第2章　连续时间系统的时域分析

时域分析：对系统的分析与计算均以时间t为变量

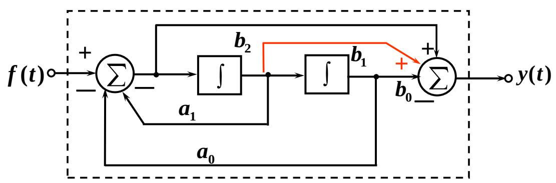
优点：直观、物理概念清楚

缺点：对高阶系统或复杂激励计算复杂

LTI连续系统的时域分析归结为：建立并求解线性微分方程。

2. 1 系统微分方程的经典解

描述输入、输出关系的连续系统数学模型为n阶微分方程



$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2f''(t)-b_0f(t)$$

描述输入、输出关系的连续系统数学模型一般形式为

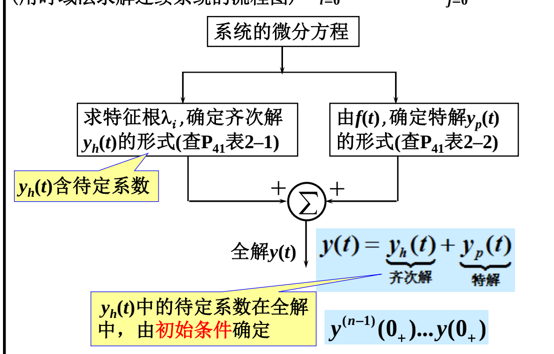
$$a_ny^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+...+a_1y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mf^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+...+b_1f'(t)+b_0f(t)$$

或 $\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_jf^{(j)}(t)$

一、微分方程的经典解

$$\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_jf^{(j)}(t)$$

(用时域法求解连续系统的流程图)



1. 微分方程的齐次解$y_h(t)$

$$\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_jf^{(j)}(t)$$

齐次方程： $\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}(t)=0$

特征方程：$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0$

n阶微分方程有n个特征根$\lambda_i\ (i=1,2,...,n)$

齐次解$y_h(t)$的形式由特征根λ_i的形式决定→查P_{41}表2−1

特征根λ	齐次解$y_h(t)$
单实根λ_i	$C_ie^{\lambda_i t}$
r重实根λ_i	$(C_{r-1}t^{r-1}+C_{r-2}t^{r-2}+...+C_1t+C_0)e^{\lambda_i t}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)]$或 $Ae^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta)$其中$Ae^{j\theta}=C+jD$
r重共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C_{r-1}t^{r-1}\cos(\beta t-\theta_{r-1})+C_{r-2}t^{r-2}\cos(\beta t-\theta_{r-2})+...+C_0\cos(\beta t-\theta_0)]$

例1：求下列方程的齐次解

(1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)$

(2) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t)$

(3) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=2f(t)$

解：(1)系统的特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$

特征根 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$

对应的齐次解为 $y_h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

(2) $y_h(t)=C_1te^{-t}+C_2e^{-t}$

(3) $y_h(t)=e^{-t}[C_1\cos 2t+C_2\sin 2t]=Ae^{-t}\cos(2t-\theta)$

2. 非齐次方程的特解$y_p(t)$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$$

特解$y_p(t)$的形式由激励$f(t)$的形式决定→查P_{41}表2−2

激励信号$f(t)$	特解$y_p(t)$
E（常数）	P（常数）
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$（α不等于特征根） $(P_1t+P_0)e^{\alpha t}$（α等于一个特征根）
$\cos(\beta t)$	$P\cos(\beta t)+Q\sin(\beta t)$ 或 $A\cos(\beta t-\theta)$其中$Ae^{j\theta}=P+jQ$

说明：激励$f(t)$是在$t=t_0=0$时刻加入系统，

因此特解$y_p(t)$存在的时间为$t>t_0=0$

例2：已知某一系统的微分方程为$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+f(t)$

求当激励为(1) $f(t)=\varepsilon(t)$,(2)$f(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$两种情况下的特解。

(1) $f(t)=\varepsilon(t)$ $y_p(t)=p=\frac{1}{2}$

(2) 当$f(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$时

$\because \alpha\neq\lambda_{1,2}$ $\therefore y_p(t)=Pe^{-3t}\varepsilon(t)$

$y_p(t)=-\frac{5}{2}e^{-3t}\varepsilon(t)$

3. 非齐次方程的全解$y(t)$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$$

全解：$y(t)=\underbrace{y_h(t)}_{齐次解}+\underbrace{y_p(t)}_{特解}$

齐次解中的待定系数C_i在全解中由初始条件确定，n 阶微分方程需要n个初始条件。

例3：已知系统的微分方程为$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=f'(t)+3f(t)$

$y(0_+)=1$, $y'(0_+)=3$, $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$, 求该系统的全解。

$y_h(t)=(C_1te^{-2t}+C_2e^{-2t})\varepsilon(t)$, $y_p(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)$

全解：$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=[(\underbrace{3te^{-2t}-e^{-2t}}_{\text{齐次解（自由响应）}})+\underbrace{2e^{-t}}_{\text{特解（强迫响应）}}]\varepsilon(t)$

例4：已知某一系统的微分方程为 $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f(t)$

$y(0_+)=-2$, $y'(0_+)=1$, $f(t)=10\cos t$, 求该系统的全解。

$\omega=1$

齐次解：$y_h(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-3t})\varepsilon(t)$

特解：$y_p(t)=p_1\sin t+p_2\cos t$ 当ω不是方程的特征根时

求y_p''、y_p'，将y_p''、y_p'、y_p代入原方程，整理后有

$(2p_1-4p_2)\sin t+(4p_1+2p_2)\cos t=10\cos t$

求得：$p_1=2$, $p_2=1$

$y_p(t)=2\sin t+\cos t=\sqrt{5}\cos(t-63.4^\circ)$

全解：$y(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-3t})+\sqrt{5}\cos(t-63.4^\circ)$

代入初始条件后得：$y(t)=[(\underbrace{-5e^{-t}+2e^{-3t}}_{\substack{\text{齐次解(自由响应)}\\ \text{暂态响应}}})+\underbrace{\sqrt{5}\cos(t-63.4^\circ)}_{\substack{\text{特解(强迫响应)}\\ \text{稳态响应}}}]\varepsilon(t)$

微分方程的经典解

$$y(t)=\underbrace{y_h(t)}_{齐次解}+\underbrace{y_p(t)}_{特解}$$

齐次解的函数形式仅与系统本身的特性有关，而与激励$f(t)$的函数形式无关，称为系统的**固有响应或自由响应**；

特解的函数形式由激励确定，称为**强迫响应**。

自由响应的系数C_j由系统的初始条件和激励信号共同来确定

二、关于系统在t=0-与t=0_+状态的讨论（难点）

讨论的前提

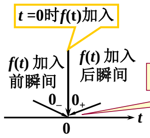
1) $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$ $0_-\le t\le\infty$

2) $t<0$时 $f(t)$=0

3) 求 $t\ge0$时系统的响应$y(t)$

1. 初始状态与初始条件

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$$



初始状态：$y^{(j)}(0_-)$, $j = 0,1,2,\ldots,n-1$

初始状态反映历史信息而与激励$f(t)$无关(一般为已知)

初始条件：$y^{(j)}(0_+)$（由$y^{(j)}(0_-)$和$f(t)$共同决定）

从$0_- \sim 0_+$ $y^{(j)}(t)$可能发生跳变

即$y^{(j)}(0_+) \neq y^{(j)}(0_-)$

令 $y_e^{(j)}(0_+) = y^{(j)}(0_+) - y^{(j)}(0_-)$ 跳变量

初始条件 =初始状态 + 跳变量 $y^{(j)}(0_+) = y^{(j)}(0_-) + y_e^{(j)}(0_+)$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}(t)$$

发生跳变的条件：微分方程右端含$\delta(t)$及其各阶导数

$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = f'(t) + 3f(t)$

(1) $f(t) = \varepsilon(t)$ (2) $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$

(1) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \delta(t) + 3\varepsilon(t)$

(2) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = -e^{-t}\varepsilon(t) + e^{-t}\delta(t) + 3e^{-t}\varepsilon(t)$
$= \delta(t) + 2e^{-t}\varepsilon(t)$

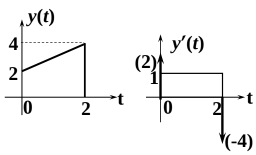
---

2. 跳变量的确定方法 [δ函数平衡法(δ匹配法)]

基本思路：

由于激励信号的加入，在方程右端出现$\delta(t)$及其各阶导数时，在方程左端也一定有与之对应的$\delta(t)$及其各阶导数项，使之方程两端平衡 。而右端冲激函数的产生意味着左端$y^{(i)}(t)$中的某些项在t=0处有跳变。

方程左端$\delta(t)$及其各阶导数 = 方程右端$\delta(t)$ 及其各阶导数



$t = 0$处跳跃量$y(0_+) - y(0_-) = 2$

则跳变点处导数=$2\delta(t)$

例5: $y'(t) + 3y(t) = 3f(t)$， 已知$y(0_-) = 0$

求(1)$f_1(t) = \varepsilon(t)$ (2)$f_2(t) = \delta(t)$时 $y(0_+)$

注意：匹配应从微分方程的最高阶项开始

解：(1) $y'(t) + 3y(t) = 3\varepsilon(t)$ 方程右端无$\delta(t)$ 及其各阶导数

$y(0_+) = y(0_-) + y_e(0_+) = 0 + 0 = 0$

(2) $y'(t) + 3y(t) = 3\delta(t)$

$y(0_+) = y(0_-) + y_e(0_+) = 0 + 3 = 3$

注意:
方程右端含冲激函数意味着左端$y^{(i)}(t)$中的某些项在t=0处有跳变。δ平衡法不是求方程的解,而仅仅求响应$y(t)$及其各阶导数在t=0处的跳变量。$\varepsilon(t)$仅用来表示函数在t=0处有一个跳变量。

例6：$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f''(t) + 2f(t)$

已知$f(t) = \delta(t)$， $y'(0_-) = -1$, $y(0_-) = 1$, 求 $y'(0_+)$, $y(0_+)$

解：$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \delta''(t) + 2\delta(t)$

法一：δ平衡法

$y''(t)$:	$\overset{(1)}{\delta''} \overset{(7)}{-2\delta'} \overset{(12)}{+5\delta}$	$y''(t)$:	$\overset{(2)}{\delta''} \overset{(8)}{-2\delta'} \overset{(13)}{+5\delta}$
$2y'(t)$:	$\overset{(5)}{2\delta'} \overset{(11)}{-4\delta}$	$y'(t)$:	$\overset{(3)}{\delta'} \overset{(9)}{-2\delta} \overset{(14)}{\underline{+5\varepsilon}}$
$y(t)$:	$\overset{(6)}{\delta}$	$y(t)$:	$\overset{(4)}{\delta} \overset{(10)}{\underline{-2\varepsilon}}$

$y'(0_+) = y'(0_-) + y_e'(0_+) = -1 + 5 = 4$

$y(0_+) = y(0_-) + y_e(0_+) = 1 - 2 = -1$

解：$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \delta''(t) + 2\delta(t)$ (1)

法二：系数匹配法

令$y''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + r_0(t)$, $r_0(t)$中不含冲激

$y'(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + r_1(t)$, $r_1(t) = c\varepsilon(t) + r_0^{(-1)}(t)$

$y(t) = a\delta(t) + r_2(t)$, $r_2(t) = b\varepsilon(t) + r_1^{(-1)}(t)$

将上述关系代入式（1），并整理得

$a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + r_0(t)$
$+2a\delta'(t) + 2b\delta(t) + 2r_1(t)$
$+a\delta(t) + r_2(t) = \delta''(t) + 2\delta(t)$

比较等式两边冲激项系数，有 $\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 0 \\ c + 2b + a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$

$y'(0_+) = y'(0_-) + y_e'(0_+) = -1 + 5 = 4$

$y(0_+) = y(0_-) + y_e(0_+) = 1 - 2 = -1$

δ匹配法过程如下：

1）只匹配$\delta(t)$及其各阶导数，使方程两边$\delta(t)$及其各阶导数平衡。

2）匹配从方程左端 $y^{(i)}(t)$的最高阶项开始，首先使方程两端δ函数的最高阶项得到匹配。

3） δ的最高阶项配好后，配低阶项的δ函数时，如果方程左边同阶次δ函数项系数之和不能和右边平衡时，则到左边 $y^{(i)}(t)$的最高阶项中去补偿(补偿时已配好的高阶次δ函数项前系数不变）。

4）当平衡完成后,$y^{(i)}(t)$(i=0,1…n-1)项中所含有的ε(t)项的系数即为$y^{(i)}(t)$在激励加入时刻的跳变量。

例7：$y'(t)+3y(t)=3\delta'(t)$ ，求 $y_e(0_+)$　解得$y_e(0_+)=-9$

思考题：

1. $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$ ，

已知 $y(0_-)=2, y'(0_-)=0, f(t)=\varepsilon(t)$, 求 $y(0_+), y'(0_+)$。

解得：$y'(0_+)=2$，$y(0_+)=0$

2. $y'''(t)+4y''(t)+5y'(t)+2y(t)=\delta''(t)+3\delta(t)$ ，

求 $y_e(0_+), y_e'(0_+), y_e''(0_+)$。

解得：$y_e(0_+)=1, y_e'(0_+)=-4, y_e''(0_+)=14$

2.2 系统的零输入响应和零状态响应

一、零输入响应$y_{zi}(t)$

定义：没有外加激励信号的作用，仅由初始状态所引起的响应。

对应齐次方程：$\sum_{i=0}^{n}a_iy_{zi}^{(i)}(t)=0$

形式由特征根决定：

$$y_{zi}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_{xi}e^{\lambda_it}\quad t\geq 0\qquad \lambda\text{ 均为单实根时}$$

初始条件=初始状态，即没有跳变

$$y_{zi}^{(i)}(0_+)=y_{zi}^{(i)}(0_-)=y^{(i)}(0_-)$$

二、零状态响应

定义：系统的初始状态为0，仅由输入信号$f(t)$所引起的响应。

对应非齐次方程：$\sum_{i=0}^{n}a_iy_{zs}^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_jf^{(j)}(t)$

解由$y_h(t)$和$y_p(t)$组成：

$$y_{zs}(t)=y_h(t)+y_p(t)=\sum C_{si}e^{\lambda_it}+y_p(t)$$

λ 均为单实根时

$$y^{(j)}(0_-)=0\,(j=0,1,\cdots.n-1)$$

$$y_{zs}^{(j)}(0_+)=y_e^{(j)}(0_+)$$

初始条件＝跳变量

三、全响应

定义：系统的初始状态和输入$e(t)$共同作用引起的响应

对应非齐次方程：$\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_jf^{(j)}(t)$

由$y_h(t)$和$y_p(t)$组成：

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_it}}_{y_h(t)}+\underbrace{y_p(t)}_{y_p(t)}}_{\text{初始条件 = 初始状态+跳变量}}=\underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_{xi}e^{\lambda_it}}_{y_{zi}(t)}}_{\text{初始条件 = 初始状态}}+\underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_{si}e^{\lambda_it}+y_p(t)}_{y_{zs}(t)}}_{\text{初始条件 = 跳变量}}$$

例：某LTI系统数学模型为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta'(t)+6\varepsilon(t)$

已知 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=3$，　求 $y_{zi}(t)$，$y_{zs}(t)$，$y(t)$。

解：方法一：分别求$y_h(t)$和$y_p(t)$

$$y_h(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t})\varepsilon(t)\qquad y_p(t)=3$$

$$y_e(0_+)=2,\qquad y_e'(0_+)=-6\quad \therefore y(0_+)=3,\qquad y'(0_+)=-3$$

$$y(t)=(C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3)\varepsilon(t)=(-3e^{-t}+3e^{-2t}+3)\varepsilon(t)$$

方法二：分别求$y_{zi}(t)$和$y_{zs}(t)$

$$y_{zi}(t)=(C_{x1}e^{-t}+C_{x2}e^{-2t})\varepsilon(t)=(5e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$y_{zs}(t)=(C_{s1}e^{-t}+C_{s2}e^{-2t}+3)\varepsilon(t)=(-8e^{-t}+7e^{-2t}+3)\varepsilon(t)$$

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(3-3e^{-t}+3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

说明:

在求$y_{zs}(t)$时为避免求t=0时刻的跳变量，也可利用LTI系统的线性及微分性质求解

小结

	零输入响应 $y_{zi}(t)$	零状态响应 $y_{zs}(t)$	完全响应 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$
数学模型	齐次微分方程	非齐次微分方程	非齐次微分方程
解的形式	齐次解 $y(t)=y_h(t)$	完全解 $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$	完全解 $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$
初始状态	$y^{(i)}(0_-)\neq 0$	$y^{(i)}(0_-)=0$	$y^{(i)}(0_-)\neq 0$
初始条件	$y^{(i)}(0_+)=y^{(i)}(0_-)$	$y^{(i)}(0_+)=y_e^{(i)}$（跳变量） 跳变量需要求	$y^{(i)}(0_+)=y^{(i)}(0_-)+y_e^{(i)}$ 跳变量需要求
	待定系数C_{xi}由初始状态求	待定系数C_{si}在完全解中由跳变量求	待定系数C_i在完全解中由初始条件求

2.3 冲激响应和阶跃响应

一、冲激响应[用$h(t)$表示]

$$f(t)=\delta(t) \longrightarrow \boxed{LTI}\ \{x(0)=0\} \longrightarrow y_{zs}(t)=h(t)$$

$$h(t)\overset{def}{=}T\left[\{0\},\{\delta(t)\}\right]$$

冲激响应是输入信号$f(t)=\delta(t)$时系统的零状态响应

系统方程的一般形式为：$\sum_{i=0}^{n}a_i y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j f^{(j)}(t)$

$$\sum_{i=0}^{n}a_i h^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j \delta^{(j)}(t)$$

初始状态：$h^{(i)}(0_-)=0 \quad (i=0,1,2\cdots n-1)$

初始条件：$h^{(i)}(0_+)=$ 跳变量

$t>0$时系统的冲激响应只有齐次解

例1：某一系统数学模型为$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f'(t)+2f(t)$

求该系统的冲激响应$h(t)$。

解：方法1：

$h(t)$满足$\begin{cases}h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)\\ h'(0_-)=h(0_-)=0\end{cases}$

可求得 $h(0_+)=1, h'(0_+)=-3$

当$t>0$时，$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=0$

$h(t)=(c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t})\varepsilon(t)$

$t>0$后$h(t)$的形式是齐次解，c_1、c_2由跳变量决定

代入初始值$\begin{cases}h(0_+)=c_1+c_2=1\\ h'(0_+)=-2c_1-3c_2=-3\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}c_1=0\\ c_2=1\end{cases}$

解得 $h(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

$$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

方法2：设$h_1(t)$满足$\begin{cases}h_1''(t)+5h_1'(t)+6h_1(t)=\delta(t)\\ h_1'(0_-)=h_1(0_-)=0\end{cases}$

则$h(t)=h_1'(t)+2h_1(t)$

$h_1(t)=(c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t})\varepsilon(t)$

可求得 $h_1(0_+)=0, h_1'(0_+)=1$

$\begin{cases}h_1(0_+)=c_1+c_2=0\\ h_1'(0_+)=-2c_1-3c_2=1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}c_1=1\\ c_2=-1\end{cases}$

$h_1(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$

$h_1'(t)=(-2e^{-2t}+3e^{-3t})\varepsilon(t)$

$h(t)=h_1'(t)+2h_1(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$

例2：某一系统数学模型为$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=\boxed{f'(t)+2f(t)}$

求该系统的冲激响应$h(t)$

$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$

求导

$h(0_+)=1,\quad h'(0_+)=-3 \qquad \boxed{h(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)}$

例3：某一系统数学模型为$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=\boxed{f''(t)+2f'(t)}$

求该系统的冲激响应$h(t)$

求导

$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)$

$h(0_+)=-3,\quad h'(0_+)=9 \qquad \boxed{h(t)=\delta(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)}$

例3：某一系统数学模型为$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+2f'(t)$

求该系统的冲激响应$h(t)$

$$h(t)=\delta(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$$

$h(t)$的形式与$\delta^{(j)}$的关系

$$\sum_{i=0}^{n}a_i h^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j \delta^{(j)}(t)$$

设特征根λ_i为单实根时

当$n>m$ 时 $h(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_i t}\varepsilon(t)$

当$n=m$ 时 $h(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_i t}\varepsilon(t)+C_0\delta(t)$

二、阶跃响应[用$g(t)$表示]

$$f(t)=\varepsilon(t)\longrightarrow \boxed{LTI}_{\{x(0)=0\}} \longrightarrow y_{zs}(t)=g(t)$$

$$g(t)\overset{def}{=}T\left[\{0\},\{\varepsilon(t)\}\right]$$

阶跃响应是输入信号$f(t)=\varepsilon(t)$时系统的零状态响应

系统方程的一般形式为：$\sum_{i=0}^{n}a_i y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j f^{(j)}(t)$

$$\sum_{i=0}^{n}a_i g^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j \varepsilon^{(j)}(t)$$

初始状态：$g^{(i)}(0_-)=0 \quad (i=0,1,2\cdots n-1)$

初始条件：$g^{(i)}(0_+)=$ 跳变量

$h(t)$ 与$g(t)$的关系 $\because \varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau \quad \therefore g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(x)dx$

$\because \delta(t)=\frac{d}{dt}\varepsilon(t) \quad \therefore h(t)=\frac{d}{dt}g(t)$

例4：某一系统的数学模型为$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+2f'(t)$

求该系统的阶跃响应$g(t)$。

$$g''(t)+5g'(t)+6g(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

$$g(0_+)=1\,,\ g'(0_+)=-3$$

虽然是求阶跃响应，但要根据等式右侧实际情况判断响应的形式

$$g(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$$

例5：某一系统的数学模型为$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f''(t)+2f'(t)$

求该系统的冲激响应$h(t)$。

方法1：$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)$

$h(0_+)=-3,\quad h'(0_+)=9$

$h(t)=\delta(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$

方法2：$h(t)=g'(t)=\delta(t)-3e^{-3t}\varepsilon(t)$

例6：某一系统的数学模型为$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=-f'(t)+2f(t)$

求该系统的冲激响应$h(t)$和阶跃响应$g(t)$

$$h''(t)+3h'(t)+2h(t)=-\delta'(t)+2\delta(t)$$

$h'(0_-)=h(0_-)=0 \qquad h_e(0_+)=-1,\quad h_e'(0_+)=5$

则 $h(t)=(c_1e^{-t}+c_2e^{-2t})\varepsilon(t)$

$$\begin{cases}h(0_+)=c_1+c_2=-1\\ h'(0_+)=-c_1-2c_2=5\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}c_1=3\\ c_2=-4\end{cases}$$

$$\therefore h(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$\therefore g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(x)dx=\int_{-\infty}^{t}(3e^{-x}-4e^{-2x})\varepsilon(x)dx$$

$$=\int_{0}^{t}(3e^{-x}-4e^{-2x})dx=(-3e^{-t}+2e^{-2t}+1)\varepsilon(t)$$

2.4 卷积积分（简称卷积）(重点)

特殊的积分运算，是本课程及其它课程重要的数学工具

一、卷积的定义及其积分限的确定

1. 卷积(积分)的(数学)定义

设 $f_1(t)$与 $f_2(t)$是定义在（$-\infty\sim\infty$）区间的连续时间函数

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \qquad (2.3-7)$$

$f_1(t)$与 $f_2(t)$的卷积积分，积分结果仍是以时间t为变量的函数$f(t)$。

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

$f_1(t)$与 $f_2(t)$卷积简记符号

2. 卷积积分限的确定

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \qquad (2.3-7)$$

当$f_1(t)$ 和$f_2(t)$的时间没有限制时，卷积积分的积分限从$-\infty$到$+\infty$，当 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$受到某种限制时卷积积分的上下限要发生变化，需要确定。

几种特殊情况：

1) 若 $t<0$时 $\quad f_1(t)=0 \quad f_2(t)$不受限制

则 $f(t)=\int_{0}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

2) 若 $t<0$时 $\quad f_2(t)=0 \quad f_1(t)$不受限制

则 $f(t)=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

3) 若 $t<0$时 $\quad f_1(t)=f_2(t)=0$

则 $f(t)=\int_{0}^{t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \qquad (2.3-7)$$

例1： $f_1(t)=t\varepsilon(t) \quad f_2(t)=\varepsilon(t)$ 求 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

解得 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\tau\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}\tau d\tau=\frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)$$

例2： $f_1(t)=e^{-2t}\varepsilon(t) \quad f_2(t)=\varepsilon(t)$ 求 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

解得 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\tau}\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=(-\frac{1}{2}e^{-2\tau})\Big|_{0}^{t}=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

二、卷积的图示法

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

从卷积的(数学)定义式可看出：做卷积运算需要经过以下步骤

1) 变量置换 $t\to\tau$

$f_1(t)\to f_1(\tau)\quad f_2(t)\to f_2(\tau)$

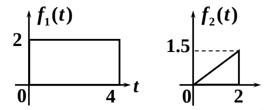
2) 反折 $f_2(\tau)\to f_2(-\tau)$

3) 将 $f_2(-\tau)$ 在 τ 轴上平移 t 得 $f_2(t-\tau)$

4) 将 $f_1(\tau)$ 和 $f_2(t-\tau)$ 相乘后积分

卷积的图示法就是把这几个步骤借助图直观地表示出来

例3：$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形如图所示，求 $f_1(t)*f_2(t)$



$$f_1(t)=2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4)]$$

$$f_2(t)=\frac{3}{4}t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$$

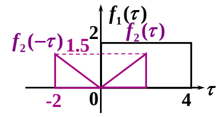
1) 变量置换 $t\to\tau$

2) 反折 $f_2(\tau)\to f_2(-\tau)$

3) 将 $f_2(-\tau)$ 在 τ 轴上平移 t 得 $f_2(t-\tau)$

$t<0$ 时 $f_2(-\tau)$ 左移 $|t|$

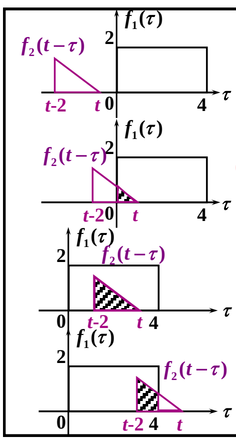
$t>0$ 时 $f_2(-\tau)$ 右移 $|t|$



这一步的重要性在于给出了 $f_2(t-\tau)$ 的波形在 τ 轴上的上、下边缘值，而这些边缘值是以含有参变量 t 的形式给出的。

4) 将 $f_1(\tau)$ 和 $f_2(t-\tau)$ 相乘后积分

当 t 从 $-\infty$ 逐渐增大时，$f_2(t-\tau)$ 沿 τ 轴从左向右平移



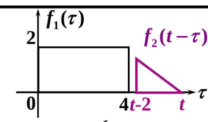
具体计算如下：

$t<0$ $\quad f(t)=0$

$0<t<2$ $\quad f(t)=\int_0^t 2\cdot\frac{3}{4}(t-\tau)d\tau=\frac{3}{4}t^2$

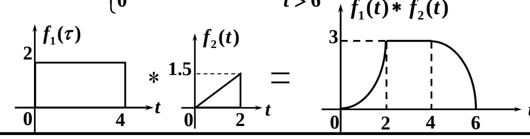
$2<t<4$ $\quad f(t)=\int_{t-2}^t 2\cdot\frac{3}{4}(t-\tau)d\tau=3$

$4<t<6$ $\quad f(t)=\int_{t-2}^4 2\cdot\frac{3}{4}(t-\tau)d\tau=-\frac{3}{4}(t-4)^2+3$



$t>6$ $\quad f(t)=0$

$$\therefore f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{3}{4}t^2 & 0<t<2\\ 3 & 2<t<4\\ -\frac{3}{4}(t-4)^2+3 & 4<t<6\\ 0 & t>6\end{cases}$$



从以上图解分析过程可以看出：

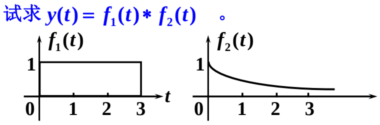
1) 卷积中积分限取决于两个图形交叠部分的范围

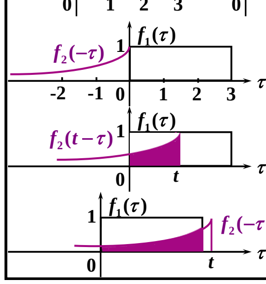
2) 在 t 的某一范围内，积分上下限保持不变

3) 卷积结果所占的时宽等于两个函数各自时宽的总和

说明：并非所有两函数的卷积都存在，若两函数均为有始的可积函数(即 $t<t_1$ 时 $f_1(t)=0$, $t<t_2$ 时 $f_2(t)=0$)，则二者的卷积一定存在，否则视具体情况而定。

例4： 已知信号 $f_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)$，$f_2(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$，试求 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 。



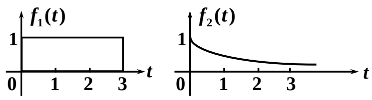


当 $0<t\le 3$ 时，

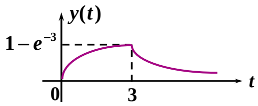
$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau=1-e^{-t}$$

当 $t>3$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^3 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau=(e^3-1)\ e^{-t}$$



$$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}0\ ,\ t<0\\ 1-e^{-t}\ ,\ 0<t\le 3\\ (e^{3}-1)\ \ e^{-t}\ ,\ t>3\end{cases}$$



求卷积是本章的重点与难点。

求解卷积的方法可归纳为：

(1) 利用定义式，直接进行积分。对于容易求积分的函数比较有效。如指数函数，多项式函数等。

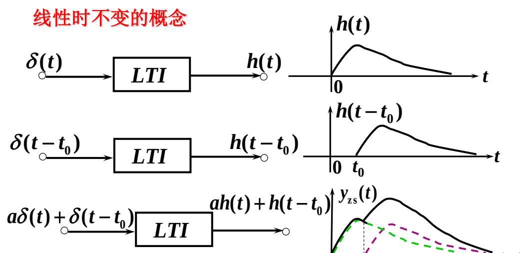
(2) 图解法。特别适用于求某时刻点上的卷积值。

(3) 利用性质。比较灵活。

三者常常结合起来使用。

三、借助冲激响应和叠加原理求解系统的零状态响应

线性时不变的概念

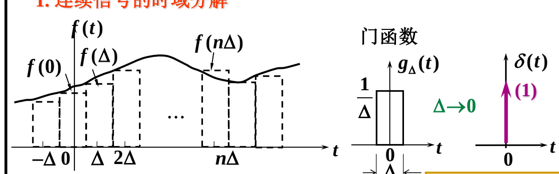


1. 连续信号的时域分解

$$f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\cdot\Delta=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\quad(2-73)$$

结论：任意信号$f(t)$可以分解为无穷多个连续的冲激信号之加权和

1. 连续信号的时域分解



$$f(t)\approx\hat{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta)g_\Delta(t-n\Delta)\cdot\Delta$$

无穷多个窄脉冲叠加的信号

当$\Delta\to 0$脉冲宽度趋于无穷小量用$d\tau$表示，$n\Delta$趋于连续变量用τ表示

$f(n\Delta)\to f(\tau)$ $\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}\to\int_{-\infty}^{\infty}$ $\quad\hat{f}(t)\to f(t)$

$g_\Delta(t-n\Delta)\to\delta(t-\tau)$

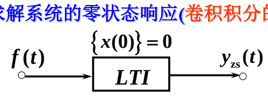
$$f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\cdot\Delta=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\quad(2-73)$$

结论：任意信号$f(t)$可以分解为无穷多个连续的冲激信号之加权和

$$f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\cdot\Delta=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\quad(2.3-5)$$

2. 利用卷积积分求解系统的零状态响应(卷积积分的物理意义)

对于LTI系统



$$f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\cdot\Delta=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

若 $f(t)=\delta(t)\ \to\ y_{zs}(t)=h(t)$ 定义

则 $f(t)=\delta(t-n\Delta)\ \to\ y_{zs}(t)=h(t-n\Delta)$ 时不变

$f(t)=f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\cdot\Delta\ \to\ y_{zs}(t)=f(n\Delta)h(t-n\Delta)\cdot\Delta$ 线性

$$f(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\cdot\Delta\to y_{zs}(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta)h(t-n\Delta)\cdot\Delta$$

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau\quad(2.3-6)$$

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau\quad(2.3-6)$$

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$$

结论:系统在激励信号$f(t)$作用下的零状态响应$y_{zs}(t)$为激励信号$f(t)$与系统冲激响应$h(t)$的卷积积分(卷积积分的物理意义)。

对因果系统， 若激励$f(t)$在$t=0$时作用于系统

$\because\ t<0$时 $\quad f(t)=0\quad h(t)=0$

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

用卷积积分求零状态响应可避免讨论在$t=0$时的跳变问题。

例5：已知某LTI连续系统的$h(t)=\varepsilon(t)$，激励信号$f(t)=\varepsilon(t-1)$，求系统的零状态响应$y_{ZS}(t)$。

解：$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\tau-1)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{1}^{t}d\tau=(t-1)\varepsilon(t-1)$$

例6： $h(t)=\varepsilon(t)$，$f(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$，求$y_{zs}(t)$

解：$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\tau}\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

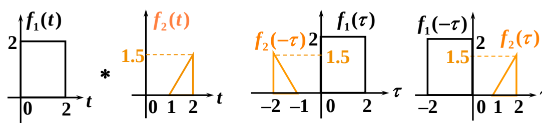
$$=\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

2.5 卷积积分的性质

1. 卷积的代数运算

1) 交换律 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$ (2.4−1)

在卷积积分中两函数的位置可以互换说明反折函数可以任选。



选反折函数时要考虑：1) 反折表达式简单的函数计算简便。

2) 反折边界与纵轴重合的函数t、τ坐标原点一致，积分限容易确定。

2) 分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t) \quad (2.4-2)$$

物理意义： $f(t) \to \boxed{h(t)} \to y_{zs}(t)$

(a) 设 $f(t)=f_2(t)+f_3(t)\leftarrow$系统的激励

$h(t)=f_1(t)\leftarrow$系统的冲激响应

则 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\underbrace{f_2(t)*h(t)}_{y_{1zs}(t)}+\underbrace{f_3(t)*h(t)}_{y_{2zs}(t)}$

若$f(t)=[f_1(t)+f_2(t)+...+f_n(t)]$

则 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\underbrace{f_1(t)*h(t)}_{y_{1zs}(t)}+\underbrace{f_2(t)*h(t)}_{y_{2zs}(t)}+...+\underbrace{f_n(t)*h(t)}_{y_{nzs}(t)}$

n个信号相加作用于系统产生的零状态响应，等于n个信号分别作用于系统产生的零状态响应之和。

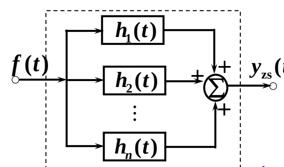
b) 设 $f(t)=f_1(t)\leftarrow$系统的激励

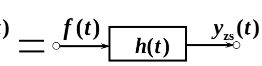
$h(t)=f_2(t)+f_3(t)=h_1(t)+h_2(t)\leftarrow$系统的冲激响应

则 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=f(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$

若 $h(t)=[h_1(t)+h_2(t)+...+h_n(t)]$

则 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=f(t)*h_1(t)+f(t)*h_2(t)+...+f(t)*h_n(t)$





$h(t)=h_1(t)+h_2(t)+...+h_n(t)$

n个子系统并联组成的系统，其冲激响应等于各子系统冲激响应之和。

3) 结合律

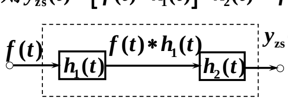
$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)] \quad (2.4-3)$$

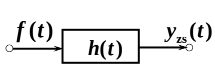
物理意义： 设 $f(t)=f_1(t)\leftarrow$系统的激励

$h_1(t)=f_2(t)\leftarrow$子系统的冲激响应

$h_2(t)=f_3(t)\leftarrow$子系统的冲激响应

则$y_{zs}(t)=[f(t)*h_1(t)]*h_2(t)=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=f(t)*h(t)$



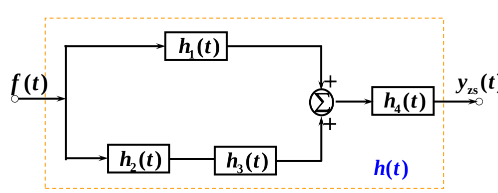


$h(t)=h_1(t)*h_2(t)$

n个子系统级联组成的系统，其冲激响应等于各子系统冲激响应之卷积。

$h(t)=h_1(t)*h_2(t)*...*h_n(t)$

例1：求图所示复合系统的冲激响应为$h(t)$



$h(t)=[h_1(t)+h_2(t)*h_3(t)]*h_4(t)$

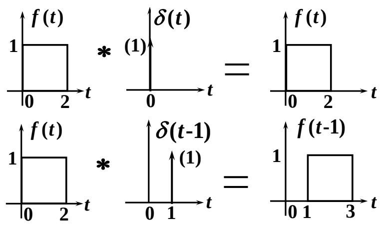
2. 函数与冲激函数的卷积

1) $f(t)*\delta(t)=f(t)\quad(2.4-4)$

任意函数$f(t)$与$\delta(t)$卷积的结果为该函数$f(t)$本身。

2) $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)\quad(2.4-5)$

任意函数$f(t)$与延时t_0的冲激函数卷积的结果是把原函数$f(t)$延时t_0。（在冲激函数处重现原函数）



推广： 若 $f(t)=\delta(t)$

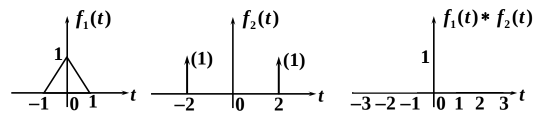
则 $\delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$

$\delta(t)*\delta(t-t_1)=\delta(t-t_1)$

$f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$

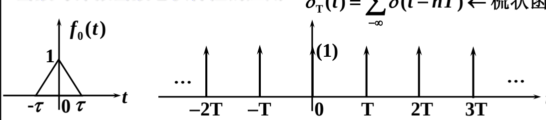
$f(t)*\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$

例2：$f_1(t)$和$f_2(t)$的波形如图所示，求$f_1(t)*f_2(t)$。



函数与冲激函数卷积特性的应用

$\delta_T(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\leftarrow$ 梳状函数

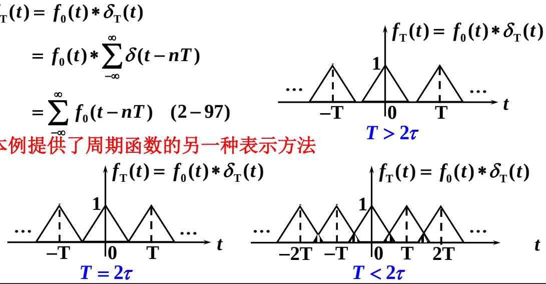


$f_T(t)=f_0(t)*\delta_T(t)$

$=f_0(t)*\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$=\sum_{-\infty}^{\infty}f_0(t-nT)\quad(2-97)$

本例提供了周期函数的另一种表示方法



3. 卷积的微分和积分

$$f^{(1)}(t)\overset{def}{=}\frac{df(t)}{dt},\quad f^{(-1)}(t)\overset{def}{=}\int_{-\infty}^{t}f(x)dx$$

1) 卷积的微分性质

设 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$ $\boxed{f^{(2)}(t)=?}$

则 $f^{(1)}(t)=\left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(1)}=f_1(t)*f_2^{(1)}(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2(t)\ (2.4-14)$

对两函数卷积的结果求导，等于对其中任一函数先求导后再做卷积。

2) 卷积的积分性质

设 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$ $\boxed{f^{(-2)}(t)=?}$

则 $f^{(-1)}(t)=\left[f_1(t)*f_2(t)\right]^{(-1)}=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)\ (2.4-15)$

对两函数卷积的结果求积分，等于对其中任一函数先求积分后再做卷积。

3) 函数$f(t)$与冲激函数的导数或积分卷积

$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$

函数$f(t)$与冲激偶卷积，相当于对$f(t)$求导数

$f(t)*[\delta(t)]^{(-1)}=f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx$

函数$f(t)$与$\varepsilon(t)$卷积，相当于对$f(t)$从$-\infty$到t积分

4) 卷积的微、积分性质(在卷积运算中的应用)

$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

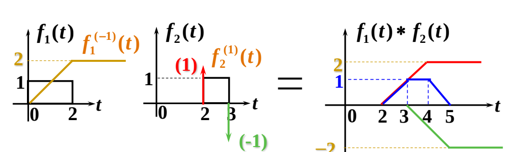
$=f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2^{(1)}(t)$

$f_1(t)$与$f_2(t)$卷积等于先对其中任一函数求导对另一函数求积分后的结果再卷积。

$f(t)=f_1^{(i)}(t)*f_2^{(-i)}(t)=f_1^{(-i)}(t)*f_2^{(i)}(t)$

$f^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)=f_1^{(i-j)}(t)*f_2^{(j)}(t)$

例3：$f_1(t)$和$f_2(t)$的波形如图所示，求 $f_1(t)*f_2(t)$



例4：求$e^{-2t}\varepsilon(t)*\delta''(t)*\varepsilon(t)$

$=[e^{-2t}\varepsilon(t)*\delta(t)]''*\varepsilon(t)$

$=[e^{-2t}\varepsilon(t)]'*[\varepsilon(t)]'$

$=\delta(t)-2e^{-2t}\varepsilon(t)$

例5：$f_1(t)=\cos t\varepsilon(t)$，$f_2(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4\pi)$，求$f_1(t)*f_2(t)$

解：$f_1(t)*f_2(t)=\ f_1^{(-1)}(t)*f_2'(t)$

$$=[\cos t\varepsilon(t)]^{(-1)}*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4\pi)]'$$

$$=\sin t\varepsilon(t)*[\delta(t)-\delta(t-4\pi)]$$

$$=\sin t\varepsilon(t)-\sin(t-4\pi)\varepsilon(t-4\pi)$$

$$=\sin t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-4\pi)]$$

例6：已知某一系统的数学模型为$y'(t)+2y(t)=e'(t)+3e(t)$，其中$f(t)=t\varepsilon(t)$，求$y_{zs}(t)$。

系统对任意激励$e(t)$的零状态响应$y_{zs}(t)$为激励信号$e(t)$与系统冲激响应$h(t)$的卷积积分。

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$$

$$h(t)=\delta(t)+e^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$$

$$=t\varepsilon(t)*\left[\delta(t)+e^{-2t}\varepsilon(t)\right]$$

$$=t\varepsilon(t)*\delta(t)+\left[t\varepsilon(t)\right]''*\left[e^{-2t}\varepsilon(t)\right]^{(-2)}$$

$$=\frac{1}{4}(6t-1+e^{-2t})\varepsilon(t)$$

讨论：

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}f(x)dx=f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{d}{dx}f(x)dx\overset{?}{=}f(t)$$

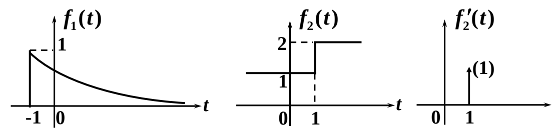
$$\int_{-\infty}^{t}\frac{d}{dt}f(x)dx=f(x)\Big|_{-\infty}^{t}=f(t)-f(-\infty)=f(t)$$

$\therefore$只有当$f(-\infty)$=0时上式才成立

$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$成立的条件：

$\lim\limits_{t\to-\infty}f_1(t)=0$

例7：$f_1(t)$和$f_2(t)$的波形如图所示，求$f_1(t)*f_2(t)$



$$\int_{-\infty}^{t}f_2'(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-1)d\tau=\varepsilon(t-1)\neq f_2(t)$$

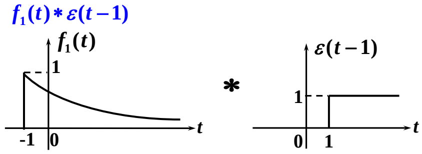
解：把$f_2(t)$分成$f_2(t)=1+\varepsilon(t-1)$

$\therefore\ f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*1+f_1(t)*\varepsilon(t-1)$

$$f_1(t)*1=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\tau+1)}\varepsilon(\tau+1)\bullet1d\tau$$

$$=\int_{-1}^{\infty}e^{-(\tau+1)}d\tau=-e^{-(\tau+1)}\Big|_{-1}^{\infty}=1$$

$f_1(t)*\varepsilon(t-1)$



$$f_1^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(\tau+1)}\varepsilon(\tau+1)d\tau$$

$$=\int_{-1}^{t}e^{-(\tau+1)}d\tau=-e^{-(\tau+1)}\Big|_{-1}^{t}=(1-e^{-(t+1)})\varepsilon(t+1)$$

$$\varepsilon'(t-1)=\delta(t-1)$$

$$f_1(t)*\varepsilon(t-1)=f_1^{(-1)}(t)*\delta(t-1)=(1-e^{-t})\varepsilon(t)$$

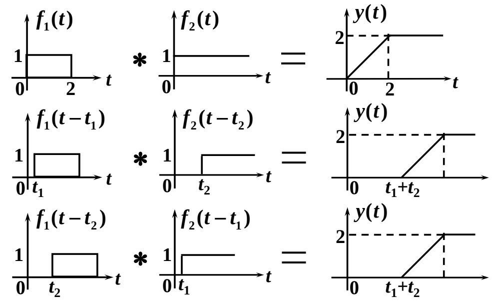
$$\therefore\ f_1(t)*f_2(t)=1+(1-e^{-t})\varepsilon(t)$$

4. 卷积的时移特性

设 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$

则 $y(t-t_0)=f_1(t-t_0)*f_2(t)=f_1(t)*f_2(t-t_0)$

$$y(t-t_1-t_2)=f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f_1(t-t_2)*f_2(t-t_1)$$



例8：$f_1(t)=e^{-2t}\varepsilon(t+1)$，$f_2(t)=\varepsilon(t-3)$，

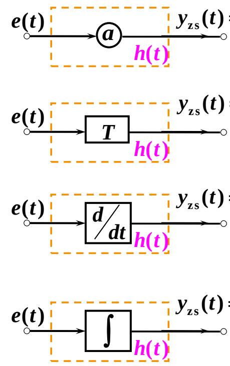
已知 $e^{-2t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$。

解：由时移性质可得：

$$e^{-2(t+1)}\varepsilon(t+1)*\varepsilon(t-3)=\frac{1}{2}(1-e^{-2(t-2)})\varepsilon(t-2)$$

$$\therefore f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\frac{1}{2}e^{2}\left[1-e^{-2(t-2)}\right]\varepsilon(t-2)$$

5. 系统基本单元的冲激响应



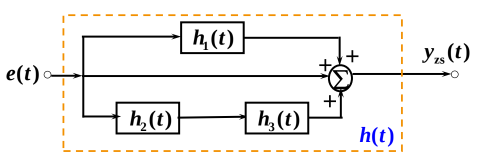
1) 数乘器　$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)=ae(t)$　$h(t)=a\delta(t)$

2) 延时器　$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)=e(t-T)$　$h(t)=\delta(t-T)$

3) 微分器　$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)=\frac{de(t)}{dt}$　$h(t)=\delta'(t)$

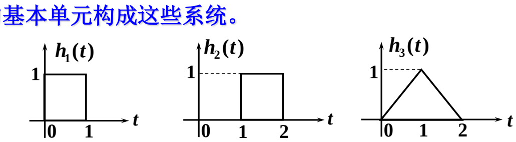
4) 积分器　$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)=e^{(-1)}(t)$　$h(t)=\varepsilon(t)$

例9：求图所示复合系统的冲激响应为$h(t)$

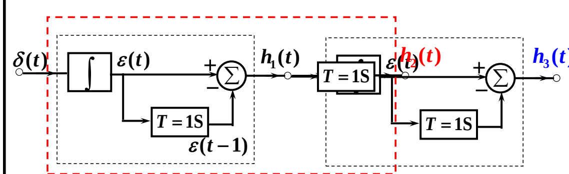


$$h(t)=[h_1(t)+\delta(t)+h_2(t)*h_3(t)]$$

例10：某系统的冲激响应$h(t)$分别如图所示，试用系统的基本单元构成这些系统。



$h_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$　$h_2(t)=h_1(t-1)$　$h_3(t)=h_1(t)*h_1(t)$



本章重点及要求:

1) 会用经典法求解微分方程(即由特征根的形式确定齐次解、输入的形式确定特解)

2)掌握初始状态$y^{(i)}(0_-)$，初始条件$y^{(i)}(0_+)$，跳变量$y_e^{(i)}(0_+)$的概念，并会用δ匹配法确定初始条件$y^{(i)}(0_+)=y^{(i)}(0_-)+y_e^{(i)}(0_+)$

3) 掌握系统全响应的三种分解方法

(1)自由响应、强制响应，(2)零输入响应、零状态响应，

(3)暂态响应、稳态响应

4) 深刻理解冲激响应h(t)与阶跃响应g(t)的物理意义，并会求解。

5) 掌握卷积积分的数学定义,深刻理解卷积积分的物理意义，熟练应用卷积积分的性质求卷积积分。

卷积积分的物理意义：系统的零状态响应为激励信号与系统冲激响应的卷积积分。