https://matse.paddel.xyz/spicker

# Analysis 1

Patrick Gustav Blaneck, Felix Racz

Letzte Änderung: 15. März 2021

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundlagen

## 1.1 Funktionen

**Definition: Injektivität**

$f(x) = f(x') \implies x = x'$

**Definition: Surjektivität**

$\forall y, \exists x : x = f(y)$

**Definition: Bijektivität**

$\forall y, \exists! x : x = f(y)$

**Algorithmus: Beweisen der Injektivität**

1. Behauptung: $f(x) = f(x')$
2. Umformen auf eine Aussage der Form $x = x'$

**Algorithmus: Beweisen der Surjektivität**

1. Aufstellen der Umkehrfunktion
2. Zeigen, dass diese Umkehrfunktion auf dem gesamten Definitionsbereich definiert ist

**Algorithmus: Beweisen der Bijektivität**

1. Injektivität beweisen
2. Surjektivität beweisen

## 1.2 Polynome

**Definition: Polynom**

Eine Funktion $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i, x \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}), a_n \neq 0$ heißt *Polynom vom Grad n*.

**Bonus: Abspalten von Linearfaktoren**

Sei $x_0$ eine Nullstelle eines Polynoms $p(x)$, dann ist

$$p(x) = q(x) \cdot (x - x_0).$$

Dabei ist $(x - x_0)$ ein abgespaltener Linearfaktor und $q(n)$ das entsprechend reduzierte Polynom mit $q(n) = \frac{p(x)}{x - x_0}$.

**Bonus: Faktorisierung**

Sind $x_1, \ldots, x_n$ Nullstellen eines Polynoms $p(x)$, so ist

$$p(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

die Faktorisierung von $p(x)$.

### Polynome vom Grad 2

**Algorithmus: $pq$-Formel**

1. Polynom der Form $x^2 + px + q = 0$
2. $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

**Algorithmus: Mitternachtsformel**

1. Polynom der Form $ax^2 + bx + c = 0$
2. $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Bonus: Besonderheiten bei $x \in \mathbb{C}$

- Ist $x_i$ eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$ mit *reellen Koeffizienten*, dann ist auch $\overline{x_i}$ eine Nullstelle von $p(x)$.

## 1.3 Gebrochen rationale Funktionen

Definition: Gebrochen rationale Funktionen

Seien $p_m(x)$ und $p_n(x)$ Polynome vom Grad $m$ bzw. $n$, dann heißt

$$f(x) = \frac{p_m(x)}{p_n(x)}$$

*gebrochen rationale Funktion*.
Im Fall $m < n$ heißt die Funktion *echt gebrochen rational*, sonst *unecht gebrochen rational*.

Algorithmus: Polynomdivision

Gegeben ist *unecht gebrochen rationale Funktion* $f(x) = \frac{p_m(x)}{p_n(x)}$
1. *Dividiere* die größten Exponenten aus beiden Polynomen
2. *Mutipliziere* Ergebnis mit Divisor zurück
3. *Subtrahiere* Ergebnis vom Dividenden
4. Wiederhole, bis:
   Ergebnis 0 ist, oder
   Grad des Ergebnisses kleiner ist als Grad des Divisors (ergibt *Rest*)

Algorithmus: Hornerschema

Gegeben ist *Polynom* $p_m(x)$ und ein *Wert* $x_0$

Vorbereitung:

- Erstelle eine Tabelle mit $m + 2$ Spalten und 3 Zeilen
- Erste Zelle frei lassen und dann Koeffizienten $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ in die erste Zeile schreiben
- In die erste Zelle der zweiten Zeile kommt $x_0$

Anwendung (beginnend in zweiter Zelle der dritten Zeile):

1. Erster Koeffizient der ersten Zeile in die dritte Zeile
2. *Multipliziere* Zahl der ersten Spalte mit diesem Koeffizienten
3. Schreibe Ergebnis in zweite Zeile, unterhalb des nächsten Koeffizienten
4. *Addiere* Ergebnis mit diesem Koeffizienten
5. Wiederhole 2-4 bis zum Schluss

Ergebnis:

- Wert des Polynoms $p_m(x_0)$ in letzter Zelle der letzten Zeile
- Bei Wert $p_m(x_0) = 0$ steht in der letzten Zeile das Polynom nach Abspalten des Linearfaktors $(x - x_0)$

**Bonus: Tipps und Tricks**

- Polynomdivision und Hornerschema funktionieren auch sehr gut mit komplexen Zahlen
- Bei mehreren abzuspaltenden Linearfaktoren bietet sich das Hornerschema sehr gut an

**Algorithmus: Partialbruchzerlegung**

Gegeben: *Echt gebrochen rationale Funktion* $f(x) = \frac{p_m(x)}{p_n(x)}$

1. Berechne Nullstellen des *Nennerpolynoms* $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$
2. Verschiedene Fälle:

   Relle Nullstellen:

   $x_i$ ist einfache Nullstelle $\implies \frac{A}{x-x_1}$

   $x_i$ ist $r$-fache Nullstelle $\implies \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$

   Nichtrelle Nullstellen:

   Einfacher quadratischer Term $\implies \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

   $r$-facher quadratischer Term $\implies \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{A_rx+B_r}{(x^2+px+q)^r}$
3. Koeffizientenvergleich:
   a) Brüche gleichnamig machen (Multipliziere beide Seiten mit Nennerpolynom)
   b) Potenzen von $x$ zusammenfassen
   c) Gleichungssystem lösen
   d) Lösungen in Ansatz einsetzen

**Bonus: Besonderheiten in $\mathbb{C}$**

- Für Partialbrüche ohne relle Nullstellen können wir in $\mathbb{C}$ stets Nullstellen finden. Das Verfahren erfolgt dann analog mit komplexen Nullstellen.

**Bonus: Tipps und Tricks**

- Partialbruchzerlegung ist erst bei einer *echt gebrochen rationale Funktion* sinnvoll
- Ist die Funktion unecht gebrochen rational, führe zuerst eine Polynomdivision durch und zerlege dann den Rest in die Partialbrüche

## 1.4 Gleichungen und Ungleichungen

**Algorithmus: Berechnen einer Lösungsmenge bei Ungleichungen**

Gegeben: Ungleichung mit Bezug auf Variable $x$

1. Für jeden Betrag $|a(x)|$, eine Fallunterscheidung machen für

   $a(x) \geq 0 \implies |a(x)| = a(x)$

   $a(x) < 0 \implies |a(x)| = -a(x)$

   *Hier haben wir bereits eine Einschränkung für die Lösungsmenge des jeweiligen Falles gegeben!*
2. Ungleichungen nach $x$ auflösen
3. Jeder Fall $i$ erzeugt eine Lösungsmenge $L_i$ bestehend aus *umgestellter Ungleichung* und Fallbedingungen
4. Lösungsmenge $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$, wobei $n$ die Anzahl der betrachteten Fälle ist

**Bonus: Tipps und Tricks**

- $n$ Beträge in der Gleichung können zu $2^n$ Fällen führen.
- Es kann vorkommen, dass ein Fall einer Fallunterscheidung unerreichbar ist, z.B. für $x > 5 \wedge x < 1$. Die Lösungsmenge $L$ ist dann leer ($L = \emptyset$).
- Radizieren (Wurzelziehen) ist in Ungleichungen nur erlaubt, wenn danach der *Betrag* der Wurzel betrachtet wird
- Quadrieren einer Ungleichung 'erzeugt' potentiell ein falsches Ergebnis. Nach dem Quadrieren sollte man also jedes Ergebnis prüfen.
- Multiplikation mit negativen Zahlen sollte vermieden werden, da das Umdrehen des Ungleichheitszeichens schnell für Flüchtigkeitsfehler sorgen kann.

## 1.5 Komplexe Analysis

**Bonus: Rechenregeln für komplexe Zahlen in kartesischen Koordinaten**

**Darstellung:** $z = a + i \cdot b$ und $w = c + i \cdot d$

**Addition und Subtraktion:** $z \pm w = (a \pm c) + i \cdot (b \pm d)$

**Multiplikation:** $z \cdot w = (ac - bd) + i \cdot (ad + bc)$

**Division:** $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$

**Komplex konjugiert:** Vorzeichen von $\Im$ wechseln: $\overline{z} = a - i \cdot b$

**Betrag:** Abstand vom Ursprung: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

**Bonus: Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten**

**Darstellung:** $z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta) = r \cdot e^{i \cdot \theta}$

**Multiplikation:** $z \cdot w = r_z \cdot r_w \cdot e^{i \cdot (\theta_z + \theta_w)}$

**Division:** $\frac{z}{w} = \frac{r_z}{r_w} \cdot e^{i \cdot (\theta_z + \theta_w)}$

**Komplex konjugiert:** $\overline{z} = (r, -\theta) = (r, 2\pi - \theta)$

**Betrag:** $|z| = r$

**Algorithmus: Kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Polarkoordinaten**

1. $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $y \geq 0 : \theta = \arctan \frac{x}{r}$
   $y < 0 : \theta = -\arctan \frac{x}{r}$

**Algorithmus: Polarkoordinaten $\rightarrow$ Kartesische Koordinaten**

1. $x = r \cdot \cos\theta$
2. $y = r \cdot \sin\theta$

Algorithmus: Radizieren von komplexen Zahlen

Gesucht: Lösung von $z^n = r \cdot e^{i \cdot \theta}$

1. Ist $z^n$ nicht in Polarkoordinaten gegeben, so ist zunächst die Polarform zu bilden.
2. Bertechne $r_k = \sqrt[n]{r}$. Dieser Radius ist die Länge aller Lösungen.
3. Berechne für alle $k \in [0, n-1]$

$$\theta_k = \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n} \cdot 2\pi$$

4. Die Lösungen sind dann die $n$ Zahlen $z_k = (r_k, \theta_k)$ für $k \in [0, n-1]$.

□

# 2 Folgen und Reihen

## 2.1 Grundlagen

Bonus: Rechenregeln für Summen

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-l}^{n-l} a_{k+l}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{c} a_k + \sum_{k=c}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + b_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Die Regeln gelten auch für unendliche Reihen.

Bonus: Wichtige Summen

- Arithmetische Summe:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
- Geometrische Summe:
$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$
- Summe der Quadratzahlen:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- Summe der Kubikzahlen:
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

## 2.2 Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz

**Definition: Binomialkoeffizient**

Die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge bezeichnen wir mit $\binom{n}{k}$. Diese Zahlen heißen *Binomialkoeffizienten* oder Binomialzahlen.

**Definition: Rekursionsformel für Binomialkoeffizient**

Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

**Definition: Kombinatorische Formel für Binomialkoeffizient**

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{, für } k > n \\ \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} & \text{, für } k \leq n \end{cases}$$

**Definition: Der binomische Lehrsatz**

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

# 3 Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen

## 3.1 Grundlagen

**Definition: Schranken**

Gilt

$$\forall x \in A : |x| < K,$$

so heißt die Menge $A$ *beschränkt* und $K$ *Schranke*.

Gilt nur $x \leq K$, so heißt die Menge *nach oben beschränkt* und $K$ *obere Schranke*.

Im Falle $x \geq K$ heißt $A$ *nach unten beschränkt* und $K$ *untere Schranke*.

**Definition: Beschränktheit**

Eine Menge $M$ heißt genau dann *beschränkt*, wenn sie nach oiben und nach unten beschränkt ist.

### Definition: Supremum, Maximum

Der Wert
$$K = \min_{K^* \in \mathbb{R}} \{K \text{ ist obere Schranke}\}$$
heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum von A*. Notation: $\sup A$

Gilt $K \in A$, so heißt $K$ *Maximum von A*. Notation: $\max A$.

### Definition: Infimum, Minimum

Der Wert
$$K = \max_{K^* \in \mathbb{R}} \{K \text{ ist untere Schranke}\}$$
heißt *größte untere Schranke* oder *Infimum von A*. Notation: $\inf A$

Gilt $K \in A$, so heißt $K$ *Minimum von A*. Notation: $\min A$.

### Bonus: Vollständigkeitsaxiom

Jede nicht-leere nach oben beschränkte Menge $A$ hat ein *Supremum*, jede nicht-leere nach unten beschränkte Menge $A$ hat ein *Infimum*.

### Definition: $\epsilon$-Umgebung von $K$ in $\mathbb{R}$

$$U_\epsilon(K) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - K| < \epsilon\}$$

heißt *$\epsilon$-Umgebung von $K$ in $\mathbb{R}$*.

### Definition: Innerer Punkt

$x_0 \in A$ heißt *innerer Punkt von A*, falls eine $\epsilon$-Umgebung existiert, so dass $U_\epsilon(x_0) \in A$, also vollständig in $A$ enthalten ist. $A$ heißt *offen*, falls jeder Punkt der Menge innerer Punkt ist.

### Definition: Häufungspunkt (Mengen)

$a$ heißt *Häufungspunkt einer Menge A*, wenn $\forall \epsilon > 0$ in der Umgebung $U_\epsilon(a)$ ein Punkt $x \in A$ mit $x \neq a$ existiert.

Sei $x$ größter Häufungspunkt von $A$, dann heißt

$$x = \limsup A \text{ (Limes Superior).}$$

Sei $x$ kleinster Häufungspunkt von $A$, dann heißt

$$x = \liminf A \text{ (Limes Inferior).}$$

### Definition: Abgeschlossenheit

$A$ heißt *abgeschlossen*, wenn jeder Häufungspunkt von $A$ in $A$ liegt.

**Definition: Bolzano-Weierstrass für Mengen**

Jede unendliche beschränkte Menge $A$ reeller Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

### 3.2 Konvergenz von Folgen

**Definition: Monotonie**

Eine Folge $a_n$ heißt *monoton wachsend*, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$. Gilt sogar $a_n < a_{n+1}$, so heißt die Folge *streng monoton wachsend*.

Eine Folge $a_n$ heißt *monoton fallend*, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$. Gilt sogar $a_n > a_{n+1}$, so heißt die Folge *streng monoton fallend*.

**Definition: Häufungspunkt (Folgen)**

$a$ heißt *Häufungspunkt einer Folge*, wenn zu jeder $\epsilon$-Umgebung $U_\epsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder $a_n$ in $U_\epsilon(a)$ liegen, also

$$\forall \epsilon > 0, \exists \infty\text{-viele } a_n : |a_n - a| < \epsilon$$

**Definition: Grenzwert / Limes**

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt *Grenzwert* oder *Limes* einer Zahlenfolge $a_n$, wenn $\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon)$, so dass für alle $n \geq n_0(\epsilon)$ (fast immer) gilt

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Jeder Grenzwert ist auch ein Häufungspunkt.

**Definition: Konvergenz / Divergenz**

Eine Folge $a_n$ heißt *konvergent*, falls ein Grenzwert existiert.

Existiert dieser nicht, so heißt die Folge *divergent*.

Eine konvergente Folge mit $a = 0$ heißt *Nullfolge*.

Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$, d.h. $b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - a)$ ist *Nullfolge*.

### Definition: Bolzano-Weierstrass für Folgen

1. Jede beschränkte Folge $a_n$ besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.
2. Jede beschränkte Folge $a_n$ besitzt einen kleinsten und größten Häufungspunkt mit $b \geq a$

$$\begin{aligned} a &= \liminf a_n, \\ b &= \limsup a_n. \end{aligned}$$

3. Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und nur einen Häufungspunkt besitzt. Dann ist

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n.$$

### Definition: Sandwich-Lemma oder Einschnürungssatz

Gilt fast immer, also bis auf endliche viele $n$ (oder auch für $n \geq n_0$)

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

und $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

### Bonus: Rechenregeln für Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= a + b \\ \lim_{n\to\infty} c \cdot a_n &= c \cdot a \\ \lim_{n\to\infty} a_n b_n &= a \cdot b \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b} \text{ für } b_n \neq 0, b \neq 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a} \text{ für } a_n \neq 0, a \neq 0 \end{aligned}$$

### Bonus: Wichtige Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} &= 0 \text{ für } \alpha > 0 \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \text{ für } a > 0 \\ \lim_{n\to\infty} q^n &= 0 \text{ für } |q| < 1 \\ \lim_{n\to\infty} n^k q^n &= 0 \text{ für } |q| < 1, k \in \mathbb{N} \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} &= 0 \end{aligned}$$

**Definition: Konvergenz monotoner Folgen**

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.

Der Grenzwert ist bei monoton fallenden Folgen $\inf a_n$, bei wachsenden Folgen $\sup a_n$.

**Definition: Eulersche Zahl**

Der Grenzert $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ existiert und heißt *eulersche Zahl*.

**Definition: Cauchy-Konvergenz**

Eine Folge $a_n$ heißt *Cauchy-konvergent*, falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \text{ mit } |a_n - a_m| < \epsilon, \forall n > m \geq n_0.$$

## 3.3 Unendliche Reihen

**Definition: Unendliche Reihe**

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k$$

**Definition: Cauchy-Reihe**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon, \forall n > m \geq n_0$$

Eine Reihe *konvergiert* genau dann, wenn die zugehörige Cauchy-Reihe konvergiert.

**Bonus: Konvergenz durch Nullfolge**

Sei $\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergent, dann ist $a_k$ Nullfolge.

**Definition: Absolute Konvergenz**

Eine Reihe heißt *absolut konvergent* wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Analog heißt eine Folge *absolut konvergent* wenn $|a_n|$ konvergiert.

**Algorithmus: Teleskopsumme**

Eine Teleskopsumme hat man dann, wenn sich die Terme einer Summe gegenseitig auflösen.

**Bonus: Beispiel Teleskopsumme**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \left( \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

**Algorithmus: Majorantenkriterium**

Man sucht eine zweite Folge $b_k$, sodass diese fast immer größer ist als die vorgegebene Folge ist.

Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ dann konvergiert auch die ursprüngliche Reihe.

**Bonus: Beispiel Majorantenkriterium**

Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$?

Ja, da $\frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}$ und wir wissen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.
Wir haben also eine konvergente Majorante.

**Algorithmus: Minorantenkriterium**

Man sucht eine zweite Folge $b_k$, sodass diese fast immer kleiner ist als die vorgegebene Folge ist. Divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ dann divergiert auch die ursprüngliche Reihe.

**Bonus: Beispiel Majorantenkriterium**

Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)}$?

Nein, da $\frac{1}{k} < \frac{1}{\ln(k)}$ $(k \geq 3)$ und wir wissen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.
Wir haben also eine divergente Minorante.

**Algorithmus: Cauchy-Kondensatioskriterium**

Die Konvergenz von folgenden Reihen ist äquivalent.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$$

**Bonus: Beispiel Cauchy-Kondensatioskriterium**

Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$?

Die Frage ist äquivalent dazu, ob

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

konvergiert. Das tut sie offensichtlich nicht, also konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nicht.

**Algorithmus: Wurzelkriterium**

Sei $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für $r < 1$. Für $r > 1$ divergiert die Reihe. Für $r = 1$ liefert das Kriterium keine Aussage.

### Bonus: Beispiel Wurzelkriterium

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^k}$?

Es gilt

$$r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{7^k}} = \frac{1}{7} < 1$$

Also konvergiert die Reihe.

### Algorithmus: Quotientenkriterium

Sei $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_{n+1}}{1_n}\right|}$.

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für $r < 1$.

Für $r > 1$ divergiert die Reihe.

Für $r = 1$ liefert das Kriterium keine Aussage.

### Bonus: Beispiel Quotientenkriterium

Konvergert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$?

Wir berechnen dann

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0$$

Die Reihe konvergiert also für alle $x$.

### Algorithmus: Leibnizkriterium

Das Leibnizkriterium wird für alternierende Reihen genutzt.

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ und $a_n$ eine beliebige Folge.

Jetzt muss man nur drei Eigenschaften für $a_n$ zeigen:

1. $a_n$ muss monoton fallend sein,
2. $a_n$ muss immer größer als Null sein und
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dann konvergiert die Reihe.

### Bonus: Beispiel Leibnizkriterium

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln(k)}$. Wir wissen, dass $\ln(k) > 0$ für $k > 1$. Außerdem wissen wir, dass der natürliche Logarithmus monoton steigend ist, also ist $\frac{1}{\ln(k)}$ monoton fallend. Es gilt auch $\lim_{n\to\infty} = 0$. Also konvergiert die Reihe.

## 3.4 Potenzreihen

**Definition: Potenzreihe**

Sei $x \in \mathbb{R}, a_n \in \mathbb{R}$, so heißt

$$p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*reelle Potenzreihe von $x$.*

Jede Potenzreihe konvergiert für $x = 0$.

**Definition: Konvergenz von Potenzreihen (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$)**

Jede Potenzreihe konvergiert für $x = 0$.

Jede Potenzreihe konvergiert für

$$|x| < R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{bzw.} \quad |x| < R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

und divergiert für $|x| > R$.

Der Rand muss oft gesondert betrachtet werden!

**Definition: Konvergenz von Potenzreihen (Entwicklungspunkt $x_0 \neq 0$)**

Jede Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konvergiert für

$$|x - x_0| < R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{bzw.} \quad |x| < R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

und divergiert für $|x - x_0| > R$.

Der Rand muss oft gesondert betrachtet werden!

**Definition: Konvergenzradius**

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{bzw. } R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

*heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe.*

**Bonus: Spezielle Potenzreihen**

$$f(x) = \frac{1}{1 - c(x - x_0)} \iff \sum_{n=0}^{n} c^n \cdot (x - x_0)^n \text{ für } |x - x_0| < \frac{1}{|c|}$$

Bonus: Beispiel: Potenzreihe um Entwicklungspunkt bestimmen

Wir wollen die Potenzreihe um $x_0 = 1$ der Reihe

$$f(x) = \frac{3}{5+2x}$$

bestimmen. Zunächst ist:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{5+2x} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{5+2(x-1)+2} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{7-(-2)\cdot(x-1)} \\
&= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{2}{7})\cdot(x-1)} \\
&= \frac{3}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{7}\cdot(x-1)\right)^n \text{ für } \left|\frac{-2}{7}(x-1)\right| < 1 \\
&= \frac{3}{7} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{7}\right)^n \cdot (x-1)^n \text{ für } |x-1| < \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Definition: Exponentialfunktion

Die Funktion

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

heißt *Exponentialfunktion* oder *exponentielle Funktion*. Sie konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ und ist damit wohldefiniert.

## 3.5 Grenzwerte von Funktionen

Definition: Konvergenz von Funktionen

Gilt $\forall x_n$, dass (falls $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt):

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

so heißt die Funktion *konvergent für* $x \to x_0$ und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} =: \lim_{x\to x_0} f(x).$$

### Definition: Stetigkeit von Funktionen

Gilt $\forall x_n$, dass (falls $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt):

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

so heißt die Funktion *stetig in* $x_0$.

Jede Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzradius (also nicht zwingend für die Randpunkte) stetig.

### Definition: Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert

Existiert für Folgen $x_n$ mit $x_n > x_0$ ein Grenzwert $L$, also existiert

$$\lim_{x\to x_0 \wedge x > x_0} f(x) = L =: \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$$

so heißt der Grenzwert *rechtsseitiger Grenzwert*. Gilt $L = f(x_0)$, so heißt die Funktion *rechtsseitig stetig*.

Entsprechend für $x < x_0$:

$$\lim_{x\to x_0 \wedge x < x_0} f(x) = L =: \lim_{x\uparrow x_0} f(x).$$

### Definition: Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann *stetig in* $x_0$, wenn

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x_0) = \lim_{x\uparrow x_0} f(x_0) = f(x_0).$$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig auf* $D = [a, b]$, falls $f$ für jedes $x_0 \in D$ stetig ist.

### Definition: $\epsilon$-$\delta$-Kriterium

Eine Funktion $f(x)$ heißt *stetig in* $x_0$, falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(x_0, \epsilon) > 0, \forall\, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Bonus: Beispiel: $\epsilon$-$\delta$-Kriterium

Untersuche die Stetigkeit von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$.

$f(x)$ ist stetig in $x_0$, wenn

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(x_0, \epsilon) > 0 : \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}
& |f(x) - f(x_0)| \\
= & \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x_0}} \right| \\
= & \left| \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x_0}} \right) \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x_0}}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x_0}}} \right| \\
= & \left| \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x_0}}} \right| \\
= & \left| \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{\frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}}{\sqrt{x x_0}}} \right| \\
= & \left| \frac{(x_0 - x)\sqrt{x x_0}}{x x_0 \left( \sqrt{x_0} + \sqrt{x} \right)} \right| \\
= & \left| \frac{x_0 - x}{\sqrt{x x_0} \left( \sqrt{x_0} + \sqrt{x} \right)} \right| \\
= & \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x x_0} \left( \sqrt{x_0} + \sqrt{x} \right)} \right| \\
= & |x - x_0| \cdot \frac{1}{\sqrt{x x_0} \left( \sqrt{x_0} + \sqrt{x} \right)} \\
< & \delta \cdot \frac{1}{\sqrt{x x_0} \left( \sqrt{x_0} + \sqrt{x} \right)} \\
\leq & \delta \cdot \frac{1}{\sqrt{x x_0}\sqrt{x_0} + \sqrt{x x_0}\sqrt{x}} \\
\leq & \delta \cdot \frac{1}{\sqrt{x x_0}\sqrt{x}} \\
\leq & \delta \cdot \frac{1}{x\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

Sei $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$:

$$|x - x_0| < \frac{x_0}{2} \implies x_0 - \frac{x_0}{2} < x < x_0 + \frac{x_0}{2} \iff \frac{x_0}{2} < x$$

Daraus folgt weiterhin:

$$\begin{aligned}
& \delta \cdot \frac{1}{x\sqrt{x_0}} \\
< & \frac{2\delta}{x_0\sqrt{x_0}} < \epsilon \\
\iff & \delta < \frac{x_0\sqrt{x_0}}{2}\epsilon
\end{aligned}$$

Mit $\delta = \min\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0\sqrt{x_0}}{2}\epsilon\}$ ist $f(x)$ stetig. $\square$

### Definition: Sandwich-Lemma für Funktionen

Gilt

$$\forall |x - x_0| < K, x \neq x_0 : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = c$$

so ist auch

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = c.$$

### Definition: Unstetigkeit

Es gibt verschiedene Typen der Unstetigkeit:

1. Sprungstellen:
$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$
2. Unendlichkeitsstellen: $f$ ist in der Umgebung von $x_0$ nicht beschränkt, d.h.
$$\lim_{x \to x_0} f(x) > R$$
3. Oszillationsstellen: z.B.
$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \text{ in } x_0 = 0$$
4. Singuläre Definitionen:
$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{, für } x \in M \\ h(x) & \text{, für } x \notin M \end{cases}$$
5. Definitionslücken: z.B.
$$f(x) = \frac{x}{x} \text{ für } x \neq 0$$
6. Kombinationen aus den oben genannten

### Definition: Hebbare Lücke

Sei $f(x)$ stetig für $x \neq x_0, x_0 \notin D$. Dann erhält man mit $f(x) := \lim_{x \to x_0} f(x)$ eine stetige Funktion, wenn der Grenzwert existiert. $x_0$ heißt *hebbare Lücke*.

### Bonus: Stetigkeit auf Intervallen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann:

- ist $f(x)$ beschränkt.
- existieren $x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b]$

### Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig auf* $D$, falls es ein $\delta > 0$ unabhängig von $x_0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon, \forall \, |x - x_0| < \delta.$$

Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig.

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

### Definition: Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f$ heißt *lokal Lipschitz-stetig in* $x_0$, wenn es ein $L \geq 0$ und ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| \, , \forall \, |x - x_0| < \delta.$$

Eine Funktion $f$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \geq 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \, , \forall x, y \in [a, b].$$

$L$ heißt *Lipschitz-Konstante*.

Ist eine Funktion Lipschitz-stetig, so ist sie auch gleichmäßig stetig.

**Bonus: Beispiel: Lipschitz-Stetigkeit**

$$f(x) = \sqrt{2+3x}$$

Ist die Funktion lokal Lipschitz-stetig im Punkt $x_0 = 1$? Berechnen Sie gegebenenfalls die Lipschitz-Konstante $L$ in Abhängigkeit von $\delta$. Lipschitz-Stetigkeit: $\exists L \geq 0, \forall x, x_0 \in D : |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|$

$$\begin{aligned}
& |f(x) - f(y)| \\
= \; & \left|\sqrt{2+3x} - \sqrt{2+3y}\right| \\
= \; & \left|(\sqrt{2+3x} - \sqrt{2+3y}) \cdot \frac{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y}}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y}}\right| \\
= \; & \left|\frac{2+3x-(2+3y)}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y}}\right| \\
= \; & \left|\frac{3(x-y)}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y}}\right| \\
= \; & \frac{3}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y}} \cdot |x-y| \\
\overset{x,y \in (x_0-\delta, x_0+\delta)}{<} \; & \frac{3}{\sqrt{2+3(x_0-\delta)} + \sqrt{2+3(x_0-\delta)}} \cdot |x-y| \\
= \; & \frac{3}{\sqrt{2+3(1-\delta)} + \sqrt{2+3(1-\delta)}} \cdot |x-y| \\
= \; & \frac{3}{\sqrt{2+3-3\delta} + \sqrt{2+3-3\delta}} \cdot |x-y| \\
= \; & \frac{3}{2 \cdot \sqrt{5-3\delta}} \cdot |x-y|
\end{aligned}$$

Damit ist $f$ lokal Lipschitz-stetig im Punkt $x_0 = 1$ mit $L = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{5-3\delta}}$. □

**Definition: Zwischenwertsatz**

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$, dann gilt

$$\forall y \in [\min(c,d), \max(c,d)], \exists x \in [a,b] : f(x) = y.$$

**Definition: Fixpunktsatz**

Ein Wert $x^* \in \mathbb{R}$ heißt *Fixpunkt* einer Funktion $f(x)$, falls $x^* = f(x^*)$.

Sei $f : [a,b] \to [c,d]$ stetig mit $[c,d] \subset [a,b]$ (*selbstkontrahierend*), dann existiert ein *Fixpunkt* $u = f(u)$.

**Bonus: Beispiel: Fixpunktberechnung (Teil 1)**

Gegeben ist die Funktion

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad f(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{x + 1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt.

**Stetigkeit:** $f$ ist offensichtlich stetig, da $f$ aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist (und insbesondere, da $\forall x \in [0, \infty] : x \neq -1$).

**Monotonieverhalten:** Wir vermuten, dass die Funktion monoton steigend ist:

$$\begin{aligned}
& x \geq y \implies f(x) \geq f(y) \\
\equiv\ & x \geq y \implies \frac{x + \frac{1}{2}}{x + 1} \geq \frac{y + \frac{1}{2}}{y + 1} \\
\equiv\ & x \geq y \implies \left(x + \frac{1}{2}\right)(y + 1) \geq \left(y + \frac{1}{2}\right)(x + 1) \\
\equiv\ & x \geq y \implies xy + x + \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \geq xy + y + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\
\equiv\ & x \geq y \implies x + \frac{y}{2} \geq y + \frac{x}{2} \\
\equiv\ & x \geq y \implies x - \frac{x}{2} \geq y - \frac{y}{2} \\
\equiv\ & x \geq y \implies \frac{x}{2} \geq \frac{y}{2} \\
\equiv\ & x \geq y \implies x \geq y \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Damit ist $f$ monoton steigend.

**Kontraktion:** Zu zeigen: $\forall x \in [0, \infty)] : f(x) \in [0, \infty)]$:

$$f(0) = \frac{0 + \frac{1}{2}}{0 + 1} = \frac{1}{2} \in [0, \infty), \text{ und } \lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{n \to \infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n + 1} = 1 \in [0, \infty)$$

Da beide Werte im gegebenen Definitionsbereich sind und $f$ monoton steigend ist, ist $f$ insgesamt selbstkontrahierend.

Insgesamt sind also alle Bedingungen für den Fixpunktsatz erfüllt. $\square$

Bonus: Beispiel: Fixpunktberechnung (Teil 2)

(b) Berechnen Sie den Fixpunkt von $f$.

$$\begin{aligned} & f(x^*) = x^* \\ \equiv\quad & \frac{x^* + \frac{1}{2}}{x^* + 1} = x^* \\ \equiv\quad & x^* + \frac{1}{2} = x^*(x^* + 1) \\ \equiv\quad & x^* + \frac{1}{2} = (x^*)^2 + x^* \\ \equiv\quad & 0 = (x^*)^2 - \frac{1}{2} \\ \implies\quad & x^* = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x^* = -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$x^* \in [0, \infty] \implies x^* = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\square$

# 4 Differentialrechnung

## 4.1 Tangentengleichung

Algorithmus: Tangentengleichung

Wollen wir die Gleichung der Tangente einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $x_0$ bestimmen, so verwenden wir den Ansatz

$$T(x) = f_1(x) = m \cdot (x - x_0) + b.$$

Die Tangente im Punkt $x_0$ hat die Eigenschaften

- Die Steigung ist $m = f'(x)$,
- Sie geht durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Einsetzen der zweiten Bedingung liefert

$$f(x_0) = f_1(x_0) = b$$

und damit ist die Tangentengleichung bekannt mit

$$f_1(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

### 4.2 Ableitungsregeln

**Definition: Faktorregel**

$$f(x) = c \cdot g(x) \implies f'(x) = c \cdot g'(x)$$

**Definition: Summenregel**

$$f(x) = g(x) + h(x) \implies f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

**Definition: Produktregel**

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \implies f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

**Definition: Quotientenregel**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \implies f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

**Definition: Kettenregel**

$$f(x) = g(h(x)) \implies f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

**Bonus: Ableitung der Umkehrfunktion**

$$(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

**Bonus: Elementare Ableitungsfunktionen**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x^n$ | $n \cdot x^{n-1}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$ |
| $\cot x$ | $\frac{-1}{\sin^2 x}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $a^x \cdot \ln a$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |

## 4.3 Lokale Extrema

**Definition: Lokale Extrema**

Existiert eine Stelle $x_0$ einer Funktion $f(x)$ und eine $\epsilon$-Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ von $x_0$, so dass $\forall x \in U_\epsilon(x_0)$ gilt:

- $f(x) \geq f(x_0)$, so heißt $x_0$ *lokales Minimum*,
- $f(x) \leq f(x_0)$, so heißt $x_0$ *lokales Maximum*.

Ist $f$ differenzierbar in $x_0$ und $x_0$ lokales Extremum, soi gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

## 4.4 Mittelwertsatz

**Bonus: Satz von Rolle**

Ist $f$ auf $[a, b]$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und auf $(a, b)$ differenzierbar, so existiert ein $x^* \in (a, b)$ : $f'(x^*) = 0$.

**Definition: Mittelwertsatz**

Sei $f \in C[a, b]$ und in $(a, b)$ differenzierbar. Dann existiert ein $x^* \in (a, b)$ mit

$$f'(x^*) = \frac{f(b) = f(a)}{b - a}.$$

## 4.5 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen

**Definition: Stetigkeit / Differenzierbarkeit von Potenzreihen**

Jede Potenzreihe ist stetig im Inneren des Konvergenzbereiches. Die Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist differenzierbar im Inneren des Konvergenzbereiches und die Ableitung $p'(x)$ kann summandenweise berechnet werden mit:

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n + 1) \cdot (x - x_0)^n \end{aligned}$$

### 4.6 Monotonie

**Definition: Monotonie für Funktionen**

Eine Funktion heißt *monoton wachsend auf* $[a, b]$, falls

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2) \iff \forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0.$$

Eine Funktion heißt *streng monoton wachsend auf* $[a, b]$, falls

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2) \iff \forall x \in (a, b) : f'(x) > 0.$$

Eine Funktion heißt *monoton fallend auf* $[a, b]$, falls

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2) \iff \forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0.$$

Eine Funktion heißt *streng monoton fallend auf* $[a, b]$, falls

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2) \iff \forall x \in (a, b) : f'(x) < 0.$$

### 4.7 Die Grenzwerte von de L'Hospital

**Definition: Regeln von de L'Hospital**

Seien $f, g \in C[a, b]$ und in $(a, b)$ differenzierbar mit $f(a) = g(a) = 0$.
Weiterhin gelte $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ und es existiert

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dann existiert auch

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es ist

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

### 4.8 Krümmungseigenschaften

**Definition: Krümmung**

Sei $f \in C^2(a, b)$ und ist $\forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$, so heißt $f(x)$ *konvex* oder *linksgekrümmt*.
Ist $\forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$ so heißt $f(x)$ *konkav* oder *rechtsgekrümmt*

Definition: Wendepunkt

Sei $f \in C^2(a,b)$ und wechselt die Funktion für $x^* \in (a,b)$ von einer links- zu einer rechtsgekrümmten Funktion (oder umgekehrt), so heißt $x^*$ *Wendepunkt der Funktion*.

Ist $x^*$ Wendepunkt und $f \in C^2(a,b)$, so ist $f''(x) = 0$.

### 4.9 Die Taylorreihe

Definition: Taylorreihe

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

Dabei heißt $x_0$ Entwicklungspunkt der Potenzreihe und die Reihe konvergiert für $|x - x_0| < r$ mit $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Bonus: Beispiel: Taylorreihe

**Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion $g(x) = \ln(x \cdot e^{-2x})$ an der Stelle $x_0 = 1$.**

Taylorpolynom $k$-ten Grades einer Funktion $f$:

$$T_k(x) := \sum_{n=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Das Taylorpolynom dritten Grades von $g(x) = \ln(x \cdot e^{-2x})$ an der Stelle $x_0 = 1$ ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \sum_{n=0}^{3} \frac{\mathrm{d}^n g}{\mathrm{d}x^n}(1) \cdot \frac{(x-1)^n}{n!} \\
&= g(1) + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(1) \cdot \frac{x-1}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(1) \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{\mathrm{d}^3 g}{\mathrm{d}x^3}(1) \cdot \frac{(x-1)^3}{3!} \\
&\overset{*}{=} \ln(e^{-2}) + \left(\frac{1}{1} - 2\right) \cdot (x-1) + \frac{-1}{1} \cdot \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{2}{1} \cdot \frac{(x-1)^3}{6} \\
&= -2 - (x-1) - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 \\
&= -2 - x + 1 - \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{3} \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\
&= -1 - x - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2 + x - \frac{1}{3} \\
&= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x - \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

□

**Nebenrechnungen:**

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} - 2, \quad \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-1}{x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^3 g}{\mathrm{d}x^3} = \frac{2}{x^3}$$

# 5 Integration

## 5.1 Flächenberechnung

**Definition: Stammfunktion**

Sei $f \in C[a,b]$. Eine differenzierbare Funktion $F(x)$ mit $\forall x \in [a,b] : F'(x) = f(x)$ heißt eine *Stammfunktion von f.*

**Definition: Unbestimmtes Integral**

$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt das *unbestimmte Integral von f.*

**Definition: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

Sei $f \in C[a,b]$, dann ist

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ differenzierbar}$$

und es gilt

$$F_a'(x) = f(x).$$

Damit ist also:

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = F_a'(x) = f(x).$$

**Definition: Fläche einer Funktion**

Sei $f \in C[a,b]$, dann ist die Fläche der Funktion im Intervall $[a,b]$ gegeben mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)|_{x=1}^b$$

**Bonus: Potenzregel**

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

**Bonus: Faktorregel**

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Bonus: Summenregel**

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Bonus: Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x$$

Entscheidend bei partieller Integration ist die Wahl von $f(x)$ und $g'(x)$. Eine falsche Wahl kann unter Umständen dazu führen, dass das Integral noch komplizierter wird.

**Faustregel:**

1. L - logarithmische Funktionen (ln, $\log_a$, ...)
2. I - inverse Winkelfunktionen (arcsin, arccos, arctan, ...)
3. A - algebraische Funktionen ($x^2$, $5x^3$, ...)
4. T - trigonometrische Funktionen (sin, cos, tan, csc, ...)
5. E - Exponentialfunktionen ($e^x$, $5a^x$, ...)

Entsprechend des Rangs wird $f(x)$ ausgewählt. Will man beispielsweise $x^2 \cos x$ integrieren, so würde man $x^2$ für $f(x)$ wählen und $\cos x$ für $g'(x)$, da algebraische Funktionen höher in der Liste stehen als trigonometrische Funktionen.

Bonus: Integration durch Substitution

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(\phi(u)) \cdot \phi'(u)\ \mathrm{d}u$$

### 5.2 Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen

Algorithmus: Berechnung der Fläche zwischen zwei Funktionen

Wir betrachten die Fläche zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.
1. Schnittpunkte $a, b$ von $f(x)$ und $g(x)$ berechnen.
2. Integriere $|f(x) - g(x)|$ zwischen den Schnittpunkten:

$$\left| \int_a^b |f(x) - g(x)|\ \mathrm{d}x \right|$$

Beachte: Bei mehr als zwei Schnittpunkten müssen mehrere Integrale mit den jeweiligen Grenzen addiert werden.

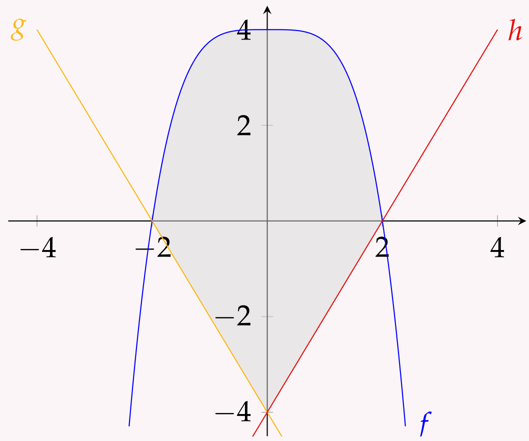
Das Verfahren lässt sich sehr einfach auf mehrere Funktionen erweitern.

**Bonus: Beispiel: Fläche zwischen drei Funktionen**

Wie groß ist der Flächeninhalt, der von den Funktionen

$$f(x) = -0.25x^4 + 4, \quad g(x) = -2x - 4, \quad h(x) = 2x - 4$$

eingeschlossen wird?




Wir sehen in der Zeichnung, dass für die Fläche $A$ zwischen den Graphen gilt:

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int_{-2}^{0} (f(x) - g(x)) \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{0}^{2} (f(x) - h(x)) \, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_{-2}^{0} \left( -\frac{1}{4}x^4 + 2x + 8 \right) \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{0}^{2} \left( -\frac{1}{4}x^4 - 2x + 8 \right) \, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \left[ -\frac{1}{20}x^5 + x^2 + 8x \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[ -\frac{1}{20}x^5 - x^2 + 8x \right]_{0}^{2} \right| \\
&= \left| 0 - \left( -\frac{1}{20} \cdot (-2)^5 + (-2)^2 + 8 \cdot (-2) \right) \right| + \left| -\frac{1}{20} \cdot 2^5 + 2^2 + 8 \cdot 2 - 0 \right| \\
&= \left| -\frac{8}{5} - 4 + 16 \right| + \left| -\frac{8}{5} - 4 + 16 \right| \\
&= \frac{52}{5} + \frac{52}{5} \\
&= \frac{104}{5}
\end{aligned}$$

Damit beträgt der Flächeninhalt $\frac{104}{5}$ Flächeneinheiten. $\square$

### 5.3 Längenberechnung

**Algorithmus: Längenberechnung eines Graphen**

Gegeben sind eine Funktion $f \in C[a,b]$ und die Punkte $a, b$.

Die Länge $L_a^b$ des Graphen der Funktion $f$ ist dann gegeben mit

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x$$

### 5.4 Mantelflächenberechnung

**Algorithmus: Mantelflächenberechnung**

Gegeben sind eine Funktion $f \in C[a,b]$ und die Punkte $a, b$.

Die Mantelfläche $M_a^b$ des Rotationskörpers der Funktion $f$ ist dann gegeben mit

$$M_a^b(f) = \int_a^b 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x$$

### 5.5 Rotationsvolumenberechnung

**Algorithmus: Rotationsvolumenberechnung**

Gegeben sind eine Funktion $f \in C[a,b]$ und die Punkte $a, b$.

Das Volumen $M_a^b$ des Rotationskörpers der Funktion $f$ ist dann gegeben mit

$$V_a^b(f) = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

### 5.6 Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen

**Algorithmus: Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen**

Gegeben sei das Integral

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Dann gilt:

$$\left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) \, \mathrm{d}t \right)' = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x).$$

## 5.7 Parameterintegrale

**Definition: Parameterintegral**

Sei $f(x,t)$ eine von zwei rellen Parametern abhängige Funktion. Die Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $(a,b)$ sowie $f(x,t)$ integrierbar bez. $t$.

Dann heißt

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,t)\, \mathrm{d}t$$

das *Parameterintegral*.

**Bonus: Beispiel: Parameterintegral**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int_0^x \frac{t+1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t\right) &\overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1}\cdot\left(\frac{x+1}{x^2+2}\cdot 1-\frac{0+1}{0+2}\cdot 0\right)\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

**Definition: Leibniz-Regel**

Das Parameterintegral $F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,t)\, \mathrm{d}t$ ist differenzierbar und es ist

$$F'(x) = f(x, g_2(x))\cdot g_2'(x) - f(x, g_1(x))\cdot g_1'(x) + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\mathrm{d}f(x,t)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t$$

**Bonus: Beispiel: Leibniz-Regel**

$$F(x) = \int_{t=x}^{x^2} \frac{1}{t}\cdot\ln(1+x\cdot t)\,\mathrm{d}t \quad (x>0)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= \int_{t=x}^{x^2}\frac{1}{t}\cdot\ln(1+x\cdot t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{x^2}\cdot\ln(1+x\cdot x^2)\cdot 2x - \left(\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x\cdot x)\cdot 1\right) + \int_{t=x}^{x^2}\frac{1}{t}\cdot t\cdot\frac{1}{1+x\cdot t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2\ln(1+x^3)}{x} - \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \left[\frac{\ln(1+x\cdot t)}{x}\right]_{t=x}^{x^2}\\
&= \frac{2\ln(1+x^3)}{x} - \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \frac{\ln(1+x\cdot x^2)}{x} - \frac{\ln(1+x\cdot x)}{x}\\
&= \frac{3\ln(1+x^3) - 2\ln(1+x^2)}{x}
\end{aligned}$$

□

### 5.8 Uneigentliche Integrale

**Definition: Uneigentliche Integrale**

Sei $f(x)$ beschränkt auf $\mathbb{R}$, dann definieren wir

$$\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\ \mathrm{d}x$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^b f(x)\ \mathrm{d}x$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{R\to\infty}\int_c^R f(x)\ \mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_R^c f(x)\ \mathrm{d}x$$

**Definition: Konvergenz von Integralen**

Die Integrale heißen *konvergent*, wenn die Grenzwerte existieren, sonst heißen sie *divergent*.

### 5.9 Absolute Konvergenz

**Definition: Absolute Konvergenz von Integralen**

Sei $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ ein eigentliches oder uneigentliches Integral.

Konvergiert

$$\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x,$$

so heißt $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ *absolut konvergent*.

### 5.10 Weitere Konvergenzkriterien

**Definition: Majoranten- und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integrationsintervalle**

Sei $\forall x \in [a,\infty) : 0 \leq |f(x)| \leq g(x)$ und konvergiert $\int_a^\infty g(x)$, dann konvergiert $\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$ und es gilt

$$\left|\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\ \mathrm{d}x \leq \int_a^\infty g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ist $\forall x \in [a,\infty) : 0 \leq g(x) \leq f(x)$ und divergiert $\int_a^\infty g(x)\ \mathrm{d}x$, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$.

**Definition: Majoranten- und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integranden**

Sei $\forall x \in [a,b] : 0 \leq |f(x)| \leq g(x)$ und konvergiert $\int_a^b g(x)$, dann konvergiert $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ und es gilt

$$\left|\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ist $\forall x \in [a,b] : 0 \leq g(x) \leq f(x)$ und divergiert $\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$, so divergiert auch $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

### 5.11 Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen

**Definition: Integralkriterium**

Sei $f$ eine auf $[m-1,\infty]$ monoton fallende Funktion mit $\forall x \in [m,\infty) : f(x) \geq 0$, dann ist die Reihe

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$$

genau dann *konvergent*, wenn

$$\int_{m}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. Es gilt bei Konvergenz

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{m}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \leq \int_{m-1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Bonus: Beispiel: Integralkriterium**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

$f(n)$ ist offensichtlich auf dem Intervall $[1,\infty)$ streng monoton fallend.

Damit muss nur geprüft werden, dass das Integral $\int_{n=1}^{\infty} f(n)\,\mathrm{d}n$ existiert bzw. konvergiert:

$$\begin{aligned}
\int_{n=1}^{\infty} f(n)\,\mathrm{d}n &= \int_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\,\mathrm{d}n \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{3n^{\frac{2}{3}}}{2}\right]_{n=1}^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{3b^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3}{2}\right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Damit divergiert das Integral und die gegebene Summe divergiert ebenfalls. $\square$