Testes de Permutação

Wesley Furriel ra:61493
Prof. Dr. Josmar Mazucheli

UEM

wesley_furriel@hotmail.com

3 de outubro de 2017

Pacotes utilizados e descrição dos bancos

- **Rstudio 1.0.136**
  - coin, lmPerm, tidyverse, gridExtra, utils
- **Banco de dados**
  - Retenção de radioatividade em ferro:
    - Ano: ?
    - Número de observações: 108
    - Número de variáveis: 3
    - Fonte:https://www.stat.berkeley.edu/ s133/Aov1a.html
- **Aplicações**
  - aplicação I teste t para médias
  - aplicação II regressão linear
  - aplicação III ANOVA

Noção geral de teste de hipótese

Todo teste estatístico em que verificamos H_0 e H_1 a partir de uma estatística, detêm por trás uma distribuição de probabilidade, na qual será verificado o quão provável é o valor calculado na estatística, quando comparado a uma distribuição de probabilidade.

- **Erro do tipo I:** decisão de rejeitar H_0 quando de fato H_0 é verdadeira.
- **Erro do tipo II:** decisão de não rejeitar H_0 quando de fato H_0 é falsa.
- **Nível de significância do teste:** usualmente representado pela letra grega α, ou por valor.p, sendo a probabilidade de rejeitar H_0. Um α de 0,05 indica que você assume uma chance de 5% de que se está errado ao rejeitar a hipótese nula.

Noção geral de teste de hipótese

Tendo em vista tais aspectos, é preciso obter uma estatística de teste para ser comparada com os possíveis valores da distribuição. Dessa forma, uma estatística de teste é uma função dos dados, cujo valor determina o resultado do teste. A função é geralmente denotada por T = T (X), em que X representa os dados, por exemplo, $T = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ em um problema de amostra única, ou $T = T(X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n)$ em um problema de duas amostras. Após ser avaliado para os dados da amostra x, o resultado é chamado de estatística de teste, t = T (x). A hipótese nula normalmente é rejeitada quando o valor.p é P(T>t).

Princípio da permutação

Tabela: Dados para exemplo (Chihara, Hesterberg, 2011)

A			B		
30	25	18	20	21	22

Tomando como base a hipótese nula, sendo o interesse verificar distinções entre os grupos A e B apresentados na tabela 1 é razoável afirmar que, se não existe diferença entre os grupos, não importa a forma como os dados estarão distribuições entre eles, ou seja, não importa a maneira com que os valores observados se distribuam entre os grupos, suas médias sempre serão iguais ou próximas. Isto configura H_0, a hipótese de que as médias são iguais, pois os grupos vem de uma mesma população. Contudo, se os grupos de fato diferem, iremos constatar que existe uma probabilidade pequena de que a diferença entre às médias dos grupos A e B sejam maiores do que a observada

Princípio da permutação

Assim, no teste de permutação, se duas estatísticas de teste T_1 e T_2 estiverem relacionadas, $T_1(X*) = f(T_2(X*))$ em que X* é qualquer reamostra da permutação do dado original x, eles produzem exatamente o mesmos valores de P, tanto para as versão exata quanto para a reamostragem dos testes de permutação. Para simplificar, consideramos apenas uma prova unilateral. Sendo X* qualquer reamostra de permutação.

$$\begin{aligned} p_1 =& P(T_2(X*) \geq T_2(x)) = P(f(T_2(X)) \geq f(T_2(x))) \\ =& P(T_1(X*) \geq T_1(x) \end{aligned}$$

Além disso, na implementação da amostra, exatamente as mesmas reamostragens de permutação tem $T_2(X) \geq T_2(x)$ como $T_1(X) \geq T_1(x)$, então contando o número ou a proporção de amostras que excedem as estatísticas observadas temos os mesmos resultados.

Apesar de interessante, a ideia de permutação exige um considerável esforço computacional, principalmente se desejamos calcular o valor de probabilidade exato.

```
n <- tamanho(dados)
aux1 <- teste t t0
aux2 <- anova estatistica F0
aux3 <- Reg linear estatistica t0
B <- 10.000
Repet(1:B) {
amostraPerm <- amostra(dados:resposta, n)
permu1 <- teste.t(amostraPerm):t0
permu2 <- ANOVA(amostraPerm):F0
permu3 <- Reg.Linear(amostraPerm):t0}
(sum(|permu1| >= aux1)+1)/(N+1)
(sum(permu2 >= aux2)+1)/(N+1)
(sum(|permu3| >= aux3)+1)/(N+1)
```

Banco de dados utilizado

Tabela: Dados sobre retenção de radiação em ferro

Fe2+			Fe3+		
Alto	Médio	Baixo	Alta	Médio	Baixo
0.71	2.20	2.25	2.20	4.04	2.71
1.66	2.93	3.93	2.69	4.16	5.43
2.01	3.08	5.08	3.54	4.42	6.38
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
8.24	18.59	29.13	12.45	26.39	22.25

É possível obter mais de 1.259.712 combinações diferentes dos dados, sem considerar as interações entre os fatores.

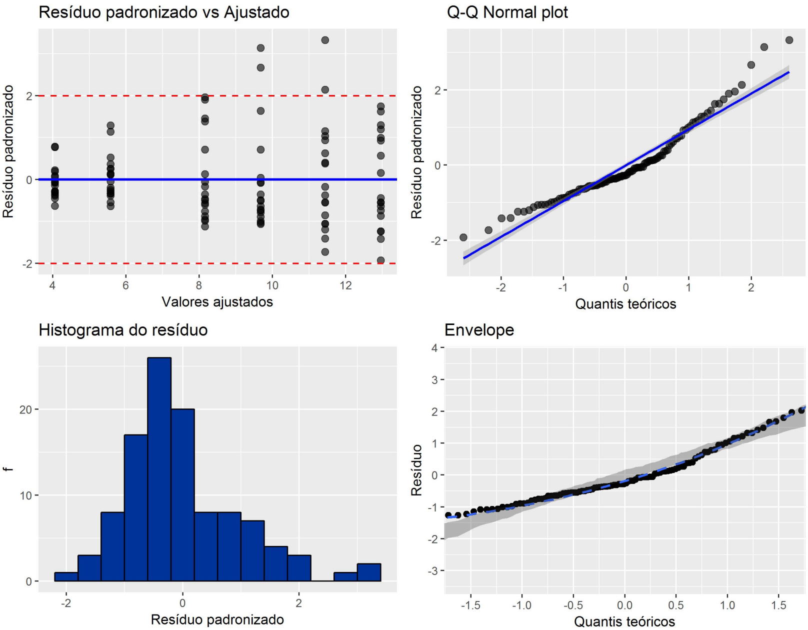


Figura: Diagnóstico dos resíduos

Permutação: aplicação I teste t para médias

Algumas considerações sobre o teste t

$$\bar{D} = \overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Consideraremos que as variâncias são iguais isto é, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Podemos usar a estatística a seguir para realizar o teste de hipótese

$$t_0 = \frac{\bar{D}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}$$

em que $t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}$ é o percentil de ordem $1-\alpha/2$ da distribuição t com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade.

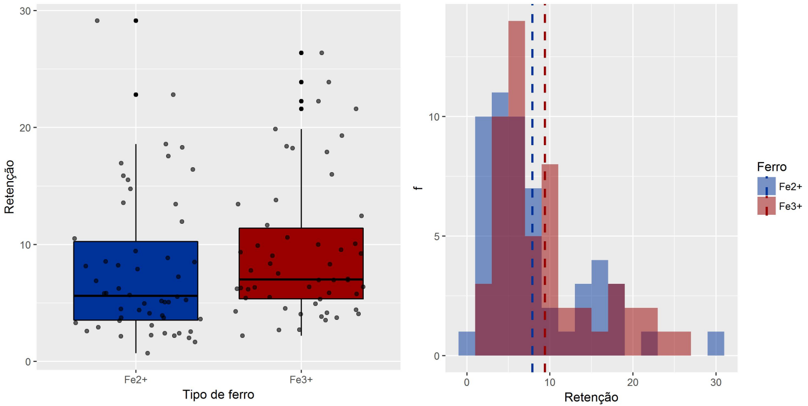


Figura: Comparação gráfica das médias

Hipóteses a serem testadas

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Tabela: Teste t para média e permutação

Comparação	$\bar{D}$	t_0	Clássico	Permutação
$Fe2+ = Fe3+$ $Fe2+ \neq Fe3+$	1.52	-1.295843	0.1978	0.2039

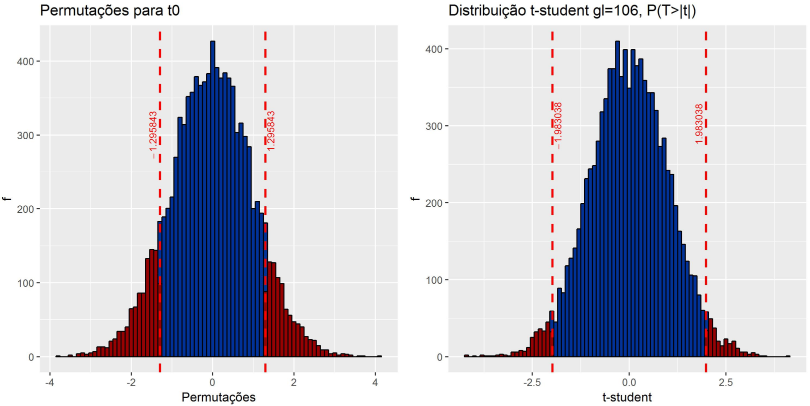


Figura: Gráficos da distribuição t-student e permutações

Permutação: aplicação II regressão linear

De modo geral sob H_0 temos que a estatística de teste é dada por

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_j}{EP(\hat{\beta_j})} \tag{1}$$

A hipótese nula $\beta_j = 0$ é rejeitada se

$$\mid t_0 \mid > t_{\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-p-1\right)}. \tag{2}$$

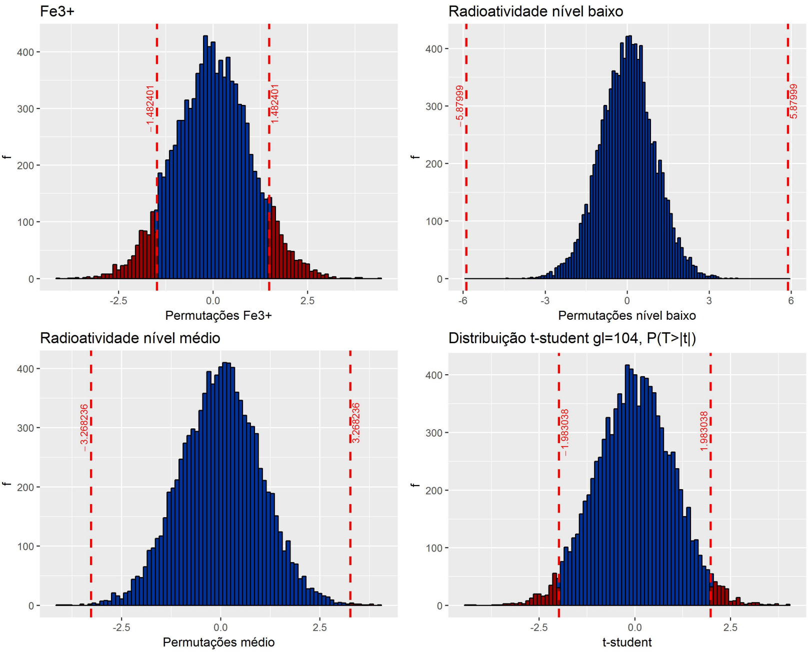
Considerando o p-valor, dado por meio da expressão $2 * P\left(t_{n-p-1} > \mid t_0 \mid\right)$, rejeitamos H_0 se valor.p $< \alpha$.

Hipóteses a serem testadas

$$H_0 : \beta_j = 0$$
$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

Tabela: Resultados da permutação e regressão linear múltipla

Variáveis	Estimativa	EP	$\lvert t_0 \rvert$	Clássico	Permutação
$Fe3+$	1.519	1.024	1.482	0.141257	0.1505849
Nível baixo	7.377	1.255	5.880	5.02e-08	9.999e-05
Nível médio	4.100	1.255	3.268	0.001467	0.00259974


Fe3+
Radioatividade nível baixo
Radioatividade nível médio
Distribuição t-student gl=104, P(T>|t|)
Permutações Fe3+
Permutações nível baixo
Permutações médio
t-student
-1.482401
1.482401
-5.87999
5.87999
-3.268236
3.268236
-1.983038
1.983038

Permutação: aplicação III ANOVA

Sendo SQR e SQE são independentes. Logo, concluí-se que sob H_0

$$F_0 = \frac{\dfrac{SQR}{p}}{\dfrac{SQE}{n-p-1}} = \frac{QMR}{QME} \;\sim\; F_{(p;\, n-p-1)}. \tag{3}$$

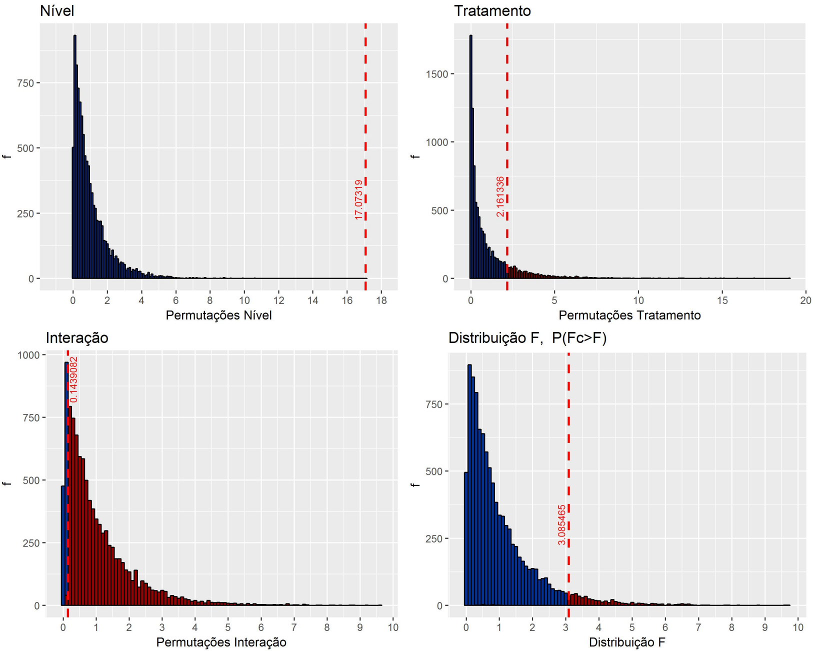
Partindo disto, rejeita-se H_0 se $F_0 > F_{(1-\alpha;\, p;\, n-p-1)}$ e se o $valor.p = P[F_{p;n-p-1} > F_0] < \alpha$, em que α é o nível de significância nominal geralmente considerado 5%.

Hipóteses a serem testadas

$$H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$$
$$H_1 : \alpha_k \neq 0, \quad para\ algum \quad i = 1, ..., k$$

Tabela: Resultados da permutação e ANOVA

Variáveis	F_0	Clássico	Permutação
Tipo de ferro	2.161	0.1455	0.1481
Nível radioatividade	17.073	4.02e-07	9.999e-05
Interação	0.144	0.8666	0.8595


Nível
f
Permutações Nível
17.07319
Tratamento
Permutações Tratamento
2.161336
Interação
Permutações Interação
0.1439082
Distribuição F, P(Fc>F)
Distribuição F
3.085465

Referências

L.M. Chihara, T.C. Hesterberg. Mathematical statistics with resampling and R, 2011 by John Wiley and Sons, Inc

.

ANOVA - Modelo com Efeitos Fixos e Regressão Linear Múltipla disponível em: http://www.portalaction.com.br//

.

Banco de dados disponível em:
https://www.stat.berkeley.edu/ s133/Aov1a.html