https://matse.paddel.xyz/spicker

Lineare Algebra 2

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 23. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Abbildungen

1.1 Grundlegende Eigenschaften linearer Abbildungen

Definition: Homomorphismus

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *linear* oder ein *Homomorphismus*, falls $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in K$ gilt:

- Additivität: $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- Homogenität: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Es gilt auch:

- Für eine lineare Funktion f gilt $f(0) = 0$.
- Die Funktion f ist genau dann linear, wenn $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in K$ gilt:

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

- Summen, Vielfache linearer Abbildungen und vektorwertige Abbildungen, deren Komponenten aus linearen Abbildungen bestehen, sind wiederum linear.

Definition: Kern

Der *Kern* einer linearen Abbildung $f : V \to W$ wird definiert durch

$$\ker(f) := f^{-1}(0)$$

Dabei gilt:

- $\operatorname{im}(f)$ ist ein Untervektorraum von W.
- $\ker(f)$ ist ein Untervektorraum von V.

Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn $\ker(f) = \{0\}$ gilt.

Bonus: Defekt

Für eine lineare Funktion $f : V \to W$ definiert man den *Defekt* von f durch

$$\operatorname{def}(f) := \dim \ker(f)$$

Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{def}(f) = 0$ gilt.

Definition: Rang

Für eine lineare Funktion $f : V \to W$ definiert man den *Rang* von f durch

$$\operatorname{rg}(f) := \dim \operatorname{im}(f)$$

Eine lineare Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{rg}(f) = \dim(W)$ gilt.

Definition: Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Rangsatz)

Es sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\operatorname{def}(f) + \operatorname{rg}(f) = \dim V$$

bzw. äquivalent

$$\dim \ker(f) + \dim \operatorname{im}(f) = \dim V$$

Definition: Isomorphismus

Sei $f : V \to W$ linear. Dann ist f ein *Isomorphismus*, wenn f bijektiv ist.

Es gilt (für f linear):

- f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\ker(f) = \{0\}$ und $\operatorname{im}(f) = W$ gilt.
- Gelte $\dim(V) = \dim(W)$. Dann gilt f ist injektiv $\iff$ f ist surjektiv $\iff$ f ist bijektiv.

Es gilt (für f Isomorphismus):

- $\dim(V) = \dim(W)$
- $f^{-1} : W \to V$ ist ebenfalls ein Isomorphismus.

Sei $\dim(V) = \dim(W) = n$, $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $f : V \to W$ linear. f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine Basis von W bildet.

Bonus: Isomorphie

Seien V und W zwei K-Vektorräume Dann heißen V und W *isomorph*, Schreibweise $V \simeq W$, falls ein Isomorphismus von V nach W existiert.

Gilt $\dim(V) = \dim(W) = n$, dann gilt direkt $K^n \simeq V \simeq W$.

Definition: Automorphismus

Sei $f : V \to W$ linear. Dann ist f ein *Automorphismus*, wenn f bijektiv ist und $V = W$.

Definition: Endomorphismus

Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ heißt *Endomorphismus*.

1.2 Matrizen und lineare Abbildungen

Definition: Abbildungsmatrix

Sei $f : V \to W$ linear. Dann ist die *Abbildungsmatrix* A bzgl. f gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & \ldots & f(e_n) \end{pmatrix} \text{ mit } \forall x : f(x) = Ax$$

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gilt:

- $\operatorname{im}(f) = \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle$
- f ist injektiv $\iff$ $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ sind linear unabhängig.

Definition: Darstellungsmatrix

Sei $f : V \to W$ linear, $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W. Dann ist

$$M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W}(f) = \begin{pmatrix} K_{\mathcal{B}_W}(f(v_1)) & \dots & K_{\mathcal{B}_W}(f(v_1)) \end{pmatrix}$$

die *Darstellungsmatrix* von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$.

$K_{\mathcal{B}_W}(f(v_i))$ bedeutet hier, dass das Bild von v_i in der Basis $\mathcal{B}_W$ kodiert wird.

Es gilt:

- Sind $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ die Standardbasen bez. V und W, dann gilt $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W}(f) = A$.

1.3 Abbildungsverkettung und Matrizenmultiplikation

Definition: Eigenschaften der Abbildungsverkettung

Seien U, V, W K-Vektorräume und $f : V \to W$ sowie $g : U \to V$ linear. Dann ist auch $f \circ g : U \to W$ linear.

Ist f ein Isomorphismus und $\dim(V) = \dim(W)$, dann gilt:

$$\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(g)$$

Definition: Eigenschaften der Matrixmultiplikation

Seien A, B, C so, dass die nachfolgend vorkommenden Matrixmultiplikationen definiert sind. Dann gilt:

- $A(BC) = (AB)C$ (Assoziativgesetz)
- $A(B + C) = AB + AC$ und $(A + B)C = AC + BC$ (Distributivgesetz)
- $(AB)^T = B^T A^T$
- Sei $A \in K^{m\times n}$ und $E_k \in K^{k\times k}$ die $(k \times k)$-Einheitsmatrix. Dann gilt:

$$AE_n = E_m A = A$$

- Sei $A \in K^{m\times n}$ und $0_{kl} \in K^{k\times l}$ die $(k \times l)$-Nullmatrix. Dann gilt:

$$A0_{nl} = 0_{ml} \quad \text{und} \quad 0_{km} A = 0_{kn}$$

- Das Matrixprodukt ist im Allgemeinen nicht kommutativ.
- Seien $x, y \in K^n$. Dann gilt:

$$\langle x, y\rangle = x^T \cdot y$$

Definition: Inverse einer Matrix

Sei A eine quadratische Matrix. Gibt es eine Matrix A^{-1} mit

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

so heißt A *invertierbar* oder auch *regulär*. A^{-1} wird als *Inverse* von A bezeichnet.

Es gilt:

- Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Darstellungsmatrix invertierbar ist.
- Jede invertierbare Matrix ist quadratisch.

Seien $A, B \in K^{n \times n}$ invertierbar. Dann gilt:

- $AB = E \iff BA = E \iff B = A^{-1}$
- AB ist invertierbar, und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- A^{-1} ist invertierbar, und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A^T ist invertierbar, und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Für $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ist λA invertierbar, und es gilt $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

1.4 Koordinatentransformationen

Definition: Koordinatenabbildung

Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Dann existiert genau ein Isomorphismus $\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \to V$ mit $\varphi_{\mathcal{B}}(e_i) = v_i$, $1 \leq i \leq n$.

Der Isomorphismus $\varphi_{\mathcal{B}}$ heißt *Koordinatenabbildung*.

Definition: Koordinaten eines Vektors

Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Die Abbildung $K_{\mathcal{B}}(v)$ mit

$$K_{\mathcal{B}} : V \to K^n, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

erzeugt die *Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$*.

Es gilt:

- $K_{\mathcal{B}}(v) = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$

Definition: Transformationsmatrix

Sei ein Vektorraum V mit den Basen $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ gegeben.

Für einen Vektor v existieren die Darstellungen $K_{\mathcal{A}}(v)$ und $K_{\mathcal{B}}(v)$. Es gilt:

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
K^n \arrow[ur, "\varphi_{\mathcal{A}}"] \arrow[rr, "T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{A}}"'] & & K^n \arrow[ul, "\varphi_{\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Die Matrix $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ heißt *Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$*

Sei $v \in V$ beliebig, $K_{\mathcal{A}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$ und $K_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^T$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sind die Koordinaten von v beqüglich $\mathcal{A}$ bekannt, kann man mithilfe der Matrix $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ die Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$ berechnen.

Seien A und B die Matrizen der Basisvektoren von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Dann gilt:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "E"] & x \\
K_{\mathcal{A}}(x) \arrow[u, "A"] \arrow[r, "T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}"'] & K_{\mathcal{B}}(x) \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}$$

Man erkennt:

$$T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = B^{-1} A$$

Definition: Darstellungsmatrix mit Basistransformation

Seien V und W endlich erzeugt mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ bzw. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. Sei weiter $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(f) = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot T^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}$$

Zur Visualisierung dient folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)"] \arrow[dr, "\varphi_{\mathcal{A}}"] \arrow[dd, "T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}"'] & & & K^m \arrow[dl, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dd, "T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}"] \\
 & V \arrow[r, "f"] & W & \\
K^n \arrow[ur, "\varphi_{\mathcal{A}'}"] \arrow[rrr, "M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(f)"] & & & K^m \arrow[ul, "\varphi_{\mathcal{B}'}"']
\end{tikzcd}$$

2 Determinanten

Definition: Elementarmatrix

Seien $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in K \setminus \{0\}$ gegeben. Dann sei

$$C1 := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & \lambda & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

wobei der (i, j)-te Eintrag den Wert λ annehmen soll und alle anderen Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen 0 sein sollen.

Sei $C2$ die Matrix, die man aus der Einheitsmatrix gewinnt, indem man die i-te und j-te Spalte vertauscht, also

$$C2 := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

Zuletzt definieren wir

$$C3 := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

Matrizen der Gestalt $C1$, $C2$ oder $C3$ nennt man *Elementarmatrizen*.

Es gilt:

- Die Multiplikation einer Matrix A von links mit einer Elementarmatrix entspricht der Anwendung einer elementaren Zeilenoperation des Gauß-Verfahrens auf A.
  Notation: Zi statt Ci
- Die Multiplikation einer Matrix A von rechts mit einer Elementarmatrix entspricht der Anwendung einer elementaren Spaltenoperation auf A.
  Notation: Si statt Ci

- $C1$ entspricht dem Addieren von λ-mal Spalte bzw. Zeile j auf Spalte bzw. Zeile i.
- $C2$ entspricht dem Tauschen von Spalte bzw. Zeile i mit Spalte bzw. Zeile j.
- $C3$ entspricht dem Multiplizieren von Spalte bzw. Zeile i mit λ.

Definition: Eigenschaften der Determinante

Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt:

- $S1$ und $Z1$ ändern die Determinante einer Matrix nicht. ($\det(C1) = 1$)
- $S2$ und $Z2$ kehren das Vorzeichen der Determinante um. ($\det(C2) = -1$)
- $S3$ und $Z3$ vervielfachen den Wert der Determinante um den Faktor λ. ($\det(C3) = \lambda$)
- $\det(A) = \det(A^T)$
- Besitzt A zwei gleiche Spalten bzw. Zeilen, so gilt $\det(A) = 0$.
- A invertierbar $\iff \det(A) \neq 0$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- A invertierbar $\implies \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

2.1 Verfahren zur Berechnung der Determinante

Definition: Laplacescher Entwicklungssatz

Für $A \in K^{n\times n}$ bezeichne A_{ij} die Matrix in $K^{(n-1)\times(n-1)}$, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A hervorgeht.

Es sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ und j mit $1 \leq j \leq n$. Dann gilt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Man spricht von der *Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte*. Ebenso ist eine *Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile* möglich:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Definition: Determinante mit Gauß-Algorithmus

Zur Berechnung mit dem Gauß-Algorithmus bringt man die gegebene Matrix A mittels äquivalenter Zeilen- oder Spaltenumformungen $Z1$-$Z3$ bzw. $S1$-$S3$ auf Stufenform B und errechnet dann nach Folgerung $\det(A)$ leicht als Produkt der Hauptdiagonalelelemente von B, multipliziert mit den Determinanten der genutzten Elementarmatrizen.

Bonus: Tipps zur Determinantenberechnung

1. Für (2×2)- und (3×3)-Matrizen empfiehlt sich die Sarrus-Regel.[a]
2. Die Laplace-Entwicklung ist dann vorzuziehen, wenn in einer Spalte oder Zeile nur wenige Nicht-Null-Einträge vorhanden sind, weil bei einer Entwicklung nach dieser Zeile bzw. Spalte die meisten Summanden erst gar nicht berechnet werden müssen.
3. Es können zur Berechnung der Determinanten mehrere Verfahren kombiniert werden, z.B. (4×4)-Matrizen zuerst nach Laplace entwickeln und die dann entstehenden Determinanten von (3×3)-Matrizen direkt mit der Sarrus-Regel berechnen.

[a] Siehe Lineare Algebra 1

Bonus: Inverse einer (2×2)-Matrix

Sei A definiert als $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Definition: Lineares Gleichungssystem

Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix}^T$. Dann heißt

$$\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

lineares Gleichungssystem bzgl. $(x_1, \dots, x_n)$ mit Koeffizienten a_{ij} in K. Hierbei sind $x_1, \dots, x_n$ die *Unbekannten* des Systems.

Für $b = 0_{m1}$ nennt man das lineare Gleichungssystem *homogen*, sonst *inhomogen*.

Jedes lineare Gleichungssystem kann in der Form $Ax = b$ geschrieben werden.

Definition: Lösungsmenge

Die *Lösungsmenge* $L(A, b)$ des zu (A, b) gehörigen Gleichungssystems ist festgelegt durch

$$L(A, b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$$

Definition: Spaltenrang

Die lineare Abbildung $L_A : K^n \to K^m$ sei gegeben durch $L_A(x) := Ax$. Dann sei $\operatorname{rg}(A) := \operatorname{rg}(L_A)$. Der *Spaltenrang* $\operatorname{rg}_S(A)$ sei die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A.

Es gilt $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}_S(A)$.

Definition: Zeilenrang

Für $A \in K^{m \times n}$ sei die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A der *Zeilenrang* $\operatorname{rg}_Z(A)$ von A.

Es gilt:

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}_S(A) = \operatorname{rg}_Z(A)$$

Definition: Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\text{rg}(a_1, \ldots, a_n) = \text{rg}(a_1, \ldots, a_n, b)$$

Kürzer schreibt man $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, b)$.

$Ax = b$ ist also genau dann eindeutig lösbar, falls $\ker(A) = \{0\} \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A, b) = n$.

Bonus: Äquivalente Bedingungen für eindeutige Lösbarkeit

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $A \in K^{n \times n}$ und die dadurch gegebene lineare Abbildung L_A sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. A ist invertierbar.
2. $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.
3. Durch Zeilen- und Spaltenumformungen kann A auf die Einheitsmatrix transformiert werden.
4. A ist darstellbar als Produkt von Elementarmatrizen.
5. $Ax = b$ besitzt für jedes $b \in K^n$ mindestens eine Lösung.
6. $Ax = b$ hat genau eine Lösung für jedes $b \in K^n$.
7. $\det(A) \neq 0$
8. $\text{im}(A) = K^n$
9. L_A ist bijektiv.
10. Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
11. Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
12. Die Spaltenvektoren von A bilden eine Basis von K^n.
13. Die Zeilenvektoren von A bilden eine Basis von K^n.
14. $\text{rg}(A) = n$
15. $\ker(L_A) = \{0\}$
16. $(\ker(L_A))^{\perp} = K^n$
17. Das orthogonale Komplement des von den Zeilen von A aufgespannten Raums ist $\{0\}$.
18. $A^T A$ ist invertierbar.

Definition: Allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems

Sei $x_s \in K^n$ eine (spezielle) Lösung von $Ax = b$. Dann gilt:

$$L(A, b) = x_s + \ker(A) = \{x_s + x \mid x \in \ker(A)\}$$

bzw., wenn $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von $\ker(A)$ ist:

$$L(A, b) = \{x + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \mid \lambda_i \in K\}$$

Definition: Cramersche Regel

Es seien $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ und $x, b \in K^n$ sowie $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem, und es gelte $\det(A) \neq 0$. Seien

$$A_i := \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \dots & a_n \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq n$$

Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, 1 \leq i \leq n$$

3.2 Über- und unterbestimmte lineare Gleichungssysteme

Definition: Normalgleichung

Sei $p_A(b)$ die Projektion eines Vektors $b \in \mathbb{R}^m$ auf den von den Vektoren $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ aufgespannten Unterraum U, also das Bild von A.

Damit existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$p_A(b) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k = Ax$$

Dann gilt

$$b - p_A(b) \iff \dots \iff A^T Ax = A^T b$$

Die Gleichungen $A^T Ax = A^T b$ heißen *Normalgleichungen*.

Die Normalgleichungen sind für jede relle Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lösbar.

Definition: Verallgemeinerte Inverse

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Im Fall $\mathrm{rg}(A) = n$ (voller Spaltenrang) existiert mit

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

eine eindeutige Lösung. In diesem Fall heißt $(A^T A)^{-1} A^T$ *verallgemeinerte Inverse* von A.

Im Fall $\mathrm{rg}(A) = m$ (voller Zeilenrang) existiert mit

$$x = A^T (AA^T)^{-1} b$$

eine eindeutige Lösung. In diesem Fall heißt $A^T (AA^T)^{-1}$ *verallgemeinerte Inverse* von A.

Definition: Methode der kleinsten Quadrate

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, m \geq n$$

Im Fall $\operatorname{rg}(A) = n$ gilt für

$$x_s = (A^T A)^{-1} A^T b$$

dass

$$\|b - Ax_s\| = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \|b - Az\|$$

Der Vektor x_s heißt *Näherungslösung nach der Methode der kleinsten Quadrate*.

4 Geometrie linearer Abbildungen

4.1 Orthogonale Abbildungen und Matrizen

Definition: Isometrie

Eine *Isometrie* ist eine lineare Abbildung, die zwei metrische Räume aufeinander abbildet und dabei die euklidische Länge eines Vektors erhält.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann sind äquivalent:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
2. f ist eine winkelerhaltende Isometrie.

Definition: Orthogonalmatrix

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal*, wenn ihre Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden.

Die Menge aller orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ heiße $O(n)$.

Es gilt:

- $A \in O(n) \implies |\det(A)| = 1$

Es sind äquivalent:

1. $A \in O(n)$
2. A ist invertierbar, und es gilt $A^{-1} = A^T$
3. $A^T \in O(n)$

Algorithmus: QR-Zerlegung

Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\operatorname{rg}(A) = n$. Dann gibt es eine in den Spalten orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = QR$. Hierbei können die Spalten von Q mithilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt aus den Spalten von A erzeugt werden, und es gilt $\operatorname{rg}(R) = n$.

4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition: Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum

Existiert für einen Endomorphismus f ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in V \setminus \{0\}$ mit

$$f(v) = \lambda v$$

dann heißt v *Eigenvektor* von f zum *Eigenwert* λ.

Sei λ ein Eigenwert von f und $v_1, \dots, v_k$ Eigenvektoren von f zu λ. Dann ist auch $v \in L(v_1, \dots, v_k) \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f zu λ.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Eig}(f; \lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$, der *Eigenraum* von f zu λ, ein Untervektorraum von V.

Es gilt:

- Für $\lambda \neq \gamma$ gilt $\mathrm{Eig}(f; \lambda) \cap \mathrm{Eig}(f; \gamma) = \{0\}$.
- Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind linear unabhängig.
- Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind die Werte auf der Hauptdiagonalen.

Definition: Charakteristisches Polynom

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann ist die Funktion

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$$

ein Polynom mit $\deg(\chi_A) = n$ und heißt *charakteristisches Polynom*.

Es gilt:

- $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von $A \iff \chi_A(\lambda) = 0$
- A hat (mit Vielfachheit) genau n Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
- $\mathrm{Eig}(f; \lambda) = \ker(A - \lambda E)$

Bonus: Eigenwerte und Determinanten

Für $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Eigenwerten λ_i, $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

4.3 Diagonalisierung linearer Abbildungen

4.4

Index