网络课程：

17. 2. 1 泛函的极值的必要条件－－欧拉－拉格朗日方程 17. 2. 2 泛函的条件极值问题

17．2 泛函的极值

泛函的极值问题，一般来说是比较复杂的．因为它与泛函包含的自变量个数，未知函数的个数以及函数导数的阶数等相关．另外，在求泛函极值时，有的还要加约束条件，且约束条件的类型也有不同，等等．下面我们首先讨论泛函的极值的必要条件．

17. 2. 1 泛函的极值的必要条件－－欧拉－拉格朗日方程

设 $J[y(x)]$ 的极值问题有解

$$y=y(x) \qquad (17.2.1)$$

现在推导这个解所满足的常微分方程，这是用间接法研究泛函极值问题的重要一环．设想这个解有变分 $\varepsilon\eta(x)$，则 $J[y(x)+\varepsilon\eta(x)]$ 可视为参数 ε 的函数 $\Phi(\varepsilon)=J[y(x)+\varepsilon\eta(x)]$. 而当 $\varepsilon=0$ 时，$y(x)+\varepsilon\eta(x)=y(x)$ 对应于式(17.2.1),即为 $J[y(x)+\varepsilon\eta(x)]$ 取极值．于是原来的泛函极值问题，就化为一个求普通函数 $\Phi(\varepsilon)$ 的极值问题．由函数取极值的必要条件，有

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0 \quad \text{即有} \quad \frac{\partial J}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0 \qquad (17.2.2)$$

2. 泛函表示为多个函数的积分形式

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y_1,y_1',y_2,y_2',\cdots y_n,y_n')\mathrm{d}x$$

$$\delta y_i|_{x=a}=0, \qquad \delta y_i|_{x=b}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

则与此泛函极值问题相应的E-L方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (17.2.2)$$

3. 泛函的积分形式中含有高阶导数

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x$$

$$\delta y(a)=\delta' y(a)=\cdots=\delta^{(n-1)}y(a)=0$$

$$\delta y(b)=\delta' y(b)=\cdots=\delta^{(n-1)}y(b)=0$$

与此泛函极值问题相应的E-L方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0 \qquad (17.2.3)$$

4. 泛函的积分形式中含有多元函数

设 $u(x,y)$ 为 x,y 的二元函数，则

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\delta u(x_1,y)=\delta u(x_2,y)=\delta u(x,y_1)=\delta u(x,y_2)=0$$

与此泛函极值问题相应的E-L方程为

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0 \qquad (17.2.4)$$

17.2.2泛函的条件极值问题

在许多泛函的极值问题中，变量函数还受到一些附加条件的限制，其中最常见和重要的一种是以积分形式表示的限制条件

$$\int_a^b G(x,y,y')\mathrm{d}x=l \qquad (17.2.5)$$

即所谓的**等周问题**：

$$\begin{cases} J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x, \qquad y(a)=y_0,\ \ y(b)=y_1 \\ \int_a^b G(x,y,y')\mathrm{d}x=l \end{cases} \qquad (17.2.6)$$

（**注：这种问题之所以称为等周问题，是因为在历史上起源于求一条通过两点，长度固定为l的曲线 $y(x)$, 使面积 $S=\int_a^b y(x)\mathrm{d}x$ 取极大值)**

其中 l,y_0,y_1 为常数．此类问题可以仿照普通函数的条件极值问题的拉格朗日乘子法．即将附加条件(17.2.5)乘以参数 λ，求其变分后，加到泛函取极值的必要条件中得到

$$\delta\int_a^b [F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')]\mathrm{d}x = 0$$

于是问题转化为不带条件的由上式所表示的变分问题．其对应的E-L方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y'}\right) = 0$$

这是通过a和 b 两点的$y(x)$在附加条件（17.2.5）之下使泛函取极值的必要条件．它实际上是一个关于$y(x)$的二阶常微分方程．其通解中含有三个参数，即λ和两个积分常数．它们可由条件$y(a) = y_0, y(b) = y_1$和附加条件（17.2.5）来确定．