https://matse.paddel.xyz/spicker

Lineare Algebra 1

Patrick Gustav Blaneck

Letzte Änderung: 23. März 2021

Inhaltsverzeichnis

2 Analytische Geometrie 2
- 2.1 Skalarprodukt und Norm . . . 2
- 2.2 Geraden und Ebenen . . . 4
- 2.3 Die Determinante im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ . . . 9

3 Algebraische Strukturen 11
- 3.1 Gruppen . . . 11
- 3.2 Körper . . . 12
- 3.3 Vektorräume . . . 13
- 3.4 Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension . . . 14
- 3.5 Polynome . . . 16
- 3.6 Skalarprodukte, euklidische und unitäre Räume . . . 17
- 3.7 Das Verfahren von Gram-Schmidt . . . 18

2 Analytische Geometrie

2.1 Skalarprodukt und Norm

Definition: Skalarprodukt

Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt Skalarprodukt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

SP1 Symmetrie: $\forall a, b \in \mathbb{R}^n : \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
SP2 $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n : \langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$
SP3 $\forall a \in \mathbb{R}^n : \langle \alpha a, b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle = \langle a, \alpha b \rangle$
SP4 positive Definitheit: $\forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle a, a \rangle > 0 \wedge \langle 0, 0 \rangle = 0$

Definition: Euklidisches Skalarprodukt

Für a, b sei ihr *euklidisches Skalarprodukt* $\langle a, b \rangle$ definiert als

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Definition: Norm

Eine Norm $||a||$ hat folgende Eigenschaften:

N0 $||a|| \in \mathbb{R}$
N1 $||a|| \geq 0$
N2 $||a|| = 0 \iff a = 0$
N3 $\forall \lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda a|| = |\lambda| ||a||$
N4 Dreiecksungleichung $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$

Definition: Euklidische Norm

Einem Vektor a wird die *euklidische Norm* oder *Standardnorm* $||a||$ zugeordnet durch

$$||a|| := \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Bonus: Diskrete Minkowskische Ungleichung

Für $p \geq 1$ definiert man die ℓ_p-Norm durch

$$||a||_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- $p = 1$: *Betragssummennorm* oder *Einsernorm*
- $p = 2$: euklidische Norm
- $p = \infty$: *Maximumnorm* pder *ℓ_∞-Norm* ($||a||_\infty = \max\{|a_i|, \ldots, |a_n|\}$)

Definition: Orthogonalität

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt. Die Vektoren a und b stehen *orthogonal* zueinander bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$, Schreibweise $a \perp b$, wenn $\langle a, b \rangle = 0$.

Algorithmus: Orthogonalen Vektor finden

Wir betrachten den Vektor $a = (a_1, a_2)^T$. Für den senkrechten Vektor a' gilt: $(-a_2, a_1)^T$.

Bonus: Satz des Pythagoras

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \perp b$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt. Dann gilt:

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

Definition: Orthogonale Projektion

Seien a, b zwei Vektoren und $b \neq 0$. Dann gilt für die orthogonale Projektion p von a in Richtung b:

$$p_b(a) = \frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} b$$

Bonus: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$$

Definition: Winkel zwischen Vektoren

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Der Winkel zwischen a und b, geschrieben $\angle(a, b)$, wird definiert als

$$\angle(a, b) := \arccos \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$

Definition: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

das *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* von a und b.

2.2 Geraden und Ebenen

Definition: Gerade (Punkt-Richtungsgleichung)

Für einen *Ortsvektor* oder *Aufpunkt* p und einen *Richtungsvektor* $v \neq 0$ heißt

$$x = p + \alpha v$$

Punkt-Richtungsgleichung einer *Geraden* G.

Definition: Gerade (Normalform in der Ebene)

Sei G eine Gerade in der Ebene, p der Aufpunkt und v der Richtungsvektor von G.
Gilt $n \perp v$, dann heißt

$$\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle \iff n_1 x_1 + n_2 x_2 = c$$

Normalform von G.

Definition: Ebene (Punkt-Richtungsgleichung)

Seien $p, v, w \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$ und $w \neq 0$, und seien v und w nicht parallel. Dann heißt

$$x = p + \alpha v + \beta w$$

Punkt-Richtungsgleichung einer *Ebene* E.

Definition: Ebene (Normalform)

Sei E eine Ebene im Raum, p der Aufpunkt und v, w Richtungsvektoren von E.
Gilt $n \perp v \wedge n \perp w$, dann heißt

$$\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle \iff n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$$

Normalform von E.

Definition: Hessesche Normalform

Sei n ein Normalenvektor einer Gerade G in der Ebene oder einer Ebene E im Raum. Gilt $\|n\| = 1$, so heißt die damit gebildete Normalform *Hessesche Normalform*.

Algorithmus: Normalform $\rightarrow$ Hessesche Normalform (Geraden und Ebenen)

Man erhält die Hessesche Normalform aus einer beliebigen Normalform, indem man die Normalform durch $\|n\|$ teilt:

$$\frac{\langle x, n \rangle}{\|n\|} = \frac{\langle p, n \rangle}{\|n\|}$$

Damit liegt der Normalvektor bis auf das Vorzeichen eindeutig fest.

Algorithmus: Punkt-Richtungsform → Normalform (Geraden)

Sei eine Gerade G gegeben durch $x = p + \alpha v$ mit $v = (v_1, v_2)^T$. Einene Normalenvektor n findet man durch

$$n := \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}.$$

Durch Ausrechnen von $\langle p, n \rangle$ erhält man die rechte Seite der Normalform.

Algorithmus: Normalform → Punkt-Richtungsform (Geraden)

Liegt die Gerade in der Normalform $ax_1 + bx_2 = c$ vor, wird ein Richtungsvektor $v \perp n \iff v \perp (a, b)^T$ benötigt.

Man kann hier $v = (b, -a)^T$ wählen. Einen Aufpunkt p erhält man, indem man z.B. $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ setzt und aus der parameterlosen Form die andere Komponente errechnet.

Algorithmus: Punkt-Richtungsform → Normalform (Ebenen)

Um einen Normalenvektor n für die Richtungsvektoren v, w zu erhalten, kann man das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren berechnen.

Als Aufpunkt lässt sich jeder Punkt der Ebene verwenden, insbesondere der Vektor p aus der Punkt-Richtungsform.

Algorithmus: Normalform → Punkt-Richtungsform (Ebenen)

Aus der Normalgleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ liest man den Normalenvektor $n = (a, b, c)^T$ ab. Mindestens eine Komponente n_i von n ist ungleich 0. Wir vertauschen n_i mit einer anderen Komponente n_j und verändern das Vorzeichen von n_j im so erzeugten Vektor.

Weil es zwei Möglichkeiten gibt $i \neq j$ zu wählen, erhalten wir zwei Vektoren v und w, mit $v \perp n$, $w \perp n$ und $v \neq 0 \neq w$ und $v \nparallel w$.

Ein Aufpunkt lässt sich errechnen, indem man zwei der drei Koordinaten von $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ z.B. den Wert 0 zuweist und dann aus der Normalform den Wert der fehlenden Koordinate errechnet.

Sollte dies nicht möglich sein, wähle man ein anderes Koordinatenpaar. Es gibt immer zwei Koordinaten in x, mit denen obige Rechnung möglich ist.

Definition: Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen

Geraden:

- Zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ heißen *parallel*, wenn ihre Richtungsvektoren parallel sind.
- Zwei sich schneidende Geraden heißen *orthogonal*, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal sind.
- Seien G und G' zwei sich schneidende Geraden mit Richtungsvektoren v bzw. v'. Der Winkel zwischen den Geraden wird definiert durch

$$\angle(G, G') := \min\{\angle(v, v'), \angle(v', v)\} = \arccos\left(\frac{|\langle v, v'\rangle|}{\|v\|\|v'\|}\right)$$

Ebenen:

- Zwei Ebenen heißen *parallel*, wenn ihre Normalenvektoren parallel sind. Sie heißen *orthogonal*, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal sind.
- Sei E eine Ebene mit Normalenvektor n. Eine Gerade mit Richtungsvektoren v heißt *parallel* zur Ebene E, falls $v \perp n$.
- Seien n und n' Normalenvektoren der beiden Ebenen E und E'. Dann wird der Winkel $\angle(E, E')$ zwischen den beiden Ebenen erklärt durch

$$\angle(E, E') := \min\{\angle(n, n'), \angle(n', n)\} = \arccos\left(\frac{|\langle n, n'\rangle|}{\|n\|\|n'\|}\right)$$

Algorithmus: Schnittmengen zwischen Geraden und Ebenen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

1. Man sorgt eventuell durch Umrechnung dafür, dass das eine Objekt durch eine parameterlose (*Normalgleichung*) und das andere durch eine parameterbehaftete Gleichung (*Punkt-Richtungsgleichung*) beschrieben wird.
2. Man setzt die Parametergleichung in die parameterlose Gleichung ein und erhält Ausdrücke für den oder die Parameter.
3. Diese setzt man in die Parametergleichung ein und erhält eine Parametrisierung der Schnittmenge.

Bonus: Beispiel: Schnittmenge zwischen einer Gerade und einer Ebene

Gegeben seien $p = (1, -1, 2)^T$, $q = (1, 1, 1)^T$ und $n = (1, 2, 3)^T$. Gesucht wird der Schnittpunkt der Geraden G durch p in Richtung von n mit der Ebene E durch q senkrecht zu n. Man verwendet bei der Gleichsetzung für E eine Normal- und für G eine Parameterform, z.B.

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Komponentenweise liest man daraus die Gleichungen

$$x_1 = 1 + \alpha \qquad x_2 = -1 + 2\alpha \qquad x_3 = 2 + 3\alpha$$

ab. Eine Normalform von E lautet

$$\langle x, n \rangle = \langle q, n \rangle \iff x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6.$$

Einsetzen in die Normalgleichung liefert dann $\alpha = \frac{1}{14}$. Den Schnittpunkt s erhält man durch Ensetzen von α in die Parametergleichung:

$$s = p + \alpha n = \left(\frac{15}{14}, -\frac{12}{14}, \frac{31}{14} \right)^T.$$

$\square$

Bonus: Lotfußpunkt

Sei G eine Gerade mit Richtungsvektor v und $q \notin G$. Ein Punkt $q' \in G$ heißt *Lotfußpunkt*, wenn $l := q = q' \perp G$ gilt, l heißt *Lot*, und der Abstand d zwischen einem Punkt und einer Geraden in $\mathbb{R}^3$ wird definiert durch $d := \|l\|$.

Algorithmus: Abstandsberechnung (Punkte, Geraden und Hyperebenen)

Abstandsberechnungen zwischen Punkten, Geraden und Hyperebenen lassen sich auf die Berechnung des Lotfußpunktes zurückführen:

1. Bestimme die Richtung r des Lots.
2. Bestimme jeweils einen Punkt auf den beiden Objekten und (durch Differenzbildung) den Abstandsvektor a zwischen den beiden Punkten (Aufpunkte!).
3. Das Lot l ist die Projektion von a auf r. Der gesuchte Abstand ist $d = \|l\|$.

$$l = \frac{\langle a, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r \qquad d = \frac{|\langle a, r \rangle|}{\langle r, r \rangle} \|r\| = \frac{|\langle a, r \rangle|}{\|r\|}$$

Tipps:

- Ist eine Hyperebene beteiligt, dann wählt man r als Normalenvektor n der Hyperebene.
- Bei zwei Geraden in $\mathbb{R}^3$ muss r senkrecht auf beiden Geraden stehen.
- Bei nicht parallelen Geraden wählt man r als Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren.
- Der Abstand zweier paralleler Geraden lässt sich auf den Abstand eines Punkts zu einer Geraden zurückführen.

Algorithmus: Abstand Punkt-Gerade im $\mathbb{R}^3$

1. $a = l + r$, also $l = a - r$
2. r ist die Projektion von a auf den Richtungsvektor der Geraden v, also

$$r = \frac{\langle a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

3. Zusammen ergibt sich

$$l = a - \frac{\langle a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \qquad d = \|l\|$$

2.3 Die Determinante im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Definition: Determinante

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
n=1: $A = (a_1)$. Dann gilt

$$\det(A) := a_1$$

n=2: Sei $A = (a, b)$ mit den Spaltenvektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\det A = \det(a, b) := a_1 b_2 - b_1 a_2$$

Der Betrag der Determinanten entspricht genau der Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms.

n=3:

$$\det(a, b, c) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3$$

Definition: Spatprodukt

Für drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ nennt man

$$\langle a, b \times c \rangle \in \mathbb{R}$$

das *Spatprodukt* der drei Vektoren a, b, c.

Die Vektoren a, b, c bilden die Kanten eines Körpers im dreidimensionalen Raum, eines *Parallelipeds* oder *Spats*.

Es entspricht also der Betrag der Determinante dem Volumen des durch die drei Spaltenvektoren aufgespannten Spats.

Bonus: Determinante (Alternative)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, ϕ der Winkel zwischen a und b sowie ψ der Winkel zwischen den Vektoren $a \times b$ und c. Dann gilt:

$$\det(a, b, c) = \|a\| \|b\| \|c\| \sin \phi \cos \psi$$

Definition: Eigenschaften der Determinante

Die Determinante hat folgende Eigenschaften.

- **D1** $\det(a, b, c) = \det(c, a, b) = \det(b, c, a)$
- **D2** $\det(a, b, c) = -\det(b, a, c)$
- **D3** $\det(a, a, c) = 0$
- **D4** Für $\alpha \in R$ gilt $\det(\alpha a, b, c) = \alpha \det(a, b, c)$
- **D5** $\det(a, b, c + d) = \det(a, b, c) + \det(a, b, d)$
- **D6** $\det A = \det A^T$

Bonus: Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Notwendig und hinreichend dafür, dass das lineare Gleichungssystem LG eine eindeutige Lösung besitzt, ist die Bedingung

$$\det(a, b, c) \neq 0$$

3 Algebraische Strukturen

3.1 Gruppen

Definition: Gruppe

Sei M eine Menge, und $\circ : M \times M \to M$ eine *Verknüpfung*. $(M, \circ)$ heißt Gruppe, wenn gilt:

G1 (Assoziativität): Die Verknüpfung ist assoziativ, d.h. es gilt:

$$\forall x, y, z \in M : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

G2 (Neutralelement:) Es existiert ein neutrales Element $e \in M$ so dass

$$\forall x \in M : x \circ e = x$$

G3 (Inverses Element:) $\forall x \in M \exists x'$ mit

$$x \circ x' = e$$

- Gilt für eine Gruppe $G = (M, \circ)$, dass $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in M$, dann heißt G *abelsche Gruppe* oder *kommutative Gruppe*.

Auch muss implizit gelten:

- $x \circ y$ existiert $\forall x, y \in M$ und ist eindeutig festgelegt
- $x \circ y \in M$

Ist dies der Fall, ist die Abbildung $\circ : M \times M \to M$ *wohldefiniert*.

Definition: Untergruppe

Sei $G = (M, \circ)$ eine Gruppe und $M' \subseteq M$. Bildet $U = (M', \circ)$ eine Gruppe, so heißt U *Untergruppe* von G, Schreibweise $U \leq G$.

Für G und U wie oben gilt $U \leq G$ genau dann, wenn gilt:

1. $M' \neq \emptyset$
2. $\forall a, b \in M' : a \circ b \in M'$
3. $\forall a \in M' : a^{-1} \in M$

3.2 Körper

Definition: Körper

Das Tripel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ hat folgende Eigenschaften:

1. $(\mathbb{R}, +)$ bildet eine abelsche Gruppe.
2. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ bildet eine abelsche Gruppe.
3. Es gelten die *Distributivgesetze*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (x \cdot y) \text{ und } x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Jedes Tripel $(M, \oplus, \odot)$, das die obigen drei Bedingungen erfüllt, wird *Körper* genannt.

3.3 Vektorräume

Definition: Vektorraum

Sei K ein beliebiger Körper. Eine nicht-leere Menge V zusammen mit den beiden Abbildungen

$$\oplus : V \times V \to V, \quad (x, y) \to x \oplus y \in V \text{ und } \quad \odot : K \times V \to V, \quad (\lambda, x) \to \lambda \odot x \in V$$

heißt *Vektorraum über* K oder K*-Vektorraum*, wenn folgende Axiome gelten:

- $(V, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe.
- $\forall \lambda, \mu \in K$ und $x \in V$ gilt $\lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda\mu) \odot x$, wobei mit $\lambda\mu$ die Multiplikation aus K gemeint ist.
- $\forall x \in V$ gilt $1 \odot x = x$ (1 ist das neutrale Element der Multiplikation aus K)
- $\forall \lambda \in K, x, y \in V$ gilt: $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda x) \oplus (\lambda \odot y)$.
- $\forall \lambda, \mu \in K, x \in V$ gilt $(\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot x)$

Definition: Untervektorraum

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum* oder *Unterraum* von V, wenn $U \neq \emptyset$ und $\forall x, y \in U$ und alle $\lambda \in K$ gilt:

$$x \oplus y \in U,$$
$$\lambda \odot x \in U.$$

3.4 Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Seien $v_1, \dots, v_r \in V$ Vektoren eines K-Vektorraums V.

Definition: Linearkombination

Lässt sich $v \in V$ als Summe dieser Vektoren mit Vorfaktoren darstellen,

$$v = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k$$

heißt v *Linearkombination* von $v_1, \dots, v_r$.

Definition: Lineare Hülle

Die Menge

$$L(v_1, \dots, v_r) := \left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k \mid \lambda_i \in K \right\} \subseteq V$$

aller Linearkombinationen heißt *Lineare Hülle* von $v_1, \dots, v_r$.

Definition: Erzeugendensystem

Sei V ein K-Vektorraum und $(v_1, \dots, v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren in V. Gilt $L(v_1, \dots, v_n) = V$, nennt man $(v_1, \dots, v_n)$ ein *Erzeugendensystem* von V.

V heißt *endlich erzeugt*, wenn es endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_r$ gibt, so dass $L(v_1, \dots, v_r) = V$, ansonsten *nicht endlich erzeugt*.

Definition: Lineare Unabhängigkeit

Sei V ein K-Vektorraum. Ein r-Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren in V heißt *linear unabhängig*, wenn aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$ stets folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$ gilt.

Außerdem gilt:

- Keiner der Vektoren ist eine Linearkombination der übrigen.
- Keiner der Vektoren ist der Nullvektor.

Tipp: Ein r-Tupel $(v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren in V ist *linear unabhängig* genau dann, wenn $\det(v_1, \dots, v_r) \neq 0$.

Bonus: Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Wir bilden zu den Funktionen $f_1, \dots, f_n$ für paarweise verschiedene $x_1, \dots, x_n$ die n Vektoren

$$(f_1(x_1), \dots, f_1(x_n))^T, \dots, (f_n(x_1), \dots, f_n(x_n))^T \in \mathbb{K}^n.$$

Sind diese Vektoren linear unabhängig, dann sind die Funktionen $f_1, \dots, f_n$ selbst linear unabhängig.

Hinweis: Die Rückrichtung gilt **nicht**!

Definition: Basis

Sei $v \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Das n-Tupel $B = (v_1, \ldots, v_n)$ heißt *Basis* oder *minimales Erzeugendensystem* von V, wenn B linear unabhängig ist und wenn gilt $L(B) = V$. Weiter sei $\emptyset$ die Basis des Nullvektorraums $\{0\}$.

Bonus: Koordinaten eines Vektors

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $v \in V$ mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \ldots_n v_n, \lambda_i, \ldots, \lambda_n \in K$$

Das n-Tupel der obigen Vorfaktoren $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ nennt man *Koordinaten* des Vektors v bzgl. der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.

Definition: Basisergänzungssatz

Sei V ein K-Vektorraum und seien

$$v_1, \ldots, v_r, \quad w_1, \ldots w_s \in V$$

Ist $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig und ist

$$L(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots w_s) = V,$$

dann kann man $(v_1, \ldots, v_r)$ durch evtl. Hinzunahme geeigneter Vektoren aus $\{w_1, \ldots w_s\}$ zu einer Basis von V ergänzen.

Definition: Austauschlemma

Sind $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots w_n)$ Basen eines K-Vektorraums V, dann gibt es zu jedem v_i ein w_j, so dass aus $(v_1, \ldots, v_n)$ wieder eine Basis entsteht, wenn man in ihr v_i durch w_j ersetzt.

Definition: Dimension

Besitzt ein Vektorraum $v \neq \{0\}$ eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$, so definieren wir die *Dimension* von V als $\dim(V) := n$. Besitzt V keine endliche Basis, dann setzt man $\dim(V) := \infty$. Weiter sei $\dim(\{0\}) := 0$.

3.5 Polynome

Definition: Polynom

Ein *Polynom* oder ganzrationale Funktion $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist eine Funktion der Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^x + \ldots + a_n x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

.

Bonus: Polynome als $\mathbb{K}$-Vektorraum

Sei $+$ die Addition von Funktionen und $\cdot$ die Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar. Dann bildet $(P_n, +, \cdot)$ einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Bonus: Basis des Vektorraums P_n

Die Funktionen $1, x, x^2, \ldots, x^n$ bilden eine Basis des Vektorraums P_n und es gilt

$$\dim(P_n) = n + 1.$$

Diese Basis wird auch *Monombasis* genannt.

Definition: Interpolationspolynom

Gegeben seien die $n+1$-Punkte $(x_k, y_k), 0 \leq k \leq n$ mit *paarweise verschiedenen* x_k. Dann existiert genau ein $p_n \in P_n$ mit $y_k = p_n(x_k) \forall 0 \leq k \leq n$. Dies ist das sogenannte *Interpolationspolynom*.

Bonus: Beispiel: Interpolationspolynom

Wir betrachten die drei Punkte $(-2, 1)$, $(-1, -1)$ und $(1, 1)$.

Eine interpolierende Parabel p_2 wird durch diese Punkte festgelegt.

Die allgemeine Form des Polynoms ist $p_2(x) = ax^2 + bx + c$. Einsetzen der drei Punkte ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} (1,1): \quad & 1 = a + b + c \\ (-1,-1): \quad & -1 = a - b + c \\ (-2,1): \quad & 1 = 4a - 2b + c \end{aligned}$$

und führt damit zu einem linearen Gleichungssystem.

Man errechnet als Lösung $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$ und erhält

$$p_2(x) = x^2 + x - 1.$$

$\square$

Bonus: Beispiel: Lineare Unabhängigkeit von Polynomen

Die Polynome

$$p_1(x) = (1-x)^2 \qquad p_2(x) = (1-x)x \qquad p_3(x) = x^2$$

sollen auf lineare Unabhängigkeit geprüft werden. Wir berechnen zunächst die Koeffizientenvektoren.

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= (1-x)^2 & &= 1 - 2x + 1x^2 & &\implies a_{0_1} = 1,\ a_{1_1} = -2,\ a_{2_1} = 1 \\
p_2(x) &= (1-x)x & &= 0 + 1x - x^2 & &\implies a_{0_2} = 0,\ a_{1_2} = 1,\ a_{2_2} = -1 \\
p_3(x) &= x^2 & & & &\implies a_{0_3} = 0,\ a_{1_3} = 0,\ a_{2_3} = 1
\end{aligned}$$

$\det(a_0, a_1, a_2) \neq 0$ und damit sind die Polynome linear unabhängig. □

3.6 Skalarprodukte, euklidische und unitäre Räume

Definition: Euklidische und unitäre Vektorräume

Ein reeller Vektorraum gemeinsam mit einem Skalarprodukt heißt *euklidischer Vektorraum*, ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt *unitärer Vektorraum*.

Definition: Orthogonale Projektion

Sei U ein endlich erzeugter Untervektorraum von V und $a \in V$. Ein Vektor $p_u(a) \in U$ heißt *orthogonale Projektion* von a auf U, wenn gilt:

$$a - p_U(a) \perp u \quad \forall u \in U.$$

Definition: Orthogonales Komplement

Für $M \subseteq V$ heißt

$$M^\perp := \{v \in V \mid v \perp u \quad \forall u \in M\}$$

das *orthogonale Komplement* von M.

Definition: Orthogonalsystem, Orthonormalsystem, Orthogonalbasis, Orthonormalbasis

Sei $B = (v_1, \ldots, v_m)$ ein m-Tupel mit Vektoren in $V \setminus \{0\}$.

1. B heißt *Orthogonalsystem* in V, falls alle v_i paarweise orthogonal sind.
2. Ein Orthogonalsystem, für das zusätzlich $\forall v_i \in B : \|v_i\| = 1$ gilt, heißt *Orthonormalsystem*.
3. Ein Orthogonalsystem, das eine Basis von V bildet, heißt *Orthogonalbasis* von V.
4. Ein Orthonormalsystem, das eine Basis von V bildet, heißt *Orthonormalbasis* von V.

3.7 Das Verfahren von Gram-Schmidt

Definition: Gram-Schmidt-Verfahren

Sei V ein unitärer Vektorraum und $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig. Seien

$$\begin{aligned} w_1 &:= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ r_{k+1} &:= v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{i+1}, w_i \rangle \, w_i \\ w_{k+1} &:= \frac{r_{k+1}}{\|r_{k+1}\|} \end{aligned}$$

Dann bilden $(w_1, \dots, w_m)$ eine Orthonormalbasis von $L(v_1, \dots, v_m)$.

Bonus: Beispiel: Gram-Schmidt-Verfahren (allgemein)

Wir betrachten eine beliebige Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$. Wir gehen so vor:

1. Man wählt einfach $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$, weil dann offenbar $\|w_1\| = 1$ gilt.
2. Wir konstruieren einen Vektor r_2, der senkrecht auf w_1 steht. Dazu projizieren wir v_2 auf den von w_1 erzeugen Unterraum $L(w_1)$ und setzen $r_2 := v_2 - p_{L(v_1)}(v_2)$. Dann gilt nach Definition der orthogonalen Projektion $v_1 \perp r_2$. Man erhält

   $$r_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle \, w_1.$$

   Normierung von r_2 liefert w_2.
3. Der Vektor $r_3 := v_3 - p_{L(v_1, v_2)}(v_3)$ steht nach Konstruktion senkrecht auf $L(v_1, v_2)$ und daher gilt insbesonere $r_3 \perp v_1$ und $r_3 \perp v_2$. Weil (w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von $L(v_1, v_2)$ bilden, gilt:

   $$r_3 = v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle \, w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle \, w_2$$

   Normierung von r_3 ergibt w_3.