

笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！！】

复变函数与积分变换第一课

一、复数的加减乘除

举例：

$$\textcircled{1} (2+3i) + (3+4i) = (2+3) + (3+4)i$$

$$= 5 + 7i$$

$$\textcircled{2} (3+4i) - (2+3i) = (3-2) + (4-3)i$$

$$= 1 + i$$

$$\textcircled{3} (2+3i) \times (3+4i) = 2 \times 3 + 2 \times 4i + 3i \times 3 + 3i \times 4i$$

$$= 6 + 8i + 9i - 12$$

$$= -6 + 17i$$

$$\textcircled{4} \frac{2+3i}{3+4i} = \frac{(2+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i+9i+12}{3^2-(4i)^2} = \frac{18+i}{9+16} = \frac{18}{25} + \frac{1}{25}i$$

二、求复数的实部与虚部

例 1：已知 $z=9-10i$ ，试求 $\text{Re}(z)$ ， $\text{Im}(z)$ 。

$$\text{Re}(z)=9, \text{Im}(z)=-10$$

例 2：已知 $z=3+3i$ ， $w=\frac{z-1}{z+i}$ ，试求 $\text{Re}(w)$ ， $\text{Im}(w)$ 。

$$w = \frac{z-1}{z+i} = \frac{3+3i-1}{3+3i+i} = \frac{2+3i}{3+4i} = \frac{18}{25} + \frac{1}{25}i$$

$$\operatorname{Re}(w)=\frac{18}{25}, \quad \operatorname{Im}(w)=\frac{1}{25}$$

三、求某复数的共轭复数

例 1: 已知 $z=9-10i$, 试求 \bar{z} 。

$$\bar{z}=9+10i$$

例 2: 已知 $z=3+3i$, 试求 $\frac{z-1}{\bar{z}+7i}$ 。

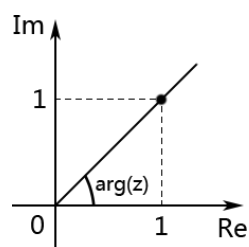
$$\frac{z-1}{\bar{z}+7i}=\frac{3+3i-1}{3-3i+7i}=\frac{2+3i}{3+4i}=\frac{18}{25}+\frac{1}{25}i$$

四、求模、辐角和辐角主值

例 1: 已知 $z=1+i$, 试求 z 的模、辐角、辐角主值。

$$\because \operatorname{Re}(z)=1, \quad \operatorname{Im}(z)=1$$

$$\therefore |z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$



$$\because \arg(z) \in (-\pi, \pi]$$

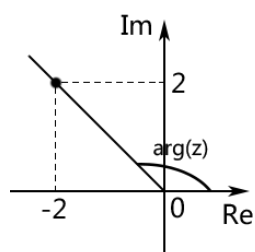
$$\therefore \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

例 2: 已知 $w = -2 + 2i$, 试求 w 的模、辐角、辐角主值。

$$\therefore \text{Re}(w) = -2, \quad \text{Im}(w) = 2$$

$$\therefore |w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$



$$\therefore \arg(w) \in (-\pi, \pi]$$

$$\therefore \arg(w) = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{Arg}(w) = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

有关模、辐角、辐角主值的运算

公式	例子
$ z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 $	$ (3+4i)(5+6i) = 3+4i \cdot 5+6i $
$\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$	$\left \frac{3+4i}{5+6i} \right = \frac{ 3+4i }{ 5+6i }$
$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$	$\text{Arg}(-1 + \sqrt{3}i)^4 = 4\text{Arg}(-1 + \sqrt{3}i)$
$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$	$\text{Arg}\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{3+4i}\right) = \text{Arg}(-1 + \sqrt{3}i) - \text{Arg}(3+4i)$

五、复数的开方

例 1: 求 $\sqrt[4]{16}$

$$|z|=|16|=16, \theta=\arg(16)=0$$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{16} &= 16^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{0+2k\pi}{4} + i \sin \frac{0+2k\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} \right), \quad k=0,1,2,3\end{aligned}$$

六、代数式、三角式、指数式转换

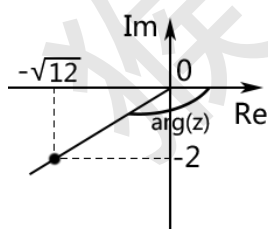
例 1: 将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化为三角式、指数式。

$$x = -\sqrt{12}, y = -2$$

$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{12})^2 + (-2)^2} = 4$$

$$\therefore \arg(z) \in (-\pi, \pi]$$

$$\therefore \theta = \arg(z) = -\frac{5}{6}\pi$$



$$\therefore \text{三角式 } z = 4 \left[\cos \left(-\frac{5}{6}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{5}{6}\pi \right) \right]$$

$$\text{指数式 } z = 4e^{i \cdot \left(-\frac{5}{6}\pi \right)}$$

例 2: 将 $z=4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ 化为代数式、指数式。

$$r=4, \theta=30^\circ$$

$$\therefore x=r\cos\theta=4\cos 30^\circ=2\sqrt{3}$$

$$y=r\sin\theta=4\sin 30^\circ=2$$

$$\therefore \text{代数式 } z=2\sqrt{3}+2i$$

$$\text{指数式 } z=4e^{i\cdot 30^\circ}=4e^{i\cdot \frac{\pi}{6}}$$

复变函数与积分变换第二课

一、将由 x 、 y 表示的方程化为复数形式

例 1：将 $2x+3y=1$ 化为复数形式。

$$\text{将 } \begin{cases} x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases} \text{ 代入原方程}$$

$$\text{则有 } 2 \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} + 3 \cdot \frac{z-\bar{z}}{2i} = 1$$

$$\text{整理, 得 } (3+2i)z + (-3+2i)\bar{z} - 2i = 0$$

二、将复数形式方程化为由 x 、 y 表示的方程/直角坐标方程

例 1：将 $\operatorname{Re}(2+\bar{z})=4$ 化为直角坐标方程。

$$\text{将 } \begin{cases} z = x + yi \\ \bar{z} = x - yi \end{cases} \text{ 代入原方程}$$

$$\text{则有 } \operatorname{Re}[2+(x-yi)]=4$$

$$\because 2+(x-yi) = 2+x-yi \quad \text{实部为 } 2+x$$

$$\therefore 2+x=4$$

$$\text{即 } x=2$$

三、将 $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ 形式的参数方程化为复数形式

例 1: 将 $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ 化为复数形式。

$$z = x + yi$$

$$= (t+1) + i \cdot (t^2+1)$$

四、将复数形式的参数方程化为 $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ 形式/一般形式

例 1: 将 $z = (1+i)t + 2+i$ 化为一般形式。

$$z = (1+i)t + 2+i$$

$$= (t+2) + i \cdot (t+1)$$

$$\therefore \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

五、已知 $z = \dots$, 求其在映射下的象

例 1: 求 $z = 1 + \sqrt{3}i$ 在映射 $w = z^2$ 下的象。

$$w = z^2 = (1 + \sqrt{3}i)^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

六、已知 $\arg(z)$ 范围，求其在映射下的象

例 1: 求 $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$ 在映射 $w = z^2$ 下的象。

$$\text{设 } z = re^{i\theta}$$

$$\text{则 } w = z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i \cdot 2\theta}$$

$$\therefore \arg(w) = 2\theta$$

$$\therefore \arg(w) = \frac{2\theta}{\theta} \cdot \arg(z) = 2\arg(z)$$

$$\therefore 0 < \arg(w) < \pi$$

七、已知由 x 、 y 表示的方程，求其在映射下的象

例 1: 求 $2(x^2 + y^2) + 3x - 4y + 1 = 0$ 在映射 $w = \frac{1}{z}$ 下的象。

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w}$$

$$\text{即 } x + yi = \frac{1}{u + vi}$$

$$x + yi = \frac{u}{u^2 + v^2} + \frac{-v}{u^2 + v^2}i$$

$$\text{将 } \begin{cases} x = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2 + v^2} \end{cases} \text{ 代入原方程}$$

$$\text{整理, 得 } u^2 + v^2 + 3u + 4v + 2 = 0$$

例 2: 求函数 $w = \frac{1}{z}$ 将 z 平面上的曲线 $2(x^2 + y^2) + 3x - 4y + 1 = 0$

映射到 w 平面上的曲线方程。

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w}$$

$$\text{即 } x+yi = \frac{1}{u+vi}$$

$$x+yi = \frac{u}{u^2+v^2} + \frac{-v}{u^2+v^2}i$$

$$\text{将 } \begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases} \text{ 代入原方程}$$

$$\text{整理, 得 } u^2+v^2+3u+4v+2=0$$

小知识点

两个复数(不全为实数)不能比较大小

$$8+6i > 1+3i \quad (\times)$$

复变函数与积分变换第三课

一、计算复数的三角函数

例 1: 计算 $\cos 2i$

$$\cos 2i = \frac{e^{i(2i)} + e^{-i(2i)}}{2} = \frac{e^{-2} + e^2}{2}$$

注意: $\sin z$ 、 $\cos z$ 取值范围为 $(-\infty, +\infty)$, 不再是 $[-1, 1]$ 。

二、计算复数的对数函数

例 1: 计算 $\text{Ln}(1+i)$

$$\begin{aligned}\text{Ln}(1+i) &= \ln|1+i| + i\arg(1+i) + 2k\pi i \\ &= \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i\end{aligned}$$

例 2: 计算 $\text{Ln}(2)$

$$\begin{aligned}\text{Ln}(2) &= \ln|2| + i\arg(2) + 2k\pi i \\ &= \ln 2 + 2k\pi i\end{aligned}$$

例 3: 已知 $z=1+i$, 请计算 $\ln z$

$$\ln(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i)$$

$$=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i$$

例 4: 已知 $z=2$, 请计算 $\text{Ln}z$ 的主值

$$\text{Ln}(2)=\ln|2|+i\arg(2)=\ln 2$$

三、计算复数的指数函数

例 1: 已知 $z=1+i$, 请计算 e^z

$$z=1+i \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$e^{1+i}=e(\cos 1+i\sin 1)$$

例 2: 计算 $e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\theta \end{cases}$$

$$e^{i\theta}=e^0(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$$

四、已知关于 e^z 的式子, 求 z

例 1: 已知 $e^z-1-i=0$, 求 z

$$e^z = 1 + i$$

$$\ln(e^z) = \ln(1 + i)$$

$$z = \ln(1 + i)$$

$$= \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

例 2: 已知 $e^{iz} - 2e^{-iz} = 0$, 求 z

$$e^{iz}(e^{iz} - 2e^{-iz}) = e^{iz} \cdot 0$$

$$e^{2iz} - 2 = 0$$

$$e^{2iz} = 2$$

$$\ln(e^{2iz}) = \ln 2$$

$$2iz = \ln 2$$

$$z = \frac{\ln 2}{2i}$$

$$z = -\frac{\ln 2}{2}i + k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

五、计算复数的幂函数

例 1: 计算 $(1 + i)^2$

$$(1 + i)^2 = (1 + i)(1 + i)$$

$$= 1^2 + 2i + i^2$$

$$= 2i$$

例 2: 计算 $(4 + 4\sqrt{3}i)^{\frac{2}{3}}$

$$\begin{cases} r = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8 \\ \theta = \arg(4 + 4\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (4 + 4\sqrt{3}i)^{\frac{2}{3}} &= 8^{\frac{2}{3}} \left[\cos \frac{2(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)}{3} + i \sin \frac{2(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)}{3} \right] \quad k=0,1,2 \\ &= 4 \left(\cos \frac{2\pi + 12k\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi + 12k\pi}{9} \right) \quad k=0,1,2 \end{aligned}$$

例 3: 计算 $(1 + i)^i$

$$\begin{aligned} (1 + i)^i &= e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i[\ln|1+i| + i \arg(1+i) + 2k\pi i]} \\ &= e^{(2k\pi - \pi/4) + \ln\sqrt{2}i} \quad k=0, \pm 1, \pm 2 \dots \\ &= e^{2k\pi - \pi/4} (\cos \ln\sqrt{2} + i \sin \ln\sqrt{2}) \quad k=0, \pm 1, \pm 2 \dots \end{aligned}$$

复变函数与积分变换第四课

一、 $f(z)=u(x,y)+v(x,y)i$ 形式的复函数求导

例 1: 求 $f(z)=x^2+2y+2(x+y)i$ 的导数。

$$u(x,y)=x^2+2y \quad v(x,y)=2(x+y)$$

$$u'_x=2x \quad v'_x=2$$

$$\therefore f'(z)=2x+2i$$

例 2: 求 $f(z)=3x^2y+(3x+2y)i$ 的导数。

$$u(x,y)=3x^2y \quad v(x,y)=3x+2y$$

$$u'_x=6xy \quad v'_x=3$$

$$\therefore f'(z)=6xy+3i$$

二、 $f(z)=?z$ 形式的复函数求导

例 1: 求 $f(z)=e^z$ 的导数。

$$f'(z)=(e^z)'=e^z$$

例 2: 求 $f(z)=\pi iz^2$ 的导数。

$$f'(z) = (\pi iz^2)' = \pi i(z^2)' = \pi i \cdot 2z^{2-1} = 2\pi iz$$

三、判断解析、可导、有极限之间的关系

例：

$f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点连续是 $f(z)$ 在该点解析的 必要不充分 条件。

$f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点可导是 $f(z)$ 在该点有极限的 充分不必要 条件。

$f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点有极限是 $f(z)$ 在该点可导的 必要不充分 条件。

四、判断函数在哪可导与解析

例 1：讨论 $f(z)=(x-y)^2+2(x+y)i$ 在何处可导、何处解析。

$$u=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2 \quad v=2(x+y)=2x+2y$$

$$u'_x=2x-2y \quad v'_x=2$$

$$u'_y=-2x+2y \quad v'_y=2$$

$$\text{令 } \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2y=2 \\ -2x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow x-y-1=0$$

\therefore 在直线 $x-y-1=0$ 处可导，处处不解析

例 2：已知 $f(z)=k\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x}$ 在域 $x>0$ 内解析，求 k 的值。

$$u = k \ln(x^2 + y^2) \quad v = \arctan \frac{y}{x}$$

$$u'_x = k \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad v'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$u'_y = k \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad v'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\text{令 } \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ k \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2kx = x \\ 2ky = y \end{cases}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

五、证明函数为调和函数

例 1: 证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 为调和函数。

$$u'_x = -6xy$$

$$u''_{xx} = -6y \quad \text{连续}$$

$$u''_{xy} = -6x \quad \text{连续}$$

$$u'_y = 3y^2 - 3x^2$$

$$u''_{yx} = -6x \quad \text{连续}$$

$$u''_{yy} = 6y \quad \text{连续}$$

$$\because u''_{xx} + u''_{yy} = -6y + 6y = 0$$

$\therefore u(x, y)$ 为调和函数

六、共轭调和函数

例 1: 已知 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数, 求 u 的共轭调和函数 $v(x,y)$ 。

$$v(x,y)=\int u'_x dy + \int \left[-u'_y - \left(\int u'_x dy \right)'_x \right] dx + C$$

$$\because u'_x = -6xy, \quad u'_y = 3y^2 - 3x^2$$

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_y = u'_x = -6xy \\ v'_x = -u'_y = 3x^2 - 3y^2 \end{cases}$$

$$\therefore v(x,y) = \int (-6xy) dy + \int [-(3y^2 - 3x^2) - (\int (-6xy) dy)'_x] dx + C$$

$$\because (-3xy^2)'_y = -6xy$$

$$\therefore \int (-6xy) dy = -3xy^2$$

$$\therefore v(x,y) = -3xy^2 + \int [3x^2 - 3y^2 - (-3xy^2)'_x] dx + C$$

$$= -3xy^2 + \int [3x^2 - 3y^2 - (-3y^2)] dx + C$$

$$= -3xy^2 + \int 3x^2 dx + C$$

$$\therefore (x^3)'_x = 3x^2$$

$$\therefore \int 3x^2 dx = x^3$$

$$\therefore v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$$

七、已知调和函数与共轭调和函数, 写出其解析函数

例 1: 已知 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数, 其共轭调和函数

$v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$, 试求其解析函数 $f(z)=u+vi$ 。

将 $x=x, y=0$ 代入 $u(x,y)=y^3-3x^2y$

$$\text{则 } u(x,0)=0^3-3x^2\cdot 0=0$$

$$\text{将 } x=x, y=0 \text{ 代入 } v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$$

$$\text{则 } v(x,0)=-3x\cdot 0^2+x^3+C=x^3+C$$

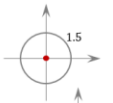
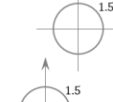
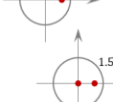
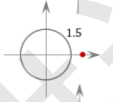
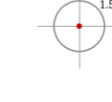

$$f(x)=u(x,0)+iv(x,0)=0+i(x^3+C)=ix^3+iC$$

$$\therefore f(z)=iz^3+iC$$

猴博士爱讲课

复变函数与积分变换第五课

一、判断 C 的范围内 $f(z)$ 有几个奇点，并写出奇点

设 C 为正向圆周 $ z =1.5$ ，写出 $\oint_C \frac{e^z}{z} dz$ 的奇点	$z \neq 0$		一个奇点: $z=0$
设 C 为正向圆周 $ z =1.5$ ，写出 $\oint_C e^z \cdot \cos z dz$ 的奇点	z 随意		没有奇点
设 C 为正向圆周 $ z =1.5$ ，写出 $\oint_C \frac{e^z}{z-1} dz$ 的奇点	$z \neq 1$		一个奇点: $z=1$
设 C 为正向圆周 $ z =1.5$ ，写出 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)} dz$ 的奇点	$z \neq 0, 1$		两个奇点: $z=0, z=1$
设 C 为正向圆周 $ z =1.5$ ，写出 $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$ 的奇点	$z \neq 2$		没有奇点
设 C 为正向圆周 $ z =1.5$ ，写出 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-2)} dz$ 的奇点	$z \neq 0, 2$		一个奇点: $z=0$

二、没有奇点，求 \oint_C

例 1: 设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$ ，求 $\oint_C e^z \cdot \cos z dz$

$$\oint_C e^z \cdot \cos z dz = 0$$

例 2: 设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$ ，求 $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 0$$

例 3: 设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$, 求 $\oint_C \frac{e^z}{(z-2)^2} dz$

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-2)^2} dz = 0$$

三、有一个奇点, 求 \oint_C

例 1: 设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$, 求 $\oint_C \frac{e^z}{z} dz$ (一个奇点 $z=0$)

$$\oint_C \frac{e^z}{z} dz = \oint_C \frac{e^z}{z-0} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot e^0 = 2\pi i$$

$$\begin{cases} f(z) = e^z \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

例 2: 设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$, 求 $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz$ (一个奇点 $z=0$)

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz = \oint_C \frac{\frac{e^z}{z-2}}{(z-0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f^{(1)}(0) = 2\pi i \cdot f'(0)$$

$$\begin{cases} f(z) = \frac{e^z}{z-2} \\ z_0 = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$f'(z) = \left(\frac{e^z}{z-2} \right)' = \frac{(e^z)' \cdot (z-2) - e^z \cdot (z-2)'}{(z-2)^2} = \frac{e^z(z-2) - e^z}{(z-2)^2} = \frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}$$

$$\therefore f'(0) = \frac{e^0(0-3)}{(0-2)^2} = \frac{-3}{4}$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz = 2\pi i \cdot f'(0) = 2\pi i \cdot \frac{-3}{4} = -\frac{3}{2}\pi i$$

四、有多个奇点，求 \oint_C

例 1：设 C 为正向圆周 $|z|=2$ ，求 $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz$

两个奇点： $z_1=0$ 、 $z_2=2$

① 针对 $z_1=0$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz = \oint_C \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(0)$$

$$\because f'(z) = \frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}$$

$$\therefore f'(0) = \frac{-3}{4}$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(0) = 2\pi i \cdot \frac{-3}{4} = -\frac{3}{2}\pi i$$

② 针对 $z_2=2$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz = \oint_C \frac{\frac{e^z}{z^2}}{z-2} dz = 2\pi i \cdot f(2)$$

$$\because f(z) = \frac{e^z}{z^2}$$

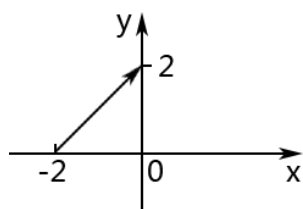
$$\therefore f(2) = \frac{e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4}$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i \cdot \frac{e^2}{4} = \frac{\pi i e^2}{2}$$

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz = \textcircled{1} + \textcircled{2} = -\frac{3}{2}\pi i + \frac{\pi i e^2}{2} = \frac{e^2-3}{2}\pi i$$

五、 C 为线段，求 $\int_C f(z) dz$

例 1：设 C 为图中所示线段，求 $\int_C (z+3) dz$



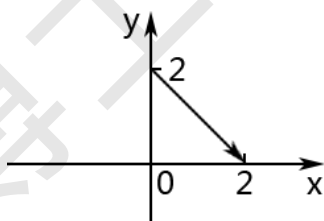
$$\begin{cases} x = x \\ y = x + 2 \end{cases} \quad (x: -2 \rightarrow 0)$$

$$z = x + yi = x + (x + 2)i$$

$$dz = d[x + (x + 2)i] = (1 + i)dx$$

$$\begin{aligned} \int_C (z + 3) dz &= \int_{-2}^0 [x + (x + 2)i + 3] \cdot (1 + i) dx \\ &= \int_{-2}^0 (2xi + 5i + 1) dx \\ &= 2 + 6i \end{aligned}$$

例 2: 设 C 为图中所示线段, 求 $\int_C (z + 3) dz$



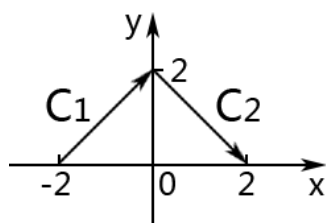
$$\begin{cases} x = x \\ y = -x + 2 \end{cases} \quad (x: 0 \rightarrow 2)$$

$$z = x + yi = x + (-x + 2)i$$

$$dz = d[x + (-x + 2)i] = (1 - i)dx$$

$$\begin{aligned} \int_C (z + 3) dz &= \int_0^2 [x + (-x + 2)i + 3] \cdot (1 - i) dx \\ &= \int_0^2 (-2ix - i + 5) dx \\ &= 10 - 6i \end{aligned}$$

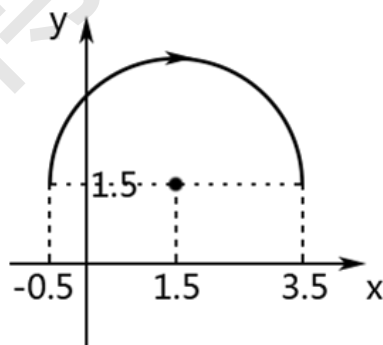
例 3: 设 C 为图中所示线段, 求 $\int_C (z+3) dz$



$$\begin{aligned}\int_C (z+3) dz &= \int_{C_1} (z+3) dz + \int_{C_2} (z+3) dz \\ &= 2+6i+10-6i \\ &= 12\end{aligned}$$

六、 C 为圆弧, 求 $\int_C f(z) dz$

例 1: 设 C 为图中所示圆弧, 求 $\int_C (z+1.5-1.5i) dz$



$$\begin{cases} x = 2\cos\theta + 1.5 \\ y = 2\sin\theta + 1.5 \end{cases} \quad (\theta: \pi \rightarrow 0)$$

$$z = x + yi = 2\cos\theta + 1.5 + (2\sin\theta + 1.5)i = 2e^{i\theta} + 1.5 + 1.5i$$

$$dz = d(2e^{i\theta} + 1.5 + 1.5i) = 2ie^{i\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned}
 \int_C (z+1.5-1.5i) \, dz &= \int_{\pi}^0 [(2e^{i\theta} + 1.5 + 1.5i) + 1.5 - 1.5i] \cdot 2ie^{i\theta} d\theta \\
 &= \int_{\pi}^0 (4ie^{2i\theta} + 6ie^{i\theta}) d\theta \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

猴博士复变讲稿

复变函数与积分变换第六课

一、判断级数收敛/发散

例 1: 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + i \frac{3}{n^2} \right]$ 收敛还是发散。

$$\text{实部: } 1 + \frac{1}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{2^\infty} = 1 \neq 0$$

$$\text{虚部: } \frac{3}{n^2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = \frac{3}{\infty^2} = 0$$

不是都趋近于 0

\therefore 该级数发散

例 2: 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + i \frac{3}{n^2} \right]$ 收敛还是发散。

$$\text{实部: } \frac{1}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^\infty} = 0$$

$$\text{虚部: } \frac{3}{n^2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = \frac{3}{\infty^2} = 0$$

$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 在 $|q| < 1$ 时收敛, $|q| \geq 1$ 时发散

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 在 $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n : q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{收敛} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n : q = 2 \geq 1 \Rightarrow \text{发散}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} : p = 2 > 1 \Rightarrow \text{收敛} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : p = 1 \leq 1 \Rightarrow \text{发散}$$

$$\therefore \sum \frac{1}{2^n} \text{ 收敛, } \sum \frac{3}{n^2} \text{ 收敛}$$

即 实部级数与虚部级数同时收敛

\therefore 该级数收敛

例 3: 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\pi}{2}i}}{n^2}$ 收敛还是发散。

$$\left| \frac{e^{-\frac{n\pi}{2}i}}{n^2} \right| = \left| \frac{e^{0-\frac{n\pi}{2}i}}{n^2} \right| = \frac{e^0}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 在 $|q| < 1$ 时收敛, $|q| \geq 1$ 时发散

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 在 $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n : q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ 收敛 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n : q = 2 \geq 1 \Rightarrow$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} : p = 2 > 1 \Rightarrow$ 收敛 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : p = 1 \leq 1 \Rightarrow$ 发散

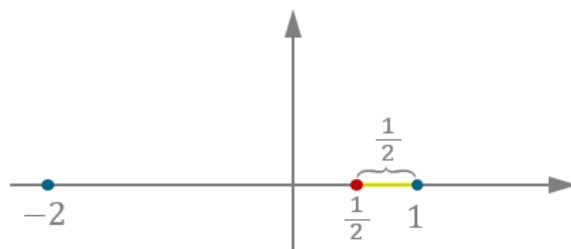
$\therefore \sum \frac{1}{n^2}$ 收敛

即 绝对值级数收敛

\therefore 该级数收敛

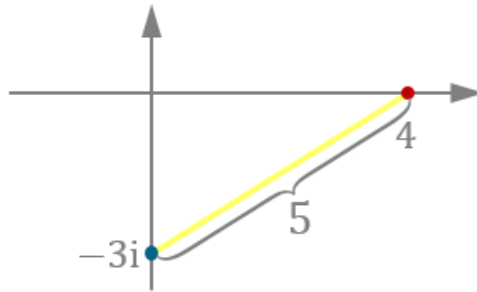
二、求收敛半径

例 1: 求 $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$ 在 $z_0 = \frac{1}{2}$ 处所展泰勒级数的收敛半径。



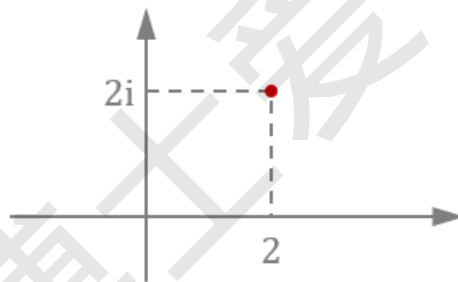
奇点: 1、-2 展开点: $z_0 = \frac{1}{2}$ 收敛半径: $R = \frac{1}{2}$

例 2: 求 $f(z)=\frac{z}{z+3i}$ 在 $z_0=4$ 处所展泰勒级数的收敛半径。



奇点: $-3i$ 展开点: $z_0=4$ 收敛半径: $R=5$

例 3: 求 $f(z)=e^z$ 在 $z_0=2+2i$ 处所展泰勒级数的收敛半径。

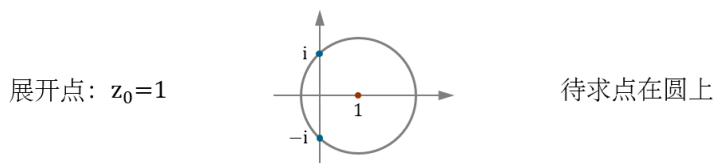


奇点: 没有 展开点: $z_0=2+2i$ 收敛半径: $R=\infty$

三、已知级数在某点收敛，判断其在另一点是否收敛

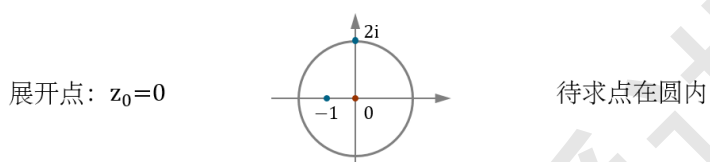
例 1:

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-1)^n$ 在 $z=i$ 处收敛, 则它必在 $z=-i$ 处收敛 …… (×)



例 2:

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=2i$ 处收敛, 则它必在 $z=-1$ 处收敛 …… (✓)



四、展开成泰勒级数, 并写出收敛半径

公式	使用条件	收敛半径 R
$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \dots$	无	$+\infty$
$\sin a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	无	$+\infty$
$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} + \dots$	无	$+\infty$
$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$	$ a < 1$	$ z - z_0 $ 的最大值
$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - \dots + (-1)^n a^n + \dots$	$ a < 1$	$ z - z_0 $ 的最大值

例 1: 将 $f(z)=\frac{1}{3z-6}$ 在 $z_0=1$ 处展开成泰勒级数, 并写出收敛半径。

设 $b=z-1$, 则 $z=b+1$

$$f(z)=\frac{1}{3(b+1)-6}=\frac{1}{3b-3}$$

$$f(z)=\frac{1}{3b-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-b}$$

$$\because \frac{1}{1-a}=1+a+a^2+\cdots+a^n+\cdots \quad |a|<1$$

$$\therefore \frac{1}{1-b}=1+b+b^2+\cdots+b^n+\cdots \quad |b|<1$$

$$\therefore f(z)=-\frac{1}{3}(1+b+b^2+\cdots+b^n+\cdots) \quad |b|<1$$

$$\therefore f(z)=-\frac{1}{3}[1+(z-1)+(z-1)^2+\cdots+(z-1)^n+\cdots] \quad |z-1|<1$$

$$\because |z-1|<1$$

$$\therefore R=1$$

例 2: 将 $f(z)=-\frac{1}{3+3z}$ 在 $z_0=1$ 处展开成泰勒级数, 并写出收敛半径

设 $b=z-1$, 则 $z=b+1$

$$f(z)=-\frac{1}{3+3(b+1)}=-\frac{1}{3b+6}$$

$$f(z)=-\frac{1}{3b+6}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{b}{2}}$$

$$\because \frac{1}{1+a}=1-a+a^2-\cdots+(-1)^na^n+\cdots \quad |a|<1$$

$$\therefore \frac{1}{1+\frac{b}{2}}=1-\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{b}{2}\right)^n+\cdots \quad \left|\frac{b}{2}\right|<1 \text{ 即 } |b|<2$$

$$\therefore f(z)=-\frac{1}{6}\left[1-\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{b}{2}\right)^n+\cdots\right] \quad |b|<2$$

$$\therefore f(z)=-\frac{1}{6}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

$$|z - 1| < 2$$

$$\because |z - 1| < 2$$

$$\therefore R=2$$

例 3: 将 $f(z)=\frac{1}{z^2-z-2}$ 在 $z_0=1$ 处展开成泰勒级数, 并写出收敛半径。

设 $b=z-1$, 则 $z=b+1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(b+1)^2 - (b+1) - 2} \\ &= \frac{1}{b^2 + b - 2} \\ &= \frac{1}{(b+2)(b-1)} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{b+2} \right) \\ &= \frac{1}{3b-3} - \frac{1}{3b+6} \end{aligned}$$

$$f_1(z) = \frac{1}{3b-3}$$

$$f_1(z) = -\frac{1}{3}(1+b+b^2+\cdots+b^n+\cdots) \quad |b| < 1$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{3b+6}$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{6} \left[1 - \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \cdots + (-1)^n \left(\frac{b}{2}\right)^n + \cdots \right] \quad |b| < 2$$

$$\therefore f(z) = f_1(z) + f_2(z) = -\frac{1}{6} \left[3 + \frac{3}{2}b + \frac{9}{4}b^2 + \cdots + \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n} b^n + \cdots \right]$$

$$|b| < 1 \text{ 且 } |b| < 2 \Rightarrow |b| < 1$$

$$\therefore f(z) = -\frac{1}{6} \left[3 + \frac{3}{2}(z-1) + \frac{9}{4}(z-1)^2 + \cdots + \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n} (z-1)^n + \cdots \right]$$

$$|z - 1| < 1$$

$$\because |z - 1| < 1 \quad \therefore R=1$$

五、展开成洛朗级数

公式：

公式	使用条件
$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \dots$	无
$\sin a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	无
$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} + \dots$	无
$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$	$ a < 1$
$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - \dots + (-1)^n a^n + \dots$	$ a < 1$

例 1：将 $f(z) = \frac{1}{1+z}$ 在圆环域 $2 < |z-1| < +\infty$ 内展开成洛朗级数。

① 设 $b = z - 1$ ，则 $z = b + 1$

$$f(z) = \frac{1}{1+(b+1)} = \frac{1}{2+b}$$

$$\textcircled{2} f(z) = \frac{1}{2+b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\frac{2}{b}+1} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{b}}$$

$$2 < |z-1| < +\infty$$

$$\text{即 } 2 < |b| < +\infty \Rightarrow 0 < \left| \frac{2}{b} \right| < 1$$

若要使用 $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 + \dots + (-1)^n a^n + \dots$ 则需满足 $|a| < 1$

$$\text{即 } \left| \frac{2}{b} \right| < 1$$

$$\frac{1}{1+\frac{2}{b}} = 1 - \frac{2}{b} + \left(\frac{2}{b}\right)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{2}{b}\right)^n + \dots$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{b}} = \frac{1}{b} - \frac{2}{b^2} + \frac{2^2}{b^3} - \dots + (-1)^n \frac{2^n}{b^{n+1}} + \dots$$

$$\textcircled{3} f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2^2}{(z-1)^3} - \cdots + (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} + \cdots$$

猴博士爱讲课

复变函数与积分变换第七课

一、判断奇点类型

奇点类型		函数特点
非孤立奇点		Ln 、 \ln 中使真数为 0 或负实数的点
孤立奇点	本性奇点	如 $\sin \frac{z+1}{z}$ 、 $\cos \frac{z}{z-1}$ 、 $e^{\frac{z+1}{z}}$ 等复合型中分母为 0 的点
	可去奇点	$\frac{z+1}{z}$ 、 $\frac{\sin z}{z^2}$ 等分母为 0 的点
	极点	

例题：

① $z_0 = -5$ 是 $f(z) = \text{Ln}(z+1)$ 的什么奇点？ 非孤立奇点

② $z_0 = -1$ 是 $f(z) = \ln(z+1)$ 的什么奇点？ 非孤立奇点

③ $z_0 = i$ 是 $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$ 的什么奇点？ 本性奇点

④ $z_0 = 3$ 是 $f(z) = \cos \frac{z}{z-3}$ 的什么奇点？ 本性奇点

⑤ $z_0 = 1$ 是 $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$ 的什么奇点？ 本性奇点

⑥ $z_0 = 1$ 是 $f(z) = \frac{1}{2} e^{\frac{z}{z-1}}$ 的什么奇点？ 本性奇点

⑦ $z_0 = 0$ 是 $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ 的什么奇点？ 可去奇点

$$f(0) = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} \quad \begin{array}{l} 0 \text{ 的 } 1 \text{ 次方} \\ 0 \text{ 的 } 1 \text{ 次方} \end{array} \quad 1-1=0$$

⑧ $z_0 = 0$ 是 $f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$ 的什么奇点？ 一级极点

$$f(0) = \frac{0}{\sin^2 0} = \frac{0}{\sin 0 \cdot \sin 0} = \frac{0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0^2} \quad \begin{array}{l} 0 \text{ 的 } 1 \text{ 次方} \\ 0 \text{ 的 } 2 \text{ 次方} \end{array} \quad 2-1=1$$

⑨ $z_0 = -2i$ 是 $f(z) = \frac{z}{(z+2i)^2}$ 的什么奇点? 二级极点

$$f(-2i) = \frac{-2i}{0^2} \quad \begin{array}{l} 0 \text{ 的 } 0 \text{ 次方} \\ 0 \text{ 的 } 2 \text{ 次方} \end{array} \quad 2-0=2$$

⑩ $z_0 = 0$ 是 $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的什么奇点? 三级极点

$$f(0) = \frac{1-e^0}{0^4} = \frac{0}{0^4} \quad \begin{array}{l} 0 \text{ 的 } 1 \text{ 次方} \\ 0 \text{ 的 } 4 \text{ 次方} \end{array} \quad 4-1=3$$

例 1: $z_0 = 0$ 是 $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^4}$ 的什么奇点?

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^4} = \frac{2\sin^2 \frac{z}{2}}{z^4}$$

将 $z=0$ 代入 $f(z)$

$$f(0) = \frac{2\left(\sin \frac{0}{2}\right)^2}{0^4} = \frac{2 \times 0^2}{0^4} \quad \begin{array}{l} (0 \text{ 的 } 2 \text{ 次方}) \\ (0 \text{ 的 } 4 \text{ 次方}) \end{array} \quad 4-2=2 \quad \text{二级极点}$$

例 2: $z_0 = \pi$ 是 $f(z) = \frac{\sin z}{1+\cos z}$ 的什么奇点?

$$f(z) = \frac{\sin z}{1+\cos z} = \frac{\sin z}{2\cos^2 \frac{z}{2}}$$

将 $z=\pi$ 代入 $f(z)$

$$f(\pi) = \frac{0}{2 \times 0^2} \quad \begin{array}{l} (0 \text{ 的 } 1 \text{ 次方}) \\ (0 \text{ 的 } 2 \text{ 次方}) \end{array} \quad 2-1=1 \quad \text{一级极点}$$

二、求孤立奇点处的留数

例题：

- ① 求 $f(z)=e^{\frac{z}{z-i}}$ 在 $z_0=i$ 处的留数。
 $z_0=i$ 是本性奇点
- ② 求 $f(z)=\cos \frac{z}{z-3}$ 在 $z_0=3$ 处的留数。
 $z_0=3$ 是本性奇点
- ③ 求 $f(z)=\sin \frac{z}{z-1}$ 在 $z_0=1$ 处的留数。
 $z_0=1$ 是本性奇点
- ④ 求 $f(z)=\frac{1}{2}e^{\frac{z}{z-1}}$ 在 $z_0=1$ 处的留数。
 $z_0=1$ 是本性奇点
- ⑤ 求 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在 $z_0=0$ 处的留数。
 $z_0=0$ 是可去奇点
- ⑥ 求 $f(z)=\frac{z}{\sin^2 z}$ 在 $z_0=0$ 处的留数。
 $z_0=0$ 是一级极点
- ⑦ 求 $f(z)=\frac{z}{(z+2i)^2}$ 在 $z_0=-2i$ 处的留数。
 $z_0=-2i$ 是二级极点
- ⑧ 求 $f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 在 $z_0=0$ 处的留数。
 $z_0=0$ 是三级极点

第⑤题：

留数为 0，即 $\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right)=0$ ，即 $C_{-1}=0$

第⑥题：

$$z_0=0 \quad f(z)=\frac{z}{\sin^2 z}$$

$$C_{-1}=\lim_{z \rightarrow 0}(z-0)\frac{z}{\sin^2 z}=\lim_{z \rightarrow 0}\frac{z^2}{\sin^2 z}=1$$

第⑦题:

$$z_0=-2i \quad f(z)=\frac{z}{(z+2i)^2}$$

$$C_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z \rightarrow -2i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z+2i)^n\frac{z}{(z+2i)^2}\right] \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } n=2, \text{ 则 } C_{-1} &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z \rightarrow -2i}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}[z] \\ &= \frac{1}{1!}\lim_{z \rightarrow -2i}\frac{d(z)}{dz} \\ &= \lim_{z \rightarrow -2i}(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

第⑧题:

$$z_0=0 \quad f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}$$

$$C_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z \rightarrow 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[z^n\frac{1-e^{2z}}{z^4}\right] \quad (n \geq 3)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } n=4, \text{ 则 } C_{-1} &= \frac{1}{(4-1)!}\lim_{z \rightarrow 0}\frac{d^{4-1}}{dz^{4-1}}(1-e^{2z})=\frac{1}{3!}\lim_{z \rightarrow 0}\frac{d^3}{dz^3}(1-e^{2z}) \\ &= \frac{1}{3!}\lim_{z \rightarrow 0}(1-e^{2z})'''=\frac{1}{3 \times 2}\lim_{z \rightarrow 0}[(1-e^{2z})']'' \\ &= \frac{1}{6}\lim_{z \rightarrow 0}(-2e^{2z})''=\frac{1}{6}\lim_{z \rightarrow 0}(-4e^{2z})'=\frac{1}{6}\lim_{z \rightarrow 0}(-8e^{2z}) \\ &= \frac{1}{6} \times (-8) = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

公式	使用条件	收敛半径 R
$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \cdots$	无	$+\infty$
$\sin a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	无	$+\infty$
$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	无	$+\infty$
$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$	$ a < 1$	$ z - z_0 $ 的最大值
$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - \cdots + (-1)^n a^n + \cdots$	$ a < 1$	$ z - z_0 $ 的最大值

例 1: 求 $f(z) = \frac{1}{2} e^{\frac{z}{z-1}}$ 在 $z_0=1$ 处的留数。

设 $b=z-1$, 则 $z=b+1$

$$\text{则 } f(z) = \frac{1}{2} e^{\frac{z}{z-1}} = \frac{1}{2} e^{\frac{b+1}{b+1-1}} = \frac{1}{2} e^{\frac{b+1}{b}} = \frac{1}{2} e^{1+\frac{1}{b}} = \frac{1}{2} e \cdot e^{\frac{1}{b}}$$

$$\because e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \cdots$$

$$\therefore e^{\frac{1}{b}} = 1 + b^{-1} + \frac{1}{2!} b^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!} b^{-n} + \cdots$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2} e \cdot e^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e \cdot b^{-1} + \frac{1}{2} e \cdot \frac{1}{2!} b^{-2} + \cdots + \frac{1}{2} e \frac{1}{n!} b^{-n} + \cdots$$

$$f(z) = \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e \cdot (z-1)^{-1} + \frac{1}{2} e \cdot \frac{1}{2!} (z-1)^{-2} + \cdots + \frac{1}{2} e \cdot \frac{1}{n!} (z-1)^{-n}$$

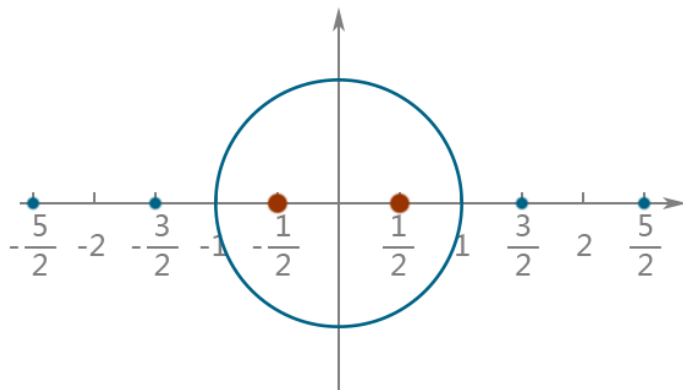
$$R = +\infty$$

$$\because (z-1)^{-1} \text{ 前系数为 } \frac{e}{2}$$

$$\therefore C_{-1} = \frac{e}{2}$$

三、用留数定理计算积分

例1: 用留数定理计算 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{\cos \pi z} dz$



令 $\cos \pi z = 0$ 则 $z = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2} \dots$

$z_0 = -\frac{1}{2}$ 或 $z_0 = \frac{1}{2}$

将 $z_0 = -\frac{1}{2}$ 代入 $f(z) = \frac{1}{\cos \pi z}$

则 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{0}$ $\begin{matrix} (0 \text{ 的 } 0 \text{ 次方}) \\ (0 \text{ 的 } 1 \text{ 次方}) \end{matrix}$ $1-0=1$ 一级极点

将 $z_0 = \frac{1}{2}$ 代入 $f(z) = \frac{1}{\cos \pi z}$

则 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$ $\begin{matrix} (0 \text{ 的 } 0 \text{ 次方}) \\ (0 \text{ 的 } 1 \text{ 次方}) \end{matrix}$ $1-0=1$ 一级极点

$z_0 = -\frac{1}{2}$ 为一级极点 $z_0 = \frac{1}{2}$ 为一级极点

将 $z_0 = -\frac{1}{2}$ 与 $f(z) = \frac{1}{\cos \pi z}$ 代入 $C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cos \pi z} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\left(z + \frac{1}{2}\right)'}{(\cos \pi z)'} \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{-\pi \sin \pi z} \\ &= \frac{1}{-\pi \sin \left[\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right]} \\ &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

将 $z_0 = \frac{1}{2}$ 与 $f(z) = \frac{1}{\cos \pi z}$ 代入 $C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cos \pi z} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)'}{(\cos \pi z)'} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{-\pi \sin \pi z} \\ &= \frac{1}{-\pi \sin \left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{\cos \pi z} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{\pi} + \left(-\frac{1}{\pi} \right) \right] = 0$$

猴博士复讲课

复变函数与积分变换第八课

一、求卷积 $f(t)*g(t)$

例 1: 已知 $f(t)=u(t)$, $g(t)=\begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求 $f(t)*g(t)$

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$f(\tau)=\begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau > 0 \end{cases}, \quad g(\tau)=\begin{cases} \sin \tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f(t-\tau)=\begin{cases} 0, & t-\tau < 0 \\ 1, & t-\tau > 0 \end{cases} \Rightarrow f(t-\tau)=\begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

$$t < 0 \text{ 时, } f(t-\tau) \cdot g(\tau) = 0$$

$$t > \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(t-\tau) \cdot g(\tau) = \begin{cases} \sin \tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(t-\tau) \cdot g(\tau) = \begin{cases} \sin \tau, & 0 \leq \tau < t \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$t < 0 \text{ 时, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau = 0$$

$$t > \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \tau d\tau = (-\cos \tau) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\cos \frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau = \int_0^t \sin \tau d\tau = (-\cos \tau) \Big|_0^t$$

$$= (-\cos t) - (-\cos 0)$$

$$= -\cos t - (-1) = 1 - \cos t$$

$$\text{综上, } f(t)*g(t)=\begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 - \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & , t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

例 2: 已知 $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, $g(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$,

其中 $\alpha > 0$ 、 $\beta > 0$ 且 $\alpha \neq \beta$, 求 $f(t)*g(t)$

$$f(\tau)=\begin{cases} e^{-\alpha\tau}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}, \quad g(\tau)=\begin{cases} e^{-\beta\tau}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

$$f(t-\tau)=\begin{cases} e^{-\alpha(t-\tau)}, & t-\tau \geq 0 \\ 0, & t-\tau < 0 \end{cases} \Rightarrow f(t-\tau)=\begin{cases} e^{-\alpha(t-\tau)}, & \tau \leq t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

$$t \geq 0 \text{ 时 } f(t-\tau) \cdot g(\tau) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot e^{-\beta\tau}, & 0 \leq \tau \leq t \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$t < 0 \text{ 时 } f(t-\tau) \cdot g(\tau) = 0$$

$$t < 0 \text{ 时 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau = 0$$

$$t \geq 0 \text{ 时 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot e^{-\beta\tau} d\tau$$

$$= e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau$$

$$= e^{-\alpha t} \cdot \left. \frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha-\beta} \right|_0^t$$

$$= e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta} - \frac{1}{\alpha-\beta} \right]$$

$$= \frac{e^{-\alpha t} [e^{(\alpha-\beta)t} - 1]}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}$$

$$\therefore f(t)*g(t)=\begin{cases} \frac{e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

二、求 $f(t)=\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$

例 1: 求 $f(t)=\begin{cases} 4, & -2 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的傅里叶变换。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-2}^2 4e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{4}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{t=-2}^{t=2} \\ &= \frac{8\sin 2\omega}{\omega} \end{aligned}$$

例 2: 求 $f(t)=\begin{cases} \sin t, & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的傅里叶变换。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{(j\sin \omega t - \cos \omega t)(j\omega \sin t + \cos t)}{1-\omega^2} \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} \\ &= \frac{-2j\sin \omega \pi}{1-\omega^2} \end{aligned}$$

$f(t)$	$F(\omega)$
$\begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t}, & t \geq 0 \end{cases}$ (其中 $A > 0$ 、 $\alpha > 0$)	$\frac{A}{\alpha + j\omega}$
$\begin{cases} Ae^{\alpha t}, & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t}, & t \geq 0 \end{cases}$ (其中 $A > 0$ 、 $\alpha > 0$)	$\frac{2A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
$\begin{cases} A, & -\frac{\alpha}{2} \leq t \leq \frac{\alpha}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ (其中 $A > 0$ 、 $\alpha > 0$)	$\frac{2A}{\omega} \sin \frac{\alpha\omega}{2}$

例 3：求矩形脉冲函数 $f(t) = \begin{cases} 5, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ 的傅里叶变换。

$$\begin{cases} A = 5 \\ \frac{\alpha}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\alpha\omega}{2} = \frac{10}{\omega} \sin \omega$$

三、求 $f(t) = \dots$ 的傅里叶积分表达式

例 1：求 $f(t) = \begin{cases} 4, & -2 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的傅里叶变换及傅里叶积分表达式。

$$F(\omega) = \frac{8 \sin 2\omega}{\omega}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8 \sin 2\omega}{\omega} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8 \sin 2\omega}{\omega} \cos \omega t d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8 \sin 2\omega}{\omega} \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{8 \sin 2\omega}{\omega} \cos \omega t d\omega \\ &= \frac{8}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega} \cos \omega t d\omega \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 4, & -2 < t < 2 \\ 2, & t = \pm 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例 2: 求 $f(t) = \begin{cases} \sin t, & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的傅里叶变换及傅里叶积分表达式。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{-2j \sin \omega \pi}{1 - \omega^2} \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2j \sin \omega \pi}{1 - \omega^2} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2j \sin \omega \pi}{1 - \omega^2} \cos \omega t d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2j \sin \omega \pi}{1 - \omega^2} \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{2j}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{-2j \sin \omega \pi}{1 - \omega^2} \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \pi}{1 - \omega^2} \sin \omega t d\omega \\ &= \begin{cases} \sin t, & -\pi < t < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

四、求 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$

$f(t)$	$F(\omega)$
$\cos \omega t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin \omega t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$u(t)$ 、 $\varepsilon(t)$ 、 $H(t)$ 、 $1(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$u(t)e^{-\beta t}$ (其中 $\beta > 0$)	$\frac{1}{\beta + j\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
t^n	$2\pi j^{-n} \delta^{(n)}(\omega)$

例 1: 求 $f(t) = \delta(t+a) + \delta(t-a) + \delta(t+\frac{a}{3})$ 的傅里叶变换。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)] &= \mathcal{F}\left[\delta(t+a) + \delta(t-a) + \delta\left(t+\frac{a}{3}\right)\right] \\ &= \mathcal{F}[\delta(t+a)] + \mathcal{F}[\delta(t-a)] + \mathcal{F}\left[\delta\left(t+\frac{a}{3}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t+a)] = e^{j\omega a} \cdot \mathcal{F}[\delta(t)] = e^{j\omega a} \cdot 1 = e^{j\omega a}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-a)] = e^{-j\omega a} \cdot \mathcal{F}[\delta(t)] = e^{-j\omega a} \cdot 1 = e^{-j\omega a}$$

$$\mathcal{F}\left[\delta\left(t+\frac{a}{3}\right)\right] = e^{\frac{j\omega a}{3}} \cdot \mathcal{F}[\delta(t)] = e^{\frac{j\omega a}{3}} \cdot 1 = e^{\frac{j\omega a}{3}}$$

$$\therefore \mathcal{F}[f(t)] = e^{j\omega a} + e^{-j\omega a} + e^{\frac{j\omega a}{3}}$$

例 2: 求 $f(t) = \sin t \cdot u(t)$ 的傅里叶变换。

$$\mathcal{F}[\sin t \cdot u(t)] = \frac{1}{2j} \mathcal{F}[u(t) \cdot e^{jt}] - \frac{1}{2j} \mathcal{F}[u(t) \cdot e^{-jt}]$$

$$\mathcal{F}[f(t) \cdot e^{jt}] = F(\omega-1) \quad , \quad \mathcal{F}[f(t) \cdot e^{-jt}] = F(\omega+1)$$

$$\mathcal{F}[u(t) \cdot e^{jt}] = F_{u(t)}(\omega-1) \quad , \quad \mathcal{F}[u(t) \cdot e^{-jt}] = F_{u(t)}(\omega+1)$$

$$\text{而 } F_{u(t)}(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\therefore F_{u(t)}(\omega - 1) = \frac{1}{j(\omega - 1)} + \pi\delta(\omega - 1)$$

$$F_{u(t)}(\omega + 1) = \frac{1}{j(\omega + 1)} + \pi\delta(\omega + 1)$$

$$\therefore \mathcal{F}[\sin t \cdot u(t)]$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{j(\omega - 1)} + \pi\delta(\omega - 1) \right] - \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{j(\omega + 1)} + \pi\delta(\omega + 1) \right]$$

$$= \frac{1}{2 - 2\omega} + \frac{\pi}{2j}\delta(\omega - 1) + \frac{1}{2 + 2\omega} - \frac{\pi}{2j}\delta(\omega + 1)$$

$$= \frac{1}{1 - \omega^2} + \frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$$

例 3：求 $f(t) = u(t) \cdot t$ 的傅里叶变换。

$$\mathcal{F}[u(t) \cdot t] = j \cdot \{ \mathcal{F}[u(t)] \}'$$

$$= j \cdot \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]'$$

$$= j \cdot \left[\frac{1}{j} \cdot \left(-\frac{1}{\omega^2} \right) + \pi\delta'(\omega) \right]$$

$$= -\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega)$$

复变函数与积分变换第九课

一、求 $f(t)=\begin{cases} \dots \end{cases}$ 的拉氏变换 $F(s)$

例 1: 求函数 $f(t)=\begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$ 的拉氏变换。

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^3 1 \cdot e^{-st}dt \\ &= \int_0^3 e^{-st}dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{t=3} \\ &= \frac{e^{-3s}}{-s} - \frac{e^0}{-s} \\ &= -\frac{e^{-3s}-1}{s} \end{aligned}$$

二、求 $f(t)=\begin{cases} \dots \end{cases}$ 且 $f(t+T_0)=f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$

例 1: 求函数 $f(t)=\begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$, $f(t+2)=f(t)$ 的拉氏变换。

$$\because f(t+2)=f(t), \therefore T_0=2$$

$$\begin{aligned} \therefore F_1(s) &= \int_0^{T_0} f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^2 f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^1 1 \cdot e^{-st}dt + \int_1^2 (-1)e^{-st}dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{t=1} + \left. \frac{e^{-st}}{s} \right|_{t=1}^{t=2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-s}}{-s} - \frac{e^0}{-s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s} = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s} = \frac{1-2e^{-s}+(e^{-s})^2}{s} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s} \\
\therefore F(s) &= \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT_0}} = \frac{\frac{(1-e^{-s})^2}{s}}{1-e^{-2s}} = \frac{\frac{(1-e^{-s})^2}{s}}{1-(e^{-s})^2} = \frac{\frac{(1-e^{-s})^2}{s}}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}
\end{aligned}$$

三、求 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$ (其中 $t_0 > 0$)	e^{-st_0}
$\delta(t+t_0)$ (其中 $t_0 > 0$)	0
$\delta'(t)$	s
1	$\frac{1}{s}$
$u(t)$ 、 $\varepsilon(t)$ 、 $H(t)$ 、 $1(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
t^m	$\frac{m!}{s^{m+1}}$

例 1：求 $f(t)=te^{-t}$ 的拉氏变换。

$$\therefore \mathcal{L} [(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(s)$$

$$\therefore \mathcal{L} [-tf(t)] = F'(s)$$

$$\therefore \mathcal{L} [-te^{-t}] = \{ \mathcal{L} [e^{-t}] \}'$$

$$\therefore \mathcal{L} [te^{-t}] = -\{ \mathcal{L} [e^{-t}] \}'$$

$$\therefore \mathcal{L} [e^{\pm at}] = \frac{1}{s \mp a},$$

$$\therefore \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1},$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathcal{L}[te^{-t}] &= -\{L[e^{-t}]\}' \\ &= -\left(\frac{1}{s+1}\right)' \\ &= -\left[-\frac{1}{(s+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{(s+1)^2}\end{aligned}$$

例 2: 求 $\int_0^{+\infty} \sin t e^{-3t} dt$

$$\because \int_0^{+\infty} f(t)e^{-at} dt = F(a)$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \sin t e^{-3t} dt = F_{\sin t}(3)$$

$$\because \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1^2} = \frac{1}{s^2+1}, \text{ 即 } F_{\sin t}(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \sin t e^{-3t} dt = F_{\sin t}(3) = \frac{1}{3^2+1} = \frac{1}{10}$$

四、求 $F(s)$ 的拉氏逆变换 $f(t)$

例 1: 求 $F(s) = \frac{s^3+6s^2+15s+11}{s^2+5s+6}$ 的拉氏逆变换 $f(t)$ 。

$$\because s(s^2 + 5s + 6) = s^3 + 5s^2 + 6s,$$

$$\begin{aligned}\therefore F(s) &= \frac{s^3+6s^2+15s+11}{s^2+5s+6} = \frac{s^3+5s^2+6s+s^2+9s+11}{s^2+5s+6} \\ &= s + \frac{s^2+9s+11}{s^2+5s+6} \\ &= s + \frac{s^2+5s+6+4s+5}{s^2+5s+6} \\ &= s + 1 + \frac{4s+5}{s^2+5s+6}\end{aligned}$$

$$\because s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3),$$

$$\therefore F(s) = s + 1 + \frac{4s+5}{s^2+5s+6} = s + 1 + \frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}$$

$$\text{设 } \frac{a}{s+2} + \frac{b}{s+3} = \frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}$$

$$\text{则 } \frac{a(s+3)+b(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{(a+b)s+(3a+2b)}{(s+2)(s+3)} = \frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}$$

$$\therefore \begin{cases} a+b=4 \\ 3a+2b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=7 \end{cases}$$

$$\therefore F(s) = s + 1 - \frac{3}{s+2} + \frac{7}{s+3}$$

$$\because s \Rightarrow \delta'(t)$$

$$1 \Rightarrow \delta(t)$$

$$\frac{1}{s \mp a} \Rightarrow e^{\pm at}$$

$$\text{即 } \frac{1}{s+2} \Rightarrow e^{-2t}, \quad \frac{1}{s+3} \Rightarrow e^{-3t}$$

$$\therefore f(t) = \delta'(t) + \delta(t) - 3e^{-2t} + 7e^{-3t}$$

例 2: 求 $\frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$ 的拉氏逆变换 $f(t)$ 。

$$\because \frac{m!}{s^{m+1}} \Rightarrow t^m$$

$$\therefore \frac{3!}{s^{3+1}} \Rightarrow t^3, \quad \frac{1!}{s^{1+1}} \Rightarrow t^1$$

$$\text{即 } \frac{6}{s^4} \Rightarrow t^3, \quad \frac{1}{s^2} \Rightarrow t$$

$$\because F(s \mp a) \Rightarrow e^{\pm at} f(t)$$

$$\therefore F(s+1) \Rightarrow e^{-t} f(t)$$

$$\therefore \frac{6}{(s+1)^4} \Rightarrow e^{-t} \cdot t^3, \quad \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow e^{-t} \cdot t$$

$$\therefore \frac{1}{(s+1)^4} \Rightarrow \frac{e^{-t} \cdot t^3}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{s+a} \Rightarrow e^{\pm at}$$

$$\therefore \frac{1}{s+1} \Rightarrow e^{-t}$$

$$\therefore f(t) = \frac{e^{-t} \cdot t^3}{6} + e^{-t} - e^{-t} \cdot t$$

$F(s) \Rightarrow f(t)$ 的标准写法: $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$

五、用拉氏变换解微分方程

例 1: 求微分方程 $y'' + 2y' + y = te^{-t}$ 满足 $y(0)=1$ 和 $y'(0)=-2$ 的解

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \mathcal{L}[te^{-t}]$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - (s+2)y(0) - y'(0) = \mathcal{L}[te^{-t}]$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - (s+2) \cdot 1 - (-2) = \mathcal{L}[te^{-t}]$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - s = \mathcal{L}[te^{-t}]$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - s = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{(s+1)^2} + s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2} + s}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{s+1-1}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{s+1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right]$$

$$= \frac{e^{-t} \cdot t^3}{6} + e^{-t} - e^{-t} \cdot t$$

六、用拉氏变换求 $\int_0^t f_1(t-\tau)y(\tau)d\tau=f_2(t)$ 的解

$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s \mp a}$	$e^{\pm at}$
$\frac{m!}{s^{m+1}}$	t^m

例 1: 求 $\int_0^t \sin(t-\tau) \cdot y(\tau)d\tau=t \cdot e^{-t}$ 的解。

$$\sin t * y(t) = t \cdot e^{-t}$$

$$\mathcal{L}[\sin t] \cdot Y(s) = \mathcal{L}[t \cdot e^{-t}]$$

$$\frac{1}{s^2+1} \cdot Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{(s+1)^2}}{\frac{1}{s^2+1}} = \frac{s^2+1}{(s+1)^2} = \frac{s^2+2s+1-2s-2+2}{(s+1)^2} = \frac{s^2+2s+1}{(s+1)^2} - \frac{2s+2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2} - \frac{2(s+1)}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} = 1 - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[1 - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} \right]$$

$$= \delta(t) - 2e^{-t} + 2e^{-t}t$$