计算机图像处理

COMPUTER IMAGE PROCESSING

1

DCT变换

一维离散余弦变换（DCT）

$$F(u) = a_0 c(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad u = 0,1,\ldots,N-1$$

$$f(x) = a_1 \sum_{u=0}^{N-1} c(u) F(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad x = 0,1,\ldots,N-1$$

其中，$a_0 a_1 = \frac{2}{N}$

$$c(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u = 0 \\ 1 & u \neq 0 \end{cases}$$

一维离散傅里叶变换

$$X[k] = DFT[x[n]] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N} \right) - j \sin\left(\frac{2\pi kn}{N} \right) \right)$$

一维离散傅里叶变换

$$X[k]=DFT[x[n]]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-j\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\quad X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-j\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

一维离散傅里叶变换

$$X[k]=DFT[x[n]]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-j\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right)$$

$$X[k]=\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)}-j\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)}$$

实部 虚部

一维离散傅里叶变换

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-j\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left[X[k]\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\left[X[k]\right]=-\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

一维离散傅里叶变换

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-j\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left[X[k]\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$ 实部为k的偶函数

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left[X[k]\right]=-\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$ 虚部为k的奇函数

一维离散傅里叶变换

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-j\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left[X[k]\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$ 实部为k的偶函数

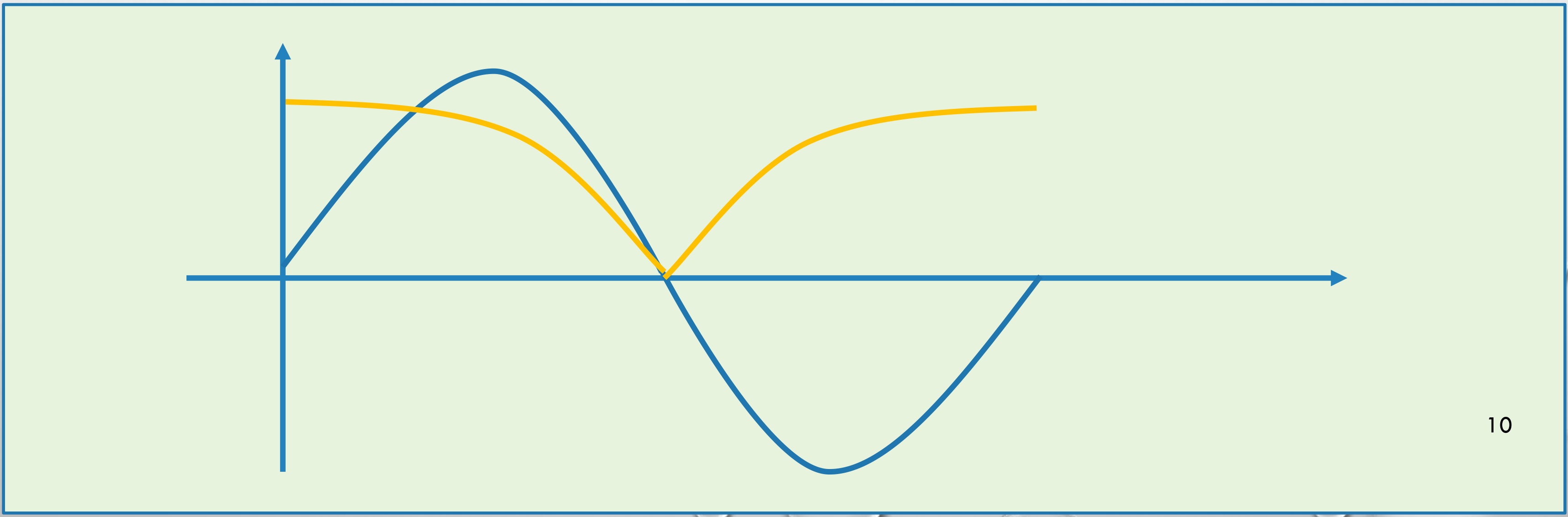
$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left[X[k]\right]=-\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$ 虚部为k的奇函数

因此，当 $x[n]$是一个实数函数时，其频域的实部是偶函数，虚部是一个奇函数。

一维离散傅里叶变换

假如原信号 $x[n]$是一个全是实数的偶函数信号

$$\operatorname{Im}\left[X[k]\right]=-\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)=0$$



一维离散傅里叶变换

假如原信号 $x[n]$是一个全是实数的偶函数信号

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

一维离散傅里叶变换

假如原信号 $x[n]$是一个全是实数的偶函数信号

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

DCT变换 $F(u)=a_0c(u)\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$

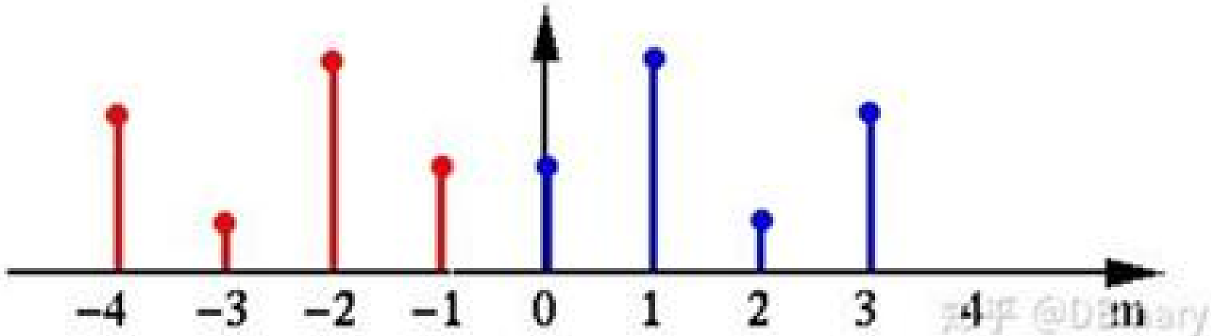
DCT变换实际上就是限定了输入信号的DFT变换

设一长度为N的实数离散信号 $\{x[0], x[1]. . . . . x[N-1]\}$,首先,我们先将这个信号长度扩大成原来的两倍,并变成2N,定义新信号 $x^{'}[m]$ 为

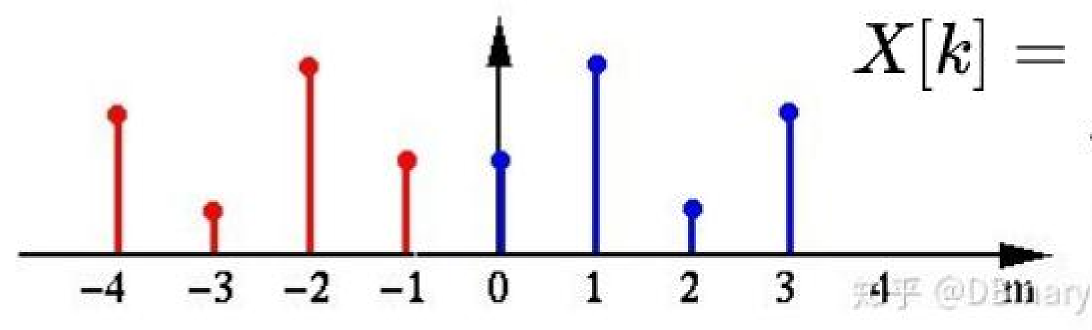
$$x^{'}[m] = x[m](0 \leq m \leq N-1)$$

$$x^{'}[m] = x[-m-1](-N \leq m \leq -1)$$

简单来说,这个信号变成了如图(1.0)所示的样子



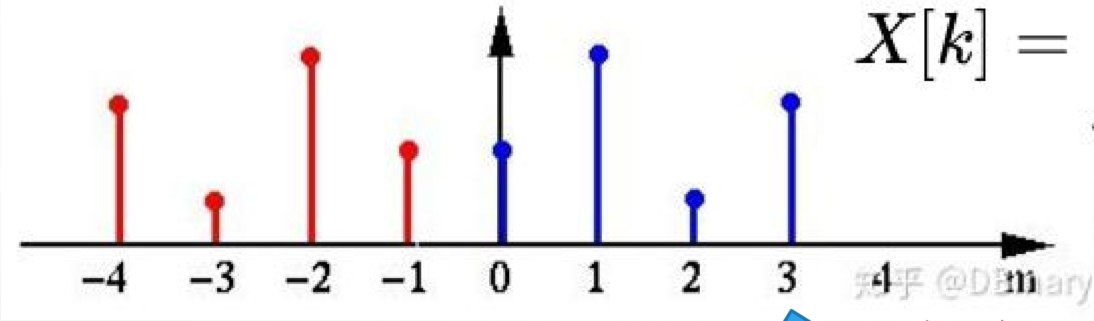
其中，蓝色为原始信号，红色为延拓后的信号这样，我们就将一个实信号变成了一个实偶信号



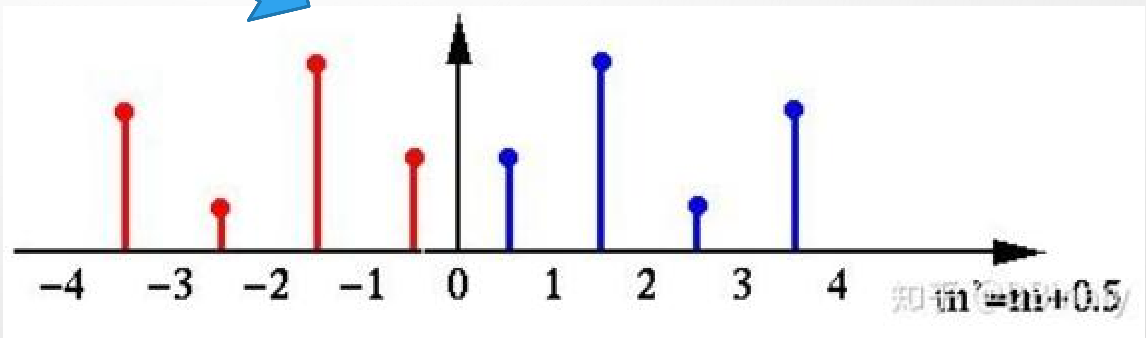
$$X[k] = \sum_{m=-N}^{N-1} x'[m] e^{\frac{-j2\pi mk}{2N}}$$

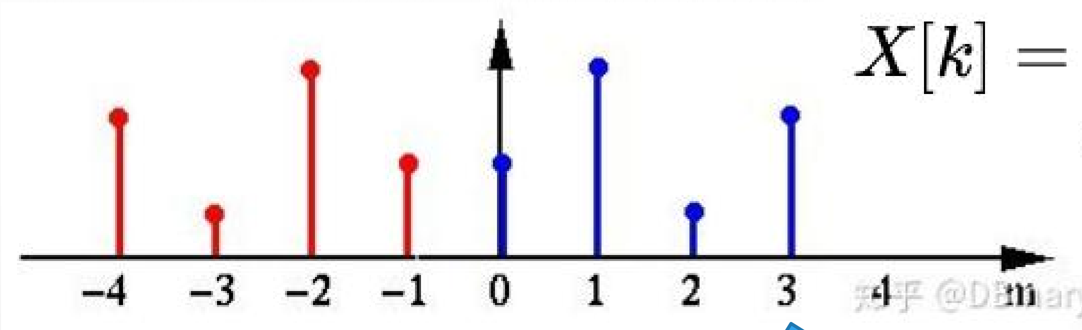
信号不关于m=0偶对称

$$X[k] = \sum_{m=-N}^{N-1} x'[m] e^{\frac{-j2\pi mk}{2N}}$$



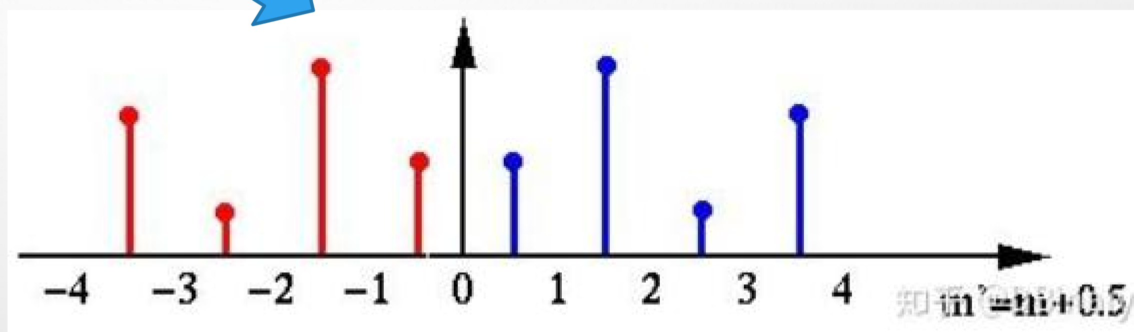
右移1/2，使得信号关于0偶对称





$$X[k] = \sum_{m=-N}^{N-1} x^{'}[m] e^{\frac{-j2\pi mk}{2N}}$$

右移1/2，使得信号关于0偶对称



$$X[k] = \sum_{m=-N+\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}} x^{'}[m-\frac{1}{2}] e^{\frac{-j2\pi mk}{2N}}$$

$$\sum_{m=-N+\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}} x'[m-\frac{1}{2}]cos(\frac{2\pi mk}{2N}) = 2*\sum_{m=\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}} x'[m-\frac{1}{2}]cos(\frac{2\pi mk}{2N})$$

然后，设 $n = m - \frac{1}{2}$ ，并将n代入

$$2*\sum_{n=0}^{N-1} x'[n]cos(\frac{2\pi(n+\frac{1}{2})k}{2N}) = 2*\sum_{n=0}^{N-1} x'[n]cos(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi k}{N})$$

$$\sum_{m=-N+\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}} x^{'}[m-\frac{1}{2}]cos(\frac{2\pi mk}{2N}) = 2*\sum_{m=\frac{1}{2}}^{N-\frac{1}{2}} x^{'}[m-\frac{1}{2}]cos(\frac{2\pi mk}{2N})$$

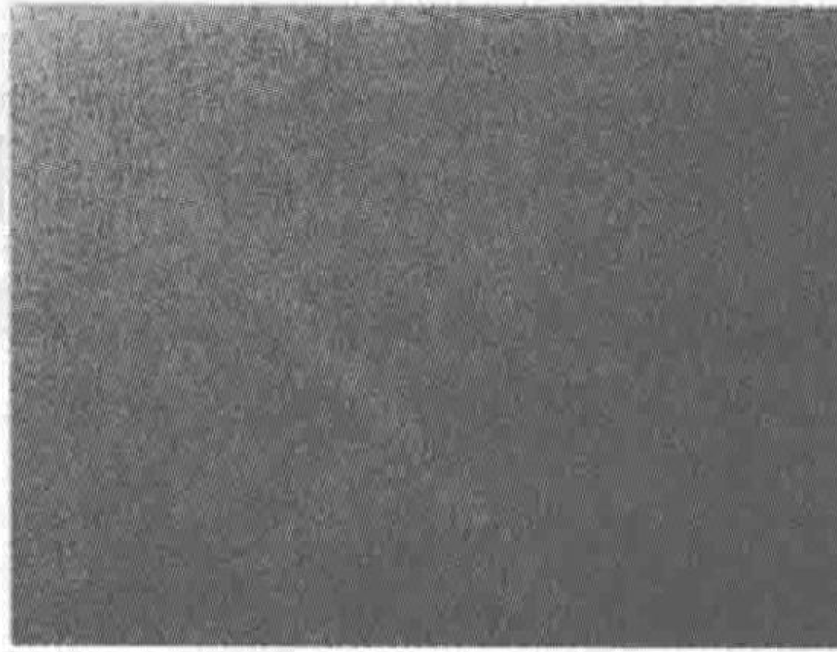
然后，设 $n = m - \frac{1}{2}$ ，并将n代入

$$2*\sum_{n=0}^{N-1} x^{'}[n]cos(\frac{2\pi(n+\frac{1}{2})k}{2N}) = 2*\sum_{n=0}^{N-1} x^{'}[n]cos(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi k}{N})$$

DCT变换 $F(u) = a_0 c(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}$

DCT中前面系数的出现，主要是为了在DCT变换变成矩阵运算的形式时，将该矩阵正交化以便于进一步的计算

a)原图像



b)原图像的余弦变换