Examen terminal du 13 mai 2022
Partie Structures algébriques

Barème indicatif : Str. alg. I. 2 pts ; Str. alg. II. 5 pts ; Str. alg. III. 3pts.

Exercice 1. Str. alg. I.
Soit $R, +, \cdot$ un anneau commutatif et soit S un idéal de R. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \bar{\cdot} : R/S \times R/S & \longrightarrow & R/S : \\ (x+S, y+S) & \longmapsto & (x+S)\bar{\cdot}(y+S) := x \cdot y + S \end{array}$$

est bien définie.

Exercice 2. Str. alg. II.
Partie A.- *Soient G un groupe, N un sous-groupe distingué de G et H un sous-groupe de G. Soit*

$$NH := \{nh \mid n \in N, h \in H\}.$$

Notez que si $x \in NH$, alors $x^{-1} \in NH$. Effectivement, si $x \in NH$, alors il existe $n \in N, h \in H$ tel que $x = nh$. Alors

$$x^{-1} = h^{-1}n^{-1} = (h^{-1}n^{-1})(hh^{-1}) = (h^{-1}n^{-1}h)h^{-1}.$$

Comme $N \trianglelefteq G$, $h^{-1}n^{-1}h \in N$ et donc $x^{-1} \in NH$.

1. *Montrer que NH est un sous-groupe de G.*
2. *Supposons que H est aussi un sous-groupe distingué de G. Montrer que $NH \trianglelefteq G$.*

Partie B.- *Soit G le groupe diédral $D_8 = \{id, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ à 8 éléments, i.e. le groupe des isométries du plan qui laissent invariant le carré. Pour rappel, r est la rotation d'angle $\pi/2$, s est une réflexion et $r^k s = sr^{4-k}$, $1 \leqslant k \leqslant 4$.*
Soit $N = \{id, r^2\}$ et $H = \{id, s\}$.

1. *Montrer que N est un sous-groupe distingué de D_8.*
2. *Calculer les classes à gauche suivant N dans D_8.*
3. *Est-ce que H est un sous-groupe distingué de D_8 ? Justifier votre réponse.*
4. *Expliciter le sous-groupe NH.*
5. *Est-ce que NH est un sous-groupe distingué de D_8 ? Justifier votre réponse.*

Exercice 3. Str. alg. III.

1. *Montrer que $x^4 + x + 1$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{F}_2[x]$.*
2. *Justifier pourquoi $K = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$ est un corps à 16 éléments. Lister ses éléments.*
3. *Soit α la classe de x dans K. Déterminer l'inverse de x dans K.*