https://matse.paddel.xyz/spicker

Lineare Algebra 2

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 4. Juli 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Abbildungen

1.1 Grundlegende Eigenschaften linearer Abbildungen

Definition: Homomorphismus

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear* oder ein *Homomorphismus*, falls $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in K$ gilt:
- Additivität: $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- Homogenität: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Es gilt auch:
- Für eine lineare Funktion f gilt $f(0) = 0$.
- Die Funktion f ist genau dann linear, wenn $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in K$ gilt:
$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$
- Summen, Vielfache linearer Abbildungen und vektorwertige Abbildungen, deren Komponenten aus linearen Abbildungen bestehen, sind wiederum linear.

Beispiel: Homomorphismus

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$.

Zeigen Sie: f ist linear.

---

f ist genau dann *linear*, wenn f *homogen* und *additiv* ist.

Homogenität: $\forall x \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$$\begin{aligned}
& f(\lambda x) && = \lambda f(x) \\
\equiv\ & f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) && = \lambda f(x_1, x_2, x_3) \\
\equiv\ & (\lambda x_1 - 2\lambda x_3, 4\lambda x_2) && = \lambda(x_1 - 2x_3, 4x_2) \\
\equiv\ & \lambda(x_1 - 2x_3, 4x_2) && = \lambda(x_1 - 2x_3, 4x_2) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Additivität: $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : f(x+y) = f(x) + f_4(y)$

$$\begin{aligned}
& f(x+y) && = f(x) + f(y) \\
\equiv\ & f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) && = f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) \\
\equiv\ & (x_1 + y_1 - 2(x_3 + y_3), 4(x_2 + y_2)) && = (x_1 - 2x_3, 4x_2) + (y_1 - 2y_3, 4y_2) \\
\equiv\ & (x_1 + y_1 - 2x_3 - 2y_3, 4x_2 + 4y_2) && = (x_1 + y_1 - 2x_3 - 2y_3, 4x_2 + 4y_2) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Damit ist f linear. $\square$

Definition: Kern

Der *Kern* einer linearen Abbildung $f : V \to W$ wird definiert durch

$$\ker(f) := f^{-1}(0)$$

Dabei gilt:

- $\operatorname{im}(f)$[a] ist ein Untervektorraum von W.
- $\ker(f)$ ist ein Untervektorraum von V.

Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn $\ker(f) = \{0\}$ gilt.

[a] Bild von f

Bonus: Defekt

Für eine lineare Funktion $f : V \to W$ definiert man den *Defekt* von f durch

$$\operatorname{def}(f) := \dim \ker(f)$$

Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{def}(f) = 0$ gilt.

Beispiel: Kern

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$.

Bestimmen Sie den Kern von f und geben Sie $\dim(\ker(f))$ an.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies x_2 = 0 \quad \wedge \quad x_1 = 2x_3$$

Daraus folgt:

$$\ker(f) = f^{-1}(0) = \{(2\lambda, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \implies \operatorname{def}(f) = \dim(\ker(f)) = 1$$

□

Definition: Rang

Für eine lineare Funktion $f : V \to W$ definiert man den *Rang* von f durch

$$\operatorname{rg}(f) := \dim \operatorname{im}(f)$$

Eine lineare Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{rg}(f) = \dim(W)$ gilt.

Definition: Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Rangsatz)

Es sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\operatorname{def}(f) + \operatorname{rg}(f) = \dim V$$

bzw. äquivalent

$$\dim\ker(f) + \dim\operatorname{im}(f) = \dim V$$

Definition: Isomorphismus

Sei $f : V \to W$ linear. Dann ist f ein *Isomorphismus*, wenn f bijektiv ist.

Es gilt (für f linear):

- f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\ker(f) = \{0\}$ und $\operatorname{im}(f) = W$ gilt.
- Gelte $\dim(V) = \dim(W)$. Dann gilt f ist injektiv $\iff$ f ist surjektiv $\iff$ f ist bijektiv.

Es gilt (für f Isomorphismus):

- $\dim(V) = \dim(W)$
- $f^{-1} : W \to V$ ist ebenfalls ein Isomorphismus.

Sei $\dim(V) = \dim(W) = n$, $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $f : V \to W$ linear. f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine Basis von W bildet.

Bonus: Isomorphie

Seien V und W zwei K-Vektorräume Dann heißen V und W *isomorph*, Schreibweise $V \simeq W$, falls ein Isomorphismus von V nach W existiert.

Gilt $\dim(V) = \dim(W) = n$, dann gilt direkt $K^n \simeq V \simeq W$.

Definition: Automorphismus

Sei $f : V \to W$ linear. Dann ist f ein *Automorphismus*, wenn f bijektiv ist und $V = W$.

Definition: Endomorphismus

Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ heißt *Endomorphismus*.

1.2 Matrizen und lineare Abbildungen

Definition: Abbildungsmatrix

Sei $f : V \to W$ linear. Dann ist die *Abbildungsmatrix* A bzgl. f gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix} \text{ mit } \forall x : f(x) = Ax$$

Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gilt:

- $\operatorname{im}(f) = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$
- f ist injektiv $\iff$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sind linear unabhängig.

Definition: Darstellungsmatrix

Sei $f : V \to W$ linear, $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W. Dann ist

$$M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W}(f) = \begin{pmatrix} K_{\mathcal{B}_W}(f(v_1)) & \dots & K_{\mathcal{B}_W}(f(v_1)) \end{pmatrix}$$

die *Darstellungsmatrix* von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$.

$K_{\mathcal{B}_W}(f(v_i))$ bedeutet hier, dass das Bild von v_i in der Basis $\mathcal{B}_W$ kodiert wird.

Es gilt:

- Sind $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ die Standardbasen bez. V und W, dann gilt $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W}(f) = A$.

Beispiel: Abbildungsmatrix

Sei

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ -3x + z \\ -x + 2y + 5z \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.
b) Bestimmen Sie $\ker(F)$ und dessen Dimension.
c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel $\dim(\operatorname{im}(F))$.
d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

---

a) Sei B die kanonische Einheitsbasis des $\mathbb{R}^3$. Dann ist die Abbildungsmatrix gegeben mit

$$A = M^B_B(F) = \begin{pmatrix} F(e_1) & F(e_2) & F(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\square$

b)

$$M^B_B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also ein LGS, dessen Lösung eine Basis von $\ker(F)$ ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus können wir folgern, dass $\ker(F) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}^T \right\rangle$ und $\operatorname{def}(F) = 1$. $\square$

c) $\dim(\mathbb{R}^3) = \operatorname{def}(F) + \operatorname{rg}(F) \implies \operatorname{rg}(F) = 2$ $\square$

d) Wegen $\operatorname{rg}(F) = 2$ wissen wir, dass wir zwei linear unabhängige Vektoren aus M^B_B auswählen können, die dann automatisch eine Basis von $\operatorname{im}(F)$ ergeben.
Wir wählen $\operatorname{im}(F) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T \right\rangle$. $\square$

1.3 Abbildungsverkettung und Matrizenmultiplikation

Definition: Eigenschaften der Abbildungsverkettung

Seien U, V, W K-Vektorräume und $f : V \to W$ sowie $g : U \to V$ linear. Dann ist auch $f \circ g : U \to W$ linear.

Ist f ein Isomorphismus und $\dim(V) = \dim(W)$, dann gilt:

$$\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(g)$$

Definition: Eigenschaften der Matrixmultiplikation

Seien A, B, C so, dass die nachfolgend vorkommenden Matrixmultiplikationen definiert sind. Dann gilt:

- $A(BC) = (AB)C$ (Assoziativgesetz)
- $A(B + C) = AB + AC$ und $(A + B)C = AC + BC$ (Distributivgesetz)
- $(AB)^T = B^T A^T$
- Sei $A \in K^{m\times n}$ und $E_k \in K^{k\times k}$ die $(k \times k)$-Einheitsmatrix. Dann gilt:

$$AE_n = E_m A = A$$

- Sei $A \in K^{m\times n}$ und $0_{kl} \in K^{k\times l}$ die $(k \times l)$-Nullmatrix. Dann gilt:

$$A0_{nl} = 0_{ml} \quad \text{und} \quad 0_{km}A = 0_{kn}$$

- Das Matrixprodukt ist im Allgemeinen nicht kommutativ.
- Seien $x, y \in K^n$. Dann gilt:

$$\langle x, y\rangle = x^T \cdot y$$

Beispiel: Matrixmultiplikation

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Matrixprodukte sind wohldefiniert?

a) $A \cdot B$
b) $C \cdot B$
c) $C \cdot B \cdot A$

---

a)

$$A \cdot B = \overset{3\times\mathbf{3}}{\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{2}\times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} \quad ↯ \quad (3 \neq 2)$$

b)

$$C \cdot B = \overset{3\times\mathbf{2}}{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{2}\times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 33 & 37 \\ 21 & 41 \\ 27 & 39 \end{pmatrix}$$

c)

$$C \cdot B \cdot A = \overset{3\times\mathbf{2}}{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{2\times 2}}{\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} \overset{\mathbf{3}\times 3}{\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \quad ↯ \quad (2 \neq 3)$$

Definition: Inverse einer Matrix

Sei A eine quadratische Matrix. Gibt es eine Matrix A^{-1} mit

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

so heißt A *invertierbar* oder auch *regulär*. A^{-1} wird als *Inverse* von A bezeichnet.

Es gilt:

- Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Darstellungsmatrix invertierbar ist.
- Jede invertierbare Matrix ist quadratisch.

Seien $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbar. Dann gilt:

- $AB = E \iff BA = E \iff B = A^{-1}$
- AB ist invertierbar, und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- A^{-1} ist invertierbar, und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A^T ist invertierbar, und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Für $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ist λA invertierbar, und es gilt $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Beispiel: Inverse einer Matrix (Gauß-Algorithmus)

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Inverse zu folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -5/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5/2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ -3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Beispiel: Inverse von verketteten Abbildungen

Ein sehr gutes (aber sperriges) Beispiel zum Finden von Inversen verketteter Abbildungen ist zu finden im *Lineare Algebra Übungsblatt 05* (Aufgabe 6).

Das Übungsblatt ist erreichbar unter `https://fh-aachen.paddel.xyz/#lineare-algebra-2`.

1.4 Koordinatentransformationen

Definition: Koordinatenabbildung

Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Dann existiert genau ein Isomorphismus $\varphi_\mathcal{B} : K^n \to V$ mit $\varphi_\mathcal{B}(e_i) = v_i$, $1 \le i \le n$.

Der Isomorphismus $\varphi_\mathcal{B}$ heißt *Koordinatenabbildung*.

Definition: Koordinaten eines Vektors

Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Die Abbildung $K_\mathcal{B}(v)$ mit

$$K_\mathcal{B} : V \to K^n, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

erzeugt die *Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$*.

Es gilt:

- $K_\mathcal{B}(v) = \varphi_\mathcal{B}^{-1}(v)$

Definition: Transformationsmatrix

Sei ein Vektorraum V mit den Basen $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ gegeben.

Für einen Vektor v existieren die Darstellungen $K_\mathcal{A}(v)$ und $K_\mathcal{B}(v)$. Es gilt:

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
K^n \arrow[ur, "\varphi_\mathcal{A}"] \arrow[rr, "T_\mathcal{B}^\mathcal{A} = \varphi_\mathcal{B}^{-1} \circ \varphi_\mathcal{A}"'] & & K^n \arrow[ul, "\varphi_\mathcal{B}"']
\end{tikzcd}$$

Die Matrix $T_\mathcal{B}^\mathcal{A}$ heißt *Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$*

Sei $v \in V$ beliebig, $K_\mathcal{A}(v) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ und $K_\mathcal{B}(v) = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T_\mathcal{B}^\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sind die Koordinaten von v beqüglich $\mathcal{A}$ bekannt, kann man mithilfe der Matrix $T_\mathcal{B}^\mathcal{A}$ die Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$ berechnen.

Seien A und B die Matrizen der Basisvektoren von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Dann gilt:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "E"] & x \\
K_\mathcal{A}(x) \arrow[u, "A"] \arrow[r, "T_\mathcal{B}^\mathcal{A}"'] & K_\mathcal{B}(x) \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}$$

Man erkennt:

$$T_\mathcal{B}^\mathcal{A} = B^{-1} A$$

Beispiel: Transformationsmatrizen

$\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{A}' = (a_1', a_2', a_3')$ und $\mathcal{A}'' = (a_1'', a_2'', a_3'')$ bilden mit den kanonischen Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sowie

$$a_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad a_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils Basen des $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie:

a) die Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$ sowie $T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$.
b) die Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}''}$ sowie $T_{\mathcal{A}''}^{\mathcal{A}}$.
c) die Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{A}''}^{\mathcal{A}'}$ sowie $T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}''}$.
d) die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ bzgl. der Basen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$.

---

a) Berechnen von $\mathcal{A}'^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Damit gilt:

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} = \mathcal{A}'^{-1}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

b) Berechnen von $\mathcal{A}''^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}''} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$T_{\mathcal{A}''}^{\mathcal{A}} = \mathcal{A}''^{-1}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel: Transformationsmatrizen (Fortsetzung)

c) Mit den bisherigen Ergebnissen gilt:

$$T_{\mathcal{A}''}^{\mathcal{A}'} = \mathcal{A}''^{-1}\mathcal{A}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}''} = \mathcal{A}'^{-1}\mathcal{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

d) Sei $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.
Dann gilt für x bzgl. $\mathcal{A}'$:

$$x = K_{\mathcal{A}'}(x) = T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} \cdot K_{\mathcal{A}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

bzw. bzgl. $\mathcal{A}''$:

$$x = K_{\mathcal{A}''}(x) = T_{\mathcal{A}''}^{\mathcal{A}} \cdot K_{\mathcal{A}}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Definition: Darstellungsmatrix mit Basistransformation

Seien V und W endlich erzeugt mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ bzw. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. Sei weiter $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(f) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$$

Zur Visualisierung dient folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)"] \arrow[dr, "\varphi_{\mathcal{A}}"] \arrow[dd, "T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}"'] & & & K^m \arrow[dl, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dd, "T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
K^n \arrow[rrr, "M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(f)"'] \arrow[ur, "\varphi_{\mathcal{A}'}"] & & & K^m \arrow[ul, "\varphi_{\mathcal{B}'}"']
\end{tikzcd}$$

2 Determinanten

Definition: Elementarmatrix

Seien $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in K \setminus \{0\}$ gegeben. Dann sei

$$C1 := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

wobei der (i, j)-te Eintrag den Wert λ annehmen soll und alle anderen Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen 0 sein sollen.

Sei $C2$ die Matrix, die man aus der Einheitsmatrix gewinnt, indem man die i-te und j-te Spalte vertauscht, also

$$C2 := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

Zuletzt definieren wir

$$C3 := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

Matrizen der Gestalt $C1$, $C2$ oder $C3$ nennt man *Elementarmatrizen*.

Es gilt:

- Die Multiplikation einer Matrix A von links mit einer Elementarmatrix entspricht der Anwendung einer elementaren Zeilenoperation des Gauß-Verfahrens auf A.
  Notation: Zi statt Ci
- Die Multiplikation einer Matrix A von rechts mit einer Elementarmatrix entspricht der Anwendung einer elementaren Spaltenoperation auf A.
  Notation: Si statt Ci
- $C1$ entspricht dem Addieren von λ-mal Spalte bzw. Zeile j auf Spalte bzw. Zeile i.
- $C2$ entspricht dem Tauschen von Spalte bzw. Zeile i mit Spalte bzw. Zeile j.
- $C3$ entspricht dem Multiplizieren von Spalte bzw. Zeile i mit λ.

Beispiel: Elementarmatrizen

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Elementarmatrizen M_1 und M_2 mit $M_1 M_2 A = E$.

Es gilt:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Damit gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =^{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

und schlussendlich:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = M_1 M_2 A$$

□

[a] Das wird aus dem Kontext ersichtlich: Für A^{-1} wird zuerst fünfmal I auf II addiert und anschließend wird II mit $\frac{1}{2}$ skaliert.

Definition: Eigenschaften der Determinante

Für $A, B \in K^{n \times n}$ gilt:

- $S1$ und $Z1$ ändern die Determinante einer Matrix nicht. ($\det(C1) = 1$)
- $S2$ und $Z2$ kehren das Vorzeichen der Determinante um. ($\det(C2) = -1$)
- $S3$ und $Z3$ vervielfachen den Wert der Determinante um den Faktor λ. ($\det(C3) = \lambda$)

- $\det(A) = \det(A^T)$
- Besitzt A zwei gleiche Spalten bzw. Zeilen, so gilt $\det(A) = 0$.
- A invertierbar $\iff \det(A) \neq 0$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- A invertierbar $\implies \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

2.1 Verfahren zur Berechnung der Determinante

Definition: Laplacescher Entwicklungssatz

Für $A \in K^{n\times n}$ bezeichne A_{ij} die Matrix in $K^{(n-1)\times(n-1)}$, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A hervorgeht.

Es sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ und j mit $1 \le j \le n$. Dann gilt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Man spricht von der *Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte*. Ebenso ist eine *Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile* möglich:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Definition: Determinante mit Gauß-Algorithmus

Zur Berechnung mit dem Gauß-Algorithmus bringt man die gegebene Matrix A mittels äquivalenter Zeilen- oder Spaltenumformungen $Z1$-$Z3$ bzw. $S1$-$S3$ auf Stufenform B und errechnet dann nach Folgerung $\det(A)$ leicht als Produkt der Hauptdiagonalelelemente von B, multipliziert mit den Determinanten der genutzten Elementarmatrizen.

Beispiel: Determinante mit Gauß-Algorithmus

Berechnen Sie die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II: II + 2 III}} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I: I - 5 III}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 21 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I: I - 2 II}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[1/35\cdot\det(A)]{\text{I: I - 2 II}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(II: II + 7 I)} \circ \text{(III: III + 3 I)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)\cdot(-1)\cdot\det A]{(\text{I} \leftrightarrow \text{III}) \circ (\text{I} \leftrightarrow \text{II})} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$\det A = (-1)\cdot(-1)\cdot 35 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 35 \cdot 2 = 70$$

□

Bonus: Tipps zur Determinantenberechnung

1. Für (2×2)- und (3×3)-Matrizen empfiehlt sich die Sarrus-Regel.[a]
2. Die Laplace-Entwicklung ist dann vorzuziehen, wenn in einer Spalte oder Zeile nur wenige Nicht-Null-Einträge vorhanden sind, weil bei einer Entwicklung nach dieser Zeile bzw. Spalte die meisten Summanden erst gar nicht berechnet werden müssen.
3. Es können zur Berechnung der Determinanten mehrere Verfahren kombiniert werden, z.B. (4×4)-Matrizen zuerst nach Laplace entwickeln und die dann entstehenden Determinanten von (3×3)-Matrizen direkt mit der Sarrus-Regel berechnen.

[a] Siehe Lineare Algebra 1

Bonus: Inverse einer (2×2)-Matrix

Sei A definiert als $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Definition: Lineares Gleichungssystem

Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix}^T$. Dann heißt

$$\begin{array}{lclcl} a_{11}x_1 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \dots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

lineares Gleichungssystem bzgl. $(x_1, \dots, x_n)$ mit Koeffizienten a_{ij} in K. Hierbei sind $x_1, \dots, x_n$ die *Unbekannten* des Systems.

Für $b = 0_{m1}$ nennt man das lineare Gleichungssystem *homogen*, sonst *inhomogen*.

Jedes lineare Gleichungssystem kann in der Form $Ax = b$ geschrieben werden.

Definition: Lösungsmenge

Die *Lösungsmenge* $L(A, b)$ des zu (A, b) gehörigen Gleichungssystems ist festgelegt durch

$$L(A, b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$$

Definition: Spaltenrang

Die lineare Abbildung $L_A : K^n \to K^m$ sei gegeben durch $L_A(x) := Ax$. Dann sei $\text{rg}(A) := \text{rg}(L_A)$. Der *Spaltenrang* $\text{rg}_S(A)$ sei die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A.

Es gilt $\text{rg}(A) = \text{rg}_S(A)$.

Definition: Zeilenrang

Für $A \in K^{m\times n}$ sei die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A der *Zeilenrang* $\text{rg}_Z(A)$ von A.

Es gilt:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}_S(A) = \text{rg}_Z(A)$$

Definition: Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\text{rg}(a_1, \ldots, a_n) = \text{rg}(a_1, \ldots, a_n, b)$$

Kürzer schreibt man $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, b)$.

$Ax = b$ ist also genau dann eindeutig lösbar, falls $\ker(A) = \{0\} \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A, b) = n$.

Bonus: Äquivalente Bedingungen für eindeutige Lösbarkeit

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $A \in K^{n\times n}$ und die dadurch gegebene lineare Abbildung L_A sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. A ist invertierbar.
2. $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.
3. Durch Zeilen- und Spaltenumformungen kann A auf die Einheitsmatrix transformiert werden.
4. A ist darstellbar als Produkt von Elementarmatrizen.
5. $Ax = b$ besitzt für jedes $b \in K^n$ mindestens eine Lösung.
6. $Ax = b$ hat genau eine Lösung für jedes $b \in K^n$.
7. $\det(A) \neq 0$
8. $\text{im}(A) = K^n$
9. L_A ist bijektiv.
10. Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
11. Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
12. Die Spaltenvektoren von A bilden eine Basis von K^n.
13. Die Zeilenvektoren von A bilden eine Basis von K^n.
14. $\text{rg}(A) = n$
15. $\ker(L_A) = \{0\}$
16. $(\ker(L_A))^\perp = K^n$
17. Das orthogonale Komplement des von den Zeilen von A aufgespannten Raums ist $\{0\}$.
18. $A^T A$ ist invertierbar.

Definition: Allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems

Sei $x_s \in K^n$ eine (spezielle) Lösung von $Ax = b$. Dann gilt:

$$L(A,b) = x_s + \ker(A) = \{x_s + x \mid x \in \ker(A)\}$$

bzw., wenn $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von $\ker(A)$ ist:

$$L(A,b) = \{x + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \mid \lambda_i \in K\}$$

Beispiel: Allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems

Finden Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe folgender Schritte:

a) Bestimmen Sie den Kern der Abbildungsmatrix.
b) Erraten Sie eine spezielle Lösung.
c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

---

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

□

b)

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

□

c) Es gilt:

$$L\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

□

Definition: Cramersche Regel

Es seien $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ und $x, b \in K^n$ sowie $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem, und es gelte $\det(A) \neq 0$. Seien

$$A_i := \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \dots & a_n \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq n$$

Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Beispiel: Cramersche Regel

In der Elektrotechnik ergeben sich eine Widerstandsmatrix R und ein Quellspannungsvektor U:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Stromvektor I, der sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$R \cdot I = U$$

ergibt. Bestimmen Sie die Lösung mithilfe der Cramerschen Regel.

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Nach der Cramerschen Regel gilt:[a]

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|R|} = \frac{-1 \cdot (5 - 24) + 1 \cdot (20 - 27)}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{|R|} = \frac{-1 \cdot (8 - 10) + 1 \cdot (9 - 5)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{|R|} = \frac{32 + 54 + 5 - 40 - 9 - 24}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Damit ist der Stromvektor I gegeben mit $I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$. □

[a] $|R| = -1 \cdot (1 - 6) + 1 \cdot (4 - 3) = 6$

3.2 Über- und unterbestimmte lineare Gleichungssysteme

Definition: Normalgleichung

Sei $p_A(b)$ die Projektion eines Vektors $b \in \mathbb{R}^m$ auf den von den Vektoren $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ aufgespannten Unterraum U, also das Bild von A.

Damit existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$p_A(b) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k = Ax$$

Dann gilt

$$b - p_A(b) \iff \dots \iff A^T A x = A^T b$$

Die Gleichungen $A^T A x = A^T b$ heißen *Normalgleichungen*.

Die Normalgleichungen sind für jede relle Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lösbar.

Definition: Verallgemeinerte Inverse

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Im Fall $\operatorname{rg}(A) = n$ (voller Spaltenrang) existiert mit

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

eine eindeutige Lösung. In diesem Fall heißt $(A^T A)^{-1} A^T$ *verallgemeinerte Inverse* von A.

Im Fall $\operatorname{rg}(A) = m$ (voller Zeilenrang) existiert mit

$$x = A^T (A A^T)^{-1} b$$

eine eindeutige Lösung. In diesem Fall heißt $A^T (A A^T)^{-1}$ *verallgemeinerte Inverse* von A.

Algorithmus: Lösen von überbestimmten Gleichungssystemen (Methode der kleinsten Quadrate)

Gegeben ist das *überbestimmte* Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, m \geq n$$

Im Fall $\operatorname{rg}(A) = n$ (voller Spaltenrang) gilt mithilfe der verallgemeinerten Inverse für

$$x_s = (A^T A)^{-1} A^T b$$

dass

$$\|b - Ax_s\| = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \|b - Az\|$$

Der Vektor x_s heißt *Näherungslösung nach der Methode der kleinsten Quadrate*.

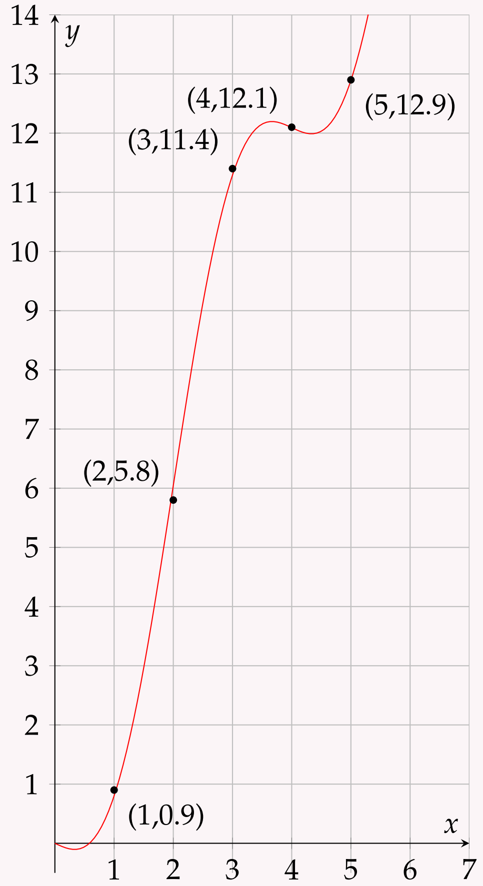
Beispiel: Methode der kleinsten Quadrate

Eine Messreihe ergibt zu den Zeiten $t = 1, 2, 3, 4, 5$ in Sekunden folgende Temperaturwerte:

t Sekunden	1	2	3	4	5
$y(t)$°C	0.9	5.8	11.4	12.1	12.9

Stellen Sie das überbestimmte Gleichungssystem für die unbekannten Parameter a und b auf und bestimmen Sie diese nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn folgende Beziehung zwischen y und t gilt:

$$y(t) = a \cdot t + b \cdot \sin\left(-t \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$



Beispiel: Methode der kleinsten Quadrate (Fortsetzung)

Mit den gegebenen Daten erhalten wir folgendes LGS:

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 2 & -\sin\pi \\ 3 & -\sin\frac{3\pi}{2} \\ 4 & -\sin 2\pi \\ 5 & -\sin\frac{5\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix}$$

mit

$$\operatorname{rg}(A) = 2 = n \quad \Longrightarrow \quad A^T A x = A^T b \quad \Longleftrightarrow \quad x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

Dann gilt nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\begin{aligned}
x_s &= \left(A^T A\right)^{-1} A^T b \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 55 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{156} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{156} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 & 12 & 12 \\ -52 & 6 & 64 & 12 & -40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 5.8 \\ 11.4 \\ 12.1 \\ 12.9 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{156} \begin{pmatrix} 471.6 \\ 346.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.02308 \\ 2.22308 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$y(t) = a \cdot t + b \cdot \sin\left(-t \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3.02308 \cdot t + 2.22308 \cdot \sin\left(-t \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

□

Algorithmus: Lösen von unterbestimmten Gleichungssystemen

Gegeben ist das *unterbestimmte* Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, m \leq n$$

Im Fall $\operatorname{rg}(A) = m$ (voller Zeilenrang) gilt mithilfe der verallgemeinerten Inverse für

$$x_s = A^T(AA^T)^{-1}b$$

dass

$$\|x_s\| = \min_{Ax=b} \|x\| \quad \wedge \quad x_s \perp \ker(A)$$

Der Vektor x_s ist eine *eindeutige Lösung mit minimaler Norm*.

Beispiel: Lösen von unterbestimmten Gleichungssystemen

Die Punkte $A(6;0;0)$, $B(2;1;3)$ und $C(-2;-2;2)$ liegen in einer Ebene E.

a) Stellen Sie die Hessesche Normalform der Ebene auf. Wie groß ist der Abstand der Ebene zum Ursprung?

b) Welcher Punkt in der Ebene hat den kleinsten Abstand zum Ursprung? Stellen Sie dazu das zugehörige unterbestimmte LGS auf und finden Sie die Lösung mit Hilfe der verallgemeinerten Inverse.

---

a) Wir wählen uns $\vec{a}$ (Ortsvektor von A) als Stützvektor und die Vektoren $v = \vec{b} - \vec{a}$ und $w = \vec{c} - \vec{a}$ als Richtungsvektoren der Ebene. Dann gilt:

$$v = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$n = \frac{v \times w}{|v \times w|} = \frac{1}{|v \times w|}\begin{pmatrix}8\\-16\\16\end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix}8\\-16\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$$

Mit n als (normierten) Normalenvektor erhalten wir dann die Hessesche Normalform der Ebene mit

$$E : \langle x, n\rangle = \langle \vec{a}, n\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot y + \frac{2}{3}\cdot z = 2$$

Setzen wir den Nullpunkt in die Ebene ein, erhalten wir den Abstand mit $d = 2$. □

b) Mit der Ebenengleichung

$$E : \frac{1}{3}\cdot x - \frac{2}{3}\cdot y + \frac{2}{3}\cdot z = 2$$

können wir folgendes unterbestimmte LGS aufstellen:

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$$

mit

$$\operatorname{rg}(A) = 1 = m \quad \Longrightarrow \quad x = A^T\left(AA^T\right)^{-1} b$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_s &= A^T\left(AA^T\right)^{-1} b \\ &= \begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}\right)^{-1}\cdot 2 \\ &= \begin{pmatrix}2/3\\-4/3\\4/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist dann $\begin{pmatrix}2/3 & -4/3 & 4/3\end{pmatrix}^T$ der gesuchte Punkt in der Ebene mit dem geringsten Abstand. □

4 Geometrie linearer Abbildungen

4.1 Orthogonale Abbildungen und Matrizen

Definition: Isometrie

Eine *Isometrie* ist eine lineare Abbildung, die zwei metrische Räume aufeinander abbildet und dabei die euklidische Länge eines Vektors erhält.

Man spricht auch von einer abstandserhaltenden Abbildung.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann sind äquivalent:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
2. f ist eine winkelerhaltende Isometrie.

Definition: Orthogonalmatrix

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal*, wenn ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden.

Die Menge aller orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ heiße $O(n)$.

Es gilt:

- $A \in O(n) \implies |\det(A)| = 1$

Es sind äquivalent:

1. $A \in O(n)$
2. A ist invertierbar, und es gilt $A^{-1} = A^T$
3. $A^T \in O(n)$

Beispiel: Orthogonalmatrix

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist und bestimmen Sie ihre Inverse.

Genau dann, wenn Q eine Orthogonalmatrix ist, ist $QQ^T = I$ und damit auch $Q^T = Q^{-1}$:

$$\begin{aligned}
QQ^T &= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\beta + \sin^2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\alpha\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) + \cos^2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\beta + \sin^2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist Q eine Orthogonalmatrix und Q^T die Inverse von Q. $\square$

Algorithmus: QR-Zerlegung

Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\operatorname{rg}(A) = n$. Dann gibt es eine in den Spalten orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = QR$. Hierbei können die Spalten von Q mithilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt aus den Spalten von A erzeugt werden, und es gilt $\operatorname{rg}(R) = n$.

Mit $Q = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}$ und $R = (\varrho_{ij})$ ergibt sich R durch Lösen der n linearen Gleichungen

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} & \cdots & \varrho_{1n} \\ & \varrho_{22} & \cdots & \varrho_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \varrho_{nn} \end{pmatrix}$$

Hierbei kann bei $n > 1$ über die per Gram-Schmidt generierten Zwischenrechnungen durch Koeffizientenvergleich gelöst werden.

Beispiel: QR-Zerlegung

Wie lautet die QR-Zerlegung von
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}?$$

Lösen Sie anschließend mit dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Spaltenvektoren an:[a]

$$\begin{aligned}
v_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \\
v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\
r_2 &= v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle \, w_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44/25 \\ 33/25 \end{pmatrix} \\
w_2 &= \frac{r_2}{\|r_2\|} = \frac{5}{11}\begin{pmatrix} -44/25 \\ 33/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir Q mit

$$Q = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Da A quadratisch ist[b], gilt:
$$QR = A \quad \Longleftrightarrow \quad R = Q^T A$$

womit R gegeben ist, mit

$$R = Q^T A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

[a] Wir sehen, dass die Vektoren orthogonal sind.
[b] ... und damit auch Q

Beispiel: QR-Zerlegung (Fortsetzung)

Für das gegebene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\iff \quad QRx = b \quad \iff \quad Rx = Q^T b \\ &\iff \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} x = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\implies 11x_2 = 1 \quad \wedge \quad 25x_1 + 23x_2 = 18 \\ &\iff x_2 = \frac{1}{11} \quad \wedge \quad x_1 = \frac{7}{11} \\ &\implies x = \begin{pmatrix} 7/11 \\ 1/11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition: Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum

Existiert für einen Endomorphismus f ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in V \setminus \{0\}$ mit

$$f(v) = \lambda v$$

dann heißt v *Eigenvektor* von f zum *Eigenwert* λ.

Sei λ ein Eigenwert von f und $v_1, \ldots, v_k$ Eigenvektoren von f zu λ. Dann ist auch $v \in L(v_1, \ldots, v_k) \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f zu λ.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\operatorname{Eig}(f; \lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$, der *Eigenraum* von f zu λ, ein Untervektorraum von V.

Es gilt:

- Für $\lambda \neq \gamma$ gilt $\operatorname{Eig}(f;\lambda) \cap \operatorname{Eig}(f;\gamma) = \{0\}$.
- Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind linear unabhängig.
- Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind die Werte auf der Hauptdiagonalen.
- Eigenwerte reeller symmetrischer Matrizen sind immer reell.
- Zu jedem Eigenwert einer reellen symmetrischen Matrix existieren reelle Eigenvektoren.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $\lambda \neq \mu$ zwei Eigenwerte von A mit Eigenvektoren v bzw. w. Dann gilt $v \perp w$.

Definition: Charakteristisches Polynom

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist die Funktion

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$$

ein Polynom mit $\deg(\chi_A) = n$ und heißt *charakteristisches Polynom*.

Es gilt:

- $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von $A \iff \chi_A(\lambda) = 0$
- A hat (mit Vielfachheit) genau n Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
- $\mathrm{Eig}(f;\lambda) = \ker(A - \lambda E)$

Beispiel: Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben sind

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & -1-t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_t = \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie, dass der Vektor x_t Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert? Bestimmen Sie auch den zweiten Eigenwert.

Berechnen des charakteristischen Polynoms von A_t:

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & t \\ -2 & -1-t-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(-1-t-\lambda) + 2t = \lambda^2 + t\lambda + t - 1$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms (Eigenwerte):

$$\lambda_{1,2} = -\frac{t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - t + 1} = -\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2 - 4t + 4}{4}} = -\frac{t}{2} \pm \frac{t-2}{2}$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \wedge \quad \lambda_2 = -t + 1$$

Bestimmen des Eigenraums/der Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda_1 & t & 0 \\ -2 & -1-t-\lambda_1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & t & 0 \\ -2 & -t & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies \quad 2x_1 + tx_2 = 0 \iff x_1 = -\frac{tx_2}{2}$$

$$\implies \quad E(\lambda_1) = \ker(A - \lambda_1 I) = \left\langle \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \ni x_t$$

Insgesamt sind also die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -t + 1$ und x_t Eigenvektor zu λ_1. $\square$

Bonus: Eigenwerte und Determinanten

Für $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Eigenwerten λ_i, $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

4.3 Diagonalisierung linearer Abbildungen

Definition: Diagonalisierbarkeit

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S existiert, sodass

$$A = SDS^{-1}$$

gilt. Dabei ist A genau dann diagonalisierbar, wenn eine Basis aus Eigenvektoren existiert. Bildet man mit ihnen als Spalten eine Matrix S, dann ist S genau die oben genannte Matrix[a].

Auf der Hauptdiagonalen von D befinden sich die entsprechenden Eigenwerte von A.

Es gilt:

- Zu jeder reellsymmetrischen Matrix A gibt es eine Orthogonalmatrix S und eine Diagonalmatrix D wie oben.

[a] ... des Basiswechsels.

Beispiel: Diagonalmatrix

Gesucht ist die Matrix A mit den Eigenwerten 1 und 4 und den zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir wissen, dass A diagonalisierbar ist. Damit gilt

$$\begin{aligned}
A &= SDS^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 24 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Definition: Vielfachheit

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und λ ein Eigenwert.

Die Vielfachheit der Nullstelle λ von χ_A heißte *algebraische Vielfachheit* $a(\lambda)$.

Weiter sei $g(\lambda) := \dim(\mathrm{Eig}(A; \lambda))$ die *geometrische Vielfachheit* von λ.

Es gilt:

- Existiert ein Eigenwert $\tilde{\lambda}$ mit $a(\tilde{\lambda}) > g(\tilde{\lambda})$, dann ist A nicht diagonalisierbar.

Bonus: Normale Matrix

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *normal*, wenn gilt:

$$AA^* = A^*A \quad \Longleftrightarrow \quad A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$$

A^* heißt adjungierte Matrix von A.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Es gilt:

- Es existiert eine bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{C}^n$ orthonormale Basis aus Eigenvektoren, d.h. A ist diagonalisierbar.
- Jede reelle symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. Die Eigenwerte sind reell.
- Jede reelle antisymmetrische Matrix (d.h. $A^T = -A$) ist diagonalisierbar. Die Eigenwerte sind rein imaginär oder 0.
- Jede reelle orthogonale Matrix ist diagonalisierbar.

4.4 Definitheit und Skalarprodukte

Definition: Skalarprodukt

Für ein *Skalarprodukt* $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ müssen drei Bedingungen erfüllt sein:

1. $(\cdot, \cdot)$ ist linear in den Spalten.
2. $(\cdot, \cdot)$ ist symmetrisch.
3. $(x, x) > 0$ für $x \neq 0$.

Wir wählen eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und betrachten die Abbildung

$$(\cdot, \cdot)_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y)_A := \langle x, Ay \rangle$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt steht.

Die Abbildung $(\cdot, \cdot)_A$ ist genau dann symmetrisch, wenn A symmetrisch ist.

Nicht jede symmetrische Matrix definiert ein Skalarprodukt (z.B. die Nullmatrix).

Definition: Quadratische Form

Sei A eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Die Abbildung $x \to \langle x, Ax \rangle$ wird *quadratische Form* genannt.

Definition: Hauptminoren

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien A_k die *links oben* beginnenden $k \times k$-Untermatrizen $A_k = (a_{ij})_{i,j=1}^k$ von A.

Dann heißen $D_k = \det(A_k)$ die *Hauptunterdeterminanten* oder *Hauptminoren* von A.

Definition: Definitheit

Sei A eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dann gilt:

- A heißt *positiv definit*, wenn $\langle x, Ax \rangle > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.[a]
- A heißt *negativ definit*, wenn $\langle x, Ax \rangle < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- A heißt *positiv semidefinit*, wenn $\langle x, Ax \rangle \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- A heißt *negativ semidefinit*, wenn $\langle x, Ax \rangle \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- A heißt *indefinit*, falls sie weder positiv noch negativ (semi-)definit ist, d.h.

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^n \{0\} : \langle x, Ax \rangle > 0 \wedge \langle y, Ay \rangle < 0$$

Es gilt:

- Die Abbildung $(\cdot, \cdot)_A$ ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn A spd ist.

Für eine reelle symmetrische Matrix A sind äquivalent:

1. A ist positiv definit.
2. A besitzt nur positive Eigenwerte.
3. Alle Hauptminoren von A sind positiv.

Weiter ist A genau dann positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte von A nicht negativ sind. In diesem Fall sind alle Hauptminoren von A nicht negativ.

A ist genau dann negativ (semi-)definit, wenn $-A$ positiv (semi-)definit ist.

Für die Hauptminoren D_k einer negativ definiten Matrix gilt, dass D_k abwechselnd positiv und negativ sind, beginnend mit negativem Vorzeichen.

[a] Häufig kürzt man „symmetrisch positiv definit" mit *spd* ab.

Index

Beispiele