外部法——用系统的输入、输出之间的关系来描述系统的特性。

其特点：

（1）只适用于单输入单输出系统，对于多输入多输出系统，将增加复杂性；

（2）只研究系统输出与输入的外部特性，而对系统的内部情况一无所知，也无法控制。

内部法（状态变量法）——用n个状态变量的一阶微分或差分方程组（状态方程）来描述系统。

优点有：

（1）提供系统的内部特性以便研究；

（2）便于分析多输入多输出系统；

（3）一阶方程组便于计算机数值求解。并容易推广用于时变系统和非线性系统。

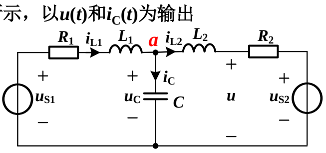
第八章　系统状态变量分析

8.1 状态变量与状态方程

实例：

一个电路系统如下图所示，以$u(t)$和$i_C(t)$为输出

若还想了解内部三个变量$u_C(t), i_{L1}(t), i_{L2}(t)$的变化情况。



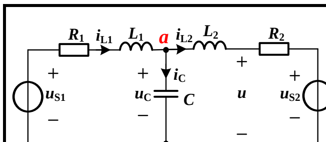
这时可列出方程：

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_{L1}-i_{L2}$$

$$R_1 i_{L1}+L_1\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}+u_C-u_{S1}=0$$

$$L_2\frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}+R_2 i_{L2}+u_{S2}-u_C=0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{C}i_{L1}-\frac{1}{C}i_{L2}\\ \frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}&=-\frac{1}{L_1}u_C-\frac{R_1}{L_1}i_{L1}+\frac{1}{L_1}u_{S1}\\ \frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{L_2}u_C-\frac{R_2}{L_2}i_{L2}-\frac{1}{L_2}u_{S2}\end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{C}i_{L1}-\frac{1}{C}i_{L2}\\ \frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}&=-\frac{1}{L_1}u_C-\frac{R_1}{L_1}i_{L1}+\frac{1}{L_1}u_{S1}\\ \frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{L_2}u_C-\frac{R_2}{L_2}i_{L2}-\frac{1}{L_2}u_{S2}\end{aligned}\right\}$$

这是由三个内部变量$u_C(t)$、$i_{L1}(t)$和$i_{L2}(t)$构成的一阶微分方程组。

若初始值$u_C(t_0)$、$i_{L1}(t_0)$和$i_{L2}(t_0)$已知，则根据$t \ge t_0$时的给定激励$u_{S1}(t)$和$u_{S2}(t)$就可惟一地确定在$t \ge t_0$时的解$u_C(t)$、$i_{L1}(t)$和$i_{L2}(t)$。

系统的输出由三个内部变量和激励求出：

$$\left.\begin{aligned}u(t)&=R_2 i_{L2}(t)+u_{S2}(t)\\ i_C(t)&=i_{L1}(t)-i_{L2}(t)\end{aligned}\right\}\quad \text{一组代数方程}$$

一、状态与状态变量的定义

系统在某一时刻t_0的状态是指表示该系统所必需的最少的一组数值，已知这组数值和$t \ge t_0$时系统的激励，就能完全确定$t \ge t_0$时系统的全部工作情况。

状态变量是描述状态随时间t变化的一组变量，它们在某时刻的值就组成了系统在该时刻的状态。

在初始时刻的值称为初始状态。

说明：

(1) 系统中任何响应均可表示成状态变量及输入的线性组合；

(2) 状态变量应线性独立；

(3) 状态变量的选择并不是唯一的 。

(4) 对n阶动态系统需有n个独立的状态变量，通常用$x_1(t)$、$x_2(t)$、…、$x_n(t)$表示。

二、状态方程和输出方程

在选定状态变量的情况下，用状态变量分析系统时，一般分两步进行：

(1) 第一步是根据系统的初始状态求出状态变量；

(2) 第二步是用这些状态变量来确定初始时刻以后的系统输出。

状态变量是通过求解由状态变量构成的一阶微分方程组来得到，该一阶微分方程组称为状态方程。

状态方程描述了状态变量的一阶导数与状态变量和激励的关系。

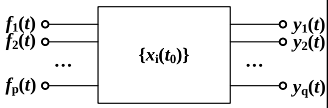
对于n阶动态系统，有n个状态变量。描述系统的状态方程由n个一阶微分方程组成。

输出方程描述了输出与状态变量和激励之间关系的一组代数方程 。

通常将状态方程和输出方程总称为动态方程或系统方程。

三、状态方程的一般形式

对于一般的n阶多输入-多输出***LTI*连续系统**，如图：



$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + \dots + b_{1p}f_p \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \dots + b_{2p}f_p \\
&\cdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}f_1 + b_{n2}f_2 + \dots + b_{np}f_p
\end{aligned}\right\}\text{状态方程}$$

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}f_1 + d_{12}f_2 + \dots + d_{1p}f_p \\
y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}f_1 + d_{22}f_2 + \quad + d_{2p}f_p \\
y_q &= c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{qn}x_n + d_{q1}f_1 + d_{q2}f_2 + \dots + d_{qp}f_p
\end{aligned}\right\}\text{输出方程}$$

将状态方程和输出方程写成矩阵形式

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}}_{\text{状态矢量的一阶导数}} = \underbrace{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{\text{系统矩阵}} \underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}}_{\text{状态矢量}} + \underbrace{\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix}}_{\text{控制矩阵}} \underbrace{\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_p(t)\end{bmatrix}}_{\text{激励(输入)矢量}}$$

状态方程 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_q(t)\end{bmatrix}}_{\text{输出矢量}} = \underbrace{\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn}\end{bmatrix}}_{\text{输出矩阵}} \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp}\end{bmatrix}}_{\text{直达矩阵}} \begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_p(t)\end{bmatrix}$$

输出方程 $y(t) = Cx(t) + Df(t)$

状态方程 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t)$

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix}$$

输出方程 $y(t) = Cx(t) + De(t)$

$$C = \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn}\end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp}\end{bmatrix}$$

A*、*B*、*C*、*D 都为常数矩阵：
***A*为*n*×*n*方阵，称为系统矩阵，**
***B*为*n*×*p*矩阵，称为控制矩阵，**
***C*为*q*×*n*矩阵，称为输出矩阵，**
***D*为*q*×*p*矩阵，称为直达矩阵。**

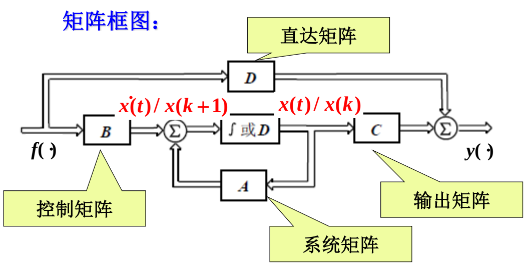
设一个 n 阶多输入多输出**线性离散系统**，它有p个输入，q个输出，n个状态变量， 类似

状态方程 $x(k+1) = Ax(k) + Be(k)$

输出方程 $y(k) = Cx(k) + De(k)$

状态变量分析的关键在于：
状态变量的选取以及状态方程的建立。

矩阵框图：



$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t)$ $\qquad$ $x(k+1) = Ax(k) + Bf(k)$

$y(t) = Cx(t) + Df(t)$ $\qquad$ $y(k) = Cx(k) + Df(k)$

8.2 状态方程的建立

一、连续系统状态方程的建立

1. 由电路图建立状态方程

2. 由微分方程建立状态方程

3. 由信号流图或框图建立状态方程

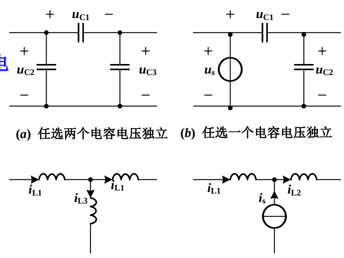
4. 由系统函数建立状态方程

1. 由电路图建立状态方程

A) 选择状态变量

对LTI系统通常选电容电压和电感电流为状态变量。

注意：必须保证所选状态变量为独立的电容电压和独立的电感电流。



(a) 任选两个电容电压独立　(b) 任选一个电容电压独立

(c) 任选两个电感电流独立　(d) 任选一个电感电流独立

四种非独立的电路结构

B) 建立状态方程

根据电路列出各状态变量的一阶微分方程。

由于$i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$，$u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$

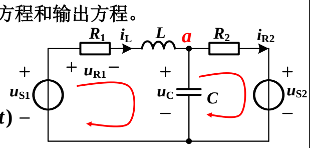
对接有该电容的独立结点列写KCL电流方程；

对接有该电感的独立结点列写KVL电压方程。

只保留状态变量和输入激励，设法消去其它中间的变量，经整理即可给出标准的状态方程。

对于输出方程，通常可用观察法由电路直接列出。

例1： 电路如图，以电阻R_1上的电压u_{R1}和电阻R_2上的电流i_{R2}为输出，列写电路的状态方程和输出方程。



解： 选状态变量

$x_1(t)=i_L(t)$，$x_2(t)=u_C(t)$

$$L\dot{x}_1(t)+R_1x_1(t)+x_2(t)=u_{s1}(t)$$

$$C\dot{x}_2(t)+i_{R2}(t)=x_1(t)$$

消去$i_{R2}(t)$，列右网孔KVL方程：$R_2 i_{R2}(t)+u_{s2}(t)-x_2(t)=0$

整理得状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_1}{L} & -\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{R_2C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{R_2C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{s1}(t)\\ u_{s2}(t)\end{bmatrix}$$

输出方程：$u_{R_1}(t)=R_1x_1(t)$　$i_{R_2}(t)=\dfrac{1}{R_2}[x_2(t)-u_{s2}(t)]$

输出方程：$u_{R_1}(t)=R_1x_1(t)$

$$i_{R_2}(t)=\frac{1}{R_2}[x_2(t)-u_{s2}(t)]$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{s1}(t)\\ u_{s2}(t)\end{bmatrix}$$

上讲巩固

1. 信号流图的化简----梅森公式

$$H(\cdot)=\frac{1}{\Delta}\sum_i p_i\Delta_i \qquad (7-14)$$

式中 $\Delta=1-\sum_j L_j+\sum_{m,n}L_mL_n-\sum_{p,q,r}L_pL_qL_r+\cdots \qquad (7-15)$

2. 状态变量分析法

状态方程描述了状态变量的一阶导数与状态变量和激励的关系。

输出方程描述了输出与状态变量和激励之间关系的一组代数方程。

状态方程和输出方程总称为动态方程或系统方程。

2. 由微分方程建立状态方程

例2： 有两个LTI连续系统，描述它们的微分方程分别为

(1) $y'''(t)+3y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$

(2) $y'''(t)+3y''(t)+2y'(t)+5y(t)=6f''(t)+3f'(t)+4f(t)$

解： (1) 设状态变量分别为：

$$\left.\begin{aligned}x_1(t)&=y(t)\\ x_2(t)&=y'(t)\\ x_3(t)&=y''(t)\end{aligned}\right\}$$

可写出状态方程

$$\dot{x}_1(t)=y'(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=y''(t)=x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t)=y'''(t)=-5y(t)-2y'(t)-3y''(t)+f(t)$$

$$=-5x_1(t)-2x_2(t)-3x_3(t)+f(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}f$$

输出方程：$y(t)=x_1(t)$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

(2) $y'''(t)+3y''(t)+2y'(t)+5y(t)=6f''(t)+3f'(t)+4f(t)$

引入一个辅助函数$q(t)$，使之满足

$$q'''(t)+3q''(t)+2q'(t)+5q(t)=f(t)$$

设状态变量分别为：
$$\left.\begin{aligned}x_1(t)&=q(t)\\x_2(t)&=q'(t)\\x_3(t)&=q''(t)\end{aligned}\right\}$$

可写出状态方程

$$\dot{x}_1=q'(t)=x_2$$
$$\dot{x}_2=q''(t)=x_3$$
$$\begin{aligned}\dot{x}_3&=q'''(t)\\&=-5q(t)-2q'(t)-3q''(t)+f(t)\\&=-5x_1-2x_2-3x_3+f\end{aligned}$$

$\because\ y(t)=6q''(t)+3q'(t)+4q(t)$

$\therefore$ 输出方程为：

$$y=4x_1+3x_2+6x_3$$

输出方程为：$y=4x_1+3x_2+6x_3$

将状态方程和输出方程写成矩阵形式：

状态方程 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}f$

输出方程 $y=\begin{bmatrix}4&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

(1) $y'''(t)+3y''(t)+2y'(t)+5y(t)=f(t)$

(2) $y'''(t)+3y''(t)+2y'(t)+5y(t)=6f''(t)+3f(t)+4f(t)$

这两个式子描述的系统，其状态方程完全一致，只是输出方程不同。换言之，对同一系统的不同输入情况，系统的A、B矩阵是相同的，C、D矩阵有可能不同。

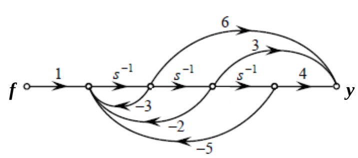
3. 由信号流图或框图建立状态方程

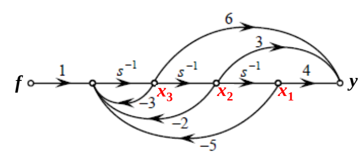
一般规则：

(1) 选积分器的输出(或微分器的输入)作为状态变量；

(2) 围绕加法器列写状态方程或者输出方程。

例3：一个三阶连续系统的信号流图如下图所示，利用信号流图法列写状态方程和输出方程。





解：选择各积分器输出端的信号作为状态变量，如图所示，从右到左分别取x_1、x_2、x_3。

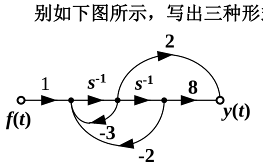
按照各积分器输入输出关系及加法器的函数关系，可以写出下述状态方程：

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=x_3$$
$$\dot{x}_3=-5x_1-2x_2-3x_3+f$$

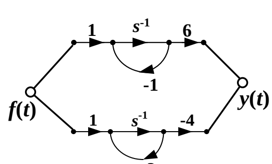
输出方程：

$$y=4x_1+3x_2+6x_3$$

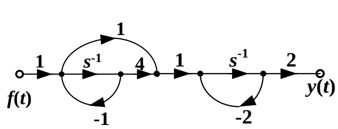
例4: 某LTI系统的直接型、级联型、并联型信号流图分别如下图所示，写出三种形式下的状态方程和输出方程。



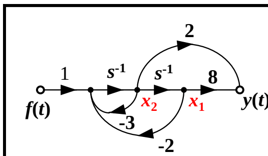
直接型



并联型



级联型



直接型

设状态变量$x_1(t)$、$x_2(t)$

由后一个积分器，有

$$\dot{x}_1=x_2$$

由前一个积分器，有

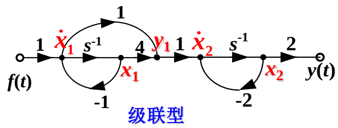
$$\dot{x}_2=-2x_1-3x_2+f$$

系统输出端，有 $y(t)=8x_1+2x_2$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}f$$

$$y=\begin{bmatrix}8&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$



级联型

设状态变量$x_1(t)$、$x_2(t)$

设中间变量$y_1(t)$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + f$$

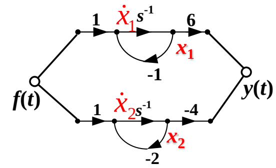
$$y_1 = \dot{x}_1 + 4x_1 = 3x_1 + f$$

$$\dot{x}_2 = y_1 - 2x_2 = 3x_1 - 2x_2 + f$$

系统输出端，有 $y(t) = 2x_2$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}f \qquad y = \begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$



并联型

设状态变量$x_1(t)$、$x_2(t)$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + f$$

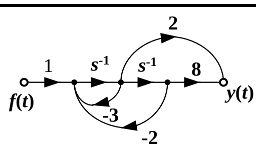
$$\dot{x}_2 = -2x_2 + f$$

系统输出端，有：

$$y(t) = 6x_1 - 4x_2$$

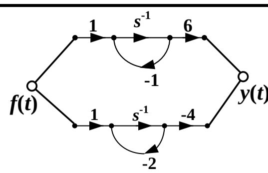
写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}f \qquad y = \begin{bmatrix}6 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$



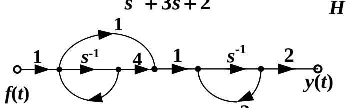
直接型

$$H(s) = \frac{2(s+4)}{s^2+3s+2}$$



并联型

$$H(s) = \frac{6}{s+1} + \frac{-4}{s+2} = \frac{2(s+4)}{s^2+3s+2}$$



级联型

$$H(s) = \frac{s+4}{s+1}\cdot\frac{2}{s+2} = \frac{2(s+4)}{s^2+3s+2}$$

可见$H(s)$相同的系统，状态变量的选择并不唯一。

4. 由系统函数建立状态方程

方法一：将$H(s)$转化为微分方程，再建立状态方程；

方法二：由$H(s)$画出方框图或信号流图，然后建立状态方程。

例5：已知系统函数 $H(s) = \dfrac{2(s+4)}{s^2+3s+2}$

列写系统的状态方程和输出方程。

方法一：写出微分方程

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 8f(t)$$

由微分方程可以直接写出系统的

状态方程：$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}f$$

输出方程：$$y = \begin{bmatrix}8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{2(s+4)}{s^2+3s+2} = \frac{2s^{-1}+4s^{-2}}{1-(-3s^{-1}-2s^{-2})}$$

方法二：画出信号流图

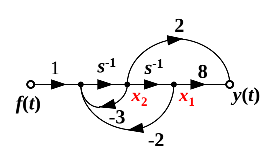
设状态变量$x_1(t)$、$x_2(t)$

由后一个积分器，有

$$\dot{x}_1 = x_2$$

由前一个积分器，有

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + f$$



直接型

系统输出端，有 $y(t) = 8x_1 + 2x_2$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}f \qquad y = \begin{bmatrix}8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

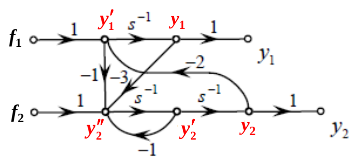
例6：已知一个二输入、二输出系统由下列微分方程组来描述，列写其状态方程和输出方程。

$$y_1'(t)+2y_2(t)=f_1(t)$$
$$y_2''(t)+y_1'(t)+y_2'(t)+3y_1(t)=f_2(t)$$

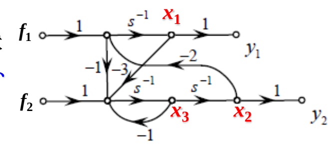
解：将以上二式改写为

$$y_1'(t)=-2y_2(t)+f_1(t)$$
$$y_2''(t)=-y_1'(t)-y_2'(t)-3y_1(t)+f_2(t)$$

信号流图如右图：



选各积分器的输出为状态变量，分别记为$x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$



可得状态方程：

$$\dot{x}_1=-2x_2+f_1$$
$$\dot{x}_2=x_3$$
$$\dot{x}_3=-\dot{x}_1-x_3-3x_1+f_2$$
$$=-3x_1+2x_2-x_3-f_1+f_2$$

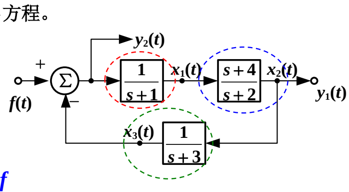
输出方程：

$$y_1(t)=x_1$$
$$y_2(t)=x_2$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&0\\0&0&1\\-3&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\f_2\end{bmatrix}$$

例7：某系统框图如图，状态变量如图标示，试列出其状态方程和输出方程。



解：对三个一阶系统

$$\dot{x}_1+x_1=y_2$$

其中，$y_2=f-x_3$

$$\dot{x}_1=-x_1-x_3+f$$
$$\dot{x}_2+2x_2=\dot{x}_1+4x_1=3x_1-x_3+f$$
$$\dot{x}_2=3x_1-2x_2-x_3+f$$
$$\dot{x}_3+3x_3=x_2$$
$$\dot{x}_3=x_2-3x_3$$

输出方程：

$y_1(t)=x_2$

$y_2(t)=-x_3+f$

二、离散系统状态方程的建立

1. 由差分方程建立状态方程

通过适当选取状态变量，把描述离散系统的输入输出关系的n阶差分方程转换为一阶差分方程组，即离散系统的状态方程。

状态方程：$x(k+1)=Ax(k)+Bf(k)$

输出方程：$y(k)=Cx(k)+Df(k)$

例9：有两个LTI离散时间系统，描述它们的差分方程为

(1) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)+5y(k-3)=f(k)$

(2) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)+5y(k-3)=6f(k-1)+3f(k-2)$

分别列出系统的状态方程和输出方程。

(1) $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)+5y(k-3)=f(k)$

解：选取状态变量如下：

$$\left.\begin{aligned}x_1(k)&=y(k-3)\\x_2(k)&=y(k-2)\\x_3(k)&=y(k-1)\end{aligned}\right\}$$

写出状态方程：

$$\left.\begin{aligned}x_1(k+1)&=y(k-2)=x_2(k)\\x_2(k+1)&=y(k-1)=x_3(k)\\x_3(k+1)&=y(k)\\&=-5y(k-3)-2y(k-2)-3y(k-1)+f(k)\\&=-5x_1(k)-2x_2(k)-3x_3(k)+f(k)\end{aligned}\right\}$$

输出方程：

$$y(k)=x_3(k+1)$$
$$=-5x_1(k)-2x_2(k)-3x_3(k)+f(k)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\x_3(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}f(k)$$

注意与连续系统的区别

$$y(k)=\begin{bmatrix}-5&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}+f(k)$$

$$(2)\ y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)+5y(k-3)=6f(k-1)+3f(k-2)$$

引入辅助函数$q(k)$，使之满足：

$$q(k)+3q(k-1)+2q(k-2)+5q(k-3)=f(k)$$

状态变量选择如下：

$$\left.\begin{aligned}x_1(k)&=q(k-3)\\x_2(k)&=q(k-2)\\x_3(k)&=q(k-1)\end{aligned}\right\}$$

状态方程：

$$\left.\begin{aligned}x_1(k+1)&=q(k-2)=x_2(k)\\x_2(k+1)&=q(k-1)=x_3(k)\\x_3(k+1)&=q(k)\\&=-5q(k-3)-2q(k-2)-3q(k-1)+f(k)\\&=-5x_1(k)-2x_2(k)-3x_3(k)+f(k)\end{aligned}\right\}$$

$$(2)\ y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)+5y(k-3)=6f(k-1)+3f(k-2)$$

输出方程：

$$\begin{aligned}y(k)&=6q(k-1)+3q(k-2)\\&=3x_2(k)+6x_3(k)\end{aligned}$$

写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\x_3(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}f(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}0&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}$$

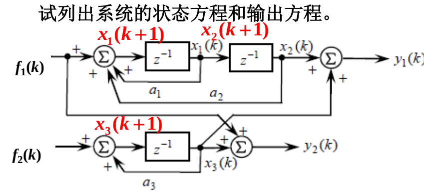
2. 用信号流图或方框图建立状态方程

由离散系统的框图或信号流图建立状态方程的一般规则：

(1)选取延时器(即z^{-1})的输出作为状态变量；

(2)围绕加法器列写状态方程和输出方程。

例10： 已知一个二输入二输出的离散系统方框图，试列出系统的状态方程和输出方程。



解： 选三个延时器的输出为状态变量，分别记为$x_1(k)$、$x_2(k)$、$x_3(k)$

由左端加法器列写状态方程为

$$\begin{aligned}x_1(k+1)&=a_1x_1(k)+a_2x_2(k)+f_1(k)\\x_2(k+1)&=x_1(k)\\x_3(k+1)&=a_3x_3(k)+f_2(k)\end{aligned}$$

由右端加法器列写输出方程为：

$$\begin{aligned}y_1(k)&=x_2(k)+x_3(k)\\y_2(k)&=x_3(k)+f_1(k)\end{aligned}$$

写成矩阵形式为：

$$\begin{aligned}x_1(k+1)&=a_1x_1(k)+a_2x_2(k)+f_1(k)\\x_2(k+1)&=x_1(k)\\x_3(k+1)&=a_3x_3(k)+f_2(k)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\x_3(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&0\\1&0&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(k)\\f_2(k)\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}y_1(k)&=x_2(k)+x_3(k)\\y_2(k)&=x_3(k)+f_1(k)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}y_1(k)\\y_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(k)\\f_2(k)\end{bmatrix}$$

3. 用系统函数建立状态方程

1) 把$H(z)$转换为差分方程，由差分方程建立状态方程

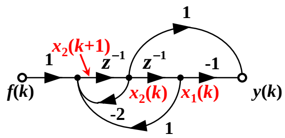
2) 由$H(z)$画出系统模拟方框图或信号流图，再由方框图或信号流图建立状态方程。

例11：某离散系统的系统函数，列出其动态方程。

$$H(z)=\frac{z^{-1}-z^{-2}}{1+2z^{-1}-z^{-2}}$$

解：画信号流图

设状态变量$x_1(k)$，$x_2(k)$：



状态方程：

$x_1(k+1) = x_2(k)$

$x_2(k+1) = x_1(k) - 2x_2(k) + f(k)$

输出方程：

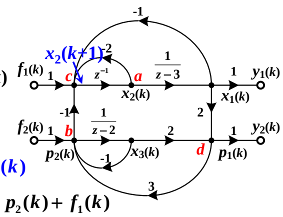
$y(k) = -x_1(k) + x_2(k)$

例12：某离散系统有两个输入$f_1(k)$、$f_2(k)$和两个输出$y_1(k)$、$y_2(k)$，其信号流图如图示，列写该系统的状态方程和输出方程。

解：$p_1(k) = 2x_1(k) + 2x_3(k)$

$p_2(k) = 3p_1(k) - x_3(k) + f_2(k)$

$= 6x_1(k) + 5x_3(k) + f_2(k)$



$$\frac{X_2(z)}{z-3} = X_1(z)$$

$\Rightarrow x_1(k+1) = 3x_1(k) + x_2(k)$

$x_2(k+1) = -x_1(k) - 2x_2(k) - p_2(k) + f_1(k)$

$\Rightarrow x_2(k+1) = -7x_1(k) - 2x_2(k) - 5x_3(k) + f_1(k) - f_2(k)$

$$\frac{P_2(z)}{z-2} = X_3(z)$$

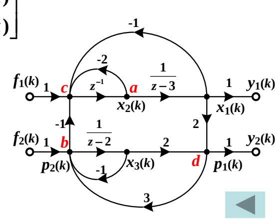
$\Rightarrow x_3(k+1) = p_2(k) + 2x_3(k) = 6x_1(k) + 7x_3(k) + f_2(k)$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & -5 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

$y_1(k) = x_1(k)$

$y_2(k) = p_1(k) = 2x_1(k) + 2x_3(k)$



8.3 状态方程的求解

一、 连续系统状态方程的求解

1.连续系统状态方程的变换域解法

根据矩阵函数积分的概念，一个n维状态矢量$x(t)$的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}[x(t)] = [\ \mathcal{L}[x_1(t)]\ ,\mathcal{L}[x_2(t)],\ \ldots,\ \mathcal{L}[x_n(t)]]^T$$

把它简记为 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$

它是n维矢量。

同样地，输入、输出矢量的拉普拉斯变换简记为

$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$

它们分别是p维和q维矢量。

状态方程 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t)$ (8.4-1)

输出方程 $y(t) = Cx(t) + Df(t)$ (8.4-2)

对式(8.4-1)取拉普拉斯变换

$sX(s) - x(0\text{-}) = AX(s) + BF(s)$

$[sI - A]X(s) = x(0\text{-}) + BF(s)$

$X(s) = [sI - A]^{-1}x(0\text{-}) + [sI - A]^{-1}BF(s)$

$= \Phi(s)x(0\text{-}) + \Phi(s)BF(s)$

式中$\Phi(s) = [sI - A]^{-1}$常称为预解矩阵。

对式(8.4-2)取拉普拉斯变换

$Y(s) = CX(s) + DF(s)$

$= C\Phi(s)x(0\text{-}) + [C\Phi(s)B + D]F(s)$

$$Y(s) = \underbrace{C\Phi(s)x(0\text{-})}_{Y_{zi}(s)} + \underbrace{[C\Phi(s)B + D]F(s)}_{Y_{zs}(s)}$$

$Y_{zi}(s) = C\Phi(s)x(0\text{-})$

$Y_{zs}(s) = [C\Phi(s)B + D]F(s) = H(s)F(s)$

$H(s) = C\Phi(s)B + D$

它是一个$q\times p$矩阵，可称为系统函数矩阵或转移函数矩阵。

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \ldots & H_{1p}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \ldots & H_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{q1}(s) & H_{q2}(s) & \ldots & H_{qp}(s) \end{bmatrix}$$

转移函数矩阵中第i行第j列的元素$H_{ij}(s)$是第i个输出分量对第j个输入分量的转移函数。

对 $Y_{zs}(s) = [C\Phi(s)B + D]F(s) = H(s)F(s)$

取反拉氏变换，有：

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_{zs}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] * \mathcal{L}^{-1}F(s)]$$

即 $y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] * f(t) = h(t) * f(t)$

其中$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$为冲激响应矩阵

2. 系统稳定性的判断

$H(s) = C\Phi(s)B + D$

$$H(s) = C[sI - A]^{-1}B + D = \frac{C\cdot \mathrm{adj}(sI - A)\cdot B + D\cdot \det(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

$\Phi(s)$的极点就是$H(s)$的极点，即$|sI-A|=0$的根。

系统的稳定性可以根据系统矩阵A的特征值在s平面的分布情况来判定。

具体地说，如果系统矩阵A的特征值全部位于s平面的左半平面时，系统稳定，否则系统不稳定。

可利用R-H准则判断系统的特征多项式$\det(sI-A)$的特征根是否位于平面的左半平面。

系统的频率响应矩阵

如果系统函数矩阵$H(s)$在$j\omega$轴上收敛（亦即$H(s)$的所有元素在$j\omega$轴上收敛），则系统的频率响应矩阵

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = C[j\omega I - A]^{-1}B + D$$

例1： 描述LTI因果系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}f(t),\quad y(t) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + [1]f(t)$$

初始状态$x_1(0_-)=3$，$x_2(0_-)=2$，输入$f(t)=\delta(t)$。

求状态变量和输出。并判断该系统是否稳定。

解： $[sI - A] = s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s+1 & -2\\ 1 & s+4\end{bmatrix}$

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}s+4 & 2\\ -1 & s+1\end{bmatrix}$$

$X(s) = \Phi(s)[x(0_-) + BF(s)]$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}s+4 & 2\\ -1 & s+1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}1\right)$$

$$X(s) = \begin{bmatrix}\dfrac{3(s+6)}{(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{3s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{12}{s+2} - \dfrac{9}{s+3}\\ \dfrac{9}{s+3} - \dfrac{6}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix}12e^{-2t} - 9e^{-3t}\\ 9e^{-3t} - 6e^{-2t}\end{bmatrix}\varepsilon(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + [1]f(t) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12e^{-2t} - 9e^{-3t}\\ 9e^{-3t} - 6e^{-2t}\end{bmatrix}\varepsilon(t) + \delta(t)$$

$$= 6e^{-2t}\varepsilon(t) + \delta(t)$$

$H(s)$的极点就是$|sI-A|=0$的根。 $|sI-A|=(s+2)(s+3)$

由于$H(s)$的极点均在左半平面，故该因果系统稳定。

二、离散系统状态方程的求解

1. 离散系统状态方程的变换域解法

一个n维状态矢量$x(k)$的z变换为

$$Z[x(k)] = [Z[x_1(k)], Z[x_2(k)], \ \dots, \ Z[x_n(k)]]^T$$

把它简记为 $X(z) = Z[x(k)]$

它是n维矢量。

同样地，输入、输出矢量的z变换简记为

$$F(z) = Z[f(k)]$$

$$Y(z) = Z[y(k)]$$

它们分别是 p维和 q维矢量。

状态方程 $x(k+1)=Ax(k)+Be(k)$ (8.5-1)

输出方程 $y(k)=Cx(k)+De(k)$ (8.5-2)

对式(8.5-1)取z变换

$zX(z)-zx(0)=AX(z)+BF(z)$

$X(z)=[zI-A]^{-1}zx(0)+[zI-A]^{-1}BF(z)$

设$\Phi(z)=[zI-A]^{-1}z$

$X(z)=\Phi(z)x(0)+z^{-1}\Phi(z)BF(z)$

式中$\Phi(z)=[zI-A]^{-1}z$ 称为预解矩阵。

对式(8–91)取z变换

$Y(z)=CX(z)+DF(z)$

$=C\Phi(z)x(0)+[Cz^{-1}\Phi(z)B+D]F(z)$

$$Y(z)=\underbrace{C\Phi(z)x(0)}_{Y_{zi}(z)}+\underbrace{[Cz^{-1}\Phi(z)B+D]F(z)}_{Y_{zs}(z)}$$

$y_{zi}(k)=Z^{-1}[C\Phi(z)x(0)]$

$y_{zs}(k)=Z^{-1}[(Cz^{-1}\Phi(z)B+D)F(z)]=Z^{-1}[H(z)F(z)]$

$H(z)=[Cz^{-1}\Phi(z)B+D]=C[zI-A]^{-1}B+D$

它是一个$q\times p$矩阵，可称为系统函数矩阵或转移函数矩阵。

转移函数矩阵中第i行第j列的元素$H_{ij}(z)$是第i个输出分量对第j个输入分量的转移函数。

对 $Y_{zs}(z)=[Cz^{-1}\Phi(z)B+D]F(z)=H(z)F(z)$，取反$z$变换，有：

$$Z^{-1}[Y_{zs}(z)]=Z^{-1}[H(z)F(z)]=Z^{-1}[H(z)]*Z^{-1}[F(z)]$$

即$y_{zs}(k)=Z^{-1}[H(z)]*f(k)=h(k)*f(k)$

其中$h(k)=Z^{-1}[H(z)]$为单位序列响应矩阵

2. 系统稳定性的判断

$H(z)=[Cz^{-1}\Phi(z)B+D]=C[zI-A]^{-1}B+D$

即系统函数矩阵$H(z)$的极点是特征方程 $\det[zI-A]=0$

（$|zI-A|=0$）的根。

判定特征根是否在单位圆内即系统是否稳定，可用朱里准则。

系统的频率响应矩阵

如果系统函数矩阵$H(z)$在单位圆上收敛，则系统的频率响应矩阵

$$H(e^{j\theta})=H(z)\big|_{z=e^{j\theta}}=C[e^{j\theta}I-A]^{-1}B+D$$

例2：已知某离散因果系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}f(k),\quad \begin{bmatrix}y_1(k)\\y_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}$$

初始状态为$\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，激励$f(k)=\varepsilon(k)$。求状态方程的解和系统的输出并判断系统的稳定性。

解：$\Phi(z)=[zI-A]^{-1}z=\begin{bmatrix}\dfrac{z^2-5z}{(z-2)(z-3)}&\dfrac{z}{(z-2)(z-3)}\\\dfrac{-6z}{(z-2)(z-3)}&\dfrac{z^2}{(z-2)(z-3)}\end{bmatrix}$

$X(z)=\Phi(z)[x(0)+z^{-1}BF(z)]=\begin{bmatrix}\dfrac{z(z-2)}{(z-1)(z-3)}\\\dfrac{z(2z-3)}{(z-1)(z-3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\frac{1}{2}z}{z-1}+\dfrac{\frac{1}{2}z}{z-3}\\\dfrac{\frac{1}{2}z}{z-1}+\dfrac{\frac{3}{2}z}{z-3}\end{bmatrix}$

$x(k)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}[1+(3)^k]\\\frac{1}{2}[1+3(3)^k]\end{bmatrix}\varepsilon(k)$

$$\begin{bmatrix}y_1(k)\\y_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}[1+(3)^k]\\\frac{1}{2}[1+3(3)^k]\end{bmatrix}\varepsilon(k)$$

$$=\begin{bmatrix}1+2(3)^k\\\frac{1}{2}[1-(3)^k]\end{bmatrix}\varepsilon(k)$$

$H(z)$的极点就是$|zI-A|=0$的根。$|zI-A|=(z-2)(z-3)$

由于$H(z)$的极点均在单位圆外，故该因果系统不稳定。

8.4 系统的可控制性和可观测性

一、 系统的可控制性

所谓可控制性，是指输入对系统内部状态的控制能力，即当系统用状态方程描述时，在输入的作用下，系统能在有限的时间内，把系统的全部状态从初始状态x(0)引向状态空间的原点（即零状态x( )＝0），则称系统是完全可控的，如果只有对部分状态变量可以做到这一点则系统不完全可控制。为简便，系统完全可控称为系统可控。

判断系统是否可控，可采用以下方法：

1. 当状态方程中的系数矩阵A为对角阵（这时状态变量间相互独立）时，

- 对于单一输入系统，系统可控的充要条件是：
仅当控制矩阵B中没有零元素时，系统才是可观测的；
若B中出现有零元素，则与该零元素对应的状态变量就不可控。

- 对于多输入系统，系统可控的充要条件是：
矩阵B中没有任何一行元素全部为零。

例1：已知某连续系统的动态方程，试讨论其可控性。

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + f(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + f(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = 1$$

即$x_1(t)$是不可控的，$x_2(t)$是可控的。

判断系统是否可控，可采用以下方法：

2. 当状态方程中的系数矩阵A不是对角阵时，可将其转化为对角阵。

$$\begin{cases} \hat{A} = P^{-1}AP \\ \hat{B} = P^{-1}B \\ \hat{C} = CP \\ \hat{D} = D \end{cases}$$

矩阵$P^{-1}B$中没有任何一行元素全部为零。

二、系统的可观测性

所谓系统的可观测性，是指由系统的输出量来确定系统状态的能力，即当系统用状态方程描述时，在给定系统的输入（控制）后，若在有限的时间间隔内，能根据系统的输出唯一地确定出系统的所有初始状态，则称系统是完全可观测的；若只能确定部分初始状态，则称系统不完全可观测。

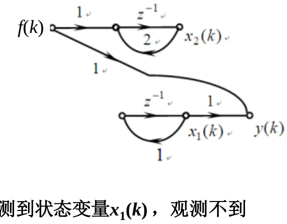
判断系统是否可观测，可采用以下方法：

- 对于单一输出系统，当状态方程中的系数矩阵A为对角阵（这时状态变量间相互独立）时，仅当输出矩阵C中没有零元素时，系统才是可观测的；若C中出现有零元素，则与该零元素对应的状态变量就不可观测。

例2：某离散系统的信号流图如图所示，试讨论其可观性。

$$x_1(k+1) = x_1(k)$$
$$x_2(k+1) = 2x_2(k) + f(k)$$
$$y(k) = x_1(k) + f(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = 1$$



通过输出$y(k)$只能观测到状态变量$x_1(k)$，观测不到状态变量$x_2(k)$。

判断系统是否可观测，可采用以下方法：

•对于多输出系统，当状态方程中的系数矩阵$\boldsymbol{A}$为对角阵时，则系统可观测的充要条件是：

当系统矩阵$\boldsymbol{A}$不为对角阵时，矩阵$\boldsymbol{CP}$中没有任何一列元素全为零。

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\\ \hat{\boldsymbol{B}} &= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \hat{\boldsymbol{C}} &= \boldsymbol{CP}\\ \hat{\boldsymbol{D}} &= \boldsymbol{D}\end{aligned}\right\}$$

本章要求：

会建立系统状态方程，

掌握状态方程的变换域的分析方法

了解系统可控、可观的判断方法