

# Analysis 2

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 4. Juli 2021

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>2</b>
1.1 Mengen im $\mathbb{R}^n$	3
1.2 Folgen im $\mathbb{R}^n$	3
1.3 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$	4
1.3.1 Partielle Ableitungen	6
1.3.2 Das vollständige Differential	10
1.3.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	12
1.3.4 Taylorentwicklung für $f(x, y)$	12
1.3.5 Extremwerte ohne Nebenbedingungen	13
1.3.6 Extremwerte mit Nebenbedingungen	15
1.3.7 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale	15
<b>2 Mehrdimensionale Integration</b>	<b>17</b>
2.1 Doppelintegrale	17
2.2 Dreifachintegrale	21
<b>3 (*) Wachstums- und Zerfallsprozesse</b>	<b>22</b>
3.1 Ungebremstes Wachstum	22
3.2 Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung	23
3.3 Logistisches Wachstum - Störung zweiter Ordnung	24
<b>4 Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>25</b>
4.1 Lösungsverfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung	25
4.2 Lösungsverfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung	35
<b>Index</b>	<b>38</b>
<b>Beispiele</b>	<b>40</b>

# 1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

## Definition: Metrik

Metriken definieren Abstände im  $\mathbb{R}^n$ .

Eine Funktion  $d$  auf einem Vektorraum  $V$  mit

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, d(\vec{x}, \vec{y})$$

heißt *Metrik*, falls gilt

- $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{y}, \vec{z}), \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$  (Dreiecksungleichung)

## Beispiel: Metriken

- Summen-Metrik:

$$\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$$

- euklid. Metrik:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

- Maximum-Metrik:

$$\max_{k \in [1, n]} |x_k - y_k|$$

## Definition: Metrischer Raum

Ein Vektorraum und eine Metrik heißen zusammen *metrischer Raum*.

## Bonus: Zusammenhang Metrik & Norm

Jeder Vektorraum mit einer Metrik  $d$  ist normierbar (d.h. dort gibt es eine Norm), falls

$$d(a\vec{x}, 0) = |a| d(\vec{x}, 0) \quad \text{und} \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x} - \vec{y}, 0)$$

Eine Norm wird dann definiert gemäß

$$\|\vec{x}\| := d(\vec{x}, 0)$$

## 1.1 Mengen im $\mathbb{R}^n$

### Definition: $\varepsilon$ -Umgebung im $\mathbb{R}^n$

Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm im  $\mathbb{R}^n$ , dann heißt

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}$$

die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\vec{x}_0$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|$ .

Sei  $D$  eine Menge und  $\|\cdot\|$  eine Norm. Dann

- ... heißt  $\vec{x}_0$  *innerer Punkt* von  $D$ , falls  $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset D$ .
- ... heißt  $D$  *offene Menge*, falls alle Punkte von  $D$  innere Punkte sind.

### Definition: Abgeschlossene Mengen

Sei  $D$  eine Menge und  $\|\cdot\|$  eine Norm. Dann

- ... heißt  $\vec{x}_0$  *Häufungspunkt* von  $D$ , falls  $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}_0)$  einen Punkt  $\vec{x} \neq \vec{x}_0$  enthält.
- ... heißt  $D$  *abgeschlossene Menge*, falls sie alle Häufungspunkte von  $D$  enthält.

### Definition: Beschränktheit von Mengen

Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt *beschränkt*, falls es ein  $M \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\|\vec{x}\| < M \quad \forall \vec{x} \in D$$

Existiert eine solche Schranke nicht, so heißt die Menge *unbeschränkt*.

## 1.2 Folgen im $\mathbb{R}^n$

### Definition: Folge

Seien  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$ , dann heißt  $(\vec{x}_n)$  *Folge* im  $\mathbb{R}^n$ .

### Definition: Konvergenz

$(\vec{x}_n)$  heißt *konvergent* gegen den Grenzwert  $\vec{x}$ , falls  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$ , so dass  $\forall n > n_0(\varepsilon)$  gilt:

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon$$

### Definition: Cauchy-Folge

$(\vec{x}_n)$  heißt *Cauchy-Folge* gegen  $\vec{x}$ , falls  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$ , so dass  $\forall n, m > n_0(\varepsilon)$  gilt:

$$\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| < \varepsilon$$

Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

#### Definition: Beschränktheit von Folgen

Eine Folge heißt *beschränkt*, wenn die Menge aller Folgenglieder in jeder Komponente beschränkt ist.

#### Definition: Häufungspunkt

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  heißt *Häufungspunkt* von  $(\vec{x}_n)$ , falls  $\forall \varepsilon > 0$  unendlich viele  $\vec{x}_i$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\vec{x}$  liegen.

Jede unendliche beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt besitzt.

#### Definition: Bolzano-Weierstrass für Folgen

Jede unendliche beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Jede unendliche beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

### 1.3 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

#### Definition: Grenzwert im $\mathbb{R}^n$

Wir bezeichnen mit dem Grenzwert

$$g = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$$

den *Grenzwert* jeder gegen  $\vec{x}_0$  konvergenten Folge  $(\vec{x}_n)$ , falls dieser existiert und damit insbesondere eindeutig ist.

#### Definition: Stetigkeit

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{x}_0 = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in U$ ,  $f$  heißt in  $\vec{x}_0$  *stetig*, wenn

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) = f\left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{x}\right),$$

wobei  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  Grenzwert jeder gegen  $\vec{x}_0$  konvergenten Folge  $(\vec{x}_n)$  ist.

Formal:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n)$$

$f$  heißt *stetig in  $U$* , wenn die Funktion für jedes  $\vec{x}_0 = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in U$  stetig ist.

Stetigkeit bedeutet somit insbesondere Stetigkeit in allen Komponenten.

### Beispiel: Stetigkeit

Lassen sich folgende Funktionen im Nullpunkt stetig ergänzen und, wenn ja, wie?

- a)  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^8}$   
b)  $f(x, y) = \frac{x^3 + x^2 - y^4 + y^2}{x^2 + y^2}$

a) Sei die Kurve  $x = y^4$  gegeben. Dann gilt:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4 y^2}{y^8 + y^8} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2y^2} = \infty$$

Damit ist  $f$  im Nullpunkt nicht stetig. □

b)  $f$  ist genau dann *stetig ergänzbar* im Nullpunkt, wenn  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  existiert.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + x^2 - y^4 + y^2}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi) - r^4 \sin^4(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)}{r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos^3(\varphi) + \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^3(\varphi) + \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^4(\varphi) + \sin^2(\varphi) \\ &= 0 + 1 - 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Damit ist  $f$  im Nullpunkt stetig ergänzbar mit  $f(0, 0) = 1$ . □

### Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon)$  (unabhängig von  $\vec{x}_0$ ) gibt, so dass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon, \quad \forall \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$$

Gleichmäßige Stetigkeit ist wegen der Unabhängigkeit von  $\vec{x}_0$  insbesondere Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich  $D$ .

Ist  $f$  beschränkt und abgeschlossen, so ist  $f$  gleichmäßig stetig.

#### Definition: Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Konstante  $L$  gibt (unabhängig von  $\vec{x}_0$ ), so dass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \leq L \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

Ist in einer Norm  $L < 1$ , so heißt die Abbildung *Kontraktion*.

Ist eine Funktion  $f$  Lipschitz-stetig, so ist  $f$  auf ihrem Definitionsbereich  $D$  gleichmäßig stetig und in jedem Punkt stetig.

#### Bonus: Nullstelle

Ein Punkt  $\vec{x}_0 \in D$  heißt *Nullstelle* einer Funktion  $f$ , falls  $f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ .

#### Definition: Fixpunkt

Ein Punkt  $\vec{x}^* \in D$  heißt *Fixpunkt* einer Funktion  $\varphi$ , falls  $\varphi(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$ .

#### Definition: Fixpunktsatz von Banach

Sei  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y})| \leq L \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \text{und} \quad L < 1,$$

dann hat  $\varphi$  genau einen Fixpunkt.

### 1.3.1 Partielle Ableitungen

#### Definition: Partielle Ableitung

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{x}_0 = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in U$ ,  $f$  heißt in  $\vec{x}_0$  *partiell differenzierbar* nach  $x_i$ , wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

existiert. Der Wert  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  heißt dann die *partielle Ableitung* von  $f$  nach  $x_i$ .

Eine Funktion heißt (*partiell*) *differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen existieren.

#### Bonus: Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit

$f$  heißt *stetig partiell differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen in  $\vec{x}_i$  stetige Funktionen (und insbesondere beschränkt) sind.

Ist  $f$  in  $U$  partiell differenzierbar und in  $\vec{x}_0 \in U$  *stetig partiell differenzierbar*, so ist  $f$  in  $\vec{x}_0$  stetig.

### Definition: Gradient

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar,  $\vec{x}_0 = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in U$ , dann heißt

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

der Gradient von  $f$  in  $\vec{x}_0$ .

### Bonus: Rechenregeln für Gradienten

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offene Menge,  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \nabla(f + g) &= \nabla(f) + \nabla(g) \\ \nabla(\alpha f) &= \alpha \cdot \nabla(f) \\ \nabla(fg) &= g \cdot \nabla(f) + f \cdot \nabla(g) \end{aligned}$$

### Beispiel: Gradient

Berechnen Sie den Gradienten für  $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z$  an der Stelle  $(1, 2, 3)$ .

Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen  $f_x$ ,  $f_y$  und  $f_z$ :

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 \\ f_y &= 2y \\ f_z &= 1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir dann den Gradienten  $\nabla f$  an der Stelle  $(1, 2, 3)$  mit:

$$\nabla f(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} f_x(1, 2, 3) \\ f_y(1, 2, 3) \\ f_z(1, 2, 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

### Definition: Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$

Sei  $z = f(x, y)$  eine stetig partiell differenzierbare Funktion in zwei Unbekannten und  $z_0 = f(x_0, y_0)$  ein fester Punkt.

Dann ist die Tangentialebene im Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  gegeben mit:

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2,$$

wobei  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  verschiedene Tangentenvektoren sind.

### Algorithmus: Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$

Betrachten wir die Tangenten entlang der Koordinatenachsen, so erhalten wir

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

oder äquivalent

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

### Bonus: Tangentialebene im $\mathbb{R}^n$

Die Tangentialebene im  $\mathbb{R}^n$  einer Funktion  $f$  in  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  an der Stelle  $\vec{x}_0 = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$  analog definiert durch

$$T(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

### Beispiel: Tangentialebene

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2)^2$$

Geben Sie die Tangentialebene im Punkt  $(x_0, y_0) = (0, 2)$  an.

---

Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$ :

$$f_x = 4x(x^2 + y^2 - 2)$$

$$f_y = 4y(x^2 + y^2 - 2)$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = f(0, 2) = 4$$

Damit ergibt sich dann die Tangentialebene von  $f$  am Punkt  $(0, 2)$  mit:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□



### Definition: Richtungsableitung

Die Ableitung in Richtung des Vektors  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$  mit  $\|\vec{v}\| = 1$  heißt *Richtungsableitung*  $D_{\vec{v}}(f)$  von  $f$  in Richtung von  $\vec{v}$ . Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} &:= D_{\vec{v}}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + hv_1, \dots, x_n + hv_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}\end{aligned}$$

### Algorithmus: Richtungsableitung

Sei  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\vec{v}\| = 1$ . Dann ist die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $\vec{x}_0$  in Richtung  $\vec{v}$  gegeben mit

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = D_{\vec{v}}(f) = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle$$

### Beispiel: Richtungsableitung

Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = x^2y - y^3x + 1$$

im Punkt  $(x_0, y_0) = (1, 2)$  in Richtung des Vektors  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  in Richtung  $\vec{v}$  ( $\|\vec{v}\| = 1$ ) ist gegeben mit

$$D_{\vec{v}}(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle$$

Zuerst berechnen wir die partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$ :

$$\begin{aligned}f_x &= 2xy - y^3 \implies f_x(x_0, y_0) = f_x(1, 2) = -4 \\ f_y &= x^2 - 3y^2x \implies f_y(x_0, y_0) = f_y(1, 2) = -11\end{aligned}$$

Sei nun  $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ :

$$\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit können wir nun die Richtungsableitung wie folgt bilden:

$$D_{\vec{v}}(f) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{34}{\sqrt{13}}$$

□

#### Algorithmus: Extremster Anstieg

Insgesamt gilt, falls wir nur die Richtung (ohne Normierung) betrachten:

$$\vec{v} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad \text{ist die Richtung des steilsten Anstiegs von } f$$

$$\vec{v} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad \text{ist die Richtung des steilsten Abstiegs von } f$$

### 1.3.2 Das vollständige Differential

#### Definition: Vollständiges Differential

Unter dem *vollständigen Differential* der Funktion  $z = f(x, y)$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  versteht man den Ausdruck

$$dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$$

#### Algorithmus: Absoluter Fehler

Es gilt für  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  der *absolute Fehler*:

$$\Delta z_{\max} \leq \sum_{i=1}^n |f_{x_i}| \cdot |\Delta x_i|$$

#### Algorithmus: Relativer Fehler

Es gilt für  $z = f(x, y) = c \cdot x^a \cdot y^b$  anhand der möglichen relativen Eingabefehler  $\frac{\Delta x}{x}$  und  $\frac{\Delta y}{y}$  der *relative Fehler*:

$$\frac{\Delta z}{z} \leq a \cdot \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + b \cdot \left| \frac{\Delta y}{y} \right|$$

#### Beispiel: Relativer Fehler

Bei der Berechnung einer Fläche  $f(x, y) = 5x^2 \cdot y$  werde ein relativer Messfehler von 10% in  $x$  und 3% in  $y$  gemacht. Wie ist der relative Fehler des Ergebnisses?

---

$$z := f(x, y) = 5x^2 \cdot y \quad (c \cdot x^a \cdot y^b)$$

Es ist der relative Fehler gegeben mit

$$\frac{\Delta z}{z} \leq a \cdot \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + b \cdot \left| \frac{\Delta y}{y} \right| = 2 \cdot 10\% + 1 \cdot 3\% = 23\%$$

□

### Definition: Kurve

Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  in  $t$  stetige Funktionen. Die Menge

$$\{(x, y) \mid x = x(t), y = y(t), t \in \mathbb{R}\}$$

heißt *Kurve*. Die Darstellung  $t \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

heißt *Parameterdarstellung der Kurve*.

### Definition: Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Sei  $z = f(\vec{x}) = f(\vec{x}(t))$  und  $\vec{x}(t)$  stetig in jeder Komponente  $x_i$ . Dann gilt:

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$$

### Definition: Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

Sei  $z = f(\vec{x}) = f(\vec{x}(u, v))$  und  $\vec{x}(u, v)$  stetig in jeder Komponente  $x_i$ . Dann gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{du}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dv}$$

### Definition: Implizite Differentiation

Seien  $F(x, f(x)) = F(x, y)$  und  $f(x) = y$  differenzierbar. Gilt  $F(x_0, y_0) = 0$ , dann wird  $y$  implizit differenziert mit

$$y' = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

Es gilt:

- Die implizite Differentiation kann insbesondere angewendet werden, wenn sich eine Funktion  $F(x, y) = 0$  nicht oder nicht einfach nach  $y$  umstellen lässt.
- Die Funktion muss ggf. auf die Form  $F(x, y) = 0$  gebracht werden.
- Es ist immer zu testen, ob der vorgegebene Punkt die Bedingung  $F(x_0, y_0) = 0$  erfüllt.
- Die Rechnung kann an einem beliebigen Punkt  $(x_0, y_0)$  durchgeführt werden und somit auch eine Ableitungsfunktion berechnen.

### 1.3.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

#### Definition: Satz von Schwarz

Sind die partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung einer Funktion stetige Funktionen, so darf die Reihenfolge der Differentiation beliebig vertauscht werden.

#### Definition: Divergenz

Wir bezeichnen die *Divergenz* einer Funktion  $f$  mit

$$\operatorname{div} f := \nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

#### Definition: Rotation

Wir bezeichnen die *Rotation* einer Funktion  $f$  mit

$$\operatorname{rot} f := \nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

#### Bonus: Quellen und Senken

Die Punkte mit  $\operatorname{div} f > 0$  heißen *Quellen* des Vektorfeldes, die mit  $\operatorname{div} f < 0$  heißen *Senken*.

Gilt stets  $\operatorname{div} f = 0$ , so heißt die Funktion *quellenfrei*.

Gilt  $\operatorname{rot} f = 0$ , so heißt die Funktion *wirbelfrei*.

#### Definition: Jacobi-Matrix

Die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt *Jacobi-Matrix* von  $f$ .

### 1.3.4 Taylorentwicklung für $f(x, y)$

#### Definition: Quadratische Approximation

Für  $f(x, y)$  ist die *quadratische Approximation* gegeben mit

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2}{2} + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2}{2} \end{aligned}$$

### 1.3.5 Extremwerte ohne Nebenbedingungen

#### Algorithmus: Lokale Extrema ohne Nebenbedingungen im $\mathbb{R}^2$

1. Berechne  $f_x(x, y)$  und  $f_y(x, y)$  und suche diejenigen Stellen  $(x_0, y_0)$  mit

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

Diese Stellen sind die *Kandidaten* für lokale Extrema.

2. Berechne für jeden Kandidaten  $(x_0, y_0)$  die Werte  $f_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $f_{xy}(x_0, y_0)$  und  $f_{yy}(x_0, y_0)$  und daraus den Wert

$$d := f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

3. Dann gilt:

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \wedge d > 0 \implies \text{lokales Minimum}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \wedge d > 0 \implies \text{lokales Maximum}$$

$$d < 0 \implies \text{Sattelpunkt}$$

$$d = 0 \implies \text{höhere Ableitung entscheidet}$$

#### Definition: Hesse-Matrix im $\mathbb{R}^2$

Die Hesse-Matrix im  $\mathbb{R}^2$  ist definiert mit

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Ist  $H$  *positiv definit*, so liegt ein Minimum vor, ist  $H$  *negativ definit* ein Maximum und bei *indefinitem*  $H$  ein Sattelpunkt.

Es gilt:

- $H$  ist positiv definit  $\iff f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \wedge \det H > 0$
- $H$  ist negativ definit  $\iff f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \wedge \det H > 0$
- $H$  indefinit  $\iff \det H < 0$

#### Definition: Hesse-Matrix im $\mathbb{R}^n$

Die Hesse-Matrix im  $\mathbb{R}^n$  ist definiert mit

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Ist  $H$  *positiv definit*, so liegt ein Minimum vor, ist  $H$  *negativ definit* ein Maximum und bei *indefinitem*  $H$  ein Sattelpunkt.

Es gilt:

- $H$  ist positiv definit  $\iff$  alle *Unterdeterminanten* (links oben beginnend) sind positiv
- $H$  ist negativ definit  $\iff$  alle *Unterdeterminanten* (links oben beginnend) haben wechselndes Vorzeichen (beginnend mit negativem Vorzeichen)
- $H$  indefinit  $\iff$  sonst

Untersuchen Sie die Funktion

$$v(x, y, z) = xy - z^4 - 2(x^2 + y^2 - z^2)$$

auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

$$v(x, y, z) = xy - z^4 - 2(x^2 + y^2 - z^2) = xy - z^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2z^2$$

Wir berechnen zuerst die potentiellen Kandidaten. Für diese muss gelten

$$\begin{aligned} \nabla v(x, y, z) &= \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \iff \begin{pmatrix} y - 4x \\ x - 4y \\ -4z^3 + 4z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z(z^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir haben offensichtlich drei Gleichungen gegeben.

Wir erkennen aus III direkt, dass  $z \in \{-1, 0, 1\}$  gelten muss und aus II und I, dass  $x = y = 0$ .

Damit erhalten wir die drei Kandidatentupel:

- $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, -1),$
- $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0),$
- $(x_3, y_3, z_3) = (0, 0, 1).$

Wir bilden nun die Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -4 & f_{xy} &= 1 & f_{xz} &= 0 \\ f_{yx} &= f_{xy} = 1 & f_{yy} &= -4 & f_{yz} &= 0 \\ f_{zx} &= f_{xz} = 0 & f_{zy} &= f_{yz} = 0 & f_{zz} &= 12z^2 + 4 \end{aligned}$$

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -12z^2 + 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt für die Unterdeterminanten:

$$\det H_1 = -4$$

$$\det H_2 = 15$$

$$\det H = (-12z^2 + 4) \cdot \det H_2 = (-12z^2 + 4) \cdot 15 = -180z^2 + 60$$

Es gilt weiterhin

$$\det H \leq 0 \iff -180z^2 + 60 \leq 0 \iff z^2 \leq \frac{1}{3}$$

Damit ist die Hesse-Matrix für alle  $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  indefinit und sonst negativ definit.

Damit sind die Kandidatentupel  $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, -1)$  und  $(x_3, y_3, z_3) = (0, 0, 1)$  Maxima und  $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$  ein Sattelpunkt. □

### 1.3.6 Extremwerte mit Nebenbedingungen

#### Definition: Lagrange-Funktion

Gegeben seien eine Funktion  $f(x, y)$  und eine Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$ . Dann ist die *Lagrange-Funktion* gegeben mit

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Es gilt damit:

$$L_\lambda = g(x, y) \quad \wedge \quad g(x, y) = 0 \implies L(x, y, \lambda) = f(x, y)$$

#### Algorithmus: Lokale Extrema mit Nebenbedingung im $\mathbb{R}^2$

1. Berechne die Kandidaten wie in freien Optimierungen mit

$$\nabla(L) = \vec{0}$$

2. Aufstellen der geränderten Hesse-Matrix für die drei Unbekannten mit

$$H = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{xy} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dann gilt:

$$\det H > 0 \implies \text{Maximum}$$

$$\det H < 0 \implies \text{Minimum}$$

$$\det H = 0 \implies \text{keine Entscheidung möglich}$$

### 1.3.7 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale

#### Definition: Tangentenvektor

Der *Tangentenvektor* einer Kurve  $\vec{x}(t)$  ist gegeben mit

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

#### Definition: Tangente

Die *Tangente* einer Kurve  $\vec{x}(t)$  ist gegeben mit

$$T(t) = \vec{x}(t) + \lambda \vec{x}'(t)$$

### Definition: Arbeitsintegral

Seien die Kraft  $F(\vec{x}(t))$  und ein Zeitintervall  $t \in [a, b]$ , oder analog Start- und Endpunkte  $\vec{A} = \vec{x}(a)$  bzw.  $\vec{B} = \vec{x}(b)$ , gegeben.

Dann ist die *Arbeit* gegeben mit

$$W = \int_a^b F(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t) \, dt$$

### Beispiel: Arbeitsintegral

Gegeben sei die Kurve  $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie die Arbeit im Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + yz \\ y + xz \\ z + xy \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve.

---

Die Arbeit von Zeitpunkt  $t = a$  bis Zeitpunkt  $t = b$  ist gegeben mit

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) \, dt$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F}(\vec{X}(t)) \cdot \vec{X}'(t) \, dt \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} t + t^5 \\ t^2 + t^4 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \, dt \\ &= \int_a^b (t + t^5 + 2t(t^4 + t^2) + 3t^2 \cdot 2t^3) \, dt \\ &= \int_a^b (9t^5 + 2t^3 + t) \, dt \\ &= \left[ \frac{3t^6}{2} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{3(b^6 - a^6) + b^4 + b^2 - a^4 - a^2}{2} \end{aligned}$$

□



### Definition: Potentialfunktion

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar.  $f$  heißt *Gradientenfeld*, wenn es eine skalare Funktion  $V$  gibt, mit

$$\nabla(V) = f$$

Die Funktion  $V$  heißt dann *Potentialfunktion* von  $f$  mit

$$V = \int f$$

Es gilt:

- Im  $\mathbb{R}^2$ :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

- Im  $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{rot } f = 0$$

- Im  $\mathbb{R}^n$  für die Jacobimatrix  $J$

$$J = J^T$$

## 2 Mehrdimensionale Integration

### 2.1 Doppelintegrale

#### Definition: Integral im $\mathbb{R}^2$

Bezeichnet  $A$  das Rechteck  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ , so ist das *Integral* von  $f$  über das Gebiet  $A$  gegeben mit

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) \, dy \, dx = \int_A f \, dA = \int \int_A f \, dA$$

#### Algorithmus: Integration über kartesische krummlinige Bereiche

Seien eine *obere* und eine *untere Funktion*  $f_u(x)$  und  $f_v(x)$  gegeben und in der zweiten Dimension das Intervall  $[a, b]$ , dann gilt für das Integral im entsprechenden Integrationsbereich

$$\int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_v(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

#### Algorithmus: Flächeninhalt einer Grundfläche eines kartesischen krummlinigen Bereiches

Der Flächeninhalt  $F$  einer Grundfläche  $A$  ergibt sich durch Integration mit  $f(x, y) = 1$ , also

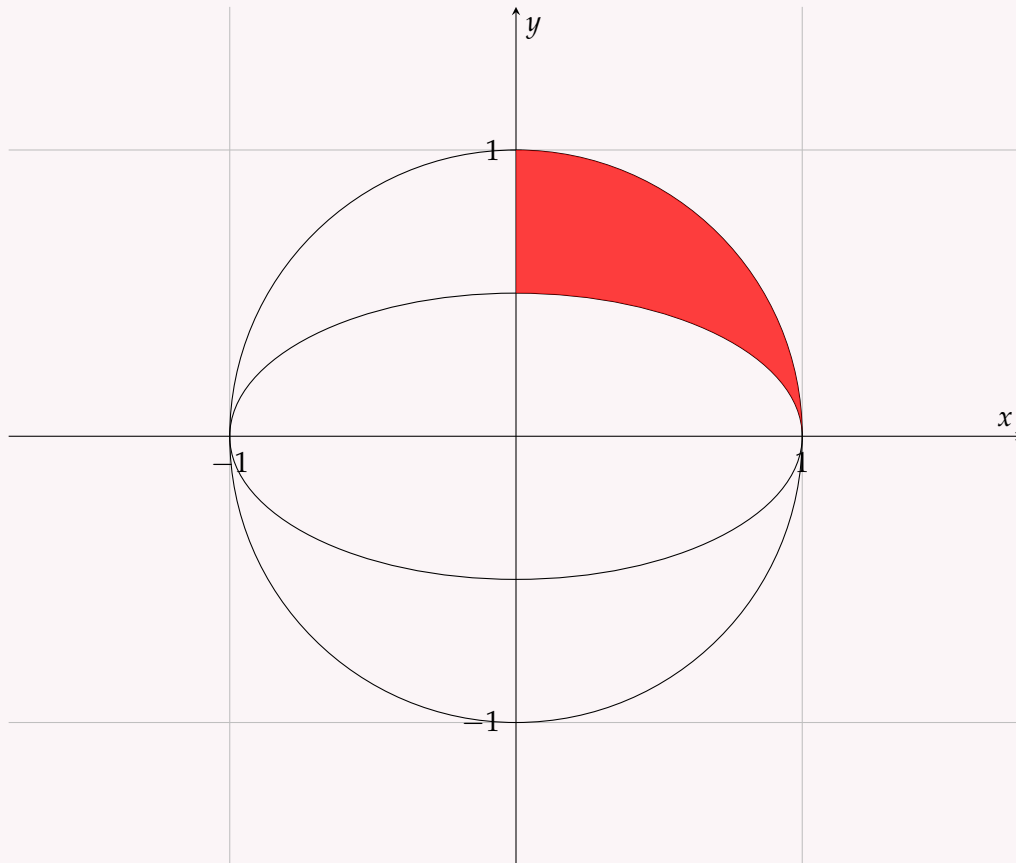
$$F = \int_A 1 \, dA$$

### Beispiel: Integration über kartesische krummlinige Bereiche

Berechnen Sie das Volumen der Funktion  $f(x, y) = x + y$  über die Fläche

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Skizzieren Sie zunächst die Fläche.



Wir sehen, dass die Ellipsengleichung die untere und die Kreisgleichung die obere Schranke bilden. Damit formen wir unser Integrationsgebiet wie folgt um:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

### Beispiel: Integration über kartesische krummlinige Bereiche (Fortsetzung)

Dann können wir wie folgt die Fläche berechnen:

$$\begin{aligned}
 \int \int_A (x+y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
 &= \int_0^1 \left( x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2} - \left( \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1-x^2}{8} \right) \right) \, dx \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{3(1-x^2)}{8} \right) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx + \frac{3}{8} \int_0^1 (1-x^2) \, dx \\
 &\stackrel{a}{=} -\frac{1}{4} \int_{x=0}^1 \sqrt{u} \, du + \frac{3}{8} \int_0^1 (1-x^2) \, dx \\
 &= -\frac{1}{4} \left[ \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3} \right]_0^1 + \frac{3}{8} \int_0^1 (1-x^2) \, dx \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \int_0^1 (1-x^2) \, dx \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

□

---


$$^a u = 1 - x^2 \implies \frac{du}{dx} = -2x \iff dx = -\frac{du}{2x}$$

### Algorithmus: Schwerpunkt einer Grundfläche eines homogenen Gebietes

Der Schwerpunkt mit den Schwerpunktskoordinaten  $(x_s, y_s)$  einer Fläche mit homogener Dichte ergibt sich mit der Flächenmaßzahl  $F$  aus

$$x_s = \frac{1}{F} \int_A x \, dA \quad \wedge \quad y_s = \frac{1}{F} \int_A y \, dA$$

### Algorithmus: Masse einer Grundfläche eines inhomogenen Gebietes

Wird die spezifische Dichte eines Stoffes in der Koordinate  $(x, y)$  gegeben durch  $\rho(x, y)$ , so lässt sich die Masse einer Fläche  $A$  berechnen mit

$$M = \int_A \rho(x, y) \, dA$$

### Algorithmus: Integration in Polarkoordinaten

Bei der Umwandlung der kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  in *Polarkoordinaten* umwandeln, gilt

$$f(x, y) = f(r \cos \phi, r \sin \phi) \quad \wedge \quad dy dx = r dr d\phi$$

Und dann insgesamt für die Integration:

$$\int_A f(x, y) dy dx = \int_A f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr d\phi$$

### Algorithmus: Uneigentliche Integrale mithilfe von Polarkoordinaten

Der Übergang zu Polarkoordinaten kann bei der Berechnung von uneigentlichen zweidimensionalen Integralen behilflich sein. Dabei gilt:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr d\phi$$

### Beispiel: Uneigentliche Integrale mithilfe von Polarkoordinaten

Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_A x \cdot y dA$$

über dem Integrationsgebiet  $A$  gegeben durch die Ungleichungen

$$-2 \leq y \leq 2, \quad x \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

- a) in kartesischen Koordinaten,
- b) in Polarkoordinaten.

---

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_A x \cdot y dA &= \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x \cdot y dx dy \\ &= \int_{-2}^2 y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_{-2}^2 \frac{y(4-y^2)}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4y - y^3) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4y - y^3) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_0^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

### Beispiel: Uneigentliche Integrale mithilfe von Polarkoordinaten (Fortsetzung)

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_A x \cdot y \, dA &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \cos \phi \sin \phi \, dr \, d\phi \\&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi \int_0^2 r^3 \, dr \, d\phi \\&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^2 \, d\phi \\&= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi \, d\phi \\&\stackrel{a}{=} -4 \int_{\phi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \, du \\&= -4 \left[ \frac{\cos^2 \phi}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\&= 0\end{aligned}$$

□

---

$$^a u = \cos \phi \implies \frac{du}{d\phi} = -\sin \phi \iff d\phi = -\frac{du}{\sin \phi}$$

## 2.2 Dreifachintegrale

### Definition: Dreifachintegral

Bezeichnet  $V$  den Quader  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$ , so ist das *Dreifachintegral* von  $f$  über das Gebiet  $V$  gegeben mit

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = \int_A f \, dA = \int \int \int_A f \, dA$$

### Bonus: Volumenberechnung im $\mathbb{R}^3$

Die Berechnung eines Volumen  $V$  über den Bereich  $V'$  im  $\mathbb{R}^3$  geschieht völlig analog zum  $\mathbb{R}^2$ :

$$V = \int_{V'} 1 \, dV'$$

### Bonus: Schwerpunktberechnung im $\mathbb{R}^3$

Die Berechnung des Schwerpunktes  $(x_s, y_s, z_s)$  mit Volumen  $V$  über den Bereich  $V'$  im  $\mathbb{R}^3$  geschieht völlig analog zum  $\mathbb{R}^2$ :

$$x_s = \frac{1}{V} \int_{V'} x \, dV' \quad \wedge \quad y_s = \frac{1}{V} \int_{V'} y \, dV' \quad \wedge \quad z_s = \frac{1}{V} \int_{V'} z \, dV'$$

#### Bonus: Rechnen mit Kugelkoordinaten

Der Übergang zu Kugelkoordinaten kann bei der Berechnung von dreidimensionalen Integralen behilflich sein. Dabei gilt:

$$\int \int \int f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = \int \int \int f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) |r^2 \sin \theta| \, d\theta \, d\phi \, dr$$

### 3 (\*) Wachstums- und Zerfallsprozesse

#### 3.1 Ungebremses Wachstum

##### Definition: Diskretes ungebremses Wachstum

Gegeben sei ein Wachstum  $k$  innerhalb einer (beliebigen) Zeiteinheit  $\Delta t_0$ , eine Startpopulation  $y_0$  und eine Änderungsrate

$$\Delta y = k \cdot y$$

dann ist die Lösungsfunktion

$$y_n = y_0 \cdot (1 + k)^n$$

wobei  $y_n = y(n \cdot \Delta t_0)$  den Zustand nach  $n$  Zeitschritten der Länge  $\Delta t_0$  angibt.

##### Bonus: Diskretes ungebremses Wachstum für Zeiteile

s Gegeben sei ein Wachstum  $k$  innerhalb einer (beliebigen) Zeiteinheit  $\Delta t_0 = 1$ , eine Startpopulation  $y_0$  und eine Änderungsrate

$$\Delta y = k_{\Delta t_0} \cdot y$$

Betrachten wir nun einen *Zeiteil*  $\Delta t$ , dann ist das modifizierte Modell

$$\Delta y = y_n - y_{n-1} = k_{\Delta t} \cdot y_{n-1} \cdot \Delta t$$

mit der Lösung

$$y_n = y_0 \cdot (1 + k_{\Delta t} \cdot \Delta t)^n$$

wobei  $y_n = y(n \cdot \Delta t)$  den Zustand nach  $n$  Zeitschritten der Länge  $\Delta t$  angibt.

Die Lösung dieses Modells wird auch als *diskrete Evolutionsgleichung des ungebremsten Wachstums* bezeichnet.

#### Definition: Kontinuierliches Modell der Evolutionsgleichung

Zur Lösung der Modellgleichung

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y$$

mit  $y(0) = y_0$  und  $k$  (kontinuierliches) Wachstum, so ist die *kontinuierliche* Lösungsfunktion

$$y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$$

und wegen  $\Delta t \rightarrow 0$  ist dies gleichbedeutend zu

$$y'(t) = k \cdot y(t) \text{ mit } y(0) = 0$$

Ein solches Problem heißt *Differentialgleichung mit Anfangswert* oder *Anfangswertproblem*.

### 3.2 Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung

#### Definition: Diskretes Modell des Wachstums mit Störung erster Ordnung

Gegeben sei ein Wachstum  $k$  innerhalb einer (beliebigen) Zeiteinheit  $\Delta t_0$ , eine Startpopulation  $y(0) = y_0$ ,  $\Delta t$  ein Zeitteil,  $a$  die *Abnahme pro Zeiteinheit* und eine Änderungsrate

$$\Delta y = (k \cdot y - a) \cdot \Delta t$$

dann ist die Lösungsfunktion

$$y_n = \left( y(0) - \frac{a}{k} \right) \cdot (1 + k \cdot \Delta t)^n + \frac{a}{k}$$

#### Definition: Kontinuierliches Modell des Wachstums mit Störung erster Ordnung

Zur Lösung der Modellgleichung

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y - a$$

mit  $y(0) = y_0$ ,  $k$  (kontinuierliches) Wachstum und  $a$  *kontinuierliche Abnahme* pro Zeiteinheit, ist die *kontinuierliche* Lösungsfunktion

$$y(t) = \left( y(0) - \frac{a}{k} \right) \cdot e^{kt} + \frac{a}{k}$$

und wegen  $\Delta t \rightarrow 0$  ist dies gleichbedeutend zu

$$y'(t) = k \cdot y(t) - a$$

#### Definition: Stationäre Lösung

Die konstanten Werte, ermittelt durch  $\Delta y = 0$ , heißen *stationäre Lösungen*  $y_s$ .  
Für Wachstumsmodelle mit Störung erster Ordnung gilt:

$$y_s = \frac{a}{k}$$

### 3.3 Logistisches Wachstum - Störung zweiter Ordnung

#### Definition: Diskretes Modell des Wachstums mit Störung zweiter Ordnung

Gegeben sei ein Wachstum  $k$  innerhalb einer (beliebigen) Zeiteinheit  $\Delta t_0$ , eine Startpopulation  $y(0) = y_0$ ,  $\Delta t$  ein Zeitteil,  $R$  *Oberschranke der verfügbaren Ressourcen* und eine Änderungsrate

$$\Delta y = (k \cdot y \cdot (R - y)) \cdot \Delta t$$

dann ist die Lösungsfunktion

$$y_n = \frac{R}{\frac{R-y_0}{y_0} \cdot (1 + R \cdot k \cdot \Delta t)^{-n} + 1}$$

#### Definition: Kontinuierliches Modell des Wachstums mit Störung zweiter Ordnung

Zur Lösung der Modellgleichung

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y \cdot (R - y)$$

mit  $y(0) = y_0$ ,  $k$  (kontinuierliches) Wachstum und  $R$  *Oberschranke der verfügbaren Ressourcen*, ist die *kontinuierliche* Lösungsfunktion

$$y(t) = \frac{R}{\frac{R-y_0}{y_0} \cdot e^{-Rkt} + 1}$$

und wegen  $\Delta t \rightarrow 0$  ist dies gleichbedeutend zu

$$y'(t) = k \cdot y(t) \cdot (R - y(t))$$



## 4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

### Definition: Gewöhnliche Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung

Eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

heißt (*explizite*) *gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung*.

Ist die Gleichung in der Form

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

gegeben, so heißt die Differentialgleichung *implizit*.

Erfüllt  $y(x)$  die Differentialgleichung, so heißt  $y$  *allgemeine Lösung der Differentialgleichung*.

### Definition: Anfangswertproblem

Die Vorgabe einer expliziten Differentialgleichung und der Werte

$$x_0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

heißt *Anfangswertproblem*.

Erfüllt  $y(x)$  das Anfangswertproblem, so heißt  $y$  *spezielle Lösung des Anfangswertproblems*.

### 4.1 Lösungsverfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung

#### Algorithmus: Trennung der Variablen

Gegeben: Differentialgleichung der Form

$$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

1.  $x$  und  $y$  wie folgt trennen:

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

2. Integration liefert:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

3. Umstellen nach  $y$  liefert die Lösung der Differentialgleichung

### Beispiel: Trennung der Variablen

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + (1+x) \cdot y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = -y \cdot (1+x)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = -y \cdot (1+x) \\ \Longleftrightarrow & -\frac{1}{y} dy = (1+x) dx \\ \Longleftrightarrow & \int -\frac{1}{y} dy = \int (1+x) dx \\ \Longleftrightarrow & -\ln|y| - c_2 = x + \frac{x^2}{2} + c_1 \\ \Longleftrightarrow & y = e^{-(c_1+c_2)} e^{-\frac{x}{2}(x+2)} \\ \Longleftrightarrow & y = ce^{-\frac{x}{2}(x+2)} \end{aligned}$$

□

### Algorithmus: Substitution

- Differentialgleichung vom Typ

$$y' = f(ax + by + c)$$

1. Substituiere  $z = ax + by + c$
2. Es ergibt sich

$$y = \frac{z - ax - c}{b} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{z' - a}{b}$$

bzw.

$$z' = a + bf(z)$$

3. Lösen mithilfe von *Trennung der Variablen* (Tipp: Dividieren durch rechte Seite)
4. Rücksubstitution in  $y = \frac{z - ax - c}{b}$  ergibt die Lösung

- Differentialgleichung vom Typ

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

1. Substituiere  $z = \frac{x}{y}$
2. Es ergibt sich (Produktregel!)

$$y = z \cdot x \quad \Longrightarrow \quad y' = z + z' \cdot x$$

bzw.

$$z' = \frac{f(z) - z}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad z + z' \cdot x = f(z)$$

3. Lösen mithilfe von *Trennung der Variablen*
4. Rücksubstitution in  $y = z \cdot x$  ergibt die allgemeine Lösung

### Beispiel: Substitution

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit Hilfe einer geeigneten Substitution ( $x \neq 0$ ):

$$y' = \frac{1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x}$$

Sei  $u = \frac{y}{x}$  ( $\implies u' = \frac{xy' - y}{x^2} \iff y' = u + xu'$ ). Dann gilt:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x} \\ \iff u + xu' &= \frac{1}{\sin u} + u \\ \iff xu' &= \frac{1}{\sin u} \\ \iff \frac{x \, du}{dx} &= \frac{1}{\sin u} \\ \iff \sin u \, du &= \frac{1}{x} \, dx \\ \iff \int \sin u \, du &= \int \frac{1}{x} \, dx \\ \iff -\cos(u) + c_2 &= \ln|x| + c_1 \\ \iff \cos(u) &= -\ln|x| - c_1 + c_2 \\ \iff u &= \arccos(-\ln|x| - c_1 + c_2) \\ \iff \frac{y}{x} &= \arccos(-\ln|x| - c_1 + c_2) \\ \iff y &= x \arccos(c - \ln|x|) \end{aligned}$$

□

### Definition: Lineare Differentialgleichung

Die Gleichung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

heißt *linear homogene Differentialgleichung 1. Ordnung*.

Die Gleichung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

heißt *linear inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung* und  $g(x)$  heißt *Störfunktion*.

Das zugehörige Anfangswertproblem heißt *lineares Anfangswertproblem*.

### Algorithmus: Lösen von linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung

Für eine Gleichung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

ist die allgemeine Lösung

$$y = ce^{\int -f(x) dx}$$

$c$  wird dann durch Einsetzen eines Anfangswertes berechnet.

### Algorithmus: Variation der Konstanten

Gegeben: Differentialgleichung der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

1. Löse homogene Differentialgleichung mit

$$y = ce^{\int -f(x) dx}$$

2. Ersetze  $c$  durch  $c(x)$

3. Berechne  $y'$

4. Vergleiche  $y'$  mit ursprünglicher Störfunktion

5. Bestimme aus der Differentialgleichung die Lösung für  $c(x)$  (enthält neue Konstante!)

6. Einsetzen in

$$y = c(x) \cdot e^{\int -f(x) dx}$$

ergibt die allgemeine Lösung

### Beispiel: Variation der Konstanten

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x-2) \cdot y' = y + 2(x-2)^3$$

Umwandeln in allgemeine Darstellung:

$$(x-2) \cdot y' = y + 2(x-2)^3 \iff y' = \frac{y}{x-2} + 2(x-2)^2 \iff y' - \frac{1}{x-2} \cdot y = 2(x-2)^2$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} y'_h - \frac{1}{x-2} \cdot y_h &= 0 \\ \iff y'_h &= \frac{1}{x-2} \cdot y_h \\ \iff \frac{1}{y_h} dy_h &= \frac{1}{x-2} dx \\ \iff \int \frac{1}{y_h} dy_h &= \int \frac{1}{x-2} dx \\ \iff \ln(y_h) + c_2 &= \ln(x-2) + c_1 \\ \iff (y_h) &= e^{\ln(x-2)+c_1-c_2} \\ \iff y_h &= c(x-2) \end{aligned}$$

Lösen der Störfunktion:

$$\begin{aligned} y &= c(x) \cdot (x-2) \\ \implies y' &= c'(x)(x-2) + c(x) \\ y' - \frac{1}{x-2} \cdot y &= 2(x-2)^2 \\ \iff \underbrace{c'(x)(x-2) + c(x)}_{y'} - \frac{1}{x-2} \cdot \underbrace{c(x) \cdot (x-2)}_y &= 2(x-2)^2 \\ \iff c'(x)(x-2) &= 2(x-2)^2 \\ \iff c'(x) &= 2(x-2) \\ \iff \int 1 \, dc &= 2 \int x \, dx - 4 \int 1 \, dx \\ \iff c(x) &= x^2 - 4x + c_1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$y = (x^2 - 4x + c)(x-2) = c(x-2) + (x-4)(x-2)x$$

□

### Definition: Superpositionsprinzip (inhomogene lineare Differentialgleichungen)

Die Lösung einer *inhomogenen linearen Differentialgleichung* setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y_h$  und einer partikulären Lösung der *inhomogenen Differentialgleichung*  $y_p$

$$y = y_h + y_p$$

### Algorithmus: Ansatz vom Typ der rechten Seite

Man rät eine Lösung, indem man einen Ansatz für  $y_p$  vom Typ der Störfunktion  $g(x)$  wählt:

Störfunktion $g(x)$	Ansatz für $y_p$	
$c_0$	$\lambda_0$	polynomiell
$c_0 + c_1 x$	$\lambda_0 + \lambda_1 x$	
$c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$	$\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n$	
$c_0 e^{ax}$	$\lambda_0 e^{ax}$	exponentiell
$c_0 x e^{ax}$	$\lambda_0 x e^{ax}$	
$c_0 x^2 e^{ax}$	$\dots$	
$c_0 x^n e^{ax}$	$\lambda_0 x^n e^{ax}$	
$c_0 \sin(ax) + c_1 \cos(ax)$	$\lambda_0 \sin(ax) + \lambda_1 \cos(ax)$	trigonometrisch
$c_0 e^{ax} \cdot \sin(bx)$	$x \cdot (\lambda_1 \sin(bx) + \lambda_2 \cos(bx))$	
$c_0 e^{ax} \cdot \cos(bx)$	$x \cdot (\lambda_1 \sin(bx) + \lambda_2 \cos(bx))$	

*Bemerkungen:*

- Bei einer Summe von mehreren Funktionstypen sollten entsprechend viele partikuläre Teillösungen berechnet werden. Die Summe dieser Teillösungen entspricht dann insgesamt der partikulären Lösung  $y_p$ .
- Existiert für eine Störfunktion  $g(x) = c x^n e^{ax}$  ein Term  $\mu x^n e^{ax}$  bereits in der homogenen Lösung, wählt man als Ansatz für  $y_p = \lambda x^{n+1} e^{ax}$  (siehe Beispiel).

### Beispiel: Ansatz vom Typ der rechten Seite

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' - y = 9e^x$$

Lösen der homogenen Gleichung:

$$y'_h - y_h = 0 \implies y_h = ce^x$$

Mit der partikulären Lösung ( $y_p = c_0xe^x$ )

$$y_p = c_0xe^x \implies y'_p = c_0(e^x + xe^x)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} y' - y &= 9e^x \\ \iff c_0(e^x + xe^x) - c_0xe^x &= 9e^x \\ \iff c_0e^x(1 + x - x) &= 9e^x \\ \implies c_0 &= 9 \end{aligned}$$

Und schlussendlich:

$$y = y_h + y_p \implies y = ce^x + 9e^xx$$

□

### Algorithmus: Bernoulli-Differentialgleichung

Gegeben: Differentialgleichung der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

1. Substituiere

$$z = y^{1-\alpha} \iff y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

2. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$z' + (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z = g(x) \cdot (1-\alpha)$$

3. Lösen der linearen Differentialgleichung

4. Rücksubstitution in

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

ergibt die allgemeine Lösung

### Definition: Exakte Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$p(x, y) + q(x, y) \cdot y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(x, y) \, dx + q(x, y) \, dy = 0$$

mit

$$p_x = q_y \text{ (Integrabilitätsbedingung)}$$

heißt *exakte Differentialgleichung*.

### Algorithmus: Lösen von exakten Differentialgleichungen

Gegeben: Differentialgleichung der Form

$$p(x, y) + q(x, y) \cdot y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(x, y) \, dx + q(x, y) \, dy = 0$$

1. Prüfen der Integrabilitätsbedingung

$$p_x = q_y$$

2. Stammfunktion berechnen mit

$$\underbrace{F(x, y) = \int p \, dx}_{(*)} \quad \text{oder} \quad \underbrace{F(x, y) = \int q \, dy}_{(**)}$$

Konstante  $c$  ersetzen mit  $c(y)$  (\*) bzw.  $c(x)$  (\*\*)

3. Differentiation von  $F(x, y)$  nach  $y$  (\*) bzw. nach  $x$  (\*\*)

4. Es ergibt sich

$$c(y)' = f(y) \quad \Longrightarrow \quad c(y) = \int f(y) \, dy \quad (*)$$

bzw.

$$c(x)' = f(x) \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \int f(x) \, dx \quad (**)$$

5. Einsetzen ergibt die allgemeine Lösung

### Definition: Integrierender Faktor (Euler-Multiplikator)

$\mu(x, y)$  ist genau dann ein *integrierender Faktor* oder *Euler-Multiplikator* für eine Funktion

$$p(x, y) + q(x, y) \cdot y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(x, y) \, dx + q(x, y) \, dy = 0$$

wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial \mu p}{\partial y} = \frac{\partial \mu q}{\partial x}$$

erfüllt wird.



Gegeben: Differentialgleichung der Form

$$p(x, y) + q(x, y) \cdot y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(x, y) \, dx + q(x, y) \, dy = 0$$

bei der die *Integrabilitätsbedingung* nicht erfüllt wird.

Wir betrachten hier nur integrierende Faktoren, die nur von  $x$  bzw. nur von  $y$  abhängig sind.

1. Integrierender Faktor ist gegeben mit

$$\underbrace{\mu(x) = e^{\int m(x) \, dx}}_{(*)} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\mu(y) = e^{\int m(y) \, dy}}_{(**)}$$

(\*) Untersuchen, ob  $\mu$  nur von  $x$  abhängt:

$$m(x) = \frac{p_y - q_x}{q}$$

(\*\*) Untersuchen, ob  $\mu$  nur von  $y$  abhängt:

$$m(y) = \frac{q_x - p_y}{p}$$

2.  $m$  in entsprechende Formel für  $\mu$  einsetzen

3. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\mu p(x, y) + \mu q(x, y) \cdot y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu p(x, y) \, dx + \mu q(x, y) \, dy = 0$$

4. Prüfen der Integrabilitätsbedingung

5. Lösen der exakten Differentialgleichung

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$(3xy + 2y^2) + (x^2 + 2xy)y' = 0$$

Es gilt:

$$(3xy + 2y^2) + (x^2 + 2xy)y' = 0 \iff \underbrace{(3xy + 2y^2)}_{p(x,y)} dx + \underbrace{(x^2 + 2xy)}_{q(x,y)} dy = 0$$

Integrabilitätsbedingung:

$$p_y = 3x + 4y \neq 2x + 2y = q_x \quad \nexists$$

Integrierenden Faktor (Euler-Multiplikator)  $\mu(x) = e^{\int m(x) dx}$  bzw.  $\mu(y) = e^{\int m(y) dy}$  bestimmen:

- Untersuchung, ob  $\mu$  nur von  $y$  abhängt:

$$m = \frac{q_x - p_y}{p} = \frac{2x + 2y - (3x + 4y)}{3xy + 2y^2} = \frac{-x - 2y}{3xy + 2y^2} \quad \nexists$$

- Untersuchung, ob  $\mu$  nur von  $x$  abhängt:

$$m = \frac{p_y - q_x}{q} = \frac{3x + 4y - (2x + 2y)}{x^2 + 2xy} = \frac{x + 2y}{x^2 + 2xy} = \frac{x + 2y}{x(x + 2y)} = \frac{1}{x} \quad \checkmark$$

Damit erhalten wir den integrierenden Faktor mit:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = cx \quad (\text{sei } c = 1)$$

Einsetzen in die DGL:

$$\underbrace{(3x^2y + 2xy^2)}_{p(x,y)} dx + \underbrace{(x^3 + 2x^2y)}_{q(x,y)} dy = 0$$

Integrabilitätsbedingung:

$$p_y = 3x^2 + 4xy = 3x^2 + 4xy = q_x \quad \checkmark$$

Wir wissen:

$$\underbrace{F = \int q dy = x^3y + x^2y^2 + c(x)}_{F_y=q} \implies \underbrace{3x^2y + 2xy^2 + c'(x)}_{F_x=p} = 3x^2y + 2xy^2 \implies c(x) = c$$

Und insgesamt gilt damit:

$$F = x^3y + x^2y^2 + c$$

□

## 4.2 Lösungsverfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

### Definition: Charakteristische Gleichung

Die Gleichung

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

heißt die zur Differentialgleichung

$$y'' + ay' + b = 0$$

gehörende *charakteristische Gleichung*.

### Bonus: Superpositionsprinzip (homogene lineare Differentialgleichungen)

Sind  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  Lösungen einer *homogenen linearen Differentialgleichung*, so ist auch jede *Linearkombination*

$$\lambda \cdot y_1(x) + \mu \cdot y_2(x)$$

eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

### Algorithmus: Lösen von linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung

Für eine Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0$$

stelle man die charakteristische Gleichung auf, mit

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \quad \implies \quad \alpha = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Dann gilt mit  $D = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$  (Diskriminante):

- $D > 0$ :

$$y_h = \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x}$$

- $D = 0$ :

$$y_h = (\lambda_1 + \lambda_2 x) \cdot e^{\alpha x}$$

- $D < 0$ :

$$y_h = e^{\Re(\alpha)} \cdot (\lambda_1 \cos(\Im(\alpha)) + \lambda_2 \sin(\Im(\alpha))) = e^{-\frac{a}{2}} \cdot (\lambda_1 \cos(\sqrt{-D}) + \lambda_2 \sin(\sqrt{-D}))$$

*Bemerkung:*

- $\Re(\alpha)$  ist der Realteil der Nullstelle
- $\Im(\alpha)$  ist der Imaginärteil der Nullstelle

Gegeben: Differentialgleichungssystem der Form

$$y' = ay + bz \quad (1)$$

$$z' = dy + cz \quad (2)$$

1. Umstellen von (1) nach  $z$  ergibt

$$z = \frac{y' - ay}{b}$$

2. Differentiation von (1) und anschließendes Einsetzen von  $z$  ergibt

$$y'' - (a + c) \cdot y' + (ac - bd) \cdot y = 0$$

3. Lösen der homogenen Differentialgleichung mit der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^2 - (a + c)\alpha + (ac - bd) = 0$$

ergibt dann die allgemeine Lösung für  $y$

4. Einsetzen von  $y$  (und  $y'$ ) in

$$z = \frac{y' - ay}{b}$$

ergibt die allgemeine Lösung für  $z$

Lösen Sie folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}y' &= y + 2z \\ z' &= 2y + z - 2e^x\end{aligned}$$

Wir leiten  $y'$  ab:

$$\begin{aligned}y' &= y + 2z \iff z = \frac{y' - y}{2} \\ \iff y'' - y' - 2z' &= 0\end{aligned}$$

Einsetzen von  $z'$ :

$$y'' - y' - 2z' = 0 \iff y'' - y' - 4y - 2z + 4e^x = 0$$

Einsetzen von  $z$ :

$$\begin{aligned}y'' - y' - 4y - 2z + 4e^x &= 0 \\ \iff y'' - 2y' - 3y &= -4e^x\end{aligned}$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned}y'' - 2y' - 3y &= 0 \\ \implies \alpha^2 - 2\alpha - 3 &= 0 \\ \implies \alpha &= 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3} \\ \iff \alpha &= 1 \pm 2 \\ \implies y_h &= \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x}\end{aligned}$$

Berechnen der partikulären Lösung:

$$\begin{aligned}y_p = ce^x &\implies y'_p = ce^x \implies y''_p = ce^x \\ y''_p - 2y'_p - 3y_p &= -4e^x \\ \iff ce^x - 2ce^x - 3ce^x &= -4e^x \\ \iff -4ce^x &= -4e^x \\ \implies c &= 1\end{aligned}$$

Dann gilt insgesamt:

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x} + e^x$$

und

$$z = \frac{y' - y}{2} = \frac{(-\lambda_1 e^{-x} + 3\lambda_2 e^{3x} + e^x) - (\lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{3x} + e^x)}{2} = \lambda_2 e^{3x} - \lambda_1 e^{-x}$$

□

## Index

- $\varepsilon$ -Umgebung im  $\mathbb{R}^n$ , 3
- Abgeschlossene Mengen, 3
- Absoluter Fehler, 10
- Anfangswertproblem, 25
- Ansatz vom Typ der rechten Seite, 30
- Arbeitsintegral, 15
  
- Bernoulli-Differentialgleichung, 31
- Beschränktheit von Folgen, 3
- Beschränktheit von Mengen, 3
- Bolzano-Weierstrass für Folgen, 4
  
- Cauchy-Folge, 3
- Charakteristische Gleichung, 35
  
- Diskretes Modell des Wachstums mit Störung erster Ordnung, 23
- Diskretes Modell des Wachstums mit Störung zweiter Ordnung, 24
- Diskretes ungebremstes Wachstum, 22
- Diskretes ungebremstes Wachstum für Zeiteile, 22
- Divergenz, 12
- Dreifachintegral, 21
  
- Exakte Differentialgleichung, 31
- Extremster Anstieg, 9
  
- Fixpunkt, 6
- Fixpunktsatz von Banach, 6
- Flächeninhalt einer Grundfläche eines kartesischen krummlinigen Bereiches, 17
- Folge, 3
  
- Gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, 25
- Gleichmäßige Stetigkeit, 5
- Gradient, 6
- Grenzwert im  $\mathbb{R}^n$ , 4
  
- Hesse-Matrix im  $\mathbb{R}^2$ , 13
- Hesse-Matrix im  $\mathbb{R}^n$ , 13
- Häufungspunkt, 4
  
- Implizite Differentiation, 11
- Integral im  $\mathbb{R}^2$ , 17
  
- Integration in Polarkoordinaten, 19
- Integration über kartesische krummlinige Bereiche, 17
- Integrierender Faktor (Euler-Multiplikator), 32
  
- Jacobi-Matrix, 12
  
- Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter, 11
- Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern, 11
- Kontinuierliches Modell der Evolutionsgleichung, 22
- Kontinuierliches Modell des Wachstums mit Störung erster Ordnung, 23
- Kontinuierliches Modell des Wachstums mit Störung zweiter Ordnung, 24
- Konvergenz, 3
- Kurve, 10
  
- Lagrange-Funktion, 15
- Lineare Differentialgleichung, 27
- Lipschitz-Stetigkeit, 5
- Lokale Extrema mit Nebenbedingung im  $\mathbb{R}^2$ , 15
- Lokale Extrema ohne Nebenbedingungen im  $\mathbb{R}^2$ , 13
- Lösen von Differentialgleichungen mithilfe eines integrierenden Faktors, 32
- Lösen von exakten Differentialgleichungen, 32
- Lösen von linearen Differentialgleichungssystemen, 35
- Lösen von linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung, 27
- Lösen von linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung, 35
  
- Masse einer Grundfläche eines inhomogenen Gebietes, 19
- Metrik, 2
- Metrischer Raum, 2
  
- Nullstelle, 6
  
- Partielle Ableitung, 6

Potentialfunktion, 16	Superpositionsprinzip (inhomogene lineare Differentialgleichungen), 29
Quadratische Approximation, 12	
Quellen und Senken, 12	
Rechenregeln für Gradienten, 7	Tangente, 15
Rechnen mit Kugelkoordinaten, 21	Tangentenvektor, 15
Relativer Fehler, 10	Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$ , 7
Richtungsableitung, 8, 9	Tangentialebene im $\mathbb{R}^n$ , 8
Rotation, 12	Trennung der Variablen, 25
Satz von Schwarz, 12	
Schwerpunkt einer Grundfläche eines homogenen Gebietes, 19	Uneigentliche Integrale mithilfe von Polarkoordinaten, 20
Schwerpunktberechnung im $\mathbb{R}^3$ , 21	
Stationäre Lösung, 23	Variation der Konstanten, 28
Stetigkeit, 4	Vollständiges Differential, 10
Substitution, 26	Volumenberechnung im $\mathbb{R}^3$ , 21
Superpositionsprinzip (homogene lineare Differentialgleichungen), 35	
	Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit, 6
	Zusammenhang Metrik & Norm, 2

## Beispiele

Ansatz vom Typ der rechten Seite, 30  
Arbeitsintegral, 16

Gradient, 7

Integration über kartesische krummlinige  
Bereiche, 17

Integration über kartesische krummlinige  
Bereiche (Fortsetzung), 18

Lokale Extrema ohne Nebenbedingungen, 13

Lösen von Differentialgleichungen mithilfe  
eines integrierenden Faktors, 33

Lösen von linearen  
Differentialgleichungssystemen, 36

Metriken, 2

Relativer Fehler, 10  
Richtungsableitung, 9

Stetigkeit, 4

Substitution, 26

Tangentialebene, 8

Trennung der Variablen, 25

Uneigentliche Integrale mithilfe von  
Polarkoordinaten, 20

Uneigentliche Integrale mithilfe von  
Polarkoordinaten (Fortsetzung), 20

Variation der Konstanten, 28