原

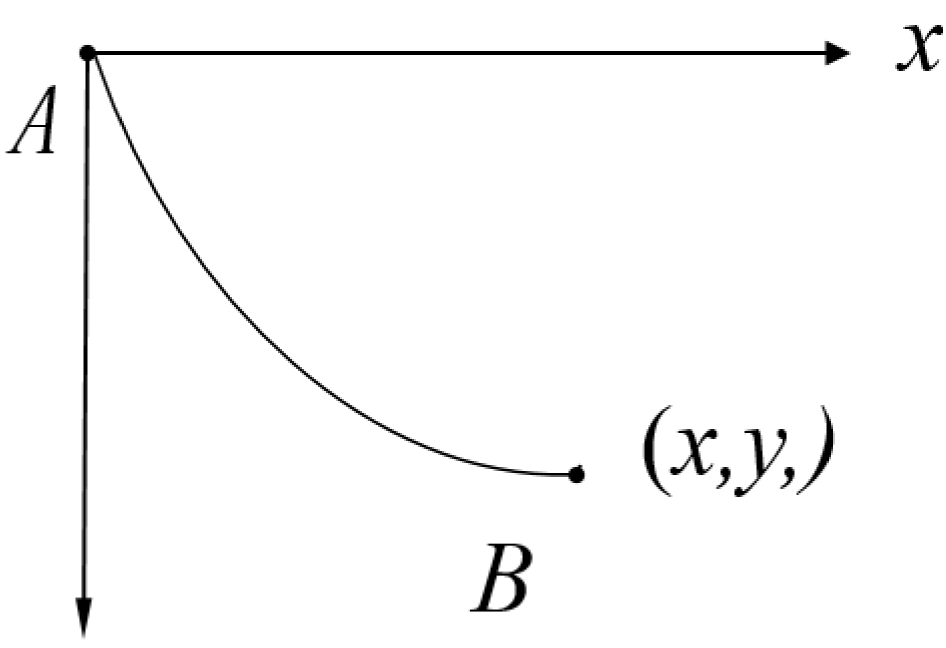
泛函与变分初步（Euler-lagrange条件）

1.前言

若偏微分方程复杂或边界条件不规则时，则方程难以求得解析解，不得不求满足近似程度要求的近似解。变分法是常用的近似方法之一，而且，变分法的原理和应用遍及物理学的各个领域。**所谓变分法即为泛函的极值问题**。

2.泛函与泛函的极值

2.1 泛函的概念



最速落径问题,如图所示。A、B两点不在同一铅垂线，也不在同一高度。一质点在重力作用下无磨擦沿某曲线从A滑到B，求下滑的最短时间。或沿哪条曲线用时最短。

我们知道，质点下落速率与下落高度间的关系为：

$$\upsilon = \sqrt{2gh} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

所以

$$T = \int_{t_1(A)}^{t_2(B)} dt = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

即

$$T = T[y(x)] = \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

T称为y(x)的泛函。

y(x)可取的函数种类，称泛函的定义域,**泛函是函数的函数**（不指复合函数）。

一般地， C是函数的集合， B是实数（或复数）的集合，若对于C中的任一称元素y(x)，在B中均有一元素J与之对应，则称J为y(x) 的泛函是函数。

记为:

$$J = J[y(x)]$$

与通常函数的定义不同，泛函的值决定于函数的取形。如上例中，T的变化决定于y(x)的变化，而非某一个自变量x的值进而某一个函数y的值。而是决定于函数集合C中的函数关系，即决定于函数的取形。

通常，泛函多以积分形式出现，如:

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

其中，F(x,y,y`)称为泛函的核。

2.2泛函的极值与变分

在泛函的概念下，最速落径问题归结为泛函T[y(x)]的极值问题，**所谓变分法,就是求泛函的极值问题**。研究泛函极值问题的方法归为两类：直接法与间接法。要讨论间接法，先讨论泛函的变分问题。

设有连续函数y(x)，将其微小变形为y(x)+tn(x)。

其中t是一个小参数，tn(x)称为y(x)的变分，记为δy。

此时，函数y`(x)相应变形为：

$$y' + (\delta y)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(y + t\eta)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + t \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \eta}{\Delta x}$$

$$= y'(x) + t\eta'(x)$$

即 $$\delta y' = t\eta'(x) = \frac{d}{dx}(\delta y)$$

导数的变分等于变分的导数,**变分微分运算可交换次序**。

设

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

中F(x,y,y`)二阶可导，y``连续！如果函数y(x)存在变分δy时，泛函J的变化为：

$$\Delta J = J[y(x) + t\eta(x)] - J[y(x)]$$

$$= \int_a^b [F(x, y + t\eta, y' + t\eta') - F(x, y, y')]dx$$

$$= \int_a^b [\frac{\partial F}{\partial y} t\eta + \frac{\partial F}{\partial y'} t\eta' + t\text{的高阶项}]dx$$

$$F(x, y + t\eta, y' + t\eta')$$ 相对于y、y'作Tayler展开，抵消t的0次项，保留t的1次项，略去t的高阶项。

可得：

上式称泛函 J [y（x）]第一次变分！！！简称变分，记为：

3.泛函极值的必要条件——欧拉方程

设泛函 J [y（x）]的极值问题有解，记为y = y(x)；现在来推导此解y（x）满足的常微分方程。

设y=y（x）有变分δy=tn(x)， 则

$$\Delta J[y(x)+t\eta(x)]$$

可视为t的函数。

表示为：

$$\Phi(t)=J[y(x)+t\eta(x)]$$

这样，就把原来的泛函的极值问题转变成这种普通函数的极值问题。

令：

$$\frac{d\Phi}{dt}\Big|_{t=0}=0$$

即：

$$\left.\frac{\partial J[y(x)+t\eta(x)]}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

将

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

代入上式，得:

$$\left.\frac{\partial J[y(x)+t\eta(x)]}{\partial t}\right|_{t=0}=\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}F(x,y+t\eta,y'+t\eta')\Big|_{t=0}dx=0$$

即:

$$\int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta')dx=0$$

同乘t 得:

泛函取极值的必要条件是其变分为0，或者说，泛函J的极值函数y(x)必须是满足泛函的变分dJ=0的函数类。**所以泛函的极值问题称为变分问题**。

又因为:

根据分部积分公式可以知道：

在简单变分问题中，端点是固定的：

$$\delta y\big|_{x=a}=0,\delta y\big|_{x=b}=0$$

所以可以得到：

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right](\delta y)\,dx=0$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

这就是变分学中大名鼎鼎的**“欧拉-朗格朗日条件”**！！！

欧拉(Euler)方程是泛函有极值的必要条件。

4.经典最速落径问题求解

根据引言一节，最速路径问题用泛函描述为：

$$\delta \int_A^B \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = 0$$

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

解：由于
欧拉方程变形为：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

提取公共部分，可得：

简化为：

$$F - y'\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = C$$

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

代入原方程
，得：

求出偏导数得：

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} \cdot \frac{2y'}{2\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} = c$$

通分，并取平方可得

$$\frac{1}{y(1 + y'^2)} = c^2$$

取.y(1+y`*y`)=c1,得：

$$\frac{\sqrt{c_1 - y}}{\sqrt{y}} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{\sqrt{y}\,dy}{\sqrt{c_1 - y}} = dx$$

令

$$y = c_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{c_1}{2}(1 - \cos\theta)$$

代入上式可得：

$$dx = c_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{c_1}{2}(1 - \cos\theta) d\theta$$

因此，我们就可以得到摆线得参数方程：

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{c_1}{2}(\theta - \sin\theta) + c_2 \\ y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

常数c1 、c2由A、B位置决定。

5.参考资料

1.钱伟长. 变分法及有限元[M]. 科学出版社, 1980.

2.郭大钧. 非线性泛函分析-第2版[M]. 山东科学技术出版社, 2001.