

Examen terminal du 25 juin 2021
Partie Structures Algébriques

Barème indicatif : Str. alg. I. 3 pts ; Str. alg. II. 4,5 pts ; Str. alg. III. 2,5pts.

Exercice 1. Str. alg. I.

Soit $(G, *)$ un groupe et soit H un sous-groupe de G .

1. Sous quelle condition dit-on que H est un sous-groupe distingué de G ?
2. Pour $g \in G$, définir la classe à gauche de g dans G suivant H .
3. Pour $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$ et $H_1 = 4\mathbb{Z}$, quels sont les éléments de la classe à gauche de 5 dans G_1 suivant H_1 ?
4. Est-ce que H_1 est un sous-groupe distingué de G_1 ? Justifier votre réponse.
5. Pour G_2 le groupe symétrique (S_3, \circ) et $H_2 = \{id, (1\ 2)\}$, quels sont les éléments de la classe à gauche de $(1\ 2\ 3)$ dans G_2 suivant H_2 ?
6. Est-ce que H_2 est un sous-groupe distingué de G_2 ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. Str. alg. II.

1. Quel est le sous-groupe engendré par 3 dans $(\mathbb{Z}, +)$? Quel est l'ordre de 3 dans \mathbb{Z} ?
2. On dénote par $((\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*, \cdot)$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Montrer que $[3]_8 \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$. Quel est l'ordre de $[3]_8$ dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$? Quel est le sous-groupe engendré par $[3]_8$ dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$?
3. Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G . Préciser le nombre de classes à gauche dans G suivant H en fonction des cardinaux de G et de H .
4. Soient G le groupe additif $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et H le sous-groupe de G engendré par $g = ([2]_3, [1]_3)$. Préciser les éléments de H . Donner la partition de G induite par les classes à gauche suivant le sous-groupe H .

Exercice 3. Str. alg. III.

1. Soit K un corps et soit I un idéal de K . Montrer que $I = (0)$ ou que $I = K$.
2. Soit F_3 le corps à 3 éléments. Quel est le cardinal de l'anneau quotient $F_3[x]/(x^2 + x + 1)$?
3. Est-ce que $x^2 + x + 1$ est irréductible dans $F_3[x]$?
4. Est-ce que l'anneau $F_3[x]/(x^2 + x + 1)$ est un corps ? Justifier votre réponse.