Examen terminal du 16 mai 2023.

Partie structures algébriques.

Ex. 1 Partie A : questions de cours $\frac{1}{2}$

Partie B : 1) $[G:H] = \dfrac{|G|}{|H|}$ car G est fini

$= \dfrac{24}{4} = 6$

2) Comme $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique d'ordre 6, si G/H était isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$,

0,5 G/H aurait un élément d'ordre 6.

L'ordre d'un élément $\sigma \circ H$ dans G/H divise l'ordre de σ dans G.

Dans G l'ordre d'un élément peut être 1, 2, 3 ou 4. L'ordre d'un élément de G/H est donc au plus 4.

On conclut que $G/H \not\simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

3) On cherche les classes à gauche suivant H.

1,5

$$(12)\circ H = \{(12), (34), \underset{\substack{\| \\ (1324)}}{(12)(13)(24)}, \underset{\substack{\| \\ (1423)}}{(12)(14)(23)}\}$$

$$(13)\circ H = \{(13), \underset{\substack{\| \\ (1234)}}{(13)(12)(34)}, (24), \underset{\substack{\| \\ (1432)}}{(13)(14)(23)}\}$$

$(14)\circ H = \{(14),\ \underbrace{(14)(12)(34)}_{=(1243)},\ \underbrace{(14)(13)(24)}_{=(1342)},\ (23)\}$

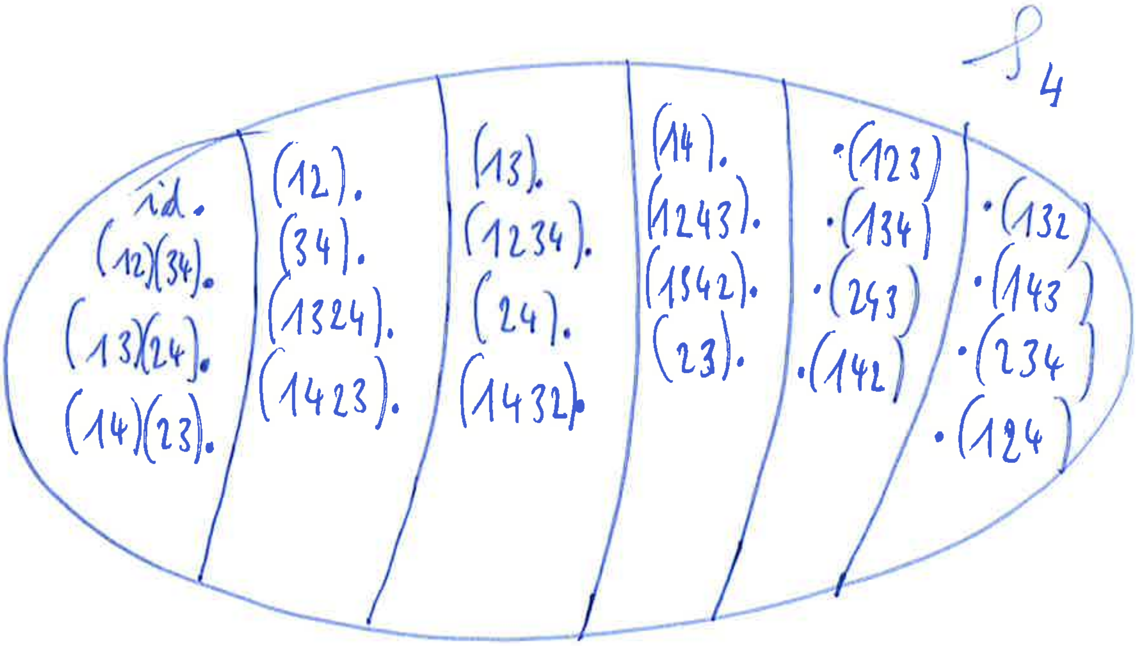
$(123)\circ H = \{(123),\ \underbrace{(123)(12)(34)}_{=(134)},\ \underbrace{(123)(13)(24)}_{=(243)},\ \underbrace{(123)(14)(23)}_{=(142)}\}$

$(132)\circ H = \{(132),\ (143),\ (234),\ (124)\}$

4) Prenons $\sigma = (12)(34)$, $\underset{\text{dans } G}{o(\sigma) = 2}$ et $\underset{\text{dans } G/H}{o(\sigma\circ H)} = 1$.

0,5

ou $\sigma = (1234)$, $\underset{\text{dans } G}{o(\sigma) = 4}$, $\underset{\text{dans } G/H}{o(\sigma\circ H)} = 2$.



Ex. 2 Partie A :

1) . $I+J$ est un sous-groupe de R :

1

. $I+J \neq \emptyset$, p. ex. $0 \in I+J$

. soient $a_1, a_2 \in I+J$, alors $\exists\, x_1, x_2 \in I, \exists\, y_1, y_2 \in J$ t.q. $a_1 = x_1 + y_1$ et $a_2 = x_2 + y_2$

$a_1 - a_2 = x_1 + y_1 - (x_2 + y_2)$

$R,+$ est un groupe commutatif

$= \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\in I} + \underbrace{(y_1 - y_2)}_{\in J}$

I car $I,+$ est un ss-groupe

J car $J,+$ est un ss-groupe

. on montre que $a_1 . a_2 \in I+J$

$a_1 . a_2 = (x_1 + y_1).(x_2 + y_2) = \underbrace{x_1 x_2}_{\in I} + \underbrace{x_1 y_2}_{\in I \cap J} + \underbrace{y_1 x_2}_{\in I \cap J} + \underbrace{y_1 y_2}_{\in J}$

$\in I+J$.

2) soit $r \in R$ et $a \in I+J$, donc $\exists\, x \in I, \exists\, y \in J$: $a = x+y$.

0,5

Alors $r.a = r.(x+y) = \underbrace{r.x}_{\in I} + \underbrace{r.y}_{\in J}$

car I et J sont des idéaux de R.

Donc $I+J$ est un idéal.

Partie B :

0,25 1) $(4)+(6) = 4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$, donc on peut prendre $a=2$.

0,25 2) L'identité de Bezout dit que $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$\mathrm{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda_1 . a_1 + \dots + \lambda_n . a_n$$

1 3) Voir cours ou TD pour la preuve que

$$(a_1, \dots, a_n) = (\mathrm{pgcd}(a_1, \dots, a_n)).$$

Ex. 3

0,5 1) Comme $\deg(X^2+X+1)=2$, il suffit de vérifier que X^2+X+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_5$, ce qui est le cas.

1 2) Comme $\mathbb{F}_5$ est un corps, $\mathbb{F}_5[X]$ est un anneau Euclidien et donc un anneau principal. Comme X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$, l'anneau quotient $\mathbb{F}_5[X] / (X^2+X+1)$ est un corps. (par un résultat de cours)

$K = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{X}, \overline{2X}, \overline{3X}, \overline{4X}, \overline{X+1}, \overline{2X+1}, \overline{3X+1}, \overline{4X+1}, \overline{X+2}, \overline{2X+2}, \overline{3X+2}, \overline{4X+2}, \overline{X+3}, \overline{2X+3}, \overline{3X+3}, \overline{4X+3}, \overline{X+4}, \overline{2X+4}, \overline{3X+4}, \overline{4X+4}\}$

1 3) $\alpha = \bar{X}$, $\beta = \overline{3X+1}$, $\alpha\beta = \overline{3X^2+X}$

$3X^2+X = 3(X^2+X+1)+3X+2$, donc $\overline{3X^2+X} = \overline{3X+2}$