Report 5

题目

[第5题]：对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在（x, y）平面上投影的几率分布函数。并由此验证Marsaglia抽样方法 $x = 2u\sqrt{1-r^2}$，$y = 2v\sqrt{1-r^2}$，$z = 1-2r^2$ 确为球面上均匀分布的随机抽样。

算法及公式

① 平面投影分布

$x = \sin\theta\cos\varphi$

$y = \sin\theta\sin\varphi$

$z = \cos\theta$

$p(\theta,\varphi) = \frac{\sin\theta}{4\pi}$

$p(\theta,\varphi)d\theta d\varphi = \frac{\sin\theta}{4\pi}d\theta d\varphi = g(x,y)dxdy$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = \sin\theta\cos\theta$$

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi|\cos\theta|} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

② Marsaglia抽样方法 平面分布

$p(x,y)dxdy = f(u,v)dudv$

$$p(x,y) = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2\sqrt{1-r^2}-\frac{2u^2}{\sqrt{1-r^2}} & -\frac{2uv}{\sqrt{1-r^2}} \\ -\frac{2uv}{\sqrt{1-r^2}} & 2\sqrt{1-r^2}-\frac{2v^2}{\sqrt{1-r^2}} \end{vmatrix} = 4(1-2r^2)$$

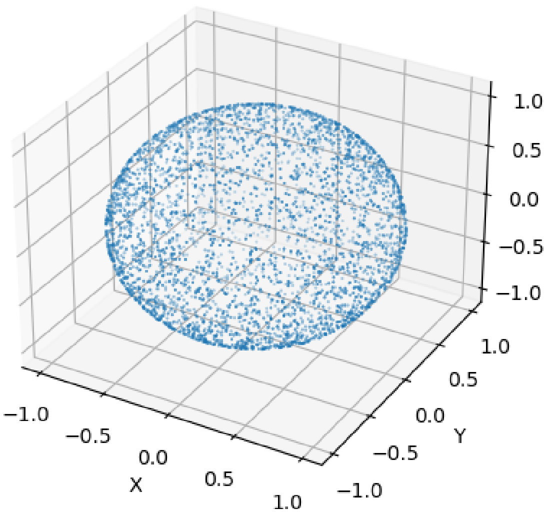
$f(u,v)\cdot\pi = 1 \Rightarrow f(u,v) = \frac{1}{\pi}$

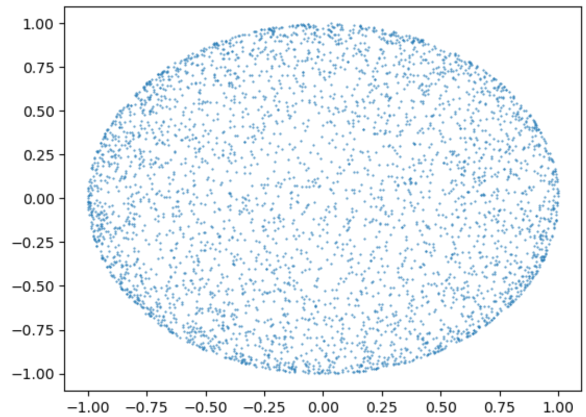
$$p(x,y) = \frac{1}{4\pi|1-2r^2|}\times 2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

经计算，Marsaglia抽样方法得到的平面投影分布和球面均匀点的一直，由此可验证Marsaglia抽样方法确为球面上均匀分布的随机抽样。

结果及讨论

下图分别为3D球面和二维投影，可以看出球面分布均匀，二维投影也显示出中间稀疏，外边紧密的特点。





总结

本实验使用Marsaglia抽样方法生成三维球面上的均匀分布点 ，避免了使用三角函数，加快了计算。并且通过投影分布的计算，验证了其正确性。