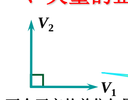
第四章 傅里叶变换和系统的频域分析

	时域分析	频域分析
分析变量	时间 t	频率 ω
系统方程	微分方程	代数方程
研究问题	输入–输出信号的时间响应特性	输入–输出信号的频率响应特性
基本信号(单元)	$\delta(t)$	正弦信号或虚指数信号 $e^{j\omega t}$
信号分解的方法	$f(t)$分解为无穷多个$\delta(t)$函数的线性组合	$f(t)$分解为不同频率的正弦信号或虚指数信号之和(或积分)
系统的零状态响应	$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$	$Y_{zs}(j\omega)=F(j\omega)H(j\omega)$

4.1 信号的正交分解

一、矢量的正交分解



两个正交的单位矢量

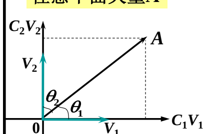
正交矢量的几何意义：相互垂直的矢量

两矢量正交条件：$V_1\cdot V_2=|V_1|\cdot|V_2|\cos 90^0=0$

V_1、V_2构成了二维空间的完备正交矢量集

任意平面矢量A

$A=C_1V_1+C_2V_2$



平面空间的矢量分解

$$|C_1V_1|=|A|\cos\theta_1$$

$$C_1=\frac{|A|\cos\theta_1}{|V_1|}=\frac{|A|\cdot|V_1|\cos\theta_1}{|V_1|\cdot|V_1|}=\frac{A\cdot V_1}{V_1\cdot V_1}$$

$$C_2=\frac{|A|\cos\theta_2}{|V_2|}=\frac{|A|\cdot|V_2|\cos\theta_2}{|V_2|\cdot|V_2|}=\frac{A\cdot V_2}{V_2\cdot V_2}$$

二、正交函数

两函数正交的条件

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)dt=0$$

三、信号$f(t)$在(t_1,t_2)内可分解为无穷多项正交函数之和

$$f(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t),\quad C_j=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_j(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_j^2(t)dt}=\frac{1}{k_j}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_j(t)dt$$

四、常用的完备正交函数集

a) 三角函数集

$$\{\varphi_r(t)\}=\{1,\cos\Omega t,\cos 2\Omega t\cdots\cos m\Omega t,\sin\Omega t,\sin 2\Omega t,\dots,\sin n\Omega t\}$$

b) 复指数函数集

$$\{\varphi_r(t)\}=\{e^{jn\Omega t}\}\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm\infty)$$

4.2 连续周期信号的傅里叶级数

(周期信号$f(t)$的分解)

傅里叶级数

周期信号$f(t)$在区间(t_0,t_0+T)内可以展开成在完备正交函数空间中的无穷级数。

完备的正交函数集为三角函数集时称三角形傅里叶级数。

完备的正交函数集为指数函数集时称指数形傅里叶级数。

周期信号展开成傅里叶级数的条件[狄里赫利条件]

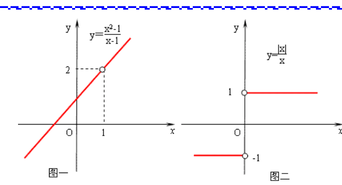
a) $\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|dt<\infty$ 函数在一周期内绝对可积

b) $f(t)$ 在一周期内存在有限个极大值或极小值

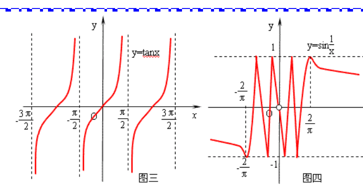
c) $f(t)$ 在一周期内只有有限个第一类间断点

通常遇到的周期信号都满足这些条件

第一类间断点



第二类间断点



一、三角(函数)形式的傅里叶级数

$$\{\varphi_r(t)\}=\{1,\cos\Omega t,\cos 2\Omega t,\ldots,\cos m\Omega t,\sin\Omega t,\sin 2\Omega t,\ldots,\sin n\Omega t\}$$

周期信号$f_T(t)$在区间(t_0, t_0+T)内用完备的三角函数集表示时

$$f(t)={a_0}/{2}+a_1\cos\Omega t+a_2\cos 2\Omega t+\ldots+b_1\sin\Omega t+b_2\sin 2\Omega t+\ldots$$

$$={a_0}/{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)\quad(4.2-2)$$

其中角频率$\Omega=2\pi/T$，T为周期信号$f(t)$的周期，

$a_0/2$、a_n、b_n为傅里叶系数

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\Omega t\,dt\qquad n=0,1,2,\ldots\ (4.2-3)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\Omega t\,dt\qquad n=1,2,\ldots\quad(4.2-4)$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt\quad \text{直流分量}\ \frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt$$

1) 三角函数形式傅里叶级数的两种表示方法

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\Omega t+a_2\cos 2\Omega t+\ldots+b_1\sin\Omega t+b_2\sin 2\Omega t+\ldots$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)\qquad(4.2-2)$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)\qquad(4.2-5)$$

2) 两种表示式系数的关系

$$\left.\begin{aligned}A_0&=a_0\\ A_n&=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \varphi_n&=-\arctan\left({b_n}/{a_n}\right)\end{aligned}\right\}(4.2-6)\qquad \left.\begin{aligned}a_0&=A_0\\ a_n&=A_n\cos\varphi_n\\ b_n&=-A_n\sin\varphi_n\end{aligned}\right\}(4.2-7)$$

3) 傅里叶系数的性质

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\Omega t\,dt\qquad n=0,1,2,\ldots\ (4.2-3)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\Omega t\,dt\qquad n=1,2,\ldots\quad(4.2-4)$$

$$\left.\begin{aligned}A_0&=a_0\\ A_n&=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \varphi_n&=-\arctan\left({b_n}/{a_n}\right)\end{aligned}\right\}(4.2-6)\qquad \left.\begin{aligned}a_0&=A_0\\ a_n&=A_n\cos\varphi_n\\ b_n&=-A_n\sin\varphi_n\end{aligned}\right\}(4.2-7)$$

(1) a_n，b_n，A_n，φ_n 均为n(或$n\Omega$)的函数

(2) a_n，A_n为n(或$n\Omega$)的偶函数 $a_{-n}=a_n$，$A_{-n}=A_n$

(3) b_n，φ_n为n(或$n\Omega$)的奇函数$b_{-n}=-b_n$，$\varphi_{-n}=-\varphi_n$

4) 基波和谐波的概念

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$=\frac{A_0}{2}+A_1\cos(\Omega t+\varphi_1)+A_2\cos(2\Omega t+\varphi_2)+\ldots+A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$\frac{A_0}{2}$ ～直流分量

$A_1\cos(\Omega t+\varphi_1)$ ～基波（一次谐波）

$A_2\cos(2\Omega t+\varphi_2)$ ～二次谐波

$A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$ ～n次谐波

结论：任何满足狄里赫利条件的周期信号都可以分解成直流分量和无穷多项谐波分量之和

$\Omega=2\pi/T$

Ω表示周期信号$f(t)$的角频率

T表示周期信号$f(t)$的周期

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)\qquad(4.2-2)$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)\qquad(4.2-5)\qquad\left(\Omega=\frac{2\pi}{T}\right)$$

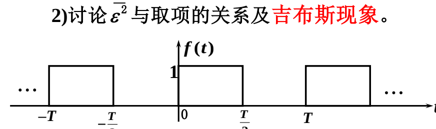
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\Omega t\,dt\qquad n=0,1,2,\ldots\ (4.2-3)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\Omega t\,dt\qquad n=1,2,\ldots\quad(4.2-4)$$

$$\left.\begin{aligned}A_0&=a_0\\ A_n&=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \varphi_n&=-\arctan\left({b_n}/{a_n}\right)\end{aligned}\right\}\quad(4.2-6)$$

例1: 1)把$f(t)$展开成三角形式的傅里叶级数

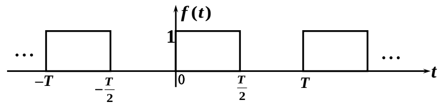
2)讨论$\overline{\varepsilon^2}$与取项的关系及吉布斯现象。



$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\Omega t\,dt\qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\Omega t\,dt\qquad n=1,2,\ldots$$



$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t\right)$$

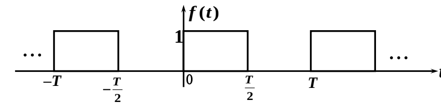
$a_0=1$

$a_n=0$

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi} & (n=1,3,5,\ldots)\\ 0 & (n=2,4,6,\ldots)\end{cases}$$

频率低的分量振幅大，组成方波的主体，频率高的分量振幅小。

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\ldots\right]$$



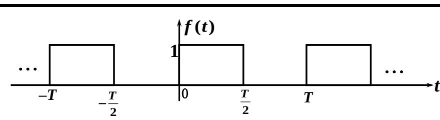
$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\ldots\right]$$

上式的物理意义：

1) $f(t)$中含有直流分量$\frac{1}{2}$、sinΩt、sin3Ωt、sin5Ωt等的正弦分量。

表明在实际应用中，可以由一个周期矩形脉冲信号得到一个等幅振荡的正弦信号。

2) $f(t)$可由直流分量$1/2$、sinΩt、sin3Ωt、sin5Ωt等的正弦分量按一定的幅度关系合成。



$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\ldots\right]$$

2)讨论$\overline{\varepsilon^2}$与取项的关系及吉布斯现象

$$f(t)\approx C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+\ldots+C_j\varphi_j(t)+\ldots+C_n\varphi_n(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)$$

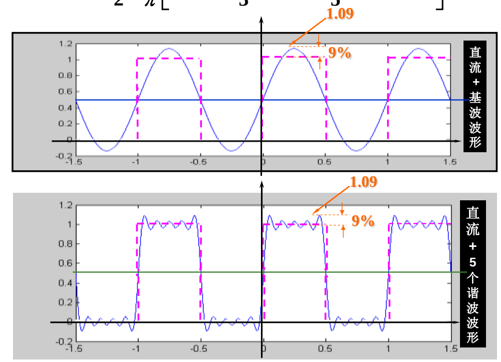
$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t)-\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)]^2dt \quad (4.1-7)$$

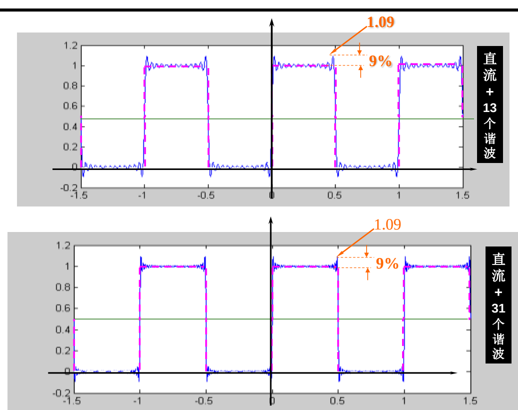
均方误差

$$n\to\infty\text{时 }\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t)-\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(t)]^2dt=0$$

$$f(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+\ldots+C_j\varphi_j(t)+\ldots+C_n\varphi_n(t)=\sum_{j=1}^{\infty}C_j\varphi_j(t)$$

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\ldots\right]$$



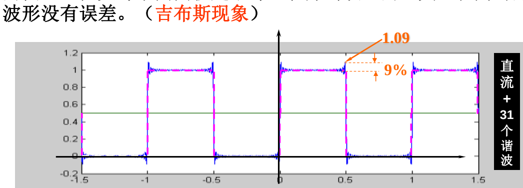


以上分析可看出

1) 取项越多$\overline{\varepsilon^2}$越小, 相加后的波形越逼近 $f(t)$,当$n\to\infty$时$\overline{\varepsilon^2}=0$

2) 频率低的分量振幅大，组成方波的主体，频率高的分量振幅小，主要影响方波的边沿，说明边沿陡峭的波形含高频分量丰富，边沿缓慢的波形含低频分量丰富。

3) 所含谐波项越多合成波形越与方波接近，合成波形的尖峰越靠近间断点，但不明显减小，可以证明$n\to\infty$时在间断点处仍有9%的偏差，但尖峰下面面积趋于零，从方均误差的意义上认为与原波形没有误差。（吉布斯现象）



二、信号的对称性与傅里叶系数的关系

对称性:1) 整个周期对称(即奇函数或偶函数)

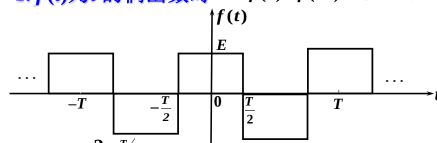
决定展开式中是否含有正弦分量或余弦分量。

2)半个周期对称

决定展开式中是否含有偶次谐波或奇次谐波。

二、信号的对称性与傅里叶系数的关系

1. $f(t)$为t 的偶函数时 $f(t)=f(-t)$ ~ 波形对称于纵坐标



$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)dt \quad \sim \text{被积函数为}t\text{的偶函数}$$

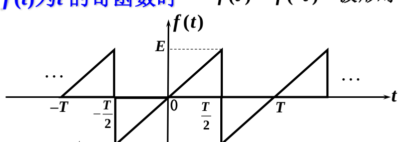
$$=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)dt=0 \quad \sim \text{被积函数为}t\text{的奇函数}$$

$f(t)$为偶函数时展开成傅里叶级数后不含正弦项

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)$$

2. $f(t)$为t 的奇函数时 $f(t)=-f(-t)$ ~ 波形对称于原点



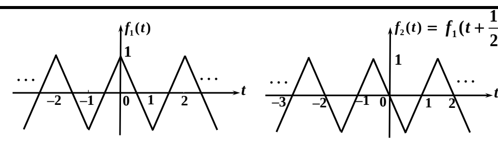
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)dt=0 \quad \sim \text{被积函数为}t\text{的奇函数}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)dt \quad \sim \text{被积函数为}t\text{的偶函数}$$

$$=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)dt$$

$f(t)$为奇函数时展开成傅里叶级数后不含直流项和余弦项

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

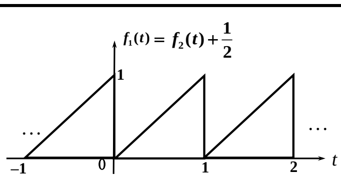


$$f_1(t)=\frac{8}{\pi^2}\left[\cos\pi t+\frac{1}{3^2}\cos3\pi t+\frac{1}{5^2}\cos5\pi t+\ldots\right]$$

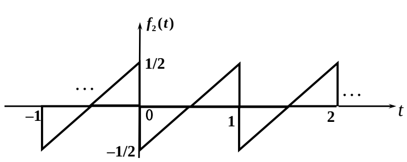
$$f_2(t)=\frac{8}{\pi^2}\left[\cos\pi(t+\frac{1}{2})+\frac{1}{3^2}\cos3\pi(t+\frac{1}{2})+\frac{1}{5^2}\cos5\pi(t+\frac{1}{2})+\ldots\right]$$

$$f_2(t)=\frac{8}{\pi^2}\left[-\sin\pi t+\frac{1}{3^2}\sin3\pi t-\frac{1}{5^2}\sin5\pi t+\ldots\right]$$

说明：$f(t)$是奇函数还是偶函数，不仅与其波形有关，还与坐标原点的选择有关



非奇非偶函数



奇函数

3. 非奇非偶函数$f(t)$分解为偶分量和奇分量之和

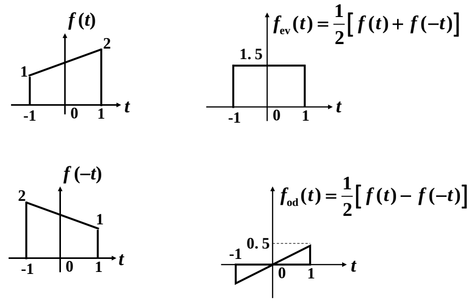
$$f(t)=f_{ev}(t)+f_{od}(t)$$

$$f(-t)=f_{ev}(-t)+f_{od}(-t)=f_{ev}(t)-f_{od}(t)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{ev}(t)&=\frac{f(t)+f(-t)}{2}\\ f_{od}(t)&=\frac{f(t)-f(-t)}{2}\end{aligned}\right\}\quad(4.2-14)$$

$$f(t)=\underbrace{\frac{[f(t)+f(-t)]}{2}}_{\text{偶分量}f_{ev}(t)}+\underbrace{\frac{[f(t)-f(-t)]}{2}}_{\text{奇分量}f_{od}(t)}$$

例2：求 $f(t)$ 的偶分量和奇分量。



$$f_{ev}(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$$

$$f_{od}(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$$

任何一个周期信号 $f(t)$ 的 a_n 由偶分量决定，b_n 由奇分量决定。

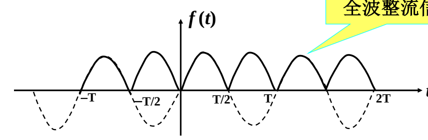
4. $f(t)$ 为半波对称 (偶谐) 函数时

当 $f(t)=f(t\pm T/2)$ 时称 $f(t)$ 为半波对称函数

特点：(1) $f(t)$ 沿时间轴平移半周后与原波形完全重合

(2) $f(t)$ 的展开式中不含奇次谐波。

全波整流信号

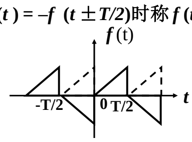


$$a_1=a_3=\ldots=a_{2n+1}=b_1=b_3=\ldots=b_{2n+1}=0$$

$$f(t)=a_0+a_2\cos(2\Omega t)+a_4\cos(4\Omega t)+\ldots+b_2\sin(2\Omega t)+b_4\sin(4\Omega t)+\ldots$$

5. $f(t)$ 为半波镜象对称(奇谐)函数时

满足 $f(t)=-f(t\pm T/2)$ 时称 $f(t)$ 为半波镜象对称函数



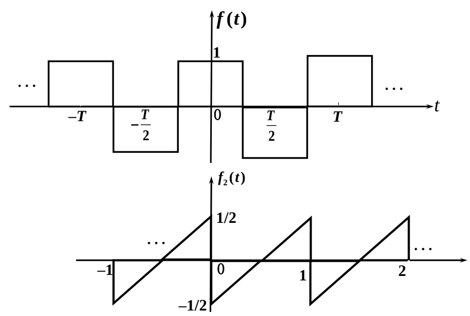
特点：(1) $f(t)$ 沿时间轴平移半周后与原波形以横轴镜象对称

(2) $f(t)$ 的展开式中不含偶次谐波

$$a_0=a_2=\ldots=a_{2n}=b_2=b_4=\ldots=b_{2n}=0$$

$$f(t)=a_1\cos(\Omega t)+a_3\cos(3\Omega t)+\ldots+b_1\sin(\Omega t)+b_3\sin(3\Omega t)+\ldots$$

$f(t)$ 的波形满足某种对称关系时，在傅里叶级数中某些项将不出现，利用这些特性可简化傅里叶系数的计算。



三、指数形式的傅里叶级数

周期信号 $f(t)$ 在区间 (t_0, t_0+T) 内用完备的复指数函数集表示时

$$\{\varphi_r(t)\}=\{e^{jn\Omega t}\}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm\infty)$$

$$f(t)=\ldots+F_{-2}e^{-j2\Omega t}+F_{-1}e^{-j\Omega t}+F_0+F_1e^{j\Omega t}+F_2e^{j2\Omega t}+\ldots$$

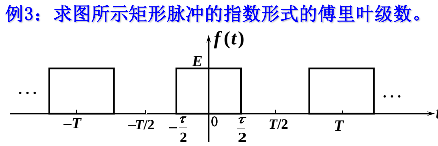
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}\quad (4.2-18)$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt\quad (4.2-20)$$

指数形式的傅里叶系数

$$c_j=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_j^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_j(t)\varphi_j^*(t)dt}$$

例3：求图所示矩形脉冲的指数形式的傅里叶级数。

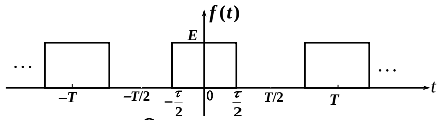


$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt=\frac{E}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-jn\Omega t}dt=\frac{E}{T}\left(\frac{1}{-jn\Omega}e^{-jn\Omega t}\right)\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$=\frac{2E}{T}\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{n\Omega}=\frac{E\tau}{T}\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}=\frac{E\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt\quad (4.2-20)$$

例3：求图所示矩形脉冲的指数形式的傅里叶级数。



$$F_n=\frac{E\tau}{T}\frac{\sin(\frac{n\Omega\tau}{2})}{\frac{n\Omega\tau}{2}}=\frac{E\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)e^{jn\Omega t}$$

说明：指数形式的傅里叶级数中出现了负频率，负频率没有物理意义，出现负频率是因为采用复指数函数集表示信号的结果。

四、指数形式与三角形式的傅里叶系数之间的关系

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)\quad(4.2-2)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)\quad(4.2-5)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}\quad(4.2-18)$$

指数形式的傅里叶系数为复数

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\Omega t\,dt\qquad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\Omega t\,dt\qquad \varphi_n=-\arctan\left(b_n/a_n\right)$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt\qquad a_n=A_n\cos\varphi_n,\quad b_n=-A_n\sin\varphi_n$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}\left[e^{j(n\Omega t+\varphi_n)}+e^{-j(n\Omega t+\varphi_n)}\right]$$

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{j(n\Omega t+\varphi_n)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-j(n\Omega t+\varphi_n)}$$

又$A_{-n}=A_n\quad \varphi_{-n}=-\varphi_n$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{j(n\Omega t+\varphi_n)}+\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}A_{-n}e^{-j\varphi_{-n}}e^{jn\Omega t}$$

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{j(n\Omega t+\varphi_n)}+\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}A_ne^{j\varphi_n}e^{jn\Omega t}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_ne^{j\varphi_n}e^{jn\Omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}\qquad \therefore F_n=\frac{1}{2}A_ne^{j\varphi_n}$$

$$F_n=\frac{1}{2}A_ne^{j\varphi_n}$$

$$=\frac{1}{2}(A_n\cos\varphi_n+jA_n\sin\varphi_n)$$

$$=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)\quad(4.2-19)$$

$$F_n=\frac{1}{2}A_ne^{j\varphi_n}=|F_n|e^{j\varphi_n}$$

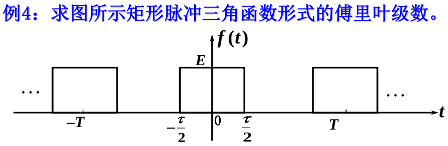
$$|F_n|=\frac{1}{2}A_n=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=|F_{-n}|$$

$$\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

$$F_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)=|F_{-n}|e^{-j\varphi_n}\qquad a_n=F_n+F_{-n},\quad b_n=j(F_n-F_{-n})$$

$|F_n|$为n的偶函数,φ_n为n的奇函数

例4：求图所示矩形脉冲三角函数形式的傅里叶级数。



$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)e^{jn\Omega t}$$

$$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}=\frac{E\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\qquad a_n=F_n+F_{-n},\quad b_n=j(F_n-F_{-n})$$

$$f(t)=\frac{E\tau}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2E\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\cos(n\Omega t)$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)\quad(4.2-2)$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)\quad(4.2-5)\qquad\left(\Omega=\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}\quad(4.2-18)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\Omega t dt\quad n=0,1,2,\ldots\ (4.2-3)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\Omega t\,dt\quad n=1,2,\ldots\quad(4.2-4)$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots\quad(4.2-20)$$

$$\left.\begin{aligned}A_0&=a_0\\A_n&=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\\varphi_n&=-\arctan\left(b_n/a_n\right)\end{aligned}\right\}\ (4.2-6)\qquad F_n=\frac{1}{2}A_ne^{j\varphi_n}\ (4.2-19)$$

4.3 连续周期信号的频谱

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

A_n, $|F_n|$, φ_n 都是的nΩ的函数

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\Omega t\,dt \qquad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\Omega t\,dt \qquad \varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

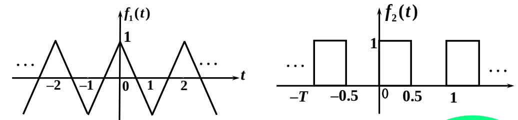
$$F_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\Omega t}dt = |F_n|e^{j\varphi_n}=\frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n}$$

A_n(或 $|F_n|$) —反映各谐波的幅度随频率变化的特性。

φ_n — 反映各谐波的相位随频率变化的特性 。

一、周期信号的频谱

1. 频谱的概念 （频谱由傅里叶系数和角度决定）



频谱概念演示

$$f_1(t)=\frac{8}{\pi^2}\left[\cos\Omega t+\frac{1}{3^2}\cos 3\Omega t+\frac{1}{5^2}\cos 5\Omega t+\ldots\right]$$

$$f_2(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\ldots+\frac{1}{(2n+1)}\sin(2n+1)\Omega t\right]$$

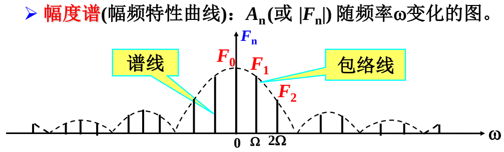
不同的周期信号

在时域中区别：波形不同；

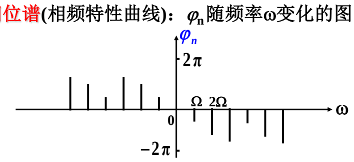
在频域中的区别：基波频率Ω、各谐波分量的幅度和相位不同

频谱图:把周期信号不同频率分量(即各次谐波)的幅度A_n(或 $|F_n|$)和相位φ_n随频率变化的特性直观地用图形表示。

➢ 幅度谱(幅频特性曲线)：A_n(或 $|F_n|$) 随频率ω变化的图。



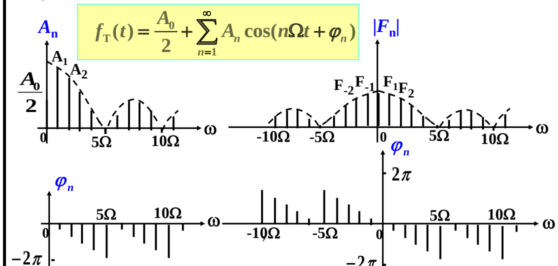
➢ 相位谱(相频特性曲线)：φ_n随频率ω变化的图 。



2. 单边频谱和双边频谱

1) 单边频谱 （信号分解为三角形级数时用单边频谱表示）

$$f_T(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$



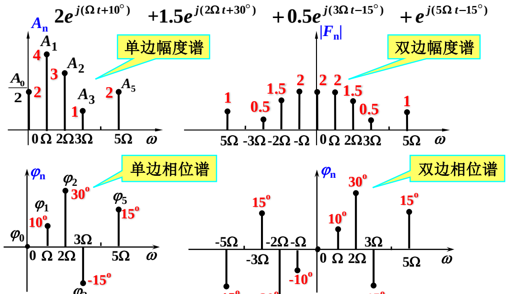
2) 双边频谱 （信号分解为指数形级数时用双边频谱表示）

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

例1：某一$f_T(t)$的傅里叶级数，试画出该信号的频谱图。

$$f_T(t)=2+4\cos(\Omega t+10^\circ)+3\cos(2\Omega t+30^\circ)+\cos(3\Omega t-15^\circ)+2\cos(5\Omega t+15^\circ)$$

$$f_T(t)=2+2e^{-j(\Omega t+10^\circ)}+1.5e^{-j(2\Omega t+30^\circ)}+0.5e^{-j(3\Omega t-15^\circ)}+e^{-j(5\Omega t-15^\circ)}+2e^{j(\Omega t+10^\circ)}+1.5e^{j(2\Omega t+30^\circ)}+0.5e^{j(3\Omega t-15^\circ)}+e^{j(5\Omega t-15^\circ)}$$



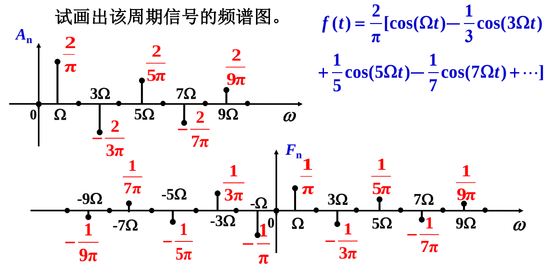
说明:当指数形式的傅里叶系数为实数时幅度谱和相位谱可用一个图来表示。（即$|F_n|$和φ_n画在一起）

例2：已知某一周期$f(t)$的傅里叶级数展开式为

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\left[\cos(\Omega t)+\frac{1}{3}\cos(3\Omega t+\pi)+\frac{1}{5}\cos(5\Omega t)+\frac{1}{7}\cos(7\Omega t+\pi)+\ldots\right]$$

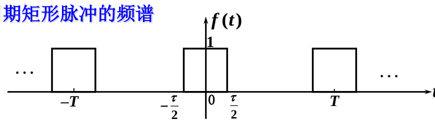
试画出该周期信号的频谱图。

$$f(t)=\frac{2}{\pi}[\cos(\Omega t)-\frac{1}{3}\cos(3\Omega t)+\frac{1}{5}\cos(5\Omega t)-\frac{1}{7}\cos(7\Omega t)+\cdots]$$



二、周期信号频谱的特点

1. 周期矩形脉冲的频谱



指数形式的傅里叶系数

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\Omega t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-jn\Omega t}dt=\frac{2}{T}\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{n\Omega}$$

$$=\frac{\tau}{T}\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}=\frac{\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

$$F_n=\frac{\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\qquad(4.3-6)$$

F_n随$n\Omega$按抽样函数规律变化

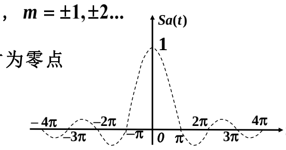
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\Omega t}=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)e^{jn\Omega t}\qquad(4.3-7)$$

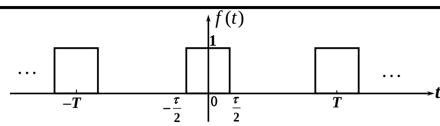
$Sa(\frac{n\Omega\tau}{2})$ 过零点频率＝？

$\because Sa(t)$ 当$t=\pm m\pi$时为零点，$m=\pm1,\pm2\ldots$

$\therefore Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ 应有 $\frac{\omega\tau}{2}=\pm m\pi$时为零点

即 $\omega=\frac{2m\pi}{\tau}$时为零点



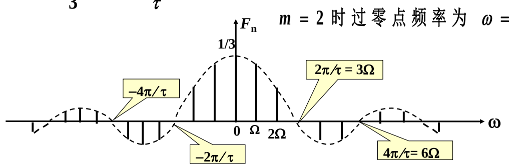


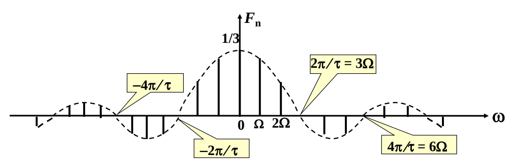
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)e^{jn\Omega t}$$

当F_n为实数时可把$|F_n|$和φ_n画在一起

若$\tau=\frac{T}{3}$，$\omega=\frac{2m\pi}{\tau}=m3\Omega$ 则$m=1$时过零点频率为 $\omega=3\Omega$

$m=2$时过零点频率为 $\omega=6\Omega$





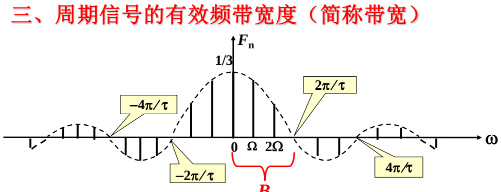
2. 周期信号频谱的特点：

(1)离散性：谱线只出现在离散频率点上

(2)谐波性：周期信号$f(t)$的展开信号所含频率均为 $f(t)$的角频率Ω的整数倍

(3)收敛性：谐波幅度随n的增大而减小，当$n\to\infty$时A_n(或F_n)$\to0$

三、周期信号的有效频带宽度（简称带宽）



1. 有效频带宽度的定义

有效频带宽度 $B_\omega=2\pi/\tau$

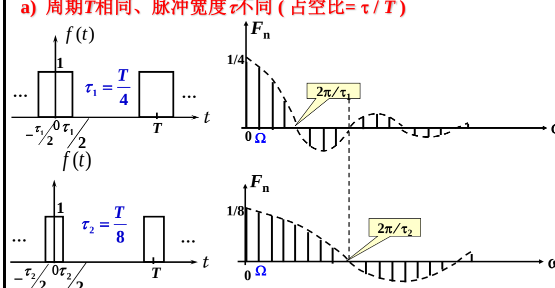
或 $B_f=1/\tau$（4.3-8）

结论：周期信号的频带宽度B_ω与信号的周期T无关，只取决于脉冲宽度τ的大小（与τ成反比）。

2. 周期信号的频带宽度与脉冲宽度τ、信号周期T的关系

---

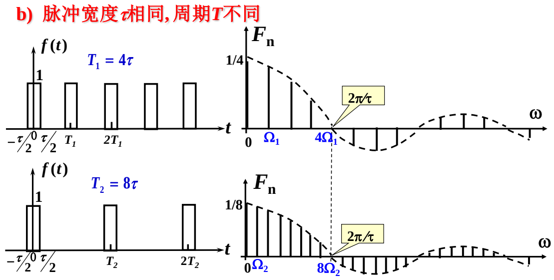
a) 周期T相同、脉冲宽度τ不同 (占空比= τ/T)



T相同Ω的谱线间隔相同；τ越窄频谱包络线第一个零点频率越高，信号的带宽越宽，F_n幅度减小。

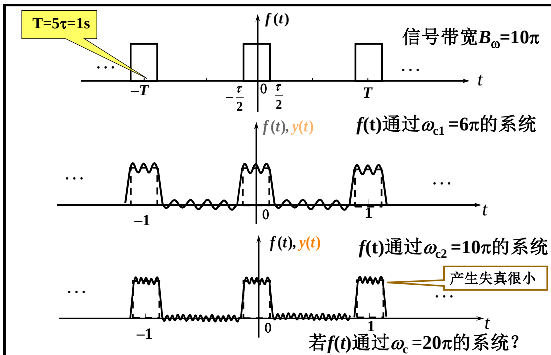
$$f(t)=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)e^{jn\Omega t}\quad(n\Omega=\frac{2m\pi}{\tau}\text{时过零点})$$

b) 脉冲宽度τ相同,周期T不同



$$f(t)=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)e^{jn\Omega t}\quad (n\Omega=\frac{2m\pi}{\tau}\text{时过零点})$$

τ相同，频谱包络线第一个过零点频率相同，信号的带宽相同；T变大时Ω变小，谱线间隔变密，F_n幅度减小。



说明：在通信系统中系统的带宽ω_c应与信号的带宽B_ω相匹配。不能使信号产生大失真,也不能浪费资源。

四、周期信号的功率谱

（周期信号为功率信号）

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

当$f(t)$为电压或电流时其归一化的平均功率可表示为

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,dt\quad(3-59)$$

周期信号在单位电阻上的平均功率

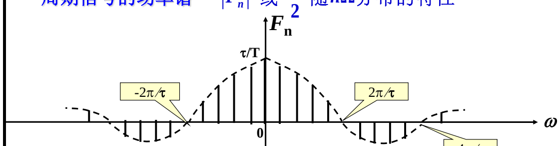
$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[A_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)\right]^2dt$$

$$P=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{2}=|F_0|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|F_n|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2\quad(4.3-12)$$

$$|F_n|=\frac{1}{2}A_n$$

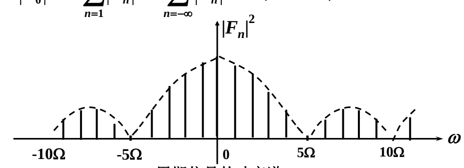
功率信号的帕斯瓦尔(Parseval)恒等式

周期信号的功率谱　$|F_n|^2$或$\frac{A_n^2}{2}$随$n\Omega$分布的特性



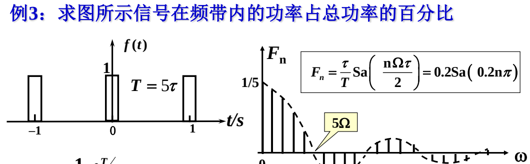
周期信号的频谱

$$P=|F_0|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|F_n|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2\quad(4.3-12)$$



周期信号的功率谱

例3：求图所示信号在频带内的功率占总功率的百分比



$$F_n=\frac{\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)=0.2Sa(0.2n\pi)$$

$$P_{f(t)}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)^2dt=0.2\text{W}$$

$$P=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$$

$$P_{B_\omega}=\sum_{n=-5}^{5}|F_n|^2\approx0.1806\text{W}$$

$$\frac{P_{B_\omega}}{P_{f(t)}}=\frac{0.1806}{0.2}\approx90.3\%$$

有效频带内的各分量的平均功率之和占信号总功率90%。

一、周期信号频谱的三个特点是什么?

(1)离散性：谱线只出现在离散频率点上

(2)谐波性：周期信号$f_T(t)$所含频率为其基波频率Ω的整数倍

(3)收敛性：谐波幅度随n的增大而减小,当$n\to\infty$时A_n(或F_n)$\to0$

二、周期信号的频谱由什么决定?

周期信号的频谱由傅里叶系数决定

三、周期信号的单边频谱和双边频谱分别由什么决定?

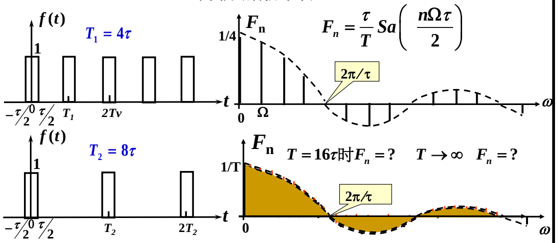
$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)\to\text{单边频谱}\begin{cases}\text{幅度谱}A_n\\\text{相位谱}\varphi_n\end{cases}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}\to\text{双边频谱}\begin{cases}\text{幅度谱}|F_n|\\\text{相位谱}\varphi_n\end{cases}$$

4.4 连续非周期信号的频谱

非周期信号的概念

若周期脉冲信号的T足够长，在后一个脉冲到来之前,前一个脉冲的作用早已消失，这样的信号可作为非周期信号来处理.



当$T\to\infty$时 $\Omega\to 0$，此时周期信号的离散谱将变成连续谱，同时$|F_n|\to 0$，不过这些无穷小量之间仍保持一定的比例关系，为描述非周期信号的频谱特性，引入了频谱密度的概念

一、从傅里叶级数到傅里叶变换

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}\quad 其中F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$F_n\cdot T=\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

令 $F(j\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}F_n\cdot T$

$\because T\to\infty,\Omega\to 0\quad \therefore$ 离散频率$n\Omega\xrightarrow{变成}$连续频率ω

$$F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}F_n\cdot T=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\quad (4.4-4)\leftarrow 傅里叶正变换$$

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot T\cdot e^{jn\Omega t}\cdot\frac{1}{T}$$

$\because T\to\infty,\Omega\to 0\quad \therefore$ 谱线间隔$\Omega\to d\omega$,

而$\dfrac{1}{T}=\dfrac{\Omega}{2\pi}\to\dfrac{d\omega}{2\pi}$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\to\int_{-\infty}^{\infty}$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\quad (4.4-5)\leftarrow 傅里叶反变换$$

傅里叶变换的表示方法;

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\quad (4.4-4)\leftarrow 傅里叶正变换$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\quad (4.4-5)\leftarrow 傅里叶反变换$$

$F(j\omega)$又称为信号$f(t)$的**频谱密度函数**（或频谱函数）

信号$f(t)$又称为它的频谱密度函数$F(j\omega)$的**原函数**

简写为 $\left.\begin{aligned}F(j\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]\\ f(t)&=\mathscr{F}^{-1}[F(j\omega)]\end{aligned}\right\}\quad f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$

傅里叶变换存在的充分条件（注：并非必要条件）

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ 绝对可积

二、频谱密度函数（即傅里叶正变换）

1. 频谱密度函数的特点

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=|F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=R(\omega)+jX(\omega)\quad\leftarrow 复函数$$

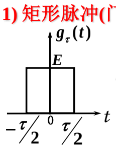
$$\left.\begin{aligned}R(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=R(-\omega)\leftarrow\omega偶函数\\ X(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt=-X(-\omega)\leftarrow\omega奇函数\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}|F(\omega)|&=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}\leftarrow\omega偶函数\\ \varphi(\omega)&=\arctan\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\quad\leftarrow\omega奇函数\end{aligned}\right\}$$

2. 一些典型信号的频谱密度函数$F(j\omega)$[即傅里叶变换]

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\quad (4.4-4)\leftarrow 傅里叶正变换$$

1) 矩形脉冲(门函数)的傅里叶变换



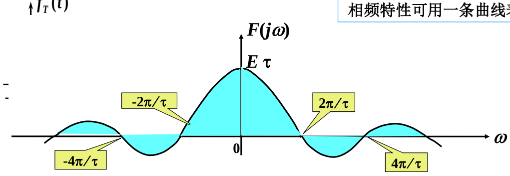
$$g_\tau(t)=\begin{cases}E & |t|<\tau/2\\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$$

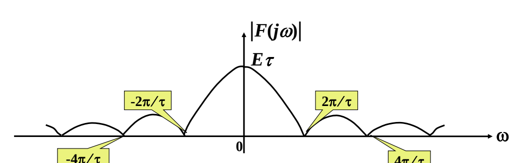
$g_\tau(t)\leftrightarrow F(j\omega)$

$g_\tau(t)\leftrightarrow E\tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$

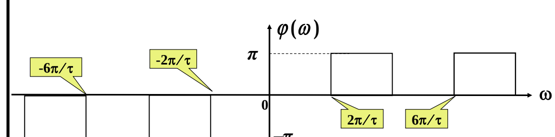
$F(j\omega)$为实函数,幅频特性和相频特性可用一条曲线表示

$f_T(t)$





幅频特性



相频特性

矩形脉冲（门函数）频谱的特点：

- $|F(j\omega)|$ 、$\varphi(\omega)$都是ω的连续函数，即非周期信号的频谱是连续谱，其形状与周期矩形脉冲信号离散频谱的包络相似。
- 矩形脉冲信号在时域中持续的时间有限（为时限信号），但在频域中频谱延续到无限。
- 通常将零频到第一个零点这一段的频率范围称为矩形脉冲信号（或门函数）的有效频带宽度。

$$B_\omega = 2\pi/\tau \qquad 或 \quad B_f = 1/\tau$$

- 矩形脉冲信号在时域中持续的时间越短，信号的带宽越宽。

2) 单边指数信号的傅里叶变换

$$f(t) = e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \qquad \alpha > 0$$

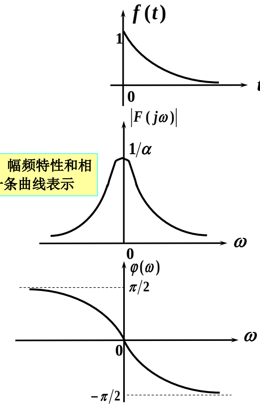
$$F(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$F(j\omega)$为复函数，幅频特性和相频特性不可用一条曲线表示

$$\varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\alpha}$$

$$\therefore e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} \qquad \alpha > 0$$



3) 偶双边指数信号的傅里叶变换

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} = \begin{cases} e^{\alpha t} & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

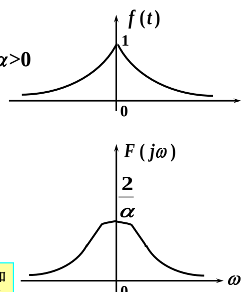
$$F(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = R(\omega)$$

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = 0$$

$F(j\omega)$为实函数，幅频特性和相频特性可用一条曲线表示

$$\therefore e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \qquad \alpha > 0$$



4) 奇双边指数信号的傅里叶变换

$$f(t) = \begin{cases} -e^{\alpha t} & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

$$F(j\omega) = -j\frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = jX(\omega)$$

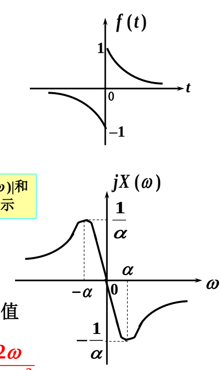
$$|F(j\omega)| = |X(\omega)|$$

$F(j\omega)$为虚奇函数$|F(j\omega)|$和$\varphi(\omega)$可用一条曲线表示

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases}$$

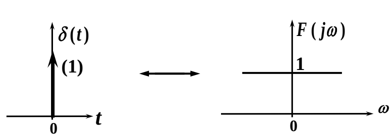
令 $\dfrac{d|F(j\omega)|}{d\omega} = 0$ 可得$\omega = \alpha$ 时取极大值

$$\therefore f(t) = \begin{cases} -e^{\alpha t} & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \leftrightarrow \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$



三、奇异信号(函数)的傅里叶变换

1. 冲激函数$\delta(t)$的频谱 (即傅里叶变换）



$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\therefore \delta(t) \leftrightarrow 1$$

冲激函数$\delta(t)$的频谱是常数1，其频谱密度在$-\infty<\omega<\infty$区间处处相等，常称其为“均匀谱”或“白色谱”。

$\delta^{(n)}(t)$ 的傅里叶变换

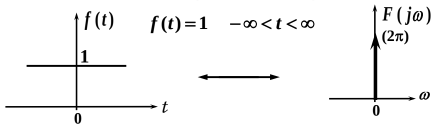
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\varphi(t)dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

$$\mathscr{F}[\delta'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)e^{-j\omega t}dt = (-1)(e^{-j\omega t})^{(1)}\Big|_{t=0} = (-1)(-j\omega) = j\omega$$

$$\mathscr{F}[\delta^{(n)}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)e^{-j\omega t}dt = (j\omega)^n$$

2. 单位直流信号的频谱(即傅里叶变换)

$f(t)=1 \quad -\infty<t<\infty$



$\because$ 不满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ $\therefore$ 不能用定义式求其频谱

观察逆变换公式 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

当$F(j\omega)=\delta(\omega)$时 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\dfrac{1}{2\pi}$

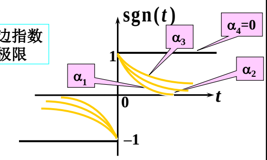
$F(j\omega)=\delta(\omega)=\mathscr{F}[1/2\pi] \quad 1/2\pi \leftrightarrow \delta(\omega)$

$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega) \qquad \therefore 1\leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$

3. 符号函数的傅里叶变换

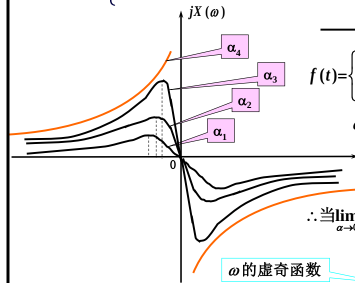
$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 0 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

借助奇双边指数函数，求极限



$$f(t)=\begin{cases}-e^{\alpha t} & t<0\\ e^{-\alpha t} & t>0\end{cases} \leftrightarrow -j\frac{2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$\alpha\to 0 \quad f(t)\to \mathrm{sgn}(t)$

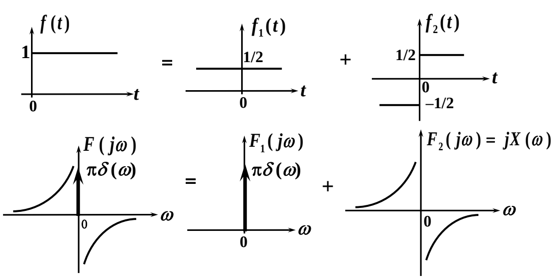


$$\therefore 当\lim_{\alpha\to 0}\left[-j\frac{2\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right]=\begin{cases}\dfrac{2}{j\omega} & \omega\neq 0\\ 0 & \omega=0\end{cases}$$

$\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow \dfrac{2}{j\omega}$

4. 阶跃信号(函数)的频谱(傅里叶变换)

$f(t)=\varepsilon(t) \qquad 1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \qquad \mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow 2/j\omega$



$\mathscr{F}[\varepsilon(t)]=\mathscr{F}[1/2]+\mathscr{F}[1/2\mathrm{sgn}(t)]=\pi\delta(\omega)+(1/j\omega)$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|e^{j[\omega t+\varphi(\omega)]}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]d\omega$$

$$+j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|\sin[\omega t+\varphi(\omega)]d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|F(j\omega)|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]d\omega$$

非周期信号也是由无穷多个不同频率的正弦分量组成，只不过其基波频率趋无穷小量，包含了从零到无穷大的所有频率分量，因此频谱密度函数的幅度谱和相位谱都是连续谱，且各频率分量的振幅是无穷小量，因此只能用频谱密度表示。

要求：掌握典型信号的频谱（查附录B）

1) $g_\tau(t)\leftrightarrow \tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$

2) $e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha+j\omega} \quad \alpha>0$

3) $e^{-\alpha|t|}\leftrightarrow \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\ (\alpha>0)$

4) $\begin{cases}-e^{\alpha t} & t<0\\ e^{-\alpha t} & t>0\end{cases}\leftrightarrow \dfrac{-j2\omega}{\alpha^2+\omega^2}(\alpha>0)$

5) $\delta(t)\leftrightarrow 1$

6) $1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

7) $\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow \dfrac{2}{j\omega}$

8) $\varepsilon(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$

说明：当$F(j\omega)$为ω的实函数或虚函数时，$|F(j\omega)|$和$\varphi(\omega)$可用一条曲线表示。

4.5 傅里叶变换的性质

$g_\tau(t)\leftrightarrow \tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$

信号的两种描述方法
1) 时域描述
2) 频域描述（即频谱密度）

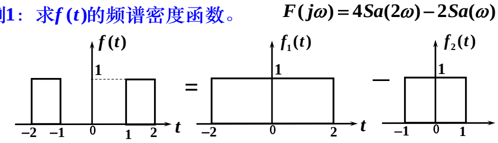
本节研究在某一域中对信号进行某种运算时在另一域中所引起的效应。

1. 线性性质（齐次性和可加性）（常用）

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(j\omega)+a_2F_2(j\omega) \quad (4.5-3)$

例1：求$f(t)$的频谱密度函数。 $F(j\omega)=4Sa(2\omega)-2Sa(\omega)$



2.奇偶性

无论f(t)是实函数还是复函数，下面等式均成立

时域反折
频域也反折

设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(j\omega)$

则 $\mathscr{F}[f(-t)]=F(-j\omega)=F^*(j\omega)$

$\mathscr{F}[f^*(t)]=F^*(-j\omega)$

$\mathscr{F}[f^*(-t)]=F^*(j\omega)$

时域共轭
频域共轭
并且反折

1) 当 $f(t)$ 为 t 的实函数时频谱特性

$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\ =|F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}\ =R(\omega)+jX(\omega)\ \leftarrow$复数

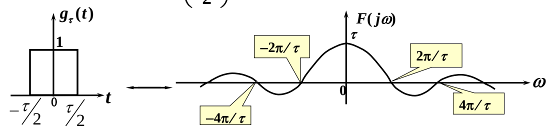
$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,d\,t=\ R(-\omega)\qquad |F(\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}\leftarrow\omega$偶函数

$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,d\,t=\ -X(-\omega)\qquad \varphi(\omega)=\arctan\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)}\ \leftarrow\omega$奇函数

a) 当 $f(t)$ 为 t 的实偶函数时

$F(j\omega)=R(\omega)=2\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t dt=|F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}\sim\omega$的实偶函数

例如 $g_\tau(t)\leftrightarrow\tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)\qquad |F(j\omega)|=|R(\omega)|,\quad \varphi(\omega)=0$或$\pi$

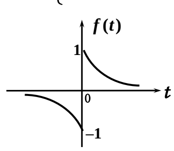


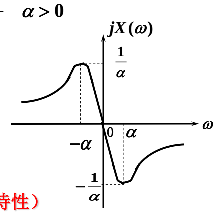
b)当 f(t)为t 的实奇函数时

$F(j\omega)=jX(\omega)=-j2\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega\,tdt=|F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}\sim\omega$的虚奇函数

$|F(j\omega)|=|X(\omega)|,\quad \varphi(\omega)=\dfrac{\pi}{2}$（或$-\dfrac{\pi}{2}$）

例如 $\begin{cases}-e^{\alpha t} & t<0\\ e^{-\alpha t} & t>0\end{cases}\ \leftrightarrow\ -j\dfrac{2\omega}{\alpha^2+\omega^2}\qquad \alpha>0$





c) $\mathscr{F}[f(t)]$ 与 $\mathscr{F}[f(-t)]$关系(即反折特性)

$\mathscr{F}[f(-t)]=F(-j\omega)=F^*(j\omega)$

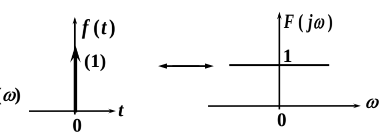
3. 对称性(互易性)（常用）

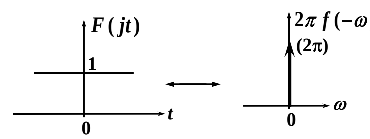
若 $f(t)\ \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $F(jt)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)\qquad (4.5-13)$

例如 δ(t)↔1

1↔2πδ(-ω) =2πδ(ω)





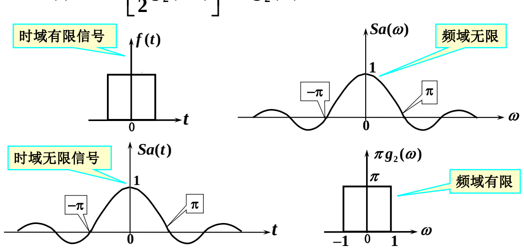
例2：求 $\mathscr{F}[Sa(t)]$

若 $f(t)\ \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $F(jt)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)\qquad (4.5-13)$

$\dfrac{1}{2}g_2(t)\leftrightarrow Sa(\omega)$

$Sa(t)\leftrightarrow 2\pi\left[\dfrac{1}{2}g_2(-\omega)\right]=\pi g_2(\omega)$



1) $Eg_\tau(t)\leftrightarrow E\tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$　2) $Sa(\omega_0 t)\leftrightarrow\dfrac{\pi}{\omega_0}g_{2\omega_0}(\omega)$

例3：求 $\mathscr{F}[t]$, $\mathscr{F}[1/t]$

若 $f(t)\ \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $F(jt)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)\qquad (4.5-13)$

解：1) $\because\delta'(t)\leftrightarrow j\omega$

$\therefore jt\leftrightarrow 2\pi\delta'(-\omega)=-2\pi\delta'(\omega)$

$\therefore t\leftrightarrow j2\pi\delta'(\omega)$

2) $\because \operatorname{sgn}t\leftrightarrow\dfrac{2}{j\omega}$

$\therefore\dfrac{2}{jt}\leftrightarrow 2\pi\operatorname{sgn}(-\omega)=-2\pi\operatorname{sgn}(\omega)$

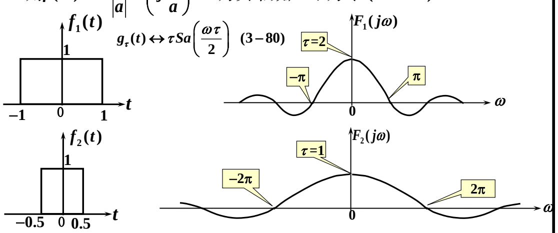
$\therefore\dfrac{1}{t}\leftrightarrow -j\pi\operatorname{sgn}(\omega)$

4. 尺度变换性质(常用)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$ 　a为实常数,且不为零 (4.5−17)

$g_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ (3−80)



当α>1时 时域压缩,频域扩展并幅度变小，频带变宽(如录音机快放)

当0 < α <1时 时域扩展,频域压缩并幅度变大，频带变窄(如录音机慢放)

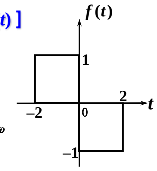
当 α = −1时 $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$

5. 时移性质（常用 ）

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $f(t \pm t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$ 　t_0为常数 (4.5−18)

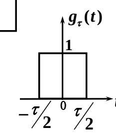
例4：$f(t)$ 如图所示，求$\mathscr{F}[f(t)]$



$f(t) = g_2(t+1) - g_2(t-1)$

$F(j\omega) = G(j\omega)e^{j\omega} - G(j\omega)e^{-j\omega}$

$= \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})\Big|_{\tau=2}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = j4\frac{\sin^2\omega}{\omega}$



$F(j\omega) = \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

6. 频(谱搬)移性质(常用)

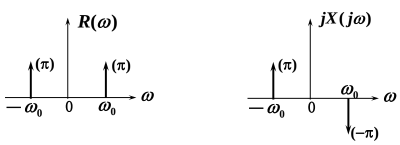
若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega \mp \omega_0)]$ 　ω_0为常数 (4.5−23)

例5：求 $f_1(t) = \cos\omega_0 t$，$f_2(t) = \sin\omega_0 t$的频谱密度函数。

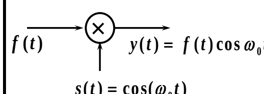
$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] = R(\omega)$

$\sin\omega_0 t \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)] = jX(\omega)$



频移性质的应用[调制特性(原理)]

该特性在通信系统中得到广泛的应用，如调幅、同步解调、混频等过程都是在频谱搬移原理上实现。



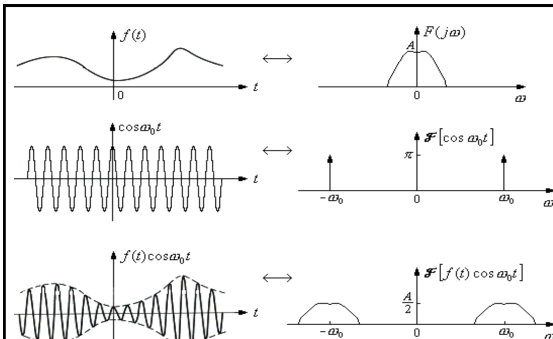
$f(t)$：调制信号（含信息）

$s(t)$：载波信号(单一的高频频率)

$y(t)$：已调信号

$f(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F[j(\omega+\omega_0)] + \frac{1}{2}F[j(\omega-\omega_0)]$

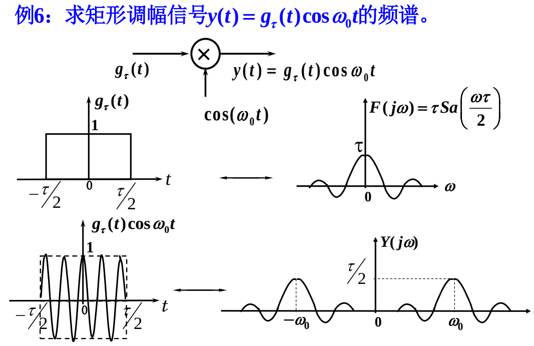
可见已调信号$y(t)$的频谱是把$f(t)$的频谱$F(j\omega)$一分为二，分别向左和右搬移ω_0



调制特性及已调信号的频谱

频分复用（FDM）传输信号的一种方式

例6：求矩形调幅信号$y(t) = g_\tau(t)\cos\omega_0 t$的频谱。



$y(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = \frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right) + \frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\right)$

几种运算同时出现的情况：

$$f(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} e^{-j\frac{\omega}{a}b} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad (4.5-19)$$

例7：$f(t)=e^{-jt}\delta(t-2)$，求其频谱密度函数。

解：$\delta(t)\leftrightarrow 1,\quad \delta(t-2)\leftrightarrow e^{-j2\omega}$

$$e^{-jt}\delta(t-2)\leftrightarrow e^{-j2(\omega+1)}$$

例8: $f(t)=\delta(2t-3)$，求其频谱密度函数

解：$\delta(t)\leftrightarrow 1,\quad \delta(t-3)\leftrightarrow e^{-j3\omega}$

$$\delta(2t-3)\leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-j\frac{3\omega}{2}}$$

例9: 已知$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$，求 $e^{-j4t}f(2-3t)$其频谱密度函数。

时移

解：$f(2+t)\leftrightarrow F(j\omega)e^{j2\omega}$

尺度变换

$f(2+3t)\leftrightarrow \frac{1}{3}F(j\frac{\omega}{3})e^{j\frac{2\omega}{3}}$

反折

$f(2-3t)\leftrightarrow \frac{1}{3}F(j\frac{-\omega}{3})e^{-j\frac{2\omega}{3}}$

频移

$e^{-j4t}f(2-3t)\leftrightarrow \frac{1}{3}F(-j\frac{\omega+4}{3})e^{-j\frac{2(\omega+4)}{3}}$

尺度变换

$f(3t)\leftrightarrow \frac{1}{3}F(j\frac{\omega}{3})$

时移

$f(2+3t)\leftrightarrow \frac{1}{3}F(j\frac{\omega}{3})e^{j\frac{2\omega}{3}}$

傅立叶变换时域与频域的对称关系

时域	$\leftrightarrow$	频域
周期信号	$\leftrightarrow$	离散谱
离散信号	$\leftrightarrow$	周期性
连续信号	$\leftrightarrow$	非周期
非周期信号	$\leftrightarrow$	连续谱

7. 时域卷积性质（常用）

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega) \quad (4.5-27)$

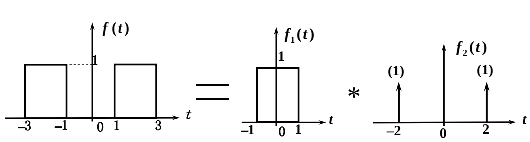
时域卷积，频域相乘

对一个系统而言

$$y_{zs}(t)=e(t)*h(t)$$

$$Y(j\omega)=E(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

例10：求图所示信号的FT（即傅里叶变换）

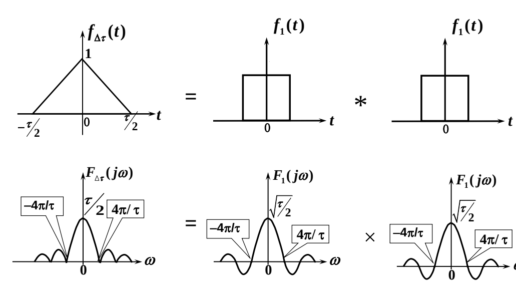


$$f_1(t)=g_2(t)$$

$$f_2(t)=\delta(t+2)+\delta(t-2)$$

$$f(t)\leftrightarrow 4sa(\omega)\cos 2\omega$$

例11：求图所示三角脉冲信号的FT（即傅里叶变换）



$$f_{\Delta\tau}(t)\leftrightarrow \frac{\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4}) \quad (4.5-31)$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{\tau}{2}}Sa(\frac{\omega\tau}{4})}$$

8. 频域卷积性质（常用）

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$， $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$ $(4.5-28)$

则 $f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}\left[F_1(j\omega) * F_2(j\omega)\right]$

时域相乘，频域卷积

例12：求 $f(t)=g_6(t)\cos 5t$ 的FT（即傅里叶变换）

$g_6(t) \leftrightarrow 6Sa(3\omega)$

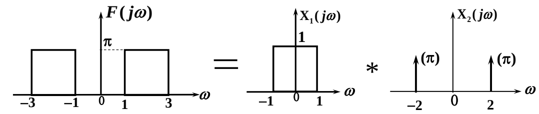
$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

解得 $g_6(t)\cos 5t \leftrightarrow 3Sa[3(\omega+5)]+3Sa[3(\omega-5)]$

例13：求 $\mathscr{F}^{-1}[F(j\omega)]$

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$， $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}[F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]$



法一：$X_1(j\omega)=g_2(\omega) \leftrightarrow \dfrac{1}{\pi}Sa(t)$

$X_2(j\omega)=\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)] \leftrightarrow \cos 2t$

解得 $f(t)=2Sa(t)\cos 2t$

法二：利用调制特性

$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[2\pi G_2(\omega)]\cos(2t)$

$\mathscr{F}^{-1}[2\pi G_2(\omega)]=2Sa(t)$

---

9. 时域微分性质(常用)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$

$\dfrac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$ $(4.5-36)$

例如 $\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$

---

10. 时域积分性质(常用)

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, $f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ 其中 $F(0)=F(j\omega)|_{\omega=0}$

则 $f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega}F(j\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$ $(4.5-37)$

求 $F(0)$ 的方法：1)在 $F(j\omega)$ 中令 $\omega=0$ 求得

2)$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$

若 $F(0)=0$

则 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \dfrac{F(j\omega)}{j\omega}$ $(4.5-39)$

若 $f(t)$ 的波形在时间轴上正、负面积相等，则一定有 $F(0)=0$

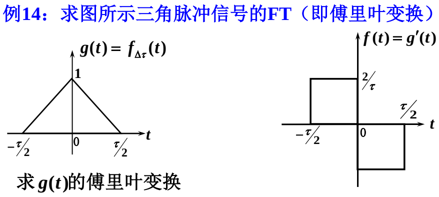
说明：若 $g(t)$ 导数的频谱容易求，则可利用积分性质求 $g(t)$ 的频谱

求 $g(t)$ 的傅里叶变换

设 $f(t)=g'(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ $f(t)$ 导数的频谱

则 $g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}F(j\omega)$ $f(t)$ 的频谱

例14：求图所示三角脉冲信号的FT（即傅里叶变换）



求 $g(t)$ 的傅里叶变换

设 $f(t)=g'(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}F(j\omega)$

$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)=Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)2j\sin\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)$

其中 $F(0)=F(j\omega)|_{\omega=0}=0$

解得 $f_{\Delta\tau}(t) \leftrightarrow F_{\Delta\tau}(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}F(j\omega)=\dfrac{\tau}{2}Sa^2\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)$

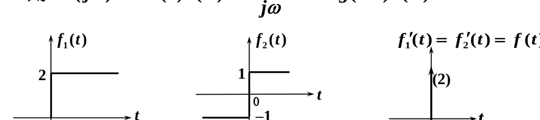
说明：用以下公式的条件

若 $f(t)=g'(t)$， $g(t)=f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

则 $g(t) \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)+\dfrac{F(j\omega)}{j\omega}$

若 $g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx+g(-\infty)$ （即 $f(-\infty)\neq 0$）

则 $G(j\omega)=\pi F(0)\delta(\omega)+\dfrac{F(j\omega)}{j\omega}+2\pi g(-\infty)\delta(\omega)$



(a) (b) (c)

$f_1(t) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)+\dfrac{2}{j\omega}$ $f_2(t) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)+\dfrac{2}{j\omega}-2\pi\delta(\omega)=\dfrac{2}{j\omega}$

11. 频域微分性质

设 $F^{(n)}(j\omega)=\dfrac{d^{(n)}F(j\omega)}{d\omega^{n}}$

若 $\quad f(t)\ \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $-jt\,f(t)\ \leftrightarrow \dfrac{d}{d\omega}F(j\omega)$

$(-jt)^{(n)}\,f(t)\leftrightarrow F^{(n)}(j\omega)\qquad(4.5-45)$

例15：求 $t\varepsilon(t)$ 的FT（即傅里叶变换）

$$\varepsilon(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

$$\therefore\ t\varepsilon(t)\leftrightarrow j\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^{2}}$$

12. 频域积分性质

若 $\qquad f(t)\ \leftrightarrow F(j\omega)$

则 $\pi f(0)\delta(t)+\dfrac{1}{-jt}f(t)\leftrightarrow F^{(-1)}(j\omega)\qquad(4.5-46)$

其中 $f(0)=f(t)\big|_{t=0}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)d\omega$

$$F^{(-1)}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}F(j\eta)d\eta$$

当 $f(0)=0$时，则 $\dfrac{1}{-jt}f(t)\leftrightarrow F^{(-1)}(j\omega)$

很多信号的频谱函数直接用定义式不易求出,经常利用典型信号的频谱函数和性质求。

傅里叶变换的常用性质要求熟练掌握。

13. 能量定理(帕斯瓦尔定理)

若 $0<E<\infty$， $P=0\quad f(t)$为能量信号

若 $0<P<\infty$， $E=\infty\quad f(t)$为功率信号

功率信号的帕斯瓦尔(Parseval)恒等式

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^{2}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^{2}\qquad(4.3-12)$$

(1) 非周期信号能量与频谱函数的关系

能量信号的帕斯瓦尔恒等式

$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$

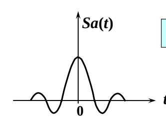
$$E=\int_{-\infty}^{\infty}f^{2}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^{2}d\omega\qquad(4.6-2)$$

结论：非周期信号的能量可以在时域中求也可以在频域中求。

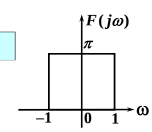
在时域中其能量由 $f^{2}(t)$与时间轴所覆盖的面积确定，

在频域中由 $|F(j\omega)|^{2}$ 与频率轴覆盖的面积确定 。

例16：求$f(t)=Sa(t)$的能量



$Sa(t)\leftrightarrow \pi g_2(\omega)$



$$E=\int_{-\infty}^{\infty}f^{2}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^{2}d\omega$$

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\pi g_2(\omega)]^{2}d\omega=\pi(\mathrm{J})$$

(2) 能量密度函数$\varepsilon(\omega)$（简称能量谱）

单位频率的信号能量

$E=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\omega)df\qquad(3-140)$

信号的总能量等于能量谱$\varepsilon(\omega)$曲线所覆盖面积。

$$\because\ E=\int_{-\infty}^{\infty}f^{2}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^{2}d\omega\qquad(4.6\text{-}2)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\omega)|^{2}df$$

$\therefore\ \varepsilon(\omega)=|F(j\omega)|^{2}\qquad(4.6-5)$

只取决于频谱函数的模量

4.6 周期信号的傅里叶变换

1) 周期信号$f_T(t)$ 的傅里叶级数（离散谱）

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}\qquad(4.2-18)$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt\qquad(4.2-20)$$

$\Omega=2\pi/T\leftarrow f$的基波频率， F_n是傅里叶系数

2) 非周期信号$f(t)$的 傅里叶变换（连续谱）

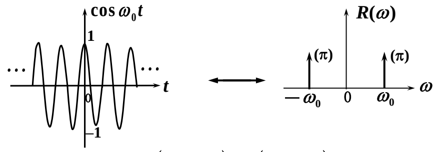
$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\qquad(4.4-4)$$

讨论周期信号傅里叶变换的目的：为把周期信号与非周期信号的分析方法统一起来，使傅里叶变换得到更广泛的应用。

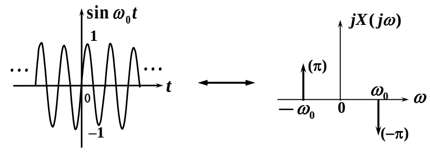
主要讨论：1)如何求周期信号的傅里叶变换。

2)周期信号傅里叶变换与其傅里叶系数F_n的关系。

正、余弦函数的傅里叶变换



$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)] = R(\omega)$$



$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)] = jX(\omega)$$

一、一般周期信号的傅里叶变换

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t} \qquad (4.7-6)$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\Omega t}\,dt \qquad (4.7-7)$$

$\Omega = 2\pi/T \leftarrow f$ 的基波频率， F_n 是傅里叶系数

$$\mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}\right]$$

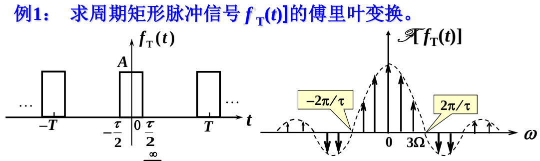
F_n 是 $n\Omega$ 函数而不是 t 的函数

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathscr{F}\left[e^{jn\Omega t}\right] \qquad e^{jn\Omega t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-n\Omega)$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega) \qquad (4.7-8)$$

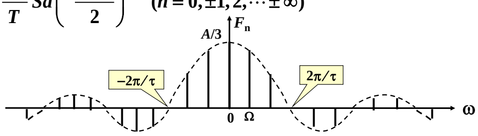
结论： $\mathscr{F}[f_T(t)]$ 频谱由无穷多个冲激组成，这些冲激位于周期信号各谐波处，其强度为 $2\pi F_n$

例1： 求周期矩形脉冲信号 $f_T(t)$ 的傅里叶变换。



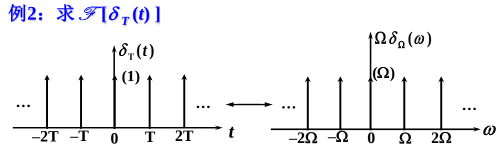
$$\mathscr{F}[f_T(t)] = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega)$$

$$F_n=\frac{A\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \qquad (n=0,\pm1,2,\cdots\pm\infty)$$



$$\mathscr{F}[f_T(t)] = A\Omega\tau\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\Omega)$$

例2：求 $\mathscr{F}[\delta_T(t)]$



$$\mathscr{F}[f_T(t)] = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega)$$

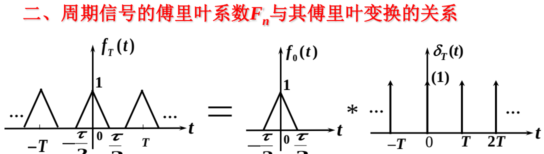
$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\Omega t}\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta_T(t)e^{-jn\Omega t}\,dt=\frac{1}{T}$$

$$\therefore \mathscr{F}[\delta_T(t)]=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega) \qquad (4.7-13)$$

令 $\delta_\Omega(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)$

则 $\delta_T(t)\leftrightarrow\Omega\delta_\Omega(\omega) \qquad (4.7-15)$

二、周期信号的傅里叶系数 F_n 与其傅里叶变换的关系



任意周期信号均可表示成

$f_0(t)$ 为 $f_T(t)$ 在区间 $-T/2\le t\le T/2$ 的信号

$$f_T(t)=f_0(t)*\delta_T(t)=f_0(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$f_T(t)\leftrightarrow F(j\omega)=F_0(j\omega)\cdot\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)$$

$$=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0(jn\Omega)\delta(\omega-n\Omega) \qquad (4.7-17)$$

$$f_T(t)\leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega) \qquad (4.7-8)$$

可看出求 $\mathscr{F}[f_T(t)]$ 有两种不同的方法

$$f_T(t)\leftrightarrow F(j\omega)=F_0(j\omega)\cdot\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)$$

$$=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0(jn\Omega)\delta(\omega-n\Omega) \qquad (4.7-17)$$

$$f_T(t)\leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega) \qquad (4.7-8)$$

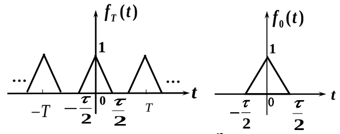
$F_0(j\omega)$ 与 F_n 的关系

$$F_n=\frac{1}{T}F_0(jn\Omega)=\frac{1}{T}F_0(j\omega)\Big|_{\omega=n\Omega} \qquad (4.7-18)$$

$F_0(j\omega)$ 一般较容易求，因此通常先求 $F_0(j\omega)$ 后代入(4.7-17)求 $\mathscr{F}[f_T(t)]$。

例3: 1) $\mathscr{F}[f_T(t)]$

2) 求 $f_T(t)$ 的指数形式的傅里叶级数



$F_0(j\omega)=\frac{\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$

$F_0(jn\Omega)=\frac{\tau}{2}Sa^2\left(\frac{n\Omega\tau}{4}\right)$

$$f_T(t)\leftrightarrow F(j\omega)=F_0(j\omega)\cdot\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0(jn\Omega)\delta(\omega-n\Omega)$$

1) $F(j\omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\delta(\omega-n\Omega)=\Omega\frac{\tau}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa^2\left(\frac{n\Omega\tau}{4}\right)\delta(\omega-n\Omega)$

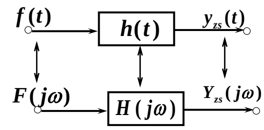
2) $f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}=\frac{\tau}{2T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa^2\left(\frac{n\Omega\tau}{4}\right)e^{jn\Omega t}$

$F_n=\frac{1}{T}F_0(jn\Omega)=\frac{\tau}{2T}Sa^2\left(\frac{n\Omega\tau}{4}\right)$

4.7 LTI系统的频域分析

一、系统的频率响应

1) 频率响应函数 $H(j\omega)$ 的定义



时域分析法

$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)$

$Y_{zs}(j\omega)=F(j\omega)\cdot H(j\omega)$

频域分析法{当$\mathscr{F}[f(t)]$存在时}

$H(j\omega)=\frac{Y_{zs}(j\omega)}{F(j\omega)}=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

频率响应函数

$h(t)\leftrightarrow H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

$\varphi(\omega)$相频特性

$Y(j\omega)=F(j\omega)\cdot H(j\omega)=|Y(j\omega)|e^{j\varphi_y(\omega)}$

$=|F(j\omega)||H(j\omega)|e^{j[\varphi_f(\omega)+\varphi(\omega)]}$

$|H(j\omega)|$ 幅频特性

2) LTI 系统的频域分析举例

例1：$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f'(t)-f(t)$，求$H(j\omega)$及$h(t)$。

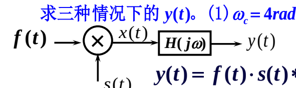
$$\left[(j\omega)^2+4j\omega+3\right]Y(j\omega)=(j\omega-1)F(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega-1}{(j\omega)^2+4j\omega+3}=\frac{2}{3+j\omega}-\frac{1}{1+j\omega}$$

$$H(j\omega)\leftrightarrow h(t)=(2e^{-3t}-e^{-t})\varepsilon(t)$$

例2：图所示系统，已知 $f(t)=Sa(t)$，$s(t)=\cos 2t$，$H(j\omega)=g_{2\omega_c}(\omega)$

求三种情况下的 $y(t)$。(1) $\omega_c=4rad/s$；(2) $\omega_c=2rad/s$；(3) $\omega_c=1rad/s$



$y(t)=f(t)\cdot s(t)*h(t)$

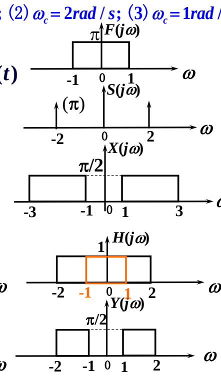
$Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot F(j\omega)*S(j\omega)\cdot H(j\omega)$

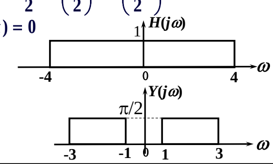
$F(j\omega)=\pi g_2(\omega)$

$Y_1(j\omega)\leftrightarrow y_1(t)=Sa(t)\cos(2t)$

$y_2(t)=\frac{1}{2}Sa\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}t\right)$

$y_3(t)=0$





3) LTI 系统对虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 的零状态响应

$y_{zs}(t)=e^{j\omega t}*h(t)\ =\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau\ =e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

$\therefore y_{zs}(t)=H(j\omega)e^{j\omega t}\qquad(4.8-2)$

$=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega t}$

$=|H(j\omega)|e^{j[\omega t+\varphi(\omega)]}$

当激励信号为虚指数信号时,系统的零状态响应仍为同频率的虚指数信号,其幅度和相位由系统频率响应函数$H(j\omega)$确定。

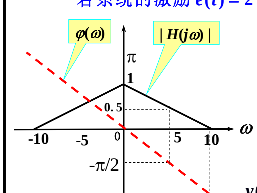
4) LTI 系统对正弦信号的稳态响应

$f(t)=\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})$

$y_{zs}(t)=|H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]$

当激励为正弦信号时,系统的稳态响应是与激励信号同频率的正弦信号,其幅度和相位由系统频率响应函数$H(j\omega)$确定。

例3：某LTI系统$H(j\omega)$的幅频特性和相频特性如图所示，若系统的激励 $e(t)=2+4\cos 5t+4\cos 10t$，求系统响应$y(t)$。



$|H(j0)|=1$，$\varphi(0)=0$

$|H(j5)|=\frac{1}{2}$，$\varphi(5)=-\frac{\pi}{2}$

$|H(j10)|=0$，$\varphi(0)=-\pi$

$y(t)=2+2\cos(5t-\frac{\pi}{2})=2+2\sin 5t$

$f(t)=\cos\omega_0(t)$

$y_{zs}(t)=|H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]$

二、无失真传输条件

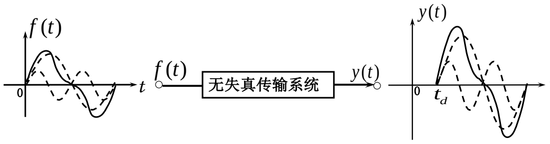
系统加工处理信号时 a)非线性失真 (有意进行)

b) 线性失真 (不希望发生)

1. 失真的概念及系统产生失真的原因

(1) 无失真的概念

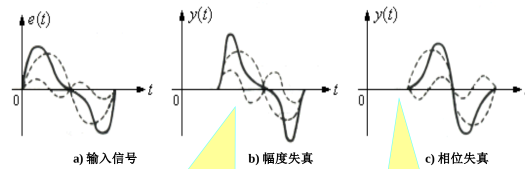
输入和输出信号的形状没有变化，只是有延时和大小变化



(2) 线性失真的概念

特点:信号在传输过程中没有产生新的频率分量

原因:系统的频率特性不是线性

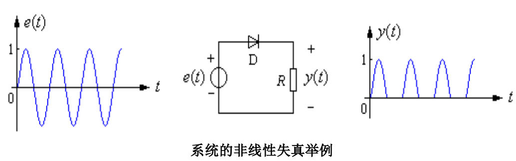


两个频率分量放大倍数不同

两个频率分量延迟时间不同

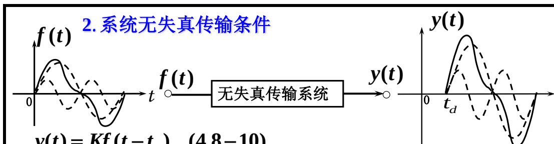
(3) 非线性失真的概念 (有意进行)

特点:信号在传输过程中产生新的频率分量



系统的非线性失真举例

2. 系统无失真传输条件



$y(t)=Kf(t-t_d)\quad(4.8-10)$

$\because\ Y(j\omega)=K\,F(j\omega)e^{-j\omega t_d}$

$\therefore H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=K\,e^{-j\omega t_d}\quad(4.8-11a)$

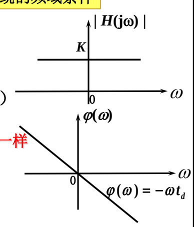
无失真传输系统的频域条件

其中 $|H(j\omega)|=\dfrac{|Y(j\omega)|}{|F(j\omega)|}=K$ ～幅频特性（常数）

对输入信号的各谐波分量放大(或缩小)的倍数完全一样

$\varphi(\omega)=\theta_y(\omega)-\theta_e(\omega)=-\omega t_d$ ～相频特性

$t_d=-\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ ～延迟时间(常数)



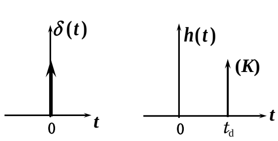
输出信号各谐波的相移和频率成正比，即基波和各谐波延迟时间相同。

无失真传输系统的冲激响应$h(t)$

$f(t)=\delta(t)$ → 无失真传输系统 → $y(t)=h(t)$

$y(t)=K\,f(t-t_d)\quad(4.8-10)$ 无失真传输系统的时域条件

$h(t)=K\,\delta(t-t_d)$



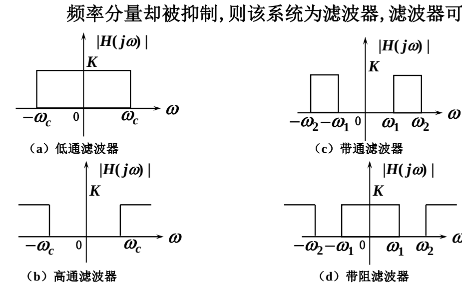
$h(t)\leftrightarrow H(j\omega)$

$H(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=K\,e^{-j\omega t_d}\quad(4.8-11a)$

无失真传输系统的频域条件

三、理想低通滤波器的特性

滤波器:信号通过系统时，如果某些频率分量能正常通过，而有些频率分量却被抑制，则该系统为滤波器，滤波器可分四类。



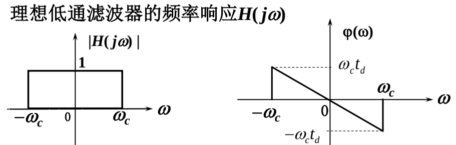
几种理想滤波器的幅频特性 常用的理想化的系统模型

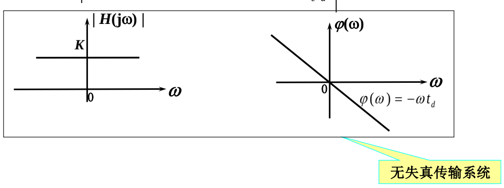
截止频率：滤波器的边界频率 | 通带：允许通过的频率范围 | 阻带：被抑制的频率范围

1. 理想低通滤波器(ILPF)的频率特性

$f(t)$ → 理想低通滤波器 → $y(t)$ 通带为$0 \le \omega \le \omega_c$，阻带为$\omega \ge \omega_c$

理想低通滤波器的频率响应$H(j\omega)$

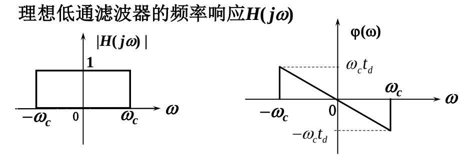




1. 理想低通滤波器(ILPF)的频率特性

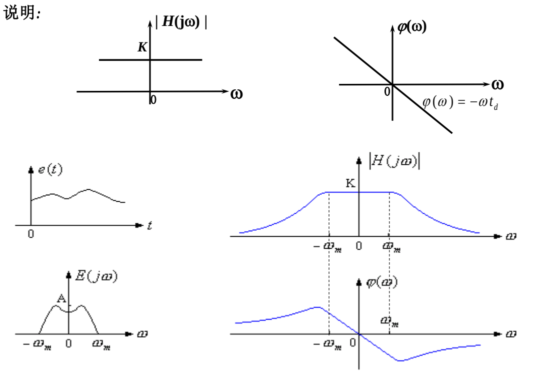
$f(t)$ → 理想低通滤波器 → $y(t)$ 通带为$0 \le \omega \le \omega_c$，阻带为$\omega \ge \omega_c$

理想低通滤波器的频率响应$H(j\omega)$



$$H(j\omega) = g_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d} = \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \qquad (4.8-14)$$

说明:



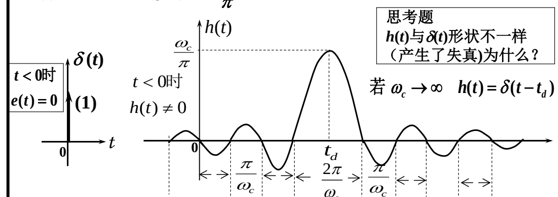
a) 输入信号的波形和频谱　　b)系统的频率特性

2. 理想低通滤波器的冲激响应

$$H(j\omega) = g_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}$$

$$h(t) = \mathscr{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t-t_d)]$$

思考题
$h(t)$与$\delta(t)$形状不一样（产生了失真)为什么？



若 $\omega_c \to \infty$　$h(t) = \delta(t - t_d)$

$\because \omega_c(t - t_d) = \omega_c \Delta t = n\pi$时$h(t)$为零点　$\therefore \Delta t = \dfrac{n\pi}{\omega_c}$

可见理想低通滤波器是非因果系统，物理上无法实现，实际的只能尽可能与它逼近。

四、物理可实现系统对系统函数的要求

物理可实现系统的条件

(a) 时域特性满足

$$\left.\begin{aligned} h(t) = 0 \quad t < 0 \\ g(t) = 0 \quad t < 0 \end{aligned}\right\} \text{（即满足因果条件）} \quad 或 \begin{cases} h(t) = h(t)\varepsilon(t) \\ g(t) = g(t)\varepsilon(t) \end{cases}$$

(b) 频域特性满足（佩利—维纳准则）

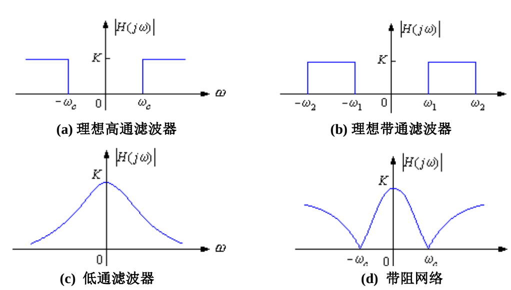
条件(1) $\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$　即$E = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)^2 dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$

条件(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{|\ln|H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty$　即不允许在一个有限频带内$|H(j\omega)|=0$

若在某一有限频带内$|H(j\omega)|=0$ 则$|\ln|H(j\omega)|| \to \infty$，不满足条件(2)

对于物理可实现系统$|H(j\omega)|$可在某些孤立点上可为零。

判断下列系统那些是物理不可实现的，那些是物理可实现的



几种滤波器特性举例

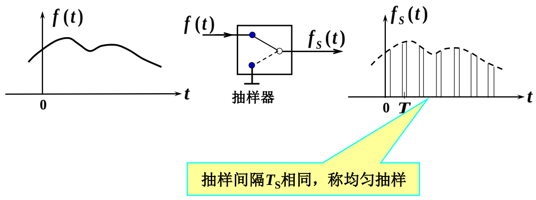
(a)、(b)物理不可实现，　(c)、(d)物理可实现

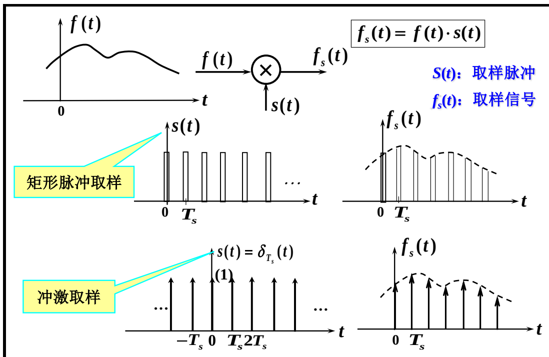
3.8 取样定理

取样定理：连续信号转换为数字信号的理论根据，在通信理论中占有非常重要的地位。

模–数(A/D)转换：先对模拟信号进行抽样，得到一系列离散的样值信号，对样值信号进行量化、编码可得数字信号。

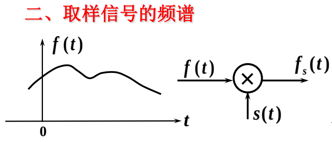
一、信号的时域取样





$$f_s(t)=f(t)\cdot\delta_{T_s}(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(mT_s)\delta(t-mT_s)$$

二、取样信号的频谱



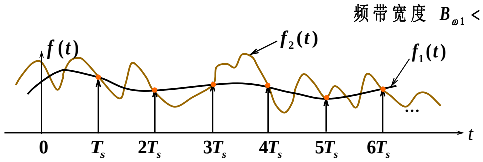
$f_s(t)=f(t)\cdot s(t)$

↓

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*S(j\omega)$$

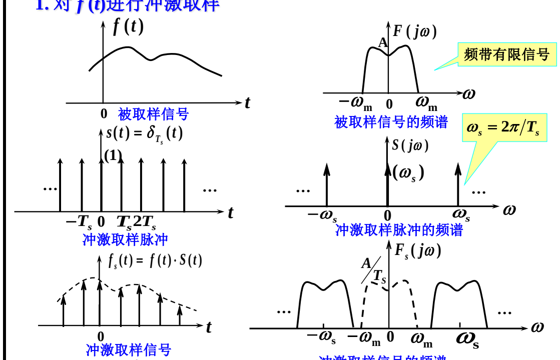
讨论的问题：$\mathscr{F}[f_S(t)]$与$\mathscr{F}[f(t)]$的关系

频带宽度 $B_{\omega 1}<B_{\omega 2}$



讨论的目的： 找出抽样频率与信号频带之间的关系

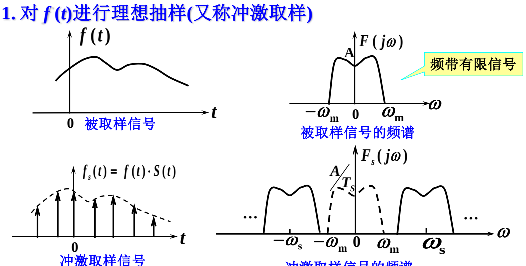
1. 对 f (t)进行冲激取样



$$F_s(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[j(\omega-n\omega_s)]$$

$f_s(t)$的频谱是$f(t)$频谱的周期性重复

1. 对 f (t)进行理想抽样(又称冲激取样)

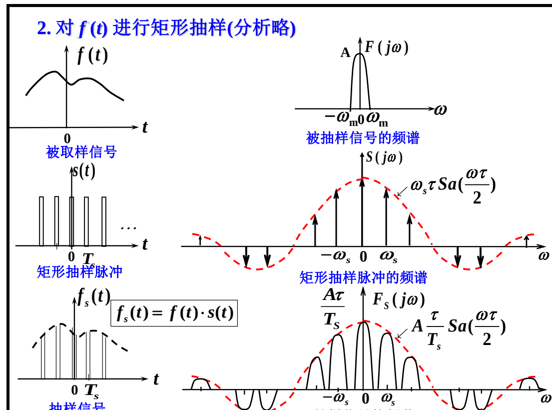


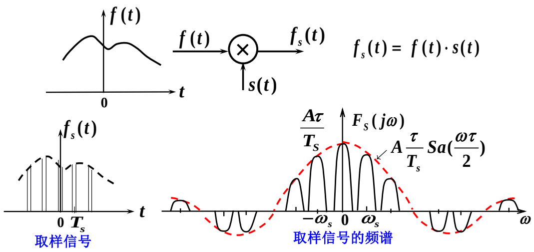
结论：

① $F_S(j\omega)$ 由无穷多个$F(j\omega)$的频移项组成，即$F_S(j\omega)$ 为$F(j\omega)$ 的周期性重复（周期延拓），周期为$\omega_S=2\pi/T_s$。

② $F_S(j\omega)$ 的幅度是$F(j\omega)$幅度的$1/T_s$.

2. 对 f (t) 进行矩形抽样(分析略)





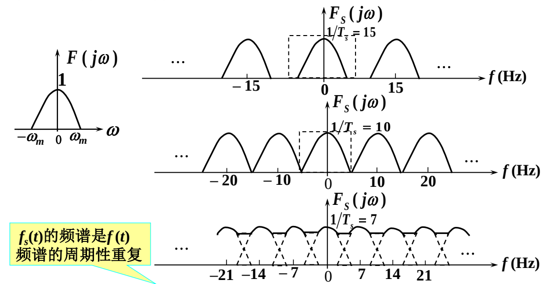
$$F_S(j\omega)=\frac{A\tau}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_S\tau}{2}\right)F\left[j(\omega-n\omega_S)\right]$$

结论：$F_s(j\omega)$由无穷多个幅度按$\frac{A\tau}{T_S}Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$的规律变化的$F(j\omega)$的频移项组成。

三、时域抽样定理

讨论在什么条件下从$f_S(t)$中无失真地恢复原信号$f(t)$

例1：已知某一信号$f(t)$的频谱如图所示，其最高频率f_m=5Hz, 若对$f(t)$分别以f_s=15Hz，f_s=10Hz，f_s=7Hz进行冲激取样，试分别画出各取样信号的频谱。



$$F_S(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left[j(\omega-n\omega_S)\right]$$

1) 当$f_S\geq 2f_m$ (或$T_S\leq 1/2\,f_m$)时，频移后的各相邻频谱不发生重叠，此时利用低通滤波器从$F_S(j\omega)$中能选出$F(j\omega)$。

2) 当$\omega_S<2\omega_m$ (或$T_S>1/2\,f_m$)时频移后的各相邻频谱发生重叠，从$F_S(j\omega)$中不能选出$F(j\omega)$，不能再恢复原信号。

时域取样定理：

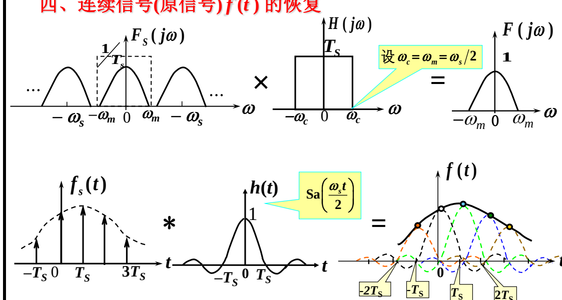
一个最高频率为f_m的频带有限信号$f(t)$，在取样频率满足$f_S\geq 2f_m$的条件下，可由$f(t)$在其等间隔T_s上的抽样值$f(nT_s)$唯一地确定[即这些样点值包含了该信号的全部信息，因此完全可以由这些样点值恢复原信号$f(t)$]

奈奎斯特频率$f_s=2\,f_m$ ~ 最低允许取样频率

奈奎斯特间隔$T_s=1/2\,f_m$ ~ 最大允许取样间隔

说明:模拟信号在抽样之前一般用低通滤波器滤掉高于f_m的频率,使被抽样信号满足带限信号。

四、连续信号(原信号)$f(t)$的恢复

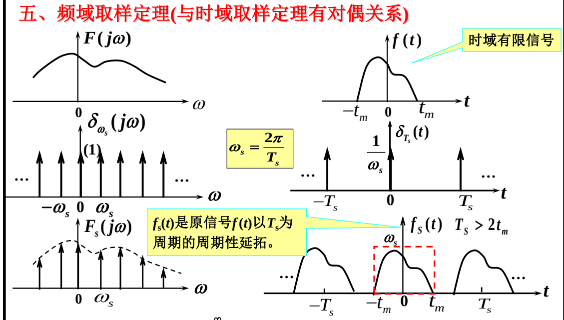


$$F(j\omega)=F_s(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

内插公式准确给出取样时刻的值

$$f(t)=f_s(t)*h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)Sa\left[\frac{\omega_s}{2}(t-nT_s)\right]\quad(4.9-12)$$

五、频域取样定理(与时域取样定理有对偶关系)



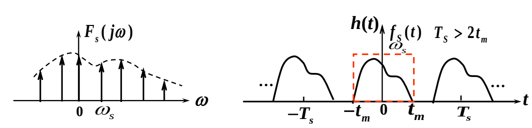
$$F_s(j\omega)=F(j\omega)\cdot\delta_{\omega_s}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(jn\omega_s)\delta(\omega-n\omega_s)$$

$$f_s(t)=f(t)*\left[\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right]=\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT_s)\;(4.9-15)$$

结论：当$T_S\geq 2t_m$ (或$f_S\leq 1/2t_m$)时，波形不发生重叠，可从频域抽样值$F_S(j\omega)$恢复原信号的频谱$F(j\omega)$。

频域取样定理：

一个存在于区间$[-t_m\sim t_m]$的时限信号$f(t)$，对其频谱$F(j\omega)$进行等间隔取样，在取样间隔满足$f_S\leq 1/2t_m$的条件下，则$F(j\omega)$可由其在等间隔ω_s上的取样值$F(jn\omega_s)$唯一地确定。

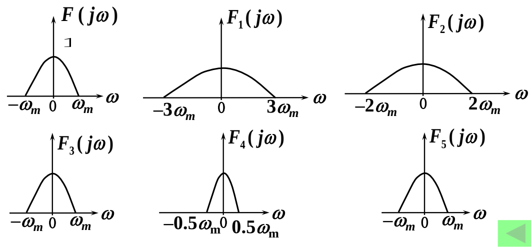


例2：某一连续$f(t)$的最高频率 $f_m=500\text{Hz}$,若对下列信号进行时域取样,求最小取样频率f_s。

(1) $f_1(t)=f(3t)$ (2) $f_2(t)=f^2(t)$ (3) $f_3(t)=f(t)*f(2t)$

(4) $f_4(t)=f(\frac{t}{2})$ (5) $f_5(t)=f(t)+f(\frac{t}{2})$

若对以上抽样信号以2kHz的频率抽样，画出抽样信号f_s的频谱。



第四章重点及要求

1)理解信号分解的概念（正交函数集）

2)掌握周期信号分解的方法（三角函数形、指数形傅里叶级数）

3)掌握周期信号频谱的特点（离散性、谐波性、收敛性）
周期矩形脉冲的T、τ对其频谱、带宽的影响。

4)掌握频谱密度函数(傅里叶变换)的物理意义及定义式。

5)熟练掌握典型信号(含周期信号)的傅里叶变换对。

6)灵活运用傅里叶变换的(常用)性质对信号进行正、反变换。

7)深刻理解系统频率响应函数$H(j\omega)$的定义，熟练掌握LTI系统的任意信号激励下的频域分析法 (包括正弦稳态响应)

8)掌握系统无失真传输的条件

$f(t)=\cos(\omega_0 t)$

$y_{zs}(t)=|H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]$

9)掌握低通滤波器的定义及其无失真传输的条件

10)熟练掌握抽样定理、会确定奈奎斯特频率和奈奎斯特周期，会画抽样信号f_s的频谱。