

第二章 逻辑代数基础

主要要求：

- 掌握逻辑代数的基本公式和定理。
- 掌握逻辑函数的表示方法及相互转换。
- 掌握逻辑函数的化简方法。

最小项的卡诺图表示法

将 n 变量的 2^n 个最小项用 2^n 个小方格表示，并且使相邻最小项在几何位置上也相邻且循环相邻，这样排列得到的方格图称为 n 变量最小项卡诺图，简称为卡诺图。

二变量卡诺图

$A \backslash B$	0	1
0	0	1
1	2	3

三变量卡诺图

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

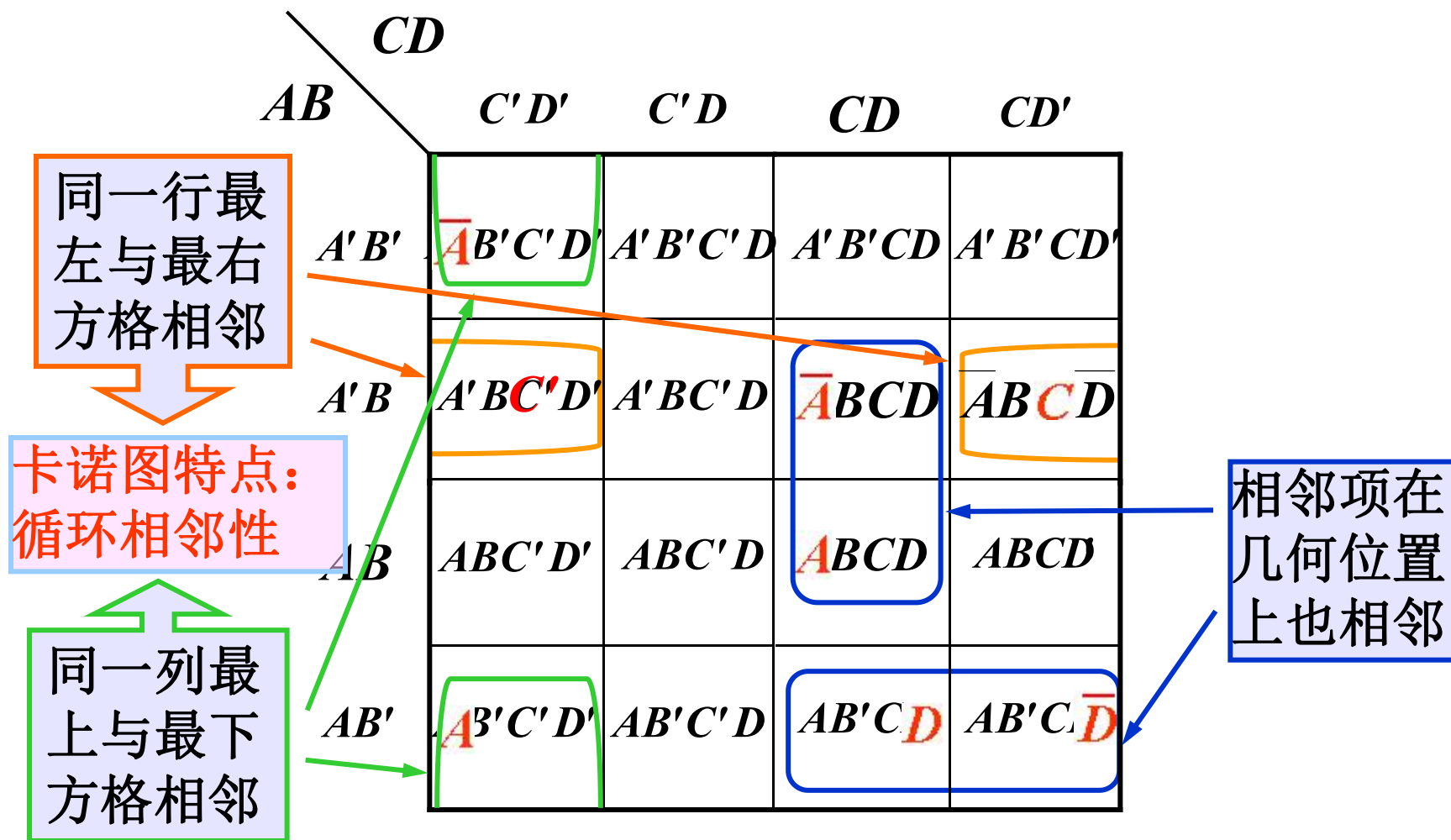
以循环码排列以保证相邻性

四变量卡诺图

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

五变量卡诺图

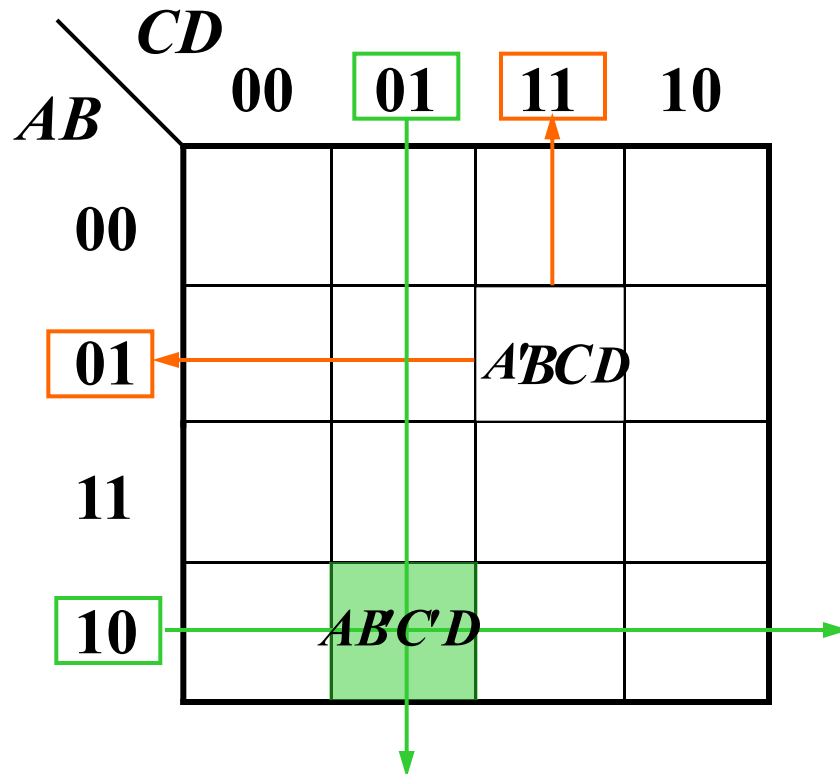
$AB \backslash CDE$									
		000	001	011	010	110	111	101	100
00		m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01		m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11		m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10		m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}



- ★ 如何写出卡诺图方格对应的最小项？
- ★ 已知最小项如何找相应小方格？

原变量取 1，反变量取 0。

例如 $AB'C'D \longrightarrow 1001$



三、用卡诺图表示逻辑函数

(一) 逻辑函数的标准与或式

每一个与项都是最小项的与或逻辑式称为标准与或式，又称最小项表达式。

任何形式的逻辑式都可以转化为标准与或式，而且逻辑函数的标准与或式是唯一的。

(二) 用卡诺图表示逻辑函数



用卡诺图表示逻辑函数举例

已知
标准
与或
式画
函数
卡诺
图

[例] 试画出函数 $Y = \sum m(0, 1, 12, 13, 15)$ 的卡诺图

解: (1) 画出四变量卡诺图

(2) 填图

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	00	1	1		
	01				
11	11	1	1	1	
	10				

逻辑式中的最小项 m_0 、 m_1 、 m_{12} 、 m_{13} 、 m_{15} 对应的方格填 1，其余不填。

已知真值表画函数卡诺图

[例] 已知逻辑函数 Y 的真值表如下，试画出 Y 的卡诺图。

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Y</i>
m_0	0	0	0	1
	0	0	1	0
m_2	0	1	0	1
	0	1	1	0
m_4	1	0	0	1
	1	0	1	0
m_6	1	1	0	1
	1	1	1	0

解：(1) 画 3 变量卡诺图。

(2) 找出真值表中 $Y=1$ 对应的最小项，在卡诺图相应方格中填 1，其余不填。

		<i>BC</i>			
		00	01	11	10
<i>A</i>	0	1			1
	1	1			1

[例] 已知 $Y = A'D + ((AB)'(C + (BD)'))'$, 试画出 Y 的卡诺图。

解: (1) 将逻辑式转化为与或式

$$\begin{aligned} Y &= A'D + AB + (C + (BD)')' \\ &= A'D + AB + C'BD \end{aligned}$$

(2) 作变量卡诺图

(3) 根据与或式填图

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$\bar{A}D$ 对应最小项为同时满足 $A = 0, D = 1$ 的方格。

$\bar{B}CD$ 对应最小项为同时满足 $B = 1, C = 0, D = 1$ 的方格

AB 对应最小项为同时满足 $A = 1, B = 1$ 的方格。

例：将最大项之积式填入K图

$$Y = (A + B + C)(A' + B + C')(A' + B + C)$$
$$= \prod M(0,4,5)$$

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	1	1	1
	1	0	0	1	1

例：将下列函数式填入K图。

$$F_1 = A(BC + B'C') + A(BC' + B'C)$$

$$F_2 = AC + AB'CD + ABC + C'D + ABD$$

$$F_3 = \sum m(0,1,3,4,6,8,11,15)$$

$$F_4 = \prod M(3,5,6,7,10,12,14)$$

四、用卡诺图化简逻辑函数

化简规律

2 个相邻最小项有 1 个变量相异，相加可以消去这 1 个变量，化简结果为相同变量的与；

4 个相邻最小项有 2 个变量相异，相加可以消去这 2 个变量，化简结果为相同变量的与；

8 个相邻最小项有 3 个变量相异，相加可以消去这 3 个变量，化简结果为相同变量的与；

.....

2^n 个相邻最小项有 n 个变量相异，相加可以消去这 n 个变量，化简结果为相同变量的与。

消
异
存
同

例如

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1			1
10	1			1

8 个相邻项合并消去 3 个变量

\overline{A}

$$\begin{aligned}
 &= \underline{ABC'D'} + \underline{AB'C'D'} + \underline{ABCD'} + \underline{AB'CD'} \\
 &= AC'D' + ACD' = AD'
 \end{aligned}$$

4 个相邻项合并消去 2 个变量，
化简结果为相同变量相与。



卡诺图化简法步骤

- ♥ 画函数卡诺图
- ♥ 对填 1 的相邻方格画包围圈
- ♥ 将各圈分别化简
- ♥ 将各圈化简结果逻辑加



画包围圈规则

包围圈必须包含 2^n 个相邻 1 方格，且必须成方形。先圈小再圈大，圈越大越好；1 方格可重复圈，但须每圈有新 1；每个“1”格须圈到，孤立项也不能掉。

注意

同一列最上边和最下边循环相邻，可画圈；
同一行最左边和最右边循环相邻，可画圈；
四个角上的 1 方格也循环相邻，可画圈。

★ [例] 用卡诺图化简逻辑函数

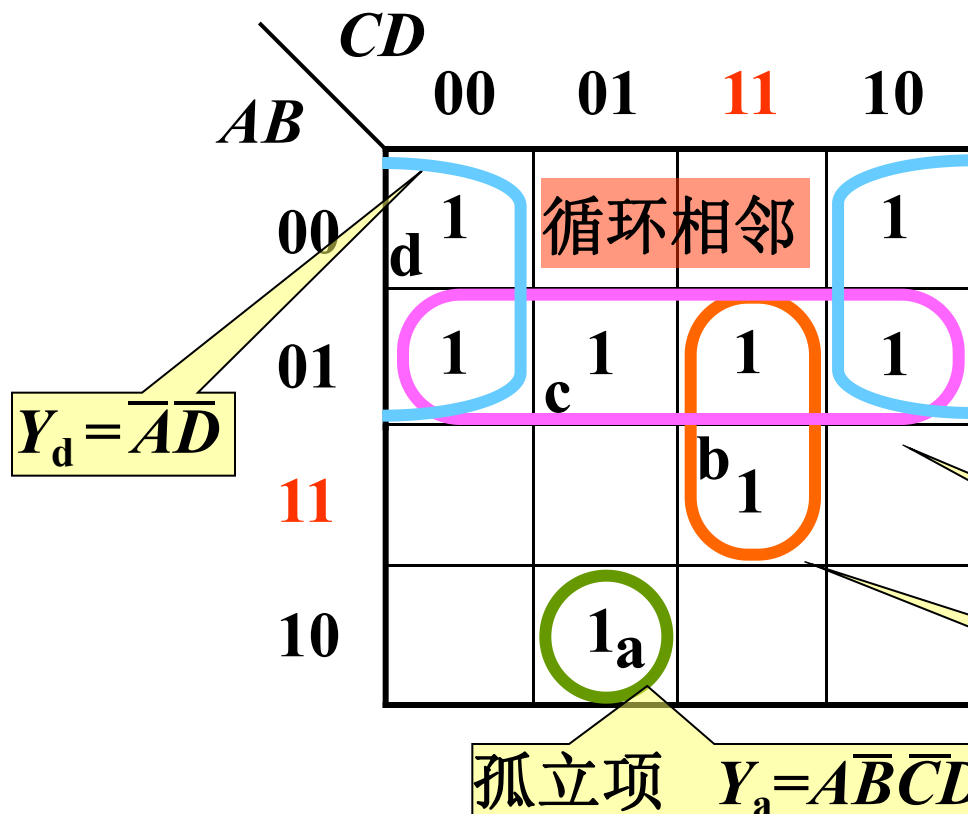
$$Y(A,B,C,D)=\sum m (0,2,4,5,6,7,9,15)$$

解：(1) 画变量卡诺图

(2) 填卡诺图

(3) 画包围圈

(4) 将各图分别化简



圈 4 个可消去 2 个变量，化简为 2 个相同变量相与。

圈 2 个可消去 1 个变量，化简为 3 个相同变量相与。

(5) 将各图化简结果逻辑加，得最简与或式

$$Y = AB'C'D + BCD + A'B + A'D'$$

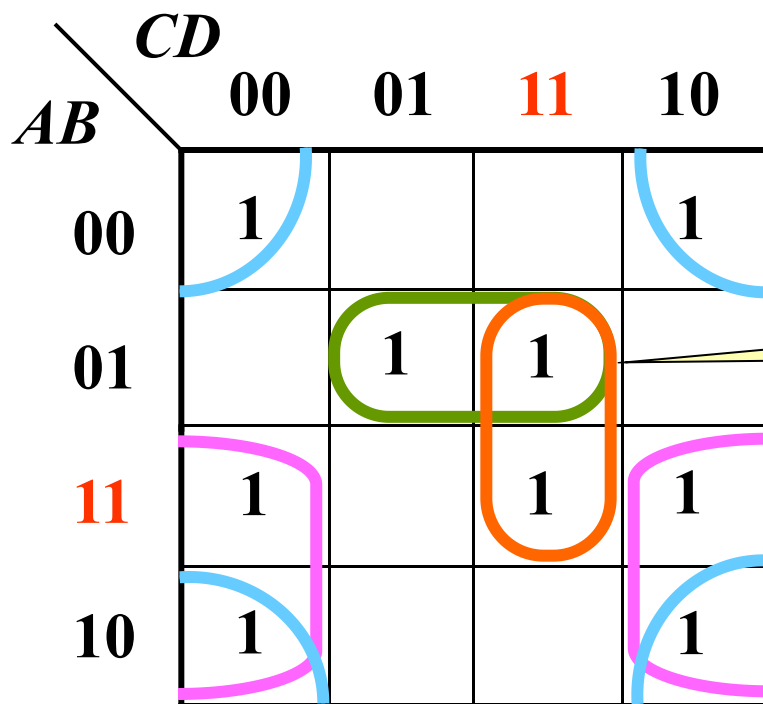
★ [例] 用卡诺图化简逻辑函数

$$Y(A,B,C,D)=\sum m (0,2,5,7,8,10,12,14,15)$$

解：(1) 画变量卡诺图

(2) 填卡诺图

(3) 画圈



4 个角上的最小项循环相邻

消 1 个剩 3 个

消 2 个剩 2 个

(4) 求最简与或式 $Y = A'BD + BCD + AD + B'D'$

★ [例] 用卡诺图化简逻辑函数

$$Y = \underbrace{A'B'CD}_{0011} + \underbrace{A'BC'D'}_{0100} + \boxed{A} \boxed{C'D} + \boxed{ABC} + \boxed{BD}$$

0011
↓
 m_3

0100
↓
 m_4

解: (1) 画变量卡诺图

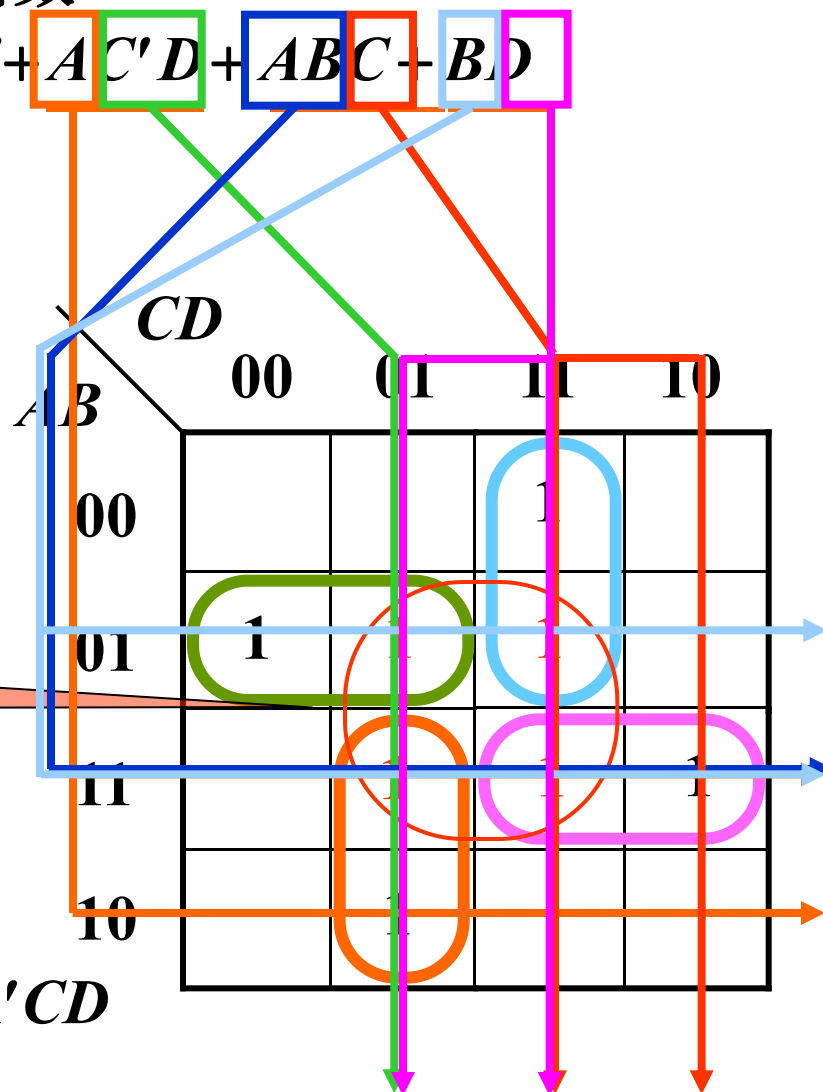
(2) 填图

(3) 画圈

要画吗?

(4) 化简

$$Y = A'BC + AC'D + ABC + A'CD$$



★ [例] 已知某逻辑函数的卡诺图如下所示，试写出其最简与或式。

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	1	1	0	0
	10	1	1	1	1

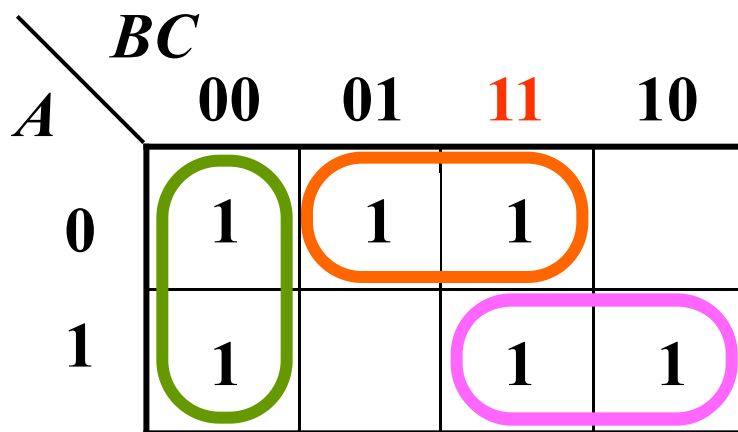
0 方格很少且为相邻项，故用圈 0 法先求 \bar{Y} 的最简与或式。

解： $Y' = ABC$

$$Y = (Y')' = (ABC)' = A' + B' + C'$$

★[例] 已知函数真值表如下，试用卡诺图法求其最简与或式。

解：(1) 画函数卡诺图

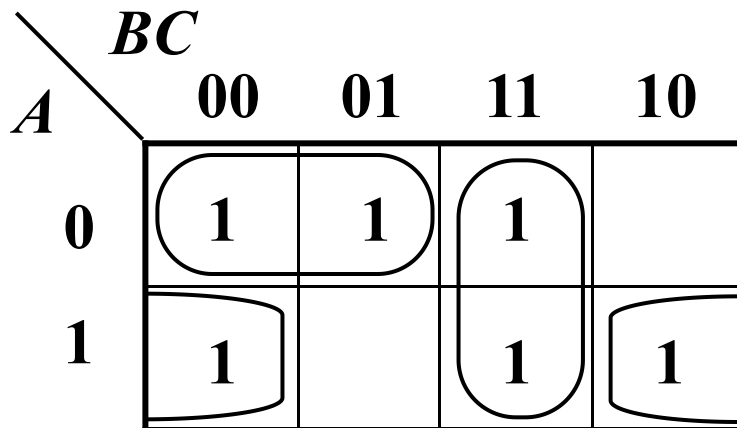


(2) 画圈

(3) 化简 $Y = B'C' + A'C + AB$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Y</i>
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

注意：
该卡诺图还有其他画圈法



$$Y = A'B' + AC' + BC$$

可见，最简结果未必唯一。