

# Ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa

W. Czernous

[tinyurl.com/cwiczeniazrachunku](https://tinyurl.com/cwiczeniazrachunku)

[tinyurl.com/kolozrachunku1](https://tinyurl.com/kolozrachunku1)

31 października 2022

### Ćwiczenie 1.

Podaj przykład trzech zdarzeń, które są parami niezależne, ale nie są niezależne.

### Ćwiczenie 2.

Podaj przykład dwu zmiennych losowych, które są nieskorelowane

$$(EXY = EXEY),$$

ale nie są niezależne.

Wskazówka: to nie mogą być indykatory zbiorów.



**Def. niezależności zbiorów zdarzeń.**

Niech  $\{\Xi_i : i \in I\}$  będzie rodziną zbiorów zdarzeń.  $\Xi_i$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru skończonego  $J : J \subset I$ , dla wszystkich  $A_j \in \Xi_j$ ,  $j \in J$  zachodzi

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

**Twierdzenie o niezależnych  $\pi$ -układach.**

Niech  $\{\Xi_i : i \in I\}$  będzie rodziną  $\pi$ -układów ( $\pi$ -układ to rodzina zbiorów zamknięta na przekroje). Wtedy warunkiem dostatecznym (i koniecznym) niezależności  $\sigma$ -ciał  $\{\sigma(\Xi_i) : i \in I\}$  jest niezależność  $\{\Xi_i : i \in I\}$ .

**Ćwiczenie 3.**

Czy  $\Xi_i$  muszą koniecznie być  $\pi$ -układami?

Wskazówka: minimalny kontrprzykład składa się z 3 zbiorów, tworzących dwie rodziny.



### **Lemat Leviego o zbieżności monotonicznej.**

Dla nieujemnych zmiennych losowych  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ , zachodzi:

$$\xi_n \uparrow \xi \implies E\xi_n \uparrow E\xi.$$

### **Ćwiczenie 4.**

Niech  $\xi_1, \xi_2, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w  $[0, 1]$ .

Pokaż, że  $E \prod_n \xi_n = \prod_n E\xi_n$ .

W szczególności, mamy stąd  $P \bigcap_n A_n = \prod_n P A_n$  dla dowolnych zdarzeń niezależnych  $A_1, A_2, \dots$ .



**Nierówność Czebyszewa.** Dla zmiennej losowej  $\xi \geq 0$ , takiej że  $0 < E\xi < \infty$ , mamy:

$$P\{\xi > rE\xi\} \leq \frac{1}{r}, \quad r > 0.$$

(Np. nie więcej niż połowa pracujących może zarabiać 2 średnie pensje i więcej.)

**Definicja zbieżności według prawdopodobieństwa.**

Dla zmiennych losowych nieujemnych  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , mówimy, że  $\xi_n$  zbiega do zera według prawdopodobieństwa (co zapisujemy  $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ ), jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\xi_n > \varepsilon\} = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

**Lemat o zbieżności według prawdopodobieństwa.**

Dla zmiennych losowych nieujemnych  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , następujące warunki są równoważne:

- (i)  $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ ,
- (ii)  $E\{\xi_n \wedge 1\} \rightarrow 0$ ,
- (iii) każdy podciąg  $N' \subset \mathbb{N}$  zawiera podciąg  $N'' \subset N'$ , dla którego  $\xi_n \rightarrow 0$  p.n. przy  $n \rightarrow \infty, n \in N''$ .

**Ćwiczenie 5.** (i)  $\implies$  (ii).

**Ćwiczenie 6.** (ii)  $\implies$  (i).

Wskazówka: Jeśli  $\varepsilon < 1$ , to  $x > \varepsilon$  implikuje  $x \wedge 1 > \varepsilon$ .  
Następnie skorzystać z nierówności Czebyszewa.

**Zadanie domowe 1.**

Wykazać (ii)  $\iff$  (iii).

**Ćwiczenie 7.**

Korzystając z lematu (o zbieżności według prawdopodobieństwa), wykazać, że zbieżność p.n. pociąga za sobą zbieżność według prawdopodobieństwa.

**Ćwiczenie 8.**

Niech  $\Omega = [0, 1]$ , zaś  $P$ -miara Lebesgue'a. Weźmy ciąg  $\xi_n$  zmiennych losowych, znany pod nazwą „maszyna do pisania”:

$$1_{[0, \frac{1}{2}]}, 1_{[\frac{1}{2}, 1]}, 1_{[0, \frac{1}{4}]}, 1_{[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]}, 1_{[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]}, 1_{[\frac{3}{4}, 1]}, 1_{[0, \frac{1}{8}]}, 1_{[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}]}, \dots$$

Ile wynoszą, dla ustalonego  $\varepsilon \in (0, 1)$ , wartości  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ , wyrazów ciągu

$$a_n = P(\xi_n > \varepsilon)?$$

A ile wynoszą dla ustalonego  $\varepsilon \geq 1$ ? Pokazać, że  $\xi_n$  jest zbieżny do zera według prawdopodobieństwa.



**Definicja rozkładu jednostajnego.**

Niech  $\xi$  będzie taką zmienną losową, że

$$P\{c < \xi < d\} = \frac{d-c}{b-a} \quad \text{dla } a \leq c < d \leq b.$$

Mówimy wtedy, że  $\xi$  ma rozkład jednostajny na  $[a, b]$ , co zapisujemy  $\xi \sim U(a, b)$ .

**Ćwiczenie 9.** Oblicz  $EX^3$ , gdy  $X \sim U(0, 1)$ .



**Twierdzenie o mierze produktowej i całce iterowanej (Lebesgue, Fubini, Tonelli).**

Niech zmienne losowe  $\xi, \eta$  będą niezależne, o rozkładach  $\mu, \nu$ , odpowiednio. Dla dowolnej funkcji mierzalnej

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{o własności} \quad E|f(\xi, \eta)| < \infty,$$

zachodzi wtedy

$$\begin{aligned} Ef(\xi, \eta) &= \int \mu(ds) \int f(s, t) \nu(dt) \\ &= \int \nu(dt) \int f(s, t) \mu(ds). \end{aligned}$$

**Ćwiczenie 10.** Oblicz  $E(X + Y)^n$  dla niezależnych  $X \sim U(0, 1)$ ,  $Y \sim U(0, 1)$ .





**Ćwiczenie 11.** Niech  $X_1, X_2, \dots$  będą niezależne o jednakowym rozkładzie  $U(0, 1)$ . Oblicz

$$\lim_n \frac{X_1^3 + X_2^3 + \dots + X_n^3}{n}.$$

Jakiego typu to zbieżność?

Wsk.: Skorzystaj z MPWL (p. wykład).

**Ćwiczenie 12.** Niech  $\xi \sim U(0, 1)$ , zaś  $X_n(\omega)$  niech będzie  $n$ -tą cyfrą po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby  $\xi(\omega)$ :

$$\xi = 0, X_1 X_2 X_3 \dots$$

Wykaż, że zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne.

**Ćwiczenie 13.** Niech  $\xi \sim U(0, 1)$ , zaś  $X_n(\omega)$  niech będzie  $n$ -tą cyfrą po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby  $\xi(\omega)$ :

$$\xi = 0, X_1 X_2 X_3 \dots$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że (asymptotycznie) średnio co dziesiąta cyfra liczby  $\xi$  jest piątką?

**Ćwiczenie 14.** Oblicz granicę, przy  $n \rightarrow \infty$ , wyrażenia

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

## Centralne twierdzenie graniczne (CTG).

Dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , takich że  $E\xi_1 = 0$  i  $E\xi_1^2 = 1$ ,

$$\lim_n P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

gdzie  $\Phi$  jest dystrybuantą rozkładu  $N(0, 1)$ .

**Ćwiczenie 15.** Mamy 100 żarówek, których czas życia jest niezależny, o rozkładzie wykładniczym ze średnią 5 godzin (a więc wariancją 25). Oszacuj prawdopodobieństwo, że po 525 godzinach będziemy mieć jeszcze działającą żarówkę, jeśli używamy tylko jednej naraz, zaś natychmiast po zepsuciu wymieniamy ją na następną.

**Ćwiczenie 16.** Firma ubezpieczeniowa wystawiła 10000 polis. Wartość oczekiwana roszczeń, zrealizowanych w ciągu roku, wynosi 1200, zaś odchylenie standardowe 4000. Obliczyć prawdopodobieństwo, że całkowita suma roszczeń, w ciągu jednego roku, przekroczy 13,5 miliona.



### **Twierdzenie** (nierówność Bernsteina)

Jeśli  $S_n$  jest liczbą sukcesów w schemacie  $n$  prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu  $p$ , to dla każdego  $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

### **Lemat Borela-Cantelliego.**

Niech  $A = \cap_m \cup_{n \geq m} A_n$ . Wtedy:

- (i)  $P(A) = 0$ , jeśli  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ .
- (ii)  $P(A) = 1$ , jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$ , są niezależne i  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ .

### **Zadanie domowe 2.**

Korzystając z nierówności Bernsteina i lematu Borela-Cantelliego, wykazać mocne prawo wielkich liczb Bernoulliego:  $S_n/n \rightarrow p$  p.n.

Wskazówka: suma przeliczalnie wielu zbiorów miary zero jest miary zero..



**Zadanie domowe 3.** Weźmy ciąg  $\xi_1, \xi_2, \dots$  niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, z własnością:  $P\{|\xi_n| > t\} > 0$  dla każdego  $t > 0$ . Wykazać istnienie stałych  $c_n$ , takich że  $c_n \xi_n \rightarrow 0$  według prawdopodobieństwa, ale nie p.n.

**Wskazówka.** Dobrać (w jaki sposób?) ciąg stałych  $c_n > 0$ ,  $c_n \rightarrow 0$ , tak, by  $\sum P(A_n) = \infty$ , gdzie  $A_n = \{c_n \xi_n > 1\}$ . Zauważyć, że  $A_n$  są zdarzeniami niezależnymi. Skorzystać następnie z lematu Borela-Cantelliego.



**Notacja:** niech  $E(\xi; A)$  oznacza  $E(\xi \cdot 1_A)$ .

**Definicja.** Jeśli  $\xi \in L^1$ , to warunkową wartością oczekiwaną  $\xi$  pod warunkiem  $\mathcal{F}$  nazywamy  $\mathcal{F}$ -mierzalną zmienną losową  $E^{\mathcal{F}}\xi$ , taką że

$$E(E^{\mathcal{F}}\xi; A) = E(\xi; A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

**Ćwiczenie 17.** Łączny rozkład zmiennych losowych  $X, Y$  dany jest tabelką:

	$X = 1$	$X = 3$	
$Y = 0$	0,2	0,3	Znaleźć $E(X \sigma(Y))$ i $EX$ .
$Y = 2$	0,1	0,4	

**Ćwiczenie 18.** Niech  $\Omega = [0, 1]$ ,  $P$ -miara Lebesgue'a na  $[0, 1]$ . Znaleźć  $E(f|\mathcal{F})$ , jeśli

- a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $\mathcal{F}$  jest  $\sigma$ -ciałem generowanym przez zbiory  $[0, \frac{1}{4})$ ,  $[\frac{1}{4}, 1]$ .
- b)  $f(x) = -x$ ,  $\mathcal{F}$  jest  $\sigma$ -ciałem generowanym przez zbiory  $[0, \frac{1}{2})$ ,  $[\frac{1}{2}, 1]$ .



**Warunkowa wartość oczekiwana**  $E^{\mathcal{F}}\xi = E(\xi|\mathcal{F})$ .

**Twierdzenie.** Niech  $L^1(\mathcal{F})$  będzie zbiorem zmiennych losowych całkowalnych i  $\mathcal{F}$ -mierzalnych. Dla dowolnego  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{F}$  istnieje jednoznaczny (p.n.) operator liniowy  $E^{\mathcal{F}} : L^1 \rightarrow L^1(\mathcal{F})$ , taki że:

$$(i) \quad E(E^{\mathcal{F}}\xi; A) = E(\xi; A), \text{ dla } \xi \in L^1, A \in \mathcal{F};$$

Operator  $E^{\mathcal{F}}$  ma następujące własności (przy założeniu, że odpowiednie wyrażenia istnieją dla wartości bezwzględnych):

$$(ii) \quad \xi \geq 0 \implies E^{\mathcal{F}}\xi \geq 0 \text{ p.n. (dodatniość),}$$

$$(iii) \quad E|E^{\mathcal{F}}\xi| \leq E|\xi| \text{ (zwężanie w } L^1),$$

$$(iv) \quad 0 \leq \xi_n \uparrow \xi \implies E^{\mathcal{F}}\xi_n \uparrow E^{\mathcal{F}}\xi \text{ p.n. (zbieżność monotoniczna),}$$

$$(v) \quad E^{\mathcal{F}}\xi\eta = \xi E^{\mathcal{F}}\eta \text{ p.n., gdy } \xi \text{ jest } \mathcal{F}\text{-mierzalna (wyłączanie),}$$

$$(vi) \quad E(\xi E^{\mathcal{F}}\eta) = E(\eta E^{\mathcal{F}}\xi) = E(E^{\mathcal{F}}\xi)(E^{\mathcal{F}}\eta) \text{ p.n. (samosprzężenie),}$$

$$(vii) \quad E^{\mathcal{F}}E^{\mathcal{G}}\xi = E^{\mathcal{F}}\xi \text{ p.n., gdy } \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \text{ ('tower rule').}$$

W szczególności,  $E^{\mathcal{F}}\xi = \xi$  p.n., gdy  $\xi$  jest  $\mathcal{F}$ -mierzalne, zaś  $E^{\mathcal{F}}\xi = E\xi$  p.n., gdy  $\xi \perp \mathcal{F}$ .

**Ćwiczenie 19.** Wykazać, z definicji warunkowej wartości oczekiwanej, że

$$E(E^{\mathcal{F}}\xi) = E\xi.$$

**Ćwiczenie 20.** Wykazać, z definicji warunkowej wartości oczekiwanej, że

$$E^{\sigma(X)}X = X \text{ p.n.}$$

**Ćwiczenie 21.** Udowodnić własność (vii).

**Ćwiczenie 22.** Wykazać, z definicji warunkowej wartości oczekiwanej, że

$$\xi = 0 \text{ p.n.} \implies E^{\mathcal{F}}\xi = 0 \text{ p.n.}$$

**Ćwiczenie 23.** Udowodnić

$$\xi = c \text{ p.n.} \implies E^{\mathcal{F}}\xi = c \text{ p.n.}$$

**Ćwiczenie 24.** Pokazać, że

$$\xi = \eta \text{ p.n.} \implies E^{\mathcal{F}}\xi = E^{\mathcal{F}}\eta \text{ p.n.}$$



**Lemat o zbiorach miary zero:** dla zm. los.  $\xi \geq 0$ ,

$$E\xi = 0 \iff \xi = 0 \text{ p.n.}$$

**Ćwiczenie 25.** Wywnioskować z tego lematu, że

$$A = \{\eta > 0\}, E(\eta; A) = 0 \implies PA = 0.$$

Wskazówka: przyjąć  $\xi = \eta 1_A$ .

**Ćwiczenie 26.** Udowodnić

$$A = \{\eta < 0\}, E(\eta; A) = 0 \implies PA = 0.$$

**Ćwiczenie 27.** Wykazać dodatniość  $E^{\mathcal{F}}$ , korzystając z poprzedniego ćwiczenia.

**Ćwiczenie 28.** Udowodnić, dla  $\eta \geq 0$ ,

$$\{E^{\mathcal{F}}\eta = 0\} \subset \{\eta = 0\} \text{ p.n.}$$

(Równoważnie,  $P\{E^{\mathcal{F}}\eta = 0, \eta > 0\} = 0$ .)

Wskazówka: zastosować lemat dla  $\xi = \eta 1_{\{E^{\mathcal{F}}\eta = 0\}}$ .

**Ćwiczenie 29.** Sformułować warunkową wersję lematu o zbiorach miary zero.





**Ćwiczenie 30.** Wykazać następującą własność monotoniczności  $E^{\mathcal{F}}$ :

$$\xi \leq \eta \text{ p.n.} \implies E^{\mathcal{F}}\xi \leq E^{\mathcal{F}}\eta \text{ p.n.}$$

Skorzystać z podanych wyżej własności  $E^{\mathcal{F}}$ .

**Ćwiczenie 31.** Wykazać, że  $|E^{\mathcal{F}}\xi| \leq E^{\mathcal{F}}|\xi|$  p.n. Zaznaczyć, z których własności  $E^{\mathcal{F}}$  tu korzystamy.

**Ćwiczenie 32.** Załóżmy, że  $\eta \in L^2$ ,  $\mathcal{F} = \sigma(\xi)$  oraz  $E^{\mathcal{F}}\eta = \xi$ ,  $E^{\mathcal{F}}(\eta^2) = \xi^2$ . Uzasadnić, że  $\eta = \xi$  p.n.

Wskazówka: użyć warunkowej wersji lematu o zbiorach miary zero.

**Notacja:**  $\text{Var } \xi = E(\xi - E\xi)^2$ ,  $\text{Var}^{\mathcal{F}} \xi = E^{\mathcal{F}}(\xi - E^{\mathcal{F}}\xi)^2$ .

**Ćwiczenie 33.** Dla  $\xi \in L^2$ ,  $\text{Var}^{\mathcal{F}} \xi \geq 0$ .

**Ćwiczenie 34.** Dla  $\xi \in L^2$ ,

$$\text{Var } \xi = E \text{Var}^{\mathcal{F}} \xi + \text{Var } E^{\mathcal{F}} \xi.$$

**Ćwiczenie 35.** Dla  $\xi \in L^2$ ,

$$\text{Var } \xi \geq \text{Var } E^{\mathcal{F}} \xi.$$

**Ćwiczenie 36.** (istotne dla zastosowań) Dla  $\xi \in L^2$ ,

$$\text{Var } E^{\mathcal{G}} \xi \geq \text{Var } E^{\mathcal{F}} \xi, \text{ gdy } \mathcal{G} \supset \mathcal{F}.$$

Wsk.: zastosować 'tower rule' do poprzedniego wyniku.



**Lemat Fatou.** Dla nieujemnych  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , mamy

$$\liminf_n E\xi_n \geq E \liminf_n \xi_n.$$

*Dowód.* Zauważmy, że

$$\xi_m \geq \inf_{k \geq n} \xi_k, \quad m \geq n,$$

a stąd

$$\inf_{m \geq n} E\xi_m \geq E \inf_{k \geq n} \xi_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Biorąc  $n \rightarrow \infty$ , mamy (jak?) z lematu Lebiego o zbieżności monotonicznej:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} E\xi_n &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} E \inf_{k \geq n} \xi_k \\ &= E \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n. \quad \square \end{aligned}$$

**Zadanie domowe 4.** Wykazać warunkowy lemat Fatou: dla nieujemnych, całkowalnych  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , mamy p.n.

$$\liminf_n E^{\mathcal{F}} \xi_n \geq E^{\mathcal{F}} \liminf_n \xi_n.$$

Jakich własności warunkowej wartości oczekiwanej należy użyć?



# Kolokwium próbne

[tinyurl.com/kolozrachunku1](https://tinyurl.com/kolozrachunku1)



# Bibliografia

- [JS10] Jacek Jakubowski, Rafał Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. SCRIPT, Warszawa, 2010.
- [Kal21] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, 2021.