Examen terminal du 13 mai 2022

Partie structures algébriques

Ex. 2 Partie A : G un groupe, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$

$$NH := \{ nh \mid n \in N, h \in H \}$$

Première observation : si $x \in NH$, alors $x^{-1} \in NH$.
Effectivement, si $x \in NH$, alors il existe $n \in N$ et $h \in H$ tel que $x = nh$. Alors

$$x^{-1} = h^{-1}n^{-1} = (h^{-1}n^{-1})(hh^{-1}) = \underbrace{(h^{-1}n^{-1}h)}_{\substack{\in N \\ \text{car } N \trianglelefteq G}} \underbrace{h^{-1}}_{\in H}$$

et donc $x^{-1} \in NH$.

1) Montrer que NH est un sous-groupe de G :

- Comme $e_G \in N$ et $e_G \in H$, on a
$$e_G = e_G e_G \in NH \text{ et donc } NH \neq \emptyset.$$
- soient $x \in NH$ et $y \in NH$. Nous voulons montrer que $xy \in NH$.
$$\exists n_1 \in N, \exists h_1 \in H : x = n_1 h_1$$
$$\exists n_2 \in N, \exists h_2 \in H : y = n_2 h_2$$

Donc :
$$\begin{aligned} xy &= n_1 h_1 n_2 h_2 \\ &= n_1 h_1 n_2 (h_1^{-1} h_1) h_2 \\ &= n_1 \underbrace{(h_1 n_2 h_1^{-1})}_{\in N \text{ car } N \trianglelefteq G} h_1 h_2 \end{aligned}$$

et donc $xy \in NH$.

- nous savons déjà que $x^{-1} \in NH$ si $x \in NH$.

Nous pouvons donc conclure que $NH \leq G$.

2) Supposons $H \trianglelefteq G$. Montrer que $NH \trianglelefteq G$.

Soient $g \in G$ et $x \in NH$. Nous allons montrer que $gxg^{-1} \in NH$.

Comme $x \in NH$, il existe $n \in N$ et $h \in H$ t.q. $x = nh$.

Alors

$$gxg^{-1} = gnhg^{-1} = gn(g^{-1}g)hg^{-1}$$
$$= \underbrace{(gng^{-1})}_{\substack{\in N \text{ car} \\ N \trianglelefteq G}} \underbrace{(ghg^{-1})}_{\substack{\in H \text{ car} \\ H \trianglelefteq G}}$$

et donc $gxg^{-1} \in NH$.

Partie B. $G = D_8$, $N = \{id, r^2\}$, $H = \{id, s\}$.

1) Montrer que $N \trianglelefteq D_8$:

un élément de D_8 est de la forme r^k ou sr^k.

Bien sûr, $\begin{cases} r^k x r^{-k} \in N \text{ si } x = id \\ sr^k x (sr^k)^{-1} \in N \text{ si } x = id. \end{cases}$

Vérifions pour $x = r^2$:

$$r^k r^2 r^{-k} = r^2 \in N$$
$$sr^k r^2 (sr^k)^{-1} = sr^k r^2 r^{-k} s = sr^2 s$$
$$= ssr^2$$
$$= r^2 \in N.$$

2) Les classes à gauche suivant N dans D_8 :

$id\,N = N = \{id, r^2\}$

$rN = \{r, r^3\}$

$sN = \{s, sr^2\}$

$srN = \{sr, sr^3\}$

3) Est-ce que $H \trianglelefteq D_8$?

Calculons $\quad r\underset{H}{\underset{\Uparrow}{s}}r^{-1} = rsr^3 = sr^2 \notin H.$

Nous en déduisons que $H \ntrianglelefteq D_8$.

4) Déterminer $NH = \{nh \,/\, n \in N,\ h \in H\}$ pour $N = \{id, r^2\}$ et $H = \{id, s\}$.

$id \circ id = id \in NH$

$id \circ s = s \in NH$

$r^2 \circ id = r^2 \in NH$

$r^2 \circ s = r^2 s = sr^2 \in NH$

Donc $NH = \{id, r^2, s, sr^2\}$

5) Comme $H \ntrianglelefteq G$, nous ne pouvons pas utiliser le résultat 2 de la partie A.

Comme $[G : NH] = 2$, nous pouvons néanmoins conclure que $NH \trianglelefteq G$.

Ex. 3 1) Tout d'abord on vérifie que x^4+x+1 n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_2$. Effectivement

$0^4+0+1 \neq 0$ dans $\mathbb{F}_2$

$1^4+1+1 \neq 0$ dans $\mathbb{F}_2$.

Nous vérifions maintenant que x^4+x+1 n'est pas le produit de 2 polynômes de degré 2.

Si $x^4+x+1 = P(x).Q(x)$ avec $P(x)$ et $Q(x)$ de degré 2,

alors $P(x) = x^2+ax+1$

et $Q(x) = x^2+bx+1$.

$$P(x).Q(x) = x^4 + x^3(b+a) + abx^2 + x(a+b) + 1$$

Il faudrait $\begin{cases} a+b=0 \\ ab=0 \\ a+b=1 \end{cases}$ ce qui est un système contradictoire.

Nous pouvons conclure que x^4+x+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_2[x]$.

2) Comme $\mathbb{F}_2$ est un corps, $\mathbb{F}_2[x]$ est un anneau Euclidien et donc aussi un anneau principal. Nous avons montré que x^4+x+1 est un élément irréductible dans cet anneau principal et donc le quotient $\mathbb{F}_2[x]/(x^4+x+1)$ est un corps.

Ses éléments sont $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{x}, \overline{x+1}, \overline{x^2}, \overline{x^2+1}, \overline{x^2+x}, \overline{x^2+x+1}, \overline{x^3}, \overline{x^3+1}, \overline{x^3+x}, \overline{x^3+x^2}, \overline{x^3+x+1}, \overline{x^3+x^2+1}, \overline{x^3+x^2+x}, \overline{x^3+x^2+x+1}\}$

3) Soit $\alpha = \overline{x} \in K$. Déterminer x^{-1} :

Comme $\overline{x} \cdot \overline{x^3+1} = \overline{x^4+x} = \overline{-1} = \overline{1}$,

l'inverse de α est $\overline{x^3+1}$.