Erf

Boris OUYA

July 2024

1 Problem 1.4.1 Demailly

Soit $x \geq 0$; on note $F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1.1 Encadrer F(x) par deux entiers consécutifs

Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \to e^{-t^2}$ est positive. Ainsi , la fonction F(x) est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors , on a pour tout $x \geq 0$

$$F(0) \leq F(x) \leq \lim_{x \to \infty} F(x)$$

Or , un résultat bien connu (intégrale de Gauss) est que

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Et

$$F(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$$

Alors , on a au final pour $x \geq 0$

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

1.2 En remplaçant e^{-t^2} par un développement en série entière de x, exprimez F(x) comme somme d'une série.

On a

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

Alors , en intégrant , on a :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2x^{2n+1}}{\sqrt{\pi}(2n+1)n!}$$

1.3 On choisit x = 3 ; calculer les 10 premiers termes de la série. En déduire que pour $x \geq 3$ on a un phénomène de compensation dans le calcul de la somme des premiers termes de la série

On effectue les calculs avec un script Python. Voici les résultats:

- $a_0 = 3.385137501286538$
- $a_1 = -10.155412503859614$
- $a_2 = 27.419613760420958$
- $a_3 = -58.756315200902044$
- $a_4 = 102.8235516015786$
- $a_5 = -151.43104872232485$
- $a_6 = 192.20094645525845$
- $a_7 = -214.16676890728797$
- $a_8 = 212.5920132535579$
- $a_9 = -190.21390659528868$

Nous remarquons que nous retrouvons un maximum en terme de valeur absolue (vérifiable analytiquement) en $a_7 = -214.16676890728797$. Cependant, nous savons que $F(3)$ est compris entre 0 et 1. La différence d'echelle implique que nous avons un phénomène de compensation dans le calcul de la somme , ce qui nuit à la précision du calcul. Pour $x \geq 3$, remarquons que les termes aux mêmes indices sont inévitablement supérieurs ou égaux à ceux pour x = 3. Ainsi, le phénomène de compensation s'applique aussi.

1.4 On définit $g(x)$ par $F(x) = e^{-x^2} g(x)$. Montrer que g est solution d'une équation différentielle

.

Nous avons pour $x \geq 0$

$$g(x) = F(x)e^{x^2}$$

Ainsi, en dérivant, nous trouvons

$$g'(x) = F'(x)e^{x^2} + 2xF(x)e^{x^2}$$

Or

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

et sachant que

$$g(x) = F(x)e^{x^2}$$

On a

$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + 2xg(x)$$

Ainsi, g est une solution de l'équation différentielle:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + 2xy \tag{1}$$

1.5 Exprimer g(x) comme somme d'une série entière en x

La formule générale est

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Sachant que pour $x \geq 0$

$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + 2xg(x)$$

On a pour $n \geq 2$ en utilisant la formule de Leibnitz:

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= g'^{(n-1)}(x) \\ &= 2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)^{(k)} g^{(n-1-k)}(x) \\ &= 2[xg^{(n-1)}(x) + (n-1)g^{(n-2)}(x)] \end{aligned}$$

On a

- $g(0) = F(0)e^0 = 0$
- $g'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$
- $g''(0) = 2[0 * \frac{2}{\sqrt{\pi}} + 1 * 0] = 0$
- $g^{(3)}(0) = 2 * 2 * \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$
- ...

Nous pouvons prouver par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$

- $g^{(2n)}(0) = 0$

- $g^{(2n+1)}(0) = 4ng^{(2n-1)}(0)$

On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

- $v_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$
- $v_n = 4nv_{n-1}$ pour $n \geq 1$

Donc , on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} 4^n n!$$

Et ainsi, on a

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{4^n n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{2}$$

1.6 En déduitre l'expression $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ où les $a_n(x)$ sont tous positifs. Déterminer $a_0(x)$ et donner la solution de récurrence entre $a_n(x)$ et $a_{n-1}(x)$.

On a

$$F(x) = e^{-x^2} g(x)$$

Donc

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{4^n n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!} e^{-x^2} x^{2n+1}$$

Et on pose

$$a_n(x) := 2\frac{4^n n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!} e^{-x^2} x^{2n+1}$$

On a

- $a_0(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x$
- $a_n(x) = \frac{4n}{(2n+1)(2n)} x^2 a_{n-1}$ pour $n \geq 1$

1.7 Montrer l'inégalité $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x) \leq a_N(x) \frac{x^2}{N-x^2}$ $(N > x^2)$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4n}{(2n+1)(2n)} x^2 a_{n-1}(x)\\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^2}{N} a_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Soit la suite $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N},n\geq N}$ définie par

- $b_N(x) = a_N(x)$
- $b_n(x) = \frac{x^2}{N} b_{n-1}(x)$ pour $n > N$

Ainsi, on

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x) &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n(x)\\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^2}{N} a_n(x) = \frac{x^2}{N} a_N(x) \frac{1}{1-\frac{x^2}{N}}\\ \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x) &\leq a_N(x) \frac{x^2}{N-x^2}\end{aligned}$$