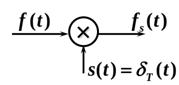
第六章　离散系统的z域分析

在连续系统中，为了避开解微分方程的困难，可以通过拉氏变换把微分方程转换为代数方程。出于同样的动机，也可以通过一种称为z变换的数学工具，把差分方程转换为代数方程。z变换(ZT)在离散系统中的地位相当于连续系统中拉氏变换(LT)。

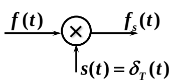
6.1 z变换

一、从拉氏变换(LT)到z变换(ZT)

1) 抽样信号的LT (对连续信号进行均匀抽样后可得到离散时间信号)



$$f_s(t)=f(t)\cdot\delta_T(t)=f(kT)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$



$$f_s(t)=f(t)\cdot\delta_T(t)=f(kT)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

$\because\ \delta(t-kT)\leftrightarrow e^{-kTs}$

$\therefore\ f_s(t)\leftrightarrow F(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)e^{-kTs}\qquad(6.1-2a)$

$f_s(t)$的双边LT

令 $z=e^{sT}$　(z为复变量)

称序列 $f(kT)$的双边z变换

则 $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)z^{-k}\qquad(6.1-2b)$

复变量z的函数

2) 复变量z与s 的关系

$$\left.\begin{aligned}F(z)\big|_{z=e^{sT}}&=F(s)\\ z&=e^{sT}\\ s&=\frac{1}{T}\ln z\end{aligned}\right\}$$

s域与z 域间的重要关系

说明：

$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)z^{-k}\qquad(6.1-2b)$

1. 在信号处理过程中在很多条件下信号处理是非实时的，信号是先记录，后分析，因而kT并不代表具体的时刻而只表明离散时间信号在序列中前后的顺序。所以序列可不必以kT作变量，而直接以$f(k)$表示一序列的第k个数字。$f(kT)$简计为$f(k)$

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}\qquad(6.1-7)$$

2. 序列$f(k)$并非一定由连续信号$f(t)$抽样得到，离散时间信号源的形式多样。

二、z 变换

$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}\qquad(6.1-7)$

$f(k)$的双边z变换，求和运算在正、负k域进行。

$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}\qquad(6.1-8)$

$f(k)$的单边z变换，求和运算只在正k域进行(无论$k<0$时$f(k)$是否为零)

当 $f(k)$为因果序列时[即$f(k)=0,\ k<0$]

$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}$

因果序列的单、双边z变换相等

简写为　$F(z)=\mathcal{Z}[f(k)]$

$f(k)=\mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$

$F(z)$ 称为$f(k)$的象函数

简记为 $f(k)\leftrightarrow F(z)$

说明：本书对单、双边z 变换都做讨论

三、z变换的收敛域 (重要的概念)

$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}\qquad(6.1-7)$

$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}\qquad(6.1-8)$

z变换是z的幂级数，显然只有当该幂级数收敛时序列$f(k)$的 z变换才存在。

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)z^{-k}\right|<\infty$ ～绝对可和条件（ZT存在的充要条件）

收敛域：对于给定的有界序列$f(k)$，使其z 变换的幂级数收敛的所有z值的取值范围称为$F(z)$的收敛域。

1. 有限长序列z变换的收敛域

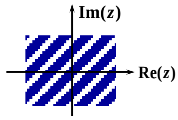
[$f(k)$仅在有限区间$k_1 \le k \le k_2$存在]

例1：求以下有限长序列 $f(k)$的z变换。

(1) $f_1(k)=\delta(k)$，(2) $f_2(k)=\left\{1\ 2\ \underset{\underset{k=0}{\uparrow}}{3}\ 4\ 5\right\}$

(1) $F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=1$

$\delta(k)$的z变换是与z无关的常数1，因而在z的全平面收敛，即$|z|\ge 0$



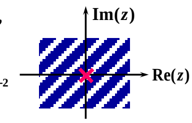
$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}$，$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}$

例1：求以下有限长序列 $f(k)$的z变换。

(1) $f_1(k)=\delta(k)$，(2) $f_2(k)=\left\{1\ 2\ \underset{\underset{k=0}{\uparrow}}{3}\ 4\ 5\right\}$

(2) $F_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_2(k)z^{-k}=z^2+2z+3+4z^{-1}+5z^{-2}$

为使双边z变换存在，应满足$0<|z|<\infty$，(即不包括$|z|=0$ 和$|z|=\infty$)



(3) $F_3(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_2(k)z^{-k}=3+2z^{-1}+z^{-2}$

为使单边z变换存在，应满足$|z|>0$(即不包括$|z|=0$)

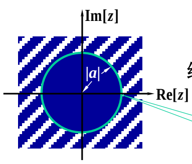
结论：$f(k)$为有限长序列时其象函数$F(z)$是z的有限次幂z^{-k}的加权和，其收敛域至少为$0<|z|<\infty$ (还可能包括$|z|=0$ 和$|z|=\infty$)

2. 因果序列z变换及其收敛域

例2：求 $f(k)=a^k\varepsilon(k)$的z变换，并确定其收敛域。

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^kz^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^k$$

当$|a/z|<1$ (即$|z|>a$)时该级数收敛



结论：因果序列仅当$|z|>|a|$ 时其ZT存在，其收敛域为半径为$|a|$ 的圆外区域。

称为收敛圆

求和公式

$$\sum_{i=0}^{\infty}a^i=\frac{1}{1-a}\quad |a|<1$$

$$f(k)=a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\frac{z}{z-a},\quad |z|>a$$

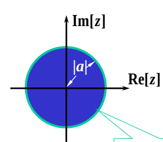
$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}\qquad(6.1-8)$$

3. 反因果序列z变换及其收敛域

例3: 求$f(k)=-a^k\varepsilon(-k-1)$的$z$变换，并确定其收敛域。

$$F(z)=-\sum_{k=-\infty}^{-1}a^kz^{-k}=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^k$$

当$|z/a|<1$ (即$|z|<a$)时该级数收敛



结论：反因果序列仅当$|z|<|a|$ 时其ZT存在，其收敛域为半径为$|a|$ 的圆内区域。

称为收敛圆

$$f(k)=-a^k\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow F(z)=\frac{z}{z-a},\ |z|<a$$

求和公式：$\sum_{i=0}^{\infty}a^i=\frac{1}{1-a}\quad |a|<1$

z变换的收敛域 (重要的概念)

$$f(k)=a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\frac{z}{z-a},\quad |z|>a$$

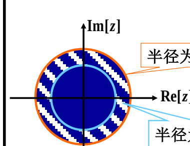
$$f(k)=-a^k\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow F(z)=\frac{z}{z-a},\quad |z|<a$$

注意：两个不同的序列由于收敛域不同，可能具有相同的z变换形式，为了单值地确定z变换所对应的序列$f(k)$，不仅要给出序列的z变换式，**而且必须同时标明其收敛域。**

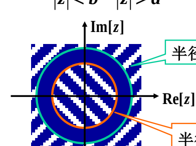
4. 双边序列的z变换及其收敛域

例4: 求$f(k)=b^k\varepsilon(-k-1)+a^k\varepsilon(k)$的$z$变换，并确定其收敛域。

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}b^kz^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}a^kz^{-k}=-\underbrace{\frac{z}{z-b}}_{|z|<b}+\underbrace{\frac{z}{z-a}}_{|z|>a}$$



双边序列当$|a|<|b|$ 时其z变换存在，其收敛域为$|a|<|z|<|b|$ 的环状区域



双边序列若$|a|\ge|b|$没有公共区域，其z变换不存在，

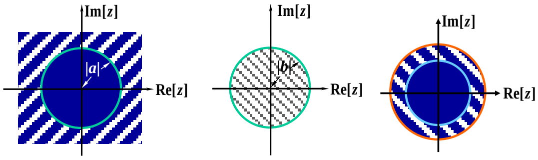
总结：

1) 有限长序列收敛域至少满足$0<|z|<\infty$

2) 因果序列收敛域在z平面上半径为$|a|$的圆外区域

3) 反因果序列收敛域在z平面上半径为$|b|$的圆内区域

4) 双边序列当$|a|<|b|$时ZT存在，收敛域为$|a|<|z|<|b|$的环状区域



因果序列收敛域　　反因果序列收敛域　　双边序列收敛域

注意：求序列的z变换，**必须标明其收敛域。**

四、常用序列的z变换

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} \quad (6.1-7)$$

1. 单位样值序列　$\delta(k) \leftrightarrow 1 \quad |z|\geq 0$

2. 指数序列　$a^k\varepsilon(k) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a},\ |z|>|a|$

$$(-a)^k\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z+a},\ |z|>|a|$$

$$b^k\varepsilon(-k-1) \leftrightarrow \frac{-z}{z-b},\ |z|<|b|$$

$$(-b)^k\varepsilon(-k-1) \leftrightarrow \frac{-z}{z+b},\ |z|<|b|$$

3. 单位阶跃序列　$\varepsilon(k) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1},\ |z|>1$

$$\varepsilon(-k-1) \leftrightarrow \frac{-z}{z-1},\ |z|<1$$

4. 虚指数序列　$e^{\pm j\beta k}\varepsilon(k) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-e^{\pm j\beta}},\ |z|>|e^{\pm j\beta}|=1$

6.2 z变换的性质

1. 线性性质 (重点)

若　$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z) \quad \alpha_1<|z|<\beta_1$

$f_2(k) \leftrightarrow F_2(z) \quad \alpha_2<|z|<\beta_2$

则　$b_1 f_1(k)+b_2 f_2(k) \leftrightarrow b_1F_1(z)+b_2F_2(z)$

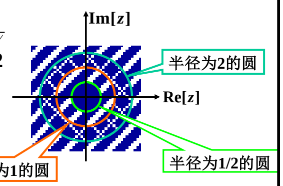
$$\max(\alpha_1,\alpha_2)<|z|<\min(\beta_1,\beta_2) \quad (6.2-1)$$

例1：求 $f(k)=\varepsilon(k)-2^k\varepsilon(-k-1)-2^{-k}\varepsilon(k)$ 的ZT。

解：$F(z)=\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{z}{z-2}-\dfrac{z}{z-1/2}$

$$F(z)=\frac{z(z^2-z-1/2)}{(z-1)(z-2)(z-1/2)}$$

$$1<|z|<2$$



例2：求$\cos\beta k\varepsilon(k)$和$\sin\beta k\varepsilon(k)$ 的ZT。

解 $\because$　$\cos\beta k=\dfrac{1}{2}(e^{j\beta k}+e^{-j\beta k})$

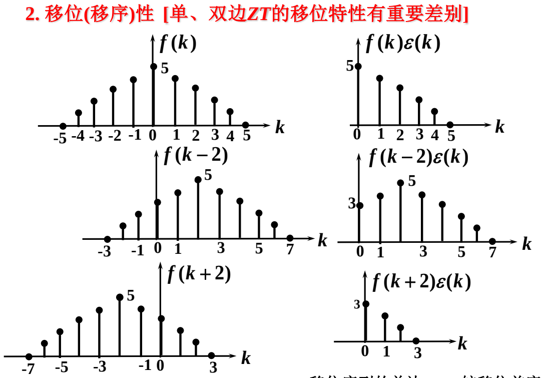
$$\sin\beta k=\frac{1}{2j}(e^{j\beta k}-e^{-j\beta k})$$

$$e^{j\beta k}\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-e^{j\beta}},\quad e^{-j\beta k}\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-j\beta}}$$

$$\cos\beta k\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1},\quad |z|>1 \quad (6.2-2)$$

$$\sin\beta k\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1},\quad |z|>1 \quad (6.2-3)$$

2. 移位(移序)性 [单、双边ZT的移位特性有重要差别]



移位序列的双边ZT，不会丢失原序列的信息，

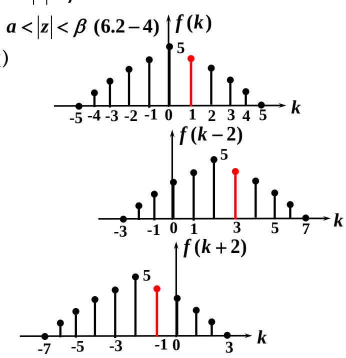
移位序列的单边ZT，较移位前序列的单边ZT长度有增(或减)

(1) 双边z变换的移位

若　$f(k) \leftrightarrow F(z) \qquad a<|z|<\beta$

则　$f(k\pm m) \leftrightarrow z^{\pm m}F(z),\ a<|z|<\beta \ (6.2-4)$

(其中$m>0$且为整数)



例3：求$\varepsilon(k+M)$的 z变换。

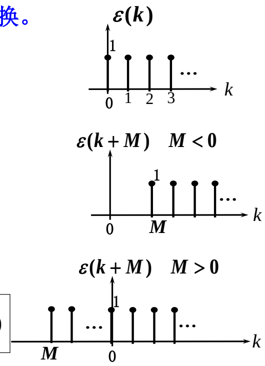
$\because\ \varepsilon(k)\leftrightarrow \dfrac{z}{z-1}\qquad |z|>1$

$\therefore\ \varepsilon(k+M)\leftrightarrow z^{M}\cdot\dfrac{z}{z-1}$

$M<0$时收敛域=？ $|z|>1$

$M>0$时收敛域=？ $1<|z|<\infty$

$$\boxed{F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}\quad(6.1-7)}$$



例4：求 $f(k)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}\varepsilon(k-4)$的$ZT$

$$f(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-4}\varepsilon(k-4)$$

$$\because\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1/2}=\frac{2z}{2z-1}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ f(k)\leftrightarrow\frac{1}{16}z^{-4}\frac{2z}{2z-1}=\frac{1}{8z^{3}(2z-1)}$$

收敛域=？ $|z|>\dfrac{1}{2}$

(2) 单边z变换的移位(移序) [注：对$f(k)$移位后取单边ZT]

a) $f(k)$ 右移 (重点)

$f(k)$为双边序列时，右移后其单边所含信息比移位前单边信息增加。

若 $f(k)\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)\quad |z|>a$

则 $f(k-m)\varepsilon(k)\leftrightarrow$

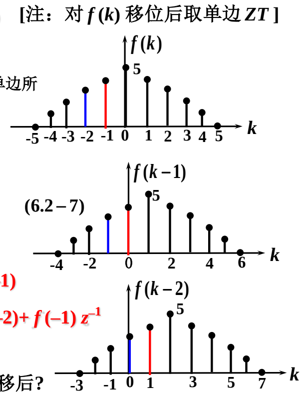
$$z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k}\quad |z|>a\qquad(6.2-7)$$

(其中$m>0$且为整数)

$f(k-1)\varepsilon(k)\ \leftrightarrow\ z^{-1}F(z)+f(-1)$

$f(k-2)\varepsilon(k)\ \leftrightarrow\ z^{-2}F(z)+f(-2)+f(-1)z^{-1}$

$f(k)$为因果序列时，右移后？



b) $f(k)$ 左移时 [注：$f(k)$左移后取单边ZT]

$f(k)$左移后其单边所含信息比移位前单边信息减少

若 $f(k)\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)\quad |z|>a$

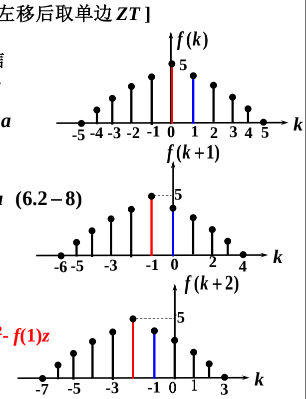
则 $f(k+m)\varepsilon(k)\leftrightarrow$

$$z^{m}F(z)-\sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{m-k}\quad |z|>a\quad(6.2-8)$$

(其中$m>0$且为整数)

$f(k+1)\varepsilon(k)\ \leftrightarrow\ zF(z)-f(0)z$

$f(k+2)\varepsilon(k)\ \leftrightarrow z^{2}F(z)-f(0)z^{2}-f(1)z$



例5：求 $f_1(k)=a^{k-2}$ 和 $f_2(k)=a^{k+2}$的单边ZT。

设 $f(k)=a^{k}$ (双边信号)

$$f(k)\varepsilon(k)=a^{k}\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>a$$

法一：$f(k-2)\varepsilon(k)\leftrightarrow z^{-2}F(z)+f(-2)+f(-1)z^{-1}$

$f(k+2)\varepsilon(k)\leftrightarrow z^{2}F(z)-f(0)z^{2}-f(1)z$

$$f_1(k)=f(k-2)\varepsilon(k)\leftrightarrow z^{-2}\frac{z}{z-a}+f(-2)+f(-1)z^{-1}=\frac{a^{-2}z}{z-a}\qquad |z|>a$$

$$f_2(k)=f(k+2)\varepsilon(k)\leftrightarrow z^{2}\frac{z}{z-a}-f(0)z^{2}-f(1)z=\frac{a^{2}z}{z-a}\qquad |z|>a$$

法二：$f_1(k)=a^{k-2}\varepsilon(k)=a^{-2}a^{k}\varepsilon(k)\leftrightarrow a^{-2}\dfrac{z}{z-a}\qquad |z|>a$

$f_2(k)=a^{k+2}\varepsilon(k)=a^{2}a^{k}\varepsilon(k)\leftrightarrow a^{2}\dfrac{z}{z-a}\qquad |z|>a$

例6：求有始周期序列$\delta_N(k)\varepsilon(k)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)$的$z$变换。

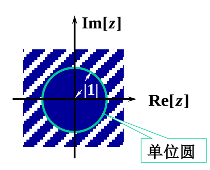
$\delta(k)\ \leftrightarrow\ 1\qquad |z|\ge 0$

$\delta(k-mN)\leftrightarrow z^{-mN}\qquad |z|>0$

$$\delta_N(k)\varepsilon(k)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k-mN)\leftrightarrow 1+z^{-N}+z^{-2N}+\dots+z^{-mN}$$

$$\delta_N(k)\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-N}}\qquad |z|>1$$

$$\delta_T(t)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-sT}}\qquad \mathrm{Re}[s]>0$$



收敛域= $|z|>1$

收敛条件：$|1/z|<1$ (即 $|z|>1$ 收敛域比单个序列减小)

3. z 域尺度变换 (序列乘b^k)

若 $f(k)\leftrightarrow F(z) \qquad \alpha<|z|<\beta$

则 $b^k f(k)\leftrightarrow F\left(\frac{z}{b}\right) \qquad \alpha|b|<|z|<\beta|b| \qquad (6.2-12)$

$$(b^{-1})^k f(k)\leftrightarrow F(bz) \qquad \frac{\alpha}{|b|}<|z|<\frac{\beta}{|b|}$$

$$(-1)^k f(k)\leftrightarrow F(-z) \qquad \alpha<|z|<\beta$$

例7: 求$\left(2^{-1}\right)^k\varepsilon(k)$的$ZT$。

$\because\ \varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$

$\therefore\ \left(2^{-1}\right)^k\varepsilon(k)\leftrightarrow F(2z)=\frac{2z}{2z-1} \qquad |z|>\frac{1}{2}$

例8: 求$b^k\sin\left(\beta k\right)\varepsilon(k)$的$ZT$。

$$\sin\beta k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}, \qquad |z|>1 \qquad (6.2-3)$$

$$b^k\sin\left(\beta k\right)\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{\frac{z}{b}\sin\beta}{\left(\frac{z}{b}\right)^2-2\frac{z}{b}\cos\beta+1} \qquad |z|>|b|$$

若 $f(k)\leftrightarrow F(z) \qquad \alpha<|z|<\beta$

则 $b^k f(k)\leftrightarrow F\left(\frac{z}{b}\right) \qquad \alpha|b|<|z|<\beta|b| \qquad (6.2-12)$

---

4. 序列卷积 (重点)

说明：只讨论k域卷积定理, z域卷积定理很少用(略)。

若 $f_1(k)\leftrightarrow F_1(z) \qquad \alpha_1<|z|<\beta_1$

$\quad f_2(k)\leftrightarrow F_2(z) \qquad \alpha_2<|z|<\beta_2$

则 $f_1(k)*f_2(k) \ \leftrightarrow\ F_1(z)\cdot F_2(z) \qquad (6.2-16)$

收敛域 $\max(\alpha_1,\alpha_2)<|z|<\min(\beta_1,\beta_2)$

例9: 求$a^k\varepsilon(k)*b^k\varepsilon(k)$ 的z变换。(其中$0<a<b$)

解 $\because\ a^k\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>a$

$\quad b^k\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\frac{z}{z-b} \qquad |z|>b$

$\therefore\ a^k\varepsilon(k)*b^k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-a}\cdot\frac{z}{z-b}=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} \qquad |z|>b$

---

5. z 域微分 (序列乘k) $\qquad (-t)f(t)\leftrightarrow\frac{dF(s)}{ds} \qquad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$

若 $f(k)\leftrightarrow F(z) \qquad \alpha<|z|<\beta$

则 $k\,f(k)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}F(z) \qquad \alpha<|z|<\beta \qquad (6.2-22)$

$$k^2 f(k)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}F(z)\right) \qquad \alpha<|z|<\beta$$

… … … … … … … …

$$k^m f(k)\leftrightarrow\left(-z\frac{d}{dz}\right)^m F(z) \qquad \alpha<|z|<\beta$$

表示共进行m次求导和乘$(-z)$的运算

例10: 求$(k-1)\varepsilon(k-1)$ 的ZT。

$$k\varepsilon(k)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{z}{(z-1)^2} \qquad |z|>1$$

$$(k-1)\varepsilon(k-1)\leftrightarrow\frac{1}{(z-1)^2} \qquad |z|>1$$

记住，反变换重根时用

---

6. 初值定理 (用于由$F(z)$直接求序列的初值$f(0)$, $f(1)$, …)

若 $f(k)\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z) \qquad |z|>\alpha$

则 $f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}F(z) \qquad (6.2-35)$

$$f(1)=\lim_{z\to\infty}\left[zF(z)-z\,f(0)\right]$$

$$f(2)=\lim_{z\to\infty}\left[z^2F(z)-z^2f(0)-z\,f(1)\right]$$

… … … … … … … …

$$f(m)=\lim_{z\to\infty}z^m\left[F(z)-\sum_{k=0}^{m-1}f(k)z^{-k}\right]$$

例11: 已知因果序列$f(k)$的ZT为$F(z)=\frac{z^2}{(z-2)(z-1)}$,求$f(0)$, $f(1)$

解: $f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^2}{(z-2)(z-1)}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{(1-2z^{-1})(1-z^{-1})}=1$

$f(1)=\lim\limits_{z\to\infty}\left[zF(z)-z\,f(0)\right]=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{3-2z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-z^{-1})}=3$

说明：初值定理可使用于右边序列，即$k<M$时$f(k)$=0的序列求初值。

---

7. 终值定理 [用于由$F(z)$直接求序列的终值$f(\infty)$]

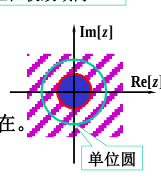
若 $f(k)\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z) \qquad |z|>\alpha$

则 $f(\infty)=\lim\limits_{k\to\infty}f(k)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)F(z) \qquad (6.2-37b)$

取$z\to1$的极限，说明 z =1应在收敛域内

终值存在的条件: $|z|>\alpha$ 且$0\le\alpha<1$

例12: 已知$F(z)=\frac{z}{z-1/2}$ $\quad |z|>\frac{1}{2}$ 求$f(\infty)$



$\because\ |z|>\alpha=\frac{1}{2}$ 满足 $0\le\alpha<1$的条件$\therefore f(\infty)$存在。

$$f(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)F(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{z}{z-0.5}=0$$

实际上 $f(k)=\left(1/2\right)^k\varepsilon(k)\to f(\infty)=0$

8. 序列部分和的z 变换 (序列的求和）

若 $f(k)\leftrightarrow F(z)$ $\quad \alpha<|z|<\beta$

则 $g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k} f(i)\leftrightarrow \frac{z}{z-1}F(z)$ $\max(\alpha,1)<|z|<\beta$ (6.2-32)

证: $f(k)*\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\varepsilon(k-i)=\sum_{i=-\infty}^{k} f(i)\leftrightarrow \frac{z}{z-1}\cdot F(z)$

例13: 求 $\sum_{i=0}^{k}2^i$ 的 ZT。

解: $\sum_{i=0}^{k} 2^i=\sum_{i=-\infty}^{k} \underbrace{2^i\varepsilon(i)}_{f(i)}=\sum_{i=-\infty}^{k} f(i)$

∵ $2^k\varepsilon(k)\leftrightarrow \frac{z}{z-2}$ $\quad |z|>2$

∴ $\sum_{i=0}^{k} 2^i \leftrightarrow \frac{z}{z-2}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{z^2-3z+2}$ $\quad |z|>2$

6.3 逆z变换 [由F(z)求f(k)]

求逆z 变换的方法[当F(z)为z的有理分式时]

1）幂级数展开法 [用长除法将F(z) 展开成幂级数] (略)

2）留数法 (略) 需要掌握常用序列的变换对

3）部分分式展开法(重点)

一般而言，双边序列f(k)可分解为因果序列$f_1(k)$和反因果序列$f_2(k)$两部分，即

$f(k) = f_1(k)+f_2(k) = f(k)\varepsilon(-k-1) + f(k)\,\varepsilon(k)$

相应地，其z变换也分两部分

$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$, $\quad \alpha< |z| <\beta$

二、部分分式展开法

象函数F(z)的一般形式为 F(z)为z的有理分式

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+...+b_1z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0} \quad (6.3-4)$$

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+...+b_1z+b_0}{(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_i)...(z-z_n)}$$

1. F(z)仅含有单极点 [即n个根为互不相等的单根时]

$$F(z)=\frac{k_1}{z-z_1}+\frac{k_2}{z-z_2}+...+\frac{k_i}{z-z_i}+...\frac{k_n}{z-z_n}$$

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+...+b_1s+b_0}{(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_i)...(s-s_n)}$$

说明:从数学的角度把F(z) 展开成部分分式的方法与把F(s)展开成部分分式的方法完全相同。

1) 若$m\le n$时

$$F(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+...+b_1z+b_0}{(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_i)...(z-z_n)}$$

为了把每一个部分分式表示成基本变换对的形式，先将[F(z)/z]展开成部分分式，然后再乘z。(与拉氏反变换的区别)

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{k_1}{z-z_1}+\frac{k_2}{z-z_2}+...+\frac{k_i}{z-z_i}+...+\frac{k_n}{z-z_n}$$

$$F(z)=\frac{k_1z}{z-z_1}+\frac{k_2z}{z-z_2}+...+\frac{k_iz}{z-z_i}+...+\frac{k_nz}{z-z_n}$$

2) 若$m>n$

则先用多项式除法把F(z)分解为有理多项式和有理真分式后再用上述方法。

例1: 已知 $F(z)=\frac{-5z}{3z^2-7z+2}$ $\quad |z|>2$ 求 $f(k)$。

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{-5}{3z^2-7z+2}=\frac{1}{z-(1/3)}-\frac{1}{z-2}$$

$$F(z)=\frac{z}{z-(1/3)}-\frac{z}{z-2} \qquad f(k)=\left[(1/3)^k-(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

强调：由F(z)求原函数f(k)时 ,必须结合收敛域才能确定对应的 $f(k)$

说明：因为F(z) 为真分式可直接展开成部分分式

$$F(z)=\frac{-5z}{3z^2-7z-2}=\frac{1/3}{z-1/3}-\frac{2}{z-2}=\frac{(1/3)z}{z-1/3}z^{-1}-\frac{2z}{z-2}z^{-1}$$

$$f(k)=(1/3)(1/3)^{k-1}\varepsilon(k-1)-2(2)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$=\left[(1/3)^k-(2)^k\right]\varepsilon(k-1)=\left[(1/3)^k-(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

例2: $F(z)=\frac{z^2}{(z-0.5)(z-1/3)}$

求 1)$|z|>0.5$, 2)$|z|<1/3$, 3)$1/3<|z|<1/2$时的 $f(k)$。

解: $\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z-1/2)(z-1/3)}=\frac{3}{z-1/2}-\frac{2}{z-1/3}$

$F(z)=\frac{3z}{z-1/2}-\frac{2z}{z-1/3}$

1)$|z|>1/2$时 $f(k)$为因果序列, $|z|>\max(1/2,1/3)$

$f(k)=\left[3(1/2)^k-2(1/3)^k\right]\varepsilon(k)$

2)$|z|<1/3$时 $f(k)$为反因果序列, $|z|<\min(1/2,1/3)$

$f(k)=\left[-3(1/2)^k+2(1/3)^k\right]\varepsilon(-k-1)$

3)$1/3<|z|<1/2$时 $f(k)$为双边序列。

$f(k)=-2(1/3)^k\varepsilon(k)-3(1/2)^k\varepsilon(-k-1)$

例3: 已知$F(z)=\underbrace{\frac{-z}{z-1/2}+\frac{2z}{z-1}}_{\text{因果信号}}+\underbrace{\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{z-3}}_{\text{反因果信号}}$, $1<|z|<2$ 求$f(k)$。

$$f(k)=\left[2-(1/2)^k\right]\varepsilon(k)+\left[(2)^k-(3)^k\right]\varepsilon(-k-1)$$

例4: 已知$F(z)=\frac{z^2+z}{(z^2-z+1)(z-1)}$, $|z|>1$, 求$f(k)$。

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z+1}{(z^2-z+1)(z-1)}=\frac{z+1}{(z-e^{j\frac{\pi}{3}})(z-e^{-j\frac{\pi}{3}})(z-1)}$$

$(z^2-z+1)=0$

$z_{1,2}=a\,e^{\pm j\beta}=e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$

$$=\frac{k_1}{(z-e^{j\frac{\pi}{3}})}+\frac{k_2}{(z-e^{-j\frac{\pi}{3}})}+\frac{k_3}{(z-1)}$$

$k_1=|k_1|\angle\theta=-1,\quad k_2=k_1^*=-1,\quad k_3=2$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)}-\frac{z}{(z-e^{j\frac{\pi}{3}})}-\frac{z}{(z-e^{-j\frac{\pi}{3}})}$$

$$f(k)=[2-(e^{j\frac{\pi}{3}k}+e^{-j\frac{\pi}{3}k})]\varepsilon(k)=(2-2\cos\frac{\pi}{3}k)\varepsilon(k)$$

例5: $F(z)=\frac{z}{z^2-\sqrt{3}z+1}$ $|z|>1$ $A(z)$只含有一对共轭复根

法一：配平法

$\because\ \sin\beta k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}\quad \cos\beta k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$

$\cos\beta=\sqrt{3}/2\ \leftrightarrow\ \beta=\frac{\pi}{6},\quad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$$\therefore F(z)=\frac{2z\sin\frac{\pi}{6}}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{6}+1}\qquad f(k)=2\sin\frac{\pi}{6}k\varepsilon(k)$$

法二：部分分式展开法

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z^2-\sqrt{3}z+1}=\frac{K_1}{(z-e^{j\frac{\pi}{6}})}+\frac{K_2}{(z-e^{-j\frac{\pi}{6}})}$$

$K_1=-j, K_2=j\qquad f(k)=-j2e^{j\frac{\pi}{6}k}+j2e^{-j\frac{\pi}{6}k}=2\sin\frac{\pi}{6}k\varepsilon(k)$

$\because\ \sin\beta k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}\quad \cos\beta k\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z^2-z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$

例6: $F(z)=\frac{1}{z^2+1}$, $|z|>1$, 求$f(k)$。

$$F(z)=\frac{z}{z^2+1}z^{-1}$$

$\cos\beta=0,\quad \beta=\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}=1$

$$f(k)=\sin\frac{\pi}{2}(k-1)\varepsilon(k-1)$$

2. F(z) 含有重极点(重根)时

例7: 已知$F(z)=\frac{z}{(z^2-1)(z-1)}$, $|z|>1$求 $f(k)$。

解 $\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}=\frac{k_{11}}{(z-1)^2}+\frac{k_{12}}{(z-1)}+\frac{k_3}{(z+1)}$

$k_{11}=(z-1)^2\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=1}=\frac{1}{2}\qquad k_3=(z+1)\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=-1}=\frac{1}{4}$

$k_{12}=\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{F(z)}{z}\right]\Big|_{z=1}=-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{s^2}\leftrightarrow t\varepsilon(t)$

$$F(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{1}{4}\frac{z}{(z+1)},\quad |z|>1$$

$f(k)=\left[\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^k\right]\varepsilon(k)\qquad \frac{z}{(z-1)^2}\leftrightarrow k\varepsilon(k)$

6.4 z 域分析

一、差分方程的z域解

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}y(k-i)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}f(k-j)\quad(6.4-1)$$

设$f(k)$在$k=0$时接入，则系统的初始状态为$y(-1)$， $y(-2)\ldots y(-n)$

令$Z[y(k)]=Y(z)$，$Z[f(k)]=F(z)$,据单边z变换的移位特性

$$\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}z^{-i}\right)}_{A(z)}Y(z)+\underbrace{\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}\left[\sum_{k=0}^{i-1}y(k-i)z^{-k}\right]}_{M(z)}=\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}z^{-j}\right)}_{B(z)}E(z)$$

$$Y(z)=\frac{M(z)}{A(z)}+\frac{B(z)}{A(z)}E(z)=Y_{zi}(z)+Y_{zs}(z)$$

若 $f(k)\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)\qquad |z|>a$

则 $f(k-m)\varepsilon(k)\leftrightarrow z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1}f(k-m)z^{-k}\quad |z|>a\quad(6.2-7)$

例1: 已知$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=\varepsilon(k)+2\varepsilon(k-2)$

$y(-1)=2,\quad y(-2)=-0.5$ 求$y_{zi}(k)$, $y_{zs}(k)$, $y(k)$

$$Y(z)=\frac{y(-1)+2z^{-1}y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}+\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}E(z)$$

$$Y(z)=\frac{z^2+4z}{(z-2)(z+1)}+\frac{(z^2+2)z}{(z-2)(z+1)(z-1)}=Y_{zi}(z)+Y_{zs}(z)$$

$$Y(z)=\underbrace{\frac{2z}{z-2}+\frac{-z}{z+1}}_{y_{zi}(k)}+\underbrace{\frac{2z}{z-2}+\frac{\frac{1}{2}z}{z+1}+\frac{-\frac{3}{2}z}{z-1}}_{y_{zs}(k)}$$

$$y(k)=\underbrace{\left[2(2)^k-(-1)^k\right]\varepsilon(k)+\left[2(2)^k+\frac{1}{2}(-1)^k\right.}_{y_h(t)\text{(自由响应)}}\underbrace{\left.-\frac{3}{2}\right]\varepsilon(k)}_{y_p(k)\text{(强迫响应)}}$$

思考：该系统是否有暂态响应

二、系统函数

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0}\quad(6.4-19)$$

$H(z)$只与系统的结构、元件参数有关而与激励、初始状态均无关，$H(z)$反映系统的固有特性。

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}y(k-i)=\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}f(k-j)\quad(6.4-16)$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=o}^{n}a_{n-i}z^{-i}\right)}_{A(z)}Y(z)+\underbrace{\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}\left[\sum_{k=0}^{i-1}y(k-i)z^{-k}\right]}_{M(z)}=\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m}b_{m-j}z^{-j}\right)}_{B(z)}F(z)$$

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}\quad(6.4-19)$$

$$Y_{zs}(z)=H(z)\cdot F(z)\leftrightarrow y_{zs}(k)=h(k)*f(k)$$

$$h(k)\leftrightarrow H(z)\quad(6.4-21)$$

1. 由系统的差分方程求$H(z)$

例2: $y(k)+4y(k-1)+3y(k-2)=f(k)-3f(k-1)$, 求$H(z)$

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}=\frac{1-3z^{-1}}{1+4z^{-1}+3z^{-2}}=\frac{z^2-3z}{z^2+4z+3}$$

2. 由$H(z)$写出系统的差分方程

例3: 已知某一系统的$H(z)=\dfrac{z^2+6}{z^2+5z+6}$写出该系统的差分方程

$$y(k)+5y(k-1)+6y(k-2)=f(k)+6f(k-2)$$

例4: 已知$f(k)=\varepsilon(k)$时$y_{zs}(k)=\left[2-(0.5)^k+(-1.5)^k\right]\varepsilon(k)$

求该系统的$H(z)$和描述该系统的差分方程。

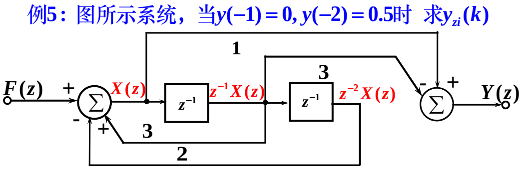
$$Y_{zs}(z)=2\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-0.5}+\frac{z}{z+1.5}$$

$$=\frac{z(2z^2+0.5)}{(z-1)(z-0.5)(z+1.5)}=H(z)\cdot F(z)$$

$$H(z)=\frac{2z^2+0.5}{(z-0.5)(z+1.5)}=\frac{2z^2+0.5}{z^2+z-0.75}=\frac{2+0.5z^{-2}}{1+z^{-1}-0.75z^{-2}}$$

$$y(k)+y(k-1)-0.75y(k-2)=2f(k)+\frac{1}{2}f(k-2)$$

例5: 图所示系统，当$y(-1)=0,\ y(-2)=0.5$时 求$y_{zi}(k)$



$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{F(z)}=\frac{1-3z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}=\frac{k_1z}{z-1}+\frac{k_2z}{z-2}$$

$\because$ $H(z)$与$Y_{zi}(z)$的极点相同 $\quad\therefore Y_{zi}(z)=\dfrac{c_1z}{z-1}+\dfrac{c_2z}{z-2}$

$y_{zi}(k)=\left[c_1+c_2(2)^k\right]\varepsilon(k)\quad y_{zi}(-1)=y(-1)=c_1+\dfrac{1}{2}c_2=0$

$\therefore y_{zi}(k)=\left[1-2(2)^k\right]\varepsilon(k)\quad y_{zi}(-2)=y(-2)=c_1+\dfrac{1}{4}c_2=\dfrac{1}{2}$

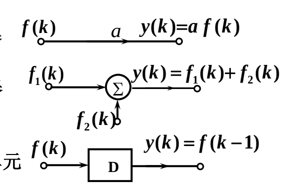
三、系统的z域框图

由系统的k域模型根据z变换的性质可得系统的z域模型

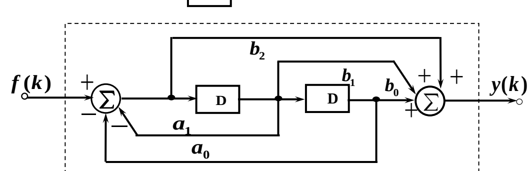
1) 数乘器

2) 加法器

3) 延时单元



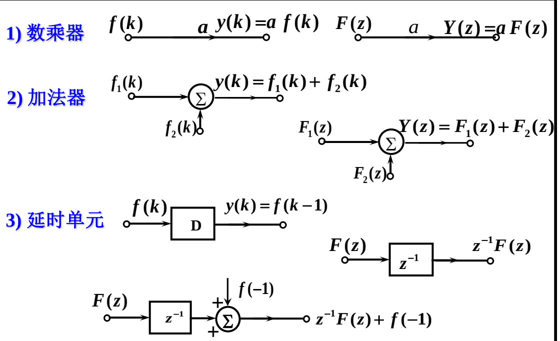
k域中每个框图表示一个子系统的激励与响应之间的某种数学运算关系，常用若干个子系统组成一个完整的系统。



1) 数乘器

2) 加法器

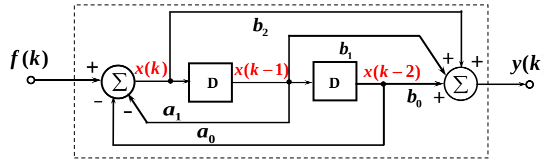
3) 延时单元



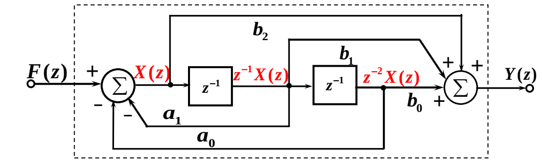
$f(k)\leftrightarrow F(z)$

$f(k-1)\leftrightarrow z^{-1}F(z)+f(-1)$

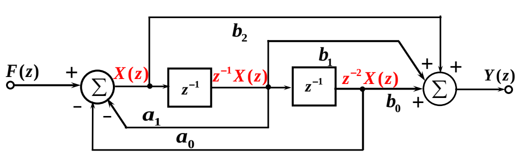
因为系统的数学模型与初始状态无关，因此常用零状态的z域模型



k域框图



z域框图



z域框图

$$X(z)=F(z)-a_1z^{-1}X(z)-a_0z^{-2}X(z)$$

$$X(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}F(z)$$

$$Y(z)=(b_2+b_1z^{-1}+b_0z^{-2})X(z)$$

$$Y(z)=\frac{b_2+b_1z^{-1}+b_0z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_0z^{-2}}F(z)$$

四、s域与z域的关系

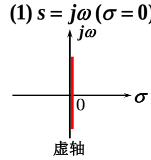
1. $s\rightarrow z$平面的映射关系

$$\left.\begin{array}{l}\text{直角坐标形式：}\ s=\sigma+j\omega\\ \text{极坐标形式：}\ z=e^{sT}=\rho e^{j\theta}\end{array}\right\}$$

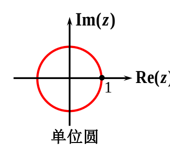
$$\left.\begin{array}{l}\rho=e^{\sigma T}\\ \theta=\omega T_s=\omega\dfrac{2\pi}{\omega_s}=2\pi\dfrac{\omega}{\omega_s}\end{array}\right\}\quad(6.4\text{-}26)$$

ω_s为抽样频率

(1) $s=j\omega\,(\sigma=0)$



s平面

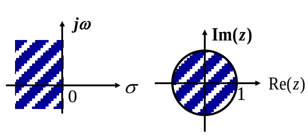


z平面

$$\begin{pmatrix}\rho=1\\ \theta\text{任意}\end{pmatrix}$$

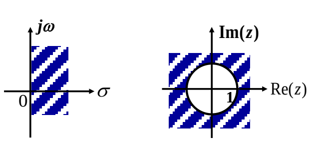
$$z=e^{sT}=\rho e^{j\theta}$$
$$\rho=e^{\sigma T}$$
$$\theta=\omega T=2\pi\frac{\omega}{\omega_s}$$

2) s平面的左半平面$\sigma<0$



$$\begin{pmatrix}\rho<1\\ \theta\text{任意}\end{pmatrix}$$

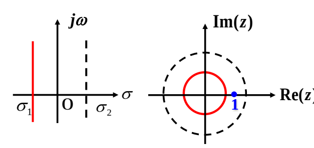
3) s平面的右半平面$\sigma>0$



$$\begin{pmatrix}\rho>1\\ \theta\text{任意}\end{pmatrix}$$

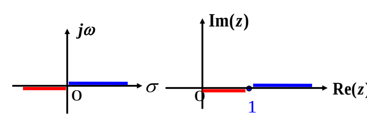
$$z=e^{sT}=\rho e^{j\theta}$$
$$\rho=e^{\sigma T}$$
$$\theta=\omega T=2\pi\frac{\omega}{\omega_s}$$

4) s为平行于虚轴的直线（即σ为常数）



$$\begin{pmatrix}\sigma_1<0,\ \rho_1=e^{\sigma_1T}<1\\ \sigma_2>0,\ \rho_2=e^{\sigma_2T}>1\\ \theta\text{任意}\end{pmatrix}$$

5) $s=\sigma$（即$\omega=0$）



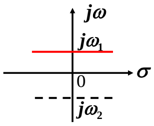
$$\begin{pmatrix}\sigma<0,\ \rho<1\\ \sigma>0,\ \rho>1\\ \theta=0\end{pmatrix}$$

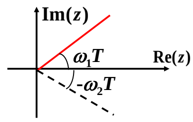
6) s为平行于实轴的直线（即ω为常数）

$z = e^{sT} = \rho e^{j\theta}$

$\rho = e^{\sigma T}$

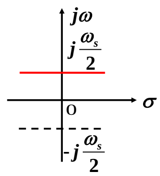
$\theta = \omega T = 2\pi \dfrac{\omega}{\omega_s}$

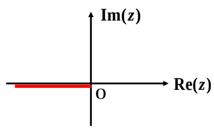




$\begin{pmatrix} \theta\text{为常数} \\ \rho\text{任意} \end{pmatrix}$

7) 在s平面上通过$\pm j\dfrac{k\omega_s}{2}$且平行于实轴的直线（$k = 1,3,5\ldots$）





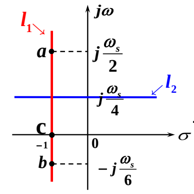
$\begin{pmatrix} \rho\text{任意} \\ \theta = \dfrac{\omega_s}{2} T_s = \pi \end{pmatrix}$

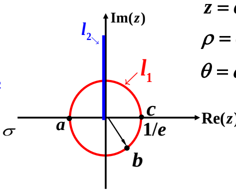
例6: 画出s平面上所示直线l_1, l_2及a, b, c点在z平面上的映像($T_S = 1\text{s}$)

$z = e^{sT} = \rho e^{j\theta}$

$\rho = e^{\sigma T}$

$\theta = \omega T = 2\pi \dfrac{\omega}{\omega_s}$





1) l_1 $\because \sigma = -1$, ω任意 $\therefore$ 影射在z平面上半径为$\rho = \dfrac{1}{e}$的圆

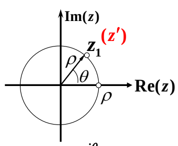
2) l_2 $\because \theta = \dfrac{\omega_s T_s}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, σ任意$\therefore$影射在z平面上的正虚轴

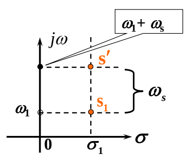
3) a点 $\sigma = -1$, $\theta = \dfrac{\omega_s T_s}{2} = \pi$

4) b点 $\sigma = -1$, $\theta = -\dfrac{\omega_s}{6} T_s = -\dfrac{\pi}{3}$

5) c点 $\sigma = -1$, $\theta = 0$

2. $z \to s$平面的映射关系





$z = e^{sT} = \rho e^{j\theta}$

$\rho = e^{\sigma T}$

$\theta = \omega T = 2\pi \dfrac{\omega}{\omega_s}$

$z_1 = \rho e^{j\theta}$

设 $\theta' = \theta + 2m\pi$

$z' = \rho e^{j\theta'} = \rho e^{j(\theta + 2m\pi)}$

z_1和z'在z平面上对应同一个点（其中$m = 0, \pm1, \pm2 \cdots \pm\infty$）

$$s_1 = \frac{1}{T}\ln z_1 = \frac{1}{T}\ln \rho e^{j\theta} = \frac{1}{T}\ln\rho + j\frac{\theta}{T} = \sigma_1 + j\omega_1 \quad (\text{令}\,\theta = \omega_1 T)$$

$$s' = \frac{1}{T}\ln z' = \frac{1}{T}\ln \rho e^{j\theta'} = \frac{1}{T}\ln\rho + j\frac{(\theta + 2m\pi)}{T} = \sigma_1 + j(\omega_1 + m\omega_s)$$

在s平面上ω每移动ω_S, 对应于z平面是沿圆旋转一周,可见<u>z平面上的一点$z = \rho e^{j\theta}$映射到s平面是无穷多点。</u>

总结:

1．z平面到s平面的映射是多值映射，
即z平面上的一点映射为s平面上的无穷多点。

2．z平面与s平面上的$2\pi/T$宽的条带之间的映射是一一映射

五、离散系统的频率响应特性

连续系统的频率响应 (回顾)

频率响应研究系统在正弦信号 (或虚指数信号)激励下稳态响应$y_{ss}(t)$ 随激励信号$f(t)$的频率变化特性。

$f(t) = e^{j\omega_0 t}$ $\qquad y_{ss}(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$

$f(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ $\qquad y_{ss}(t) = |H(j\omega_0)| A\cos[\omega_0 t + \theta + \varphi(\omega_0)]$

$y_{ss}(t)$是与$f(t)$同频率的虚指数(或正弦)信号

$H(j\omega)$反映了稳态响应$y_{ss}(t)$的幅度和相位随激励信号$f(t)$的频率变化的特性，称$H(j\omega)$为连续系统的频率响应。

$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ 频率响应函数

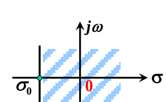
$|H(j\omega)| \sim$ 幅频特性 $\qquad \varphi(\omega) \sim$ 相频特性

求频率响应函数$H(j\omega)$的方法

(a) $H(j\omega) = \mathscr{F}[\,h(t)\,]$

(b) $H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$ $\quad \sigma_0 < 0$

(c) $H(j\omega) = \dfrac{Y_{zs}(j\omega)}{E(j\omega)}$



五、离散系统的频率响应特性

频率响应定义

频率响应：研究因果的、稳定的离散系统在正弦 (或虚指数)序列激励下稳态响应$y_{ss}(k)$随激励信号$f(k)$的频率变化特性。

当 1) $f(k)=A\sin\theta k$ 为正弦序列时 $y_{ss}(k)=?$

2) $f(k)=Ae^{j\theta k}$ 为指数序列时 $y_{ss}(k)=?$

当$f(k)=A\sin\theta k$时，$y_{ss}(k)=A\left|H(e^{j\theta})\right|\sin[\theta k+\varphi(\theta)]$

$H(e^{j\theta})=H(z)\big|_{z=e^{j\theta}}$

当 $f(k)=A\cos(\theta k+\psi)$时

$$y_{ss}(k)=A\left|H(e^{j\theta})\right|\cos[\theta k+\psi+\varphi(\theta)] \qquad (6.4-41)$$

当 $f(k)=Ae^{j\theta k}$时

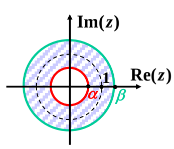
$$y_{ss}(k)=H(e^{j\theta})Ae^{j\theta k}=A\left|H(e^{j\theta})\right|e^{j[\theta k+\varphi(\theta)]} \quad (6.4-40)$$

结论：$H(e^{j\theta})$反映了离散系统在正弦 (或虚指数)序列激励下，稳态响应$y_{ss}(k)$随激励信号$f(k)$的角频率θ变化的规律。故称其为离散系统的频率响应(函数)。

$H(e^{j\theta})=\left|H(e^{j\theta})\right|\angle\varphi(\theta)$ ～ 频率响应函数

$\left|H(e^{j\theta})\right|$ ～ 幅频特性， $\varphi(\theta)$ ～ 相频特性

频率响应函数$H(e^{j\theta})$的计算



$H(e^{j\theta})=H(z)\big|_{z=e^{j\theta}}$

$H(z)$在单位圆上的函数就是频率响应

说明：

由$H(z)$求$H(e^{j\theta})$的条件

$\because$ 当 $z=e^{j\theta}$时，在z平面上对应单位圆

$\therefore$ $H(z)$在单位圆上收敛时,用 $H(e^{j\theta})=H(z)\big|_{z=e^{j\theta}}$

即$H(z)$的收敛域满足 $\alpha<|z|<\beta \quad (\alpha<1,\beta>1)$

$H(e^{j\theta})$的两个性质：

(1) 由于$e^{j\theta}$ 是周期为2π的周期函数，因而频率响应函数$H(e^{j\theta})$必然也是周期为2π的周期函数。

(离散系统频率响应的特性)

因此，画$H(e^{j\theta})$的频率特性曲线时只需画一个周期即可。

(2) $H(e^{j\theta})$是θ的连续函数。

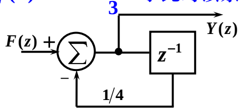
离散信号频谱具有周期性

周期信号的频谱是离散的

例7：某一离散系统的z域模型如图所示

1)求该系统的频率响应$H(e^{j\theta})$

2)若输入为$f(k)=21\cos\frac{\pi}{3}k$ 求此时该系统的稳态响应$y_{ss}(k)$



1) $H(z)=\dfrac{z}{z+0.25} \qquad |z|>0.25$

$$H(e^{j\theta})=H(z)\big|_{z=e^{j\theta}}=\frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta}+0.25}$$

$$=\frac{e^{j\theta}}{(\cos\theta+0.25)+j\sin\theta}$$

2)若输入为$f(k)=21\cos\frac{\pi}{3}k$ 求此时该系统的稳态响应$y_{ss}(k)$

当 $f(k)=A\cos(\theta k+\psi)$时

$$y_{ss}(k)=A\left|H(e^{j\theta})\right|\cos[\theta k+\psi+\varphi(\theta)] \qquad (6.4-41)$$

$$H(e^{j\theta})=\frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta}+0.25}=\frac{e^{j\theta}}{(\cos\theta+0.25)+j\sin\theta}$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{3}})=\frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{\cos\frac{\pi}{3}+0.25+j\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1\angle 60^\circ}{0.75+j\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{21}}\angle 11^\circ$$

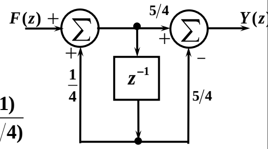
$$y_{ss}(k)=4\sqrt{21}\cos\left(\frac{\pi}{3}k+11^\circ\right)$$

例8: 某一离散系统的z域模型如图所示

1)求该系统的频率响应$H(e^{j\theta})$

2)若输入为$f(k)=2+5\cos(\frac{2\pi}{3}k-90^\circ)$，求此时该系统的稳态响应$y_{ss}(k)$

$$H(z)=\frac{5(z-1)}{4(z-1/4)} \qquad |z|>\frac{1}{4}$$



z 域框图

$\because$ $|z|>1/4$ $\quad |z|=1$在收敛域内

$$\therefore\ H(e^{j\theta})=H(z)\big|_{z=e^{j\theta}}=\frac{5(e^{j\theta}-1)}{4(e^{j\theta}-1/4)}$$

$$H(e^{j0})=0, \quad H(e^{j\frac{2\pi}{3}})=1.89\angle 17^\circ$$

$$y_{ss1}(k)=0\ ,\ y_{ss2}(k)=\ y_{ss}(k)=5\times 1.89\cos(\frac{2\pi}{3}k-90^\circ+17^\circ)$$

当 $f(k)=A\cos(\theta k+\psi)$时

$$y_{ss}(k)=A\left|H(e^{j\theta})\right|\cos[\theta k+\psi+\varphi(\theta)] \qquad (6.4-41)$$

第六章 重点及要求

1) 理解单、双边z变换的定义 、收敛域的概念，并熟练掌握典型信号的z变换对。

2)掌握 z变换的常用性质，灵活应用z变换的性质求序列的ZT。

3)熟练应用部分分式法对求逆z变换。(注意根据收敛域确定原序列）

4) 熟练掌握差分方程的变换(z)域解法。

5)深刻理解系统函数$H(z)$的含意，会由差分方程求$H(z)$，由$H(z)$ 写出系统的差分方程。

6) 能由系统 z 域框图直接写出系统z域的方程。

7) 掌握离散系统频率响应函数$H(e^{j\theta})$

(a)掌握离散系统的频率响应函$H(e^{j\theta})$的含义

(b)会求离散系统的频率响应函数$H(e^{j\theta})$

$$H(e^{j\theta})=H(z)\big|_{z=e^{j\theta}}=\left|H(e^{j\theta})\right|\angle\varphi(\theta)$$

(c)熟练掌握正弦 (或虚指数)序列激励下求稳态响应$y_{ss}(k)$的方法。

当$f(k)=A\sin\theta k\varepsilon(k)$, $H(e^{j\theta})=\left|H(e^{j\theta})\right|\angle\varphi(\theta)$

$$y_{ss}(k)=A\left|H(e^{j\theta})\right|\sin[\theta k+\varphi(\theta)]$$

当 $f(k)=A\cos(\theta k+\psi)$时

$$y_{ss}(k)=A\left|H(e^{j\theta})\right|\cos[\theta k+\psi+\varphi(\theta)]$$

8)理解z平面与s平面的映射关系