网络课程：

17.1.1泛函　　17.1.2泛函的极值——变分法　　17.1.3 变分

第十七章 变分法

17.1 变分法的基本概念

定义17.1.1 变分法 变分问题

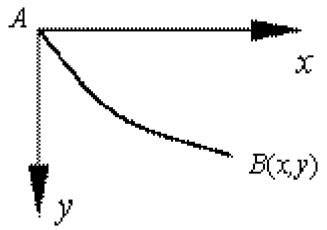

图 19.1

变分法就是求泛函极值的方法．**变分问题**即是求泛函的极值问题．

17.1.1泛函

变分法研究的对象是泛函，泛函是函数概念的推广．为了说明泛函概念先看一个例题：

考虑著名的**最速降线落径问题**。如图17.1 所示，　已知A和B为不在同一铅垂线和不同高度的两点，要求找出A、B间的这样一条曲线，当一质点在重力作用下沿这条曲线无摩擦地从A滑到B时，所需的时间T最小．

我们知道，此时质点的速度是

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$$

因此从 A滑到B所需的时间为

$$T=\int_{t_A}^{t_B}dt=\int_A^B\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\int_A^B\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

即为

$$T[y(x)]=\int_A^B\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \qquad (17.1.1)$$

式中 y' 代表对 x 求一阶导数．我们称上述的 T 为 $y(x)$ 的泛函，而称 $y(x)$ 为可取的函数类，为泛函 $T[y(x)]$ 的定义域。简单地说，泛函就是函数的函数（不是复合函数的那种含义）．

一般来说，设C是函数的集合，B是实数或复数的集合，如果对于C的任一元素 $y(x)$，在B中都有一个元素 J 与之对应，则称 J 为 $y(x)$ 的泛函，记为

$$J=J[y(x)]$$

必须注意，泛函不同于通常讲的函数．决定通常函数值的因素是自变量的取值，而决定泛函的值的因素则是函数的取形．如上面例子中的泛函T的变化是由函数 $y(x)$ 本身的变化（即从A到B的不同曲线）所引起的．它的值既不取决于某一个 x 值，也不取决于某一个 y 值，而是取决于整个集合C中 y 与 x 的函数关系．

定义17.1.2泛函 泛函的核

泛函通常以积分形式出现，比如上面描述的最速降线落径问题的式（17.1.1）．更为一般而又典型的**泛函**定义为

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx \qquad (17.1.2)$$

其中 $F(x,y,y')$ 称为**泛函的核**.

17.1.2泛函的极值——变分法

对于不同的自变量函数 $y(x)$，与此相应的泛函 $J[y(x)]$ 也有不同的数值．找出一个确定的自变量函数 $y(x)$，使泛函 $J[y(x)]$ 具有极值（极小或极大），这种泛函的极小值与极大值统称为泛函的极值．

引入泛函的概念后，对于上述的最速降线落径问题变为泛函 $J[y(x)]$ 的极小值问题．物理学中常见的有光学中的费马(Fermat)原理，分析力学中的哈密顿(Hamiton)原理等，都是泛函的极值问题．

定义17.1.3 变分法：所谓的**变分法**就是求泛函极值的方法.

研究泛函极值问题的方法可以归为两类：一类叫直接法，即直接分析所提出的问题；另一类叫间接法，即把问题转化为求解微分方程．为讨论间接方法，先介绍变分和泛函的变分．

17.1.3 变分

定义 17.1.4 变分 如果我们将泛函取极值时的函数（或函数曲线）定义为 $y(x)$;并定义与函数曲线 $y(x)$ 邻近的曲线（或略为变形的曲线）作为比较曲线，记为

$$y(x,\varepsilon)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$$

其中 ε 是一个小参数；$\eta(x)$ 是一个具有二阶导数的任意选定函数，规定它在一个小范围内变化，这限制主要保证泛函在极值处连续．在研究泛函极值时，通常将 $\eta(x)$ 固定，而令 ε 变化，这样规定的好处在于：建立了由参数 ε 到泛函 $J[y(x)]$ 值之间的对应关系，因此泛函 $J[y(x)]$ 就成为了参数 ε 的普通函数．原来泛函的极值问题就成为普通函数对 ε 的求极值的问题．同时，函数曲线 $y(x)$ 的**变分**定义为

$$\delta y=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(x,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}=\eta(x)\mathrm{d}\varepsilon \qquad (17.1.3)$$

因此可得

$$\delta y'=\eta'(x)\mathrm{d}\varepsilon \qquad (17.1.4)$$

这里y',η'代表对x求一阶导数.
所以

$$\delta y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta y \qquad (17.1.5)$$

即变分和微分可以交换次序.