Polynômes d'approximation

Boris OUYA

July 2024

1 Introduction

2 Polynômes d'interpolation de Lagrange

2.1 Définition

Soit $f : [a, b] \to R$, une fonction continue. Etant donnée n+1 points $x_0, x_1, ..., x_n$, il existe un seul et unique polynôme p_n tel que $p_n(x_i) = f(x_i)$ pour i = 0, 1, ...,n .

Ce polynôme est appelé **polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points** $x_0, x_1, ..., x_n$.

Celui-ci est définie pour tout $x \in [a, b]$ par

p$_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)$
avec, pour $i = 0, 1, ..., n$

$$l(x_i) = \prod_{j \neq i}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

2.2 Formule de l'erreur

On suppose que f est n + 1 fois dérivable sur $[a, b]$. Alors , pour tout $x \in [a, b]$, il existe un point $\epsilon_x \in]min(x, x_i), max(x, x_i)[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\epsilon_x)$$

Soit $||.||_{[a,b]}$, la norme uniforme de f sur $[a, b]$ définie par :

$$||f||_{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Ainsi, on a

$$||f - p_n|| \leq \frac{1}{(n+1)!} ||\pi_{n+1}|| ||f^{(n+1)}||$$

2.3 Méthodes des différences divisées

La méthode suivante permet de calculer simplement et efficacement les polynômes d'interpolation de f. Soit p_k , le polynôme de f aux points $x_0, x_1, ..., x_k$.

On désigne par $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ le coefficient de t^k dans $p_k(t)$.

On a le résultat

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k](x - x_0)...(x - x_{k-1})$$

On dispose de la formule de récurrence :

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{f[x_1, ..., x_k] - f[x_0, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Cette formule justifie la nomenclature de "différences divisées".

On calcule ainsi ces différences divisées à l'aide d'un tableau TAB initialisé initialement aux $f(x_i)$, d'étape en étape, transformé en tableau des différences divisées $TAB[i] = f[x_0, ..., x_i]$.

L'évaluation se fait ensuite à l'aide de la règle de Hörner:

$$\begin{cases} u_n & = TAB[n] \\ u_k & = TAB[k] + (x - x_k)u_{k+1} \quad 0 \leq k < n \end{cases}$$