Examen terminal du 25 juin 2021

Partie Structures algébriques.

Ex. 1. $G, *$ un groupe, $H \leq G$

1) Voir cours

2) " "

3) $G_1 = \mathbb{Z}, +$, $H_1 = 4\mathbb{Z}$

$$5 + H_1 = 5 + 4\mathbb{Z} = \{5, 9, 13, \dots, 1, -3, \dots\}$$

4) $H_1 \trianglelefteq G_1$ car $\mathbb{Z}, +$ est un groupe abélien et donc tous ses sous-groupes sont distingués.

5) $G_2 = S_3, \circ$, $H_2 = \{id, (12)\}$

$$(123) \circ H_2 = \{(123), (123) \circ (12) = (13)\}$$

6) $H_2 \circ (123) = \{(123), (12) \circ (123) = (23)\}$

Comme $(123) \circ H_2 \neq H_2 \circ (123)$, nous pouvons conclure que $H_2 \ntrianglelefteq S_3$. Effectivement, si H_2 était un sous-groupe distingué de S_3, alors $\forall x \in S_3$, il aurait fallu que

$$x \circ H_2 = H_2 \circ x.$$

Ex. 2

1) $\langle 3 \rangle = 3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$o(3) = \infty$

2) $\text{pgcd}(3,8) = 1$ donc $[3]_8 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^*$.

Comme $[3]_8 . [3]_8 = [9]_8 = [1]_8$, l'ordre de $[3]_8$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^*$ est 2.

$\langle [3]_8 \rangle = \{ [1]_8, [3]_8 \}$

3) Le nombre de classes à gauche dans G suivant H est $[G:H] = \dfrac{|G|}{|H|}$ si G est fini.

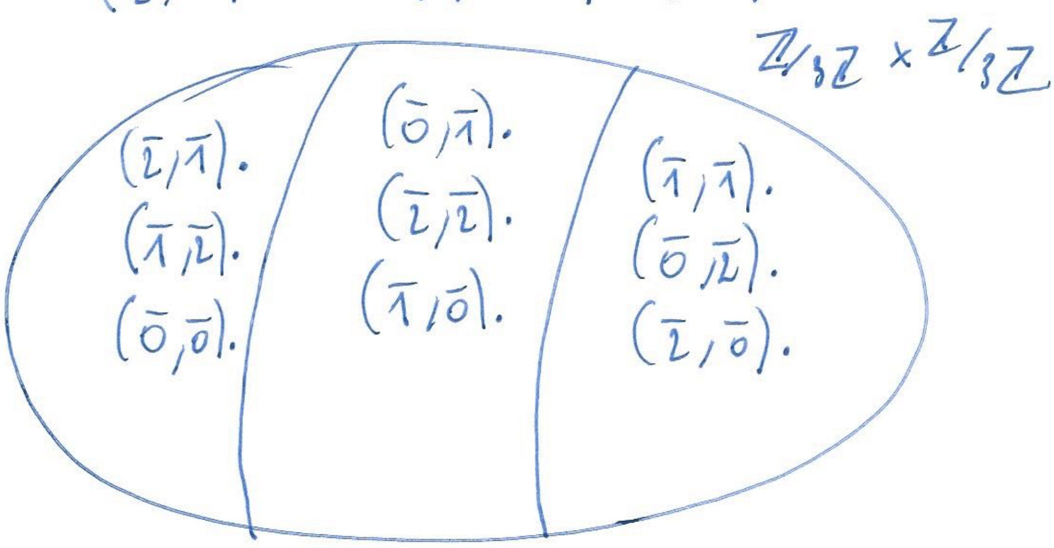
4) $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$H = \langle (\bar{2},\bar{1}) \rangle = \{(\bar{2},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{0},\bar{0})\}$

$(\bar{0},\bar{0}) + H = \{(\bar{2},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{0},\bar{0})\}$

$(\bar{1},\bar{0}) + H = \{(\bar{0},\bar{1}), (\bar{2},\bar{2}), (\bar{1},\bar{0})\}$

$(\bar{2},\bar{0}) + H = \{(\bar{1},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{2},\bar{0})\}$



Ex. 3

1) Voir le cours.

2) $\# \mathbb{F}_3[x] / (x^2+x+1) = 3^2 = 9$

3) Comme $\deg(x^2+x+1) = 2$, il suffit de vérifier s'il a des racines dans $\mathbb{F}_3$.

$x=0 \to 1 \neq 0$ dans $\mathbb{F}_3$

$x=1 \to 1^2+1+1 = 3 = 0$ dans $\mathbb{F}_3$

Comme x^2+x+1 a une racine dans $\mathbb{F}_3$, ce polynôme est réductible dans $\mathbb{F}_3[x]$.

4) $\mathbb{F}_3$ étant un corps, l'anneau $\mathbb{F}_3[x]$ est alors Euclidien et donc principal.
Pour que $\mathbb{F}_3[x] / (f(x))$ soit un corps,

il faut que $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{F}_3[x]$.
Nous concluons donc que $\mathbb{F}_3[x] / (x^3+x+1)$

n'est pas un corps.