

# Ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa

W. Czernous  
[tinyurl.com/cwiczeniazrachunku](https://tinyurl.com/cwiczeniazrachunku)

28 września 2022

### Ćwiczenie 1.

Podaj przykład trzech zdarzeń, które są parami niezależne, ale nie są niezależne.

### Ćwiczenie 2.

Podaj przykład dwu zmiennych losowych, które są nieskorelowane

$$(EXY = EXEY),$$

ale nie są niezależne.

Wskazówka: to nie mogą być indykatory zbiorów.



**Def. niezależności zbiorów zdarzeń.**

Niech  $\{\Xi_i : i \in I\}$  będzie rodziną zbiorów zdarzeń.  $\Xi_i$  są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru skończonego  $J : J \subset I$ , dla wszystkich  $A_j \in \Xi_j$ ,  $j \in J$  zachodzi

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

**Twierdzenie o niezależnych  $\pi$ -układach.**

Niech  $\{\Xi_i : i \in I\}$  będzie rodziną  $\pi$ -układów ( $\pi$ -układ to rodzina zbiorów zamknięta na przekroje). Wtedy warunkiem dostatecznym (i koniecznym) niezależności  $\sigma$ -ciał  $\{\sigma(\Xi_i) : i \in I\}$  jest niezależność  $\{\Xi_i : i \in I\}$ .

**Ćwiczenie  $\Xi_2$ .**

Czy  $\Xi_i$  muszą koniecznie być  $\pi$ -układami?

Wskazówka: minimalny kontrprzykład składa się z 3 zbiorów, tworzących dwie rodziny.



## Lemat Leviego o zbieżności monotonicznej.

Dla nieujemnych zmiennych losowych  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ , zachodzi:

$$\xi_n \uparrow \xi \implies E\xi_n \uparrow E\xi.$$

### Ćwiczenie $\xi_n$ .

Niech  $\xi_1, \xi_2, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w  $[0, 1]$ .

Pokaż, że  $E \prod_n \xi_n = \prod_n E\xi_n$ .

W szczególności, mamy stąd  $P \bigcap_n A_n = \prod_n P A_n$  dla dowolnych zdarzeń niezależnych  $A_1, A_2, \dots$ .



**Nierówność Czebyszewa.** Dla zmiennej losowej  $\xi \geq 0$ , takiej że  $0 < E\xi < \infty$ , mamy:

$$P\{\xi > rE\xi\} \leq \frac{1}{r}, \quad r > 0.$$

(Np. nie więcej niż połowa pracujących może zarabiać 2 średnie pensje i więcej.)

**Definicja zbieżności według prawdopodobieństwa.**

Dla dowolnych elementów losowych  $\xi$  oraz  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , o wartościach w przestrzeni metrycznej ośrodkowej  $(S, \rho)$ , mówimy, że  $\xi_n$  zbiega do  $\xi$  według prawdopodobieństwa (co zapisujemy  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ ), jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\rho(\xi_n, \xi) > \varepsilon\} = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

**Lemat o zbieżności według prawdopodobieństwa.**

Dla dowolnych elementów losowych  $\xi$  oraz  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , o wartościach w przestrzeni metrycznej ośrodkowej  $(S, \rho)$ , następujące warunki są równoważne:

- (i)  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ ,
- (ii)  $E\{\rho(\xi_n, \xi) \wedge 1\} \rightarrow 0$ ,
- (iii) każdy podciąg  $N' \subset \mathbb{N}$  zawiera podciąg  $N'' \subset N'$ , dla którego  $\xi_n \rightarrow \xi$  p.n. przy  $n \rightarrow \infty, n \in N''$ .

**Ćwiczenie 5.** (i)  $\implies$  (ii).

**Ćwiczenie 6.** (ii)  $\implies$  (i).

Wskazówka: Jeśli  $\varepsilon < 1$ , to  $x > \varepsilon$  implikuje  $x \wedge 1 > \varepsilon$ .  
Następnie skorzystać z nierówności Czebyszewa.

**Zadanie domowe 1.**

Wykazać (ii)  $\iff$  (iii).

**Ćwiczenie 7.**

Korzystając z lematu (o zbieżności według prawdopodobieństwa), wykazać, że zbieżność p.n. pociąga za sobą zbieżność według prawdopodobieństwa.



**Ćwiczenie 8.** Niech  $X \geq 0$  będzie zmienną losową,  $\mathcal{F}$ -mierzalną.

a) Wykaż, że zbiór

$$A = \{(t, \omega) : X(\omega) < t\}$$

jest  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ -mierzalny.

b) Udowodnij, że dla  $p > 0$  zachodzi

$$EX^p = p \int_0^\infty P\{X \geq t\} t^{p-1} dt.$$

Wsk.: zastosuj tw. Fubiniego; mierzalność funkcji podcałkowej wynika z ćwiczenia a).

c) Wywnioskuj stąd, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\} \leq EX \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\}.$$

W szczególności, nieujemna zmienna losowa jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\} < \infty.$$



**Twierdzenie** (nierówność Bernsteina).

Jeśli  $S_n$  jest liczbą sukcesów w schemacie  $n$  prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu  $p$ , to dla każdego  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \varepsilon \right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

**Lemat Borela-Cantelliego.**

Niech  $A = \cap_m \cup_{n \geq m} A_n$ . Wtedy:

- (i)  $P(A) = 0$ , jeśli  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ .
- (ii)  $P(A) = 1$ , jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots$ , są niezależne i  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ .

**Ćwiczenie 9.** Korzystając z nierówności Bernsteina i lematu Borela-Cantelliego, wykazać mocne prawo wielkich liczb Bernoulliego:  $S_n/n \rightarrow p$  p.n.

Wskazówka: dla ciągu funkcji mierzalnych o wartościach w przestrzeni polskiej (metrycznej, ośrodkowej i zupełnej), zbiór, na którym ciąg ten ma granicę, jest zbiorem mierzalnym. Na przykład, dla ciągu  $S_n/n - p$ .





### Ćwiczenie dla chętnych.

Weźmy ciąg  $\xi_1, \xi_2, \dots$  zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, z własnością:  $P\{|\xi_n| > t\} > 0$  dla każdego  $t > 0$ . Wykazać istnienie stałych  $c_n$ , takich że  $c_n \xi_n \rightarrow 0$  według prawdopodobieństwa, ale nie p.n.



Ciąg dalszy: uwaga 7.4.11 [JS10] z dowodem itd.  
Zwłaszcza 7.4.A,B,C,D,E.

# Bibliografia

- [JS10] Jacek Jakubowski, Rafał Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. SCRIPT, Warszawa, 2010.
- [Kal21] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, 2021.