https://matse.paddel.xyz/spicker

Analysis 2

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 13. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Definition: Metrik

Metriken definieren Abstände im $\mathbb{R}^n$.

Eine Funktion d auf einem Vektorraum V mit

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(\vec{x}, \vec{y})$$

heißt *Metrik*, falls gilt

- $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{y}, \vec{z}), \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel: Metriken

- Summen-Metrik:
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$
- euklid. Metrik:
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$
- Maximum-Metrik:
$$\max_{k \in [1,n]} |x_k - y_k|$$

Definition: Metrischer Raum

Ein Vektorraum und eine Metrik heißen zusammen *metrischer Raum*.

Bonus: Zusammenhang Metrik & Norm

Jeder Vektorraum mit einer Metrik d ist normierbar (d.h. dort gibt es eine Norm), falls

$$d(a\vec{x}, 0) = |a|\, d(\vec{x}, 0) \quad \text{und} \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x} - \vec{y}, 0)$$

Eine Norm wird dann definiert gemäß

$$\|\vec{x}\| := d(\vec{x}, 0)$$

1.1 Mengen im $\mathbb{R}^n$

Definition: ε-Umgebung im $\mathbb{R}^n$

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$, dann heißt

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}$$

die ε-Umgebung von $\vec{x}_0$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|$.

Sei D eine Menge und $\|\cdot\|$ eine Norm. Dann

- ... heißt $\vec{x}_0$ *innerer Punkt* von D, falls $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}_0) \in D$.
- ... heißt D *offene Menge*, falls alle Punkte von D innere Punkte sind.

Definition: Abgeschlossene Mengen

Sei D eine Menge und $\|\cdot\|$ eine Norm. Dann

- ... heißt $\vec{x}_0$ *Häufungspunkt* von D, falls $\forall \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ einen Punkt $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ enthält.
- ... heißt D *abgeschlossene Menge*, falls sie alle Häufungspunkte von D enthält.

Definition: Beschränktheit von Mengen

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|\vec{x}\| < M \quad \forall \vec{x} \in D$$

Existiert eine solche Schranke nicht, so heißt die Menge *unbeschränkt*.

1.2 Folgen im $\mathbb{R}^n$

Definition: Folge

Seien $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$, dann heißt $(\vec{x}_n)$ *Folge* im $\mathbb{R}^n$.

Definition: Konvergenz

$(\vec{x}_n)$ heißt *konvergent* gegen den *Grenzwert* $\vec{x}$, falls $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$, so dass $\forall n > n_0(\varepsilon)$ gilt:

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon$$

Definition: Cauchy-Folge

$(\vec{x}_n)$ heißt *Cauchy-Folge* gegen $\vec{x}$, falls $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$, so dass $\forall n, m > n_0(\varepsilon)$ gilt:

$$\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| < \varepsilon$$

Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Definition: Beschränktheit von Folgen

Eine Folge heißt *beschränkt*, wenn die Menge aller Folgenglieder in jeder Komponente beschränkt ist.

Definition: Häufungspunkt

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt* von $(\vec{x_n})$, falls $\forall \varepsilon > 0$ unendlich viele $\vec{x_i}$ in der ε-Umgebung von $\vec{x}$ liegen.

Jede unendliche beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt besitzt.

Definition: Bolzano-Weierstrass für Folgen

Jede unendliche beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Jede unendliche beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

1.3 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Definition: Grenzwert im $\mathbb{R}^n$

Wir bezeichnen mit dem Grenzwert

$$g = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_n}} f(\vec{x})$$

den *Grenzwert* jeder gegen $\vec{x_0}$ konvergenten Folge $(\vec{x_n})$, falls dieser existiert und damit insbesondere eindeutig ist.

Definition: Stetigkeit

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$, $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \in U$, f heißt in $\vec{x_0}$ *stetig*, wenn

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) = f\left(\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \vec{x}\right),$$

wobei $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x_0})$ Grenzwert jeder gegen $\vec{x_0}$ konvergenten Folge $(\vec{x_n})$ ist.

Formal:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) := \lim_{n \to \infty} f(\vec{x_n})$$

f heißt *stetig in U*, wenn die Funktion für jedes $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \in U$ stetig ist.

Stetigkeit bedeutet somit insbesondere Stetigkeit in allen Komponenten.

Beispiel: Stetigkeit

Lassen sich folgende Funktionen im Nullpunkt stetig ergänzen und, wenn ja, wie?

(a) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^8}$

(b) $f(x,y) = \frac{x^3+x^2-y^4+y^2}{x^2+y^2}$

(a) Sei die Kurve $x = y^4$ gegeben. Dann gilt:

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4 y^2}{y^8+y^8} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2y^2} = \infty$$

Damit ist f im Nullpunkt nicht stetig. $\square$

(b) f ist genau dann *stetig ergänzbar* im Nullpunkt, wenn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2-y^4+y^2}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3(\varphi) + r^2\cos^2(\varphi) - r^4\sin^4(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^3(\varphi) + \cos^2(\varphi) - r^2\sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} \\
&= \lim_{r\to 0} r\cos^3(\varphi) + \cos^2(\varphi) - r^2\sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi) \\
&= 0 + 1 - 0 + 0 = 1
\end{aligned}$$

Damit ist f im Nullpunkt stetig ergänzbar mit $f(0,0) = 1$. $\square$

Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ (unabhängig von $\vec{x_0}$) gibt, so dass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x_0})| < \epsilon, \; \forall \|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta$$

Gleichmäßige Stetigkeit ist wegen der Unabhängigkeit von $\vec{x_0}$ insbesondere Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich D.

Ist f beschränkt und abgeschlossen, so ist f gleichmäßig stetig.

Definition: Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Konstante L gibt (unabhängig von $\vec{x}_0$), so dass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \leq L\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

Ist in einer Norm $L < 1$, so heißt die Abbildung *Kontraktion*.

Ist eine Funktion f Lipschitz-stetige, so ist f auf ihrem Definitionsbereich D gleichmäßig stetig und in jedem Punkt stetig.

Bonus: Nullstelle

Ein Punkt $\vec{x}_0 \in D$ heißt *Nullstelle* einer Funktion f, falls $f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Definition: Fixpunkt

Ein Punkt $\vec{x^*} \in D$ heißt *Fixpunkt* einer Funktion φ, falls $\varphi(\vec{x^*}) = \vec{x^*}$.

Definition: Fixpunktsatz von Banach

Sei $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y})| \leq L\|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \text{und} \quad L < 1,$$

dann hat φ *genau einen Fixpunkt*.

1.3.1 Partielle Ableitungen

Definition: Partielle Ableitung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \in U$, f heißt in $\vec{x}_0$ *partiell differenzierbar* nach x_i, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

existiert. Der Wert $\frac{\partial f}{\partial x}$ heißt dann die *partielle Ableitung* von f nach x_i.

Eine Funktion heißt *(partiell) differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen existieren.

Bonus: Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit

f heißt *stetig partiell differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen in $\vec{x}_i$ stetige Funktionen (und insbesondere beschränkt) sind.

Ist f in U partiell differenzierbar und in $\vec{x}_0 \in U$ *stetig partiell differenzierbar*, so ist f in $\vec{x}_0$ stetig.

Definition: Gradient

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $F : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \in U$, dann heißt

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

der *Gradient von f in $\vec{x_0}$*.

Bonus: Rechenregeln für Gradienten

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \nabla(f+g) &= \nabla(f) + \nabla(g) \\ \nabla(\alpha f) &= \alpha \cdot \nabla(f) \\ \nabla(fg) &= g \cdot \nabla(f) + f \cdot \nabla(g) \end{aligned}$$

Beispiel: Gradient

Berechnen Sie den Gradienten für $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z$ an der Stelle $(1, 2, 3)$.

Zuerst berechnen wie die partiellen Ableitungen f_x, f_y und f_z:

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 \\ f_y &= 2y \\ f_z &= 1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir dann den Gradienten ∇f an der Stelle $(1, 2, 3)$ mit:

$$\nabla f(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} f_x(1, 2, 3) \\ f_y(1, 2, 3) \\ f_z(1, 2, 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Definition: Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$

Sei $z = f(x, y)$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion in zwei Unbekannten und $z_0 = f(x_0, y_0)$ ein fester Punkt.

Dann ist die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0, z_0) gegeben mit:

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \vec{v_1} + \mu \cdot \vec{v_2},$$

wobei $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ verschiedene Tangentenvektoren sind.

Algorithmus: Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$

Betrachten wir die Tangenten entlang der Koordinatenachsen, so erhalten wir

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

oder äquivalent

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Bonus: Tangentialebene im $\mathbb{R}^n$

Die Tangentialebene im $\mathbb{R}^n$ einer Funktion f in $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ an der Stelle $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ analog definiert durch

$$T(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + \nabla f(\vec{x} - \vec{x_0})$$

Beispiel: Tangentialebene

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2)^2$$

Geben Sie die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 2)$ an.

Zuerst berechnen wie die partiellen Ableitungen f_x und f_y:

$$f_x = 4x(x^2 + y^2 - 2)$$
$$f_y = 4y(x^2 + y^2 - 2)$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = f(0, 2) = 4$$

Damit ergibt sich dann die Tangentialebene von f am Punkt $(0, 2)$ mit:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\square$

Definition: Richtungsableitung

Die Ableitung in Richtung des Vektors $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ heißt *Richtungsableitung* $D_{\vec{v}}(f)$ von f in Richtung von $\vec{v}$. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v} := D_{\vec{v}}(f) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1 + hv_1, \dots, x_n + hv_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}\end{aligned}$$

Algorithmus: Richtungsableitung

Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\| = 1$. Dann ist die Richtungsableitung von f im Punkt $\vec{x_0}$ in Richtung $\vec{v}$ gegeben mit

$$\frac{\partial f}{\partial v} = D_{\vec{v}}(f) = \nabla(f(\vec{x_0})) \cdot \vec{v}$$

Beispiel: Richtungsableitung

Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = x^2 y - y^3 x + 1$$

im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$ in Richtung des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Richtungsableitung von f im Punkt (x_0, y_0) in Richtung $\vec{v}$ ($\|\vec{v}\| = 1$) ist gegeben mit

$$D_{\vec{v}}(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle$$

Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen f_x und f_y:

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy - y^3 \implies f_x(x_0, y_0) = f_x(1, 2) = -4 \\ f_y &= x^2 - 3y^2 x \implies f_y(x_0, y_0) = f_y(1, 2) = -11 \end{aligned}$$

Sei nun $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$:

$$\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit können wir nun die Richtungsableitung wie folgt bilden:

$$D_{\vec{v}}(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{34}{\sqrt{13}}$$

□

Algorithmus: Extremster Anstieg

Insgesamt gilt, falls wir nur die Richtung (ohne Normierung) betrachten:

$$\vec{v} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad \text{ist die Richtung des steilsten Anstiegs von } f$$

$$\vec{v} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad \text{ist die Richtung des steilsten Abstiegs von } f$$

1.3.2 Das vollständige Differential

Definition: Vollständiges Differential

Unter dem *vollständigen Differential* der Funktion $z = f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) versteht man den Ausdruck

$$\mathrm{d}z = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y$$

Algorithmus: Absoluter Fehler

Es gilt für $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ der *absolute Fehler*:

$$\Delta z_{\max} \leq \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}| \cdot |\Delta x_i|$$

Algorithmus: Relativer Fehler

Es gilt für $z = f(x, y) = c \cdot x^a \cdot y^b$ anhand der möglichen relativen Eingabefehler $\frac{\Delta x}{x}$ und $\frac{\Delta y}{y}$ der *relative Fehler*:

$$\frac{\Delta z}{z} \leq a \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + b \cdot \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

Beispiel: Relativer Fehler

Bei der Berechnung einer Fläche $f(x, y) = 5x^2 \cdot y$ werde ein relativer Messfehler von 10% in x und 3% in y gemacht. Wie ist der relative Fehler des Ergebnisses?

$z := f(x, y) = 5x^2 \cdot y \qquad (c \cdot x^a \cdot y^b)$

Es ist der relative Fehler gegeben mit

$$\frac{\Delta z}{z} \leq a \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + b \cdot \left|\frac{\Delta y}{y}\right| = 2 \cdot 10\% + 1 \cdot 3\% = 23\%$$

□

Definition: Kurve

Seien $x(t)$ und $y(t)$ in t stetige Funktionen. Die Menge

$$\{(x,y) \mid x = x(t),\ y = y(t),\ t \in \mathbb{R}\}$$

heißt *Kurve*. Die Darstellung $t \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

heißt *Parameterdarstellung der Kurve*.

Definition: Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Sei $z = f(\vec{x}) = f(\vec{x}(t))$ und $\vec{x}(t)$ stetig in jeder Komponente x_i. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$$

Definition: Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

Sei $z = f(\vec{x}) = f(\vec{x}(u,v))$ und $\vec{x}(u,v)$ stetig in jeder Komponente x_i. Dann gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}v}$$

1.3.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Definition: Satz von Schwarz

Sind die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung einer Funktion stetige Funktionen, so darf die Reihenfolge der Differentiation beliebig vertauscht werden.

Definition: Divergenz

Wir bezeichnen die *Divergenz* einer Funktion f mit

$$\operatorname{div} f := \nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

Definition: Rotation

Wir bezeichnen die *Rotation* einer Funktion f mit

$$\operatorname{rot} f := \nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Bonus: Quellen und Senken

Die Punkte mit $\operatorname{div} f > 0$ heißen *Quellen* des Vektorfeldes, die mit $\operatorname{div} f < 0$ heißen *Senken*.

Gilt stets $\operatorname{div} f = 0$, so heißt die Funktion *quellenfrei*.

Gilt $\operatorname{rot} f = 0$, so heißt die Funktion *wirbelfrei*.

Definition: Jacobi-Matrix

Die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{x_n} \end{pmatrix}$$

heißt *Jacobi-Matrix* von f.

1.3.4 Taylorentwicklung für $f(x,y)$

Definition: Quadratische Approximation

Für $f(x,y)$ ist die *quadratische Approximation* gegeben mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2}{2} + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{f_{yy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2}{2} \end{aligned}$$

1.3.5 Extremwerte ohne Nebenbedingungen

Algorithmus: Lokale Extrema ohne Nebenbedingungen im $\mathbb{R}^2$

1. Berechne $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ und suche diejenigen Stellen (x_0, y_0) mit
$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$$
Diese Stellen sind die *Kandidaten* für lokale Extrema.
2. Berechne für jeden Kandidaten (x_0, y_0) die Werte $f_{xx}(x_0,y_0)$, $f_{xy}(x_0,y_0)$ und $f_{yy}(x_0,y_0)$ und daraus den Wert
$$d := f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - \left(f_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$$
3. Dann gilt:
   $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \ \wedge \ d > 0 \implies$ *lokales Minimum*
   $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \ \wedge \ d > 0 \implies$ *lokales Maximum*
   $d < 0 \implies$ *Sattelpunkt*
   $d = 0 \implies$ höhere Ableitung entscheidet

Definition: Hesse-Matrix im $\mathbb{R}^2$

Die *Hesse-Matrix* im $\mathbb{R}^2$ ist definiert mit
$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Ist H *positiv definit*, so liegt ein Minimum vor, ist H *negativ definit* ein Maximum und bei *indefinitem* H ein Sattelpunkt.

Es gilt:

- H ist positiv definit $\iff f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \ \wedge \det H > 0$
- H ist negativ definit $\iff f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \ \wedge \det H > 0$
- H indefinit $\iff \det H < 0$

Definition: Hesse-Matrix im $\mathbb{R}^n$

Die *Hesse-Matrix* im $\mathbb{R}^n$ ist definiert mit
$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Ist H *positiv definit*, so liegt ein Minimum vor, ist H *negativ definit* ein Maximum und bei *indefinitem* H ein Sattelpunkt.

Es gilt:

- H ist positiv definit $\iff$ alle *Unterdeterminanten* (links oben beginnend) sind positiv
- H ist negativ definit $\iff$ alle *Unterdeterminanten* (links oben beginnend) haben wechselndes Vorzeichen (beginnend mit negativem Vorzeichen)
- H indefinit $\iff$ sonst

Beispiel: Lokale Extrema ohne Nebenbedingungen

Untersuchen Sie die Funktion

$$v(x,y,z) = xy - z^4 - 2(x^2 + y^2 - z^2)$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

$v(x,y,z) = xy - z^4 - 2(x^2 + y^2 - z^2) = xy - z^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2z^2$

Wir berechnen zuerst die potentiellen Kandidaten. Für diese muss gelten

$$\nabla v(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} y - 4x \\ x - 4y \\ -4z^3 + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z(z^2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben offensichtlich drei Gleichungen gegeben.

Wir erkennen aus III direkt, dass $z \in \{-1, 0, 1\}$ gelten muss und aus II und I, dass $x = y = 0$.

Damit erhalten wir die drei Kandidatentupel:

- $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, -1)$,
- $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$,
- $(x_3, y_3, z_3) = (0, 0, 1)$.

Wir bilden nun die Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -4 & f_{xy} &= 1 & f_{xz} &= 0 \\ f_{yx} = f_{xy} &= 1 & f_{yy} &= -4 & f_{yz} &= 0 \\ f_{zx} = f_{xz} &= 0 & f_{zy} = f_{yz} &= 0 & f_{zz} &= 12z^2 + 4 \end{aligned}$$

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -12z^2 + 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt für die Unterdeterminanten:

$$\begin{aligned} \det H_1 &= -4 \\ \det H_2 &= 15 \\ \det H &= (-12z^2 + 4) \cdot \det H_2 = (-12z^2 + 4) \cdot 15 = -180z^2 + 60 \end{aligned}$$

Es gilt weiterhin

$$\det H \leq 0 \iff -180z^2 + 60 \leq 0 \iff z^2 \leq \frac{1}{3}$$

Damit ist die Hesse-Matrix für alle $|z| \leq \frac{1}{9}$ indefinit und sonst negativ definit.

Damit sind die Kandidatentupel $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, -1)$ und $(x_3, y_3, z_3) = (0, 0, 1)$ Maxima und $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$ ein Sattelpunkt. $\square$

1.3.6 Extremwerte mit Nebenbedingungen

Definition: Lagrange-Funktion

Gegeben seien eine Funktion $f(x,y)$ und eine Nebenbedingung $g(x,y) = 0$. Dann ist die *Lagrange-Funktion* gegeben mit

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

Es gilt damit:

$$L_\lambda = g(x,y) \quad \wedge \quad g(x,y) = 0 \implies L(x,y,\lambda) = f(x,y)$$

Algorithmus: Lokale Extrema mit Nebenbedingung im $\mathbb{R}^2$

1. Berechne die Kandidaten wie in freien Optimierungen mit

$$\nabla(L) = \vec{0}$$

2. Aufstellen der geränderten Hesse-Matrix für die drei Unbekannten mit

$$H = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{xy} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dann gilt:
   $\det H > 0 \implies$ *Maximum*
   $\det H < 0 \implies$ *Minimum*
   $\det H = 0 \implies$ keine Entscheidung möglich

1.3.7 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale

Definition: Tangentenvektor

Der *Tangentenvektor* einer Kurve $\vec{x}(t)$ ist gegeben mit

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

Definition: Tangente

Die *Tangente* einer Kurve $\vec{x}(t)$ ist gegeben mit

$$T(t) = \vec{x}(t) + \lambda \vec{x}'(t)$$

Definition: Arbeitsintegral

Seien die Kraft $F(\vec{x}(t))$ und ein Zeitintervall $t \in [a, b]$, oder analog Start- und Endpunkte $\vec{A} = \vec{x}(a)$ bzw. $\vec{B} = \vec{x}(b)$, gegeben.

Dann ist die *Arbeit* gegeben mit

$$W = \int_a^b F(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t)\, \mathrm{d}t$$

Beispiel: Arbeitsintegral

Gegeben sei die Kurve $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Arbeit im Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + yz \\ y + xz \\ z + xy \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve.

Die Arbeit von Zeitpunkt $t = a$ bis Zeitpunkt $t = b$ ist gegeben mit

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t)\ \mathrm{d}t$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} W = &\int_a^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t)\ \mathrm{d}t \\ = &\int_a^b \begin{pmatrix} t + t^5 \\ t^2 + t^4 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}t \\ = &\int_a^b \left(t + t^5 + 2t(t^4 + t^2) + 3t^2 \cdot 2t^3 \right)\ \mathrm{d}t \\ = &\int_a^b \left(9t^5 + 2t^3 + t\right)\ \mathrm{d}t \\ = &\left[\frac{3t^6}{2} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{3(b^6 - a^6) + b^4 + b^2 - a^4 - a^2}{2} \end{aligned}$$

□

Definition: Potentialfunktion

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. f heißt *Gradientenfeld*, wenn es eine skalare Funktion V gibt, mit

$$\nabla(V) = f$$

Die Funktion V heißt dann *Potentialfunktion* von f mit

$$V = \int f$$

Es gilt:

- Im $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{x}$$

- Im $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot} f = 0$$

- Im $\mathbb{R}^n$ für die Jacobimatrix J

$$J = J^T$$

2 Mehrdimensionale Integration

2.1 Doppelintegrale

Definition: Integral im $\mathbb{R}^2$

Bezeichnet A das Rechteck $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$, so ist das *Integral* von f über das Gebiet A gegeben mit

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_A f\,\mathrm{d}A = \int\int_A f\,\mathrm{d}A$$

Algorithmus: Integration über kartesische krummlinige Bereiche

Seien eine *obere* und eine *untere Funktion* $f_u(x)$ und $f_v(x)$ gegeben und in der zweiten Dimension das Intervall $[a,b]$, dann gilt für das Integral im entsprechenden Integrationsbereich

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Algorithmus: Flächeninhalt einer Grundfläche eines kartesischen krummlinigen Bereiches

Der Flächeninhalt F einer Grundfläche A ergibt sich durch Integration mit $f(x,y) = 1$, also

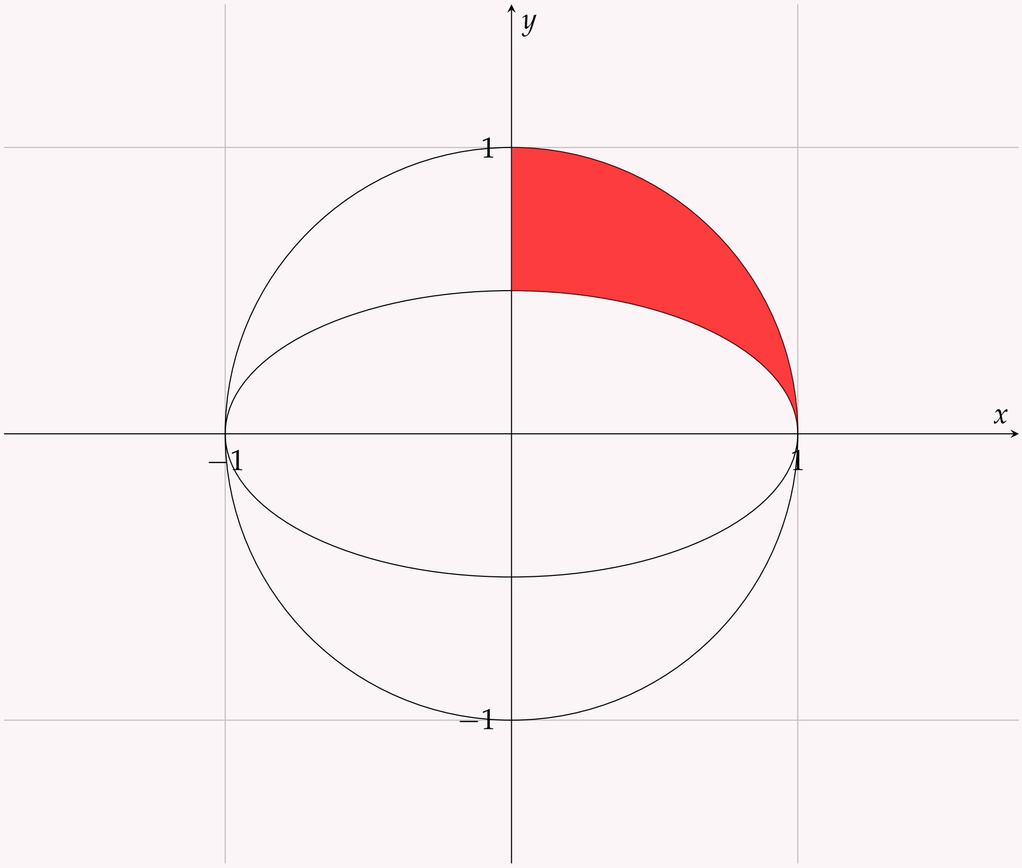
$$F = \int_A 1\,\mathrm{d}A$$

Beispiel: Integration über kartesische krummlinige Bereiche

Berechnen Sie das Volumen der Funktion $f(x,y) = x + y$ über die Fläche

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Skizzieren Sie zunächst die Fläche.



Wir sehen, dass die Ellipsengleichung die untere und die Kreisgleichung die obere Schranke bilden. Damit formen wir unser Integrationsgebiet wie folgt um:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$

Beispiel: Integration über kartesische krummlinige Bereiche (Fortsetzung)

Dann können wir wie folgt die Fläche berechnen:

$$
\begin{aligned}
\int\int_A (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2} - \left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1-x^2}{8}\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{3(1-x^2)}{8}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{8}\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{a}{=} -\frac{1}{4}\int_{x=0}^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u + \frac{3}{8}\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{2\sqrt{1-x^2}}{3}\right]_0^1 + \frac{3}{8}\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

□

[a] $u = 1-x^2 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x \iff \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{2x}$

Algorithmus: Schwerpunkt einer Grundfläche eines homogenen Gebietes

Der Schwerpunkt mit den Schwerpunktskoordinaten (x_s, y_s) einer Fläche mit homogener Dichte ergibt sich mit der Flächenmaßzahl F aus

$$x_s = \frac{1}{F}\int_A x\,\mathrm{d}A \quad \wedge \quad y_s = \frac{1}{F}\int_A y\,\mathrm{d}A$$

Algorithmus: Masse einer Grundfläche eines inhomogenen Gebietes

Wird die spezifische Dichte eines Stoffes in der Koordinate (x, y) gegeben durch $\rho(x, y)$, so lässt sich die Masse einer Fläche A berechnen mit

$$M = \int_A \rho(x,y)\,\mathrm{d}A$$

Algorithmus: Integration in Polarkoordinaten

Bei der Umwandlung der kartesischen Koordinaten (x, y) in *Polarkoordinaten* umwandeln, gilt

$$f(x,y) = f(r\cos\phi, r\sin\phi) \quad \wedge \quad \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

Und dann insgesamt für die Integration:

$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_A f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

Algorithmus: Uneigentliche Integrale mithilfe von Polarkoordinaten

Der Übergang zu Polarkoordinaten kann bei der Berechnung von uneigentlichen zweidimensionalen Integralen behilflich sein. Dabei gilt:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

Beispiel: Uneigentliche Integrale mithilfe von Polarkoordinaten

Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_A x \cdot y\,\mathrm{d}A$$

über dem Integrationsgebiet A gegeben durch die Ungleichungen

$$-2 \le y \le 2, \quad x \ge 0, \quad x^2 + y^2 \le 4$$

(a) in kartesischen Koordinaten,
(b) in Polarkoordinaten.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_A x \cdot y\,\mathrm{d}A &= \int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \cdot y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{2} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y^2}} \mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{2} \frac{y(4-y^2)}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4y - y^3)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4y - y^3)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Beispiel: Uneigentliche Integrale mithilfe von Polarkoordinaten (Fortsetzung)

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_A x \cdot y \,\mathrm{d}A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \cos\phi \sin\phi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi \int_0^2 r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}\phi \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \sin\phi \,\mathrm{d}\phi \\ &\overset{a}{=} -4 \int_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \,\mathrm{d}u \\ &= -4 \left[\frac{\cos^2\phi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

[a] $u = \cos\phi \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} = -\sin\phi \iff \mathrm{d}\phi = -\frac{\mathrm{d}u}{\sin\phi}$

2.2 Dreifachintegrale

Definition: Dreifachintegral

Bezeichnet V den Quader $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$, so ist das *Dreifachintegral* von f über das Gebiet V gegeben mit

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_A f \,\mathrm{d}A = \int \int \int_A f \,\mathrm{d}A$$

Bonus: Volumenberechnung im $\mathbb{R}^3$

Die Berechnung eines Volumen V über den Bereich V' im $\mathbb{R}^3$ geschieht völlig analog zum $\mathbb{R}^2$:

$$V = \int_{V'} 1 \,\mathrm{d}V'$$

Bonus: Schwerpunktberechnung im $\mathbb{R}^3$

Die Berechnung des Schwerpunktes (x_s, y_s, z_s) mit Volumen V über den Bereich V' im $\mathbb{R}^3$ geschieht völlig analog zum $\mathbb{R}^2$:

$$x_s = \frac{1}{V} \int_{V'} x \,\mathrm{d}V' \quad \wedge \quad y_s = \frac{1}{V} \int_{V'} y \,\mathrm{d}V' \quad \wedge \quad z_s = \frac{1}{V} \int_{V'} z \,\mathrm{d}V'$$

Bonus: Rechnen mit Kugelkoordinaten

Der Übergang zu Kugelkoordinaten kann bei der Berechnung von dreidimensionalen Integralen behilflich sein. Dabei gilt:

$$\int\int\int f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\int\int f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)\left|r^2\sin\theta\right|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$$

3 (*) Wachstums- und Zerfallsprozesse

3.1 Ungebremstes Wachstum

Definition: Diskretes ungebremstes Wachstum

Gegeben sei ein Wachstum k innerhalb einer (beliebigen) Zeiteinheit Δt_0, eine Startpopulation y_0 und eine Änderungsrate

$$\Delta y = k \cdot y$$

dann ist die Lösungsfunktion

$$\boxed{y_n = y_0 \cdot (1+k)^n}$$

wobei $y_n = y(n \cdot \Delta t_0)$ den Zustand nach n Zeitschritten der Länge Δt_0 angibt.

Bonus: Diskretes ungebremstes Wachstum für Zeitteile

s Gegeben sei ein Wachstum k innerhalb einer (beliebigen) Zeiteinheit $\Delta t_0 = 1$, eine Startpopulation y_0 und eine Änderungsrate

$$\Delta y = k_{\Delta t_0} \cdot y$$

Betrachten wir nun einen *Zeitteil* Δt, dann ist das modifizierte Modell

$$\Delta y = y_n - y_{n-1} = k_{\Delta t} \cdot y_{n-1} \cdot \Delta t$$

mit der Lösung

$$\boxed{y_n = y_0 \cdot (1 + k_{\Delta t} \cdot \Delta t)^n}$$

wobei $y_n = y(n \cdot \Delta t)$ den Zustand nach n Zeitschritten der Länge Δt angibt.

Die Lösung dieses Modells wird auch als *diskrete Evolutionsgleichung des ungebremsten Wachstums* bezeichnet.

Definition: Kontinuierliches Modell der Evolutionsgleichung

Zur Lösung der Modellgleichung

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y$$

mit $y(0) = y_0$ und k (kontinuierliches) Wachstum, so ist die *kontinuierliche* Lösungsfunktion

$$\boxed{y(t) = y_o \cdot e^{kt}}$$

und wegen $\Delta t \to 0$ ist dies gleichbedeutend zu

$$y'(t) = k \cdot y(t) \text{ mit } y(0) = 0$$

Ein solches Problem heißt *Differentialgleichung mit Anfangswert* oder *Anfangswertproblem*.

3.2 Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung

Definition: Diskretes Modell des Wachstums mit Störung erster Ordnung

Gegeben sei ein Wachstum k innerhalb einer (beliebigen) Zeiteinheit Δt_0, eine Startpopulation $y(0) = y_0$, Δt ein Zeitteil, a die *Abnahme pro Zeiteinheit* und eine Änderungsrate

$$\Delta y = (k \cdot y - a) \cdot \Delta t$$

dann ist die Lösungsfunktion

$$\boxed{y_n = \left(y(0) - \frac{a}{k}\right) \cdot (1 + k \cdot \Delta t)^n + \frac{a}{k}}$$

Definition: Kontinuierliches Modell des Wachstums mit Störung erster Ordnung

Zur Lösung der Modellgleichung

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y - a$$

mit $y(0) = y_0$, k (kontinuierliches) Wachstum und a *kontinuierliche Abnahme* pro Zeiteinheit, ist die *kontinuierliche* Lösungsfunktion

$$\boxed{y(t) = \left(y(0) - \frac{a}{k}\right) \cdot e^{kt} + \frac{a}{k}}$$

und wegen $\Delta t \to 0$ ist dies gleichbedeutend zu

$$y'(t) = k \cdot y(t) - a$$

Definition: Stationäre Lösung

Die konstanten Werte, ermittelt durch $\Delta y = 0$, heißen *stationäre Lösungen* y_s.

Für Wachstumsmodelle mit Störung erster Ordnung gilt:

$$y_s = \frac{a}{k}$$

3.3 Logistisches Wachstum - Störung zweiter Ordnung

Definition: Diskretes Modell des Wachstums mit Störung zweiter Ordnung

Gegeben sei ein Wachstum k innerhalb einer (beliebigen) Zeiteinheit Δt_0, eine Startpopulation $y(0) = y_0$, Δt ein Zeitteil, R *Oberschranke der verfügbaren Ressourcen* und eine Änderungsrate

$$\Delta y = (k \cdot y \cdot (R - y)) \cdot \Delta t$$

dann ist die Lösungsfunktion

$$\boxed{y_n = \frac{R}{\frac{R-y_0}{y_0} \cdot (1 + R \cdot k \cdot \Delta t)^{-n} + 1}}$$

Definition: Kontinuierliches Modell des Wachstums mit Störung zweiter Ordnung

Zur Lösung der Modellgleichung

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y \cdot (R - y)$$

mit $y(0) = y_0$, k (kontinuierliches) Wachstum und R *Oberschranke der verfügbaren Ressourcen*, ist die *kontinuierliche* Lösungsfunktion

$$\boxed{y(t) = \frac{R}{\frac{R-y_0}{y_0} \cdot e^{-Rkt} + 1}}$$

und wegen $\Delta t \to 0$ ist dies gleichbedeutend zu

$$y'(t) = k \cdot y(t) \cdot (R - y(t))$$

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition: Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung

Eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

heißt *(explizite) gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung*.

Ist die Gleichung in der Form

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

gegeben, so heißt die Differentialgleichung *implizit*.

Erfüllt $y(x)$ die Differentialgleichung, so heißt y *allgemeine Lösung der Differentialgleichung*.

Definition: Anfangswertproblem

Die Vorgabe einer expliziten Differentialgleichung und der Werte

$$x_0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

heißt *Anfangswertproblem*.

Erfüllt $y(x)$ das Anfangswertproblem, so heißt y *spezielle Lösung des Anfangswertproblems*.

4.1 Lösungsverfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung

Algorithmus: Trennung der Variablen

Gegeben: Differentialgleichung der Form

$$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y)$$

1. x und y wie folgt trennen:
$$\frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$
2. Integration liefert:
$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$
3. Umstellen nach y liefert die Lösung der Differentialgleichung

Beispiel: Trennung der Variablen

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + (1+x)\cdot y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = -y\cdot(1+x)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} && = -y\cdot(1+x) \\
\Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y && = (1+x)\,\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow \quad & \int -\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y && = \int (1+x)\,\mathrm{d} \\
\Longleftrightarrow \quad & -\ln|y| - c_2 && = x + \frac{x^2}{2} + c_1 \\
\Longleftrightarrow \quad & y && = e^{-(c_1+c_2)} e^{-\frac{x}{2}(x+2)} \\
\Longleftrightarrow \quad & y && = ce^{-\frac{x}{2}(x+2)}
\end{aligned}$$

□

Algorithmus: Substitution

- Differentialgleichung vom Typ

$$\boxed{y' = f(ax+by+c)}$$

  1. Substituiere $z = ax+by+c$
  2. Es ergibt sich

$$y = \frac{z-ax-c}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \frac{z'-a}{b}$$

     bzw.

$$z' = a + bf(z)$$

  3. Lösen mithile von *Trennung der Variablen* (*Tipp:* Dividieren durch rechte Seite)
  4. Rücksubstitution in $y = \frac{z-ax-c}{b}$ ergibt die Lösung
- Differentialgleichung vom Typ

$$\boxed{y' = f\left(\frac{x}{y}\right)}$$

  1. Substituiere $z = \frac{x}{y}$
  2. Es ergibt sich (Produktregel!)

$$y = z\cdot x \qquad \Longrightarrow \qquad y' = z + z'\cdot x$$

     bzw.

$$z' = \frac{f(z)-z}{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z + z'\cdot x = f(z)$$

  3. Lösen mithile von *Trennung der Variablen*
  4. Rücksubstitution in $y = z\cdot x$ ergibt die allgemeine Lösung

Beispiel: Substitution

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit Hilfe einer geeigneten Substitution ($x \neq 0$):

$$y' = \frac{1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x}$$

Sei $u = \frac{y}{x}$ ($\implies u' = \frac{xy'-y}{x^2} \iff y' = u + xu'$). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& y' && = \frac{1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x} \\
\iff & u + xu' && = \frac{1}{\sin u} + u \\
\iff & xu' && = \frac{1}{\sin u} \\
\iff & \frac{x\,\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && = \frac{1}{\sin u} \\
\iff & \sin u\,\mathrm{d}u && = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\iff & \int \sin u\,\mathrm{d}u && = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\iff & -\cos(u) + c_2 && = \ln|x| + c_1 \\
\iff & \cos(u) && = -\ln|x| - c_1 + c_2 \\
\iff & u && = \arccos(-\ln|x| - c_1 + c_2) \\
\iff & \frac{y}{x} && = \arccos(-\ln|x| - c_1 + c_2) \\
\iff & y && = x\arccos(c - \ln|x|)
\end{aligned}$$

□

Definition: Lineare Differentialgleichung

Die Gleichung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

heißt *linear homogene Differentialgleichung* 1. Ordung.

Die Gleichung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

heißt *linear inhomogene Differentialgleichung* 1. Ordung und $g(x)$ heißt *Störfunktion*.

Das zugehörige Anfangswertproblem heißt *lineares Anfangswertproblem*.

Algorithmus: Lösen von linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung

Für eine Gleichung

$$\boxed{y' + f(x) \cdot y = 0}$$

ist die allgemeine Lösung

$$y = ce^{\int -f(x)\,\mathrm{d}x}$$

c wird dann durch Einsetzen eines Anfangswertes berechnet.

Algorithmus: Variation der Konstanten

Gegeben: Differentialgleichung der Form

$$\boxed{y' + f(x) \cdot y = g(x)}$$

1. Löse homogene Differentialgleichung mit
$$y = ce^{\int -f(x)\,\mathrm{d}x}$$
2. Ersetze c durch $c(x)$
3. Berechne y'
4. Vergleiche y' mit ursprünglicher Störfunktion
5. Bestimme aus der Differentialgleichung die Lösung für $c(x)$ (enthält neue Konstante!)
6. Einsetzen in
$$y = c(x) \cdot e^{\int -f(x)\,\mathrm{d}x}$$
ergibt die allgemeine Lösung

Beispiel: Variation der Konstanten

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x-2) \cdot y' = y + 2(x-2)^3$$

Umwandeln in allgemeine Darstellung:

$$(x-2) \cdot y' = y + 2(x-2)^3 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x-2} + 2(x-2)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y' - \frac{1}{x-2} \cdot y = 2(x-2)^2$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned}
& y_h' - \frac{1}{x-2} \cdot y_h && = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & y_h' && = \frac{1}{x-2} \cdot y_h \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{y_h} \, \mathrm{d}y_h && = \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow \quad & \int \frac{1}{y_h} \, \mathrm{d}y_h && = \int \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln(y_h) + c_2 && = \ln(x-2) + c_1 \\
\Longleftrightarrow \quad & (y_h) && = e^{\ln(x-2)+c_1-c_2} \\
\Longleftrightarrow \quad & y_h && = c(x-2)
\end{aligned}$$

Lösen der Störfunktion:

$$\begin{aligned}
& y && = c(x) \cdot (x-2) \\
\Longrightarrow \quad & y' && = c'(x)(x-2) + c(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y' - \frac{1}{x-2} \cdot y && = 2(x-2)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \underbrace{c'(x)(x-2) + c(x)}_{y'} - \frac{1}{x-2} \cdot \underbrace{c(x) \cdot (x-2)}_{y} && = 2(x-2)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & c'(x)(x-2) && = 2(x-2)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & c'(x) && = 2(x-2) \\
\Longleftrightarrow \quad & \int 1 \, \mathrm{d}c && = 2 \int x \, \mathrm{d}x - 4 \int 1 \, \mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow \quad & c(x) && = x^2 - 4x + c_1
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$y = (x^2 - 4x + c)(x-2) = c(x-2) + (x-4)(x-2)x$$

□

Definition: Superpositionsprinzip (inhomogene lineare Differentialgleichungen)

Die Lösung einer *inhomogenen linearen Differentialgleichung* setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung y_h und einer partikulären Lösung der *inhomogenen Differentialgleichung* y_p

$$y = y_h + y_p$$

Algorithmus: Ansatz vom Typ der rechten Seite

Man rät eine Lösung, indem man einen Ansatz für y_p vom Typ der Störfunktion $g(x)$ wählt:

Störfunktion $g(x)$	Ansatz für y_p	
c_0	λ_0	
$c_0 + c_1 x$	$\lambda_0 + \lambda_1 x$	polynomiell
$c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$	$\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n$	
$c_0 e^{ax}$	$\lambda_0 e^{ax}$	
$c_0 e^{ax}$	$\lambda_0 x e^{ax}$	exponentiell
$c_0 e^{ax}$	$\ldots$	
$c_0 e^{ax}$	$\lambda_0 x^n e^{ax}$	
$c_0 \sin(ax) + c_1 \cos(ax)$	$\lambda_0 \sin(ax) + \lambda_1 \cos(ax)$	
$c_0 e^{ax} \cdot \sin(bx)$	$x \cdot (\lambda_1 \sin(bx) + \lambda_2 \cos(bx))$	trigonometrisch
$c_0 e^{ax} \cdot \cos(bx)$	$x \cdot (\lambda_1 \sin(bx) + \lambda_2 \cos(bx))$	

Bemerkungen:

- Bei einer Summe von mehreren Funktionstypen sollten entsprechend viele partikuläre Teillösungen berechnet werden. Die Summe dieser Teillösungen entspricht dann insgesamt der partikulären Lösung y_p.
- Existiert für eine Störfunktion $g(x) = cx^n e^{ax}$ ein Term $\mu x^n e^{ax}$ bereits in der homogenen Lösung, wählt man als Ansatz für $y_p = \lambda x^{n+1} e^{ax}$ (siehe Beispiel).

Beispiel: Ansatz vom Typ der rechten Seite

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' - y = 9e^x$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$y_h' - y_h = 0 \implies y_h = ce^x$$

Mit der partikulären Lösung ($y_p = c_0 x e^x$)

$$y_p = c_0 x e^x \implies y_p' = c_0(e^x + xe^x)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} & y' - y && = 9e^x \\ \iff \quad & c_0(e^x + xe^x) - c_0 x e^x && = 9e^x \\ \iff \quad & c_0 e^x(1 + x - x) && = 9e^x \\ \implies \quad & c_0 && = 9 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^x + 9e^x x$$

□

Algorithmus: Bernoulli-Differentialgleichung

Gegeben: Differentialgleichung der Form

$$\boxed{y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha}$$

1. Substituiere
$$z = y^{1-\alpha} \qquad \iff \qquad y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
2. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt
$$z' + (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z = g(x) \cdot (1-\alpha)$$
3. Lösen der linearen Differentialgleichung
4. Rücksubstitution in
$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
ergibt die allgemeine Lösung

Definition: Exakte Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$p(x,y) + q(x,y) \cdot y' = 0 \quad \iff \quad p(x,y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

mit

$$p_x = q_y \text{ (Integrabilitätsbedingung)}$$

heißt *exakte Differentialgleichung*.

Algorithmus: Lösen von exakten Differentialgleichungen

Gegeben: Differentialgleichung der Form

$$\boxed{p(x,y) + q(x,y) \cdot y' = 0 \quad \iff \quad p(x,y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0}$$

1. Prüfen der Integrabilitätsbedingung
$$p_x = q_y$$
2. Stammfunktion berechnen mit
$$\underbrace{F(x,y) = \int p\,\mathrm{d}x}_{(*)} \quad \text{oder} \quad \underbrace{F(x,y) = \int q\,\mathrm{d}y}_{(**)}$$
Konstante c ersetzen mit $c(y)$ $(*)$ bzw. $c(x)$ $(**)$
3. Differentiation von $F(x,y)$ nach y $(*)$ bzw. nach x $(**)$
4. Es ergibt sich
$$c(y)' = f(y) \quad \Longrightarrow c(y) = \int f(y)\,\mathrm{d}y \quad (*)$$
bzw.
$$c(x)' = f(x) \quad \Longrightarrow c(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad (**)$$
5. Einsetzen ergibt die allgemeine Lösung

Definition: Integrierender Faktor (Euler-Multiplikator)

$\mu(x,y)$ ist genau dann ein *integrierender Faktor* oder *Euler-Multiplikator* für eine Funktion

$$p(x,y) + q(x,y) \cdot y' = 0 \quad \iff \quad p(x,y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial \mu p}{\partial y} = \frac{\partial \mu q}{\partial x}$$

erfüllt wird.

Algorithmus: Lösen von Differentialgleichungen mithilfe eines integrierenden Faktors

Gegeben: Differentialgleichung der Form

$$\boxed{p(x,y) + q(x,y) \cdot y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(x,y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0}$$

bei der die *Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt* wird.

Wir betrachten hier nur integrierende Faktoren, die nur von x bzw. nur von y abhängig sind.

1. Integrierender Faktor ist gegeben mit

$$\underbrace{\mu(x) = e^{\int m(x)\,\mathrm{d}x}}_{(*)} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\mu(y) = e^{\int m(y)\,\mathrm{d}y}}_{(**)}$$

   $(*)$ Untersuchen, ob μ nur von x abhängt:

$$m(x) = \frac{p_y - q_x}{q}$$

   $(**)$ Untersuchen, ob μ nur von y abhängt:

$$m(y) = \frac{q_x - p_y}{p}$$

2. m in entsprechende Formel für μ einsetzen
3. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\mu p(x,y) + \mu q(x,y) \cdot y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu p(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

4. Prüfen der Integrabilitätsbedingung
5. Lösen der exakten Differentialgleichung

Beispiel: Lösen von Differentialgleichungen mithilfe eines integrierenden Faktors

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$(3xy + 2y^2) + (x^2 + 2xy)y' = 0$$

Es gilt:

$$(3xy + 2y^2) + (x^2 + 2xy)y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{(3xy + 2y^2)}_{p(x,y)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{(x^2 + 2xy)}_{q(x,y)}\,\mathrm{d}y = 0$$

Integrabilitätsbedingung:

$$p_y = 3x + 4y \quad \neq \quad 2x + 2y = q_x \quad ↯$$

Integrierenden Faktor (Euler-Multiplikator) $\mu(x) = e^{\int m(x)\,\mathrm{d}x}$ bzw. $\mu(y) = e^{\int m(y)\,\mathrm{d}y}$ bestimmen:

- Untersuchung, ob μ nur von y abhängt:

$$m = \frac{q_x - p_y}{p} = \frac{2x + 2y - (3x + 4y)}{3xy + 2y^2} = \frac{-x - 2y}{3xy + 2y^2} \quad ↯$$

- Untersuchung, ob μ nur von x abhängt:

$$m = \frac{p_y - q_x}{q} = \frac{3x + 4y - (2x + 2y)}{x^2 + 2xy} = \frac{x + 2y}{x^2 + 2xy} = \frac{x + 2y}{x(x + 2y)} = \frac{1}{x} \quad \checkmark$$

Damit erhalten wir den integrierenden Faktor mit:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = cx \qquad (\text{sei } c = 1)$$

Einsetzen in die DGL:

$$\underbrace{(3x^2y + 2xy^2)}_{p(x,y)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{(x^3 + 2x^2y)}_{q(x,y)}\,\mathrm{d}y = 0$$

Integrabilitätsbedingung:

$$p_y = 3x^2 + 4xy \quad = \quad 3x^2 + 4xy = q_x \quad \checkmark$$

Wir wissen:

$$\underbrace{F = \int q\,\mathrm{d}y = x^3y + x^2y^2 + c(x)}_{F_y = q} \implies \underbrace{3x^2y + 2xy^2 + c'(x) = 3x^2y + 2xy^2}_{F_x = p} \implies c(x) = c$$

Und insgesamt gilt damit:

$$F = x^3y + x^2y^2 + c$$

□

4.2 Lösungsverfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Definition: Charakteristische Gleichung

Die Gleichung

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

heißt die zur Differentialgleichung

$$y'' + ay' + b = 0$$

gehörende *charakteristische Gleichung*.

Bonus: Superpositionsprinzip (homogene lineare Differentialgleichungen)

Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen einer *homogenen linearen Differentialgleichung*, so ist auch jede *Linearkombination*

$$\lambda \cdot y_1(x) + \mu \cdot y_2(x)$$

eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Algorithmus: Lösen von linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung

Für eine Gleichung

$$\boxed{y'' + ay' + b = 0}$$

stelle man die charakteristische Gleichung auf, mit

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Dann gilt mit $D = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$ (Diskriminante):

- $D > 0$:
$$y_h = \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x}$$
- $D = 0$:
$$y_h = \lambda_1 e^{\alpha x}$$
- $D < 0$:
$$y_h = e^{\Re(\alpha)} \cdot (\lambda_1 \cos(\Im(\alpha)) + \lambda_2 \sin(\Im(\alpha))) = e^{-\frac{a}{2}} \cdot \left(\lambda_1 \cos(\sqrt{-D}) + \lambda_2 \sin(\sqrt{-D})\right)$$

Bemerkung:

- $\Re(\alpha)$ ist der Realteil der Nullstelle
- $\Im(\alpha)$ ist der Imaginärteil der Nullstelle

Algorithmus: Lösen von linearen Differentialgleichungssystemen

Gegeben: Differentialgleichungssystem der Form

$$y' = ay + bz \tag{1}$$

$$z' = dy + cz \tag{2}$$

1. Umstellen von (1) nach z ergibt
$$z = \frac{y' - ay}{b}$$
2. Differentiation von (1) und anschließendes Einsetzen von z ergibt
$$y'' - (a + c) \cdot y' + (ac - bd) \cdot y = 0$$
3. Lösen der homogenen Differentialgleichung mit der charakteristischen Gleichung
$$\alpha^2 - (a + c)\alpha + (ac - bd) = 0$$
ergibt dann die allgemeine Lösung für y
4. Einsetzen von y (und y') in
$$z = \frac{y' - ay}{b}$$
ergibt die allgemeine Lösung für z

Beispiel: Lösen von linearen Differentialgleichungssystemen

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y' &= y + 2z \\ z' &= 2y + z - 2e^x \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y(0) = -3$ und $z(0) = 4$.

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Wir leiten y' ab:

$$\begin{aligned} & y' = y + 2z \quad \iff \quad z = \frac{y' - y}{2} \\ \iff \quad & y'' - y' - 2z' = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen von z':

$$y'' - y' - 2z' = 0 \quad \iff \quad y'' - y' - 4y - 2z + 4e^x = 0$$

Einsetzen von z:

$$\begin{aligned} & y'' - y' - 4y - 2z + 4e^x = 0 \\ \iff \quad & y'' - 2y' - 3y = -4e^x \end{aligned}$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} & y'' - 2y' - 3y = 0 \\ \implies \quad & \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \\ \implies \quad & \alpha = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3} \\ \iff \quad & \alpha = 1 \pm 2 \\ \implies \quad & y_h = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x} \end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$y_p = ce^x \quad \implies \quad y'_p = ce^x \quad \implies \quad y''_p = ce^x$$

$$\begin{aligned} & y''_p - 2y'_p - 3y_p &&= -4e^x \\ \iff \quad & ce^x - 2ce^x - 3ce^x &&= -4e^x \\ \iff \quad & -4ce^x &&= -4e^x \\ \implies \quad & c = 1 \end{aligned}$$

Dann gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x} + e^x$$

und

$$z = \frac{y' - y}{2} = \frac{\left(-\lambda_1 e^{-x} + 3\lambda_2 e^{3x} + e^x\right) - \left(\lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x} + e^x\right)}{2} = \lambda_2 e^{3x} - \lambda_1 e^{-x}$$

□

Index

Beispiele