量任一取值下，仅有一个最小项的值为**1**
2. 全体最小项之和为**1**；
3. 任何两个最小项之积为**0**；
4. 两个**相邻**的最小项之和可以**合并**，消去一对因子，只留下公共因子。

例如： $A'BC'$ 与 $A'BC$

$$A'BC' + A'BC = A'B(C' + C) = A'B$$

逻辑函数最小项之和的形式：

利用公式
可将任何一个函数化为 $\sum m_i$

例：

$$\begin{aligned} Y(A, B, C) &= ABC' + BC \\ &= ABC' + BC(A + A') \\ &= ABC' + ABC + A'BC \\ &= \sum m(3, 6, 7) \end{aligned}$$

最大项：

对于n变量函数
有 2^n 个最大项

最大项M：在n 变量的逻辑函数中， M是包含n个因子的相加项，这n个变量均以原变量或反变量的形式在M中出现一次。

如：两变量**A, B**的最大项有

$$A' + B', A' + B, A + B', A + B \quad (2^2 = 4 \text{个})$$

三变量最大项的编号表

最大项	取值	对应	编号
	<i>A B C</i>	十进制数	
$A' + B' + C'$	1 1 1	7	M₇
$A' + B' + C$	1 1 0	6	M₆
$A' + B + C'$	1 0 1	5	M₅
$A' + B + C$	1 0 0	4	M₄
$A + B' + C'$	0 1 1	3	M₃
$A + B' + C$	0 1 0	2	M₂
$A + B + C'$	0 0 1	1	M₁
$A + B + C$	0 0 0	0	M₀

最大项的性质

1. 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最大项的值为**0**
2. 全体最大项之积为**0**
3. 任何两个最大项之和为**1**

最小项与最大项的关系

1. 相同编号的最小项和最大项存在互补关系

即: $m_i = M_i'$ $M_i = m_i'$

2. 如果已知逻辑函数为 $Y = \sum m_i$ 时, 定能将 Y 化成编号为 i 以外的那些最大项的乘积。

即:

$$Y = \sum_i m_i = \prod_{k \neq i} M_k$$

逻辑函数的最大项之积形式：

$$Y(A, B, C) = ABC' + BC$$

$$= ABC' + BC(A + A')$$

$$= ABC' + ABC + A'BC$$

$$= \sum_i m_i (i = 3, 6, 7)$$

$$= \prod_{k \neq i} M_k = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_5$$