Report1

题目

用Schrage方法编写随机数子程序，用指定间隔（非连续 l >1）两个随机数作为点的坐标值绘出若干点的平面分布图。再用<xk>测试均匀性（取不同量级的N值，讨论偏差与N的关系）、C(l) 测试其2维独立性（总点数N > 10^7）。

算法及公式

Schrage生成随机数

$$I_{n+1} = \begin{cases} a(I_n \mod q) - r\lfloor I_n/q \rfloor, & \text{if } \geq 0 \\ a(I_n \mod q) - r\lfloor I_n/q \rfloor + m, & \text{if } otherwise \end{cases}$$

a = 16807, m = 2147483647, q= 127773, r = 2836

- Seed - 时间

  I[0]=year + 70*(month + 12*(day + 31*(hour + 23*(minute + 59*second))))

k阶矩计算

$$\left\langle x^k \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^k \Rightarrow \int_0^1 x^k p(x)\,dx = \frac{1}{k+1}$$

$$\left| \left\langle x^k \right\rangle - \frac{1}{k+1} \right| \approx O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

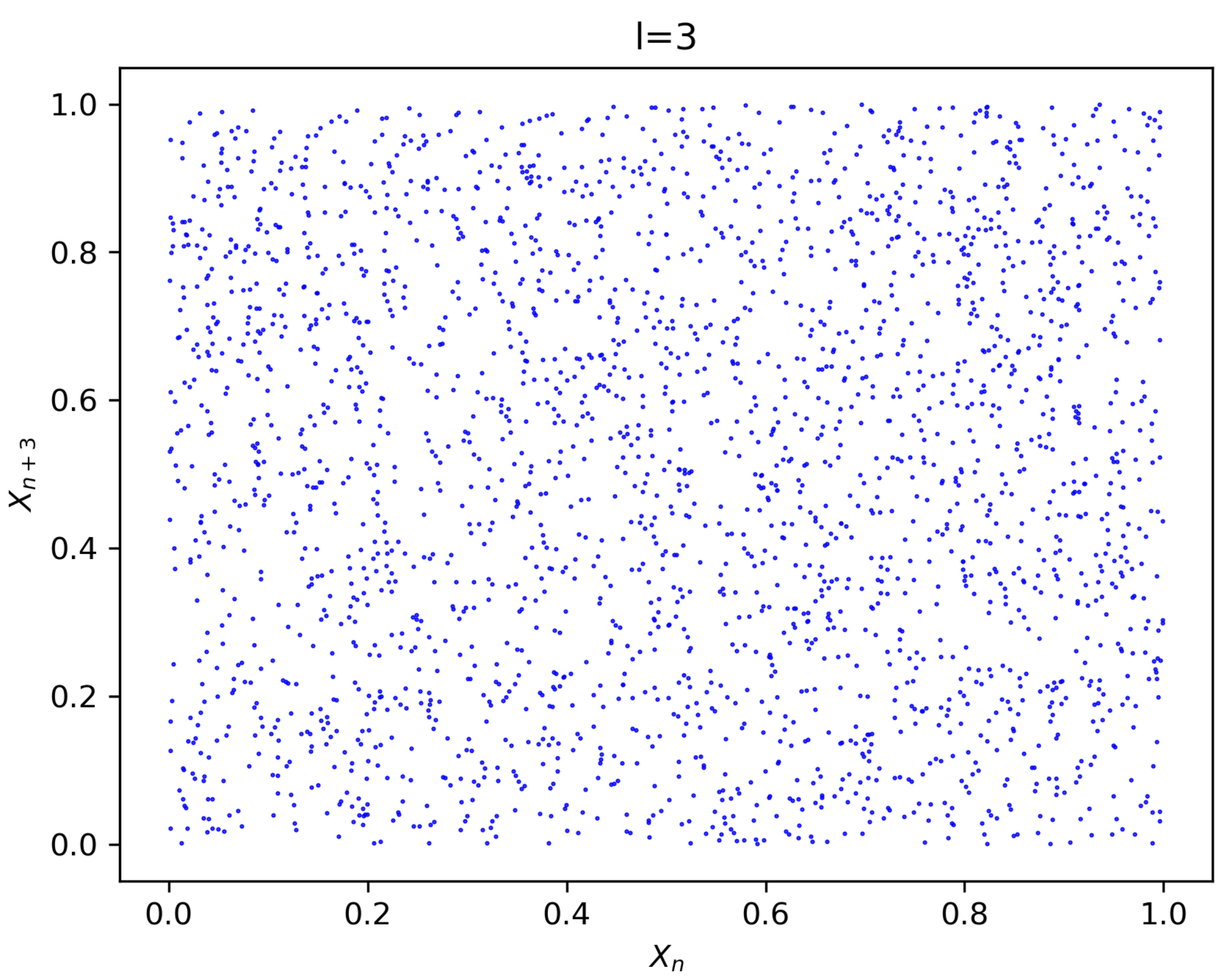
关联函数

$$C(l)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i x_{i+l}-\langle x\rangle^2 \Rightarrow \int_0^1\int_0^1 xyp(x,y)\,dxdy-\frac{1}{4}=0$$

$$|C(l)|\approx O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

结果及讨论

间隔l=3的两个随机数的平面分布图

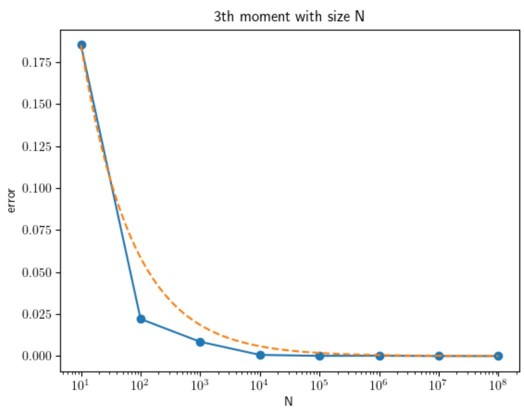


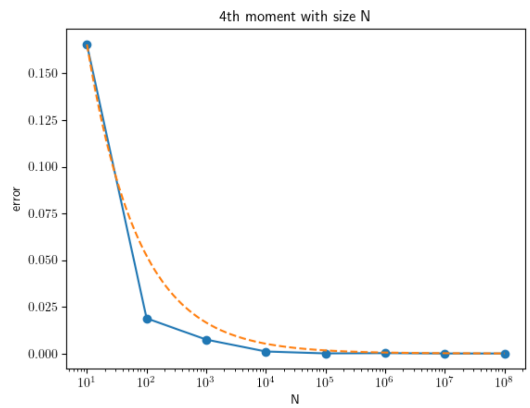
上图看不出明显的pattern；说明随机数相关性很低

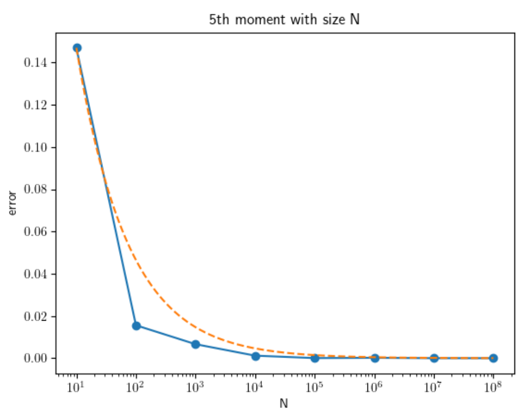
<xk>

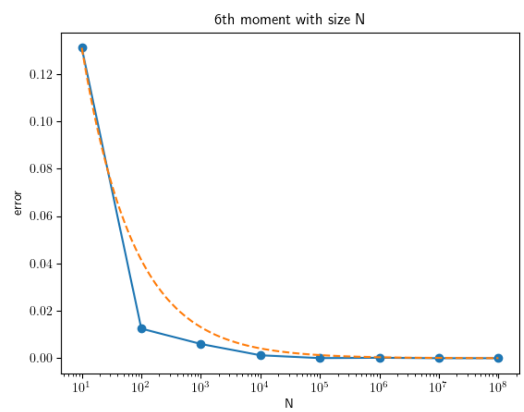
下图蓝线是xk 的平均值与1/（1+k) 的差的绝对值；虚线为1/sqrt(N), 在N=10处与实验值进行了校准

对于不同的参数k, 我们均能看到当N > 1e4时，样本矩与理想值偏差符合~1/sqrt(N)的关系









二维独立性

- 结果

  l = 2, C(l) = 4.4619309721079486e-05
  l = 3, C(l) = -0.00011926023532083128
  l = 4, C(l) = -1.972179653976133e-05

l = 5, C(l) = -5.202286328864763e-05
l = 6, C(l) = -3.4820200291193247e-05
l = 7, C(l) = -7.539776751373196e-05
l = 8, C(l) = 0.00010232871470932688
l = 9, C(l) = -7.817268958365946e-05

- 分析

  N取1e8，C(l)~1e-4; 与随机数的理论值相符合，表明数据的独立性非常高

总结

本实验用Schrage方法编写随机数子程序，并通过三种方法计算了随机数的生成质量。证明了此方法生成的随机数相关性很弱，质量很好。