https://matse.paddel.xyz/spicker

Analysis 2

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 11. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Definition: Metrik

Metriken definieren Abstände im $\mathbb{R}^n$.

Eine Funktion d auf einem Vektorraum V mit

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(\vec{x}, \vec{y})$$

heißt *Metrik*, falls gilt

- $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{y}, \vec{z}), \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel: Metriken

- Summen-Metrik:
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$
- euklid. Metrik:
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$
- Maximum-Metrik:
$$\max_{k \in [1,n]} |x_k - y_k|$$

Definition: Metrischer Raum

Ein Vektorraum und eine Metrik heißen zusammen *metrischer Raum*.

Bonus: Zusammenhang Metrik & Norm

Jeder Vektorraum mit einer Metrik d ist normierbar (d.h. dort gibt es eine Norm), falls

$$d(a\vec{x}, 0) = |a|\, d(\vec{x}, 0) \quad \text{und} \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{x} - \vec{y}, 0)$$

Eine Norm wird dann definiert gemäß

$$\|\vec{x}\| := d(\vec{x}, 0)$$

1.1 Mengen im $\mathbb{R}^n$

Definition: ε-Umgebung im $\mathbb{R}^n$

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$, dann heißt

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}$$

die ε-Umgebung von $\vec{x}_0$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|$.

Sei D eine Menge und $\|\cdot\|$ eine Norm. Dann

- …heißt $\vec{x}_0$ *innerer Punkt* von D, falls $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}_0) \in D$.
- …heißt D *offene Menge*, falls alle Punkte von D innere Punkte sind.

Definition: Abgeschlossene Mengen

Sei D eine Menge und $\|\cdot\|$ eine Norm. Dann

- …heißt $\vec{x}_0$ *Häufungspunkt* von D, falls $\forall \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ einen Punkt $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ enthält.
- …heißt D *abgeschlossene Menge*, falls sie alle Häufungspunkte von D enthält.

Definition: Beschränktheit von Mengen

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|\vec{x}\| < M \quad \forall \vec{x} \in D$$

Existiert eine solche Schranke nicht, so heißt die Menge *unbeschränkt*.

1.2 Folgen im $\mathbb{R}^n$

Definition: Folge

Seien $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$, dann heißt $(\vec{x}_n)$ *Folge* im $\mathbb{R}^n$.

Definition: Konvergenz

$(\vec{x}_n)$ heißt *konvergent* gegen den *Grenzwert* $\vec{x}$, falls $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$, so dass $\forall n > n_0(\varepsilon)$ gilt:

$$\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \varepsilon$$

Definition: Cauchy-Folge

$(\vec{x}_n)$ heißt *Cauchy-Folge* gegen $\vec{x}$, falls $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$, so dass $\forall n, m > n_0(\varepsilon)$ gilt:

$$\|\vec{x}_m - \vec{x}_n\| < \varepsilon$$

Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Definition: Beschränktheit von Folgen

Eine Folge heißt *beschränkt*, wenn die Menge aller Folgenglieder in jeder Komponente beschränkt ist.

Definition: Häufungspunkt

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt* von $(\vec{x_n})$, falls $\forall \varepsilon > 0$ unendlich viele $\vec{x_i}$ in der ε-Umgebung von $\vec{x}$ liegen.

Jede unendliche beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt besitzt.

Definition: Bolzano-Weierstrass für Folgen

Jede unendliche beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Jede unendliche beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

1.3 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Definition: Grenzwert im $\mathbb{R}^n$

Wir bezeichnen mit dem Grenzwert

$$g = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_n}} f(\vec{x})$$

den *Grenzwert* jeder gegen $\vec{x_0}$ konvergenten Folge $(\vec{x_n})$, falls dieser existiert und damit insbesondere eindeutig ist.

Definition: Stetigkeit

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$, $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \in U$, f heißt in $\vec{x_0}$ *stetig*, wenn

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) = f\left(\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \vec{x}\right),$$

wobei $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x_0})$ Grenzwert jeder gegen $\vec{x_0}$ konvergenten Folge $(\vec{x_n})$ ist.

Formal:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) := \lim_{n \to \infty} f(\vec{x_n})$$

f heißt *stetig in U*, wenn die Funktion für jedes $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \in U$ stetig ist.

Stetigkeit bedeutet somit insbesondere Stetigkeit in allen Komponenten.

Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ (unabhängig von $\vec{x}_0$) gibt, so dass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \epsilon, \ \forall \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$$

Gleichmäßige Stetigkeit ist wegen der Unabhängigkeit von $\vec{x}_0$ insbesondere Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich D.

Ist f beschränkt und abgeschlossen, so ist f gleichmäßig stetig.

Definition: Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Konstante L gibt (unabhängig von $\vec{x}_0$), so dass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \leq L\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

Ist in einer Norm $L < 1$, so heißt die Abbildung *Kontraktion*.

Ist eine Funktion f Lipschitz-stetige, so ist f auf ihrem Definitionsbereich D gleichmäßig stetig und in jedem Punkt stetig.

Bonus: Nullstelle

Ein Punkt $\vec{x}_0 \in D$ heißt *Nullstelle* einer Funktion f, falls $f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Definition: Fixpunkt

Ein Punkt $\vec{x^*} \in D$ heißt *Fixpunkt* einer Funktion φ, falls $\varphi(\vec{x^*}) = \vec{x}^*$.

Definition: Fixpunktsatz von Banach

Sei $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y})| \leq L\|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \text{und} \quad L < 1,$$

dann hat φ *genau einen Fixpunkt*.

1.3.1 Partielle Ableitungen

Definition: Partielle Ableitung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$, $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \in U$, f heißt in $\vec{x_0}$ *partiell differenzierbar* nach x_i, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

existiert. Der Wert $\frac{\partial f}{\partial x}$ heißt dann die *partielle Ableitung* von f nach x_i.

Eine Funktion heißt *(partiell) differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen existieren.

Bonus: Zusammenhang Differenzierbarkeit und Stetigkeit

f heißt *stetig partiell differenzierbar*, wenn alle partiellen Ableitungen in $\vec{x_i}$ stetige Funktionen (und insbesondere beschränkt) sind.

Ist f in U partiell differenzierbar und in $\vec{x_0} \in U$ *stetig partiell differenzierbar*, so ist f in $\vec{x_0}$ stetig.

Definition: Gradient

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $F : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \in U$, dann heißt

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

der *Gradient von f in* $\vec{x_0}$.

Bonus: Rechenregeln für Gradienten

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge, $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \nabla(f + g) &= \nabla(f) + \nabla(g) \\ \nabla(\alpha f) &= \alpha \cdot \nabla(f) \\ \nabla(fg) &= g \cdot \nabla(f) + f \cdot \nabla(g) \end{aligned}$$

Definition: Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$

Sei $z = f(x, y)$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion in zwei Unbekannten und $z_0 = f(x_0, y_0)$ ein fester Punkt.

Dann ist die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0, z_0) gegeben mit:

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \vec{v_1} + \mu \cdot \vec{v_2},$$

wobei $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ verschiedene Tangentenvektoren sind.

Algorithmus: Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$

Betrachten wir die Tangenten entlang der Koordinatenachsen, so erhalten wir

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

oder äquivalent

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Bonus: Tangentialebene im $\mathbb{R}^n$

Die Tangentialebene im $\mathbb{R}^n$ einer Funktion f in $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ an der Stelle $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ analog definiert durch

$$T(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + \nabla f(\vec{x} - \vec{x_0})$$

Definition: Richtungsableitung

Die Ableitung in Richtung des Vektors $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ heißt *Richtungsableitung* $D_{\vec{v}}(f)$ von f in Richtung von $\vec{v}$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v} := D_{\vec{v}}(f) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + hv_1, \dots, x_n + hv_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \end{aligned}$$

Algorithmus: Richtungsableitung

Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\| = 1$. Dann ist die Richtungsableitung von f im Punkt $\vec{x_0}$ in Richtung $\vec{v}$ gegeben mit

$$\frac{\partial f}{\partial v} = D_{\vec{v}}(f) = \nabla(f(\vec{x_0})) \cdot \vec{v}$$

Algorithmus: Extremster Anstieg

Insgesamt gilt, falls wir nur die Richtung (ohne Normierung) betrachten:

$$\vec{v} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad \text{ist die Richtung des steilsten Anstiegs von } f$$

$$\vec{v} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad \text{ist die Richtung des steilsten Abstiegs von } f$$

1.3.2 Das vollständige Differential

Definition: Vollständiges Differential

Unter dem *vollständigen Differential* der Funktion $z = f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) versteht man den Ausdruck

$$\mathrm{d}z = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y$$

Algorithmus: Absoluter Fehler

Es gilt für $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ der *absolute Fehler*:

$$\Delta z_{\max} \leq \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}| \cdot |\Delta x_i|$$

Algorithmus: Relativer Fehler

Es gilt für $z = f(x, y) = c \cdot x^a \cdot y^b$ anhand der möglichen relativen Eingabefehler $\frac{\Delta x}{x}$ und $\frac{\Delta y}{y}$ der *relative Fehler*:

$$\frac{\Delta z}{z} \leq a \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + b \cdot \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

Definition: Kurve

Seien $x(t)$ und $y(t)$ in t stetige Funktionen. Die Menge

$$\{(x, y) \mid x = x(t),\ y = y(t),\ t \in \mathbb{R}\}$$

heißt *Kurve*. Die Darstellung $t \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

heißt *Parameterdarstellung der Kurve*.

Definition: Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Sei $z = f(\vec{x}) = f(\vec{x}(t))$ und $\vec{x}(t)$ stetig in jeder Komponente x_i. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$$

Definition: Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

Sei $z = f(\vec{x}) = f(\vec{x}(u, v))$ und $\vec{x}(u, v)$ stetig in jeder Komponente x_i. Dann gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}v}$$

1.3.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Definition: Satz von Schwarz

Sind die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung einer Funktion stetige Funktionen, so darf die Reihenfolge der Differentiation beliebig vertauscht werden.

Definition: Divergenz

Wir bezeichnen die *Divergenz* einer Funktion f mit

$$\operatorname{div} f := \nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$$

Definition: Rotation

Wir bezeichnen die *Rotation* einer Funktion f mit

$$\operatorname{rot} f := \nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Bonus: Quellen und Senken

Die Punkte mit $\operatorname{div} f > 0$ heißen *Quellen* des Vektorfeldes, die mit $\operatorname{div} f < 0$ heißen *Senken*.

Gilt stets $\operatorname{div} f = 0$, so heißt die Funktion *quellenfrei*.

Gilt $\operatorname{rot} f = 0$, so heißt die Funktion *wirbelfrei*.

Definition: Jacobi-Matrix

Die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{x_n} \end{pmatrix}$$

heißt *Jacobi-Matrix* von f.

1.3.4 Taylorentwicklung für $f(x,y)$

Definition: Quadratische Approximation

Für $f(x,y)$ ist die *quadratische Approximation* gegeben mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2}{2} + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{f_{yy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2}{2} \end{aligned}$$

1.3.5 Extremwerte ohne Nebenbedingungen

Algorithmus: Lokale Extrema ohne Nebenbedingungen im $\mathbb{R}^2$

1. Berechne $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ und suche diejenigen Stellen (x_0,y_0) mit
$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$$
Diese Stellen sind die *Kandidaten* für lokale Extrema.
2. Berechne für jeden Kandidaten (x_0,y_0) die Werte $f_{xx}(x_0,y_0)$, $f_{xy}(x_0,y_0)$ und $f_{yy}(x_0,y_0)$ und daraus den Wert
$$d := f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - \left(f_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$$
3. Dann gilt:
$f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \ \wedge \ d > 0 \implies$ *lokales Minimum*
$f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \ \wedge \ d > 0 \implies$ *lokales Maximum*
$d < 0 \implies$ *Sattelpunkt*
$d = 0 \implies$ höhere Ableitung entscheidet

Definition: Hesse-Matrix im $\mathbb{R}^2$

Die *Hesse-Matrix* im $\mathbb{R}^2$ ist definiert mit

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Ist H *positiv definit*, so liegt ein Minimum vor, ist H *negativ definit* ein Maximum und bei *indefinitem* H ein Sattelpunkt.

Es gilt:

- H ist positiv definit $\iff$ $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \ \wedge \det H > 0$
- H ist negativ definit $\iff$ $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \ \wedge \det H > 0$
- H indefinit $\iff$ $\det H < 0$

Definition: Hesse-Matrix im $\mathbb{R}^n$

Die *Hesse-Matrix* im $\mathbb{R}^n$ ist definiert mit

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Ist H *positiv definit*, so liegt ein Minimum vor, ist H *negativ definit* ein Maximum und bei *indefinitem* H ein Sattelpunkt.

Es gilt:

- H ist positiv definit $\iff$ alle *Unterdeterminanten* (links oben beginnend) sind positiv
- H ist negativ definit $\iff$ alle *Unterdeterminanten* (links oben beginnend) haben wechselndes Vorzeichen (beginnend mit negativem Vorzeichen)
- H indefinit $\iff$ sonst

1.3.6 Extremwerte mit Nebenbedingungen

Definition: Lagrange-Funktion

Gegeben seien eine Funktion $f(x,y)$ und eine Nebenbedingung $g(x,y) = 0$. Dann ist die *Lagrange-Funktion* gegeben mit

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

Es gilt damit:

$$L_\lambda = g(x,y) \quad \wedge \quad g(x,y) = 0 \implies L(x,y,\lambda) = f(x,y)$$

Algorithmus: Lokale Extrema mit Nebenbedingung im $\mathbb{R}^2$

1. Berechne die Kandidaten wie in freien Optimierungen mit

$$\nabla(L) = \vec{0}$$

2. Aufstellen der geränderten Hesse-Matrix für die drei Unbekannten mit

$$H = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & g_x \\ L_{xy} & L_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dann gilt:

$$\det H > 0 \implies \textit{Maximum}$$
$$\det H < 0 \implies \textit{Minimum}$$
$$\det H = 0 \implies \text{keine Entscheidung möglich}$$

1.3.7 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale

Definition: Tangentenvektor

Der *Tangentenvektor* einer Kurve $\vec{x}(t)$ ist gegeben mit

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

Definition: Tangente

Die *Tangente* einer Kurve $\vec{x}(t)$ ist gegeben mit

$$T(t) = \vec{x}(t) + \lambda \vec{x}'(t)$$

2 Mehrdimensionale Integration

3 Wachstums- und Zerfallsprozesse

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Index

Beispiele