数学物理方程期末复习（2019年6月）

**一、**填空题与简答题

1、方程属于 双曲 型

属于 抛物 型

属于 椭圆 型

2、

的特征方程为

特征线的方程为.

3**. **阶贝塞尔方程的表示式为：



其通解为

4**.**勒让德方程的表达式是：



5.行波法能解的定解问题是无界域内波动方程的定解问题。

6. 非齐次线性方程是自由项不为零的线性方程。

7. 简答题(本小题6分) 叙述线性偏微分方程的叠加性原理.

若是方程的解, 且级数收敛, 且逐项二次可微, 其中是任意常数, 则一定是方程



.

(6分)

(4分)



的解. 特别的, 如果是二阶线性齐次方程的解, 那么, 也是此方程的解.



二、**分离变量法**

例1 用分离变量法求下面定解问题（必须写出过程）：



解：





讨论:

(i)



解得

通解：

由 解得

所以

(ii)



通解：

由解得

所以

(iii) 



代入





利用初始条件可得













三、**特征函数展开法**

例2 求解下面定解问题（必须写出过程）



解 因为这个定解问题是:非齐次方程、齐次边界条件、齐次初始条件，

所以可用特征函数展开法来解.

先求特征函数系

设是下面定解问题的解



则



由得



解特征值问题



通过讨论得:

 特征函数

, 特征函数

所以特征函数系为: 

将原定解问题的解及自由项都按照特征函数系展开,即





代入非齐次方程,得



=

比较系数得:

, ()



由,得

, *n*=0,1,2,….

,解 

,

得

,解



,

得 

所以





例3. 不求解定解问题, 试将以下非齐次方程和非齐次边界条件同时齐次化. （本小题5分）



解: 设

则有：



代入边界条件得





四、**特征变换法**

例4 求解下列初值问题



解答见教材P64,例

例5、求下列初值问题的解：



解 特征方程:

解得 或  (4分)

令,

则原方程化为:

通解:  (8分)

由

得  (1)



上式两边积分,得

 (2) (12分)

解(1)(2)得





即



所以,初值问题的解为



 (18分)

**例6、试用行波法求解下面Cauchy问题**



解: 原方程相应的特征方程为



可分解为



求得特征线



所以做特征变换



将原方程化为



经过两次偏积分可以求得原方程的通解为

, 即



代入边界条件可得



联立求解可得,



再代入特征变换可得原方程的解为



五、积分变换法

**例7、试用积分变换法求解下面非齐次波动方程.**



(可能用到的傅里叶变换对:

， )

解：设, 其中满足齐次波动方程带有非齐次定解条件的定解问题,



而满足非齐次波动方程带有齐次定解条件的定解问题,



对于定解问题(I), 可以采用Dalembert公式直接写出结果,



对于定解问题(II)非齐次波动方程两端同时对x做傅里叶变换, 可得,



再对(II’)非齐次常微分方程两端同时对t进行拉普拉斯变换, 可得,



可以解得,



对做拉普拉斯逆变换, 可得,

.

对做傅里叶逆变换, 可得,



所以, 原问题的解为,



例8 采用积分变换法求解Cauchy问题.



解：记 ，

，

(2分)

对方程和初始条件关于做傅里叶变换，得



(6分)

方程的通解为.

利用初始条件得，代入得

(8分)





，

(10分)

同理,





(16分)

对进行傅里叶反变换，得

++

+

(20分)

六、**会计算被积函数含贝塞尔函数的积分**

例9 计算下列积分

（1）











 



（2）









 



(3)



例10、计算下列积分

（1）

解 

=

=

= (3分)

=

=

= (6分)

=

=

= (9分)

（2）

解 

 (3分)



 (6分)









 (9分)

例11 证明为方程的一个解。

证明：，





七 、**罗德里格斯表达式**

见教材P69,习题6，第1题。

例12、设，试求系数和。（本大题5分）

解：由于罗德里格斯表达式，知：的最高次项的系数为，比较等式两端最高次项的系数，得

 

在等式中令，由于，得，即

例13、（本题共6分）设为勒让德多项式，（），证明：



证 由罗德里格斯表示表达式，得

 (2分)

在中，

项为： ，

所以

=

(4分)

其它项：次数低于的项，其阶导数为0；

次数高于的项，其阶导数含因子，从而在的值为0；

因此，





 (6分)

例14 、将 展开为勒让德多项式的级数 .

解

令 

即



比较两端系数，得











解得

所以，





**八、应用题**

**P137:例1**

**P139:例2**

例15 设有半径为a的球体, 球面上温度为, 试求稳恒状态下球体内部的温度分布.

解: 稳恒状态下温度分布满足拉普拉斯方程. 由于定解条件与无关, 所以解只和r与θ有关. 因此, 温度分布满足的定解问题为,



采用变量分离法求解. 设, 代入原方程,



令



可得,



(I)是欧拉方程，其的通解为



为了保证球心温度有限, .

(II)是勒让德方程, 只有当n为整数才有界解,

.

因此, 原问题的通解为,



代入球表面的温度,



令, 可得,



被展开函数最高次数为3次, 因此只需要展开到3次勒让德多项式,

.

由于**,** 代入展开式可得,



对比上面等式两边的系数, 可以求得,



所以, 球内温度分布为,



例16 设, 采用分离变量法求解定解问题.



解: 采用变量分离法求解. 设, 代入原方程,



(2分)



(4分)



(6分)

(15分)

(I)的通解为,



(8分)

为了方程的解有限, .

(9分)



(II)是勒让德方程, 只有当n为整数才有界解,

.

(10分)

因此, 原问题的通解为,



代入球表面已知函数,

(14分)



令, 可得,



被展开函数最高次数为2次, 因此只需要展开到2次勒让德多项式,

.

(12分)

(18分)

(17分)



由于**,** 代入展开式可得,



对比上面等式两边的系数, 可以求得,

(19分)



所以, 球内u的分布为,

(20分)

