第三章 离散系统的时域分析

3.1 离散系统的差分方程及其经典解

3.2 零输入响应、零状态响应、完全响应

3.3 单位序列响应和单位阶跃序列响应

3.4 卷积和

3.1 离散系统的差分方程及其经典解

一、差分方程

1. 差分的概念 （差分是离散信号的一种数学运算）

设$f(k)$为一离散信号

则$f(k+m)$ …, $f(k+1)$, $f(k-1)$, $f(k-2)$… $f(k-n)$称为$f(k)$的移位序列。

a) 一阶前向(或向左移序)差分 (注：Δ和∇称差分算子)

$$\Delta f(k)=f(k+1)-f(k)$$

未知序列之序号是自k以递增方式给出

b) 一阶后向(或向右移序)差分（本书采用后向差分）

$$\nabla f(k)=f(k)-f(k-1)$$

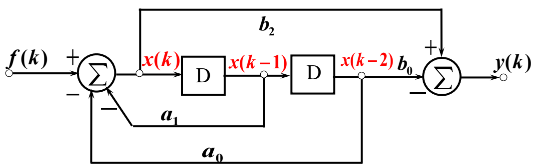
未知序列之序号是自k以递减方式给出

c) 前向差分与后向差分的关系

$$\nabla f(k)=\Delta f(k-1)$$

2. 离散系统的数学模型~差分方程

某一离散系统如图所示，列出该系统的数学模型



左加法器：$x(k)+a_1x(k-1)+a_0x(k-2)=f(k)$

右加法器：$y(k)=b_2x(k)-b_0x(k-2)$

最高与最低序列之差为2，为二阶差分方程

$$\underbrace{y(k)+a_1y(k-1)+a_0y(k-2)}_{\text{左加法器的}x(k)\text{换成}y(k)}=\underbrace{b_2f(k)-b_0f(k-2)}_{\text{右加法器的}x(k)\text{换成}f(k)}$$

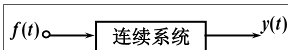
离散系统差分方程的一般形式

单输入—单输出的离散系统其数学模型的一般形式为

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}y(k-i)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}f(k-j)\quad n\ge m$$

差分方程是包含关于变量k的未知序列$y(k)$及其各阶差分和激励$f(k)$及各阶差分的方程式。

离散系统的数学运算含移位（或延时）、数乘、相加



$$\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_jf^{(j)}(t)$$

微分方程是包含关于变量t的未知函数$y(t)$及其各阶导数和激励$f(t)$及各阶导数的方程式。

其数学运算含微分、数乘、相加

说明：离散系统的时域分析与连续系统的时域分析存在对应关系

连续系统~微分方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_jf^{(j)}(t)$$

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$$

离散系统~差分方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}y(k-i)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}f(k-j)\quad n\ge m$$

$$y(k)=y_h(k)+y_p(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)$$

$$y_{zs}(k)=f(k)*h(k)$$

二、常系数线性差分方程的解

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}y(k-i)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}f(k-j)\quad n\ge m$$

求解差分方程的方法有

① 迭代法

② 经典法

③ 变换域法

1. 迭代法

用迭代的方法可求得差分方程的 数值解 ，但不易得出解析式，便于用计算机求解。

如 $y(k)-y(k-1)-y(k-2)=\varepsilon(k)$, $y(-1)=1$, $y(-2)=0$

$$y(k)=\varepsilon(k)+y(k-1)+y(k-2)$$

$$y(0)=\varepsilon(0)+y(-1)+y(-2)=2$$

$$y(1)=\varepsilon(1)+y(0)+y(-1)=4$$

$$y(2)=\varepsilon(2)+y(1)+y(0)=7$$

2. 差分方程的经典解法

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j)$$

差分方程

特征根λ_i确定齐次解$y_h(k)$的形式(查P_{87}表3–1)

由$f(k)$的形式,确定特解$y_p(k)$的形式(查P_{87}表3–2)

$y_h(k)$含待定系数

$+\ \Sigma\ +$

全解$y(k)$ $y(k)=y_h(k)+y_p(k)$ (含待定系数)

$y_h(k)$中的待定系数在全解中，由初始条件确定

$y(0)...y(n-1)$ 初始条件

---

(1) 齐次解$y_h(k)$ $\quad \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} f(k-j) \quad n \geq m$

$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+...+a_0 y(k-n)=0$ 齐次方程

一阶差分方程的齐次解

$y(k)+ay(k-1)=0$

$y(k)/y(k-1)=-a$

意味着$y_h(k)$是一个公比为$(-a)$的几何级数(即等比序列)

$\therefore\ y_h(k)=C(-a)^k=C(\lambda)^k$

C是待定系数，由初始条件定

对于n阶齐次方程

n阶差分方程的特征方程

$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0$

说明： n阶差分方程与n阶微分方程的特征方程形式完全一样

例1：求下列方程齐次解$y_h(k)$的形式

1) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=0$

$y_h(k)=C_1(-1)^k+C_2(-2)^k$

2) $y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=0$

$y_h(k)=C_1 k(-2)^k+C_2(-2)^k$

3) $y(k)+2y(k-1)+2y(k-2)=0$

$\lambda_{1,2}=-1\pm j1 =\sqrt{2}e^{\pm j\frac{3\pi}{4}} =\rho e^{\pm j\beta}$

$y_h(k)=\rho^k\left[C\cos(\beta k)+D\sin(\beta k)\right]$

$=A\rho^k\cos(\beta k-\theta)$, (其中$Ae^{j\theta}=C+jD$)

注意：微分方程的齐次解 $y_h(t)=Ce^{\lambda t}$

差分方程的齐次解 $y_h(k)=C(\lambda)^k$

齐次解$y_h(k)$的形式完全由特征根λ_i确定 (查P87表3 -1)

---

(2) 特解$y_p(k)$

例2: $y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=f(k)$

$f(k)=2^k$ 求 $y_p(k)$

根据$f(k)$的形式(查表3–2)先确定$y_p(k)$的形式后代入方程确定系数。

$\because f(k)=a^k=2^k$, $\lambda_{1,2}=-2\neq a=2$

$\therefore y_p(k)=p(2)^k$

解得 $y_p(k)=\frac{1}{4}(2)^k \quad k\geq 0$

说明：通常设k=0时激励$f(k)$加入系统，因此特解存在区间为$k\geq 0$

特解$y_p(k)$的形式由输入$f(k)$确定 (查P87表3 -2)

例3: $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$

$f(k)=2\varepsilon(k)$ 求 $y_p(k)$

$\because f(k)=2\varepsilon(k)$, $\lambda_{1,2}\neq 1$, $\therefore y_p(k)=p$

即$p+3p+2p=2$ 解得 $y_p(k)=\frac{1}{3}\varepsilon(k)$

例4: $y(k)-y(k-2)=f(k)$, $f(k)=\varepsilon(k)$, 求 $y_p(k)$

注意：若1等于特征根λ_i的一个时 $y_p(k)=P_1k+P_0$

$\because f(k)=\varepsilon(k)$, $\lambda_{1,2}=\pm 1$

$\therefore y_p(k)=p_1k+p_0$

即$p_1k+p_0-p_1(k-2)-p_0=1\Rightarrow p_1=\frac{1}{2}$

解得 $y_p(k)=\frac{1}{2}k\varepsilon(k)$

例5: $6y(k)-5y(k-1)+y(k-2)=10\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, 求 $y_p(k)$

$\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{3}$

$\because$ 特征根$\lambda_{1,2}\neq e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

$\therefore\ y_p(k)=P\cos\frac{\pi}{2}k+Q\sin\frac{\pi}{2}k=B\cos\left(\frac{\pi}{2}k-\theta\right)$

法一：用待定系数法(见P89例3.1-3)

$y_p(k)=P\cos\frac{\pi}{2}k+Q\sin\frac{\pi}{2}k$代入方程解得

$y_p(k)=\sqrt{2}\cos(\frac{k\pi}{2}-45^\circ$,

例5：$6y(k)-5y(k-1)+y(k-2)=10\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$，求 $y_p(k)$

$$y_p(k)=P\cos\frac{\pi}{2}k+Q\sin\frac{\pi}{2}k=B\cos\left(\frac{\pi}{2}k-\theta\right)$$

法二：用相量法

$y_p(k)\leftrightarrow \dot{Y}_p=B\angle-\theta,$

$y_p(k-1)\leftrightarrow B\angle-\theta-90^0=-j\dot{Y}_p,$

$y_p(k-2)\leftrightarrow B\angle-\theta-180^0=-\dot{Y}_p,$

代入方程可得：$6\dot{Y}_p-5(-j\dot{Y}_p)+(-\dot{Y}_p)=10\angle0^0$

$\dot{Y}_p(5+j5)=10\angle0^0$

$\dot{Y}_p=\sqrt{2}\angle-45^0$ $\qquad y_p(k)=\sqrt{2}\cos(\frac{k\pi}{2}-45^\circ)$，

(3) 完全解 $y(k)$ $\qquad y(k)=y_h(k)+y_p(k)$

$$=\sum_{i=1}^{n}C_i\lambda_i^k+y_p(k)$$

特征根为单实根时

注意：待定系数在全解中用初始条件确定

例6：$y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=2^k$

$y(0)=0\quad y(1)=1$ 求 $y(k)\ \ k\ge0$

$y_h(k)=C_1k(-2)^k+C_2(-2)^k\qquad y_p(k)=\frac{1}{4}(2)^k\qquad k\ge0$

$y(k)=y_h(k)+y_p(k)=C_1k(-2)^k+C_2(-2)^k+\frac{1}{4}(2)^k$

$y(0)=C_2+\frac{1}{4}=0$

$y(1)=C_1\cdot(-2)+C_2\cdot(-2)+\frac{1}{4}\cdot2=2$

解得 $y(k)=\left[-\frac{1}{4}(-2)^k+\frac{1}{4}(2)^k\right]\varepsilon(k)$

例7：$6y(k)-5y(k-1)+y(k-2)=10\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

$y(0)=0\quad y(1)=1$ 求 $y(k)\ \ k\ge0$

$y(k)=y_h(k)+y_p(k)$

$y_h(k)=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^k+C_2\left(\frac{1}{3}\right)^k\qquad y_p(k)=\sqrt{2}\cos(\frac{k\pi}{2}-45^\circ)$，

$$y(k)=\underbrace{\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^k-3\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\left[\sqrt{2}\cos(\frac{k\pi}{2}-45^\circ)\right]}_{\text{强迫响应}}\qquad k\ge0$$

暂态响应 自由响应 强迫响应 稳态响应

$\because|\lambda_{1,2}|<1,\ \therefore k\to\infty\ \ y_h(k)\to0,$

$y(k)=y_p(k)=\sqrt{2}\cos(\frac{k\pi}{2}-45^\circ)$，$-y_{ss}(k)$

(4) 初始值 (初始条件)

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}y(k-i)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}f(k-j)\quad k\ge0$$

1) 初始值、初始状态的概念

因果系统，若$f(k)$在$k=0$时接入

则 $y(-1),y(-2),y(-3),\ldots\ y(-n)$ ~称初始状态

$y(0),y(1),y(2)\ldots y(j),\ldots y(n-1)$ ~ 称初始值(即初始条件)

(注意：差分方程与微分方程确定初始值的区别)

2) 初始值 $y(j)$ 的确定(解题的重要步骤) ($j=0,1,2,\ \ldots\ n-1$)

$y(j)$：由差分方程和初始状态、利用迭代法求出

例8：某一系统的数学模型为$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$，求下列条件下系统的初始条件 $y(0)$，$y(1)$。

(1) $y(-1)=2$，$y(-2)=-\frac{1}{2}$，$f(k)=0$;

(2) $y(-1)=y(-2)=0$，$f(k)=\varepsilon(k)$;

(3) $y(-1)=2$，$y(-2)=-\frac{1}{2}$，$f(k)=\varepsilon(k)$

$y(0)=f(0)+y(-1)+2y(-2)$

(注意:初始状态 ≠ 初始值)

$y(1)=f(1)+y(0)+2y(-1)$

(1) $y(0)=1,\quad y(1)=5$

(2) $y(0)=1,\quad y(1)=2$

(3) $y(0)=2,\ y(1)=7$

3.2 零输入响应、零状态响应、完全响应

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}y(k-i)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}f(k-j)\quad n\ge m$$

完全解 $\quad y(k)=y_h(k)+y_p(k)$

一、零输入响应

$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}y(k-i)=0$ （对应齐次方程，其形式由特征根决定）

$y_{zi}(k)=\sum_{i=1}^{n}C_{xi}\lambda_i^k$ $\qquad\leftarrow\lambda$ 均为单实根时

C_{xi} 可由初始状态(或初始条件)求出

例1：某一系统的数学模型为 $y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$，

已知 $y(-1)=2$，$y(-2)=-\frac{1}{2}$，$f(k)=0$，求 $y_{zi}(k)$。

解： 求特征方程、特征根：

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \qquad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2 \qquad \therefore y_{zi}(k)=\left[c_{x1}(-1)^k+c_{x2}(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

求初始条件(由初始状态 $y(-n)=y_{zi}(-n)$ 和齐次差分方程决定)

$$y_{zi}(k)-y_{zi}(k-1)-2y_{zi}(k-2)=0$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} y_{zi}(0)=1 \\ y_{zi}(1)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_{x1}=-1 \\ c_{x2}=2 \end{cases}$$

注意：初始状态 ≠ 初始值

$$y_{zi}(k)=\left[-(-1)^k+2(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\left.\begin{array}{l} \because k<0,\ f(k)=0 \\ \therefore y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=\ldots=y_{zs}(-n)=0 \\ \therefore y(-1)=y_{zi}(-1),\ y(-2)=y_{zi}(-2),\ldots,\ y(-n)=y_{zi}(-n) \end{array}\right\}$$

求 $y_{zi}(k)$ 时可直接由初始状态确定 C_{xi}

$$\because y_{zi}(k)=\left[c_{x1}(-1)^k+c_{x2}(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$\text{即}\begin{cases} y_{zi}(-1)=y(-1)=2=-c_{x1}+\frac{1}{2}c_{x2} \\ y_{zi}(-2)=y(-2)=-\frac{1}{2}=c_{x1}+\frac{1}{4}c_{x2} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} c_{x1}=-1 \\ c_{x2}=2 \end{cases}$$

二、零状态响应 （对应非齐次方程）

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}y(k-i)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}f(k-j) \qquad n\ge m$$

完全解 $y(k)=y_h(k)+y_p(k)$

$y_{zs}(k)=y_h(k)+y_p(k)$ ←完全解

$$=\sum_{i=1}^{n}C_{si}\lambda_i^k+y_p(k) \qquad k\ge 0$$

←λ 均为单实根时

C_{si} 由零状态时的初始值确定

例2：某一系统的数学模型为 $y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$，

已知 $y(-1)=y(-2)=0$，$f(k)=\varepsilon(k)$ 求 $y_{zs}(k)$。

解：$y_{zs}(k)=y_{zsh}(k)+y_{zsp}(k)=c_{s1}(-1)^k+c_{s2}(2)^k+y_{zsp}(k)$

设 $y_p(k)=B$，则 $B-B-2B=1 \quad \therefore B=-\frac{1}{2}$

$$\therefore y_{zs}(k)=y_{zsh}(k)+y_{zsp}(k)=c_{s1}(-1)^k+c_{s2}(2)^k-\frac{1}{2} \qquad k\ge 0$$

求零状态响应的初始值 $y_{zs}(j)$

$$\begin{array}{l} y_{zs}(k)=y_{zs}(k-1)+2y_{zs}(k-2)+1 \quad k\ge 0 \\ y_{zs}(0)=y_{zs}(-1)+2y_{zs}(-2)+1=0+0+1=1 \\ y_{zs}(1)=y_{zs}(0)+2y_{zs}(-1)+1=1+0+1=2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} c_{s1}=\frac{1}{6} \\ c_{s2}=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\therefore y_{zs}(k)=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$$

三、全响应 [对应非齐次方程]

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}y(k-i)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}f(k-j) \qquad n\ge m$$

完全解 $y(k)=y_h(k)+y_p(k)$

$$y(k)=y_h(k)+y_p(k)=\sum_{i=1}^{n}C_i\lambda_i^k+y_p(k)$$

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_{xi}\lambda_i^k}_{y_{zi}(k)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_{si}\lambda_i^k+y_p(k)}_{y_{zs}(k)}$$

C_i 由 $f(k)$ 和初始状态均存在时的初始值确定

例3：某一系统的数学模型为 $y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$，

已知 $y(-1)=2$，$y(-2)=-\frac{1}{2}$，$f(k)=\varepsilon(k)$ 求 $y(k)$。

解：法1：

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=\left[-\frac{5}{6}(-1)^k+\frac{10}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$$

法2： $y(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k+\left(-\frac{1}{2}\right) \quad k\ge 0$

全响应的初始条件 $y(j)$：根据初始状态，利用非齐次方程用迭代法求出。

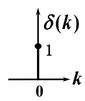
$$\begin{array}{l} y(k)=\varepsilon(k)+y(k-1)+2y(k-2) \\ y(0)=1+y(-1)+2y(-2)=2 \\ y(1)=1+y(0)+2y(-1)=7 \end{array} \qquad \therefore c_1=-\frac{5}{6},\quad c_2=\frac{10}{3}$$

3.3 单位序列响应和单位阶跃序列响应

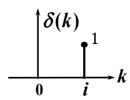
一、单位序列响应$h(k)$ [又称单位样值响应]

1. 单位序列$\delta(k)$ [又称单位样值]

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

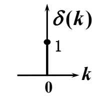


$$\delta(k-i)=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}$$



$f(k)\delta(k-i)=f(i)\delta(k-i)\sim$ 的取样性质

2. 单位序列响应$h(k)$



$h(k)=T\left[\{0\},\{\delta(k)\}\right]$

由差分方程求解$h(k)$时注意：

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}h(k-i)=\delta(k)$$

1. $k>0$后$h(k)$对应齐次方程, 即具有零输入响应的形式

2.初始状态 $h(-1)=h(-2)=...=h(-n)=0$

3. 初始条件$h(j)$ $(j=0,1,2,...,n-1)$

$h(j)$ 根据差分方程(在零状态条件下)迭代得出

例1： $y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$ 求 $h(k)$。

解：$h(k)$满足方程

$$\begin{cases}h(k)-h(k-1)-2h(k-2)=\delta(k)\\ h(-1)=h(-2)=0\end{cases}$$

1）求齐次解 对$k>0, h(k)$满足齐次方程

$$h(k)-h(k-1)-2h(k-2)=0$$

则$h(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k$

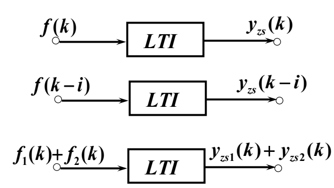
2）求初始条件 $h(k)=\delta(k)+h(k-1)+2h(k-2)$

$$\begin{cases}h(0)=\delta(0)+h(-1)+2h(-2)=1\\ h(1)=\delta(1)+h(0)+2h(-1)=1\end{cases}$$

解得 $h(k)=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k)$

例2： $y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=f(k)-2f(k-2)$

求单位序列响应$h(k)$



(1) 设$\delta(k)$作用于系统时的响应为$h_1(k)$

(2) 设$-2\delta(k-2)$作用于系统时的响应为$h_2(k)$

根据系统的时不变性，有

$$h_2(k)=-2h_1(k-2)$$

例2： $y(k)+4y(k-1)+4y(k-2)=f(k)-2f(k-2)$

求单位序列响应$h(k)$

$$\begin{cases}h_1(k)+4h_1(k-1)+4h_1(k-2)=\delta(k)\\ h_1(-1)=h_1(-2)=0\end{cases}$$

1）求齐次解 $\because \lambda_1=\lambda_2=-2$

2）求初始条件 $\therefore h_1(k)=c_1k(-2)^k+c_2(-2)^k$

$$\begin{cases}h_1(0)=\delta(0)-4h_1(-1)-4h_1(-2)=1\\ h_1(1)=\delta(1)-4h_1(0)-4h_1(-1)=-4\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}c_1=1\\ c_2=1\end{cases}$$

$\therefore h_1(k)=\left[k(-2)^k+(-2)^k\right]\varepsilon(k)$

解得 $h(k)=h_1(k)+h_2(k)$

$$=\left[k(-2)^k+(-2)^k\right]\varepsilon(k)$$

$$-2\left[(k-2)(-2)^{k-2}+(-2)^{k-2}\right]\varepsilon(k-2)$$

单位序列响应$h(k)$ 可以表征系统自身的特性

离散LTI系统是因果系统的充分必要条件：

$$h(-1)=h(-2)=...=0$$

或 $h(k)=h(k)\varepsilon(k)$

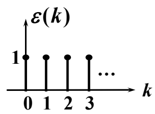
离散LTI系统是稳定系统的充分必要条件：

$$\sum_{k=0}^{\infty}|h(k)|<\infty$$

二、单位阶跃(序列)响应$g(k)$

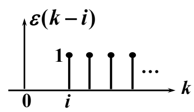
1. 单位阶跃序列$\varepsilon(k)$

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 1 & k\ge 0\end{cases}$$

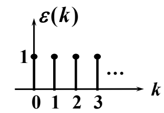


注意：$\varepsilon(k)$在$k=0$处有定义

$$\varepsilon(k-i)=\begin{cases}0 & k<i\\ 1 & k\ge i\end{cases}$$



2.单位阶跃(序列)响应$g(k)$



$$g(k)=T\left[\{0\},\{\varepsilon(k)\}\right]$$

初始状态 $g(-1)=g(-2)=...=g(-n)=0$

初始条件$g(j)\quad(j=0,1,2,...,n-1)$

$g(j)$ 根据差分方程(在零状态条件下)迭代得出

例3：$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$，求 $g(k)$。

解：$g(k)$满足

$$\begin{cases}g(k)-g(k\text{-}1)-2g(k-2)=\varepsilon(k)\\ g(-1)=g(-2)=0\end{cases}$$

1）求齐次解　又　$\lambda^2-\lambda-2=0$

$$\therefore \lambda_1=-1\quad \lambda_2=2$$

$$\therefore g_h(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k$$

2）求特解　$g_p(k)=\left(-\frac{1}{2}\right)\varepsilon(k)$

$$\therefore g(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k+\left(-\frac{1}{2}\right)\quad k\ge 0$$

例3：$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$，求 $g(k)$。

$$\therefore g(k)=c_1(-1)^k+c_2(2)^k+\left(-\frac{1}{2}\right)\quad k\ge 0$$

3）求初始条件　$g(k)=g(k-1)+2g(k-2)+\varepsilon(k)$

$$\therefore\begin{cases}g(0)=g(-1)+2g(-2)+1=1\\ g(1)=g(0)+2g(-1)+1=2\end{cases}$$

代入$\begin{cases}g(0)=c_1+c_2-\frac{1}{2}=1\\ g(1)=-c_1+2c_2-\frac{1}{2}=2\end{cases}$　　$\therefore c_1=\frac{1}{6}\quad c_2=\frac{4}{3}$

解得　$g(k)=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$

三、$h(k)$与$g(k)$的关系（对同一个系统而言）

$\because \delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$，　$\varepsilon(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)$

由线性性质和时(移)不变性可得

$h(k)$与$g(k)$的关系

$\therefore\ h(k)=g(k)-g(k-1)$,　$g(k)=\sum_{n=0}^{\infty}h(k-n)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)$

例4：已知某一系统的单位样值响应$h(k)=(k+1)\varepsilon(k)$，求 $g(k)$。

$$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)=\sum_{i=-\infty}^{k}(i+1)\varepsilon(i)=\sum_{i=0}^{k}i+\sum_{i=0}^{k}1$$

解得　$g(k)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\quad k\ge 0$

等差数列求和公式　$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

例5：已知 $h(k)=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k)$ 求 $g(k)$

$$\begin{aligned}g(k)&=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)\\ &=\sum_{i=-\infty}^{k}\left[\frac{1}{3}(-1)^i+\frac{2}{3}(2)^i\right]\varepsilon(i)\\ &=\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{1}{3}(-1)^i+\frac{2}{3}(2)^i\right]\\ &=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)\end{aligned}$$

等比数列求和公式　1) $s_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}\quad q\ne 1$

2）$s_n=a_1 n\quad q=1$

例6: 已知某一系统的 $g(k)=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$, 求$h(k)$。

$$\because\ h(k)=g(k)-g(k-1)$$

$$\therefore\ h(k)=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)-\left[\frac{1}{6}(-1)^{k-1}+\frac{4}{3}(2)^{k-1}-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k-1)$$

解得: $h(k)=\delta(k)+\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k-1)$

$$=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

3.4 卷积和

一、卷积和的定义及求解

1. 卷积和的定义

任意两个序列$f_1(k)$与$f_2(k)$的卷积和表示为

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_1(n)f_2(k-n)$$

卷积和上、下限的确定[由$f_1(k)$ 和$f_2(k)$的定义域确定]

几种特殊情况

a) 若$k<0$时 $f_1(k)=0$，$f_2(k)$不受限制,则 $f(k)=\sum_{n=0}^{\infty}f_1(n)f_2(k-n)$

b) 若$k<0$时$f_2(k)=0$,$f_1(k)$ 不受限制,则 $f(k)=\sum_{n=-\infty}^{k}f_1(n)f_2(k-n)$

c) 若$k<0$时 $f_1(k)=f_2(k)=0$ 则 $f(k)=\sum_{n=0}^{k}f_1(n)f_2(k-n)$

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_1(n)f_2(k-n)$$

例1: $f_1(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$, $f_2(k)=\varepsilon(k)$, 求 $f_1(k)*f_2(k)$。

解: $f_1(k)*f_2(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\varepsilon(n)\cdot\varepsilon(k-n)=\sum_{n=0}^{k}(\frac{1}{2})^n$

$$=\frac{1-(\frac{1}{2})^{k+1}}{1-\frac{1}{2}}=2[1-(\frac{1}{2})^{k+1}]\varepsilon(k)=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

例2: $f_1(k)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\varepsilon(k-1)$, $f_2(k)=\varepsilon(k)$,求$f_1(k)*f_2(k)$。

解: $f_1(k)*f_2(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-\frac{1}{2})^{n-1}\varepsilon(n-1)\cdot\varepsilon(k-n)$

$$=\sum_{n=1}^{k}(-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1-(-\frac{1}{2})^k}{1-(-\frac{1}{2})}$$

$$=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^k]\varepsilon(k-1)$$

2. 卷积和的图解法

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_1(n)f_2(k-n)$$

求卷积和需要经过以下几个步骤:

1) 变量置换 $k\to n$

2) 反折 $f_2(n)\to f_2(-n)$

3) $f_2(-n)$ 沿n 轴平移k_i个单位$\to f_2(k_i-n)$

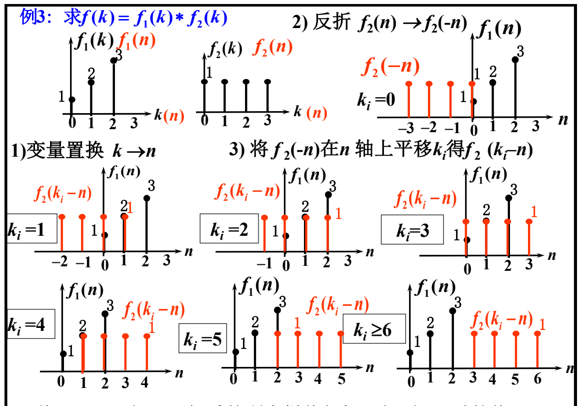
$k_i<0$时 $f_2(-n)$左移$|k_i|$，$k_i>0$时 $f_2(-n)$右移k_i。

4) 将 $f_2(k_i-n)$与$f_1(n)$相乘所得的所有样值相加，得到 $k=k_i$时的值$f(k_i)$）。

5) 将 k_i 在$(-\infty,\infty)$内变化，重复第3、4步，最终得到$f(k)=f_1(k)*f_2(k)$。

注意：k 为参变量

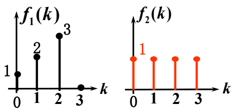
例3: 求$f(k)=f_1(k)*f_2(k)$



4) 将 $f_2(k_i-n)$与$f_1(n)$相乘所得的所有样值相加，得到$k=k_i$时的值$f(k_i)$。

3. 对位相乘求和法(又称不进位乘法)(有限长序列求卷积和的常用方法)

例3：求$f(k)=f_1(k)*f_2(k)$



$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & \overset{k=0}{1} & 2 & 3 & f_1(k) \\
\times & & \overset{k=0}{1} & 1 & 1 & 1 & f_2(k) \\
\hline
 & & & 1 & 2 & 3 & \\
 & & 1 & 2 & 3 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & & & \\
f_1(0)\cdot f_2(0)\rightarrow 1 & 2 & 3 & & & & \\
\hline
1 & 3 & 6 & 6 & 5 & 3 &
\end{array}
$$

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\left\{0,\ \underset{k=0}{1},3,6,6,5,3,0\right\}$$

步骤： 两序列右对齐

逐个样值对应相乘但不进位

同列乘积值相加（注意k=0的点）

例4：$f_1(k)=\left\{0,3,\underset{k=0}{1},4,2,0\right\}$， $f_2(k)=\left\{0,\overset{k=0}{2},1,5,0\right\}$

求 $f_1(k)*f_2(k)$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & 3 & \overset{k=0}{1} & 4 & 2 & f_1(k)\longrightarrow \text{相加10} \\
\times & & & \overset{k=0}{2} & 1 & 5 & f_2(k)\longrightarrow \text{相加8} \\
\hline
 & & 15 & 5 & 20 & 10 & \\
f_1(-1)\cdot f_2(1) & 3 & 1 & 4 & 2 & & \\
f_1(0)\cdot f_2(0)\ \ 6 & 2 & 8 & 4 & & & \\
\hline
6 & \underset{k=0}{5} & 24 & 13 & 22 & 10 & \longrightarrow \text{相加=80}
\end{array}
$$

$\times=80$

解得：$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\left\{0,6,\underset{k=0}{5},24,13,22,10,0\right\}$

例5: $f_1(k)=\left\{0,1,0,\underset{k=0}{-1},0,1,0\right\}$， $f_2(k)=\left\{0,\underset{k=0}{3},2,1,0\right\}$

求 $f_1(k)*f_2(k)$

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & & 1 & 0 & \overset{k=0}{-1} & 0 & 1 & f_1(k)\longrightarrow \text{总长}N_1=5 \\
\times & & & & \overset{k=0}{3} & 2 & 1 & f_2(k)\longrightarrow \text{总长}N_2=3 \\
\hline
 & & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \\
 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & & \\
3 & 0 & -3 & 0 & 3 & & & \\
\hline
3 & 2 & \underset{k=0}{-2} & -2 & 2 & 2 & 1 & \longrightarrow \text{总长}N_1+N_2-1=5+3\text{-}1=7
\end{array}
$$

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\left\{0,3,2,\underset{k=0}{-2},-2,2,2,1,0\right\}$$

例6：$f_1(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)$， $f_2(k)=(k+1)\left[\varepsilon(k+1)-\varepsilon(k-3)\right]$

求 $f_1(k)*f_2(k)$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & \overset{k=0}{1} & 1 & 1 & 1 & f_1(k) \\
\times & & & \overset{k=0}{1} & 2 & 3 & f_2(k) \\
\hline
 & & 3 & 3 & 3 & 3 & \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
\hline
\underset{k=0}{1} & 3 & 6 & 6 & 5 & 3 &
\end{array}
$$

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\left\{0,\ \underset{k=0}{1},3,6,6,5,3,0\right\}$$

有限长序列卷积和的特点：

若$f_1(k)$的长度为N_1, $f_2(k)$的长度为N_2

则$f(k)=f_1(k)*f_2(k)$的长度为$N=N_1+N_2-1$

有限长序列卷积和的检验方法：

验算

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & 3 & \overset{k=0}{1} & 4 & 2 & f_1(k)\longrightarrow \text{相加10} \\
\times & & & \overset{k=0}{2} & 1 & 5 & f_2(k)\longrightarrow \text{相加8} \\
\hline
 & & 15 & 5 & 20 & 10 & \\
f_1(-1)\cdot f_2(1) & 3 & 1 & 4 & 2 & & \\
f_1(0)\cdot f_2(0)\ \ 6 & 2 & 8 & 4 & & & \\
\hline
6 & \underset{k=0}{5} & 24 & 13 & 22 & 10 & \longrightarrow \text{相加=80}
\end{array}
$$

$\times=80$

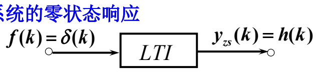
二、借助单位序列响应与卷积和求解系统的零状态响应

1. 离散信号的分解

任意离散信号$f(k)$可表示为

$$
\begin{aligned}
f(k)&=...+f(-2)\delta(k+2)+f(-1)\delta(k+1)+f(0)\delta(k)\\
&\quad+f(1)\delta(k-1)+f(2)\delta(k-2)+...+f(i)\delta(k-i)\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\delta(k-n)
\end{aligned}
$$

2. 利用卷积和求解离散系统的零状态响应

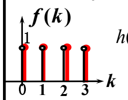


$\delta(k-n)$ $\quad y_{zs}(k)=h(k-n)$

任意离散信号$f(k)$可表示为 $\quad f(n)\delta(k-n)\ y_{zs}(k)=f(n)h(k-n)$

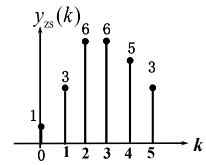
$$f(k)=...+f(-2)\delta(k+2)+f(-1)\delta(k+1)+f(0)\delta(k)$$
$$+f(1)\delta(k-1)+f(2)\delta(k-2)+...+f(n)\delta(k-n)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\delta(k-n)$$
$$y_{zs}(k)=...f(-2)h(k+2)+f(-1)h(k+1)+f(0)h(k)$$
$$+f(1)h(k-1)+f(2)h(k-2)+...+f(n)h(k-n)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)h(k-n)$$
$$=f(k)*h(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)h(k-n)$$

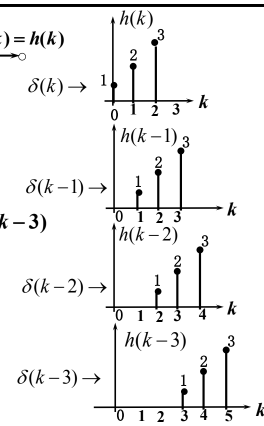
离散系统的$y_{zs}(k)$为$f(k)$与$h(k)$的卷积和



$h(k)=T\left[\{0\},\{\delta(k)\}\right]$

$$y_{zs}(k)=f(k)*h(k)$$
$$=h(k)+h(k-1)+h(k-2)+h(k-3)$$





$$y_{zs}(k)=f(k)*h(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)h(k-n)$$

若$f(k)$为因果序列，即在k=0时加入，

$h(k)$为因果系统，即在$h(k)$=0，当$k<0$时

则$y_{zs}(k)=f(k)*h(k)=\sum_{n=0}^{k}f(n)h(k-n)$

三、卷积和性质

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_1(n)f_2(k-n)$$

1. 交换律

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=f_2(k)*f_1(k) \qquad (3.3-9)$$

交换律说明反折函数可以任选

2. 分配律

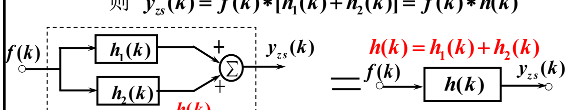
$$f_1(k)*\left[f_2(k)+f_3(k)\right]=f_1(k)*f_2(k)+f_1(k)*f_3(k) \qquad (3.3-10)$$

物理意义 若$f_1(k)=f(k)$ ~ 系统的激励

$f_2(k)=h_1(k)$ ～ 子系统的单位序列响应

$f_3(k)=h_2(k)$ ～ 子系统的单位序列响应

则 $y_{zs}(k)=f(k)*[h_1(k)+h_2(k)]=f(k)*h(k)$



推广：n个子系统并联组成的系统，其等效单位序列响应为n个子系统单位序列响应之和。

3. 结合律

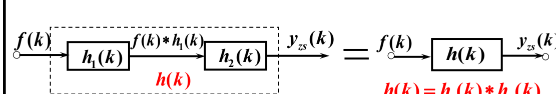
$$\left[f_1(k)*f_2(k)\right]*f_3(k)=f_1(k)*\left[f_2(k)*f_3(k)\right]$$

物理意义 若$f_1(k)=f(k)$ ~ 系统的激励

$f_2(k)=h_1(k)$ ～ 子系统的单位序列响应

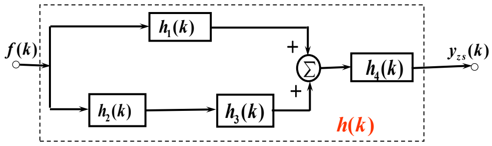
$f_3(k)=h_2(k)$ ～ 子系统的单位序列响应

则 $y_{zs}(k)=\left[f(k)*h_1(k)\right]*h_2(k)=f(k)*\left[h_1(k)*h_2(k)\right]=f(k)*h(k)$



推广： n个子系统级联组成的系统，其等效单位序列响应为n个子系统单位序列响应之卷积和。

例7：求图所示复合系统的单位序列响应$h(k)$



$$h(k)=\left[h_1(k)+h_2(k)*h_3(k)\right]*h_4(k)$$

4. 移位特性

若 $f_1(k)*f_2(k)=f(k)$,

则 $f_1(k)*f_2(k-k_1)=f(k-k_1)$

$f_1(k-k_1)*f_2(k-k_2)=f_1(k-k_2)*f_2(k-k_1)=f(k-k_1-k_2)$

例8: 已知$f(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]\varepsilon(k)$

$f_1(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k+2)$, $f_2(k)=\varepsilon(k-3)$，求 $f_1(k)*f_2(k)$。

解：$f_1(k)*f_2(k)=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k+2)*\varepsilon(k-3)$

$=4\cdot(\frac{1}{2})^{k+2}\varepsilon(k+2)*\varepsilon(k-3)$

$=4\cdot 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]\varepsilon(k-1)=8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]\varepsilon(k-1)$

5. 任意序列与单位序列的卷积

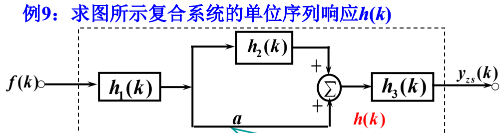
a) $f(k)*\delta(k)=\delta(k)*f(k)=f(k)$

b) $f(k)*\delta(k-k_1)=\delta(k-k_1)*f(k)=f(k-k_1)$

若 $f(k)=\delta(k)$ 则 $\delta(k)*\delta(k)=\delta(k)$

$\delta(k)*\delta(k-k_1)=\delta(k-k_1)$

例9：求图所示复合系统的单位序列响应$h(k)$

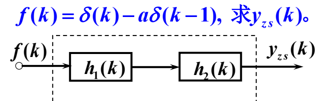


注意：数乘器的单位样值响应为$h(k)=a\delta(k)$

$$h(k)=h_1(k)*\left[h_2(k)+a\delta(k)\right]*h_3(k)$$

例10：图所示系统已知 $h_1(k)=2\cos(\frac{\pi k}{4})$, $h_2(k)=a^k\varepsilon(k)$

$f(k)=\delta(k)-a\delta(k-1)$, 求$y_{zs}(k)$。



解：$y_{zs}(k)=f(k)*h_1(k)*h_2(k)$

$=[\delta(k)-a\delta(k-1)]*2\cos(\frac{k\pi}{4})*a^k\varepsilon(k)$

$=[\delta(k)-a\delta(k-1)]*a^k\varepsilon(k)*2\cos(\frac{k\pi}{4})$

$=[a^k\varepsilon(k)-a\cdot a^{k-1}\varepsilon(k-1)]*2\cos(\frac{k\pi}{4})$

$=a^k[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)]*2\cos(\frac{k\pi}{4})$

$=a^k\delta(k)*2\cos(\frac{k\pi}{4})=\delta(k)*2\cos(\frac{k\pi}{4})=2\cos(\frac{k\pi}{4})$

本章重点及要求：

1）由系统框图写出$f(k)$与响应$y(k)$的差分方程。

2）熟练掌握用经典法求解差分方程。(齐次解,特解,全解的概念)

3）掌握初始状态$y(-n)$、初始条件(即初始值)$y(j)$概念，并会用迭代法确定初始条件$y(j)$, (j=0,1,2…n-1)

4）掌握系统零输入、零状态、全响应的物理意义并会求解。

5）深刻理解系统单位序列响应$h(k)$与阶跃响应$g(k)$的物理意义，并会求解。

6）深刻理解卷积和的物理意义并掌握其数学表示式。

7）熟练掌握卷积和的性质。

8）熟练掌握求卷积和常用的方法

a) 解析法(配合级数的求和公式) b)图解法

c) 不进位乘法(重点） d) 利用性质