

Questions type examen

Exercice 1. Soit $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et H le sous-groupe $\langle ([1]_3, [0]_4) \rangle$ de G .

1. Déterminer les classes à gauche suivant H dans G .
2. Dresser la table de Cayley du groupe quotient G/H .

Exercice 2. Soit D_{12} le groupe diédral à 12 éléments. Soit r la rotation d'angle $2\pi/6$.

1. De quelle figure D_{12} est-il le groupe des isométries ?
2. Donner tous les éléments du sous-groupe $H = \langle r^2 \rangle$.
3. Quel est le cardinal de l'ensemble quotient D_{12}/H ?
4. Donner la partition de D_{12} induite par les classes à gauche suivant le sous-groupe H .
5. Montrer que H est un sous-groupe distingué de D_{12} .
6. Décrire le groupe quotient D_{12}/H à isomorphisme près.

Exercice 3. Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G . Montrer l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} H \text{ est un sous-groupe distingué de } G \\ \Updownarrow \\ \forall a, b \in G : ab \in H \Rightarrow ba \in H \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $I \subset \mathbb{Z}[x]$ le sous-ensemble des polynômes à terme constant pair dans l'anneau $\mathbb{Z}[x]$.

1. Montrer que I est un idéal de $\mathbb{Z}[x]$.
2. Donner un ensemble de générateurs de I .

Exercice 5. Soit $H_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}, \cdot$ le groupe des quaternions.

Pour rappel : $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, ki = j, jk = i$.

1. Calculer les expressions ji, kj et ik .
2. Donner l'ordre de chaque élément de H_8 .
3. Quels sont les ordres possibles pour les sous-groupes de H_8 ?
4. Déterminer tous les sous-groupes distingués de H_8 .
5. On considère le sous-groupe distingué $K = \{1, -1\}$ de H_8 .
6. Ecrire la décomposition de H_8 suivant les classes à gauche modulo K .
7. Ecrire la décomposition de H_8 suivant les classes à droite modulo K . Justifier votre réponse.
8. Déterminer le groupe quotient H_8/K à isomorphisme près.