Examen terminal du 16 mai 2023
Partie Structures algébriques

Barême indicatif : Str. alg. I. 4,5 pts ; Str. alg. II. 3 pts ; Str. alg. III. 2,5 pts.

Exercice 1. Str. alg. I.
Soit $(G, *)$ un groupe.
Partie A.-

1. *Soit H un sous-groupe de G. Sous quelle condition dit-on que H est un sous-groupe distingué de G ?*
2. *Supposons que H est un sous-groupe distingué de G. Préciser la loi sur l'ensemble quotient G/H qui munit G/H d'une structure de groupe.*
3. *Montrer que cette loi est bien définie.*
4. *Quel est l'élément neutre du groupe quotient G/H ?*

Partie B.- *Soit G le groupe S_4 des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. On admettra que $H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ forme un sous-groupe distingué de G à 4 éléments.*

1. *Quel est l'indice de H dans $G = S_4$?*
2. *Est-ce que le quotient G/H est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$? Justifier votre réponse.*
3. *Donner la partition de S_4 induite par les classes à gauche suivant le sous-groupe H.*
4. *Trouver un élément σ de S_4 tel que l'ordre de σ dans G soit différent de l'ordre de $\sigma \circ H$ dans G/H.*

Exercice 2. Str. alg. II.
Partie A.- *Soient I et J des idéaux d'un anneau commutatif $R, +, \cdot$. Soit $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$.*

1. *Montrer que $I + J$ est un sous-anneau de R.*
2. *Montrer que $I + J$ est un idéal de R.*

Partie B.- *Soit R l'anneau $\mathbb{Z}$.*

1. *Soient $I = (4)$ et $J = (6)$. Trouver un élément $a \in \mathbb{Z}$ tel que $I + J = (a)$.*
2. *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Rappeler l'identité de Bezout pour $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*
3. *Montrer que l'idéal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est principal. Justifier votre réponse.*

Exercice 3. Str. alg. III.

1. *Montrer que* $x^2 + x + 1$ *est un polynôme irréductible dans* $\mathbb{F}_5[x]$.
2. *Justifier pourquoi* $K = \mathbb{F}_5[x]/(x^2 + x + 1)$ *est un corps à* 25 *éléments. Lister ses éléments.*
3. *Soit* α *la classe de* x *dans* K *et* β *la classe de* $3x + 1$ *dans* K. *Déterminer le produit* $\alpha \cdot \beta$ *dans* K. *Trouver un représentant de* $\alpha \cdot \beta$ *de degré au plus* 1.