中国传媒大学

<u>2015</u>—<u>2016</u> 学年第<u> 一 </u>学期期末考试试卷（**B** 卷）

参考答案及评分标准

考试科目：<u>复变函数</u>　　　　课程编码：<u>**123025**</u>

考试班级：<u>**14**：　工科</u>　　　　考试方式：<u>闭卷</u>

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，选择正确答案填在题中的括号内, 本大题共 4 小题，每小题 3 分, 共 12 分）

1、函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续的充要条件是（C）.

$A.$ $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续　　　　$B.$ $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

$C.$ $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续　　　　$D.$ $u(x,y)+v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

2、函数 $f(z)=\sqrt{z}$ 的解析区域是（D）.

$A.$ 复平面　　　　$B.$ 除去原点的复平面
$C.$ 除去实轴的复平面　　　　$D.$ 除去原点与负实轴的复平面

3、点 $z=1$ 是函数 $(z-1)\sin\dfrac{1}{z-1}$ 的（D）.

$A.$ 可去奇点　　　　$B.$ 一级极点
$C.$ 一级零点　　　　$D.$ 本性奇点

4、映射 $w=e^{iz^2}$ 在点 $z_0=i$ 处的伸缩率为（ B ）.

$A.$ 1　　　　$B.$ 2　　　　$C.$ e^{-1}　　　　$D.$ e

二、填空题（把正确答案填在题中的横线上，本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

1、设有复数 z，$n \geq 1$ 为正整数，则 z^n 的三角表示式为____________________.

答: $z^n = |z|^n(\cos n\arg z + i\sin n\arg z)$.

2、已知复数 $z = x + iy$，求 $u(x,y) = \mathrm{Re}(e^z)$ ______________________，

$v(x,y) = \mathrm{Im}(e^z) =$_____________________.

答: （1）$u(x,y) = e^x \cos y$ ；（2）$v(x,y) = e^x \sin y$.

3、函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是________________.

答: $u(x,y), v(x,y)$ 在区域 D 内可微，并且满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

4、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{n^2+1}$ 的收敛域___________________.

答：$|z-1| \leq 1$

三、解答题（本大题共 8 个小题，每小题 8 分，共 64 分）

1、(本小题 8 分)

已知 $z = \dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$，$|z|$，$\arg z$ 和 $Argz$.

解　由 $z=\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=\frac{(4-i)}{i(1-i)}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

得 $\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2}$，$\mathrm{Im}(z)=-\frac{5}{2}$　（2 分）

$|z|=\sqrt{(-5)^2+(-3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{34}$　（4 分）

因为 z 点在第三象限.

所以，$\arg z=-\arctan\frac{5}{3}$　（6 分）

则 $Argz=\arg z+2k\pi$

$=-\arctan\frac{5}{3}+2k\pi$ （k 为整数）.　（8 分）

2、(本小题 8 分)

证明 $u(x,y)=2xy-2y$ 是调和函数，并求其共轭调和函数 $v(x,y)$ 以及由它们构成的解析函数.

证：由已知条件推出

$\frac{\partial u}{\partial x}=2y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2x-2$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$　（1 分）

因为两个二阶偏导数连续且满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

所以，$u(x,y)=2xy-2y$ 是调和函数.　（3 分）

解：因为 $u(x,y)=2xy-2y$ 与其共轭调和函数 $v(x,y)$ 要满足 $C-R$ 方程

$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2y$

所以$v(x,y)=\int 2ydy=y^2+c(x)$　　　　　　　　　　　　　　（5 分）

从而得$\dfrac{\partial v}{\partial x}=c'(x)$

再由$C-R$方程$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2x+2$得$c'(x)=-2x+2$

则$c(x)=\int(-2x+2)dx=-x^2+2x+c$　　　　　　　　　　（6 分）

所以$v(x,y)=y^2-x^2+2x+c$为$u(x,y)$的共轭调和函数.　　（7 分）

从而构成解析函数$w=u+iv=2xy-2y+i(y^2-x^2+2x+c)$.（8 分）

3、（本小题 8 分）

求积分$\oint_C \dfrac{e^z}{z(z-1)^3}dz$，其中$C$分别为：(1) $|z|=\dfrac{1}{4}$， (2) $|z-1|=\dfrac{1}{4}$，

(3) $|z|=2$，方向都为正向.

解：(1)C_1： $|z|=\dfrac{1}{4}$

$$\oint_{C_1}\frac{e^z}{z(z-1)^3}dz=\oint_{C_1}\frac{\frac{e^z}{(z-1)^3}}{z}dz=2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-1)^3}\right]_{z=0}=-2\pi i \qquad (3\text{分})$$

(2)C_2： $|z-1|=\dfrac{1}{4}$

$$\oint_{C_2}\frac{e^z}{z(z-1)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{z}}\right)\right]_{z=1}=\pi\mathrm{i}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left[\mathrm{e}^z\left(\frac{1}{\mathrm{z}}-\frac{1}{\mathrm{z}^2}\right)\right]\right\}_{z=1}$$

$$=\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^z\left(\frac{1}{\mathrm{z}}-\frac{2}{\mathrm{z}^2}+\frac{2}{\mathrm{z}^3}\right)\right]_{z=1}=\pi\mathrm{ie} \qquad (6\text{分})$$

(3) C_3： $|z|=2$

$$\oint_{C_3}\frac{e^z}{z(z-1)^3}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z(z-1)^3}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{z(z-1)^3}dz$$

$$=-2\pi\mathrm{i}+\pi\mathrm{ie}=\pi\mathrm{i}(\mathrm{e}-2) \qquad (8\text{分})$$

4、（本小题 8 分）

将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在圆环域 $0<|z|<1$ 和 $1<|z|<2$ 内展开为洛朗级数.

解: $0<|z|<1$ 时

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\sum_{n=o}^{\infty}(\frac{z}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{z^{n+1}})z^n \qquad (4\text{分})$$

$1<|z|<2$ 时

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-2}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

由于 $1<|z|<2$，从而 $\left|\frac{1}{z}\right|<1,\quad \left|\frac{z}{2}\right|<1$.

因此在 $1<|z|<2$ 内

有 $$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}[(\frac{1}{z})^{n+1}+(\frac{z}{2})^n]. \qquad (8\text{分})$$

5、(本小题 8 分)

找出函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的奇点，并确定奇点的类型.

解: $z=0$ 为 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的奇点. （2 分）

在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内，

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\cdots$$ （6 分）

所以，$z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点. （8 分）

6、(本小题 8 分)

利用留数计算积分 $\oint_c \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$，其中 c 为正向圆周 $|z|=2$.

解: 因为 $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ 的奇点为二级极点 $z=1$ 在圆 c 内 （3 分）

根据留数计算规则得

$$\mathrm{Res}[\frac{e^{2z}}{(z-1)^2},1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}[(z-1)^2\cdot\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{de^{2z}}{dz}=\lim_{z\to 1}2e^{2z}=2e^2.$$ （5 分）

根据留数定理得

$$\oint_c \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{e^{2z}}{(z-1)^2},1]=2\pi i\cdot 2e^2=4\pi e^2 i.$$ （8 分）

7、（本小题 8 分）

计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

解：$R(z)=\frac{1}{(z^2+2z+2)^2}$在上半平面

仅有一个二级极点$z=-1+i$ （2 分）

$\mathrm{Res}[R(z),-1+i]=\lim\limits_{z\to -1+i}\frac{d}{dz}\left[(z+1-i)^2R(z)\right]=\frac{1}{4i}$ （6 分）

积分=$\frac{\pi}{2}$ （8 分）

8、（本小题 8 分）

求一个分式线性映射$w=f(z)$, 它将圆域$|z|<1$映射成圆域$|w|<1$, 且满足条件$f(\frac{i}{2})=0$， $\arg f'(\frac{i}{2})=-\frac{\pi}{2}$.

解：已知$f(\frac{i}{2})=0$，

所以$w=f(z)$把$|z|<1$内的点$\frac{i}{2}$影射成$|w|<1$的中心.

根据将$|z|<1$映射成$|w|<1$的分式线性映射：

$w=f(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$ （3 分）

因为，$f(\frac{i}{2})=0$，所以，$\alpha=\frac{i}{2}$

所以，$w=f(z)=e^{i\theta}\frac{2z-i}{2+iz}$， 又因为$f'(\frac{i}{2})=\frac{4}{3}e^{i\theta}$， （6 分）

所以，$\theta=\arg f'(\frac{i}{2})=-\frac{\pi}{2}$,

所以，$w=f(z)=-i\frac{2z-i}{2+iz}=-\frac{1+2iz}{2+iz}$. （8 分）

四、证明题(本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分)

1、（本小题 6 分）

证明函数 $f(z)=xy^2+ix^2y$ 在何处可导？何处解析？

解　设 $u(x,y)=xy^2$，$v(x,y)=x^2y$，且在 z 平面上可微

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x^2$$ （3 分）

当 $z=0$ 时，有 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，

当 $z\neq 0$ 时，$\frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$，（5 分）

所以 $f(z)$ 只在 $z=0$ 处可导

而　$f(z)=xy^2+ix^2y$ 在复平面上处处不解析.（6 分）

2、（本小题 6 分）

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数，且 $v=u^2$，证明 $f(z)$ 在 D 内是常数.

证：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2u\frac{\partial u}{\partial x}$ （3 分）

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}=0$，　同理 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

所以 u 是常数，v 是常数，$f(z)$ 在 D 内是常数.（6 分）