Examen terminal UE Algèbre

12 mai 2021

Corrigé

Ex. 1 1) et 2) questions de cours

3) $\mathbb{Z}$ est un anneau principal car $\mathbb{Z}$ est intègre et les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z} = (n)$ et sont donc tous principaux.

· Un anneau qui n'est pas principal est par exemple l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ car il n'est pas intègre. Un autre exemple est $\mathbb{Z}[x]$ qui est bien intègre mais où pas tout idéal est principal. P. ex. $(2,x)$ n'est pas principal. Effectivement, si $\exists f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ t.q. $(f(x)) = (2,x)$, alors $f(x) / 2$ et $f(x) / x$. On trouve alors $f(x) = 1$ mais $1 \notin (2,x) = \{2g(x) + x\,h(x) \mid g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$: Tous les polynômes de cet ensemble ont terme constante paire.

4) Le cardinal de l'anneau quotient $\mathbb{F}_p[x]/(f(x))$ avec $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ de degré n est égal à p^n, donc

$$\# \mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1) = 2^3 = 8.$$

5) Comme $\deg(x^3+x+1)=3$, on a que x^3+x+1 est irréductible sur $\mathbb{F}_2[x]$ si et seulement si x^3+x+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_2$.

On évalue en $0 \longmapsto 1 \neq 0$ dans $\mathbb{F}_2$

$1 \longmapsto 3 = 1 \neq 0$ dans $\mathbb{F}_2$

On conclut donc que x^3+x+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_2[x]$.

6) Comme $\mathbb{F}_2[x]$ est un anneau principal et x^3+x+1 est irréductible sur $\mathbb{F}_2$, on a que $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$ est un corps.

Ex. 2 1) $[A_4 : H] = \frac{|A_4|}{|H|} = \frac{12}{4} = 3$. On sait donc qu'il y a 3 classes suivant H dans A_4.

2) . $id \circ H = H$

. $(123) \circ H = \{(123), (123)(12)(34), (123)(13)(24), (123)(14)(23)\}$
$= \{(123), (134), (243), (142)\}$

. $(132) \circ H = \{(132), (132)(12)(34), (132)(13)(24), (132)(14)(23)\}$
$= \{(132), (234), (124), (143)\}$

3) . $H \circ id = H$

. $H \circ (123) = \{(123), (12)(34)(123), (13)(24)(123), (14)(23)(123)\}$
$= \{(123), (243), (142), (134)\}$

. $(132) \circ H = A_4 \setminus (H \cup H \circ (123))$
$= \{(132), (234), (124), (143)\}$

4) On voit que les classes à gauche coïncident avec les classes à droite, donc $H \trianglelefteq A_4$.

5) Comme $|A_4/H| = 3$ et que tous les groupes d'ordre 3 sont isomorphes à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a $A_4/H \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Ex 3 $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, $N \leq H$.

$$H/N \trianglelefteq G/N \iff H \trianglelefteq G.$$

Preuve: $\Downarrow$ Soient $g \in G$, $h \in H$. On veut montrer que
$$g^{-1} h g \in H.$$
Comme $H/N \trianglelefteq G/N$, on sait que
$$g^{-1}N hN gN = g^{-1}hgN \in H/N.$$
Donc $\exists h' \in H$: $g^{-1}hgN = h'N$
$$\Downarrow$$
$$h'^{-1} g^{-1} h g \in N \subseteq H$$
$$\Downarrow$$
$$g^{-1}hg \in H.$$
$\Uparrow$ Soient $g \in G$, $h \in H$. On veut montrer que
$$g^{-1}NhNgN = g^{-1}hgN \in H/N.$$
Comme $H \trianglelefteq G$, on sait que $g^{-1}hg \in H$.

On peut conclure que $g^{-1}hgN \in H/N$.