

# Lineare Algebra 1

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 4. Juli 2021

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Analytische Geometrie</b>	<b>2</b>
1.1	Skalarprodukt und Norm . . . . .	2
1.2	Geraden und Ebenen . . . . .	4
1.3	Die Determinante im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Algebraische Strukturen</b>	<b>11</b>
2.1	Gruppen . . . . .	11
2.2	Körper . . . . .	12
2.3	Vektorräume . . . . .	13
2.4	Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension . . . . .	14
2.5	Polynome . . . . .	16
2.6	Skalarprodukte, euklidische und unitäre Räume . . . . .	17
2.7	Das Verfahren von Gram-Schmidt . . . . .	18
	<b>Index</b>	<b>19</b>
	<b>Beispiele</b>	<b>20</b>

# 1 Analytische Geometrie

## 1.1 Skalarprodukt und Norm

### Definition: Skalarprodukt

Eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt Skalarprodukt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

**SP1** Symmetrie:  $\forall a, b \in \mathbb{R}^n : \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

**SP2**  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n : \langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$

**SP3**  $\forall a \in \mathbb{R}^n : \langle \alpha a, b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle = \langle a, \alpha b \rangle$

**SP4** positive Definitheit:  $\forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle a, a \rangle > 0 \wedge \langle 0, 0 \rangle = 0$

### Definition: Euklidisches Skalarprodukt

Für  $a, b$  sei ihr *euklidisches Skalarprodukt*  $\langle a, b \rangle$  definiert als

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

### Definition: Norm

Eine Norm  $\|a\|$  hat folgende Eigenschaften:

**N0**  $\|a\| \in \mathbb{R}$

**N1**  $\|a\| \geq 0$

**N2**  $\|a\| = 0 \iff a = 0$

**N3**  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$

**N4** Dreiecksungleichung  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

### Definition: Euklidische Norm

Einem Vektor  $a$  wird die *euklidische Norm* oder *Standardnorm*  $\|a\|$  zugeordnet durch

$$\|a\| := \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

### Bonus: Diskrete Minkowskische Ungleichung

Für  $p \geq 1$  definiert man die  $\ell_p$ -Norm durch

$$\|a\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- $p = 1$ : Betragssummennorm oder Einsernorm
- $p = 2$ : euklidische Norm
- $p = \infty$ : Maximumnorm oder  $\ell_\infty$ -Norm ( $\|a\|_\infty = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$ )

#### Definition: Orthogonalität

Seien  $a, b \in \mathbb{R}^n$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein beliebiges Skalarprodukt. Die Vektoren  $a$  und  $b$  stehen *orthogonal* zueinander bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , Schreibweise  $a \perp b$ , wenn  $\langle a, b \rangle = 0$ .

#### Algorithmus: Orthogonalen Vektor finden

Wir betrachten den Vektor  $a = (a_1, a_2)^T$ . Für den senkrechten Vektor  $a'$  gilt:  $(-a_2, a_1)^T$ .

#### Bonus: Satz des Pythagoras

Seien  $a, b \in \mathbb{R}^n$  mit  $a \perp b$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein beliebiges Skalarprodukt. Dann gilt:

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

#### Definition: Orthogonale Projektion

Seien  $a, b$  zwei Vektoren und  $b \neq 0$ . Dann gilt für die orthogonale Projektion  $p$  von  $a$  in Richtung  $b$ :

$$p_b(a) = \frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} b$$

#### Bonus: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für  $a, b \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$$

#### Definition: Winkel zwischen Vektoren

Seien  $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Der Winkel zwischen  $a$  und  $b$ , geschrieben  $\angle(a, b)$ , wird definiert als

$$\angle(a, b) := \arccos \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$

#### Definition: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Seien  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . Dann heißt

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

das *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* von  $a$  und  $b$ .

## 1.2 Geraden und Ebenen

### Definition: Gerade (Punkt-Richtungsgleichung)

Für einen Ortsvektor oder Aufpunkt  $p$  und einen Richtungsvektor  $v \neq 0$  heißt

$$x = p + \alpha v$$

*Punkt-Richtungsgleichung einer Geraden  $G$ .*

### Definition: Gerade (Normalform in der Ebene)

Sei  $G$  eine Gerade in der Ebene,  $p$  der Aufpunkt und  $v$  der Richtungsvektor von  $G$ . Gilt  $n \perp v$ , dann heißt

$$\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle \iff n_1 x_1 + n_2 x_2 = c$$

*Normalform von  $G$ .*

### Definition: Ebene (Punkt-Richtungsgleichung)

Seien  $p, v, w \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$  und  $w \neq 0$ , und seien  $v$  und  $w$  nicht parallel. Dann heißt

$$x = p + \alpha v + \beta w$$

*Punkt-Richtungsgleichung einer Ebene  $E$ .*

### Definition: Ebene (Normalform)

Sei  $E$  eine Ebene im Raum,  $p$  der Aufpunkt und  $v, w$  Richtungsvektoren von  $E$ . Gilt  $n \perp v \wedge n \perp w$ , dann heißt

$$\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle \iff n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$$

*Normalform von  $E$ .*

### Definition: Hessesche Normalform

Sei  $n$  ein Normalenvektor einer Gerade  $G$  in der Ebene oder einer Ebene  $E$  im Raum. Gilt  $\|n\| = 1$ , so heißt die damit gebildete Normalform *Hessesche Normalform*.

### Algorithmus: Normalform $\rightarrow$ Hessesche Normalform (Geraden und Ebenen)

Man erhält die Hessesche Normalform aus einer beliebigen Normalform, indem man die Normalform durch  $\|n\|$  teilt:

$$\frac{\langle x, n \rangle}{\|n\|} = \frac{\langle p, n \rangle}{\|n\|}$$

Damit liegt der Normalvektor bis auf das Vorzeichen eindeutig fest.

#### Algorithmus: Punkt-Richtungsform $\rightarrow$ Normalform (Geraden)

Sei eine Gerade  $G$  gegeben durch  $x = p + \alpha v$  mit  $v = (v_1, v_2)^T$ . Einene Normalenvektor  $n$  findet man durch

$$n := \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}.$$

Durch Ausrechnen von  $\langle p, n \rangle$  erhält man die rechte Seite der Normalform.

#### Algorithmus: Normalform $\rightarrow$ Punkt-Richtungsform (Geraden)

Liegt die Gerade in der Normalform  $ax_1 + bx_2 = c$  vor, wird ein Richtungsvektor  $v \perp n \iff v \perp (a, b)^T$  benötigt.

Man kann hier  $v = (b, -a)^T$  wählen. Einen Aufpunkt  $p$  erhält man, indem man z.B.  $x_1 = 0$  oder  $x_2 = 0$  setzt und aus der parameterlosen Form die andere Komponente errechnet.

#### Algorithmus: Punkt-Richtungsform $\rightarrow$ Normalform (Ebenen)

Um einen Normalenvektor  $n$  für die Richtungsvektoren  $v, w$  zu erhalten, kann man das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren berechnen.

Als Aufpunkt lässt sich jeder Punkt der Ebene verwenden, insbesondere der Vektor  $p$  aus der Punkt-Richtungsform.

#### Algorithmus: Normalform $\rightarrow$ Punkt-Richtungsform (Ebenen)

Aus der Normalgleichung  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$  liest man den Normalenvektor  $n = (a, b, c)^T$  ab. Mindestens eine Komponente  $n_i$  von  $n$  ist ungleich 0. Wir vertauschen  $n_i$  mit einer anderen Komponente  $n_j$  und verändern das Vorzeichen von  $n_j$  im so erzeugten Vektor.

Weil es zwei Möglichkeiten gibt  $i \neq j$  zu wählen, erhalten wir zwei Vektoren  $v$  und  $w$ , mit  $v \perp n, w \perp n$  und  $v \neq 0 \neq w$  und  $v \nparallel w$ .

Ein Aufpunkt lässt sich errechnen, indem man zwei der drei Koordinaten von  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  z.B. den Wert 0 zuweist und dann aus der Normalform den Wert der fehlenden Koordinate errechnet.

Sollte dies nicht möglich sein, wähle man ein anderes Koordinatenpaar. Es gibt immer zwei Koordinaten in  $x$ , mit denen obige Rechnung möglich ist.

### Definition: Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen

Geraden:

- Zwei Geraden in  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  heißen *parallel*, wenn ihre Richtungsvektoren parallel sind.
- Zwei sich schneidende Geraden heißen *orthogonal*, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal sind.
- Seien  $G$  und  $G'$  zwei sich schneidende Geraden mit Richtungsvektoren  $v$  bzw.  $v'$ . Der Winkel zwischen den Geraden wird definiert durch

$$\angle(G, G') := \min\{\angle(v, v'), \angle(v', v)\} = \arccos\left(\frac{|\langle v, v' \rangle|}{\|v\| \|v'\|}\right)$$

Ebenen:

- Zwei Ebenen heißen *parallel*, wenn ihre Normalenvektoren parallel sind. Sie heißen *orthogonal*, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal sind.
- Sei  $E$  eine Ebene mit Normalenvektor  $n$ . Eine Gerade mit Richtungsvektoren  $v$  heißt *parallel* zur Ebene  $E$ , falls  $v \perp n$ .
- Seien  $n$  und  $n'$  Normalenvektoren der beiden Ebenen  $E$  und  $E'$ . Dann wird der Winkel  $\angle(E, E')$  zwischen den beiden Ebenen erklärt durch

$$\angle(E, E') := \min\{\angle(n, n'), \angle(n', n)\} = \arccos\left(\frac{|\langle n, n' \rangle|}{\|n\| \|n'\|}\right)$$

### Algorithmus: Schnittmengen zwischen Geraden und Ebenen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

1. Man sorgt eventuell durch Umrechnung dafür, dass das eine Objekt durch eine parameterlose (*Normalgleichung*) und das andere durch eine parameterbehaftete Gleichung (*Punkt-Richtungsgleichung*) beschrieben wird.
2. Man setzt die Parametergleichung in die parameterlose Gleichung ein und erhält Ausdrücke für den oder die Parameter.
3. Diese setzt man in die Parametergleichung ein und erhält eine Parametrisierung der Schnittmenge.

### Beispiel: Schnittmenge zwischen einer Gerade und einer Ebene

Gegeben seien  $p = (1, -1, 2)^T$ ,  $q = (1, 1, 1)^T$  und  $n = (1, 2, 3)^T$ . Gesucht wird der Schnittpunkt der Geraden  $G$  durch  $p$  in Richtung von  $n$  mit der Ebene  $E$  durch  $q$  senkrecht zu  $n$ . Man verwendet bei der Gleichsetzung für  $E$  eine Normal- und für  $G$  eine Parameterform, z.B.

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Komponentenweise liest man daraus die Gleichungen

$$x_1 = 1 + \alpha \quad x_2 = -1 + 2\alpha \quad x_3 = 2 + 3\alpha$$

ab. Eine Normalform von  $E$  lautet

$$\langle x, n \rangle = \langle q, n \rangle \iff x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6.$$

Einsetzen in die Normalgleichung liefert dann  $\alpha = \frac{1}{14}$ . Den Schnittpunkt  $s$  erhält man durch Einsetzen von  $\alpha$  in die Parametergleichung:

$$s = p + \alpha n = \left( \frac{15}{14}, -\frac{12}{14}, \frac{31}{14} \right)^T.$$

□

### Bonus: Lotfußpunkt

Sei  $G$  eine Gerade mit Richtungsvektor  $v$  und  $q \notin G$ . Ein Punkt  $q' \in G$  heißt *Lotfußpunkt*, wenn  $l := q = q' \perp G$  gilt,  $l$  heißt *Lot*, und der Abstand  $d$  zwischen einem Punkt und einer Geraden in  $\mathbb{R}^3$  wird definiert durch  $d := \|l\|$ .

### Algorithmus: Abstandsberechnung (Punkte, Geraden und Hyperebenen)

Abstandsberechnungen zwischen Punkten, Geraden und Hyperebenen lassen sich auf die Berechnung des Lotfußpunktes zurückführen:

1. Bestimme die Richtung  $r$  des Lots.
2. Bestimme jeweils einen Punkt auf den beiden Objekten und (durch Differenzbildung) den Abstandsvektor  $a$  zwischen den beiden Punkten (Aufpunkte!).
3. Das Lot  $l$  ist die Projektion von  $a$  auf  $r$ . Der gesuchte Abstand ist  $d = \|l\|$ .

$$l = \frac{\langle a, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r \quad d = \frac{|\langle a, r \rangle|}{\langle r, r \rangle} \|r\| = \frac{|\langle a, r \rangle|}{\|r\|}$$

Tipps:

- Ist eine Hyperebene beteiligt, dann wählt man  $r$  als Normalenvektor  $n$  der Hyperebene.
- Bei zwei Geraden in  $\mathbb{R}^3$  muss  $r$  senkrecht auf beiden Geraden stehen.
- Bei nicht parallelen Geraden wählt man  $r$  als Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren.
- Der Abstand zweier paralleler Geraden lässt sich auf den Abstand eines Punkts zu einer Geraden zurückführen.

#### Algorithmus: Abstand Punkt-Gerade im $\mathbb{R}^3$

1.  $a = l + r$ , also  $l = a - r$
2.  $r$  ist die Projektion von  $a$  auf den Richtungsvektor der Geraden  $v$ , also

$$r = \frac{\langle a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

3. Zusammen ergibt sich

$$l = a - \frac{\langle a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \quad d = \|l\|$$



### 1.3 Die Determinante im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

#### Definition: Determinante

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**n=1:**  $A = (a_1)$ . Dann gilt

$$\det(A) := a_1$$

**n=2:** Sei  $A = (a, b)$  mit den Spaltenvektoren  $a, b \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$\det A = \det(a, b) := a_1 b_2 - b_1 a_2$$

Der Betrag der Determinanten entspricht genau der Fläche des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms.

**n=3:**

$$\det(a, b, c) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3$$

#### Definition: Spatprodukt

Für drei Vektoren  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  nennt man

$$\langle a, b \times c \rangle \in \mathbb{R}$$

das *Spatprodukt* der drei Vektoren  $a, b, c$ .

Die Vektoren  $a, b, c$  bilden die Kanten eines Körpers im dreidimensionalen Raum, eines *Parallelepeds* oder *Spats*.

Es entspricht also der Betrag der Determinante dem Volumen des durch die drei Spaltenvektoren aufgespannten Spats.

#### Bonus: Determinante (Alternative)

Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ,  $\phi$  der Winkel zwischen  $a$  und  $b$  sowie  $\psi$  der Winkel zwischen den Vektoren  $a \times b$  und  $c$ . Dann gilt:

$$\det(a, b, c) = \|a\| \|b\| \|c\| \sin \phi \cos \psi$$

#### Definition: Eigenschaften der Determinante

Die Determinante hat folgende Eigenschaften.

**D1**  $\det(a, b, c) = \det(c, a, b) = \det(b, c, a)$

**D2**  $\det(a, b, c) = -\det(b, a, c)$

**D3**  $\det(a, a, c) = 0$

**D4** Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt  $\det(\alpha a, b, c) = \alpha \det(a, b, c)$

**D5**  $\det(a, b, c + d) = \det(a, b, c) + \det(a, b, d)$

**D6**  $\det A = \det A^T$

#### Bonus: Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Notwendig und hinreichend dafür, dass das lineare Gleichungssystem  $LG$  eine eindeutige Lösung besitzt, ist die Bedingung

$$\det(a, b, c) \neq 0$$

## 2 Algebraische Strukturen

### 2.1 Gruppen

#### Definition: Gruppe

Sei  $M$  eine Menge, und  $\circ : M \times M \rightarrow M$  eine *Verknüpfung*.  $(M, \circ)$  heißt Gruppe, wenn gilt:

**G1** (Assoziativität): Die Verknüpfung ist assoziativ, d.h. es gilt:

$$\forall x, y, z \in M : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

**G2** (Neutralement): Es existiert ein neutrales Element  $e \in M$  so dass

$$\forall x \in M : x \circ e = x$$

**G3** (Inverses Element):  $\forall x \in M \exists x'$  mit

$$x \circ x' = e$$

- Gilt für eine Gruppe  $G = (M, \circ)$ , dass  $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in M$ , dann heißt  $G$  *abelsche Gruppe* oder *kommutative Gruppe*.

Auch muss implizit gelten:

- $x \circ y$  existiert  $\forall x, y \in M$  und ist eindeutig festgelegt
- $x \circ y \in M$

Ist dies der Fall, ist die Abbildung  $\circ : M \times M \rightarrow M$  *wohldefiniert*.

#### Definition: Untergruppe

Sei  $G = (M, \circ)$  eine Gruppe und  $M' \subseteq M$ . Bildet  $U = (M', \circ)$  eine Gruppe, so heißt  $U$  *Untergruppe* von  $G$ , Schreibweise  $U \leq G$ .

Für  $G$  und  $U$  wie oben gilt  $U \leq G$  genau dann, wenn gilt:

1.  $M' \neq \emptyset$
2.  $\forall a, b \in M' : a \circ b \in M'$
3.  $\forall a \in M' : a^{-1} \in M'$

## 2.2 Körper

### Definition: Körper

Das Tripel  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  hat folgende Eigenschaften:

1.  $(\mathbb{R}, +)$  bildet eine abelsche Gruppe.
2.  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  bildet eine abelsche Gruppe.
3. Es gelten die *Distributivgesetze*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \text{ und } x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Jedes Tripel  $(M, \oplus, \odot)$ , das die obigen drei Bedingungen erfüllt, wird *Körper* genannt.

## 2.3 Vektorräume

### Definition: Vektorraum

Sei  $K$  ein beliebiger Körper. Eine nicht-leere Menge  $V$  zusammen mit den beiden Abbildungen

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, \quad (x, y) \rightarrow x \oplus y \in V \quad \text{und} \quad \odot : K \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, x) \rightarrow \lambda \odot x \in V$$

heißt *Vektorraum über  $K$*  oder  *$K$ -Vektorraum*, wenn folgende Axiome gelten:

- $(V, \oplus)$  ist eine kommutative Gruppe.
- $\forall \lambda, \mu \in K$  und  $x \in V$  gilt  $\lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda\mu) \odot x$ , wobei mit  $\lambda\mu$  die Multiplikation aus  $K$  gemeint ist.
- $\forall x \in V$  gilt  $1 \odot x = x$  (1 ist das neutrale Element der Multiplikation aus  $K$ )
- $\forall \lambda \in K, x, y \in V$  gilt:  $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda x) \oplus (\lambda \odot y)$ .
- $\forall \lambda, \mu \in K, x \in V$  gilt  $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$

### Definition: Untervektorraum

Eine Teilmenge  $U \subseteq V$  heißt *Untervektorraum* oder *Unterraum* von  $V$ , wenn  $U \neq \emptyset$  und  $\forall x, y \in U$  und alle  $\lambda \in K$  gilt:

$$x \oplus y \in U,$$

$$\lambda \odot x \in U.$$

## 2.4 Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Seien  $v_1, \dots, v_r \in V$  Vektoren eines  $K$ -Vektorraums  $V$ .

### Definition: Linearkombination

Lässt sich  $v \in V$  als Summe dieser Vektoren mit Vorfaktoren darstellen,

$$v = \sum_{k=1}^r \lambda_k v_k$$

heißt  $v$  *Linearkombination* von  $v_1, \dots, v_r$ .

### Definition: Lineare Hülle

Die Menge

$$L(v_1, \dots, v_r) := \left\{ \sum_{k=1}^r \lambda_k v_k \mid \lambda_i \in K \right\} \subseteq V$$

aller Linearkombinationen heißt *Lineare Hülle* von  $v_1, \dots, v_r$ .

### Definition: Erzeugendensystem

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $(v_1, \dots, v_n)$  ein  $n$ -Tupel von Vektoren in  $V$ . Gilt  $L(v_1, \dots, v_n) = V$ , nennt man  $(v_1, \dots, v_n)$  ein *Erzeugendensystem* von  $V$ .

$V$  heißt *endlich erzeugt*, wenn es endlich viele Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  gibt, so dass  $L(v_1, \dots, v_r) = V$ , ansonsten *nicht endlich erzeugt*.

### Definition: Lineare Unabhängigkeit

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Ein  $r$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_r)$  von Vektoren in  $V$  heißt *linear unabhängig*, wenn aus  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r = 0$  stets folgt, dass  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$  gilt.

Außerdem gilt:

- Keiner der Vektoren ist eine Linearkombination der übrigen.
- Keiner der Vektoren ist der Nullvektor.

Tipp: Ein  $r$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_r)$  von Vektoren in  $V$  ist *linear unabhängig* genau dann, wenn  $\det(v_1, \dots, v_r) \neq 0$ .

### Bonus: Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Wir bilden zu den Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  für paarweise verschiedene  $x_1, \dots, x_n$  die  $n$  Vektoren

$$(f_1(x_1), \dots, f_1(x_n))^T, \dots, (f_n(x_1), \dots, f_n(x_n))^T \in \mathbb{K}^n.$$

Sind diese Vektoren linear unabhängig, dann sind die Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  selbst linear unabhängig.

Hinweis: Die Rückrichtung gilt **nicht**!

### Definition: Basis

Sei  $v \neq \{0\}$  ein endlich erzeugter  $K$ -Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Das  $n$ -Tupel  $B = (v_1, \dots, v_n)$  heißt *Basis* oder *minimales Erzeugendensystem* von  $V$ , wenn  $B$  linear unabhängig ist und wenn gilt  $L(B) = V$ . Weiter sei  $\emptyset$  die Basis des Nullvektorraums  $\{0\}$ .

### Bonus: Koordinaten eines Vektors

Sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  und  $v \in V$  mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

Das  $n$ -Tupel der obigen Vorfaktoren  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$  nennt man *Koordinaten* des Vektors  $v$  bzgl. der Basis  $(v_1, \dots, v_n)$ .

### Definition: Basisergänzungssatz

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und seien

$$v_1, \dots, v_r, \quad w_1, \dots, w_s \in V$$

Ist  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig und ist

$$L(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s) = V,$$

dann kann man  $(v_1, \dots, v_r)$  durch evtl. Hinzunahme geeigneter Vektoren aus  $\{w_1, \dots, w_s\}$  zu einer Basis von  $V$  ergänzen.

### Definition: Austauschlemma

Sind  $(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)$  Basen eines  $K$ -Vektorraums  $V$ , dann gibt es zu jedem  $v_i$  ein  $w_j$ , so dass aus  $(v_1, \dots, v_n)$  wieder eine Basis entsteht, wenn man in ihr  $v_i$  durch  $w_j$  ersetzt.

### Definition: Dimension

Besitzt ein Vektorraum  $v \neq \{0\}$  eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$ , so definieren wir die *Dimension* von  $V$  als  $\dim(V) := n$ . Besitzt  $V$  keine endliche Basis, dann setzt man  $\dim(V) := \infty$ . Weiter sei  $\dim(\{0\}) := 0$ .

## 2.5 Polynome

### Definition: Polynom

Ein *Polynom* oder ganzrationale Funktion  $p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  ist eine Funktion der Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

.

### Bonus: Polynome als $\mathbb{K}$ -Vektorraum

Sei  $+$  die Addition von Funktionen und  $\cdot$  die Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar. Dann bildet  $(P_n, +, \cdot)$  einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

### Bonus: Basis des Vektorraums $P_n$

Die Funktionen  $1, x, x^2, \dots, x^n$  bilden eine Basis des Vektorraums  $P_n$  und es gilt

$$\dim(P_n) = n + 1.$$

Diese Basis wird auch *Monombasis* genannt.

### Definition: Interpolationspolynom

Gegeben seien die  $n + 1$ -Punkte  $(x_k, y_k), 0 \leq k \leq n$  mit paarweise verschiedenen  $x_k$ . Dann existiert genau ein  $p_n \in P_n$  mit  $y_k = p_n(x_k) \forall 0 \leq k \leq n$ . Dies ist das sogenannte *Interpolationspolynom*.

### Beispiel: Interpolationspolynom

Wir betrachten die drei Punkte  $(-2, 1), (-1, -1)$  und  $(1, 1)$ .

Eine interpolierende Parabel  $p_2$  wird durch diese Punkte festgelegt.

Die allgemeine Form des Polynoms ist  $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ . Einsetzen der drei Punkte ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned}(1, 1) : \quad 1 &= a + b + c \\ (-1, -1) : \quad -1 &= a - b + c \\ (-2, 1) : \quad 1 &= 4a - 2b + c\end{aligned}$$

und führt damit zu einem linearen Gleichungssystem.

Man errechnet als Lösung  $a = 1, b = 1, c = -1$  und erhält

$$p_2(x) = x^2 + x - 1.$$

□



### Beispiel: Lineare Unabhängigkeit von Polynomen

Die Polynome

$$p_1(x) = (1-x)^2 \quad p_2(x) = (1-x)x \quad p_3(x) = x^2$$

sollen auf lineare Unabhängigkeit geprüft werden. Wir berechnen zunächst die Koeffizientenvektoren.

$$p_1(x) = (1-x)^2 = 1 - 2x + 1x^2 \implies a_{0_1} = 1, a_{1_1} = -2, a_{2_1} = 1$$

$$p_2(x) = (1-x)x = 0 + 1x - x^2 \implies a_{0_2} = 0, a_{1_2} = 1, a_{2_2} = -1$$

$$p_3(x) = x^2 \implies a_{0_3} = 0, a_{1_3} = 0, a_{2_3} = 1$$

$\det(a_0, a_1, a_2) \neq 0$  und damit sind die Polynome linear unabhängig.  $\square$

## 2.6 Skalarprodukte, euklidische und unitäre Räume

### Definition: Euklidische und unitäre Vektorräume

Ein reeller Vektorraum gemeinsam mit einem Skalarprodukt heißt *euklidischer Vektorraum*, ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt *unitärer Vektorraum*.

### Definition: Orthogonale Projektion

Sei  $U$  ein endlich erzeugter Untervektorraum von  $V$  und  $a \in V$ . Ein Vektor  $p_U(a) \in U$  heißt *orthogonale Projektion* von  $a$  auf  $U$ , wenn gilt:

$$a - p_U(a) \perp u \quad \forall u \in U.$$

### Definition: Orthogonales Komplement

Für  $M \subseteq V$  heißt

$$M^\perp := \{v \in V \mid v \perp u \quad \forall u \in M\}$$

das *orthogonale Komplement* von  $M$ .

### Definition: Orthogonalsystem, Orthonormalsystem, Orthogonalbasis, Orthonormalbasis

Sei  $B = (v_1, \dots, v_m)$  ein  $m$ -Tupel mit Vektoren in  $V \setminus \{0\}$ .

1.  $B$  heißt *Orthogonalsystem* in  $V$ , falls alle  $v_i$  paarweise orthogonal sind.
2. Ein Orthogonalsystem, für das zusätzlich  $\forall v_i \in B : \|v_i\| = 1$  gilt, heißt *Orthonormalsystem*.
3. Ein Orthogonalsystem, das eine Basis von  $V$  bildet, heißt *Orthogonalbasis* von  $V$ .
4. Ein Orthonormalsystem, das eine Basis von  $V$  bildet, heißt *Orthonormalbasis* von  $V$ .

## 2.7 Das Verfahren von Gram-Schmidt

### Definition: Gram-Schmidt-Verfahren

Sei  $V$  ein unitärer Vektorraum und  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig. Seien

$$\begin{aligned}w_1 &:= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\r_{k+1} &:= v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, w_i \rangle w_i \\w_{k+1} &:= \frac{r_{k+1}}{\|r_{k+1}\|}\end{aligned}$$

Dann bilden  $(w_1, \dots, w_m)$  eine Orthonormalbasis von  $L(v_1, \dots, v_m)$ .

### Beispiel: Gram-Schmidt-Verfahren (allgemein)

Wir betrachten eine beliebige Basis  $(v_1, v_2, v_3)$  von  $\mathbb{R}^3$ . Wir gehen so vor:

1. Man wählt einfach  $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$ , weil dann offenbar  $\|w_1\| = 1$  gilt.
2. Wir konstruieren einen Vektor  $r_2$ , der senkrecht auf  $w_1$  steht. Dazu projizieren wir  $v_2$  auf den von  $w_1$  erzeugten Unterraum  $L(w_1)$  und setzen  $r_2 := v_2 - p_{L(w_1)}(v_2)$ . Dann gilt nach Definition der orthogonalen Projektion  $v_1 \perp r_2$ . Man erhält

$$r_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1.$$

Normierung von  $r_2$  liefert  $w_2$ .

3. Der Vektor  $r_3 := v_3 - p_{L(v_1, v_2)}(v_3)$  steht nach Konstruktion senkrecht auf  $L(v_1, v_2)$  und daher gilt insbesondere  $r_3 \perp v_1$  und  $r_3 \perp v_2$ . Weil  $(w_1, w_2)$  eine Orthonormalbasis von  $L(v_1, v_2)$  bilden, gilt:

$$r_3 = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2$$

Normierung von  $r_3$  ergibt  $w_3$ .

## Index

- Abstand Punkt-Gerade im  $\mathbb{R}^3$ , 7
- Abstandsberechnung (Punkte, Geraden und Hyperebenen), 7
- Austauschlemma, 15
- Basis, 14
- Basis des Vektorraums  $P_n$ , 16
- Basisergänzungssatz, 15
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 3
- Determinante, 9
- Determinante (Alternative), 9
- Dimension, 15
- Diskrete Minkowskische Ungleichung, 2
- Ebene (Normalform), 4
- Ebene (Punkt-Richtungsgleichung), 4
- Eigenschaften der Determinante, 9
- Erzeugendensystem, 14
- Euklidische Norm, 2
- Euklidische und unitäre Vektorräume, 17
- Euklidisches Skalarprodukt, 2
- Gerade (Normalform in der Ebene), 4
- Gerade (Punkt-Richtungsgleichung), 4
- Gram-Schmidt-Verfahren, 18
- Gruppe, 11
- Hessesche Normalform, 4
- Interpolationspolynom, 16
- Koordinaten eines Vektors, 15
- Körper, 12
- Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen, 5
- Lineare Hülle, 14
- Lineare Unabhängigkeit, 14
- Lineare Unabhängigkeit von Funktionen, 14
- Linearkombination, 14
- Lotfußpunkt, 7
- Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme, 9
- Norm, 2
- Normalform  $\rightarrow$  Hessesche Normalform (Geraden und Ebenen), 4
- Normalform  $\rightarrow$  Punkt-Richtungsform (Ebenen), 5
- Normalform  $\rightarrow$  Punkt-Richtungsform (Geraden), 5
- Orthogonale Projektion, 3, 17
- Orthogonalen Vektor finden, 3
- Orthogonales Komplement, 17
- Orthogonalität, 2
- Orthogonalsystem, Orthonormalsystem, Orthogonalbasis, Orthonormalbasis, 17
- Polynom, 16
- Polynome als  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, 16
- Punkt-Richtungsform  $\rightarrow$  Normalform (Ebenen), 5
- Punkt-Richtungsform  $\rightarrow$  Normalform (Geraden), 4
- Satz des Pythagoras, 3
- Schnittmengen zwischen Geraden und Ebenen in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$ , 6
- Skalarprodukt, 2
- Spatprodukt, 9
- Untergruppe, 11
- Untervektorraum, 13
- Vektorprodukt (Kreuzprodukt), 3
- Vektorraum, 13
- Winkel zwischen Vektoren, 3

## Beispiele

Gram-Schmidt-Verfahren (allgemein), 18

Interpolationspolynom, 16

Lineare Unabhängigkeit von Polynomen, 16

Schnittmenge zwischen einer Gerade und  
einer Ebene, 6