认知计算、机器人定位导航算法、运筹学算法

理解算法，理解别人的代码，自己写出好程序~~

（一）：细说贝叶斯滤波：Bayes filters

本文为原创文章，转载请注明出处：http://www.cnblogs.com/ycwang16/p/5995702.html

认知计算，还要从贝叶斯滤波的基本思想讲起。这一部分，我们先回顾贝叶斯公式的数学基础，然后再来介绍贝叶斯滤波器。

(一). 概率基础回顾

我们先来回顾一下概率论里的基本知识：

1. X：表示一个**随机变量**，如果它有有限个可能的取值$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

2. $p(X = x_i)$:表示变量X的值为 x_i的**概率**。

3. $p(\cdot)$:称为**概率质量函数(probability mass function).**

   例如：一个家里有3个房间，机器人在各个房间的概率为 $p(room) = \{0.1, 0.3, 0.6\}$.

4. 如果X在连续空间取值，$p(x)$称为**概率密度函数(probability density function)**，

$$p(x \in (a,b)) = \int_a^b p(x)dx$$

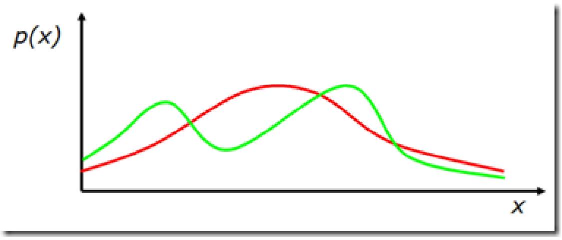

图1. 概率密度函数曲线示例

5. **联合概率**：$p(X = x \ \text{ and } \ Y = y) = p(x, y)$，称为联合概率密度分布。如果$X$和$Y$是相互独立的随机变量，$p(x, y) = p(x)p(y)$。

6. **条件概率**：$p(X = x|Y = y)$ 是在已知$Y = y$的条件下，计算$X = x$的概率。

$$p(x|y) = p(x, y)/p(y)$$

$$p(x, y) = p(x|y)p(y) = p(y|x)p(x)$$

   如果x和y相互独立，则：

$$p(x|y) = p(x)$$

7. **全概率公式：**

   离散情况下：

$$p(x) = \sum_y p(x, y) = \sum_y p(x|y)p(y)$$

   连续情况下：

$$p(x) = \int p(x, y)\ dy = \int p(x|y)p(y)\ dy$$

< 2018年11月 >

日	一	二	三	四	五	六
28	29	30	31	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	1
2	3	4	5	6	7	8

最新随笔

1. （二）．细说Kalman滤波：The Kalman Filter
2. （一）：细说贝叶斯滤波：Bayes filters
3. 写一个普适计算（认知计算）课程的博客

我的标签

机器人(2)
认知计算(2)
条件概率(1)
条件推理(1)
信号处理(1)
Bayes Filter(1)
bayes滤波(1)
kalman滤波(1)
贝叶斯公式(1)
贝叶斯滤波(1)
更多

随笔分类

认知计算(3)

阅读排行榜

1. （二）．细说Kalman滤波：The Kalman Filter(5522)
2. （一）：细说贝叶斯滤波：Bayes filters (5005)
3. 写一个普适计算（认知计算）课程的博客(393)

(二). 贝叶斯公式

2.1 贝叶斯公式

基于条件概率公式和全概率公式，我们可以导出贝叶斯公式：

$$P(x,y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$
$$\Rightarrow$$
$$P(x \mid y) = \frac{P(y|x) \;\; P(x)}{P(y)} = \frac{\text{causal knowledge} \cdot \text{prior knowledge}}{\text{prior knowledge}}$$

- 这里面x一般是某种状态；y一般是代表某种观测。
- 我们称$P(y|x)$为**causal knowledge**，意即由x的已知情况，就可以推算y发生的概率，例如在图2的例子中，已知如果门开着，则$z = 0.5m$的概率为0.6；如果门关着，则$z = 0.5m$的的概率为0.3。
- 我们称$P(x)$为**prior knowledge**，是对x的概率的先验知识。例如在图2的例子中，可设门开或关的概率各占50%.
- $P(x|y)$是基于观测对状态的诊断或推断。**贝叶斯公式的本质就是利用causal knowledge和prior knowledge来进行状态推断或推理。**

例1:：

在图2所示的例子中，机器人根据观测的到门的距离，估算门开或关的概率，若测量到门的距离为$z = 0.5m$，则可用条件概率描述门开着的概率：

$$P(\text{open}|z = 0.6) = ?$$

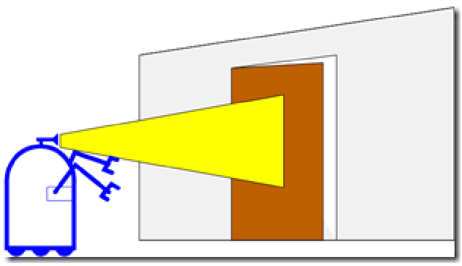

图 2.机器人根据观测计算门开或关的概率

$$\begin{aligned}
P(open|z = 0.5) &= \frac{P(z|open)P(open)}{P(z)} \quad <-- \text{贝叶斯公式} \\
&= \frac{P(z|open)P(open)}{P(z|open)p(open)+P(z|\neg open)p(\neg open)} \quad <-- \text{全概率公式} \\
&= \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = 2/3
\end{aligned}$$

2.2 贝叶斯公式的计算

可以看到贝叶斯公式的分母项$P(y)$，同$P(x|y)$无关，所以可以把它作为归一化系数看待：

$$P(x \mid y) = \frac{P(y|x) \;\; P(x)}{P(y)} = \eta \; P(y|x) \; P(x)$$
$$\eta = P(y)^{-1} = \frac{1}{\sum_x P(y|x)P(x)}$$

所以基于**causal knowledge和prior knowledge**进行条件概率计算的过程如下：

Algorithm:

$$\forall x : \text{aux}_{x|y} = P(y|x) \; P(x)$$
$$\eta = \frac{1}{\sum_x \text{aux}_{x|y}}$$
$$\forall x : P(x|y) = \eta \; \text{aux}_{x|y}$$

2.3 贝叶斯公式中融合多种观测

在很多应用问题中，我们会用多种观测信息对一个状态进行猜测和推理，贝叶斯公式中是如何融合多种观测的呢?

我们简单推导一下:

$$
\begin{aligned}
P(x|y,z) &= \frac{P(x,y,z)}{P(y,z)} \\
&= \frac{P(y|x,z)p(x,z)}{P(y,z)} \\
&= \frac{P(y|x,z)p(x|z)p(z)}{P(y|z)p(z)} \\
&= \frac{P(y|x,z)p(x|z)}{P(y|z)}
\end{aligned}
$$

所以有:

$$P(x|y,z) = \frac{P(y|x,z)\ P(x|z)}{P(y|z)}$$

2.4 贝叶斯递推公式

由此，我们来推导贝叶斯滤波的递推公式:

$P(x|z_1,\ldots,z_n) = ?$

我们把z_n看做y，把$z_1,\ldots,z_{n-1}$看做z，代入上面的公式:

$$P(x|z_1,\ldots,z_n) = \frac{P(z_n|x,z_1,\ldots,z_{n-1})\ P(x|z1,\ldots,z_{n-1})}{P(z_n|z_1,\ldots,z_{n-1})}$$

再由Markov属性，在x已知的情况下，z_n同$\{z_1,\ldots,z_{n-1}\}$无关，所以:

$$
\begin{aligned}
P(x|z_1,\ldots,z_n) &= \frac{P(z_n|x,z_1,\ldots,z_{n-1})\ P(x|z1,\ldots,z_{n-1})}{P(z_n|z_1,\ldots,z_{n-1})} \\
&= \frac{P(z_n|x)\ P(x|z1,\ldots,z_{n-1})}{P(z_n|z_1,\ldots,z_{n-1})}
\end{aligned}
$$

从而我们得到贝叶斯的递推公式:

$$
\begin{aligned}
P(x|z_1,\ldots,z_n) &= \frac{P(z_n|x)\ P(x|z_1,\ldots,z_{n-1})}{P(z_n|z_1,\ldots,z_{n-1})} \\
&= \eta_n\ P(z_n|x)\ P(x|z_1,\ldots,z_{n-1}) \\
&= \eta_n\ P(z_n|x)\ \eta_{n-1}P(z_{n-1}|x)P(x|z_1,\ldots,z_{n-2}) \\
&= \eta_1\cdots\eta_n \prod_{i=1\ldots n} P(z_i|x)\ P(x)
\end{aligned}
$$

例2: 在例1的基础上，如果机器人第二次测量到门的距离仍然为0.5米， 计算门开着的概率。

$$
\begin{aligned}
P(open|z_2,z_1) &= \frac{P(z_2|open)\ P(open|z_1)}{P(z_2|open)\ P(open|z_1)+P(z_2|\neg open)\ P(\neg open|z_1)} \\
&= \frac{0.6\cdot\frac{2}{3}}{0.6\cdot\frac{2}{3}+0.3\cdot\frac{1}{3}} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8
\end{aligned}
$$

所以，第二次z=0.5m的观测增大了对门开着的概率的置信程度。

(三). 如何融入动作?

在实际问题中，对象总是处在一个动态变化的环境中，例如:

1. 机器人自身的动作影响了环境状态

2. 其它对象，比如人的动作影响了环境状态

3. 或者就是简单的环境状态随着时间发生了变化。

如何在Bayes模型中来描述动作的影响呢?

1. 首先，动作所带来的影响也总是具有不确定性的
2. 其次，相比于观测，动作一般会使得对象的状态更为模糊（或更不确定）。

我们用u来描述动作，在x'状态下，执行了动作u之后，对象状态改变为x的概率表述为:

$$P(x|u,x')$$

动作对状态的影响一般由状态转移模型来描述。如图3所示，表示了“关门”这个动作对状态影响的转移模型。这个状态转移模型表示：关门这个动作有0.1的失败概率，所以当门是open状态时，执行“关门”动作，门有0.9的概率转为closed状态，有0.1的概率保持在open状态。门是closed的状态下，执行“关门”动作，门仍然是关着的。

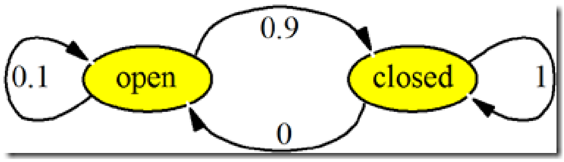

图3. “关门”动作的状态转移模型

执行某一动作后，计算动作后的状态概率，需要考虑动作之前的各种状态情况，把所有情况用全概率公式计算:

- 连续情况下:

$$P(x|u)=\int P(x|u,x')P(x')dx'$$

- 离散情况下:

$$P(x|u)=\sum P(x|u,x')P(x')$$

例3: 在例2的基础上，如果按照图3所示的状态转移关系，机器人执行了一次关门动作， 计算动作后门开着的概率?

$$\begin{aligned}
P(open|u) &= \sum P(open|u,x')P(x') \\
&= P(open|u,open)P(open) \\
&\quad +P(open|u,closed)P(closed) \\
&= \tfrac{1}{10}*0.8+\tfrac{0}{1}*0.2=0.08 \\
P(closed|u) &= \sum P(closed|u,x')P(x') \\
&= P(closed|u,open)P(open) \\
&\quad +P(closed|u,closed)P(closed) \\
&= \tfrac{9}{10}*0.8+\tfrac{1}{1}*0.2=0.92
\end{aligned}$$

所以，执行一次关门动作后，门开着的概率变为了0.08.

(四). 贝叶斯滤波算法

4.1 算法设定

由上述推导和示例，我们可以给出贝叶斯滤波的算法，算法的输入输出设定如下。

1. 系统输入
   1. 1到t时刻的状态观测和动作：$d_t=\{u_1,z_1\ \ldots,u_t,z_t\}$

2. 观测模型：$P(z|x)$

3. 动作的状态转移模型：$P(x|u,x')$

4. 系统状态的先验概率分布$P(x)$.

2. 期望输出
   1. 计算状态的后延概率，称为状态的**置信概率**：$Bel(x_t) = P(x_t|u_1, z_1 \ \ldots, u_t, z_t)$

4.2 算法基本假设

贝叶斯滤波的基本假设：

1. Markov性假设: t时刻的状态由$t-1$时刻的状态和t时刻的动作决定。t时刻的观测仅同t时刻的状态相关，如图4所示：

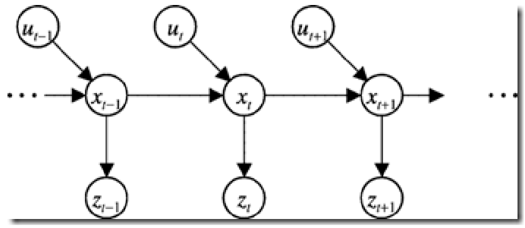

图4. Markov模型

$$
\begin{aligned}
p(z_t|x_{0:t}, z_{1:t}, u_{1:t}) &= p(z_t|x_t) \\
p(x_t|x_{1:t-1}, z_{1:t}, u_{1:t}) &= p(x_t|x_{t-1}, u_t)
\end{aligned}
$$

2. 静态环境，即对象周边的环境假设是不变的

3. 观测噪声、模型噪声等是相互独立的

4.3 Bayes滤波算法

基于上述设定和假设，我们给出贝叶斯滤波算法的推导过程：

$Bel(x_t) = P(x_t|u_1, z_1 \ \ldots, u_t, z_t)$

$= \eta \ P(z_t|x_t, u_1, z_1, \ldots, u_t) \ P(x_t|u_1, z_1, \ \ldots, u_t) \qquad <\!\!— \mathrm{Bayes}$

$= \eta \ P(z_t|x_t) \ P(x_t|u_1, z_1, \ \ldots, u_t) \qquad <\!\!— \mathrm{Markov}$

$= \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_1, z_1, \ldots, u_t, x_{t-1}) P(x_{t-1}|u_1, z_1, \ldots, u_t) dx_{t-1}) <\!\!— \mathrm{TotalProb.}$

$= \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_t, x_{t-1}) P(x_{t-1}|u_1, z_1, \ldots, u_t) dx_{t-1}) <\!\!— \mathrm{Markov}$

$= \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_t, x_{t-1}) P(x_{t-1}|u_1, z_1, \ldots, z_{t-1}) dx_{t-1}) <\!\!— \mathrm{Markov}$

$= \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) \ dx_{t-1}$

其中第一步采用贝叶斯公式展开，第二步使用Markov性质(z_t仅由x_t决定)；第三步使用全概率公式对x_{t-1}进行展开；第四步继续使用Markov性质(x_t仅由x_{t-1}和u_t决定)；第五步继续使用Markov性质，因为x_{t-1}同u_t无关，最终得到$Bel(x_t)$的递推公式。

可见递推公式中分为两个步骤，$\int P(x_t|u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) \ dx_{t-1}$部分是基于$x_{t-1}, u_t$预测$x_t$的状态；$\eta P(z_t|x_t)$部分是基于观测$z_t$更新状态$x_t$.

4.3 Bayes滤波算法流程

所以，Bayes滤波的算法流程图如图5所示。如果d是观测，则进行一次状态更新，如果d是动作，则进行一次状态预测。

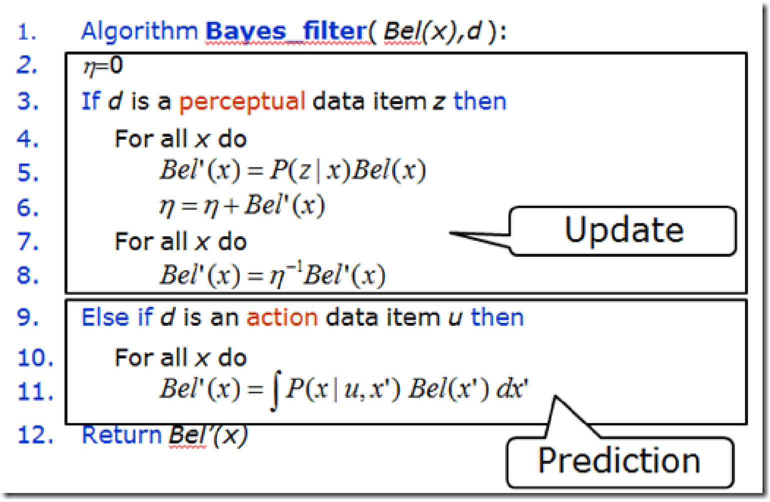

图5. Bayes滤波的算法流程

我们看到，在进行状态预测时，需要对所有可能的x'状态进行遍历，使得基本的Bayes模型在计算上成本是较高的。

4.3 Bayes滤波算法的应用

Bayes滤波方法是很多实用算法的基础，例如：

- Kalman滤波
- 扩展Kalman滤波
- 信息滤波
- 粒子滤波

等，我们在下一节介绍Kalman滤波。

参考文献

[1]. Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, Dieter Fox, Probabilistic Robotics, 2002, The MIT Press.

更多资料：http://in.ruc.edu.cn/pc2016

博客园：http://www.cnblogs.com/ycwang16/

评论列表

#1楼 2016-10-26 09:21 钻葛格

膜拜

#2楼[楼主] 2016-10-26 10:07 红山

@ IT民工-杰

写博客的经验不多，我刚把个人主页都去掉了。希望这个系列博客对理解这方面的知识有用处，我尽量把一些推导过程写详细。

支持(1) 反对(0)

#3楼 2016-10-26 10:59 ~扎克伯格

@ 王永才
好吧！大兄弟，我错怪你了

支持(0) 反对(0)

#4楼 2016-10-31 10:08 李奥霍克

我数学学的不是很好

2.4 贝叶斯递推公式
中，那个X|Z1,...ZN,写成反向(Zn,Zn-1)的更好理解吧。

Markov属性是什么？为什么为causal knowledge的Z1到Zn-1去掉了，而分母的Zn还和Z1有关？

支持(0) 反对(0)

#5楼[楼主] 2016-11-10 09:04 红山

@ 李奥霍克

具体到这个公式中，Markov性是指当确定了n时刻的状态x_n后，n时刻的观测z_n，就完全由x_n决定，与x_{n-1}，z_1~z_{n-1}无关了。

而n时刻的观测z_n同前面的观测之间还是有关的。

支持(0) 反对(0)

#6楼 2017-11-18 19:16 StailLYD

机器人观测到门的距离Z和门开关状态不是独立的吗？
这个例子是不是有问题，还是我理解错误？

支持(0) 反对(0)