Exo 1 Soit $G = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$ et H le sous-groupe

$<([1]_3, [0]_4)>$ de G.

1) Déterminer les classes à gauche suivant H dans G.

$H = \{([1]_3, [0]_4), ([2]_3, [0]_4), ([0]_3, [0]_4)\}$

Comme G est fini, on a

$$[G:H] = \frac{|G|}{|H|} = 4$$

On détermine les classes à gauche suivant H dans G :

- H
- Comme $([0]_3, [1]_4) \notin H$, on a que
$$([0]_3, [1]_4) + H$$
détermine une autre classe à gauche :
$$([0]_3, [1]_4) + H = \{([0]_3, [1]_4), ([1]_3, [1]_4), ([2]_3, [1]_4)\}$$
- Comme $([0]_3, [2]_4) \notin H \cup [([0]_3, [1]_4) + H]$, la classe $([0]_3, [2]_4) + H$ est une autre classe.

$$([0]_3,[2]_4)+H=\{([0]_3,[2]_4),([1]_3,[2]_4),([2]_3,[2]_4)\}$$

. Comme $([0]_3,[3]_4)$ n'appartient pas à une des classes déjà données, cet élément détermine une autre classe à gauche suivant H :

$$([0]_3,[3]_4)+H=\{([0]_3,[3]_4),([1]_3,[3]_4),([2]_3,[3]_4)\}$$

Ces 4 classes à gauche forment une partition de G.

2) Dresser la table de Cayley du groupe quotient G/H.

On note $G/H=\{\overline{([0]_3,[0]_4)},\overline{([0]_3,[1]_4)},\overline{([0]_3,[2]_4)},\overline{([0]_3,[3]_4)}\}$

$+$	$\overline{([0]_3,[0]_4)}$	$\overline{([0]_3,[1]_4)}$	$\overline{([0]_3,[2]_4)}$	$\overline{([0]_3,[3]_4)}$
$\overline{([0]_3,[0]_4)}$	$\overline{([0]_3,[0]_4)}$	$\overline{([0]_3,[1]_4)}$	$\overline{([0]_3,[2]_4)}$	$\overline{([0]_3,[3]_4)}$
$\overline{([0]_3,[1]_4)}$	$\overline{([0]_3,[1]_4)}$	$\overline{([0]_3,[2]_4)}$	$\overline{([0]_3,[3]_4)}$	$\overline{([0]_3,[0]_4)}$
$\overline{([0]_3,[2]_4)}$	$\overline{([0]_3,[2]_4)}$	$\overline{([0]_3,[3]_4)}$	$\overline{([0]_3,[0]_4)}$	$\overline{([0]_3,[1]_4)}$
$\overline{([0]_3,[3]_4)}$	$\overline{([0]_3,[3]_4)}$	$\overline{([0]_3,[0]_4)}$	$\overline{([0]_3,[1]_4)}$	$\overline{([0]_3,[2]_4)}$

Éléments de correction

Ex 2 1) D_{12} est le groupe des isométries d'un polygône régulier à 6 côtés.

2) $H = \langle r^2 \rangle = \{ r^2, r^2 \circ r^2 = r^4, r^2 \circ r^2 \circ r^2 = r^6 = id \}$

3) Par le thm de Lagrange

$$\left| D_{12}/_H \right| = \frac{|D_{12}|}{|H|} = \frac{12}{3} = 4$$

4) On détermine les classes à gauche suivant H :

- $id \circ H = H$
- comme $r \notin H$, $r \circ H$ est une autre classe à gauche. $r \circ H = \{ r^3, r^5, r \}$
- comme $s \notin H \cup r \circ H$, la classe $s \circ H$ est une autre : $s \circ H = \{ sr^2, sr^4, s \}$
- comme $sr \notin H \cup r \circ H \cup s \circ H$, la classe $sr \circ H$ est encore une autre classe à gauche suivant H.

$$sr \circ H = \{ sr^3, sr^5, sr \}$$

Conclusion : La partition de D_{12} induite par les classes à gauche suivant H est :

$$D_{12} = H \cup r \circ H \cup s \circ H \cup sr \circ H$$

5) $H \trianglelefteq D_{12} \Leftrightarrow \forall g \in D_{12} : gH = Hg$.

On calcule $H \circ r = \{r^3, r^5, r\}$.

On calcule $H \circ s = \{r^2 s, r^4 s, s\}$
$= \{s r^4, s r^2, s\}$

On calcule $H \circ sr = \{r^2 sr, r^4 sr, sr\}$
$= \{s r^5, s r^3, sr\}$.

Conclusion : comme les classes à gauche coïncident avec les classes à droite, on a $H \trianglelefteq D_{12}$.

6) Comme $H \trianglelefteq D_{12}$, l'ensemble quotient D_{12}/H est un groupe. Il est de cardinal 4, donc il est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On regarde les ordres des éléments de D_{12}/H :

$$D_{12}/H = \{\overline{id}, \overline{r}, \overline{s}, \overline{sr}\}$$

$$o(\overline{id}) = 1$$

$$o(\overline{r}) = 2 \text{ car } \overline{r}^2 = \overline{r^2} = \overline{id} \text{ et } \overline{r} \neq \overline{id}$$

$$o(\overline{s}) = 2 \text{ car } \overline{s}^2 = \overline{s^2} = \overline{id} \text{ et } \overline{s} \neq \overline{id}$$

$$o(\overline{sr}) = 2 \text{ car } \overline{sr}^2 = \overline{(sr)^2} = \overline{id} \text{ et } \overline{sr} \neq \overline{id}$$

Ainsi on trouve que $D_{12}/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ex. 3 $\quad G$ groupe, $H \leq G$.

$$H \trianglelefteq G$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall a, b \in G : ab \in H \Rightarrow ba \in H$$

Preuve : $\Downarrow$ $H \trianglelefteq G$, donc $\forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H$.

$b \in G$, $ab \in H \Rightarrow$

$$b(ab)b^{-1} = ba \in H$$

$\Uparrow$ soient $g \in G$, $h \in H$, alors prenons

$$a = g^{-1}$$
$$b = gh.$$

Alors $ab = h \in H$ et donc $ba = ghg^{-1} \in H$,

donc $H \trianglelefteq G$. $\blacksquare$

Ex04. $I \subseteq \mathbb{Z}[x]$ est le sous-ensemble des polynômes à terme constant pair dans l'anneau $\mathbb{Z}[x]$.

1) Montrer que I est un idéal de $\mathbb{Z}[x]$.

- I est un ss-groupe de $\mathbb{Z}[x]$ car $I \neq \emptyset$ (en effet le polynôme zéro appartient à I) et si $p(x), q(x) \in I$, alors $p(x) - q(x) \in I$. (car un nombre pair − un nombre pair est toujours pair).
- I est même un ss-anneau de $\mathbb{Z}[x]$ car si $p(x), q(x) \in I$, alors $p(x) . q(x) \in I$ (car un nombre pair × un nombre pair est toujours pair).
- Pour que I soit un idéal de $\mathbb{Z}[x]$, il faut que $\forall p(x) \in I, \forall q(x) \in \mathbb{Z}[x]$:

$$q(x) . p(x) \in I.$$

Comme le coeff. constant de $q(x) . p(x)$ sera encore pair, on a bien que $q(x) . p(x) \in I$.

2) Donner un ensemble de générateurs de I :

$I = (2, x)$ car

$(2,x) = \{2.p(x) + x.q(x) \,/\, p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$.

Exo 5 $H_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$.

1) $ji = ?$

Comme $jk = i$, on a $j \cdot jk = ji = -k$.

$kj = ?$

Comme $ki = j$, on a $k . ki = kj = -i$

$ik = ?$

Comme $ij = k$, on a $i . ij = i . k = -j$.

2) $o(1) = 1$

$o(-1) = 2$

$o(i) = 4$ car $i^4 = 1$ et $i^2 \neq 1$

De même : $o(-i) = o(j) = o(-j) = o(k) = o(-k) = 4$.

3) Comme $|H_8| = 8$, le thm de Lagrange dit que si H est un ss-groupe de H_8, alors $|H| \in \{1, 2, 4, 8\}$.

4) Comme $Z(H_8) = \{1, -1\}$ on a que ses ss-groupes sont distingués dans H_8 :

$\{1\} \trianglelefteq H_8$ et $\{1, -1\} \trianglelefteq H_8$.

Il n'y a pas d'autres ss-groupes d'ordre 2 car si $h \in H$, alors $o(h) \,/\, |H|$ et on a vu que l'ordre des autres él. est 4.

Les ss-gr. d'ordre 4 sont $\langle i \rangle$, $\langle j \rangle$ et $\langle k \rangle$ et comme ils sont d'indice 2 dans H_8, ils sont distingués dans H_8 :

$$\underset{\langle -i \rangle}{\underset{\|}{\langle i \rangle}} \trianglelefteq H_8, \quad \underset{\langle -j \rangle}{\underset{\|}{\langle j \rangle}} \trianglelefteq H_8, \quad \underset{\langle -k \rangle}{\underset{\|}{\langle k \rangle}} \trianglelefteq H_8$$

Bien sûr on a aussi $H_8 \trianglelefteq H_8$.

On a donc que tous les ss-groupes de H_8 sont distingués dans H_8.

6) On détermine la décomposition de H_8 suivant les classes à gauche modulo (= suivant) $K = \{1, -1\}$.

Les classes à gauche sont :

- $K = 1.K = -1.K$
- Comme $i \notin K$, $i.K$ est une autre classe à gauche : $iK = \{i, -i\} = -i.K$
- Comme $j \notin K \cup iK$, jK est une autre classe à gauche : $jK = \{j, -j\} = -j.K$
- La dernière classe à gauche est $kK = \{k, -k\} = -k.K$

La décomposition est :

$$H_8 = K \sqcup iK \sqcup jK \sqcup kK$$

7) La décomposition de H_8 suivant les classes à droite modulo K est donnée par l'union des classes à droite :

- K
- $K.i$
- $K.j$
- $K.k$

donc $K \cup K.i \cup K.j \sqcup K.k$

C'est la même que la décomposition induite par les classes à gauche parce que $K \trianglelefteq H_8$.

8) On détermine H_8/K à isomorphisme près.

$$H_8/K = \{ \underset{\underset{1.K}{\shortparallel}}{\bar{1}}, \underset{\underset{i.K}{\shortparallel}}{\bar{i}}, \underset{\underset{j.K}{\shortparallel}}{\bar{j}}, \underset{\underset{k.K}{\shortparallel}}{\bar{k}} \}$$

Comme le groupe quotient est d'ordre 4, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$o(\bar{1}) = 1$

$o(\bar{i}) = 2$ car $\bar{i}.\bar{i} = \bar{i^2} = \overline{-1} = \bar{1}$

De même : $o(\bar{j}) = 2 = o(\bar{k})$

Donc $H_8/K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

La table de Cayley de H_8/K est :

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{i}$	$\bar{1}$	$\bar{k}$	$\bar{j}$
$\bar{j}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$	$\bar{1}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{k}$	$\bar{j}$	$\bar{i}$	$\bar{1}$