中国传媒大学

2016—2017 学年第一学期期末考试试卷(A 卷)

参考答案及评分标准

考试科目： 数学物理方程　　　**课程编码：** 123023

考试班级： 15 级信息工程学院　　　**考试方式：** 闭卷

一、解答题（本大题 40 分）

1. 已知长度2π的弦一端固定，另一端自由放开，初始时刻弦的形状为$\cos(x)$，试写出该弦振动的定解问题.（本小题 5 分）

解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2\pi, t > 0, & (2\text{ 分}) \\ u|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=2\pi} = 0, \quad t > 0, & (2\text{ 分}) \\ u|_{t=0} = \cos(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad 0 \le x \le 2\pi. & (5\text{ 分}) \end{cases}$$

2. 试讨论下面特征值问题，当特征值λ取何值时$X(x)$有非零解，并求出该特征函数$X(x)$. (本小题 10 分)

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < \ell. \\ X(0) = 0, X'(\ell) = 0. \end{cases}$$

解: (1) 当$\lambda < 0$时，$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$，代入边界条件，　　(1 分)

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0, \\ X'(\ell) = A\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\ell} - B\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0. \end{cases} \qquad (2\text{ 分})$$

联立解得$A = B = 0$.当$\lambda < 0$时，$X(x)$无非零解.　　(3 分)

(2) 当 $\lambda=0$ 时，$X(x)=Ax+B$,代入边界条件, (4 分)

$$\begin{cases} X(0)=B=0, \\ X'(\ell)=A=0. \end{cases} \qquad (5 分)$$

当 $\lambda=0$ 时，$X(x)$ 无非零解. (6 分)

(3) 当 $\lambda>0$ 时，$X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x)$. (7 分)

代入边界条件,

$$\begin{cases} X(0)=A=0, \\ X'(\ell)=B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\ell)=0. \end{cases} \qquad (8 分)$$

当 $\lambda>0$ 时，$\cos(\sqrt{\lambda}\ell)=0$，即 $\lambda_n=\dfrac{2n-1}{2\ell}\pi$，特征问题有非零解,

$$X_n(x)=B_n\sin\left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi x\right), \quad n=1,2,\ldots \qquad (10 分)$$

3. 试描述上题所求得的特征函数系 $\{X_n(x)\}$ 在区间 $[0,\ell]$ 上的正交性. (本小题 5 分)

解:

$$\int_0^\ell \sin\left(\frac{2m-1}{2\ell}\pi x\right)\cdot\sin\left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi x\right)dx=\begin{cases} 0, & m\neq n. \quad (2 分) \\ \dfrac{\ell}{2}, & m=n. \quad (5 分) \end{cases}$$

4. 假设函数 $f(x)$ 能按上题的特征函数系 $\{X_n(x)\}$ 展开为级数，试写出展开式中的系数表达式. (本小题 5 分)

解：设

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m\sin\left(\frac{2m-1}{2\ell}\pi x\right), \qquad (1 分)$$

两边同时乘以 $\sin\left(\dfrac{2n-1}{2\ell}\pi x\right)$，并在区间 $[0,\ell]$ 上积分, (2 分)

$$\int_0^\ell f(x)\cdot\sin\left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi x\right)dx=\sum_{m=1}^{\infty}C_m\int_0^\ell\sin\left(\frac{2m-1}{2\ell}\pi x\right)\cdot\sin\left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi x\right)dx.\quad (3\text{ 分})$$

根据正交性，可得，

$$\int_0^\ell f(x)\cdot\sin\left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi x\right)dx=C_n\int_0^\ell\sin^2\left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi x\right)dx=C_n\frac{\ell}{2}.\quad (4\text{ 分})$$

所以，展开式系数表达式为，

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cdot\sin\left(\frac{2n-1}{2\ell}\pi x\right)dx.\quad (5\text{ 分})$$

5. 试验证冲击函数$\delta(t)$是阶跃函数$u(t)$的弱导数，并求出其 Laplace 变换.（本小题 5 分）

解：对于任意$\forall\varphi\in C_0(-\infty,\infty)$有，

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}u'(t)\varphi(t)dt=u(t)\varphi(t)|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)\varphi'(t)dt\\&=\int_0^{+\infty}1\cdot\varphi'(t)dt=\varphi(t)|_0^{+\infty}=\varphi(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

所以，$u'(t)=\delta(t)$，即冲击函数$\delta(t)$是阶跃函数$u(t)$的弱导数. (3 分)

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=\mathcal{L}[u'(t)]=p\mathcal{L}[u(t)]-u(0)=p\cdot\frac{1}{p}=1.\quad (5\text{ 分})$$

6. 试分别计算导数$\frac{d}{dx}[x^{2017}J_{2016}(x)]$.（本小题 5 分）

解：由递推公式$\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x)$，可得， (2 分)

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}[x^{2017}J_{2016}(x)]=\frac{d}{dx}[x\cdot x^{2016}J_{2016}(x)] && (3\text{ 分})\\&=x^{2016}J_{2016}(x)+x\cdot x^{2016}J_{2015}(x) && (4\text{ 分})\\&=x^{2016}(J_{2016}(x)+xJ_{2015}(x)). && (5\text{ 分})\end{aligned}$$

7. 不求解定解问题试将以下非齐次方程和非齐次边界条件同时齐次化. （本小题 5 分）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A, \\ u\Big|_{x=0} = B, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = C, \\ u\,\Big|_{t=0} = D, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = E. \end{cases}$$

解: 设 $u = v(x,t) + w(x)$

则有：$\begin{cases} a^2 w''(x) + A = 0 \\ w(0) = B \\ w'(l) = C \end{cases}$ $\qquad w(x) = -\dfrac{A}{2a^2} x^2 + c_1 x + c_2.$ (2 分)

代入边界条件得

$$w(x) = -\frac{A}{2a^2} x^2 + (\frac{A}{a^2} l + C) x + B. \qquad (3 \text{ 分})$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 \le \mathrm{x} \le l,\ \mathrm{t} > 0, \\ v\Big|_{x=l} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,\ t > 0, \\ v\,\Big|_{t=0} = D + \dfrac{A}{2a^2} x^2 - (\dfrac{A}{a^2} l + C) x - B, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = E. \end{cases} \qquad (5 \text{ 分})$$

二、试用分离变量法计算下列定解问题（本题 15 分）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \qquad 0 < x < 1, t > 0, \\ u\Big|_{x=0} = 0,\ u\Big|_{x=1} = 0, \qquad t > 0, \\ u\Big|_{t=0} = \sin\left(2017\pi x\right),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

解：设该定解问题的解为$u(x,t)=X(x)T(t)$ (1 分)

则$\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$ (2 分)

$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$ (3 分)

$X''(x)+\lambda X(x)=0$ (4 分)

由$u\big|_{x=0}=0$， $u\big|_{x=1}=0$ 得$X(0)=0, X(1)=0$ (5 分)

解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=0, X(l)=0. \end{cases}$$ (6 分)

通过讨论得:

1、$\lambda\le 0$时，$X(x)=0.$ (7 分)

2、$\lambda>0, \lambda=\beta^2$，$X(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x.$ (8 分)

由$X(0)=0$，知$A=0$，$X(1)=0$，知$B\sin(\beta)=0$，从而

$\beta_n=n\pi, \lambda_n=(n\pi)^2$， $(n=1,2,...)$， (9 分)

特征函数$X_n(x)=B_n\sin(n\pi x)$. (10 分)

将特征值$\lambda_n=(n\pi)^2$代入$T_n''(t)+a^2n^2\pi^2T_n(t)=0$，得

$T_n(t)=C_n'\cos(an\pi t)+D_n'\sin(an\pi t), n=0,1,2,\cdots$ (12 分)

设$u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(C_n\cos(an\pi t)+D_n\sin(an\pi t)\right)\sin(n\pi x)$ $n=0,1,2,\cdots$

由于$\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$，所以$D_n=0$. (13 分)

代入初始条件 $u\big|_{t=0}=\sin\left(2017\pi x\right)$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(n\pi x\right)=\sin\left(2017\pi x\right). \qquad (14\text{ 分})$$

所以，$C_{2017}=1$，$C_n=0, n\neq 2017$，于是

$$u(x,t)=\cos\left(2017a\pi t\right)\cdot\sin\left(2017\pi x\right). \qquad (15\text{ 分})$$

三、用行波法求解下面 Cauchy 问题 （本大题 15 分）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1, & y>0,-\infty<x<+\infty.\\ u\,|_{y=0}=0, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=2x. & \end{cases}$$

解: 原方程相应的特征方程为

$$(dy)^2+dxdy-2(dx)^2=0.$$

可分解为

$$(dy+2dx)(dy-dx)=0.$$

求得特征线

$$y+2x=C_1, \qquad y-x=C_2.$$

所以做特征变换

$$\xi=y+2x, \qquad \eta=y-x,$$

将原方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{1}{9}.$$

经过两次偏积分可以求得原方程的通解为 $f(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)-\dfrac{1}{9}\xi\eta$，即

$$u(x,y)=f_1(y+2x)+f_2(y-x)-\frac{1}{9}(y+2x)(y-x).$$

代入边界条件可得

$$u|_y=0=0 \Rightarrow f_1(2x)+f_2(-x)=\frac{2}{9}x^2.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=2x \Rightarrow f_1'(2x)+f_2'(-x)-\frac{1}{9}x=2x \Rightarrow f_1(2x)-2f_2(-x)=\frac{19}{9}x^2.$$

联立求解可得,

$$\begin{cases} f_1(x)=\dfrac{5}{36}x^2, \\ f_2(x)=-\dfrac{7}{9}x^2. \end{cases}$$

再代入特征变换可得原方程的解为

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\frac{5}{36}(y+2x)^2-\frac{7}{9}(y-x)^2-\frac{1}{9}(y+2x)(y-x) \\ &=2xy-\frac{3}{4}y^2. \end{aligned}$$

四、求解下面非齐次波动方程.（本题 15 分）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos t\cdot\sin x, & -\infty<x<\infty, t>0, \\ u|_{t=0}=x^2, \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=x, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

（可能用到的傅里叶变换对：$g(t)=\begin{cases} h, -\tau<t<\tau, \\ 0, otherwise. \end{cases} \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} 2h\dfrac{sin\omega\tau}{\omega}$）

解：设 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，其中 $v(x,t)$ 满足齐次波动方程带有非齐次定解条件的定解问题,

$$(I)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty<x<\infty, t>0, \\ u|_{t=0}=x^2, \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=x, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

而 $w(x,t)$ 满足非齐次波动方程带有齐次定解条件的定解问题,

$$(II)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos t\cdot\sin x, & -\infty<x<\infty, t>0,\\ u\big|_{t=0}=0, \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, & -\infty<x<\infty.\end{cases}$$

对于定解问题(I)，可以采用 Dalembert 公式直接写出结果，

$$v(x,t)=\frac{1}{2}[(x+at)^2+(x-at)^2]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\xi d\xi=x^2+a^2t^2+tx.$$

对于定解问题(II)非齐次波动方程两端同时对 x 做傅里叶变换，可得，

$$(II')\begin{cases}\dfrac{d^2W}{dt^2}=a^2(i\omega)^2W(\omega,t)+\cos t\cdot\mathcal{F}\left[\sin x\right], & t>0,\\ W\big|_{t=0}=0, \dfrac{dW}{dt}\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

再对(II’)非齐次常微分方程两端同时对 t 施加拉普拉斯变换，可得，

$$p^2W(\omega,p)=-a^2\omega^2W(\omega,p)+\mathcal{L}[\cos t]\cdot\mathcal{F}[\sin x].$$

可以解得，

$$W(\omega,p)=\frac{1}{p^2+a^2\omega^2}\cdot\mathcal{L}[\cos t]\cdot\mathcal{F}[\sin x].$$

对$W(\omega,p)$做拉普拉斯逆变换，可得，

$$W(\omega,t)=\frac{\sin a\omega t}{a\omega}*\cos t\cdot\mathcal{F}[\sin x]=\int_0^t\frac{sina\omega(t-\tau)}{a\omega}\cdot\cos\tau d\tau\cdot\mathcal{F}[\sin x].$$

对$W(\omega,t)$做傅里叶逆变换，可得，

$$\begin{aligned}w(x,t)&=\frac{1}{a}\int_0^t\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{sin\omega a(t-\tau)}{\omega}\cdot\mathcal{F}[\sin x]\right]\cdot\cos\tau d\tau\\&=\frac{1}{a}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-s)\cdot\sin s\cdot\cos\tau dsd\tau\\&=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\sin s\cdot\cos\tau dsd\tau.\end{aligned}$$

所以，原问题的解为，

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)=x^2+a^2t^2+tx+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\sin s\cdot\cos\tau dsd\tau.$$

五、应用题（本大题 15 分）

设有半径为 a 的球体，球面上温度为$\cos^3\theta$，求稳恒状态下球体内部的温度分布.

解：稳恒状态下温度分布满足拉普拉斯方程. 由于定解条件与φ无关，所以解之和 r 与 θ 有关. 因此，温度分布满足的定解问题为，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2 sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0, \quad 0<r<a, 0\le\theta\le\pi,\\ u|_{r=R}=\cos^3\theta,\ \ 0\le\theta\le\pi.\end{cases}$$

采用变量分离法求解. 设$u(r,\theta)=R(r)\cdot\Theta(\theta)$，代入原方程，

$$(r^2R''+2rR')\Theta+(\Theta''+\cot\theta\cdot\Theta')R=0.$$

令

$$\frac{r^2R''+2rR'}{R}=-\frac{\Theta''+\cot\theta\cdot\Theta'}{\Theta}=n(n+1).$$

可得，

$$\begin{aligned}&(I) && r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0,\\ &(II) && \Theta''+\cot\theta\cdot\Theta'+n(n+1)\Theta=0.\end{aligned}$$

(I)的通解为，

$$R_n(r)=C_1r^n+C_2r^{-(n+1)}.$$

为了保证球心温度有限，$C_2=0$.

(II)是勒让德方程，只有当 n 为整数才有界解，

$$\Theta_n(\theta)=P_n(\cos\theta).$$

因此，原问题的通解为，

$$u(r,\theta)=\sum_0^\infty C_nr^nP_n(cos\theta).$$

代入球表面的温度,

$$u|_{r=a}=\sum_{0}^{\infty}C_n a^n P_n(cos\theta)=\cos^3\theta.$$

令 $x=\cos\theta$，可得,

$$x^3=\sum_{0}^{\infty}C_n a^n P_n(x).$$

被展开函数最高次数为 3 次，因此只需要展开到 3 次勒让德多项式,

$$x^3=C_0a^0P_0(x)+C_1a^1P_1(x)+C_2a^2P_2(x)+C_3a^3P_3(x).$$

由于 $P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$，代入展开式可得,

$$\begin{aligned}x^3&=C_0+C_1ax+C_2a^2\frac{1}{2}(3x^2-1)+C_3a^3\frac{1}{2}(5x^3-3x)\\&=\left(C_0-\frac{1}{2}C_2a^2\right)+\left(C_1a-\frac{3}{2}C_3a^3\right)x+\frac{3}{2}C_2a^2x^2+\frac{5}{2}C_3a^3x^3.\end{aligned}$$

对比上面等式两边的系数，可以求得,

$$C_0=0, C_1=\frac{2}{5a}, C_2=0, C_3=\frac{2}{5a^3}.$$

所以，球内温度分布为,

$$u(r,\theta)=\frac{2}{5a}rcos\theta+\frac{1}{5a^3}r^3(5\cos^3\theta-3\cos\theta).$$