

Examen terminal du 12 mai 2021
Partie Structures algébriques

Barème indicatif : Str. alg. I. 3 pts ; Str. alg. II. 5 pts ; Str. alg. III. 2pts.

Exercice 1. Str. alg. I.

Soit $A, +, \cdot$ un anneau commutatif.

1. Quand est-ce que un sous-ensemble de A est un idéal de A ?
2. Quand est-ce qu'un anneau intègre est un anneau principal ?
3. Donner un exemple d'un anneau principal et un exemple d'un anneau qui n'est pas principal.
4. Quel est le cardinal de l'anneau quotient $F_2[x]/(x^3 + x + 1)$?
5. Est-ce que $x^3 + x + 1$ est irréductible sur $F_2[x]$?
6. Est-ce que l'anneau $F_2[x]/(x^3 + x + 1)$ est un corps ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. Str. alg. II.

Soit $A_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$ le sous-groupe des permutations paires du groupe symétrique S_4 , aussi appelé le groupe alterné de degré 4. Soit H le sous-groupe de A_4 formé des éléments $id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)$.

1. Quel est l'indice de H dans A_4 .
2. Calculer les classes à gauche dans A_4 suivant le sous-groupe H .
3. Calculer les classes à droite dans A_4 suivant le sous-groupe H .
4. Montrer que H est un sous-groupe distingué de A_4 .
5. A quel groupe connu le groupe quotient A_4/H est-il isomorphe ?

Exercice 3. Str. alg. III.

Soit G un groupe. Soit N un sous-groupe distingué de G et soit H un sous-groupe de G . Supposons que N est un sous-groupe de H . Pour information : N est donc aussi un sous-groupe distingué de H et H/N est un sous-groupe de G/N . Montrer l'équivalence suivante :

$$\begin{array}{c} H/N \text{ est un sous-groupe distingué de } G/N \\ \Updownarrow \\ H \text{ est un sous-groupe distingué de } G. \end{array}$$