

# 对角论证法

维基百科，自由的百科全书

对角论证法是乔治·康托尔于1891年提出的用于说明实数集合是不可数集的证明。

对角线法并非康托尔关于实数不可数的第一个证明，而是发表在他第一个证明的三年后。他的第一个证明既未用到十进制展开也未用到任何其它数系。自从该技巧第一次使用以来，在很大范围内的证明中都用到了类似的证明构造方法，它们一般亦称为对角论证法。

## 实数

康托尔的证明表明区间[0, 1]不是可数无穷大。该证明是用反证法完成的，步骤如下：

- 假设区间[0, 1]是可数无穷大的
- 于是乎我们可以把所有在这区间内的数字排成数列( $r_1, r_2, r_3, \dots$ )
- 已知每一个这类的数字都能以小数形式表达
- 我们把这些数字排成数列（这些数字不需按序排列；事实上，有些可数集，例如有理数也不能按照数字的大小把它们全数排序，但单只是成数列就没有问题的）。对于那些有两种小数形式的数字，例如0.499 ... = 0.500 ...，我们选择前者。
- 举例，如果该数列小数形式表现如下：

$r_1 = 0.5105110\dots$   
 $r_2 = 0.4132043\dots$   
 $r_3 = 0.8245026\dots$   
 $r_4 = 0.2330126\dots$   
 $r_5 = 0.4107246\dots$   
 $r_6 = 0.9937838\dots$   
 $r_7 = 0.0105135\dots$   
...

- 考虑 $r_k$ 小数点后的第k个位，为了方便起见，我们给这些数字加上下划线并粗体之，从下面你应明白为什么这个证明被称为对角论证法

$r_1 = 0.\underline{5}105110\dots$   
 $r_2 = 0.4\underline{1}32043\dots$   
 $r_3 = 0.82\underline{4}5026\dots$   
 $r_4 = 0.233\underline{0}126\dots$   
 $r_5 = 0.4107\underline{2}46\dots$   
 $r_6 = 0.99378\underline{3}8\dots$   
 $r_7 = 0.010513\underline{5}\dots$   
...

- 我们设一实数 $x \in [0, 1]$ ，其中x是因应以下的方式定义的
  - 如果 $r_k$ 的第k个小数位等于5，那么x的第k个小数位是4
  - 如果 $r_k$ 的第k个小数位不等于5，那么x的第k个小数位是5
- 明显地x是一个在区间[0, 1]内的实数，以之前的数列为例，则相对应的x应为 0.4555554 ...
- 由于我们假设( $r_1, r_2, r_3, \dots$ )包括了所有区间[0, 1]内的实数，所以一定有一个 $r_n = x$
- 但由于x的特殊定义，这使到序列( $r_1, r_2, r_3, \dots$ )之中所有的实数俱不能与x完全相等（因为x和 $r_n$ 会在第n个小数位不同），所以x不在序列( $r_1, r_2, r_3, \dots$ )中
- 所以( $r_1, r_2, r_3, \dots$ )并不能罗列所有区间[0, 1]内的实数，这发生了矛盾。
- 所以在第一点内所提出的假设“区间[0, 1]是可数无穷大的”为不成立。

## 外部链接

---

- [Original German text of the 1891 proof, with English translation \(https://web.archive.org/web/20060423090728/http://uk.geocities.com/frege%40btinternet.com/cantor/diagarg.htm\)](https://web.archive.org/web/20060423090728/http://uk.geocities.com/frege%40btinternet.com/cantor/diagarg.htm)
  - [A variation on Cantor's diagonal proof, completely formalized from first principles \(http://us.metamath.org/mpegif/mmcomplex.html#uncountable\)](http://us.metamath.org/mpegif/mmcomplex.html#uncountable)
- 

取自 “<https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=對角論證法&oldid=44972067>”

---

**本页面最后修订于2017年6月29日 (星期四) 03:02。**

本站的全部文字在知识共享 署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供，附加条款亦可能应用。（请参阅[使用条款](#)）  
Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标；维基™是维基媒体基金会的商标。  
维基媒体基金会是按美国国内税收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。