Ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa

W. Czernous
tinyurl.com/cwiczeniazrachunku

14 października 2022

Ćwiczenie 1.

Podaj przykład trzech zdarzeń, które są parami niezależne, ale nie są niezależne.

Ćwiczenie 2.

Podaj przykład dwu zmiennych losowych, które są nieskorelowane

$$(EXY = EXEY),$$

ale nie są niezależne.

Wskazówka: to nie mogą być indykatory zbiorów.

Def. niezależności zbiorów zdarzeń.

Niech $\{\Xi_i : i \in I\}$ będzie rodziną zbiorów zdarzeń. Ξ_i są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru skończonego $J : J \subset I$, dla wszystkich $A_j \in \Xi_j$, $j \in J$ zachodzi

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Twierdzenie o niezależnych π-układach.

Niech $\{\Xi_i : i \in I\}$ będzie rodziną π-układów (π-układ to rodzina zbiorów zamknięta na przekroje). Wtedy warunkiem dostatecznym (i koniecznym) niezależności σ-ciał $\{\sigma(\Xi_i) : i \in I\}$ jest niezależność $\{\Xi_i : i \in I\}$.

Ćwiczenie Ξ_2.

Czy Ξ_i muszą koniecznie być π-układami?

Wskazówka: minimalny kontrprzykład składa się z 3 zbiorów, tworzących dwie rodziny.

Lemat Leviego o zbieżności monotonicznej.

Dla nieujemnych zmiennych losowych ξ, ξ_1, ξ_2, …, zachodzi:

$$\xi_n \uparrow \xi \implies E\xi_n \uparrow E\xi.$$

Ćwiczenie ξ_n.

Niech ξ_1, ξ_2, … będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w $[0, 1]$.

Pokaż, że $E\prod_n \xi_n = \prod_n E\xi_n$.

W szczególności, mamy stąd $P\bigcap_n A_n = \prod_n PA_n$ dla dowolnych zdarzeń niezależnych A_1, A_2, ….

Nierówność Czebyszewa. Dla zmiennej losowej $\xi \geq 0$, takiej że $0 < E\xi < \infty$, mamy:

$$P\{\xi > rE\xi\} \leq \frac{1}{r}, \qquad r > 0.$$

(Np. nie więcej niż połowa pracujących może zarabiać 2 średnie pensje i więcej.)

Definicja zbieżności według prawdopodobieństwa.

Dla dowolnych elementów losowych ξ oraz ξ_1, ξ_2, $\ldots$, o wartościach w przestrzeni metrycznej ośrodkowej (S, ρ), mówimy, że ξ_n zbiega do ξ według prawdopodobieństwa (co zapisujemy $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$), jeśli

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\rho(\xi_n, \xi) > \varepsilon\right\} = 0, \qquad \varepsilon > 0.$$

Lemat o zbieżności według prawdopodobieństwa.

Dla dowolnych elementów losowych ξ oraz ξ_1, ξ_2, $\ldots$, o wartościach w przestrzeni metrycznej ośrodkowej (S, ρ), następujące warunki są równoważne:

(i) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$,

(ii) $E\left\{\rho(\xi_n, \xi) \wedge 1\right\} \to 0$,

(iii) każdy podciąg $N' \subset \mathbb{N}$ zawiera podciąg $N'' \subset N'$, dla którego $\xi_n \to \xi$ p.n. przy $n \to \infty$, $n \in N''$.

Ćwiczenie 5. (i) $\implies$ (ii).

Ćwiczenie 6. (ii) $\implies$ (i).

Wskazówka: Jeśli $\varepsilon < 1$, to $x > \varepsilon$ implikuje $x \wedge 1 > \varepsilon$. Następnie skorzystać z nierówności Czebyszewa.

Zadanie domowe 1.

Wykazać (ii) $\iff$ (iii).

Ćwiczenie 7.

Korzystając z lematu (o zbieżności według prawdopodobieństwa), wykazać, że zbieżność p.n. pociąga za sobą zbieżność według prawdopodobieństwa.

Ćwiczenie 8. Niech $X \geq 0$ będzie zmienną losową, $\mathcal{F}$-mierzalną.
a) Wykaż, że zbiór

$$A = \{(t, \omega) : X(\omega) < t\}$$

jest $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$-mierzalny.
b) Udowodnij, że dla $p > 0$ zachodzi

$$EX^p = p \int_0^\infty P\{X \geq t\}\, t^{p-1}\, dt.$$

Wsk.: zastosuj tw. Fubiniego; mierzalność funkcji podcałkowej wynika z ćwiczenia a).
c) Wywnioskuj stąd, że

$$\sum_{n=1}^\infty P\{X \geq n\} \leq EX \leq 1 + \sum_{n=1}^\infty P\{X \geq n\}.$$

W szczególności, nieujemna zmienna losowa jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^\infty P\{X \geq n\} < \infty.$$

Twierdzenie (nierówność Bernsteina).

Jeśli S_n jest liczbą sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p, to dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \le 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

Lemat Borela-Cantelliego.

Niech $A = \cap_m \cup_{n\ge m} A_n$. Wtedy:

(i) $P(A) = 0$, jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

(ii) $P(A) = 1$, jeśli zdarzenia A_1, A_2, $\ldots$, są niezależne i $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$.

Ćwiczenie 9. Korzystając z nierówności Bernsteina i lematu Borela-Cantelliego, wykazać mocne prawo wielkich liczb Bernoulliego: $S_n/n \to p$ p.n.

Wskazówka: dla ciągu funkcji mierzalnych o wartościach w przestrzeni polskiej (metrycznej, ośrodkowej i zupełnej), zbiór, na którym ciąg ten ma granicę, jest zbiorem mierzalnym. Na przykład, dla ciągu $S_n/n - p$.

Ćwiczenie dla chętnych.

Weźmy ciąg $\xi_1, \xi_2, \ldots$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, z własnością: $P\{|\xi_n| > t\} > 0$ dla każdego $t > 0$. Wykazać istnienie stałych c_n, takich że $c_n \xi_n \to 0$ według prawdopodobieństwa, ale nie p.n.

Ciąg dalszy: uwaga 7.4.11 [JS10] z dowodem itd. Zwłaszcza 7.4.A,B,C,D,E.

Bibliografia

[JS10] Jacek Jakubowski, Rafał Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. SCRIPT, Warszawa, 2010.

[Kal21] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, 2021.