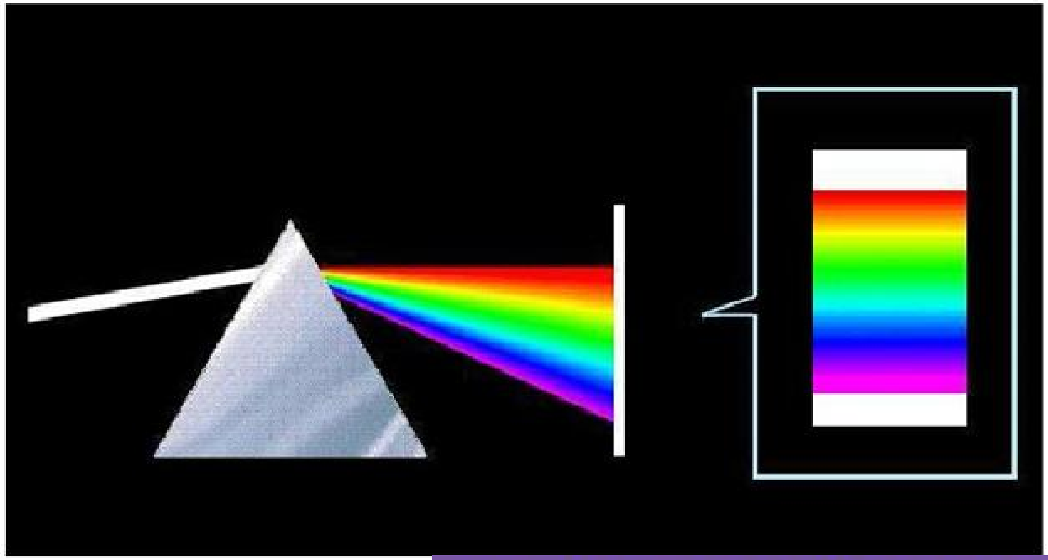
计算机图像处理

COMPUTER IMAGE PROCESSING

傅里叶变换及其在图像处理中的应用

离散傅里叶变换DFT



从感性理解傅里叶变换，一副数字图像里面包含有各种信号，有变化缓慢的背景轮廓，有变换急促的边缘和噪声部分，而傅里叶变换就像光学中的三棱镜，在三棱镜的作用下，一束自然光光信号可以分为无数的单色光信号，单色光信号从频谱中心分开频率逐渐增加，那么一幅图像经过一个类似三棱镜的系统后傅里叶变换就把源图像中的信号给分开了，这样我们就可以做各种处理就更为方便。

傅里叶变换是由傅里叶在1807年他的经典之作(热能数学原理)阐述的，傅里叶变换的应用非常广泛，在通信、数字图像处理、光学、遥感、遥测等信息科学中有着广泛的应用。

一维离散傅里叶变换

3.2.1 离散傅里叶变换

对于有限长序列 $f(x)(x=0,1,\cdots,N-1)$，定义一维离散傅里叶变换对如下：

$$F(u)=\mathrm{DFT}[f(x)]=\sum_{x=0}^{N-1}f(x)W^{ux} \tag{3.2.1}$$

$$u=0,1,\cdots,N-1$$

$$f(x)=\mathrm{IDFT}[F(u)]=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}F(u)W^{-ux} \tag{3.2.2}$$

$$x=0,1,\cdots,N-1$$

其中 $W=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$，称为变换核。由式(3.2.1)和式(3.2.2)可见，给定序列 $f(n)$，可以求出其傅里叶谱 $F(u)$；反之由傅里叶谱 $F(u)$ 也可以求出 $f(x)$。离散傅里叶变换对可以简记为：

$$f(x)\leftrightarrow F(u) \tag{3.2.3}$$

教材p31

一维离散傅里叶变换的运算复杂度为O(N^2)：对于每个u需要计算N次，然后u取值为0~N-1

一维离散傅里叶变换

3.2.1 离散傅里叶变换

对于有限长序列 $f(x)(x=0,1,\cdots,N-1)$，定义一维离散傅里叶变换对如下：

$$F(u)=\mathrm{DFT}[f(x)]=\sum_{x=0}^{N-1}f(x)W^{ux} \tag{3.2.1}$$

$$u=0,1,\cdots,N-1$$

$$F(0)=\sum_{x=0}^{N-1}f(x)$$

$$f(x)=\mathrm{IDFT}[F(u)]=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}F(u)W^{-ux} \tag{3.2.2}$$

$$x=0,1,\cdots,N-1$$

其中 $W=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$，称为变换核。由式(3.2.1)和式(3.2.2)可见，给定序列 $f(n)$，可以求出其傅里叶谱 $F(u)$；反之由傅里叶谱 $F(u)$ 也可以求出 $f(x)$。离散傅里叶变换对可以简记为：

$$f(x)\leftrightarrow F(u) \tag{3.2.3}$$

教材p31

一维离散傅里叶变换的运算复杂度为O(N^2)：对于每个u需要计算N次，然后u取值为0~N-1

一维快速傅里叶变换FFT

目的：

快速傅里叶变换的目的就是减小傅立叶变换的复杂度，减少计算量，用的方法就是把数列进行基二抽样，这样一个N长度的序列就拆分成两个N/2长度的序列。

$$F(u)=\frac{1}{2}\left[F_{even}(u)+F_{odd}(u)W_{2K}^{u}\right]$$

$$F(u+K)=\frac{1}{2}\left[F_{even}(u)-F_{odd}(u)W_{2K}^{u}\right]$$

教材p36-39

一维快速傅里叶变换的运算复杂度为$O(N\log_2 N)$：

对于每个u需要计算$\log_2 N$次，然后u取值为$0\sim N-1$

一幅静止的数字图像可以看成二维数据阵列，因此，数字图像处理主要是二维数据处理。

二维离散傅里叶变换

设 $f(x,y)(x=0,1,\cdots,M-1;y=0,1,\cdots,N-1)$是一幅 $M\times N$ 图像，其二维离散傅里叶变换 $F(u,v)$定义为

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \tag{3.4.1}$$

$$u=0,1,\cdots,M-1$$

$$v=0,1,\cdots,N-1$$

其逆变换定义为

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \tag{3.4.2}$$

$$x=0,1,\cdots,M-1$$

$$y=0,1,\cdots,N-1$$

式(3.4.1)与式(3.4.2)构成二维离散傅里叶变换对，记为

$$f(x,y)\Leftrightarrow F(u,v) \tag{3.4.3}$$

其中 $e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$ 与 $e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$ 分别称为正逆变换核和逆变换核。x、y 为空间域采样值，u、v 为频率域采样值，$F(u,v)$称为离散信号 $f(x,y)$的频谱。

教材p39

一般图像信号 $f(x,y)$ 总是实函数，但其离散傅里叶变换 $F(u,v)$ 通常是复变函数，可以写成

$$\boxed{F(u,v) = R(u,v) + \mathrm{j}I(u,v)} \tag{3.4.4}$$

其中 $R(u,v)$ 和 $I(u,v)$ 分别为 $F(u,v)$ 的实部和虚部。上式也常写成指数形式，即

$$F(u,v) = |F(u,v)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(u,v)} \tag{3.4.5}$$

其中

$$\boxed{|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2}} \tag{3.4.6}$$

$$\varphi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right] \tag{3.4.7}$$

$|F(u,v)|$ 称为 $f(x,y)$ 的傅里叶频谱，$\phi(u,v)$ 称为 $f(x,y)$ 的相位角。而 $f(x,y)$ 的功率谱则定义为傅里叶频谱的平方，即

$$|P(u,v)| = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v) \tag{3.4.8}$$

通常，在图像处理中，一般总是选择方形阵列，所以通常情况下总是有 $M=N$。此时，二维离散傅里叶变换为

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)/N} \tag{3.4.9}$$

$$u,v = 0,1,\cdots,N-1$$

$$f(x,y) = \frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux+vy)/N} \tag{3.4.10}$$

$$x,y = 0,1,\cdots,N-1$$

式(3.4.9)与式(3.4.10)可以写成如下分离形式：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\left[\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi vy/N}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux/N} \tag{3.4.11}$$

$$u,v=0,1,\cdots,N-1$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\left[\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi vy/N}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ux/N} \tag{3.4.12}$$

$$x,y=0,1,\cdots,N-1$$

由上述分离形式知，一个二维离散傅里叶变换可以连续两次运用一维离散傅里叶变换来实现。

式(3.4.9)与式(3.4.10)可以写成如下分离形式：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\left[\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}\right]e^{-j2\pi ux/N} \tag{3.4.11}$$

$$u,v=0,1,\cdots,N-1$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\left[\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi vy/N}\right]e^{j2\pi ux/N} \tag{3.4.12}$$

$$x,y=0,1,\cdots,N-1$$

由上述分离形式知，一个二维离散傅里叶变换可以连续两次运用一维离散傅里叶变换来实现。

利用一维快速傅里叶变换加快运算速度

- 对数字图像进行傅里叶变换得到它的频谱数据。
- 对于数字图像这种离散的信号，频率大小表示信号变化的剧烈程度或者说是信号变化的快慢。频率越大，变化越剧烈，频率越小，信号越平缓。
- 对应到图像中，高频信号往往是图像中的边缘信号和噪声信号，而低频信号包含图像的轮廓及背景等信号。

离散傅里叶变换的函数实现

OpenCV实现图像的傅里叶变换

基于 OPENCV 库

```
#include <stdio.h>
#include <cv.h>
#include <cxcore.h>
#include <highgui.h>
```

cvDFT函数(实现了FFT算法)

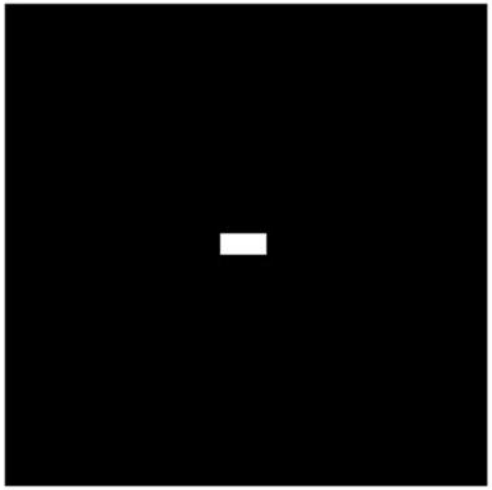
matlab实现图像的傅里叶变换

```
F=imread(filename);
F=fft2(f,P,Q);% 完成 FFT 变换
FC=fftshift(F):%实现居中
S=abs(F(或 Fc));%取得傅里叶频谱
f=real(ifft2(F));%实现傅里叶逆变换
```

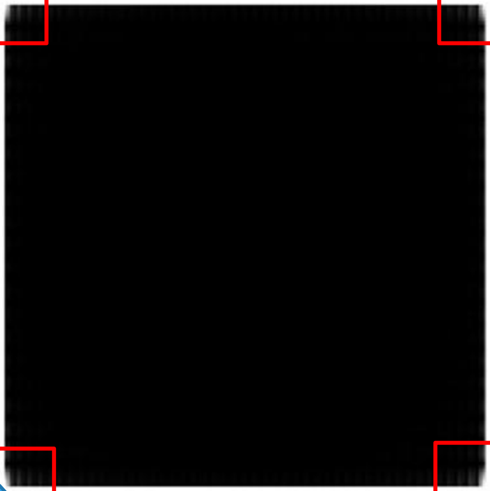
OpenCV 简介

全称 Open Source Computer Vision Library，直译成中文就是“开源的计算机视觉库”。它“普度众生”，可以运行在 Linux（一种用来干活的操作系统）、Windows（一种又能干活又能玩的操作系统）和 MacOS（一种只能运行在昂贵电脑上的操作系统）等操作系统上。

单狭缝图像

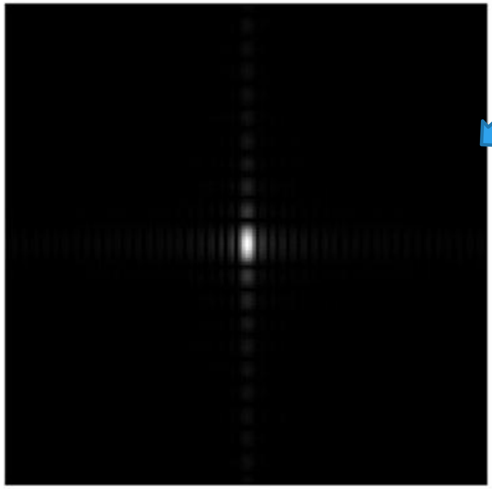


幅度谱（频谱坐标原点在左上角）

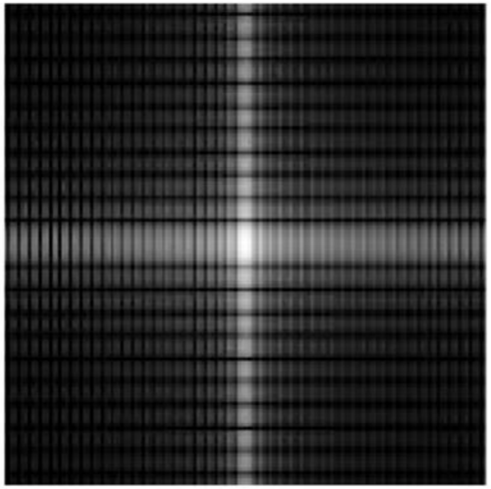


fftshift(F):%实现居中

幅度谱（频谱坐标原点在屏幕中央）

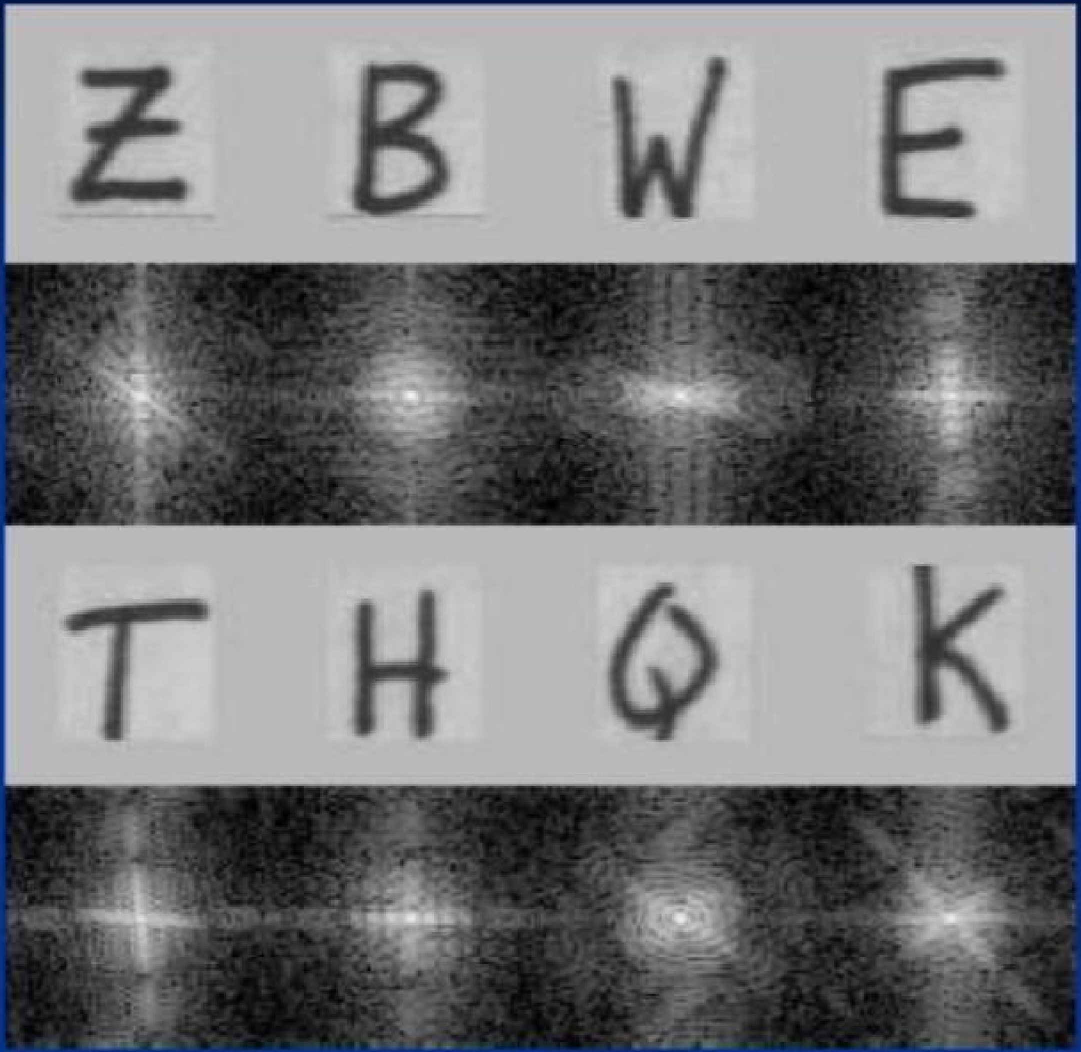


以对数方式显示频谱



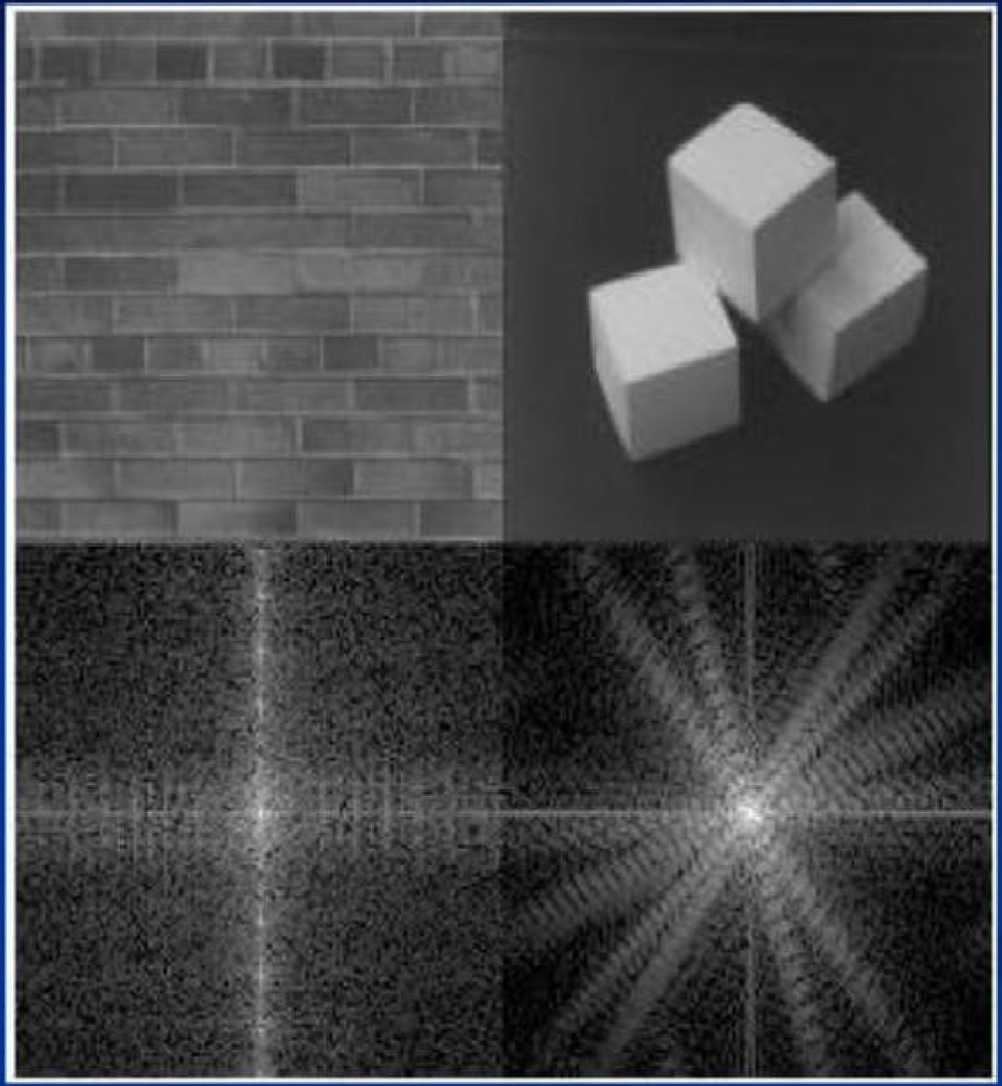
幅度谱和相位谱

- 从幅度谱中我们可以看出明亮线和原始图像中对应的轮廓线是垂直的。如果原始图像中有圆形区域那么幅度谱中也呈圆形分布



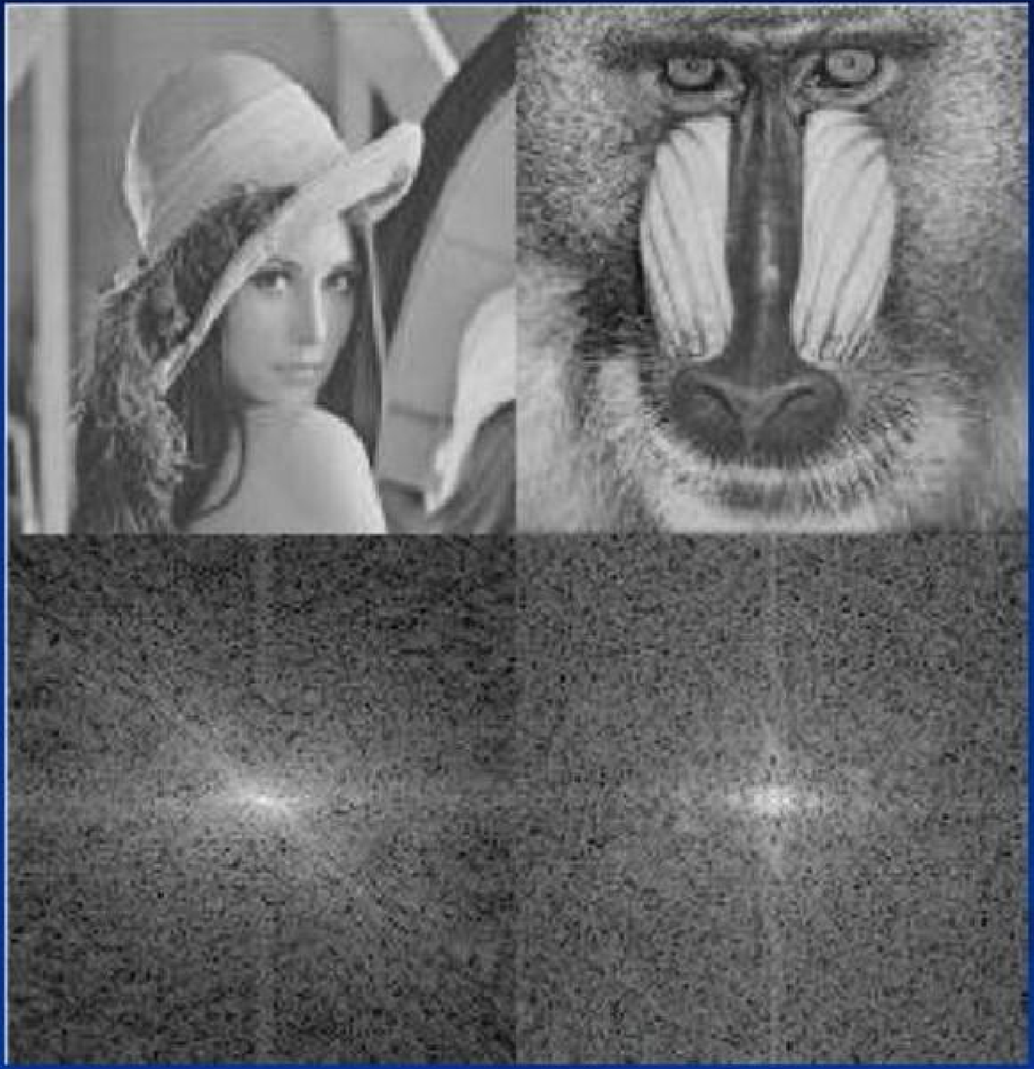
幅度谱和相位谱

- 从幅度谱中我们可以看出明亮线反映出原始图像的灰度级变化，这正是图像的轮廓边

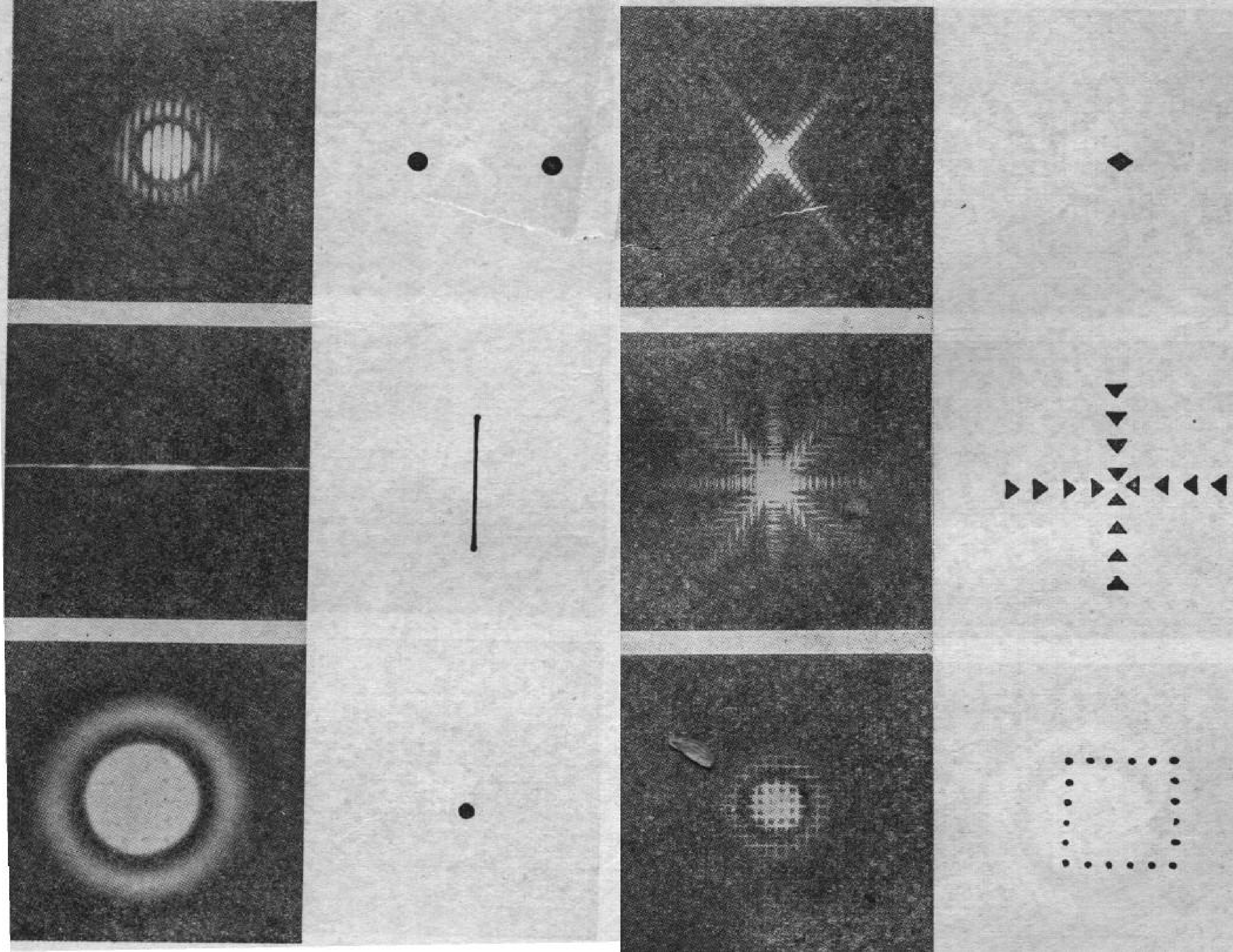


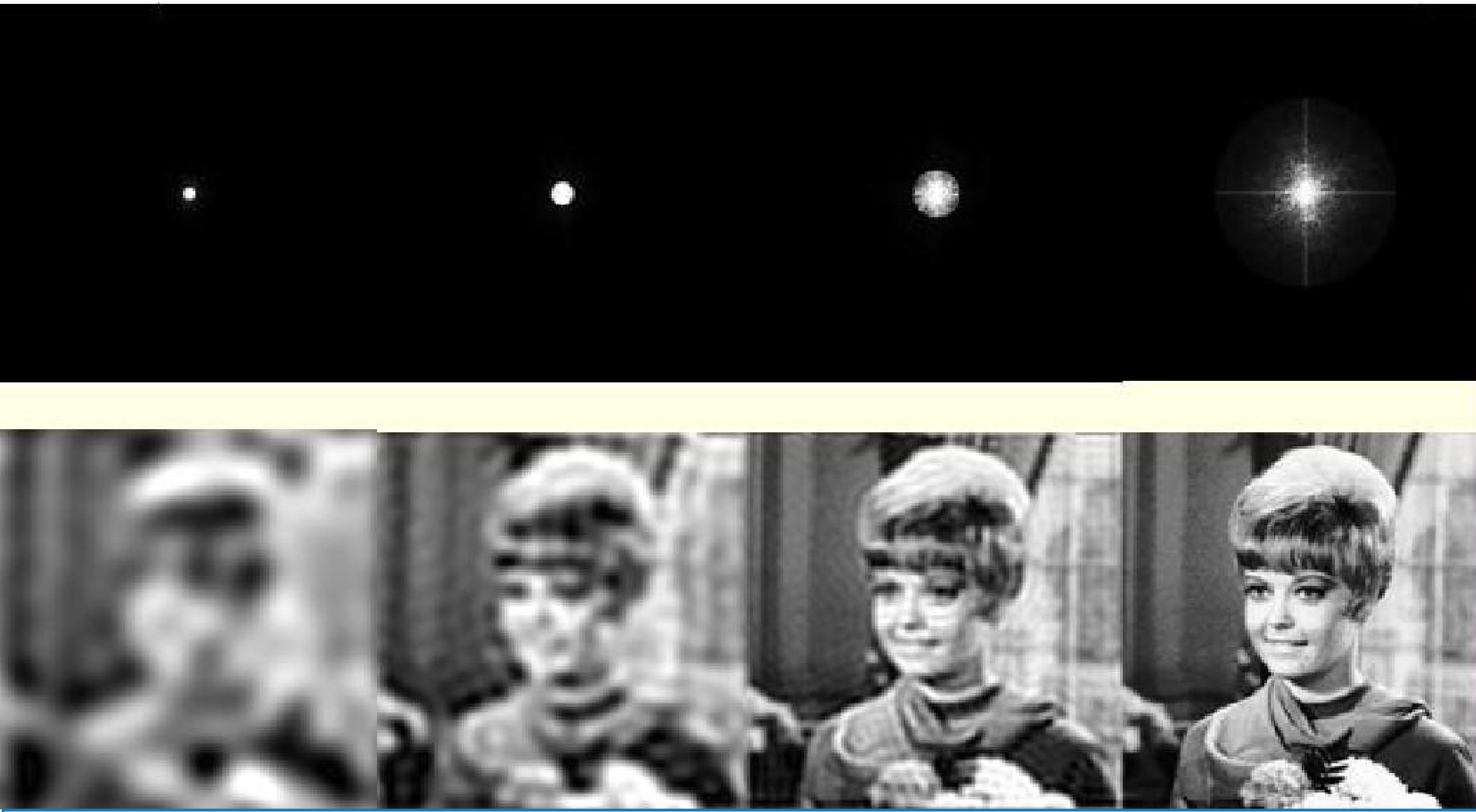
幅度谱和相位谱

- 这些图像没有特定的结构，左上角到右下角有一条斜线，它可能是由帽子和头发之间的边线产生的
- 两个图像都存在一些小边界

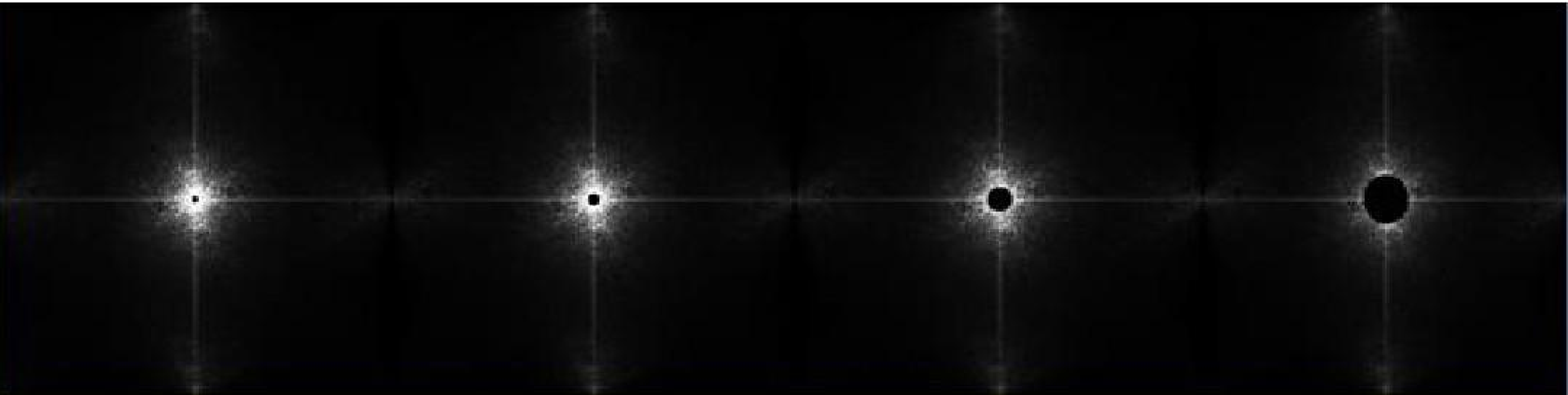


频谱图中暗的点数更多，那么实际图像是比较柔和的，反之，如果频谱图中亮的点数多，那么实际图像一定是尖锐的，边界分明且边界两边像素差异较大的





➢ 对应到图像中，高频信号往往是图像中的边缘信号和噪声信号，而低频信号包含图像的轮廓及背景等信号。



- 对应到图像中，高频信号往往是图像中的边缘信号和噪声信号，而低频信号包含图像的轮廓及背景等信号。