第一章 信号与系统

1.1 绪言

什么是信号？什么是系统？
为什么把这两个概念连在一起？

- 信号的概念
- 系统的概念

一、信号的概念

- **消息** (message):

来自外界的各种报道统称为消息，一般不便直接传输。

- **信息** (information):

通常把消息中有意义的内容称为信息。

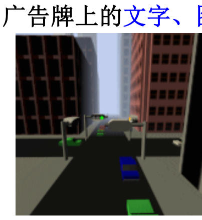
本课程中对“信息”和“消息”两词不加严格区分。

- **信号** (signal):

信号是信息的载体。通过信号传递信息。

信号实例

信号我们并不陌生。如
刚才铃声—声信号，表示该上课了；
十字路口的红绿灯—光信号，指挥交通；
电视机天线接收的电视信息—电信号；
广告牌上的文字、图象信号等等。



二、系统的概念

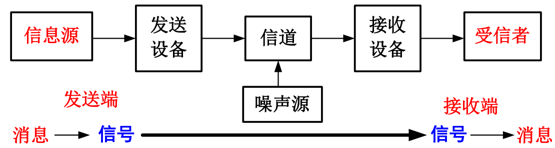
信号的产生、传输和处理需要一定的物理装置，这样的物理装置常称为系统。

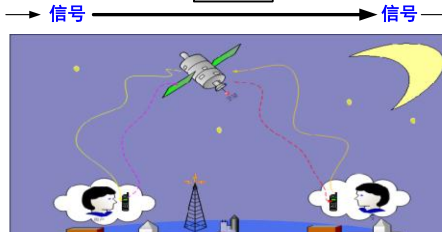
1. 一般而言，系统(system)是指若干相互关联的事物组合而成具有特定功能的整体。

如手机、电视机、通信网、计算机网等都可以看成系统。它们所传送的语音、音乐、图象、文字等都可以看成信号。

2. 系统的基本作用是对信号进行传输和处理。

通信系统 为传送消息而装设的全套技术设备





二、系统的概念

3. 网络（电路）与系统的关系：

- **共同点：**均为传送或处理信号而构成的某种组合，
  有时认为系统是比网络更复杂、规模更大的组合体。
- **区别：**观察事物的着眼点和处理问题的角度不同。

系统分析关心：输入、输出间的关系（即 关心全局）

输入信号 → 系 统 → 输出信号

网络分析关心：其具有的结构和参数，注意研究各支路的电压、电流（或功率）（即 关心局部）

二、系统的概念

4. 系统分类：
- 连续系统 (处理连续时间信号)
- 离散系统 (处理离散时间信号)
- 数字系统 (处理数字信号)

5. 系统的分析方法：

a. 建立系统的数学模型　电系统中需用电路分析的知识。

b. 求解数学模型　需要微（差）分方程、级数、复变函数等数学知识。

c. 对数学解赋予物理意义

三、信号与系统的关系

信号的概念与系统的概念紧密相连

信号在系统中按一定规律运动、变化

$f(\cdot)$ 输入信号（激励） → 系 统（传输/处理信号） → $y(\cdot)$ 输出信号（响应）

本课程以通信系统和控制系统的某些问题为背景，研究确定性信号经系统传输或处理的一般规律，着重讨论信号分析和系统分析的基本概念和基本方法。

1.2 信号的描述和分类

一、信号的描述

1. 物理上：信号是信息的表现形式（传送信息的载体）
如电压、电流等

2. 数学上：信号是一个或多个变量的函数(函数与信号二词通用)
说明：并非所有信号都能写出函数式
大多信号又可用波形表示

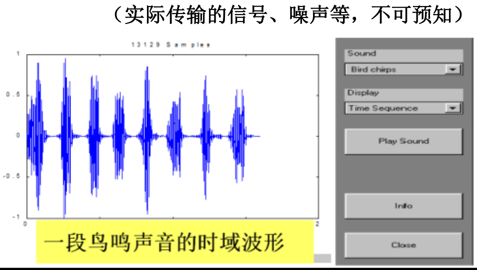
3. 描述信号的变量：时间、周期、频率、 幅度、相位

二、信号的分类（可从不同的角度进行分类）

1. 确定信号和随机信号

a) 确定信号　～可用确定的函数式或波形表示（不含信息）

b) 随机信号　～不可用确定的函数式或波形表示
（实际传输的信号、噪声等，不可预知）



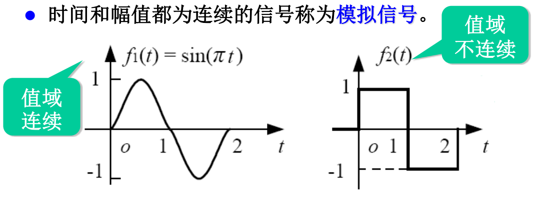
一段鸟鸣声音的时域波形

2. 连续(时间)信号和离散(时间)信号

根据信号定义域（函数自变量取值范围）是连续或离散划分的

a) 连续信号：如果在某一讨论的时间范围内，除了若干个不连续点之外，对任意时刻该函数都能给出确定的函数值。

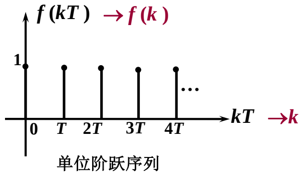
- 这里的“连续”指函数的定义域—时间是连续的，但可含间断点，至于值域可连续也可不连续。
- 时间和幅值都为连续的信号称为模拟信号。



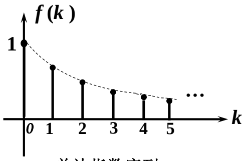
注意：连续信号与连续函数的区别

b)离散信号： 仅在一些离散时刻才有定义，而在其它时刻无定义。

- 离散的含义是指定义域——时间是离散的
- 函数值可连续也可不连续



单位阶跃序列



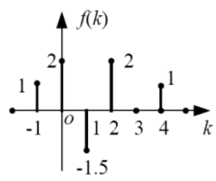
单边指数序列

当各相临时刻间隔为等间隔T时简记为$f(k)$，并称其为序列

$f(k)=\varepsilon(k)$

时间离散、函数值连续的信号称其为抽样信号

$f(k)=e^{-\alpha k}\varepsilon(k) \quad \alpha>0$



$$f(k)=\begin{cases}1, & k=-1\\ 2, & k=0\\ -1.5, & k=1\\ 2, & k=2\\ 0, & k=3\\ 1, & k=4\\ 0, & 其他k\end{cases}$$

或写为

$f(k)=\{\ldots, 0, 1, 2, -1.5, 2, 0, 1, 0, \ldots\}$

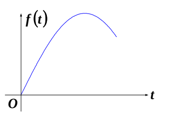
$\uparrow$

$k=0$

通常将对应某序号m的序列值称为第m个样点的"样值"。

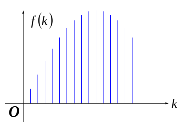
模拟信号，抽样信号，数字信号

- 模拟信号：时间和幅值均为连续的信号。



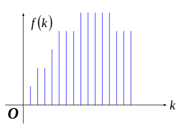
抽样

- 抽样信号：时间离散的，幅值连续的信号。



量化

- 数字信号：时间和幅值均为离散的信号。

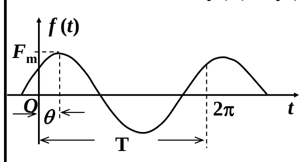


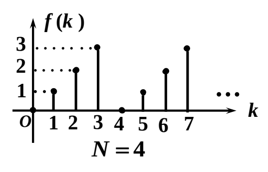
---

3. 周期信号和非周期信号

a) 周期信号： 定义在（$-\infty$，∞）区间，每隔一定时间T（或整数N）按相同规律重复变化的信号。

- 连续周期信号：$f(t)=f(t+mT) \quad m=0,\pm1,\pm2\cdots\pm\infty$
- 离散周期信号：$f(k)=f(k+mN) \quad m=0,\pm1,\pm2\cdots\pm\infty$





满足上述关系的最小T（或整数N）称为该信号的周期

b) 非周期信号： 不具有重复性

若令周期信号的周期趋于无穷大，则成为非周期信号。

例1：判断下列信号是否为周期信号，若是，确定其周期。

(1) $f_1(t) = \sin 2t + \cos 3t$ (2) $f_2(t) = \cos 2t + \sin \pi t$

两个连续周期信号$x(t)$，$y(t)$的周期分别为T_1和T_2，若其周期之比T_1/T_2为有理数，则其和信号$x(t)+y(t)$仍然是周期信号，其周期为T_1和T_2的最小公倍数。

解：(1) $\sin 2t$是周期信号，其角频率和周期分别为

$\omega_1 = 2$ rad/s， $T_1 = 2\pi/\omega_1 = \pi$ s

$\cos 3t$是周期信号，其角频率和周期分别为

$\omega_2 = 3$ rad/s， $T_2 = 2\pi/\omega_2 = (2\pi/3)$ s

由于$T_1/T_2 = 3/2$为有理数，故$f_1(t)$为周期信号，其周期为T_1和T_2的最小公倍数2π。

(2) $\cos 2t$ 和$\sin \pi t$的周期分别为$T_1 = \pi$ s， $T_2 = 2$ s，

由于T_1/T_2为无理数，故$f_2(t)$为非周期信号。

---

4. 能量信号和功率信号

归一化的能量或功率：信号在单位电阻上消耗的能量或功率。

瞬时功率：$p(t)=|f(t)|^2$ 区间能量：$\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(t)|^2 dt$

a) 连续信号： 在区间（$-\infty$，∞）上，信号$f(t)$的

信号能量：$E=\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(t)|^2 dt$

信号功率：$P=\lim_{\alpha\to\infty}\dfrac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(t)|^2 dt$

b) 离散信号： 在区间（$-\infty$，∞）上，序列$f(k)$的

$$E=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}|f(k)|^2 \qquad P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}|f(k)|^2$$

若$0<E<\infty$ (此时 $P=0$) 称$f(.)$为能量信号

若$0<P<\infty$ (此时 $E=\infty$) 称$f(.)$为功率信号

时限信号都是能量信号；周期信号都是功率信号；

$$\text{非周期信号：可是}\begin{cases}\text{能量信号, 如脉冲信号}\\ \text{功率信号，如}\varepsilon(t)\\ \text{非能量/功率信号，如}e^{t}\text{、}t\varepsilon(t)\text{、}\delta(t)\end{cases}$$

5. 实信号和复信号

a) 实信号： 物理上可实现的信号，各时刻的函数值为实数。（如正弦信号、单边指数信号）

b) 复信号： 物理上不可实现的抽象信号，各时刻的函数值为复数（是分析的工具）

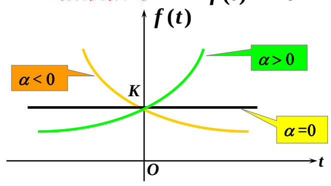
如 $f(t)=Ae^{(\sigma+j\omega)t}$

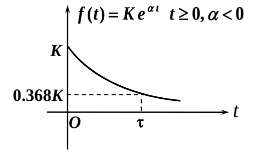
1.3 基本信号及其时域特性

一、普通连续信号（常用信号）

1. 指数信号

$f(t)=Ke^{\alpha t}\quad t\in R, K$和$\alpha$是实数





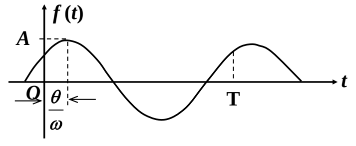
α称指数因子　　单边衰减指数信号

$\tau=\dfrac{1}{|\alpha|}$ 时间常数　代表信号衰减速度，具有时间的量纲。

特点： 对时间的导数、积分仍为指数信号

2. 正弦信号

$f(t)=A\cos(\omega t-\theta)\quad t\in R$



正弦信号为周期信号

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{f}$$

正弦信号可用虚指数信号表示

$$\sin\omega t=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)$$

$$\cos\omega t=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)$$

特点： 对时间的导数、积分 仍为正弦信号

3. 复指数信号

$$f(t)=Ke^{st}=Ke^{(\sigma+j\omega)t}=Ke^{\sigma t}\left[\cos\omega t+j\sin\omega t\right]$$

复指数信号在物理上是不可实现，但在信号分析中是非常重要的信号，它概括了许多常用的基本信号。

当$\sigma=0$时：$f(t)$的实部和虚部均为等幅振荡信号

当$\sigma>0$时：$f(t)$的实部和虚部均为增幅振荡信号

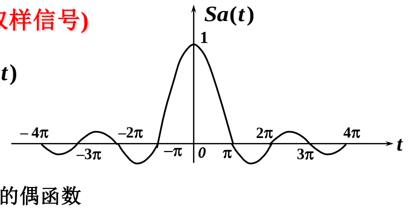
当$\sigma<0$时：$f(t)$的实部和虚部均为减幅振荡信号

当$\omega=0$时：$f(t)=Ke^{\sigma t}$为指数信号

当$S=0$时：$f(t)=K$ 为直流信号

4. 抽样信号(或取样信号)

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}=Sa(t)$$



特点：(1) $Sa(t)$为t的偶函数

$\boxed{(2)\ \lim_{t\to0}Sa(t)=1}$

$\boxed{(3)\ Sa(t)=0\text{，当}t=\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi\dots\pm n\pi\text{时}}$

$Sa(at)=0$，当$t=\pm\pi/a,\ \pm2\pi/a,\dots\pm n\pi/a$时

(4) $\lim_{t\to\pm\infty}Sa(t)=0$

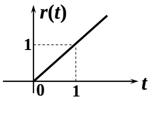
$\boxed{(5)\ \int_0^{\infty}Sa(t)\,dt=\frac{\pi}{2},\quad \int_{-\infty}^{\infty}Sa(t)dt=\pi}$

二、奇异信号

特点：函数本身或其导数、积分有不连续点(即跳变点)

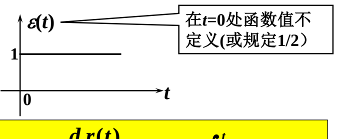
1. 单位斜坡信号$r(t)$

$$r(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq0\end{cases}$$



2. 单位阶跃信号$\varepsilon(t)$ [常用信号]

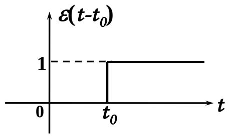
$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



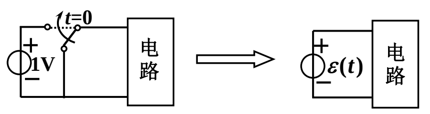
$r(t)$与$\varepsilon(t)$的关系： $\varepsilon(t)=\dfrac{d\,r(t)}{d\,t}$，$r(t)=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau)d\tau$

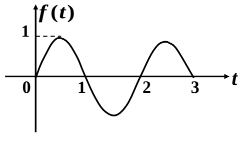
a) 延迟单位阶跃函数

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



b) 阶跃函数的物理意义

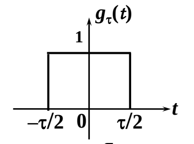




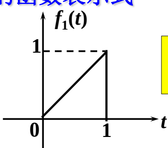
$f(t)=\sin\pi t\,\varepsilon(t)$

描述信号的接入特性

例1：写出下图所示波形的函数表示式

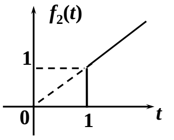


$g_\tau(t)=\varepsilon(t+\frac{\tau}{2})-\varepsilon(t-\frac{\tau}{2})$

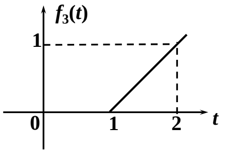


用阶跃函数表示信号的作用区间

$f_1(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$



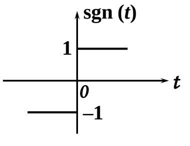
$f_2(t)=t\varepsilon(t-1)$



$f_3(t)=(t-1)\varepsilon(t-1)$

3. 符号函数sgn (t)

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



思考题：1) 试画出sgn (sin$t$)的波形。

2) cost ·ε(cost)的波形。

3) $\varepsilon(t^2-1)$的波形。

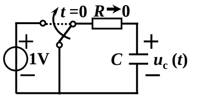
4. 冲激函数$\delta(t)$

(1) 冲激函数的物理意义

某些物理现象需要用一个作用时间极短，但取值极大而效果有限的数学模型来表示，冲激函数就是描述这类物理现象的数学模型。

如力学中的冲击力，作用力F很大，作用时间Δt很短而冲量$F\Delta t$为有限值。

又如电路中电容电压发生跃变时电流极大，时间极短而给予电容的电荷为有限值。



$u_c(0_-)=0\mathrm{V}\quad u_c(0_+)=1\mathrm{V}$

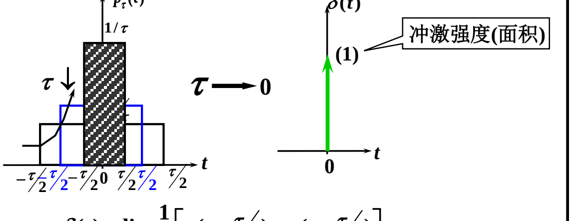
$q_c(0_-)=Cu_c(0_-)=0$

$q_c(0_+)=Cu_c(0_+)=1$

(2) 单位冲激函数的定义（有不同的定义方法）

a) 矩形脉冲取极限(也可以用其他规则函数取极限定义)

矩形脉冲可看作一种作用效果(面积)一定，作用时间与作用力的大小成反比的物理现象的数学模型。



$$\delta(t)=\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon(t+\tau/2)-\varepsilon(t-\tau/2)\right]$$

b) 狄拉克定义

$$\left.\begin{aligned}&\delta(t)=0\quad t\neq0\\ &\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\end{aligned}\right\}$$

这种定义从数学的角度并不严格

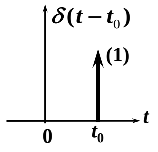
c) 用广义函数定义δ(t)

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi(t)dt=\varphi(0)$ ←严格定义

可看出$\delta(t)$作用于检验函数$\varphi(t)$的效果是给$\varphi(t)$赋予$\varphi(0)$的值，即从$\varphi(t)$中选出t=0时刻的函数值$\varphi(0)$

d) 延时单位冲激函数的定义

$$\left.\begin{array}{l}\delta(t-t_0)=0 \quad t\neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1\end{array}\right\}$$



(3) 冲激函数$\delta(t)$的性质

在广义函数定义下$\delta(t)$及其各阶导数符合普通函数的运算规则

1) 与普通函数$f(t)$相乘

设$f(t)$为任意有界函数，且在$t=0$或$t=t_0$处连续，则有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t) \quad (1.4-23)$$

$$f(t)\delta(t-t_1)=f(t_1)\delta(t-t_1) \quad (1.4-29)$$

2)取样性（抽样性）

设$f(t)$是在$t=0$或$t=t_0$处连续，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0) \quad (1.4-24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_1)dt=f(t_1) \quad (1.4-30)$$

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_1)dt=\begin{cases}f(t_1) & a<t_0<b \\ 0 & t_1\text{不在上述区间}\end{cases}$$

3) 尺度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \qquad a\text{为常数，且}a\neq 0 \qquad （1.4-36）$$

推论：

$$\delta(at-t_1)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_1}{a}) \qquad a\neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at-t_1)\varphi(t)dt=\frac{1}{|a|}\varphi(\frac{t_1}{a})$$

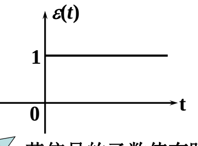
4) 奇偶性

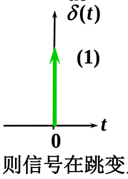
$\delta(-t)=\delta(t)$ 偶函数

5）$\delta(t)$与$\varepsilon(t)$的关系

$$\because \int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx=\begin{cases}0 & t<0 \\ 1 & t>0\end{cases}$$

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx \qquad \delta(t)=\frac{d}{dt}\varepsilon(t)$$

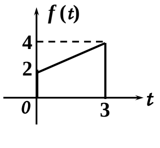




注意：若信号的函数值有跳变，则信号在跳变点处的导数为冲激信号，其冲激强度为信号在跳变点的跳跃值。

说明：可认为在函数跳变点处也存在导数，即可对不连续函数进行微分。

例2：求图所示$f(t)$的导数$f'(t)$



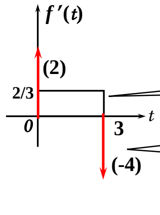
法一：写出函数表达式，再对其求导

按广义函数的概念，分段连续函数$f(t)$在$(-\infty,\infty)$范围内导数均存在。

$$f(t)=(2+\frac{2}{3}t)\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)\right]$$

$$f'(t)=\frac{2}{3}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)\right]+2\delta(t)-4\delta(t-3)$$

法二：直接由图画出



$f(t)$的各连续段的导数仍为常义导数

间断点i处的导数为 $\left[f(t_{i+})-f(t_{i-})\right]\delta(t-t_i)$

例3：分别计算下列各式

1) $2t\delta(t)$ $\qquad f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$

2) $(1+2t)\delta(2t-2)$ $\qquad f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

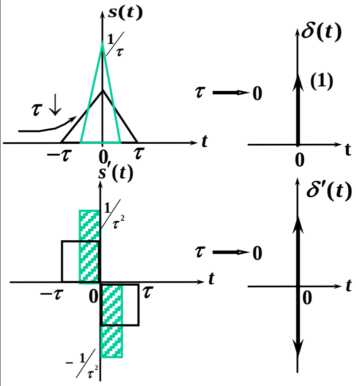
3) $e^{-2t}\delta(t-1)$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)$

4) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi t}{t}\delta(t)dt$

5) $\int_{-3}^{2}e^{-2t}\delta(t-4)dt$

5. 冲激偶信号$\delta'(t)$

(1) 定义(可用规则函数取极限的方法引出)



$\delta(t)$与$\delta'(t)$的关系

$$\delta'(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)$$

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt=0$$

$$\delta'(t)=\frac{d^2}{dt^2}\varepsilon(t)$$

(2) 冲激偶的性质

1) 与普通函数$f(t)$相乘

设$f(t)$为任意有界函数，且在$t=0$或$t=t_0$处连续，则有

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0)$$

2) 取样性（抽样性）

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)dt=-f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0)$$

3) 尺度变换

$$\delta'(at)=\frac{1}{a|a|}\delta'(t)\qquad a\text{为常数，且}a\neq 0$$

4）奇偶性

$$\delta'(-t)=-\delta'(t)\quad\text{奇函数}$$

5）$\delta'(t)$与$\delta(t)$、$\varepsilon(t)$的关系

$$\delta'(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)$$

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(x)dx$$

$$\delta'(t)=\frac{d^2}{dt^2}\varepsilon(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt=0$$

令：$\delta(t)$的n阶导数$\delta^{(n)}(t)=\dfrac{d^n\delta(t)}{dt^n}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta^{n}(t)dt=(-1)^n f^{n}(0)$$

$$\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$$

当n=2,4,6 … 偶函数

当n=1,3,5 … 奇函数

$$\delta^{(n)}(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a^n}\delta^{(n)}(t)$$

例4：分别计算下列各式

1) $e^{-\alpha t}\delta'(t)$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}(1-t)\delta'(t)dt$

3) $\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}\delta'(\tau)d\tau$

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0)$$

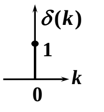
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)dt=-f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0)$$

三、基本离散信号

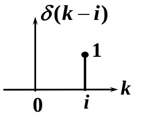
1. 单位序列$\delta(k)$ [又称单位样值(或单位取样)序列]

a) 定义
$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}\qquad(1\text{-}44)$$



b) 与$\delta(t)$ 的区别

c) $\delta(k-i)=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}$



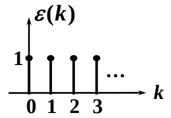
d) $\delta(k)$的取样性质

$$f(k)\delta(k)=f(0)\delta(k)$$

$$f(k)\delta(k-i)=f(i)\delta(k-i)$$

2. 单位阶跃序列$\varepsilon(k)$

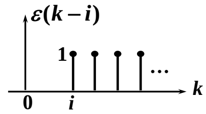
a) 定义 $\varepsilon(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 1 & k\ge 0\end{cases}$ （1-45）



b) 与$\varepsilon(t)$的区别

注意：$\varepsilon(k)$在$k=0$处有定义

c) $\varepsilon(k-i)=\begin{cases}0 & k<i\\ 1 & k\ge i\end{cases}$



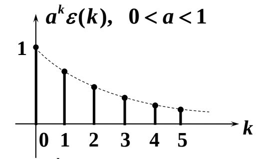
d) $\delta(k)$与$\varepsilon(k)$的关系

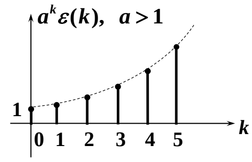
$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

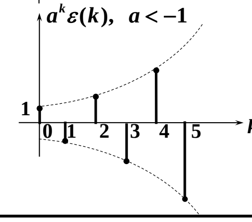
$$\varepsilon(k)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)$$

3. 单边指数序列

$f(k)=a^k\varepsilon(k)$ （1-48）







$-1<a<0$，$a^k\varepsilon(k)=?$

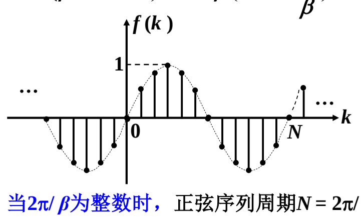
4. 正弦序列

$f(k)=f(k+mN)$ $m=0,\pm1,\pm2\ldots\pm\infty$

$f(k)=\cos\beta k$

β为正弦序列的数字角频率（简称角频率），单位：rad

$=\cos(\beta k\pm 2m\pi)=\cos\beta(k\pm m\dfrac{2\pi}{\beta})$



- 当$2\pi/\beta$为整数时，正弦序列周期$N=2\pi/\beta$ 。
- 当$2\pi/\beta$为有理数时，正弦序列仍为具有周期性，但其周期为$N=M(2\pi/\beta)$，M取使N为整数的最小整数。
- 当$2\pi/\beta$为无理数时，正弦序列为非周期序列。

例5：求判断$f(k)$是否为周期信号，如果是求其周期N

(1) $A\cos\frac{3\pi}{7}k$, (2) $\sin 3\pi k$, (3) $\cos 6k$, (4) $\sin(\frac{3\pi}{4}k)+\cos(\frac{\pi}{2}k)$

(1) $\dfrac{2\pi}{\beta}=\dfrac{14}{3}\to N=14$ (2) $\dfrac{2\pi}{\beta}=\dfrac{2}{3}\to N=2$

(3) $\dfrac{2\pi}{\beta}=\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ 不是周期信号

(4) $\dfrac{2\pi}{\beta}=\dfrac{8}{3}$，$\dfrac{2\pi}{\beta}=4\to N_1=8$，$N_2=4\to N=8$

其周期为N_1和N_2的最小公倍数

①连续正弦信号一定是周期信号，而正弦序列不一定是周期序列。

② 两连续周期信号之和不一定是周期信号，而两周期序列之和一定是周期序列。

5. 复指数序列

$$f(k)=e^{(\alpha+j\beta)k}=e^{\alpha k}e^{j\beta k}=a^k e^{j\beta k}$$
$$=a^k\left[\cos\beta k+j\sin\beta k\right]$$

复指数序列在物理上是不可实现，但在信号分析中是非常重要的信号，它概括了许多常用的基本序列。

当$a=1$时：$f(k)$的实部和虚部均为等幅的正弦序列

当$a>1$时：$f(k)$的实部和虚部均为增幅正弦序列

当$a<1$时：$f(k)$的实部和虚部均为衰减正弦序列

当$\beta=0$时：$f(k)$为实指数序列

当$\beta=0$，$a=1$时：$f(k)$为单位常数序列

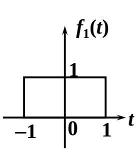
1.4 信号的基本运算

1. 加法和乘法 $f(\cdot)\sim$ 即可表示连续信号又可表示离散信号

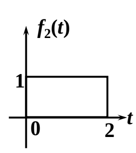
a) 加法 $f_1(\cdot)\pm f_2(\cdot)\pm\cdots f_n(\cdot)$

b) 乘法 $f_1(\cdot)\cdot f_2(\cdot)\cdots f_n(\cdot)$

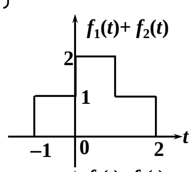
必须把同一时刻的值相加或相乘

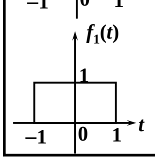


+

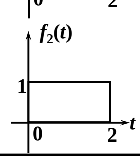


=

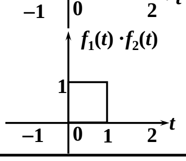


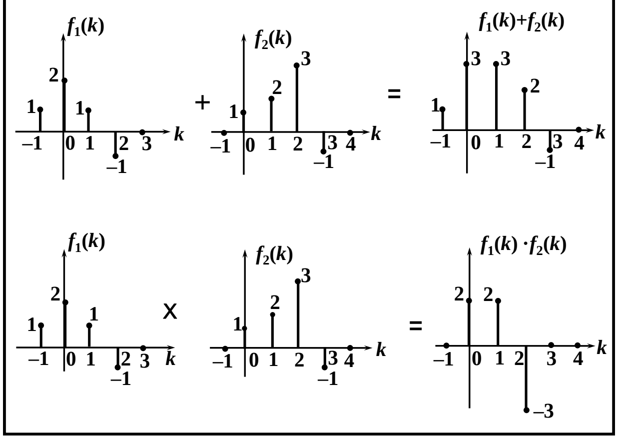


×



=

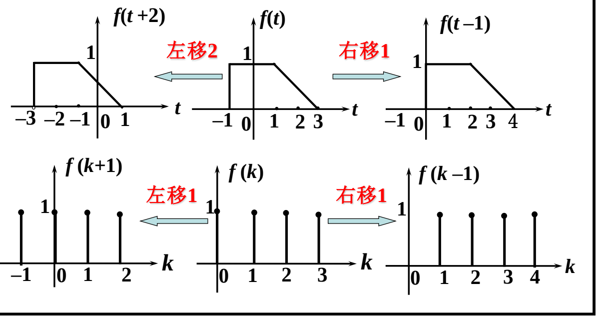




2. 平移 沿时间轴整体移动而波形保持不变。 其中 $t_0>0$ ， $k_0>0$

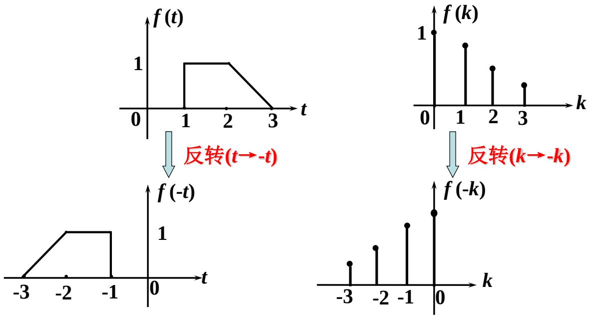
$f(t)\to f(t-t_0)$ 或 $f(k)\to f(k-k_0)$ 时， $f(\bullet)$ 右移 t_0 (或 k_0)

$f(t)\to f(t+t_0)$ 或 $f(k)\to f(k+k_0)$ 时， $f(\bullet)$ 左移 t_0 (或 k_0)



3. 幅度变化 $f(\bullet)\to a\,f(\bullet)$

4. 反转 (反折或反褶) $f(t)\leftrightarrow f(-t)$ 或 $f(k)\leftrightarrow f(-k)$



几何意义：把原信号以纵坐标为轴转180°

平移与反转相结合 例1：画出 $f(2-t)$ 波形

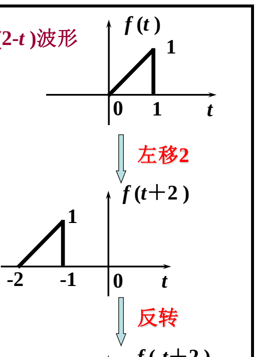
注意：是对 t 的变换！

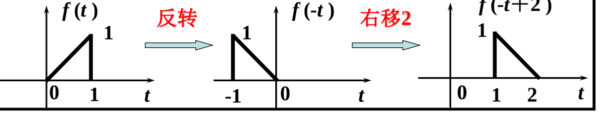
法一：①先平移 $f(t)\to f(t+2)$

②再反转 $f(t+2)\to f(-t+2)$

法二：①先反转 $f(t)\to f(-t)$

②再平移 $f(-t)\to f(-t+2)$

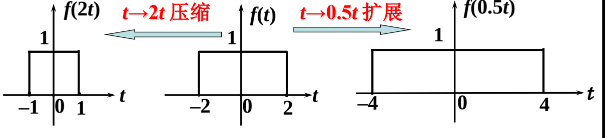




5. 尺度变换（横坐标扩展/压缩）

$f(t)\to f(at)$

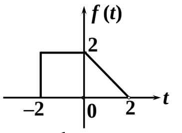
- 当 $a>1$ 时 把原信号以原点为基准压缩 a 倍（即横坐标压缩 a 倍）
- 当 $0<a<1$ 时 把原信号以原点为基准扩展 $1/a$ 倍（即横坐标扩展 $1/a$ 倍）



若 $f(at)$ 中 $a<0$ 则包含反折和尺度变换运算。

注：离散信号不作此运算

例2：已知 $f(t)$ 的波形如图所示，求 $f(-2t+2)$

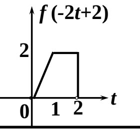


该题同时含几种运算

法 一：

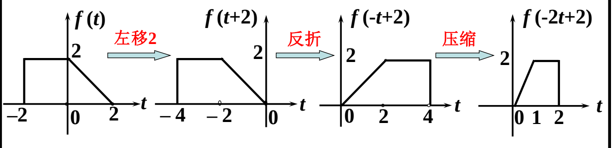
先写出 $f(t)$ 的函数式，以变量 $(-2t+2)$ 代替 t 后对函数式进行整理(较麻烦)

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<-2\\ 2 & -2\le t\le 0\\ -t+2 & 0\le t\le 2\\ 0 & t>2\end{cases}\qquad f(-2t+2)=\begin{cases}0 & t<0\\ 2t & 0\le t\le 1\\ 2 & 1\le t\le 2\\ 0 & t>2\end{cases}$$



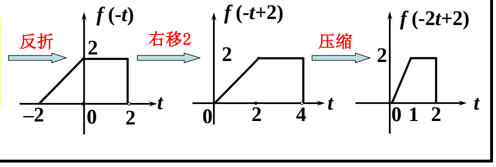
法二：直接把$f(t)$的波形经平移、反折、压缩后可得$f(-2t+2)$，三种运算顺序可任意安排。

1) $f(t)\rightarrow$ 平移→反折→压缩后得$f(-2t+2)$

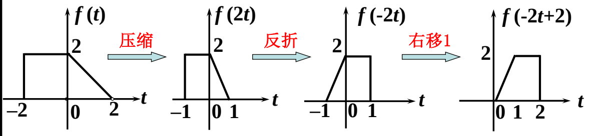


2) $f(t)\rightarrow$反折→平移→压缩后得$f(-2t+2)$

注意：先反折后平移时平移方向要相反



3) $f(t)\rightarrow$压缩→反折→平移后得$f(-2t+2)$



将$f(t)\rightarrow f(at+b)$时，

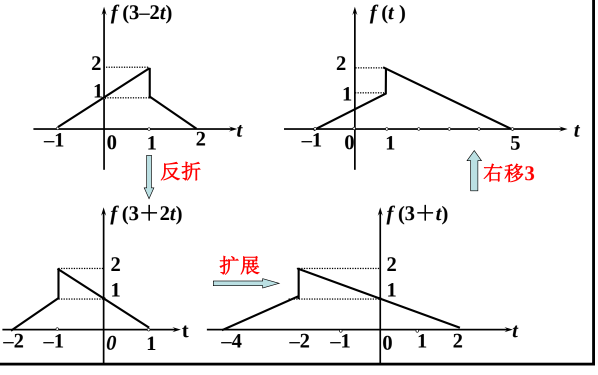
注意：a) 先压缩后平移时移动量为$|t_0/a|$

b) 平移、反折、压缩等各种运算都是对独立的、单一的变量t而言的，而不是对变量at或$at+b$进行代换。

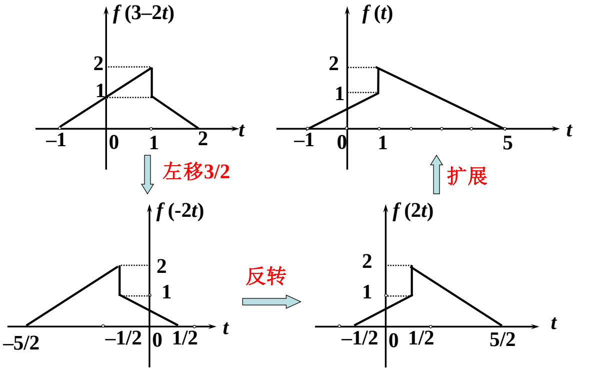
c) 含多种运算时顺序可任选，但先做平移运算再做其他运算不易出错。

例3：已知$f(3-2t)$的波形如图所示，求$f(t)$

法一：$f(3-2t)\rightarrow f(3+2t)\rightarrow f(3+t)\rightarrow f(t)$



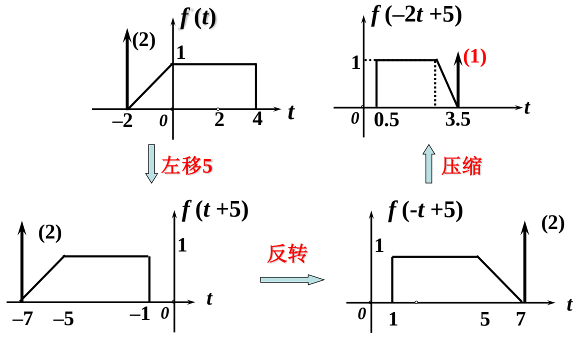
法二：$f(3-2t)\rightarrow f(-2t)\rightarrow f(2t)\rightarrow f(t)$



总结：将$f(at+b)\rightarrow f(t)$时，最后做平移，不易出错。

例4：已知$f(t)$的波形如图所示，求$f(-2t+5)$。

$f(t)\rightarrow f(t+5)\rightarrow f(-t+5)\rightarrow f(-2t+5)$



6. 连续信号的微(积)分运算

$$y(t)=\frac{df(t)}{dt}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

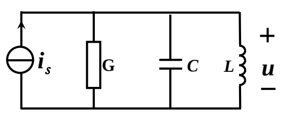
例5：已知$f(t)=(t+4)[\varepsilon(t+4)-\varepsilon(t+2)]+2[\varepsilon(t+2)-\varepsilon(t-2)]+(-t+4)[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-4)]$，求$f'(t)$，$f''(t)$。

1.5 系统的描述和分类

一、系统的描述方法

1. 系统的数学模型

是系统物理特性的数学抽象，以数学表达式或具有物理特性的符号组合图形来表征。



相同形式的数学模型可描述不同的物理系统，同一个物理系统在不同条件下可得到不同的数学模型。

$$LC\frac{d^2u(t)}{dt^2}+GL\frac{du(t)}{dt}+u(t)=L\frac{di_s(t)}{dt}$$

2. 系统的框图描述

常用框图表示具有某种功能的一个子系统，

每个框图表示一个子系统的激励和响应之间的某种数学运算关系，常用若干个框图组成一个完整的系统。

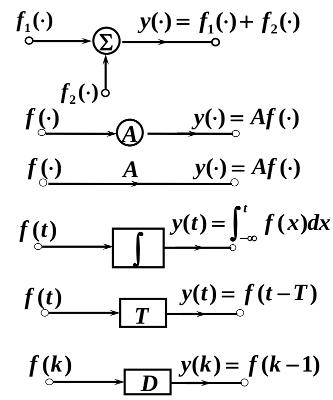
a) 加法器

b) 数乘器

c) 积分器

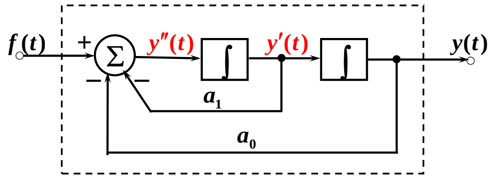
d) 延时器

e) 迟延单元



由系统的框图可写出其数学模型（重点讨论），也可由系统的数学模型画出相应框图。

例1：试写出图所示系统的数学模型

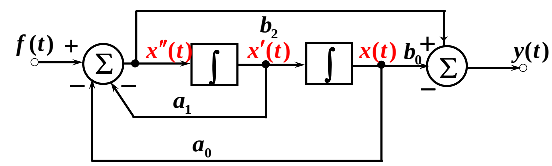


框图所示系统的数学模型，有两个积分器，系统为二阶系统

对加法器列写方程： $y''(t)=f(t)-a_1y'(t)-a_0y(t)$

整理为： $y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=f(t)$

例2： 试写出图所示系统的数学模型

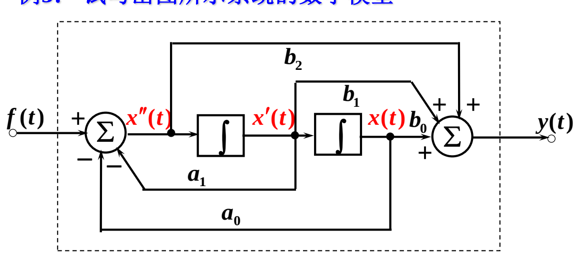


左加法器方程： $x''(t)+a_1x'(t)+a_0x(t)=f(t)$

右加法器方程： $y(t)=b_2x''(t)-b_0x(t)$

整理为： $\underbrace{y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)}_{\text{左加法器的}x(t)\text{换成}y(t)}=\underbrace{b_2f''(t)-b_0f(t)}_{\text{右加法器的}x(t)\text{换成}f(t)}$

例3： 试写出图所示系统的数学模型

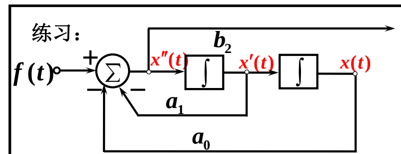


直接由框图求其数学模型时的规律可得

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2f''(t)+b_1f'(t)+b_0f(t)$$

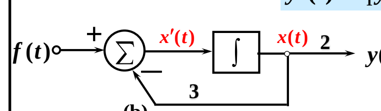
注意 由框图求其数学表示式时，直接采用规律列写

练习：



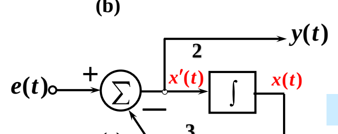
(a)

$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2f''(t)$



(b)

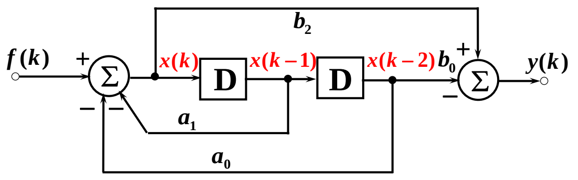
$y'(t)+3y(t)=2f(t)$



(c)

$y'(t)+3y(t)=2f'(t)$

例4：试写出图所示离散系统的数学模型



左加法器：$x(k)+a_1x(k-1)+a_0x(k-2)=f(k)$

右加法器：$y(k)=b_2x(k)-b_0x(k-2)$

$$\underbrace{y(k)+a_1y(k-1)+a_0y(k-2)}_{\text{左加法器的}x(k)\text{换成}y(k)}=\underbrace{b_2f(k)-b_0f(k-2)}_{\text{右加法器的}x(k)\text{换成}f(k)}$$

要求：由框图会直接写出系统的微(差)分方程

总结：由框图列写系统的微(差)分方程的一般步骤：

1. 选中间变量x( )
   - 连续系统：设其最右端积分器的输出为$x(t)$
   - 离散系统：设其最左端延迟单元的输入为$x(k)$
2. 写出各加法器输出信号的方程
3. 消去中间变量
   - 左加法器的x( )换成y( )
   - 右加法器的x( )换成f( )

二、系统的分类 (一般以其数学模型分类)

1. 连续(时间)系统与离散(时间)系统
   - (1) 连续系统 ～微分方程
   - (2) 离散系统 ～差分方程
2. 即时(无记忆)系统与动态(有记忆)系统
   - (1) 动态系统～微分方程(或差分方程) (动态电路)
   - (2)即时系统～ 代数方程(电阻电路)
3. 线性系统与非线性系统
4. 时变系统与时不变系统
5. 因果系统与非因果系统
6. 稳定系统与非稳定系统

本课程讨论线性、时不变的动态(含连续和离散)系统（LTI, Linear Time Invariant）

1.6 LTI系统的性质

1. 线性性质　线性性质是分析和研究线性系统的重要理论基础。

*T*的含意：系统做算子*T* 所规定的某种运算

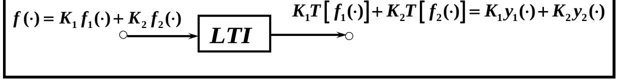
$f(\cdot)$与$y(\cdot)$的关系简记为：$y(\cdot)=T[f(\cdot)]$

一个系统的输入f( )与输出y( )即满足均匀性又满足叠加性时，称该系统为线性系统。

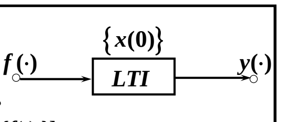
均匀性：$T[Kf(\cdot)]=KT[f(\cdot)]=Ky(\cdot)$

叠加性：$y(\cdot)=T[f_1(\cdot)+f_2(\cdot)]=T[f_1(\cdot)]+T[f_2(\cdot)]=y_1(\cdot)+y_2(\cdot)$

线性：



动态系统是线性系统的条件



动态系统不仅与激励{f( )}有关，而且与系统的初始状态{x(0)}有关。

完全响应可写为：$y(\cdot)=T[\{x(0)\},\{f(\cdot)\}]$

- 零状态响应为：$y_{zs}(\cdot)=T[\{0\},\{f(\cdot)\}]$
- 零输入响应为：$y_{zi}(\cdot)=T[\{x(0)\},\{0\}]$

当动态系统满足下列三个条件时该系统为线性系统：

1) 可分解性：

$y(\cdot)=y_{zs}(\cdot)+y_{zi}(\cdot)=T[\{0\},\{f(\cdot)\}]+T[\{x(0)\},\{0\}]$

2) 零状态线性：

$$y_{zs}(\cdot)=T[b_1f_1(\cdot)+b_2f_2(\cdot)]=b_1T[f_1(\cdot)]+b_2T[f_2(\cdot)]$$

3) 零输入线性：

$$y_{zi}(\cdot)=T[a_1x_1(\cdot)+a_2x_2(\cdot)]=a_1T[x_1(\cdot)]+a_2T[x_2(\cdot)]$$

例1：判断下列式子所示系统是否为线性系统

a) $y(t)=f(t)x(0)+\int_0^t f(x)dx$

b) $y(t)=\sin[x(0)]+\int_0^t f(x)dx$

解：a) $y_{zi}(t)=0,\quad y_{zs}(t)=\int_0^t f(x)dx$

显然，$y(t)\neq y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$ 不满足可分解性，故为非线性。

b) $y_{zi}(t)=\sin[x(0)],\ y_{zs}(t)=\int_0^t f(x)dx$

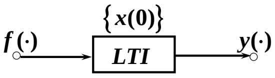
显然，$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$ 满足可分解性，

$T[ax(0)]=\sin[ax(0)],\quad ay_{zi}(t)=a\sin[x(0)]$

显然，不满足零状态线性，故为非线性系统。

直观判断方法：若方程中任何一项是一个常数或是f( )或y( )的非线性函数，则系统为非线性系统。

例2：图所示某一线性系统，



已知 $y_1(t)=T[\{f(t)\},\{x(0)\}]=[e^{-t}+\cos\pi t]\varepsilon(t)$

$y_2(t)=T[\{2f(t)\},\{x(0)\}]=[2\cos\pi t]\varepsilon(t)$

求 $y_3(t)=T[\{4f(t)\},\{3x(0)\}]$

解：$y_{zs}(t)=y_2(t)-y_1(t)=[\cos\pi t-e^{-t}]\varepsilon(t)$,

$y_{zi}(t)=y_1(t)-y_{zs}(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)$,

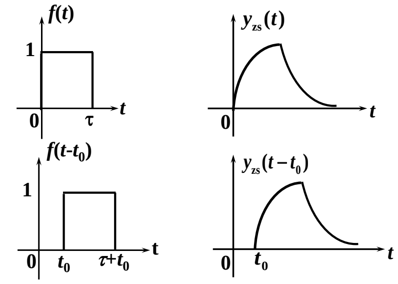
$\therefore y_3(t)=4y_{zs}(t)+3y_{zi}(t)=[4\cos\pi t+2e^{-t}]\varepsilon(t)$

2. 时不变特性

若 $y_{zs}(\cdot)=T[\{0\},\{f(\cdot)\}]$

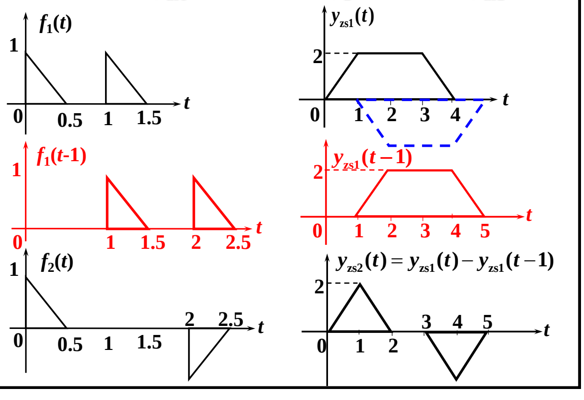
则 $T[\{0\},\{f(t-t_d)\}]=y_{zs}(t-t_d)$

$T[\{0\},\{f(k-k_d)\}]=y_{zs}(k-k_d)$



时不变系统的响应形式与激励接入系统的时间无关

例3：某LTI连续系统初始状态为零，当输入为$f_1(t)$时其零状态响应为$y_{zs1}(t)$，求输入为$f_2(t)$时的响应$y_{zs2}(t)$。



例4：判断下列系统是否为时不变系统

(1) $y_{zs}(t)=\sin[f(t)]\quad t\ge 0$　　(2) $y_{zs}(k)=k\cdot f(k)$

解：(1) $T[\{0\},\{f(t-t_d)\}]=\sin[f(t-t_d)]$

而 $y_{zs}(t-t_d)=\sin[f(t-t_d)]$

显然 $T[\{0\},\{f(t-t_d)\}]=y_{zs}(t-t_d)$

故该系统是时不变系统。

(2) $T[\{0\},\{f(k-k_d)\}]=kf(k-k_d)$

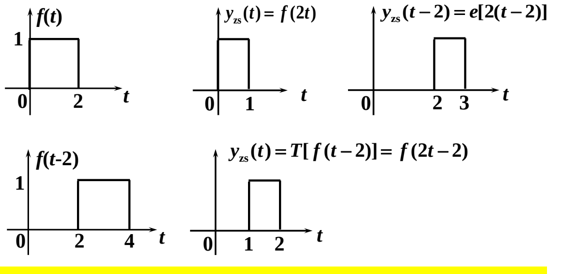
而 $y_{zs}(k-k_d)=(k-k_d)f(k-k_d)$

显然 $T[\{0\},\{f(k-k_d)\}]\neq y_{zs}(k-k_d)$

故该系统是时变系统。

例5：已知$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$，$y_{zs}(t)=f(2t)$

判断该系统是否为时不变系统。



直观判断方法：　若f( )或y( )前出现t或k的显式函数，或有反转、尺度变换，则系统为时变系统。

描述LTI系统的是线性常系数差分方程

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2f''(t)+b_1f'(t)+b_0f(t)$$

例6：下列差分方程描述的系统，

是否线性？是否时不变？

(1) $y(k)+(k-1)y(k-1)=f(k)$　　线性、时变

(2) $y(k)+y(k+1)y(k-1)=f^2(k)$　　非线性、时不变

(3) $y(k)+2y(k-1)=f(1-k)+1$　　非线性、时变

判断方法：方程中均为输出、输入序列的一次关系项，则是线性的。输入输出序列前的系数为常数，且无反转、展缩变换，则为时不变的。

3. 微分和积分特性

$f(\cdot) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(\cdot)$

若 $y_{zs}(t)=T\left[\{0\},\{f(t)\}\right]$

则 $T\left[\{0\},\dfrac{df(t)}{dt}\right]=\dfrac{dy_{zs}(t)}{dt}$

$T\left[\{0\},\int_{-\infty}^{t}f(x)dx\right]=\int_{-\infty}^{t}y_{zs}(x)dx$

$\left.\begin{array}{l} f^{(n)}(t)\to y_{zs}^{(n)}(t) \\ f^{(-n)}(t)\to y_{zs}^{(-n)}(t) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} f^{(1)}(t)\text{表示对}f(t)\text{求一次导数} \\ f^{(-1)}(t)\text{表示对}f(t)\text{做一次积分} \end{array}$

例6：$f_1(t)=\varepsilon(t)$时 $y_{zs_1}(t)=(\dfrac{1}{2}+e^{-t}-\dfrac{3}{2}e^{-2t})\varepsilon(t)$,

求：$f_2(t)=\delta(t)$时$y_{zs_2}(t)$

解得：$y_{zs2}(t)=(3e^{-2t}-e^{-t})\varepsilon(t)$

4. 因果性

$f(\cdot) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(\cdot)$

$y_{zs}(\cdot)=T\left[\{0\},\{f(\cdot)\}\right]$ 把激励与零状态响应的关系看成因果关系

因果系统应满足

$\left.\begin{array}{l} \text{当 } f(\cdot)=0 \quad t<t_0 \text{ 或}(k<k_0)\text{时} \\ y_{zs}(\cdot)=T\left[\{0\},\{f(\cdot)\}\right]=0 \quad t<t_0 \text{ 或} k<k_0 \end{array}\right\}$ 响应不能先于激励

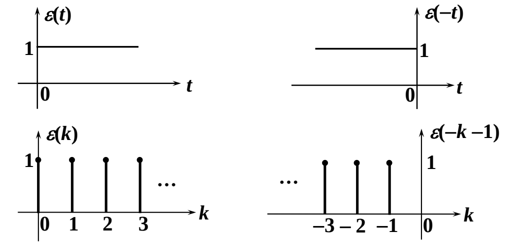
例7：判断系统的因果性

(1) $y_{zs}(t)=3f(t-1)$　　因果系统（响应后于激励）

(2) $y_{zs}(k)=f(k+1)$　　非因果系统（响应先于激励）

(3) $y_{zs}(t)=f(2t)$　　非因果系统（响应先于激励）

系统分析中常把t<0(或k<0)时为零的信号称为因果信号，把t>0(或k>0)时为零的信号称为反因果信号。



因果信号　　　　反因果信号

因果系统在因果信号激励下的响应一定是因果信号。

注: 以t为变量的实际物理系统都是因果系统。

5. 稳定性

$f(\cdot) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(\cdot)$

稳定系统满足：$|f(\cdot)|<\infty$时，存在$|y_{zs}(\cdot)|<\infty$

稳定系统对有界输入其零状态响应也是有界的

例8：判断系统的稳定性

(1) $y_{zs}(k)=f(k)+f(k-1)$　稳定系统

(2) $y_{zs}(t)=\int_0^t\varepsilon(x)dx=t$　　不稳定系统

1.7 LTI系统的分析方法

信号分析的核心是将复杂信号分解为一些基本信号的线性组合的基础上，通过研究基本信号的特性来研究复杂信号的特性。

系统分析的主要任务是已知系统结构(或系统的数学模型)与激励、初始状态的条件下，求系统的响应(即输出)。

1. 系统模型

1) 输入—输出描述法（外部法）

$f(\cdot) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(\cdot)$

建立$f(\cdot)$与$y(\cdot)$之间的数学关系（不关心系统内部）

连续系统：用一个n阶微分方程描述

离散系统：用一个n阶差分方程描述

2) 状态变量描述法（内部法）

用于研究系统内部的各种问题，如讨论系统的可观性、可控性等

n阶系统的状态方程：n个联立的一阶微分(或差分)方程组。

2. 求解数学模型

1) 时域分析法

a) 经典法

b) 卷积积分 （连续系统）

c) 卷积和 （离散系统）

2) 变换域分析法

a) 傅里叶变换（FT）

b) 拉氏变换 （LT）

连续系统

c) Z变换 （ZT）

离散系统

本章重点

1. 信号的描述、信号的分类

2. 常用基本信号的时域描述 函数↔波形

3. $\varepsilon(t)$ 、 $\delta(t)$ 、$\delta'(t)$定义及其性质

4. 信号的基本运算

5. 系统的分类及数学模型

会建立系统的数学模型(由框图建立数学模型时会用规律)

6. 线性系统的相关性质