

Draft fiche introduction à l'algèbre linéaire

Gabriel Legout: gabriel.legout9@gmail.com

19 décembre 2025

Résumé

Cette fiche fera une introduction à l'algèbre linéaire qui pourra intéresser les étudiants non mathématiciens des portails ST et SV ainsi que certains étudiants du portail Éco-Gestion. Une partie de cette fiche est consacrée aux étudiants au tutorat de médecine dans le cadre du cours de BioStatistique dans un parcours qui est expliqué dans la section . Même si une grande partie (sans que ce soit les plus simples) des notions abordées ici ne sont pas à proprement parlé dans le programme de l'UE Biostatistique, elles permettent d'inscrire les notions abordées dans un contexte plus global qui facilite l'assimilation des notions.

Comprendre les outils mathématiques de base en modélisation (statistique, proba, équadiff) est d'utilité publique. Les médecins sont souvent amenés à prendre des décisions qui peuvent avoir de graves conséquences. Mieux vaut qu'ils les prennent en ayant une bonne connaissance des outils qu'ils utilisent.

Cette fiche ne se substitue pas entièrement à celle du tutorat mais apporte des précisions et des explications qui permettent une meilleure compréhension des notions pas évidentes qui sont présentées dans le cours de Biostatistique et de les replacer dans un contexte mathématique plus global.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Les espaces vectoriels	3
2.1	Définition et exemple	3
2.2	Les matrices	4
3	Test section	4

Avant-propos : Comment utiliser efficacement cette fiche

Certains concepts abordés sont compliqués et nécessite parfois du recul, du travail et des démonstration pour éviter de voir apparaître magiquement des formules. Évidemment, les démonstrations ne sont pas à connaître et peuvent être sautées. Certaines parties ont été ajouté pour donner du contexte ou expliquer certaines parties plus subtiles. Si votre objectif est d'apprendre tout par cœur, vous pouvez les sauter aussi.

Voici le code couleur :

1 Introduction

Historiquement, les mathématiques se résumaient à l'étude des nombres et des opérations entre eux, d'abord avec des entiers, puis avec des nombres plus complexes. On appelle ça l'arithmétique. Plus tard, on a développé l'idée de fonctions dans des ensembles de nombre. Ce n'est ni plus ni moins qu'un objet qui va associer un nombre à un autre (notez donc bien que les suites sont un cas particulier de fonctions sous cette définition.) Ce sont d'ailleurs des fonctions de $\mathbb{N} \rightarrow E$ avec E quelconque. En général, on appelle Analyse, l'étude des fonctions. Enfin, à partir du 18e siècle, grâce à des avancées et un effort considérable en Europe pour la physique, on a eu besoin de définir des espaces plus compliqués que les espaces de nombres avec lesquelles on travaillait depuis plus de 2000 ans. C'est alors qu'est apparu l'Algèbre, c'est à dire l'étude du comportement (opérations, compositions etc) d'objets qui ne sont pas forcément des nombres. Bien sûr, ce n'est pas une catégorisation absolue des maths en ces quelques domaines (il en existe d'autres comme la Topologie) et ces différents domaines s'entre-couplent régulièrement.

Enfin, l'Algèbre Linéaire c'est donc le domaine des mathématiques qui va s'intéresser aux objets des espaces linéaires.

Ces domaines peuvent paraître abstrait mais ils ont des applications pratiques assez faciles à expliquer. L'arithmétique s'occupe beaucoup de problèmes sur les nombres premiers (pour en faire des décompositions, leur distribution etc) ce qui s'est révélé essentiel est cryptographie. L'analyse permet de calculer, par exemple, la fréquence de résonance d'un pont, on sait alors qu'un régiment qui marche au pas sur un pont peut le faire entrer en résonance et qu'il risque donc de s'effondrer. Enfin, l'Algèbre linéaire est essentiel pour la résolutions d'équations différentielles ou pour toute l'informatique moderne (théorie des graphes, machine learning etc.) Je ferai des petites parties hors programme sur les méthodes d'apprentissages pour l'intelligence artificielle afin d'illustrer certaines notions car je pense que ces notions vont vous intéresser et que je connais bien le domaine car j'effectue un stage de recherche dans le domaine.

2 Les espaces vectoriels

2.1 Définition et exemple

Un \mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{K} -EV) est un ensemble de nombres qui est stable par additions et multiplication par un scalaire.

Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un scalaire va donc être un nombre qui va appartenir à \mathbb{K} .

Définition stabilité par addition et multiplication scalaire

Si E est un \mathbb{K} -EV, soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la stabilité par addition et multiplication scalaire va s'écrire respectivement :

$$x + y \in E \quad \text{et} \quad \lambda x \in E$$

Qui peut facilement se combiner en :

$$x + \lambda y \in E$$

Ici, le rôle de x et y est interchangeable. Il suffit que la propriété soit vraie pour un point quelconque et ça implique qu'il est vrai pour tous donc $\lambda x \in E$ montre la même chose que $\lambda y \in E$.

Il y a pleins d'exemple d'espaces vectoriels. Déjà, l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est un espace vectoriel. C'est le cas de tous les espaces de la forme \mathbb{K}^n , avec \mathbb{K} un corps (ici ça sera \mathbb{R} ou \mathbb{C}) et $n \in \mathbb{N}$ qui ne sont rien d'autres que des n-uplets. Un point x de \mathbb{K}^n s'écrit simplement $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ avec $x_i \in \mathbb{K}$ pour $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ qui sont simplement ses composantes dans l'espace. On dit que x est un vecteur de \mathbb{K}^n . En physique on l'écrirait \vec{x} mais comme en math les vecteurs n'ont pas la même fonction qu'en physique (en particulier au niveau des points d'applications), on ne met pas la flèche au dessus (il y a aussi moins de risque de confusion et ça allège les notations.)

On a aussi d'autres espaces vectoriels comme $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} ou $\mathbb{K}_n[X]$, l'espace des polynômes de degré au plus n .

2.2 Les matrices

On peut voir les matrices de comme des tableaux de nombres et donc celles de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ comme des tableaux à n lignes et p colonnes. Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$, alors $M \in M_{3,2}(\mathbb{K})$

Cependant, comme je l'ai expliqué au dessus, $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel donc les matrices sont des points de l'espace des matrices et se sont ce qu'on appelle en math des vecteurs. C'est essentiel de comprendre cela car c'est la raison pour laquelle on utilise des matrices et elles vérifient donc la stabilité par addition et multiplication scalaire expliquée plus haut.

3 Test section

Définition dérivation

test HP

Définition équation différentielle d'ordre 1

test def classique

Exercice 1.1

test exemples

Méthode de variation de la constante (MVC) (Optionnel)

test méthode

Définition : stabilité par addition et multiplication scalaire

test B