

Draft fiche introduction à l'algèbre linéaire

Gabriel Legout
gabriel.legout9@gmail.com

14 janvier 2026

Résumé

Cette fiche fera une introduction à l'algèbre linéaire qui pourra intéresser les étudiants non mathématiciens des portails ST et SV ainsi que certains étudiants du portail Éco-Gestion. Une partie de cette fiche est consacrée aux étudiants au tutorat de médecine dans le cadre du cours de BioStatistique dans un parcours qui est expliqué dans la section Avant-propos : Comment utiliser efficacement cette fiche.

Même si une grande partie (sans que ce soit les plus simples) des notions abordés ici ne sont pas à proprement parlé dans le programme de l'UE Biostatistique, elles permettent d'inscrire les notions abordées dans un contexte plus global qui facilite l'assimilation des notions.

Comprendre les outils mathématiques de base en modélisation (statistique, proba, équadiff) est d'utilité publique. Il est important de s'intéresser au fonctionnement théorique des outils qu'on utilise afin de garder un regard critique sur leur utilisation.

Cette fiche ne se substitue pas entièrement à celle du tutorat ou à un cours dispenser par votre prof mais apporte des précisions et des explications qui permettent une meilleure compréhension des notions pas évidentes qui sont présentées dans le cours de Biostatistique.

Enfin, si cette fiche contient des typos, des fautes d'orthographies ou pire, des erreurs, je m'en excuse. Vous pouvez néanmoins me les signaler à l'adresse email mentionné au début de la fiche. Ces fiches ont été écrites sur mon temps libre et bien qu'elles ne soient pas parfaites, elles ont le mérite d'exister, c'est déjà ça ! (reste à montrer leur unicité.)

Bonne lecture.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Les espaces vectoriels	4
2.1	Définition et exemple	4
2.2	Les matrices	5

Avant-propos : Comment utiliser efficacement cette fiche

Certains concepts abordés sont compliqués et nécessitent parfois du recul, du travail et des démonstrations pour éviter de voir apparaître magiquement des formules. Évidemment, les démonstrations ne sont pas à connaître et peuvent être sautées. Certaines parties ont été ajoutées pour donner du contexte ou expliquer certaines parties plus subtiles.

Guide pour les sections Les sections ont été organisées pour être lues dans l'ordre, des références à des théorèmes, définitions ou explications passées parsemant le texte. Cependant, il y a des **parties "optionnelles"** qui pourront être sautées en première lecture, mais qui permettent de replacer les notions dans leur contexte ou alors d'expliquer des concepts qui ne sont pas dans les programmes mais qui sont nécessaires pour comprendre la suite. **Ces sections seront indiquées par un astérisque (*) ou par la mention optionnelle dans le corps du texte.**

Elles ne sont pas pour autant inutiles et je recommande fortement de les lire au moins une fois pour se donner une idée : elles ont de grandes chances de répondre à certaines de vos interrogations légitimes.

Code couleur Les théorèmes, définitions, méthodes, exercices etc sont encapsulés dans des boîtes de couleurs, voici la signification de chaque couleur :

Les blocs bleus : Hors-programme

Ils contiennent des définitions hors programme, qui ne sont pas à apprendre mais qui aident à la définition de concepts qui vont nous aider pour la suite.

Les blocs verts : Exercices

Ils contiennent des exercices corrigés portant sur les thèmes des sections et qui aident à assimiler les notions. Ils sont tous abordables.

Les blocs gris Ils contiennent des informations complémentaires ou des notions annexes. Ils sont complémentaires aux blocs bleus.

Les blocs jaunes : Méthodes

Ils contiennent des explications de méthodes annexes ou hors programme pour résoudre certains exercices.

Les blocs magentas : Cours

Ils contiennent les définitions à connaître. Il faut les comprendre et les apprendre

Autres blocs

Ces blocs :

Preuve

Remarques

Vont compléter les informations des blocs de la couleur associée.

1 Introduction

Historiquement, les mathématiques se résumaient à l'étude des nombres et des opérations entre eux, d'abord avec des entiers, puis avec des nombres plus complexes. On appelle ça l'arithmétique. Plus tard, on a développé l'idée de fonctions dans des ensembles de nombre. Ce n'est ni plus ni moins qu'un objet qui va associer un nombre à un autre (notez donc bien que les suites sont un cas particulier de fonctions sous cette définition.) Ce sont d'ailleurs des fonctions de $\mathbb{N} \rightarrow E$ avec E quelconque. En général, on appelle Analyse, l'étude des fonctions. Enfin, à partir du 18e siècle, grâce à des avancées et un effort considérable en Europe pour la physique, on a eu besoin de définir des espaces plus compliqués que les espaces de nombres avec lesquelles on travaillait depuis plus de 2000 ans. C'est alors qu'est apparue l'Algèbre, c'est à dire l'étude du comportement (opérations, compositions etc) d'objets qui ne sont pas forcément des nombres. Bien sûr, ce n'est pas une catégorisation absolue des maths en ces quelques domaines (il en existe d'autres comme la Topologie) et ces différents domaines s'entre-couplent régulièrement.

Enfin, l'Algèbre Linéaire c'est donc le domaine des mathématiques qui va s'intéresser aux objets des espaces linéaires.

Ces domaines peuvent paraître abstrait mais ils ont des applications pratiques assez faciles à expliquer. L'arithmétique s'occupe beaucoup de problèmes sur les nombres premiers (pour en faire des décompositions, leur distribution etc) ce qui s'est révélé essentiel est cryptographie. L'analyse permet de calculer, par exemple, la fréquence de résonance d'un pont, on sait alors qu'un régiment qui marche au pas sur un pont peut le faire entrer en résonance et qu'il risque donc de s'effondrer. Enfin, l'Algèbre linéaire est essentiel pour la résolution d'équations différentielles ou pour toute l'informatique moderne (théorie des graphes, machine learning etc.) Je ferai des petites parties hors programme sur les méthodes d'apprentissage pour l'intelligence artificielle afin d'illustrer certaines notions car je pense que ces notions vont vous intéresser et que je connais bien le domaine car j'effectue un stage de recherche dans le domaine.

2 Les espaces vectoriels

2.1 Définition et exemple

Un \mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{K} -EV) est un ensemble de nombres qui est stable par additions et multiplication par un scalaire.

Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un scalaire va donc être un nombre qui va appartenir à \mathbb{K} .

Définition stabilité par addition et multiplication scalaire

Si E est un \mathbb{K} -EV, soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la stabilité par addition et multiplication scalaire va s'écrire respectivement :

$$x + y \in E \quad \text{et} \quad \lambda x \in E$$

Qui peut facilement se combiner en :

$$x + \lambda y \in E$$

Ici, le rôle de x et y est interchangeable. Il suffit que la propriété soit vraie pour un point quelconque et ça implique qu'il est vrai pour tous donc $\lambda x \in E$ montre la même chose que

$\lambda y \in E$.

Il y a pleins d'exemple d'espaces vectoriels. Déjà, l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est un espace vectoriel. C'est le cas de tous les espaces de la forme \mathbb{K}^n , avec \mathbb{K} un corps (ici ça sera \mathbb{R} ou \mathbb{C}) et $n \in \mathbb{N}$ qui ne sont rien d'autres que des n-uplets. Un point x de \mathbb{K}^n s'écrit simplement $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ avec $x_i \in \mathbb{K}$ pour $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ qui sont simplement ses composantes dans l'espace. On dit que x est un vecteur de \mathbb{K}^n . En physique on l'écrirait \vec{x} mais comme en math les vecteurs n'ont pas la même fonction qu'en physique (en particulier au niveau des points d'applications), on ne met pas la flèche au dessus (il y a aussi moins de risque de confusion et ça allège les notations.)

On a aussi d'autres espaces vectoriels comme $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} ou $\mathbb{K}_n[X]$, l'espace des polynômes de degré au plus n.

2.2 Les matrices

On peut voir les matrices de comme des tableaux de nombres et donc celles de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ comme des tableaux à n lignes et p colonnes. Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$, alors $M \in M_{3,2}(\mathbb{K})$. Cependant, comme je l'ai expliqué au dessus, $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel donc les matrices sont des points de l'espaces des matrices et se sont ce qu'on appelle en math des vecteurs. C'est essentiel de comprendre cela car c'est la raison pour laquelle on utilise des matrices et elles vérifient donc la stabilité par addition et multiplication scalaire expliquée plus haut.

L'erreur serait de penser que les matrices ne sont que des tableaux de nombre. En effet, on peut les voir comme tel mais c'est loin d'être suffisant quand on les manipule en maths. En effet, les tableaux, c'est juste une représentation de nombre, en lui-même, sans structure, il sert à rien. On va donc munir l'espace des matrices de plusieurs opérations.