中国传媒大学

2016—2017 学年第 一 学期期末考试试卷（A 卷）

参考答案及评分标准

考试科目：复变函数　　　　课程编码：123025

考试班级：2015 级工学院　　　　考试方式：闭卷

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，选择正确答案填在题中的括号内, 本大题共 4 小题，每小题 3 分, 共 12 分）

1、函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处解析的充要条件是（ D ）.

A. $f(z)$ 在 z_0 处可导　　*B.* $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可导

C. u 是 v 的共轭调和函数　　*D.* v 是 u 的共轭调和函数

2、函数 $f(z)=\ln z$ 的解析区域是（ D ）.

A. 复平面　　*B.* 除去原点的复平面

C. 除去实轴的复平面　　*D.* 除去原点与负实轴的复平面

3、点 $z=1$ 是函数 $\dfrac{\cos(z-1)}{z-1}$ 的（ B ）.

A. 可去奇点　　*B.* 一级极点

C. 一级零点　　*D.* 本性奇点

4、映射 $w=z^2$ 在点 $z_0=i$ 处的转动角为（ C ）.

A. π　　*B.* $-\pi$　　*C.* $\dfrac{\pi}{2}$　　*D.* $-\dfrac{\pi}{2}$

二、填空题（把正确答案填在题中的横线上，本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1、设有复数 z ，$n\geq 1$为正整数，则 $\overline{z^{-n}}$ 的三角表示式为$\underline{\cos n\theta + i\sin n\theta}$.

2、已知复数 $z=x+iy$，求 $u(x,y)=\mathrm{Re}[Ln(z)]=\underline{\ln|z|}$，

$v(x,y)=\mathrm{Im}[Ln(z)]=\underline{Argz}$.

3、记 $I_n=\oint_{\Gamma}\dfrac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中 Γ 是任意一条包含 z_0 的简单正向闭曲线.那么，当

$n=0$ 时，$I_0=\underline{2\pi i}$，当 $n\neq 0$ 时，$I_0=\underline{\quad 0 \qquad\qquad\qquad}$.

4、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{e}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\pi}\right)^n$ 的收敛域$\underline{e<|z|<\pi}$.

三、解答题（本大题共 8 个小题，每小题 8 分，共 64 分）

1、(本小题 8 分)已知 $z=i^{2015}-4i^{2016}+i^{2017}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$，$|z|$，$\arg z$ 和 $Argz$.

解: 由 $z=i^{2015}-4i^{2016}+i^{2017}=i^{4\times 503+3}-4i^{4\times 504}+i^{4\times 504+1}=i^3-4+i=-4$

得 $\mathrm{Re}(z)=$-4， $\mathrm{Im}(z)=0$ （2 分）

$|z|=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4$ （4 分）

$\arg z=\pi$ （6 分）

则 $Argz=\arg z+2k\pi$

$=(2k+1)\pi$ （k 为整数）. （8 分）

2、（本小题 8 分）设 $my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数，试确定参数 l,m,n 的值.

证明：记 $u(x,y)=my^3+nx^2y, v(x,y)=x^3+lxy^2$，那么，

$\frac{\partial u}{\partial x}=2nxy$，　　$\frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2$

$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2$，　$\frac{\partial v}{\partial y}=2lxy$　　（2 分）

根据柯西−黎曼方程,

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow 2nxy=2lxy\Rightarrow n=l.$　　（4 分）

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow 3my^2+nx^2=-3x^2-ly^2\Rightarrow n=-3,3m=-l.$　　（6 分）

联立可解得, $l=n=-3,m=1.$　　（8 分）

3、（本小题 8 分）求积分 $\oint_C \frac{1}{z(z^2-1)(z^3-1)}dz$，其中 C 分别为：（1）$|z|=10^{-6}$，（2）$|z-1|=10^{-6}$，（3）$|z+1|=10^{-6}$，（4）$|z|=2$，方向都为正向.

解：(1) C_1：$|z|=10^{-6}$

$$\oint_{C_1}\frac{1}{z(z^2-1)(z^3-1)}dz=\oint_{C_1}\frac{\frac{1}{(z^2-1)(z^3-1)}}{z}dz$$　　（3 分）

$$=2\pi i\left[\frac{1}{(z^2-1)(z^3-1)}\right]_{z=0}=2\pi i$$

(2) C_2： $|z-1|=10^{-6}$

$$\oint_{C_2}\frac{1}{z(z^2-1)(z^3-1)}dz=2\pi i\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left(\frac{1}{\mathrm{z(z+1)(z^2}+z+1)}\right)\right]_{\mathrm{z=1}}=5\pi i.\text{（6 分）}$$

(3) C_3： $|z+1|=10^{-6}$

$$\oint_{C_2}\frac{1}{z(z^2-1)(z^3-1)}dz=2\pi i\left[\frac{1}{\mathrm{z(z\text{-}1)(z^3}-1)}\right]_{\mathrm{z}=-1}=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\qquad\text{（6 分）}$$

(4) C_4： $|z|=2$

$$\oint_{C_4}\frac{1}{z(z^2-1)(z^3-1)}dz=\sum_{k=1}^{3}\oint_{C_\mathrm{k}}\frac{1}{z(z^2-1)(z^3-1)}dz$$

$$=2\pi\mathrm{i}+5\pi i-\frac{\pi i}{2}=\frac{13}{2}\pi\mathrm{i}.\qquad\text{（8 分）}$$

4、（本小题 8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ 分别在圆环域(1) $0<|z|<1$，(2) $1<|z|<2$，(3) $|z|>2$ 内展开为洛朗级数.

解: (1) $0<|z|<1$ 时

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{-1}{1+z}+\frac{2}{2+z}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{2})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-2^n)\left(\frac{z}{2}\right)^n\qquad\text{（4 分）}$$

(2) $1<|z|<2$ 时, $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$, $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$,

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{-1}{1+z}+\frac{2}{2+z}=\frac{-1}{z(1+\frac{1}{z})}+\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$

因此在$1<|z|<2$内有

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{z})^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(\frac{z}{2})^{n}$$ （6 分）

(3)$|z|>2$时，$\left|\frac{1}{z}\right|<1$，　$\left|\frac{2}{z}\right|<1$，

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{-1}{1+z}+\frac{2}{2+z}=\frac{-1}{z(1+\frac{1}{z})}+\frac{2}{z(1+\frac{2}{z})}$$

因此在$|z|>2$内有

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2}{z}\right)^{n+1}$$ （8 分）

5、（本小题 8 分）找出函数 $f(z)=\frac{\sin z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})z^3}$ 的奇点，并确定奇点的类型.

解:

$1+z^2=0\Rightarrow z=\pm i$， 分母一级零点，$f(z)$的一级极点. （2 分）

$1+e^{\pi z}=0\Rightarrow z=\pm(2n+1)i,n=0,1,2\ldots$，

分母一级零点， $f(z)$的一级极点. （4 分）

在$z=0$的去心邻域$0<|z|<+\infty$内，

$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\cdots$$ （6 分）

所以， $z=0$是$f(z)$的二级极点. （8 分）

6、利用留数计算积分 $\oint_c \frac{1-\cos z}{z^m}dz$ ，其中 c 为正向圆周 $|z|=\frac{3}{2}$，m 为整数.（本小题 8 分）

解：根据留数定理 $\oint_c f(z)dz = 2\pi i c_{-1}$ ，在正向圆周 $|z|=\frac{3}{2}$ 内，被积函数可以展开为以下幂级数

$$\frac{1-\cos z}{z^m} = z^{-m}[1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...+(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}+...)]$$

（2 分）

$$= z^{-m}(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+...+(-1)^{k+1}\frac{z^{2k}}{(2k)!}+...)$$

当 $m\le 2$ 或为偶数时，以上展开式中没有负一次项，因此积分结果为零。（4 分）

当 $m\ge 3$ 且为奇数时，不妨假设 $m=2k+1$ ，则展开式中的负一次项为

$$z^{-(2k+1)}(-1)^{k+1}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = (-1)^{k+1}\frac{z^{-1}}{(2k)!} = (-1)^{\frac{m-3}{2}}\frac{z^{-1}}{(m-1)!}$$

（6 分）

所以， $c_{-1} = (-1)^{\frac{m-3}{2}}\frac{1}{(m-1)!}$ ，积分结果为

$$I = 2\pi i c_{-1} = (-1)^{\frac{m-3}{2}}\frac{2\pi i}{(m-1)!}.$$

（8 分）

7、（本小题 8 分）计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{cosx}{x^2+\pi^2}dx$.

解：$R(z)=\frac{1}{z^2+\pi^2}=\frac{1}{(z+\pi i)(z-\pi i)}$. （2 分）

在上半平面，仅有一个一级极点$z=\pi i$. （4 分）

$\int_0^{+\infty}\frac{cosx}{x^2+\pi^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cosx}{x^2+\pi^2}dx$ （5 分）

$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+\pi^2}e^{ix}dx\right]$ （6 分）

$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi iRes[\frac{1}{z^2+\pi^2}e^{iz},\pi i]\right\}$ （7 分）

$=\frac{1}{2}e^{-\pi}$. （8 分）

8、求一个分式线性映射$w=f(z)$，它将上半平面$\mathrm{Im}(z)>0$映射成圆域$|w|<1$，且满足条件$f(i)=0$， $\arg f'(i)=0$.（本小题 8 分）

解：已知$f(i)=0$，

所以$w=f(z)$把$\mathrm{Im}(z)>0$内的点i影射成$|w|<1$的中心.

根据将$\mathrm{Im}(z)>0$映射成$|w|<1$的分式线性映射：

$w=f(z)=e^{i\theta}\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}$ （3 分）

因为，$f(i)=0$，所以，$\lambda=i$

所以，$w=f(z)=e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}$，又因为$f'(i)=\frac{1}{2i}e^{i\theta}$， （6 分）

所以，$\arg f'(i)=\arg(\frac{1}{2i})+\arg(e^{i\theta})=\theta-\frac{\pi}{2}=0$，$\theta=\frac{\pi}{2}$.

所以，$w=f(z)=i\frac{z-i}{z+i}$. （8 分）

四、应用题(本题 12 分)

已知平面上不共线的三个点 z_1, z_2, z_3, 求 z_1 关于 z_2 和 z_3 连线的对称点 z_1^*.

解:

方法一、平移+旋转+共轭

1. 将 z_2 平移至原点, 所有点都减去 z_2

$$z_{1,1} = z_1 - z_2. \quad \text{(2 分)}$$

2. z_2 和 z_3 连线旋转至实轴

$$z_{1,2} = z_{1,1} \cdot e^{-iarg(z_3 - z_2)} = (z_1 - z_2) \cdot e^{-iarg(z_3 - z_2)}. \quad \text{(5 分)}$$

3. 关于实轴对称即取共轭

$$z_{1,3} = \overline{z_{1,2}} = \overline{(z_1 - z_2)} \cdot e^{iarg(z_3 - z_2)}. \quad \text{(8 分)}$$

4. z_2 和 z_3 连线从实轴旋转回原来的角度

$$z_{1,4} = z_{1,3} = \overline{(z_1 - z_2)} \cdot e^{iarg(z_3 - z_2)} \cdot e^{iarg(z_3 - z_2)} == \overline{(z_1 - z_2)} \cdot e^{i2arg(z_3 - z_2)}. \quad \text{(10 分)}$$

5. z_2 从原点平移至原来的位置, 所有点都加上 z_2

$$z_1^* = z_{1,5} = \overline{(z_1 - z_2)} \cdot e^{i2arg(z_3 - z_2)} + z_2. \quad \text{(12 分)}$$

方法二、分式线性映射+保对称性

设一个分式线性映射将 z_2 和 z_3 所在的直线映射为单位圆，并且把 z_1 映射为圆心，根据分式线性映射的保对称性， z_1^* 将被映射为 ∞，所以该分式线性映射具有如下形式，

$$f(z)=k\frac{z-z_1}{z-z_1^*}\text{（4 分）}$$

其中， k, z_1^*为待求参数. 为了方便计算, 不妨假设 $f(z_2)=-1, f(z_3)=1$, 代入分式线性映射可得

$$k\frac{z_2-z_1}{z_2-z_1^*}=-1,\quad k\frac{z_3-z_1}{z_3-z_1^*}=1.\text{（8 分）}$$

消掉 k, 可解得

$$z_1^*=\frac{2z_2z_3-z_1(z_2+z_3)}{z_2-2z_1+z_3}.\text{（12 分）}$$