线性代数　课后习题解析

同济·第6版同济大学数学系

习 题 解 答

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解 (1) 原式 $=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8$
$-1\times(-4)\times(-1)-2\times(-1)\times8-0\times1\times3=-4$;

(2) 原式 $=acb+bac+cba-c^3-a^3-b^3$
$=3abc-a^3-b^3-c^3$;

(3) 原式 $=1\cdot b\cdot c^2+1\cdot c\cdot a^2+1\cdot a\cdot b^2-1\cdot b\cdot a^2-1\cdot c\cdot b^2-1\cdot a\cdot c^2$
$=bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-cb^2-ac^2$
$=c^2(b-a)+ab(b-a)-c(b^2-a^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$;

(4) 原式 $=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-(x+y)^3-x^3-y^3$
$=-2(x^3+y^3)$.

2. 按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4; (2) 4 1 3 2;

(3) 3 4 2 1; (4) 2 4 1 3;

(5) 1 3 $\cdots$ $(2n-1)$ 2 4 $\cdots$ $(2n)$;

(6) 1 3 $\cdots$ $(2n-1)$ $(2n)$ $(2n-2)$ $\cdots$ 2.

解 (1) 此排列为标准排列,其逆序数为0;

(2) 此排列的首位元素4的逆序数为0,第2位元素1的逆序数为1,第3位元素3的逆序数为1,末位元素2的逆序数为2,故它的逆序数为 $0+1+1+2=4$;

(3) 此排列的前两位元素的逆序数均为0,第3位元素2的逆序数为2;末位元素1的逆序数为3,故它的逆序数为 $0+0+2+3=5$;

(4) 类似于上面,此排列的从首位元素到末位元素的逆序数依次为0,0,2,1,故它的逆序数为 $0+0+2+1=3$;

(5) 注意到这 $2n$ 个数的排列中,前 n 位元素的逆序数均为0.第 $n+1$ 位元素2与它前面的 $n-1$ 个数构成逆序对,故它的逆序数为 $n-1$;同理,第 $n+2$ 位元素4的逆序数为 $n-2$……末位元素 $2n$ 的逆序数为0.故此排列的逆序数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+0=\frac{1}{2}n(n-1)$;

(6) 与(5)相仿,此排列的前 $n+1$ 位元素的逆序数均为0;第 $n+2$ 位元素 $(2n-2)$ 的逆序数为2;第 $n+3$ 位元素 $2n-4$ 与它前面的 $2n-3,2n-1,2n,2n-2$ 构成逆序对,故它的逆序为4……末位元素2的逆序数为 $2(n-1)$,故此排列的逆序数为 $2+4+\cdots+2(n-1)=n(n-1)$.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 由行列式定义知这项必还含有分别位于第3行和第4行的某两元素,而它们又分别位于第2列和第4列,即 a_{32} 和 a_{44} 或 a_{34} 和 a_{42}.注意到排列1324

与 1342 的逆序数分别为 1 与 2，故此行列式中含有 $a_{11}a_{23}$的项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

4. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-10r_1]{r_2-4r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+7r_2]{r_3+15r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix}$$

$=0$（因第 3、4 行成比例）；

(2) $D \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$（因有两行相同）；

(3) $D \xlongequal[\substack{r_2 \div d \\ r_3 \div f}]{r_1 \div a} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_2 \div c \\ c_3 \div e}]{c_1 \div b} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef；$$

$$(4)\ D \xlongequal{r_2+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=0;$$

$$(5)\ D \xlongequal{r_1+ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}} (-1)(-1)^3\begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+dc_2} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按}r_3\text{展开}} (-1)(-1)^5\begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix}$$

$$=(1+ab)(1+cd)+ad.$$

$$(6)\ D \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3\div(-1)]{\text{按}c_1\text{展开}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=16.$$

注 本题中哪怕是求三阶或四阶行列式都运用了行列式的各种基本的计算手段,请读者留意.

5. 求解下列方程:

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=0$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$,其中 a,b,c 互不相等.

解 (1) 左式 $\xlongequal[r_1\div(x+3)]{r_1+r_2} (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2-c_1}(x+3)\begin{vmatrix}1&0&0\\2&x-1&1\\-1&2&x+1\end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix}x-1&1\\2&x+1\end{vmatrix}=(x+3)(x^2-3).$$

于是方程的解为 $x_1=-3, x_2=\sqrt{3}, x_3=-\sqrt{3}$；

(2) 注意到方程左式为 4 阶范德蒙德行列式,由例 12 的结果得

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c)=0.$$

因 a,b,c 互不相等,故方程的解为 $x_1=a, x_2=b, x_3=c$.

6. 证明:

(1) $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix}ax+by&ay+bz&az+bx\\ay+bz&az+bx&ax+by\\az+bx&ax+by&ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}=0$;

(4) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$;

(5) $\begin{vmatrix}x&-1&0&0\\0&x&-1&0\\0&0&x&-1\\a_0&a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

证 (1) 左式 $\xlongequal[c_2-c_3]{c_1-c_3}\begin{vmatrix}a^2-b^2&ab-b^2&b^2\\2(a-b)&a-b&2b\\0&0&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-2c_2}\begin{vmatrix}(a-b)^2&ab-b^2&b^2\\0&a-b&2b\\0&0&1\end{vmatrix}$

$=(a-b)^3=$ 右式;

(2) 将左式按第 1 列拆开得

$$左式=\begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=aD_1+bD_2,$$

其中
$$D_1=\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}\xlongequal[c_3\div a]{c_3-bc_1}a\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2\div a]{c_2-bc_3}a^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}\xlongequal[c_2\div b]{c_2-ac_1}b\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3\div b]{c_3-ac_2}b^2\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}\xlongequal[c_2\leftrightarrow c_1]{c_3\leftrightarrow c_2}b^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix},$$

于是
$$D=aD_1+bD_2=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=右式.$$

(3) $$左式\xlongequal[\substack{c_3-c_2\\c_2-c_1}]{c_4-c_3}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0\ (因有两列相同);$$

(4) $$左式\xlongequal[\substack{r_3-ar_2\\r_2-ar_1}]{r_4-a^2r_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[各列提取公因子]{按 c_1 展开}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2 - br_1]{r_3 - b(b+a)r_2} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ x & y \end{vmatrix},$$

其中$x = c^2(c+a) - bc(b+a) = c(c^2 + ac - b^2 - ab) = c(a+b+c)(c-b)$,

$y = d^2(d+a) - bd(b+a) = d(a+b+d)(d-b)$.

故 $\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ x & y \end{vmatrix} = (c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(a+b+c) & d(a+b+d) \end{vmatrix}$

$$= (c-b)(d-b)[d(a+b+d) - c(a+b+c)]$$

$= (c$

$= (c$

因此,左式 $= (b-a)(c-$

(5) **证一** 按第1列

$D = x$

$$= x\left(x\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + a_1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix}\right) + a_0$$ (对上式第1个行列式继续按第1列展开)

$$= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0;$$

证二 按最后一行展开得

$$D = -a_0\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} + a_1\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$-a_2\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

7. 设 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$,把 D 上下翻转、或逆时针旋转 $90°$、或依副对角线翻转,依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

学糕,大学生的学习资料库,提供免费的大学各个专业课后习题解析+考试真题题库。
关注官方微信,免费获取更多习题答案
搜索微信号:学糕 或 xuegaobao
二维码关注

证明 $D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D, D_3=D$.

证 (1) 通过对换行将 D_1 变换成 D,从而找出 D_1 与 D 的关系.

D_1 的最后一行是 D 的第 1 行,把它依次与前面的行交换,直至换到第 1 行,共进行 $n-1$ 次交换;这时最后一行是 D 的第 2 行,把它依次与前面的行交换,直至换到第 2 行,共进行 $n-2$ 次交换……直至最后一行是 D 的第 $n-1$ 行,再通过一次交换将它换到第 $n-1$ 行,这样就把 D_1 变换成 D,共进行

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

次交换,故 $D_1=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D$.

注 上述对换行(列)的方法,在解题时经常用到.它的特点是在把最后一行换到某一行的同时,保持其余 $n-1$ 个行之间原有的先后次序(但行的序号可能改变),见例 6 之析.

(2) 计算 D_2.注意到 D_2 的第 $1,2,\cdots,n$ 行恰好依次是 D 的第 $n,n-1,\cdots,1$ 列,故若把 D_2

$2,\cdots,n$ 列,即

$D_2=$

(3) 计算

列恰好是 D 的第

及(2),有

$D_3=$ $D_3=D$.

学糕,大学生的学习资料库,提供免费的大学各个专业课后习题解析+考试真题题库。
关注官方微信,免费获取更多习题答案
搜索微信号:学糕 或 xuegaobao
二维码关注

注 本例的结论值得记取,即对行列式 D 作转置、依副对角线翻转、旋转 180°所得行列式不变,作上下翻转、左右翻转、逆(顺)时针旋转 90°所得行列式为 $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D$.

8. 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式):

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$,其中对角线上元素都是 a,未写出的元素都是 0;

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

提示:利用范德蒙德行列式的结果.

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$,其中未写出的元素都是 0;

(5) $D_n=$ $1+a_1 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_1$ … a_2 … $\vdots$ … a_n

(6) $D_n=\det(a$

(7) $D_n=$ $1+$ … 1 … $\vdots$ … $1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1+a_n$

学糕,大学生的学习资料库,提供免费的大学各个专业课后习题解析+考试真题题库。
关注官方微信,免费获取更多习题答案
搜索微信号:学糕 或 xuegaobao
二维码关注

(1) **解一** 化 D_n 为上三角形行列式

$$D_n \xlongequal{r_n+r_1} \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ a+1 & & a+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-c_n} \begin{vmatrix} a-1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & a+1 \end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2-1),$$

上式中最后那个行列式为上三角形行列式;

解二 把 D_n 按第二行展开,因 D_n 的第二行除对角线元素外全为零,故有

$$D_n = a\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}, \text{即 } D_n = aD_{n-1},$$

于是有 $$D_n = aD_{n-1} = \cdots = a^{n-2}\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2-1);$$

(2) 本题中 D_n 是教材例 8 中行列式的一般形式，它是一个非常有用的行列式，在以后各章中有不少应用.

解 利用各列的元素之和相同，把从第二行起的各行统统加到第一行再提取公因式.

$$D_n \xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$= [x +$

学糕，大学生的学习资料库，提供免费的大学各个专业课后习题解析+考试真题题库。
关注官方微信，免费获取更多习题答案
搜索微信号：学糕 或 xuegaobao
二维码关注

$\xlongequal[i=2,\cdots]{r_i - a}$ $\ddots$ $x-a$

$= (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a];$

(3) **解** 把所给行列式上下翻转，即为范德蒙德行列式，若再将它左右翻转，由于上下翻转与左右翻转所用交换次数相等，故行列式经上下翻转再左右翻转(相当于转 180°，参看题 7)其值不变. 于是按范德蒙德行列式的结果，可得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(i-j);$$

(4) **解** 本题与例 11 相仿，解法也大致相同，用递推法.