第五章　连续系统的s 域分析

5.1 拉普拉斯变换

5.2 拉普拉斯变换的性质

5.3 拉普拉斯逆变换

5.4 复频域分析

频域分析法的局限性

频域分析法中基本变量为ω，$e^{j\omega t}$为基本信号。

1) 只能求$y_{zs}(t)$　$\leftrightarrow Y_{zs}(j\omega)=F(j\omega)\cdot H(j\omega)$

2) 有些函数FT不存在 [如$f(t)=e^{\alpha t}\varepsilon(t)$　$\alpha>0$时]

3) 某些简单函数的FT形式复杂 [如$\varepsilon(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+1/j\omega$]

连续系统的s域分析(拉普拉斯变换)

拉普拉斯　（法国数学家1749~1827）

s(复频)域分析中基本变量为$s=\sigma+j\omega$，　e^{st}为基本信号

1) $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$　$\leftrightarrow$　$Y(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs}(s)$

2) 很多傅里叶变换不存在的函数$f(t)$，存在拉普拉斯变换。

3）很多函数的LT的形式简单 [如 $\varepsilon(t)\leftrightarrow 1/s$]

5.1　拉普拉斯变换

一、 从傅里叶变换(FT)到拉普拉斯变换(LT)

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \quad \leftarrow \text{傅里叶正变换}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \leftarrow \text{傅里叶反变换}$$

FT存在的充分条件　$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$　　(即$f(t)$绝对可积)

当函数$f(t)$ [如$f(t)=e^{\alpha t}\varepsilon(t)$　$\alpha>0$时]不满足绝对可积条件时其FT不存在 [特殊函数 如1、$\varepsilon(t)$、Sgn(t)等除外]。

令 $f_b(t)=f(t)e^{-\sigma t}(\sigma>0)$，使$\lim_{t\to\infty} f_b(t)=0$ (收敛) [$e^{-\sigma t}$称衰减因子]

$$\mathscr{F}[f_b(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \rightarrow F_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (s=\sigma+j\omega)$$

$$f_b(t)=f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(s)e^{j\omega t}d\omega$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(s)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} F_b(s)e^{st}ds$$

$$\left.\begin{aligned} F_b(s)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (5.1-4)\\ f(t)&=\frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st}ds \quad (5.1-5)\end{aligned}\right\}\text{双边拉普拉斯变换对}$$

复变函数$F_b(s)$称为$f(t)$的双边拉氏变换(象函数)

时间函数 $f(t)$ 称为$F_b(s)$的双边拉氏逆变换(原函数)

$$\left.\begin{aligned} F(s)&=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (5.1-8)\\ f(t)&=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds & t>0\end{cases} \quad (5.1-9)\end{aligned}\right\}\text{单边拉普拉斯变换对}$$

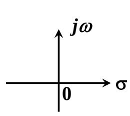
简写为：$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$　　　　简记为$f(t)\leftrightarrow F(s)$

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

傅里叶变换 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$　建立了时域与频域间的关系
有明确的物理意义

拉普拉斯变换 $f(t)\leftrightarrow F(s)$　建立了时域与复频域间的关系
无明确的物理意义(工具)

拉氏变换可理解为广义的傅里叶变换



s平面　$s=\sigma+j\omega$

二、双边拉普拉斯变换的收敛域

收敛域的概念：　　$F_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

若$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}dt<\infty$　($\sigma\in R$)，则$f(t)$的拉氏变换一定存在。

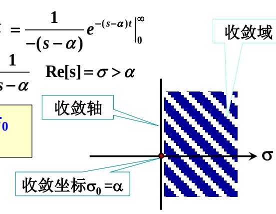
收敛域：使$f(t)$的$F_b(s)$存在的σ 的取值范围

例1：求因果信号$f_1(t)=e^{\alpha t}\varepsilon(t)$ 的拉氏变换 (α为实数)

$$F_{b1}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{\alpha t}e^{-st}dt=\frac{1}{-(s-\alpha)}e^{-(s-\alpha)t}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{s-\alpha}\left[1-\lim_{t\to\infty}e^{-(\sigma-\alpha)t}e^{-j\omega t}\right]=\frac{1}{s-\alpha}\quad \mathrm{Re}[s]=\sigma>\alpha$$

因果信号收敛域应满足$\sigma>\alpha=\sigma_0$
(即收敛轴的右边区域)



$$e^{\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-\alpha}\quad \sigma>\alpha$$

例2：求反因果信号$f_2(t)=-e^{\beta t}\varepsilon(-t)$的拉氏变换($\beta$为实数)

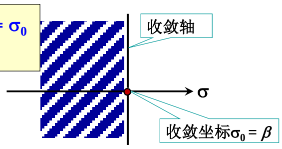
$$F_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F_{b2}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}(-e^{\beta t})e^{-st}dt=\frac{1}{s-\beta}e^{-(s-\beta)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{1}{s-\beta}\left[1-\lim_{t\to-\infty}e^{-(\sigma-\beta)t}e^{-j\omega t}\right]=\frac{1}{s-\beta}\quad \mathrm{Re}[s]=\sigma<\beta$$

反因果信号收敛域应满足$\sigma<\beta=\sigma_0$
（即收敛轴的左边区域）

$$-e^{\beta t}\varepsilon(-t)\leftrightarrow\frac{1}{s-\beta}\quad \sigma<\beta$$



可见，求信号的双边拉氏变换时，要同时给出收敛域，即任意信号和它的双边拉氏变换连同收敛域才是一一对应的。

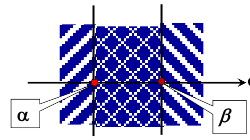
例3：求双边信号$f(t)=e^{\alpha t}\varepsilon(t)+e^{\beta t}\varepsilon(-t)$的拉氏变换

$$F_b(s)=F_{b1}(s)+F_{b2}(s)$$

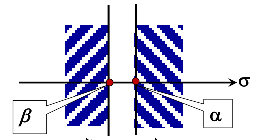
已知：因果信号收敛域满足$\sigma>\alpha$

反因果信号收敛域满足$\sigma<\beta$

∴双边信号当$\alpha<\beta$时其拉氏变换存在，其收敛域为$\alpha<\mathrm{Re}[s]<\beta$



当α<β时



当α≥β时

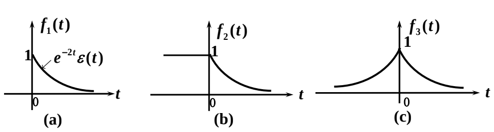
双边信号当α≥β时没有公共的收敛域，其拉氏变换不存在。
可见双边拉氏变换收敛条件比较苛刻，限制了应用。

三、单边拉普拉斯变换的收敛域

对于任意信号$f(t)$，其单边拉氏变换定义为 $F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

任意信号$f(t)$单边拉氏变换等于$f(t)\varepsilon(t)$的双边拉氏变换。

结论：任意信号$f(t)$的单边拉氏变换其收敛域为$\mathrm{Re}[s]=\sigma>\sigma_0$



三个信号单边拉氏变换为$F_1(s)=F_2(s)=F_3(s)=\dfrac{1}{s+2}(\sigma>-2)$

说明1：本书主要讨论单边拉氏变换，没有特殊说明均指单边拉氏变换。

说明2：为便于研究$t=0$时刻发生跳变的现象,规定积分下限 从0_-开始。

确定收敛域的一般规律

1) 时限信号（能量有限信号）$\sigma_0=-\infty$(即全部s平面收敛)

2) 周期信号及幅度稳定信号(只需稍加衰减) $\sigma>\sigma_0=0$

3) 其增长速度比指数函数的衰减慢的信号 $\sigma>\sigma_0=0$

如 $f(t)=t^n$ $\lim\limits_{t\to\infty}t^n e^{-\sigma t}=0$ $\sigma>\sigma_0=0$

4) $f(t)=e^{\alpha t}$ $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-(\sigma-\alpha)t}=0$ $\sigma>\sigma_0=\alpha$

但 $f(t)=e^{t^2}$ 找不到衰减比其增长更快的指数函数满足$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)e^{-\sigma t}=0$ ∴其$F(S)$不存在

四、常用信号的单边拉普拉斯变换

对于任意信号$f(t)$，其单边拉氏变换定义为 $F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

1. $\delta(t)\leftrightarrow 1$ $(\mathrm{Re}[s]>-\infty)$

2. $\delta'(t)\leftrightarrow s$ $(\mathrm{Re}[s]>-\infty)$

   $\delta^{(n)}(t)\leftrightarrow s^n$ $(\mathrm{Re}[s]>-\infty)$

   $\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)\varphi(t)dt=(-1)^n\varphi^{(n)}(0)$

3. $\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s}$ $(\mathrm{Re}[s]>0)$

   $\mathcal{L}[g_\tau(t-\tau/2)]=\dfrac{1-e^{-s\tau}}{s}$ $\mathrm{Re}[s]>-\infty$

4. $e^{s_0 t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s-s_0}$ $(\mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[s_0])$

   若 $s_0=\pm\alpha$ 且$\alpha>0$

   $e^{\pm\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s\mp\alpha}$ $(\mathrm{Re}[s]>\alpha)$

   若 $s_0=\pm j\omega_0$ 且$\omega_0>0$

   $e^{\pm j\omega_0 t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s\mp j\omega_0}$ $(\mathrm{Re}[s]>0)$

5. $\sin\omega_0 t\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ $(\mathrm{Re}[s]>0)$

6. $\cos\omega_0 t\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$ $(\mathrm{Re}[s]>0)$

5.2 拉普拉斯变换的性质

信号的两种描述方法 1) 时域描述 $f(t)$

2) 复频域(s)域描述 $F(s)$

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds & t>0\end{cases}$$

本节研究在某一域中对信号进行某种运算时在另一域中所引起的效应。

1. 线性（常用）

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_1$

$f_2(t)\leftrightarrow F_2(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_2$

则 $a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$

$\mathrm{Re}[s]>\max(\sigma_1,\sigma_2)\quad (5.2-1)$

例1：求 $\mathcal{L}[\sin\beta t\,\varepsilon(t)]$，$\mathcal{L}[\cos\beta t\,\varepsilon(t)]$

解：$\mathcal{L}[\sin\beta t\,\varepsilon(t)]=\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}\quad \mathrm{Re}[s]>0$

$\mathcal{L}[\cos\beta t\,\varepsilon(t)]=\dfrac{s}{s^2+\beta^2}\quad \mathrm{Re}[s]>0$

例2：求 $\mathcal{L}[(1-e^{-t})\,\varepsilon(t)]$

解得 $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{1}{s(s+1)}\quad \mathrm{Re}[s]>\max(\sigma_1,\sigma_2)=0$

说明：有时应用线性性质后，收敛域不满足上述条件，其收敛域可能扩大。

如 $\mathcal{L}[g_\tau(t-\tau/2)]=\mathcal{L}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)]\quad \mathrm{Re}[s]>-\infty$

2. 尺度变换

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$

则 $f(at)\varepsilon(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{a}F(\dfrac{s}{a})\quad \mathrm{Re}[s]>a\sigma_0\quad (5.2-4)$

其中 $a>0$ 且为实常数（为什么？）

例3：已知 $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$ 求 $\mathcal{L}[f(2t)]$

解：$f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+1}\quad \mathrm{Re}[s]>-1$

$f(2t)\leftrightarrow\dfrac{1}{2}F(\dfrac{s}{2})=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s/2+1}=\dfrac{1}{s+2}\quad \mathrm{Re}[s]>-2$

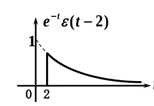
3. 时移特性（常用）

若 $f(t)\varepsilon(t)\leftrightarrow F(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$

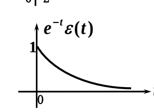
则 $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}F(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0\quad (5.2-5)$

（注：其中 t_0 为正实常数）

注意：延时信号 $f(t-t_0)\,\varepsilon(t-t_0)$ 是指因果信号 $f(t)\,\varepsilon(t)$ 延时 t_0 后的信号（即延时前后信号的波形形状不变）

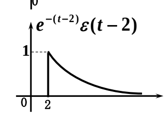


例4：求 $\mathcal{L}[e^{-t}\varepsilon(t-2)]$



$f(t)\varepsilon(t)=e^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+1}\quad \mathrm{Re}[s]>-1$

则 $e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+1}e^{-2s}\quad \mathrm{Re}[s]>-1$



解得 $e^{-t}\varepsilon(t-2)=e^{-2}e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)$

$\leftrightarrow e^{-2}\dfrac{1}{s+1}e^{-2s}\quad \mathrm{Re}[s]>-1$

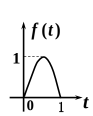
例5：求 $\mathcal{L}[\sin\pi t\,\varepsilon(t-1)]$

$f(t)=\sin\pi t\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}\quad \mathrm{Re}[s]>0$

$f(t)=\sin\pi t\varepsilon(t-1)=-\sin\pi(t-1)\varepsilon(t-1)$

$f(t)=\sin\pi t\varepsilon(t-1)\leftrightarrow\dfrac{-\pi}{s^2+\pi^2}e^{-s}\quad \mathrm{Re}[s]>0$

例6：求 $\mathcal{L}[f(t)]$



$f(t)=\sin\pi t\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\right]$

$=\sin\pi t\cdot\varepsilon(t)+\sin\pi(t-1)\varepsilon(t-1)$

解得 $F(s)=\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}(1+e^{-s})\quad \mathrm{Re}[s]>-\infty$

应用线性性质和时移性质求单边周期信号的拉氏变换

$f_T(t)=f_0(t)+f_0(t-T)+\cdots+f_0(t-nT)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_0(t-nT)\varepsilon(t)$

若 $f_0(t)\leftrightarrow F_0(s)$

则 $f_T(t)\leftrightarrow F_0(s)(1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots+e^{-nsT})$

等比级数，公比 $q=e^{-sT}$

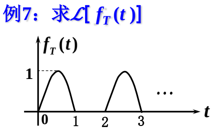
收敛条件 $|e^{-sT}|<1$（即 Re [s] >0）

$(1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots+e^{-nsT})=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}$

$f_T(t)\leftrightarrow F_0(s)\cdot\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\quad \mathrm{Re}[s]>0$

$f_T(t)=\delta_T(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)\leftrightarrow\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\quad \mathrm{Re}[s]>0\quad (5.2-7)$

例7：求 $\mathcal{L}[f_T(t)]$



$F_0(s)\leftrightarrow\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}(1+e^{-s})\quad \mathrm{Re}[s]=-\infty$

解得 $f_T(t)\leftrightarrow F_0(s)\dfrac{1}{1-e^{-2s}}$

$=\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-s}}\quad \mathrm{Re}[s]>0$

4. 复频移(s域平移)特性（常用）

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_1$

则 $f(t)e^{s_0 t}\leftrightarrow F(s-s_0),\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_1+\sigma_0\qquad (5.2-8)$

其中 $s_0=\sigma_0+j\omega_0$为复常数

例8： 求 $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\sin\beta t\,\varepsilon(t)]$，$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cos\beta t\,\varepsilon(t)]$

$$\sin\beta t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{\beta}{s^2+\beta}\qquad \mathrm{Re}[s]>0$$

解得 $e^{-\alpha t}\sin\beta t\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$，$\mathrm{Re}[s]>\sigma_1+\sigma_0=-\alpha\qquad(5.2-9)$

$$\cos\beta t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{s}{s^2+\beta^2}\qquad \mathrm{Re}[s]>0$$

解得 $e^{-\alpha t}\cos\beta t\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$，$\mathrm{Re}[s]>\sigma_1+\sigma_0=-\alpha\qquad(5.2-10)$

例9： 求$\mathcal{L}[e^{-t}\varepsilon(t-2)]$

法一：利用时移性

$$f(t)\varepsilon(t)=e^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1}\qquad \mathrm{Re}[s]>-1$$

则 $e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+1}e^{-2s}\qquad \mathrm{Re}[s]>-1$

解得 $e^{-t}\varepsilon(t-2)=e^{-2}e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)$

$$\leftrightarrow e^{-2}\frac{1}{s+1}e^{-2s}=\frac{1}{s+1}e^{-2(s+1)}\qquad \mathrm{Re}[s]>-1$$

法二：利用复频移性

解：$f(t)=\varepsilon(t-2)\leftrightarrow\dfrac{1}{s}e^{-2s}\qquad \mathrm{Re}[s]>0$

$$e^{-t}\varepsilon(t-2)\leftrightarrow\frac{1}{s+1}e^{-2(s+1)}\qquad \mathrm{Re}[s]>-1$$

例10: 已知$f(t)$的象函数$F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$，求$e^{-t}f(3t-2)$的拉氏变换。

同时含有几种运算

解：$f(t)\leftrightarrow\dfrac{s}{s^2+1}$

$\Downarrow$ 时移

$f(t-2)$

$\Downarrow$ 尺度变换

$f(3t-2)$

$\Downarrow$ 复频移

$e^{-t}f(3t-2)$

---

5. 时域微分特性（常用）

（时域微分和积分特性主要用于研究具有初始状态的微分方程）

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$

则 $f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0_-)$

$$\left.\begin{aligned}&f''(t)\leftrightarrow s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)\\&f^{(n)}(t)\leftrightarrow s^nF(s)-\sum_{m=0}^{n-1}s^{n-1-m}f^{(m)}(0_-)\end{aligned}\right\}\ (5.2\text{-}11)$$

说明：

1) 若$f(t)$是因果信号$f^{(m)}(0_-)=0$，$f^{(n)}(t)\leftrightarrow s^nF(s)$

2) $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$的收敛域至少与$\mathcal{L}[f(t)]$的相同，但有时可能扩大。

如 $\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s}\qquad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0=0$

$[\varepsilon(t)]'\leftrightarrow sF(s)=1\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0=-\infty$

例11: 已知$\cos t\varepsilon(t)\leftrightarrow\dfrac{s}{s^2+1}$ 求$\sin t\varepsilon(t)$的LT

解：设 $f(t)=\cos t\varepsilon(t)$

$$f'(t)=\delta(t)-\sin t\varepsilon(t)$$

$$\therefore\ \sin t\varepsilon(t)=\delta(t)-f'(t)$$

$$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0_-)$$

$$\sin t\varepsilon(t)\leftrightarrow 1-[sF(s)-f(0_-)]$$

$$=1-\frac{s^2}{s^2+1}=\frac{1}{s^2+1}$$

---

6. 时域积分特性

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$

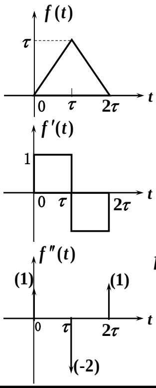
$$\text{则}\left.\begin{aligned}&\int_{0-}^{t}f(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}\\&\left(\int_{0-}^{t}\right)^n f(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s^n}\end{aligned}\right\}\quad(5.2-15)$$

$$\left.\begin{aligned}&f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}\\&f^{(-2)}(t)=\left(\int_{-\infty}^{t}\right)^2 f(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s^2}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s^2}+\frac{f^{(-2)}(0_-)}{s}\\&f^{(-n)}(t)=\left(\int^{t}\right)^n f(\tau)d\tau\leftrightarrow F(s)+\sum^{n}1\ f^{(-i)}(0\ )\end{aligned}\right\}\quad(5.2-16)$$

$$\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)d\tau\leftrightarrow\pi F_1(0)\delta(\omega)+\frac{F_1(j\omega)}{j\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)d\tau+f(-\infty)\leftrightarrow\pi F_1(0)\delta(\omega)+\frac{F_1(j\omega)}{j\omega}+2\pi f(-\infty)\delta(\omega)$$

例12：求图所示三角脉冲信号的*LT*



若$f(t)$导数的LT容易求,则可利用积分性质求$f(t)$的拉氏变换

$$f(t)\leftrightarrow F(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$$

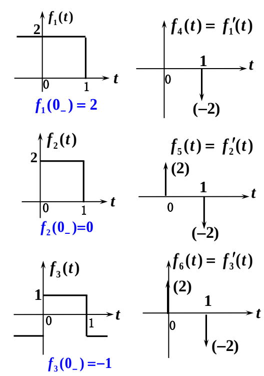
$$\left.\begin{aligned}&\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}\\&\left(\int_{0-}^{t}\right)^{n} f(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s^n}\end{aligned}\right\}$$

$$f(t)\leftrightarrow F(s)=\frac{F_1(s)}{s^2}=\frac{1-2e^{-\tau s}+e^{-2\tau s}}{s^2}\ \mathrm{Re}[s]>-\infty$$

$$f''(t)=f_1(t)\leftrightarrow F_1(s)=1-2e^{-\tau s}+e^{-2\tau s}$$

应用时域积分特性时注意的问题

$$\left.\begin{aligned}&f(t)\leftrightarrow F(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0\\&f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}\end{aligned}\right\}$$



$$F_1(s)=\frac{F_4(s)}{s}+\frac{f_1(0_-)}{s}=\frac{2(1-e^{-s})}{s}$$

$$F_2(s)=\frac{F_5(s)}{s}=\frac{2(1-e^{-s})}{s}$$

$$F_3(s)=\frac{F_6(s)}{s}+\frac{f_3(0_-)}{s}=\frac{1-2e^{-s}}{s}$$

例13： 已知 $\mathcal{L}[\varepsilon(t)]=1/s$，求 $\mathcal{L}[t^n\varepsilon(t)]$

因果信号的积分特性 $f^{(-1)}(t)=\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{1}{s}F(s)$

已知 $f(t)=\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$

$$\varepsilon^{(-1)}(t)=\int_0^t\varepsilon(\tau)d\tau=t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$$

$$\varepsilon^{(-2)}(t)=\int_0^t\left(\int_0^\tau\varepsilon(x)dx\right)d\tau=\frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^3}$$

$$\varepsilon^{(-3)}(t)=\frac{1}{3\times 2}t^3\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^4}$$

$$\varepsilon^{(-n)}(t)=\frac{1}{n!}t^n\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^{n+1}}$$

$$t^n\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}\qquad (5.2\text{-}23)$$

拉氏逆变换时要用

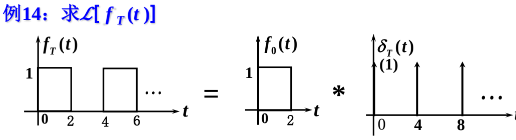
7. 时域卷积定理 [常用]

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_1$

$f_2(t)\leftrightarrow F_2(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_2$

则 $f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)F_2(s)\quad \mathrm{Re}[s]>$ (σ_1,σ_2的公共部分) (5.2−24)

例14：求$\mathcal{L}[f_T(t)]$



$$F_0(s)\leftrightarrow\frac{1-e^{-2s}}{s}\quad \mathrm{Re}[s]=-\infty\qquad \delta_T(t)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-sT}}\quad \mathrm{Re}[s]>0$$

解得 $f_T(t)\leftrightarrow F_0(s)\frac{1}{1-e^{-4s}}=\frac{1-e^{-2s}}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-4s}}=\frac{1}{s(1+e^{-2s})}\quad \mathrm{Re}[s]>0$

复频域卷积定理 (很少用不做要求)

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_1$

$f_2(t)\leftrightarrow F_2(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_2$

则 $f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}F_1(s)*F_2(s)\quad \mathrm{Re}[s]>(\sigma_1+\sigma_2)\quad (5.2\text{-}25)$

8. 复频域微分性质(不常用)

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)\quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$

$$\left.\begin{aligned}\text{则}\quad &(-t)f(t)\leftrightarrow\frac{dF(s)}{ds}\\&(-t)^n f(t)\leftrightarrow\frac{d^nF(s)}{ds^n}\end{aligned}\right\}\ \mathrm{Re}[s]>\sigma_0\qquad (5.2\text{-}30)$$

例15：求$\mathcal{L}[te^{-\alpha t}\varepsilon(t)]$

法1：令 $f(t)=e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+\alpha}\quad \mathrm{Re}[s]>-\alpha$

$$(-t)f(t)\leftrightarrow\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+\alpha}\right]=\frac{-1}{(s+\alpha)^2}\quad \mathrm{Re}[s]>-\alpha$$

解得 $tf(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+\alpha)^2}\quad \mathrm{Re}[s]>-\alpha$

法2：$t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$

$e^{-\alpha t}t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+\alpha)^2}$

9. 复频域积分性质(不常用)

若 $f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$

则 $\dfrac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{\infty} F(\eta)d\eta \quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0 \quad$ (5.2-31)

收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>\sigma_0$ 和 $\mathrm{Re}[s]>0$ 的重叠部分

例16：求 $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}\varepsilon(t)$ 的象函数

解：$\sin t\varepsilon(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s^2+1}$

$$\frac{\sin t}{t}\varepsilon(t)=Sa(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow \int_s^{\infty}\frac{1}{\eta^2+1}d\eta=\arctan\eta\Big|_s^{\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan s=\arctan(\frac{1}{s})$$

10. 初值定理和终值定理

1) 初值定理：由 $F(s)$ 直接求 $[f(0_+),\ f'(0_+),\ \ldots,\ f^{(n)}(0_+)]$

若 $f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$

$$\left.\begin{aligned} &f(0_+)=\lim_{t\to 0_+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s) \\ &f'(0_+)=\lim_{t\to 0_+} f'(t)=\lim_{s\to\infty} s\left[sF(s)-f(0_+)\right] \\ &f''(0_+)=\lim_{t\to 0_+} f''(t)=\lim_{s\to\infty} s\left[s^2F(s)-s\,f(0_+)-f'(0_+)\right] \end{aligned}\right\} \quad (5.2-35)$$

（则）

条件：$f(t)$ 不含 $\delta(t)$ 及其各阶导数 $\delta^{(n)}(t)$ [即 $F(s)$ 是真分式]

2) 终值定理 [$f(\infty)$ 是否存在可由 $F(s)$ 判断]

若 $f(t) \leftrightarrow F(s) \quad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$，$\sigma_0<0$

且 $f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)$ 存在

则 $f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s) \qquad (5.2-40)$

∵ 终值定理取 $s\to 0$ 的极限，

∴ $s=0$ 必须在 $sF(s)$ 的收敛域内（即 $\sigma_0<0$）

例17：已知 $F(s)=\dfrac{1}{s+1}$ 求 $f(0_+)$ 和 $f(\infty)$。

解得 $f(0_+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\dfrac{s}{s+1}=\lim_{s\to\infty}(1-\dfrac{1}{s+1})=1$

$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\dfrac{s}{s+1}=\lim_{s\to 0}(1-\dfrac{1}{s+1})=0$

例18：已知 $F(s)=\dfrac{2s}{s^2+4}$，求 $f(0_+)$ 和 $f(\infty)$。

解得 $f(0_+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty}\dfrac{2s^2}{s^2+4}=\lim_{s\to\infty}(2-\dfrac{8}{s^2+4})=2$

∵ $\sigma_0=0$ ∴ $f(\infty)$ 不存在。

5.3 拉普拉斯反变换

信号的两种描述方法 1) 时域描述 $f(t)$

2) 复频域(s)域描述 $F(s)$

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad \leftarrow \text{拉氏正变换}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \quad t\ge 0 \ \leftarrow \text{拉氏反变换}$$

所谓反变换是由 $F(s)$ 求原函数 $f(t)$ 的过程。

求拉普拉斯逆变换的方法 [当 $F(s)$ 为s的有理分式时]

1) 由逆变换的公式，利用复变函数中的留数定理求。

2) 查表法（附录C）

3) 部分分式展开法(常用，要求重点掌握)

常用信号的单边拉普拉斯变换

1. $\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (\mathrm{Re}[s]>-\infty)$
2. $\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n \quad (\mathrm{Re}[s]>-\infty)$
3. $\varepsilon(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}[s]>0)$
4. $e^{s_0 t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s-s_0} \quad (\mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[s_0])$
5. $\sin\omega_0 t\varepsilon(t) \leftrightarrow \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \quad (\mathrm{Re}[s]>0)$
6. $\cos\omega_0 t\varepsilon(t) \leftrightarrow \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad (\mathrm{Re}[s]>0)$
7. $\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \leftrightarrow \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \quad \mathrm{Re}[s]>0$
8. $t^n\varepsilon(t) \leftrightarrow \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

常用信号的象函数 $F(s)$ 为 s 的 n 次幂或有理分式

二、部分分式展开法

一般象函数 $F(s)$ 的形式为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \qquad (5.3-4)$$

其中 a_n、b_m 均为实数，m、n 为非负整数

若 $m\ge n$，则 $\dfrac{B(s)}{A(s)}$ 为假分式；若 $m<n$，则 $\dfrac{B(s)}{A(s)}$ 为真分式

当 $m<n$ 时

令 $A(s)=0$ 可求得 n 个根 $s_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ 　s_i 称为 $F(s)$ 的极点

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_i)\cdots(s-s_n)}$$

a) s_i 可以是单根 [单实(数)根，单复(数)根]

b) s_i 可以是重根 [重实根，重复根]

1. $F(s)$仅含有单极点 [即n个根为互不相等的单根时]

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_i)\cdots(s-s_n)}$$

$$=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_i}{s-s_i}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{(s-s_i)}\qquad(5.3-5)$$

求k_i的方法

$$(s-s_i)F(s)=\frac{(s-s_i)K_1}{(s-s_1)}+\frac{(s-s_i)K_2}{(s-s_2)}+\cdots+K_i+\cdots+\frac{(s-s_i)K_n}{(s-s_n)}$$

$$K_i=(s-s_i)F(s)\big|_{s=s_i}\quad(5.3-6)\qquad K_i=\frac{B(s_i)}{A'(s_i)}\quad(5.3-7)$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{(s-s_i)}\right]=\sum_{i=1}^{n}K_ie^{s_it}\varepsilon(t)\quad(5.3-8)$$

$$(s-s_i)F(s)=\frac{(s-s_i)K_1}{(s-s_1)}+\frac{(s-s_i)K_2}{(s-s_2)}+\cdots+K_i+\cdots+\frac{(s-s_i)K_n}{(s-s_n)}$$

$$K_i=(s-s_i)F(s)\big|_{s=s_i}\quad(5.3-6)$$

例1：求$F(s)=\dfrac{s+4}{s^3+3s^2+2s}$的原函数$f(t)$。

$$F(s)=\frac{s+4}{s^3+3s^2+2s}=\frac{s+4}{s(s+1)(s+2)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+2}$$

$$=\frac{2}{s}+\frac{-3}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

解得 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=(2-3e^{-t}+e^{-2t})\varepsilon(t)$

例2：求$F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2}$的原函数$f(t)$。

说明：$F(s)$中 $m>n$，$F(s)$为假分式不能直接进行分解

若 $F(s)$中$m\geq n$时则用多项式除法将$F(s)$分解为有理多项式$P(s)$和有理真分式之和后再进行反变换。

该分式为有理真分式

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=P(s)+\frac{D(s)}{A(s)}=C_{m-n}s^{m}\cdots+\ \ +C_1s+C_0+\frac{D(s)}{A(s)}$$

$$P(s)\leftrightarrow P(t)=C_{m-n}\delta^{(m-n)}(t)\cdots\ \ +C_1\delta'(t)+C_0\delta(t)$$

$$F(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2}=s+2+\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$=s+2+\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}\leftrightarrow f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+(2e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

2. $F(s)$含有共轭单复根时(若有单复根一定共轭成对出现)

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{s^2+Ps+Q}$$

$$=\frac{B(s)}{(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}$$

$P^2-4Q<0$

$s^2+Ps+Q=0$

$s_{1,2}=-\alpha\pm j\beta$

$$K_1=(s-s_1)F(s)\big|_{s=s_1}=|K_1|e^{j\theta}$$

$$K_2=(s-s_2)F(s)\big|_{s=s_2}=|K_1|e^{-j\theta}\qquad K_2=K_1^*$$

可见$A(S)$的根有共轭复根时，只需要求其中的一个系数即可写出相应的结果。

$$F(s)=\frac{|K_1|e^{j\theta}}{s-s_1}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}}{s-s_2}=\frac{|K_1|e^{j\theta}}{s-(-\alpha+j\beta)}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}}{s-(-\alpha-j\beta)}\quad(5.3-11)$$

$$F(s)=\frac{|K_1|e^{j\theta}}{s-s_1}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}}{s-s_2}=\frac{|K_1|e^{j\theta}}{s-(-\alpha+j\beta)}+\frac{|K_1|e^{-j\theta}}{s-(-\alpha-j\beta)}\quad(5.3-11)$$

$$\because e^{s_0t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-s_0}$$

$$f(t)=\left[|K_1|e^{j\theta}e^{(-\alpha+j\beta)t}+|K_1|e^{-j\theta}e^{(-\alpha-j\beta)t}\right]\varepsilon(t)$$

$$=|K_1|e^{-\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta)}+e^{-j(\beta t+\theta)}\right]\varepsilon(t)$$

$$=2|K_1|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\varphi)\varepsilon(t)\qquad(5.3-12)$$

例3：求$F(s)=\dfrac{s+3}{(s^2+2s+5)(s+2)}$的原函数。

三个特征根为$s_{1,2}=(-1\pm j2)$，$s_3=-2$

$$F(s)=\frac{s+3}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}=\left[\frac{K_1}{[s-(-1+j2)]}+\frac{K_2}{[s-(-1-j2)]}\right]+\frac{K_3}{(s+2)}$$

$$K_1=(s-s_1)\,F(s)\big|_{s=-1+j2}=\frac{s+3}{[s-(-1-j2)](s+2)}\bigg|_{s=-1+j2}=1/\sqrt{10}\angle-108.4^0$$

$$K_2=K_1^*=1/\sqrt{10}\angle108.4^\circ,\qquad K_3=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=1/5$$

$$f_1(t)=2|K_1|e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\varphi)\varepsilon(t)\qquad(4-74)$$

解得 $f(t)=\left[\dfrac{2}{\sqrt{10}}e^{-t}\cos(2t-108.4^\circ)+\dfrac{1}{5}e^{-2t}\right]\varepsilon(t)$

若$F(s)$只含一对共轭单极点,可用配平法直接利用变换对求反变换

$$\sin(\beta t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{\beta}{s^2+\beta^2},\quad e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\cos(\beta t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{s}{s^2+\beta^2},\quad e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

例4: 求$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{s}{s^2+s+1}$的原函数。

$A(s)$ 只含一对共轭复根

$$F(s)=\frac{s}{s^2+s+1}=\frac{(s+0.5)-0.5}{(s+0.5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}$$

$$=\frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}-\frac{\left(\sqrt{3}/2\right)\left(1/\sqrt{3}\right)}{(s+0.5)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}$$

$$f(t)=e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\varepsilon(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+30^\circ\right)\varepsilon(t)$$

3. $F(s)$ 含有重极点(重根)时

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_i)\cdots(s-s_n)}$$

当$A(s)=0$在$s=s_1$处有r重根 (即$s_1=s_2=\cdots=s_r$)时

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s-s_1)^rA_2(s)}=\frac{B(s)}{(s-s_1)^r\left[(s-s_{r+1})\cdots(s-s_i)\cdots(s-s_n)\right]}$$

$A_2(s)=0$ 含$s_{r+1}\sim s_n$个单根

$$F(s)=\left[\frac{K_{11}}{(s-s_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1i}}{(s-s_1)^{r+1-i}}+\cdots+\frac{K_{1r}}{(s-s_1)}\right]+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{K_j}{(s-s_j)}$$

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s-s_1)^rA_2(s)}=\frac{B(s)}{(s-s_1)^r\left[(s-s_{r+1})\cdots(s-s_i)\cdots(s-s_n)\right]}$$

$$=\left[\frac{K_{11}}{(s-s_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1i}}{(s-s_1)^{r+1-i}}+\cdots+\frac{K_{1r}}{(s-s_1)}\right]+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{K_j}{(s-s_j)}$$

求 K_{1i} 的方法

$$(s-s_1)^rF(s)=K_{11}+K_{12}(s-s_1)+\cdots+K_{1i}(s-s_1)^{i-1}+\cdots$$

$$+K_{1r}(s-s_1)^{r-1}+(s-s_1)^r\sum_{j=r+1}^{n}\frac{K_j}{(s-s_j)}$$

$\because s=s_1$时 $A_2(s_1)\neq 0$

$$K_{11}=(s-s_1)^rF(s)\big|_{s=s_1}\qquad(5.3-15)$$

$$K_{12}=\frac{d}{ds}(s-s_1)^rF(s)\big|_{s=s_1}\qquad(5.3-16)$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}(s-s_1)^rF(s)\big|_{s=s_1}\qquad(5.3-17)$$

$$F(s)=\left[\frac{K_{11}}{(s-s_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1i}}{(s-s_1)^{r+1-i}}+\cdots+\frac{K_{1r}}{(s-s_1)}\right]+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{K_j}{(s-s_j)}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(t)=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{K_{1i}}{(r-i)!}t^{r-i}\right]e^{s_1t}\varepsilon(t)+\sum_{j=r+1}^{n}K_je^{s_jt}\varepsilon(t)$$

$$t^n\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$t^ne^{s_it}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{n!}{(s-s_i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(r-1)!}e^{s_it}t^{r-1}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s-s_i)^r}$$

$$t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$$

$$e^{s_it}t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s-s_i)^2}$$

作为基本变换对记住

例5: 求$F(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}$的原函数 $f(t)$。

$A(s)=0$ 有三重根$s_1=s_2=s_3=-1$和单实根 $s_4=0$

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s+1)^3}+\frac{K_{12}}{(s+1)^2}+\frac{K_{13}}{(s+1)}+\frac{K_4}{s}$$

$$=\frac{3}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)}-\frac{2}{s}$$

$$\frac{1}{(r-1)!}e^{s_it}t^{r-1}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s-s_i)^r}$$

解得 $f(t)=\left(\frac{3}{2}t^2e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}-2\right)\varepsilon(t)$

$$K_{11}=(s-s_1)^rF(s)\big|_{s=s_1}\qquad(5.3-15)$$

$$K_{12}=\frac{d}{ds}(s-s_1)^rF(s)\big|_{s=s_1}\qquad(5.3-16)$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}(s-s_1)^rF(s)\big|_{s=s_1}\qquad(5.3-17)$$

说明：当$F(s)$不是有理分式时无法进行部分分式展开，需要利用基本信号的变换对和拉氏变换的性质求反变换。

例6: 求$F(s)=\frac{1-e^{-2s}}{s^2+\pi^2}$的原函数 $f(t)$。

$$F(s)=\frac{1}{s^2+\pi^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{s^2+\pi^2}-\frac{\pi e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\right)$$

解得 $f(t)=\frac{1}{\pi}\sin\pi t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$

$$\sin\pi t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$$

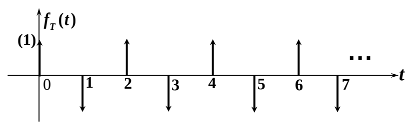
$$\sin\pi(t-2)\varepsilon(t-2)\leftrightarrow\frac{\pi}{s^2+\pi^2}e^{-2s}$$

例7：求$F(s)=\dfrac{1}{1+e^{-s}}$的原函数 $f(t)$。

$$F(s)=\frac{1}{1+e^{-s}}=\frac{(1-e^{-s})}{(1+e^{-s})(1-e^{-s})}=\frac{1-e^{-s}}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}-\frac{e^{-s}}{1-e^{-2s}}\qquad \because\ \delta_T(t)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-sT}}\quad (T=2s)$$

$$\therefore\ f_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-2n)-\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-2n-1)$$

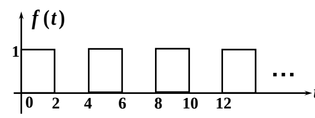


例8：求$F(s)=\dfrac{1}{s(1+e^{-2s})}$的原函数 $f(t)$。

$$F(s)=\frac{1}{s}\frac{(1-e^{-2s})}{(1+e^{-2s})(1-e^{-2s})}=\frac{(1-e^{-2s})}{s}\frac{1}{(1-e^{-4s})}$$

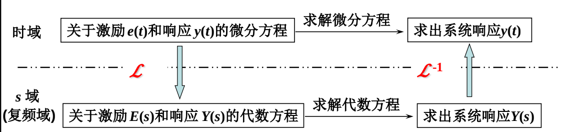
$$=\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}\right]\cdot\frac{1}{(1-e^{-4s})}\qquad \because\ \delta_T(t)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-sT}}\quad (T=2s)$$

$$\therefore\ f(t)=\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)$$



5.4 复频域分析

一、系统微分方程的复频域解



系统微分方程s域求解的依据是拉氏变换的时域微分性质

$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow s^nF(s)-\sum_{i=0}^{n-1}s^{n-1-i}f^{(i)}(0\_)$$

s域分析法可同时求出连续系统的$y_{zi}(t)$、 $y_{zs}(t)$ 及$y(t)$

例1: $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$，已知 $f(t)=\varepsilon(t)$，$y(0\_)=2$，$y'(0\_)=1$，求 $y_{zi}(t)$，$y_{zs}(t)$，$y(t)$。

$$\underbrace{[s^2+3s+2]}_{A(s)}Y(s)-\underbrace{[sy(0\_)+y'(0\_)+3y(0\_)]}_{M(s)}=\underbrace{(\ 2s+6\ )}_{B(s)}F(s)$$

只与方程左边系数 a_i 及 阶数有关

只与系数 a_i 及 $y^{(i)}(0_)$有关

只与方程右边系数 b_i 及阶数有关

$$Y(s)=\frac{M(s)}{A(s)}+\frac{B(s)}{A(s)}F(s)\ =Y_{zi}(s)\ +Y_{zs}(s)$$

$$Y(s)=\underbrace{\left(\frac{2s+7}{s^2+3s+2}\right)}_{Y_{zi}(s)}+\underbrace{\left(\frac{2s+6}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s}\right)}_{Y_{zs}(s)}=\left[\frac{5}{s+1}-\frac{3}{s+2}\right]+\left[\frac{-4}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{3}{s}\right]$$

$$Y_{zi}(s)\leftrightarrow y_{zi}(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$Y_{zs}(s)\leftrightarrow y_{zs}(t)=(-4e^{-t}+e^{-2t}+3)\varepsilon(t)$$

$$Y(s)\leftrightarrow y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(e^{-t}-2e^{-2t}+3)\varepsilon(t)$$

$$f''(t)\leftrightarrow s^2F(s)-sf(0\_)-f'(0\_)$$

例2: $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2e(t)$，已知$e(t)=5\cos t\varepsilon(t)$，$y(0\_)=1$，$y'(0\_)=-1$，求 $y_{zi}(t)$，$y_{zs}(t)$，$y_h(t)$，$y_p(t)$。

$$Y(s)=\left[\frac{sy(0\_)+y'(0\_)+5y(0\_)}{s^2+5s+6}\right]+\left[\frac{2}{s^2+5s+6}\cdot E(s)\right]$$

$$=\underbrace{\left(\frac{s+4}{s^2+5s+6}\right)}_{Y_{zi}(s)}+\underbrace{\left(\frac{2}{s^2+5s+6}\cdot\frac{5s}{s^2+1}\right)}_{Y_{zs}(s)}$$

零输入响应y_{zi} (t)

零状态响应y_{zs} (t)

$$y(t)=\left\{\underbrace{\left[2e^{-2t}-e^{-3t}\right]+\left[-4e^{-2t}+3e^{-3t}\right.}_{y_h(t)}\left.+\underbrace{\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})}_{y_p(t)}\right]\right\}\varepsilon(t)$$

y_h (t)(暂态响应)

y_p(t)稳态响应

$$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0\_)$$

$$f''(t)\leftrightarrow s^2F(s)-sf(0\_)-f'(0\_)$$

对于n阶系统微分方程的复频域解

n阶系统微分方程的一般形式为

$$\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_jf^{(j)}(t)\qquad 0\_\le t<\infty$$

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\left[s^iY(s)-\sum_{k=0}^{i-1}s^{i-1-k}y^{(k)}(0\_)\right]=\sum_{j=0}^{m}b_js^jF(s)$$

$$\underbrace{\left[\sum_{i=0}^{n}a_is^i\right]}_{A(s)}Y(s)-\underbrace{\sum_{i=0}^{n}a_i\left[\sum_{k=0}^{i-1}s^{i-1-k}y^{(k)}(0\_)\right]}_{M(s)}=\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{m}b_js^j\right]}_{B(s)}F(s)$$

只与方程左边系数 a_i 及 阶数有关

只与系数 a_i 及 $y^{(i)}(0\_)$ 有关，而与其它无关

只与方程右边系数 b_i 及阶数有关

$f^{(n)}$ $Y(s)=\dfrac{M(s)}{A(s)}+\dfrac{B(s)}{A(s)}E(s)=Y_{zi}(s)\ +Y_{zs}(s)$ (5.4−6) $^{-1)}(0\_)=0$,1,2⋯m)

二、系统函数

1. 系统函数$H(s)$的定义

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)} \qquad (5.4-20)$$

2. 系统函数$H(s)$的原函数

$$Y_{zs}(s)=H(s)\cdot F(s)\leftrightarrow y_{zs}(t)=h(t)*f(t)$$

$$h(t)\leftrightarrow H(s) \quad (5.4-22)$$

3. 系统函数$H(s)$与系统微分方程的关系

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

基本要求：

(1) 由系统的微分方程求$H(s)$

(2) 由$H(s)$写出系统的微分方程

$H(s)$只与微分方程的系数和阶数有关（即只与系统的结构、元件参数有关），而与激励、初始状态均无关，反映系统的固有特性。

$$\sum_{i=0}^{n}a_i y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j f^{(j)}(t) \qquad 0_-\le t<\infty$$

$$\underbrace{\left[\sum_{i=0}^{n}a_i s^i\right]}_{A(s)}Y(s)-\underbrace{\sum_{i=0}^{n}a_i\left[\sum_{k=0}^{i-1}s^{i-1-k}y^{(k)}(0_-)\right]}_{M(s)}=\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{m}b_j s^j\right]}_{B(s)}F(s)$$

$$Y(s)=\frac{M(s)}{A(s)}+\frac{B(s)}{A(s)}F(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs}(s)$$

例3: $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f'(t)-3f(t)$, 求$H(s)$

解：由系统的微分方程求$H(s)$

$$\text{解得}\quad H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{s-3}{s^2+4s+3}$$

例4: 已知某一系统的$H(s)=\dfrac{s+6}{s^2+5s+6}$写出该系统的微分方程。

解: 由$H(s)$写出系统的微分方程

$$(s^2+5s+6)Y_{zs}(s)=(s+6)F(s)$$

$$\text{求得}\quad y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f'(t)+6f(t)$$

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

例5: 某系统当$f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$时，$y_{zs}(t)=\left(e^{-t}-2e^{-2t}+3e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$

求 1)该系统的 $g(t)$, 2)该系统的微分方程。

解：$Y_{zs}(s)=\dfrac{1}{s+1}-2\dfrac{1}{s+2}+3\dfrac{1}{s+3}=H(s)\cdot F(s)=H(s)\cdot\dfrac{1}{s+1}$

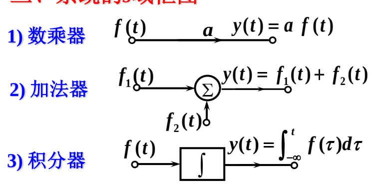
$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}=1-2\frac{s+1}{s+2}+3\frac{s+1}{s+3}=\frac{2s^2+6s+6}{s^2+5s+6}$$

$$G(s)=H(s)\cdot F(s)=H(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s+3}$$

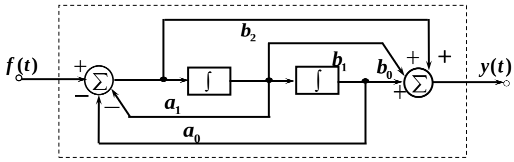
1) $G(s)\leftrightarrow g(t)=\left(1-e^{-2t}+2e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$

2) $y''+5y'+6y=2f''(t)+6f'(t)+6f(t)$

三、系统的s域框图

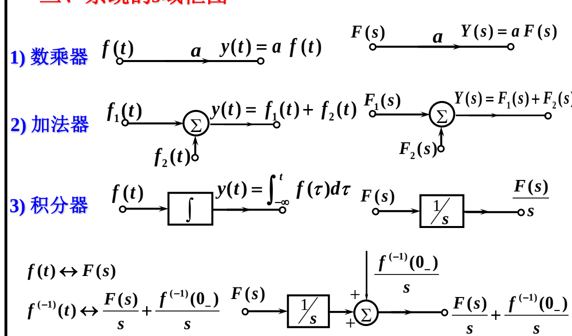


时域中每个框图表示一个子系统的激励和响应之间的某种数学运算关系，常用若干个子系统组成一个大系统。

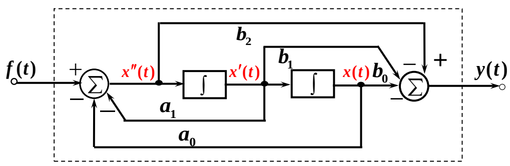


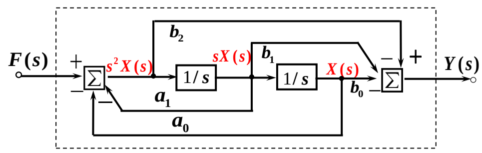
由系统的时域模型根据拉氏变换的性质可得系统的s域模型

三、系统的s域框图

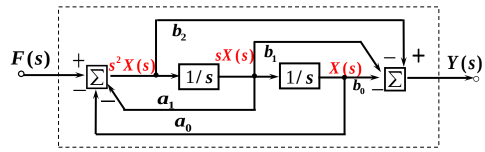


系统微分方程的形式与初始状态无关，因此常用零状态的s域模型





s域框图



s域框图

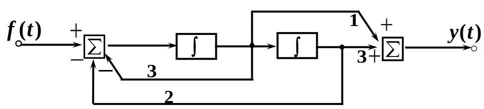
$$s^2X(s)=F(s)-a_1sX(s)-a_0X(s)$$

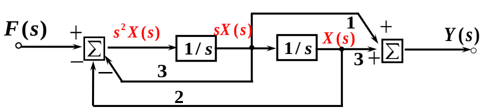
$$X(s)=\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}F(s)$$

$$Y(s)=(b_2s^2-b_1s-b_0)X(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{b_2s^2-b_1s-b_0}{s^2+a_1s+a_0}$$

例6：已知图所示系统$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=2$，求$y_{zi}(t)$





解： $H(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}=\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}$

例6：已知图所示系统$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=2$，求$y_{zi}(t)$

$$H(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

法1： $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+3f(t)$

$$y''_{zi}(t)+3y'_{zi}(t)+2y_{zi}(t)=0$$

$$Y_{zi}(s)=\frac{sy_{zi}(0_-)+y'_{zi}(0_-)+3y_{zi}(0_-)}{s^2+3s+2}\leftrightarrow y_{zi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

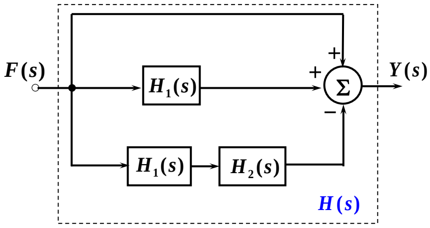
法2： $Y_{zi}(s)=\dfrac{k_1}{s+1}+\dfrac{k_2}{s+2}\leftrightarrow y_{zi}(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-2t}$

$$y_{zi}(t)=\left(4e^{-t}-3e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

$$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0_-)$$

$$f''(t)\leftrightarrow s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$$

例7：求下图所示复合系统的$H(s)$



$$H(s)=1+H_1(s)-H_1(s)H_2(s)$$

四、电路的复频域（s 域）分析法（讨论的方法与正弦稳态的相量法类似）

1. 基尔霍夫定律的s域形式

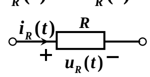
a) KCL 的s 域形式 $\sum_{k=1}^{n}i_k(t)=0\leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}I_k(s)=0$

b) KVL 的s 域形式 $\sum_{k=1}^{n}u_k(t)=0\leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}U_k(s)=0$

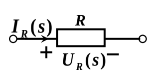
2. 元件VAR的s域形式及其s域模型（表5–3）

a) 电阻元件

$$u_R(t)=Ri_R(t)\leftrightarrow U_R(s)=RI_R(s)$$



时域模型

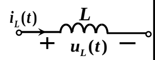


s域模型

b) 电感元件

$f(t) \leftrightarrow F(s)$

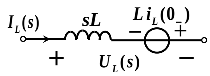
$f'(t) \leftrightarrow sF(s)-f(0_-)$



$u_L(t)=L\dfrac{di_L(t)}{dt} \leftrightarrow U_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0_-)$ (5.4-27a) 时域模型

sL具有阻抗的量纲，称为感抗

$Li_L(0_-)$～称内部电压源



串联形式的s域模型

$f(t) \leftrightarrow F(s)$

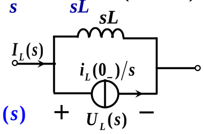
$\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow F(s)/s$

$i_L(t)=i_L(0_-)+\dfrac{1}{L}\int_{0_-}^{t} u_L(\tau)d\tau \leftrightarrow I_L(s)=\dfrac{i_L(0_-)}{s}+\dfrac{U_L(s)}{sL}$ (5.4-27b)

$\dfrac{i_L(0_-)}{s}$～称内部电流源

电感串、并联形式的s域模型之间可等效变换

当初始状态为零时电感的s模型$U_L(s)=sLI_L(s)$

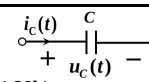


并联形式的s域模型

c) 电容元件

$f(t) \leftrightarrow F(s)$

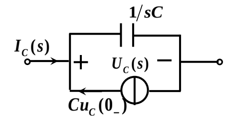
$f'(t) \leftrightarrow sF(s)-f(0_-)$



$i_C(t)=C\dfrac{du_C(t)}{dt} \leftrightarrow I_C(s)=sCU_C(s)-Cu_C(0_-)$ (5.4-28b) 时域模型

$\dfrac{1}{sC}$具有阻抗的量纲，称其为容抗

$Cu_c(0_-)$～称内部电流源



并联形式的s域模型

$f(t) \leftrightarrow F(s)$

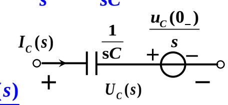
$\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow F(s)/s$

$u_C(t)=u_C(0_-)+\dfrac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i_C(\tau)\,d\tau \leftrightarrow U_C(s)=\dfrac{u_C(0_-)}{s}+\dfrac{I_C(s)}{sC}$ (5.4-28a)

$\dfrac{u_C(0_-)}{s}$～称内部电压源

电容串、并联形式的s模型之间可等效变换

当初始状态为零时电容的s模型$U_C(s)=\dfrac{I_C(s)}{sC}$



串联形式的s域模型

3. 电路的复频域(s域)分析法举例

求响应的步骤：

① 画0_等效电路，求初始状态；

② 画s域等效模型；

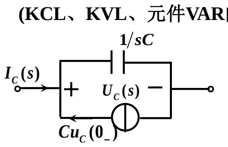
③ 列s域方程（代数方程）；

④ 解s域方程，求出响应的拉氏变换$U(s)$或$I(s)$；

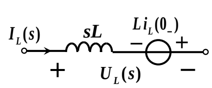
⑤ 拉氏反变换求$u(t)$或$i(t)$。

掌握用s域法求解电路的方法（会列方程）。

(KCL、KVL、元件VAR的s域形式及电路的s域模型)

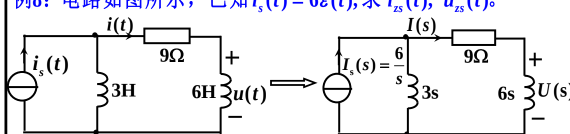


电容并联形式的s域模型



电感串联形式的s域模型

例8：电路如图所示，已知$i_s(t)=6\varepsilon(t)$，求$i_{zs}(t)$，$u_{zs}(t)$。



时域模型　　　s域模型

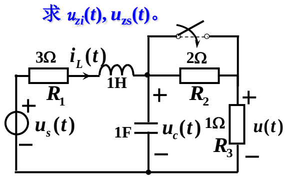
用s(复频)域法分析电路时，先求出电路的s域模型后可仿照正弦稳态电路的相量分析法，(分压、分流、等效变换、节点法、网孔法 、等效电路等) 求出待求变量的象函数。

解：$I(s)=\dfrac{3s}{3s+9+6s}\cdot\dfrac{6}{s}=\dfrac{2}{s+1} \leftrightarrow i_{zs}(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)$

$U(s)=sL\cdot I(s)=6s\cdot\dfrac{2}{s+1}=\dfrac{12s}{s+1}=12-\dfrac{12}{s+1}$

$\leftrightarrow u_{zs}(t)=12\delta(t)-12e^{-t}\varepsilon(t)$

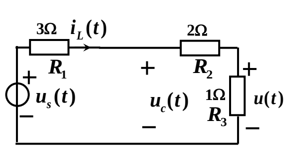
例9：图所示电路换路(t=0时换路)前已达到稳态，已知$u_s(t)$=12V，求 $u_{zi}(t), u_{zs}(t)$。



解：首先求出电容电压和电感电流的初始值

$i_L(0_-)=\dfrac{1}{R_1+R_2+R_3}u_s(t)$

$=\dfrac{1}{3+2+1}\cdot 12=2\text{A}$

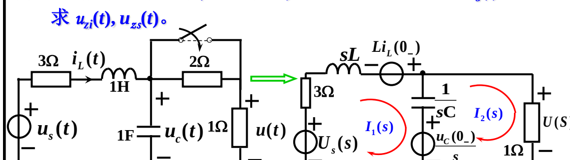


$u_C(0_-)=\dfrac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}u_s(t)$

$=\dfrac{2+1}{3+2+1}\cdot 12=6\text{V}$

稳态电路

例9：图所示电路换路(t=0时换路)前已达到稳态，已知$u_s(t)$=12V，求 $u_{zi}(t), u_{zs}(t)$。



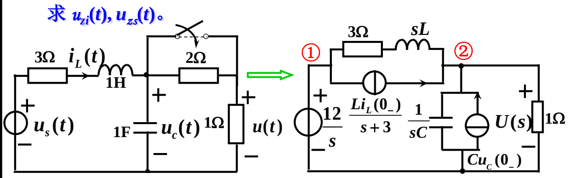
$u_L(t) \leftrightarrow U_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0_-)$ (5.4-27a)

$u_C(t) \leftrightarrow U_C(s)=\dfrac{u_C(0_-)}{s}+\dfrac{I_C(s)}{sC}$ (5.4-28a)

法1：列写网孔方程

$$\begin{cases}(3+s+1/s)I_1(s)-(1/s)I_2(s)=U_s(s)+Li_L(0_-)-u_C(0_-)/s\\-(1/s)I_1(s)+(1/s+1)I_2(s)=u_C(0_-)/s\end{cases}$$

例9：图所示电路换路(t=0时换路)前已达到稳态，已知$u_s(t)$=12V，求 $u_{zi}(t)$, $u_{zs}(t)$。



$$I_L(s)=\frac{i_L(0_-)}{s}+\frac{U_L(s)}{sL} \quad (5.4\text{-}27b)$$

$$I_C(s)=sCU_C(s)-Cu_C(0_-) \quad (5.4\text{-}28b)$$

代入

$u_C(0_-)$=6V

$i_L(0_-)$=2A

即可

法2：列写节点方程

$$\begin{cases} U_1(s)=\dfrac{12}{s}, U_2(s)=U(s) \\ (\dfrac{1}{3+s}+1+s)U_2(s)-(\dfrac{1}{3+s})U_1(s)=\dfrac{Li_L(0_-)}{s+3}+Cu_C(0_-) \end{cases}$$

五、拉氏变换与傅里叶变换的关系

说明：只讨论因果信号$f(t)$的拉氏变换与傅里叶变换的关系

FT 和 *LT* 都是对 $f(t)$ 进行积分变换

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

把 $f(t)$ 分解为无穷多项虚指数函数$e^{j\omega t}$之和

$$f(t)\leftrightarrow F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

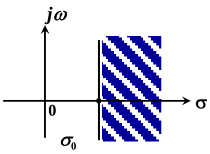
把 $f(t)$ 分解为无穷多项复指数函数e^{st}之和

因果信号$f(t)$ 的傅里叶变换$F(j\omega)$是其拉氏变换$F(s)$ 取$s=j\omega$时的特例，因此可以利用$f(t)$ 的拉氏变换$F(s)$ 求其$F(j\omega)$

$f(t)$ 的$F(s)$存在时其$F(j\omega)$不一定存在，

这取决于$F(s)$的收敛域，可分三种情况判断。

1) $\sigma_0>0$ 时（收敛坐标位于虚轴右边）



$$f(t)\leftrightarrow F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

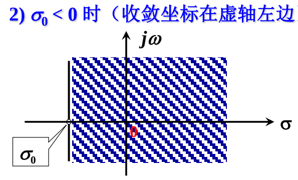
$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$\because$ $\text{Re}[s]>\sigma_0>0$ $\therefore$ 虚轴不在收敛域内,在$s=j\omega$处$F(s)$不收敛

结论：当$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$存在，且$\sigma_0>0$时 $\mathcal{F}[f(t)]$ 不存在

如$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\varepsilon(t)]=\dfrac{1}{s-\alpha}$，$\text{Re}[s]>\sigma_0=\alpha>0$

2) $\sigma_0<0$ 时（收敛坐标在虚轴左边）



$\because$ $\text{Re}[s]>\sigma_0<0$ 虚轴在收敛域内$s=j\omega$处$F(s)$ 收敛。

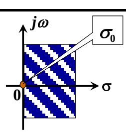
结论：

当$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$存在，且$\sigma_0<0$时$\mathcal{F}[f(t)]=F(j\omega)=F(s)|_{s=j\omega}$

如 $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\varepsilon(t)]=\dfrac{1}{s+\alpha}$，$\text{Re}[s]>\sigma_0=-\alpha$

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha t}\varepsilon(t)]=F(j\omega)=F(s)|_{s=j\omega}=\left.\frac{1}{s+\alpha}\right|_{s=j\omega}=\frac{1}{j\omega+\alpha}$$

3) σ_0=0 时（收敛坐标在虚轴上）



如 $f(t)=\varepsilon(t)$，$\sin\beta t\varepsilon(t)$，$\cos\beta t\varepsilon(t)$，$t^n\varepsilon(t)$等

此时$\mathcal{F}[f(t)]=F(j\omega)$、$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$均存在

因为Re [s] >σ_0=0，$F(s)$在虚轴上不收敛，所以不能简单地在$\mathcal{L}$ $[f(t)]=F(s)$中令$s=j\omega$ 求其$F(j\omega)$

$$F(j\omega)=F(s)|_{s=j\omega}+\pi\sum_{i=1}^{n}k_i\delta(\omega-\omega_i) \quad (5.4-38)$$

ω_i为$F(s)$在虚轴上的极点,n为$F(s)$在虚轴上的极点的个数

例10：由$\mathcal{L}[\varepsilon(t)]$求$\mathcal{F}[\varepsilon(t)]$

$$\varepsilon(t)\leftrightarrow 1/s \qquad k_i=1,\quad \omega_i=0$$

解得 $\mathcal{F}[\varepsilon(t)]=F(s)|_{s=j\omega}+\pi\delta(\omega)=(1/j\omega)+\pi\delta(\omega)$

例11：求 $\mathcal{F}[\cos\omega_0 t\ \varepsilon(t)]$

$$f(t)=\cos\omega_0 t\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{s}{s^2+\omega_0^2}=\frac{k_1}{s-j\omega_0}+\frac{k_2}{s+j\omega_0}$$

$$k_1=k_2=1/2$$

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t\ \varepsilon(t)]=F(s)|_{s=j\omega}+\frac{1}{2}\pi\delta(\omega+\omega_0)+\frac{1}{2}\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$=\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$F(j\omega)=F(s)|_{s=j\omega}+\pi\sum_{i=1}^{n}k_i\delta(\omega-\omega_i) \quad (5.4-38)$$

第五章重点及要求

1) 掌握拉氏变换定义式 、收敛域的概念，并熟练掌握典型信号的拉氏变换。

2) 灵活应用拉氏变换的常用性质和典型信号的变换对求信号的*LT*。

3) 熟练应用部分分式法及性质求拉氏反变换 。(仅有共轭复根时用配平法）

4) 熟练掌握微分方程的变换(s)域解法。

5) 深刻理解系统函数*H*(s)含义，会由微分方程求出*H*(s)，由*H*(s)写出系统的微分方程。

6) 能由系统*s* 域框图直接写出系统s域的方程

7) 掌握用*s*域法求解电路的方法。
(KCL、KVL、元件VAR的*s* 域形式及电路的*s* 域模型)

8) 理解因果信号的傅里叶变换与拉斯变换关系的含意，
掌握 $F(j\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega}$ $\sigma_0<0$