第二章 变分法（Variational Approach）

最优控制所要解决问题的是：在一定的约束条件下，求使性能指标达到极大（或极小）值的控制函数。这里考虑的约束条件一般为由向量微分方程描述的控制对象特性，而性能指标则一般是用泛函来描述。也就是说，最优控制问题实际上是在微分方程约束下求泛函的条件极值问题，而这就是一个变分问题，需要用变分法求解。

变分法是近代数学中的一个完整分支，是研究最优控制问题的重要工具。为了理解变分法的原理，有必要首先了解相关的基础知识。

2．1 赋范线性空间

1. 距离的定义

数学上的距离定义是表示空间中两点之间远近的一个数，有如下性质：

1) 非负性。即距离大于等于零，且只在两点重合时才为零；

2) 与两点顺序无关，为标量；

3) 两点间最短距离是连接这两点的直线。

2. 距离空间定义

定义 2-1：设 X 是一个非空集合，X 为距离空间是指在 X 中定义的一个双变量实函数 d(x,y)，满足

1) $d(x, y) \geq 0$，$x, y \in X$，

$d(x, y) = 0$, iff $x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $x, y, z \in X$。

称 d(x, y)为 x 与 y 间距离，亦称 X 上的距离。

注 1：距离的概念主要为了刻画“任意逼近”的概念。

注 2：距离空间依距离定义的不同而不同。

3. 点列收敛定义

定义 2-2：距离空间 X 中点列 x_n 收敛于 x_0（或点列 x_n 以 x_0 为极限）是指

$$d(x_n, x_0) \to 0,\quad 当\ n \to \infty,\quad 记为 \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

4. 距离空间 X 的基本序列

定义 2-3：距离空间 X 的基本序列或柯西序列(Couchy Sequence)是指，对 X 中点列 x_n，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在足够大 N，当 m，n>N 时，有 $d(x_m, x_n)<\varepsilon$。

5. 距离空间 X 中的球

点集 $S(x_0, \tau) = \{ x \in X \mid d(x, x_0) < \tau,\ \tau>0\}$称为 X 中的开球；

$\bar{S}(x_0, \tau) = \{ x \in X \mid d(x, x_0) \leq \tau,\ \tau>0\}$称为 X 中的闭球；

$\Sigma(x_0, \tau) = \{ x \in X \mid d(x, x_0) = \tau,\ \tau>0\}$称为 X 中的球面，

均以 x_0 为圆心，τ 为半径。

6. 内点

定义 2-4：设 $\bar{M}$ 为 X 中的子集，点 $x \in X$ 为 $\bar{M}$ 内点的条件为，存在一个以 x 为中心的开球 $S(x_0, \varepsilon) \subset \bar{M}$。

$\overline{M}$ 的所有内点的全体称为 $\overline{M}$ 的内部，记为 $\mathrm{Int}\overline{M}$ 。

7. 开集

定义 2-5：如果 X 中子集 $\overline{M}$ 的所有点均为它自己的内点，即 $\overline{M}=\mathrm{Int}\overline{M}$ ，则 $\overline{M}$ 成为开集。

8. 极限点

定义 2-6：设 M 是距离空间 X 中的子集，若存在 M 中点列$\{x_n\}$，它收敛于 $x_0\in X$，且 $x_n\neq x_0$，则称 x_0 是 M 的一个极限点。

注意，M 的极限点不一定属于 M。例如，对 $M=\{r\mid 0<r\leqslant 1\}$，设 n 为自然数，则点列 $\frac{1}{n}\in M$，而其收敛于 $0\notin M$。

9. 闭集

定义 2-7：设 M 是空间 X 中的子集，M 的极限点全体组成的集称为 M 的导集，记作 M'。若 $M'\subset M$，则称 M 为闭集。$\overline{M}=M\cup M'$ 称为 M 的闭包。

10. n 维线性空间

定义 2-8：设 R^n 为 n 维向量的全体，x、y 为其中的向量，α 为标量。若满足

1） $x+y\in R^n$，且 $x+y=y+x$；

2） $\alpha x\in R^n$，且 $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$；

则 R^n 称为 n 维线性空间。

11. 赋范线性空间

定义 2-9：若线性空间 R^n 中每一个元素 x 都有范数 $\|x\|$，且满足下列范数三公理：

1） $\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0$ iff $x=0$；

2） $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；

3） $\|\alpha x\|=\alpha\|x\|$，α 为任意常数，

则称 R^n 为赋范线性空间。

2．2 线性算子及泛函

1. 线性算子

定义 2-10： n 维线性空间 R^n 到 m 维线性空间 R^m 的线性算子（映射）是指一确定对应规律 $y=f(x)$ ，使每一个 $x\in R^n$ 有一个对应的 $y\in R^m$，且满足线性条件

1）$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$， $\forall x_1,x_2\in R^n$

2）$f(\alpha x)=\alpha f(x)$， $x\in R^n$， $\alpha\in R$

2. 线性算子的微商

定义 2-11：设 $y=f(x)$ 是 n 维线性空间 R^n 中子集 D 到 m 维线性空间 R^m 的算子，且在 D 中当由点 x 转到 $x+\Delta x$ 时，y 变为 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$。若存在一个由 D 到 R^m 的线性算子 k，使

$f(x+\Delta x)-f(x)=k\Delta x+\theta\|\Delta x\|$

其中 $\theta\|\Delta x\|$ 是 $\|\Delta x\|$ 的高阶无穷小量，即

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\frac{\theta\|\Delta x\|}{\|\Delta x\|}=0$$

则称线性算子 k 为 $f(x)$在 x 处的微商，记为 $k=f'(x)$， 并称 $f(x)$在 x 处可微。

由此可同样定义二阶至 n 阶微商，并解释 f (x)在 x 处 n 次可微含义

二阶微商 $(f'(x))'=f''(x)$

……

n 阶微商 $(f^{(n-1)}(x))'=f^{(n)}(x)$

3. 泛函

定义 2-12：由赋范线性空间 R^n 到数域 R 的算子称为 R^n 上的泛函。

例：求曲线弧长的公式即为泛函

x y 平面上两点 $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$ 间的弧长公式

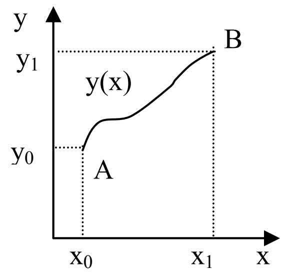

图 2-1 曲线弧长

$$\widehat{AB}=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

曲线（函数）$y = y(x)$通过 A、B 两点，曲线（函数）不同则弧长不同，即弧长是曲线（函数）$y = y(x)$的函数，记为 $J[y(x)]$，则

$$\widehat{AB}=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx = J[y(x)]$$

4. 泛函宗量及其变分

泛函宗量——泛函 $J[y(x)]$的宗量是函数 $y(x)$;

泛函宗量的变分 $\delta y(x)$定义为 $\delta y(x)= y(x) - y_0(x)$

5. 线性泛函

定义 2-13：线性空间 R^n 上的泛函 J 为 R^n 上的线性泛函，*iff*

$$J(\alpha x+\beta y)=\alpha J(x)+\beta J(y)\ ,\quad \forall x,y\in R^n\quad ,\forall\alpha,\beta\in R$$

例如：积分

$$\int_a^b[\alpha\Phi(x)+\beta\Psi(x)]dx=\alpha\int_a^b\Phi(x)dx+\beta\int_a^b\Psi(x)dx$$

为线性泛函。

6. 连续泛函

定义 2-14：线性空间 R^n 上的泛函 J 为 R^n 上的连续泛函，*iff*

对任意 $x_0, x\in R^n$, $\varepsilon\in R$, $x= x_0+\varepsilon\Delta x$，当

$$\|x-x_0\|\to 0(\varepsilon\to 0)$$

时，有

$$J(x)\to J(x_0)$$

连续泛函的重要性在于，任意一点的泛函值可以用该点附近的泛函值任意逼近。而在有穷维线性空间上，任何线性泛函都是连续的。

7. 泛函变分

泛函变分可以从两种不同描述角度加以定义。

定义 2-15（1）：若赋范线性空间 R^n 上的泛函 $J(x)$作为算子在 x_0 处是可微的，则其微分 $J'(x)\Delta x$ 称为泛函 $J(x)$在 $x = x_0$ 处的变分，记为 $\delta J(x_0,\Delta x)$。

该定义表明泛函 $J(x)$的变分就是泛函增量$\Delta J = J(x+\Delta x) - J(x)$的线性主部。

相应可定义：

$\delta^2 J(x_0,\Delta x) = J''(x_0)(\Delta x)^2$ 为泛函的二阶变分,

………

$\delta^{n} J(x_0, \Delta x) = J^{(n)}(x_0)(\Delta x)^{n}$ 为泛函的 n 阶变分。

定义 2-15（2）：泛函 $J(x_0+\varepsilon\Delta x)$（$\varepsilon$ 在区间[0，1]取值，$\varepsilon=0$ 时泛函为 $J(x_0)$，$\varepsilon=1$ 时泛函为 $J(x_0+\Delta x)$）对 ε 的导函数在 $\varepsilon=0$ 时的值，即 $\left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J(x_0+\varepsilon\Delta x)\right|_{\varepsilon=0}$，称为 $J(x)$ 在 $x=x_0$ 处的变分。

上述两种定义本质相同，即有：

$$\delta J(x_0,\Delta x)=\left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J(x_0+\varepsilon\Delta x)\right|_{\varepsilon=0},\quad 0\le\varepsilon\le 1 \tag{2-2-1}$$

定理 2-1：设 $J(x)$ 是赋范线性空间 R^n 上的泛函，若在 $x=x_0$ 处可微，则其变分为（2-2-1）式。

证明：

$\because J(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微

$$\therefore \left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J(x_0+\varepsilon\Delta x)\right|_{\varepsilon=0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(x_0+\varepsilon\Delta x)-J(x_0)}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta J(x_0,\varepsilon\Delta x)+\theta(x_0,\varepsilon\Delta x)}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J'(x_0)\varepsilon\Delta x+\theta(x_0,\varepsilon\Delta x)}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon J'(x_0)\Delta x}{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\theta(x_0,\varepsilon\Delta x)}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\,\delta J(x_0)\Delta x}{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\theta(x_0,\varepsilon\Delta x)}{\varepsilon}=\delta J(x_0,\Delta x)$$

同样可证，若在 $x=x_0$ 处 $J(x)$ n 次可微，则其 n 阶变分为

$$\delta^n J(x_0+\Delta x)=\left.\frac{\partial^n}{\partial\varepsilon^n}J(x+\varepsilon\Delta x)\right|_{\varepsilon=0},\quad 0\le\varepsilon\le 1$$

2．3 变分原理

变分原理讨论泛函的极值及其条件问题，是变分法的理论基础。

1．泛函的极值

定义 2-16：设 $J(x)$ 为 R^n 上某子集 D 中的泛函，对于 D 中某一点 $\hat{x}\in D$，称泛函 $J(x)$在 $x=\hat{x}$ 处达到极小（或极大）值，是指 $J(x)\geq J(\hat{x})$（或 $J(x)\leq J(\hat{x})$）。其中，

$$x\in U(\hat{x},\sigma)\subset D,\sigma>0$$

$$U(\hat{x},\sigma)=\left\{x \middle| \|x-\hat{x}\|<\sigma\ ,x\in R^n\ \right\}$$

$\hat{x}$ 被称为泛函 $J(x)$的极小（或极大）点。

2．泛函极值的必要条件

定理 2-2：设 $J(x)$ 是在 R^n 的某个开子集 $G\subset R^n$ 上定义的泛函，且在 $x=\hat{x}$ 处有一阶变分，如果泛函 $J(x)$在 $\hat{x}$ 处达到极值，则其一阶变分为 0，即

$$\delta\ J(\hat{x}\ ,\Delta x)=0$$

证明：设 $J(x)$在 $x=\hat{x}$ 处达到极小值，则存在一正数 σ >0，使当 $\hat{x}+\Delta x\in U(\hat{x},\sigma)$ 时，有 $J(\hat{x}+\Delta x)\geq J(\hat{x})$。对于确定的 $\hat{x}$ 和 $\hat{x}+\Delta x$，作为 ε 的函数，$J(\hat{x}+\varepsilon\Delta x)=\varphi(\varepsilon),(0\leq\varepsilon\leq 1)$ 在 ε =0 处达到极小值，则有 $\varphi'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}=0$，即 $\delta\ J(\hat{x}\ ,\Delta x)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}J(\hat{x}+\varepsilon\Delta x)\big|_{\varepsilon=0}=0$。证毕。

3．泛函极值的充分条件

定理 2-3：设 $J(x)$ 是在 R^n 的某个开子集 $G\subset R^n$ 上定义的泛函，且在 $x=\hat{x}$ 处有二阶变分，如果泛函 $J(x)$在 $\hat{x}$ 处达到极小值，则其二阶变分大于等于 0，即 $\delta^2 J(\hat{x}\ ,\Delta x)\geq 0$；反之，如果泛函 $J(x)$在 $\hat{x}$ 处达到极大值，则其二阶变分小于等于 0，即 $\delta^2 J(\hat{x}\ ,\Delta x)\leq 0$。

证明：以极小值为例。

∵ $J(x)$在 $x=\hat{x}$ 处达到极小值，则存在 σ >0，使当 $\hat{x}+\Delta x\in U(\hat{x},\sigma)$ 时，有 $J(\hat{x}+\Delta x)\geq J(\hat{x})$。对于确定的 $\hat{x}$ 和 $\hat{x}+\Delta x$，作为 ε 的函数，$J(\hat{x}+\varepsilon\Delta x)=\varphi(\varepsilon)\quad(0\leq\varepsilon\leq 1)$ 在 ε =0 处达到极小值，除应有 $\varphi'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}=0$，

还应有 $\varphi''(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0}\geq 0$，即 $\delta\ J(\hat{x}\ ,\Delta x)=\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}J(\hat{x}+\varepsilon\Delta x)\big|_{\varepsilon=0}\geq 0$。证毕。

2．4 无约束条件的泛函极值问题—Euler 方程

考虑轨线 $x(t)$，设其始端 $x(t_0)=x_0$ 和终端 $x(t_f)=x_f$ 均属已知，试寻求连续可微的极值轨线 $\hat{x}(t)$，使性能泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\dot{x}(t),t]\,dt \tag{2-4-1}$$

达到极值，其中被积函数 $L[x(t),\dot{x}(t),t]$ 是连续可微函数。

这里，轨线 $x(t)$ 除始端和终端固定及连续可微要求外，不受其他条件约束。

如图 2-2 所示，假定极值轨线为 $\hat{x}(t)$，其附近一容许轨线为 $\hat{x}(t)+\eta(t)$，其中 $\eta(t)$ 连续可微。$\hat{x}(t)$ 和 $\hat{x}(t)+\eta(t)$ 两轨线间所有容许轨线可表示为

$$x(t)=\hat{x}(t)+\varepsilon\eta(t),0\le\varepsilon\le1 \tag{2-4-2}$$

当 ε =0 时，即为极值曲线 $\hat{x}(t)$，有

$$\hat{x}(t)=x(t)\big|_{\varepsilon=0}$$

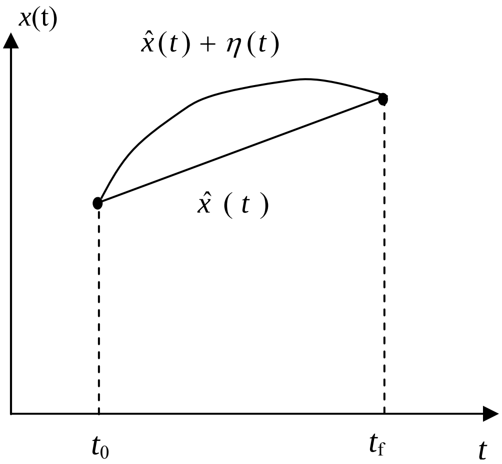

图 2-2 极值轨线与容许轨线

将（2-4-2）代入（2-4-1）得

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} L[\hat{x}(t)+\varepsilon\eta(t),\dot{\hat{x}}(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t),t]\,dt \tag{2-4-3}$$

$J(x)$是 ε 的函数，在极值轨线上满足

$$\delta J(x)=\frac{\partial J(x)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0 \tag{2-4-4}$$

由（2-4-1)、(2-4-2）和（2-4-3）式定义显然有

$$\lim_{\varepsilon\to0}x(t)=\hat{x}(t)$$

和

$$\lim_{\varepsilon\to0}J(x)=J(\hat{x})$$

由（2-4-3）和（2-4-4）可得

$$\frac{\partial J(x)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_f}\left\{\eta(t)\frac{\partial L[x(t),\dot{x}(t),t]}{\partial x(t)}+\dot{\eta}(t)\frac{\partial L[x(t),\dot{x}(t),t]}{\partial\dot{x}(t)}\right\}dt=0$$

即 $$\int_{t_0}^{t_f}\eta(t)\frac{\partial L[x(t),\dot{x}(t),t]}{\partial x(t)}dt+\int_{t_0}^{t_f}\dot{\eta}(t)\frac{\partial L[x(t),\dot{x}(t),t]}{\partial\dot{x}(t)}dt=0 \tag{2-4-5}$$

对上式左边第二项分部积分，有

$$\int_{t_0}^{t_f}\dot{\eta}(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}dt=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\eta(t)\Big|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\eta(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}dt \qquad \text{（2-4-6）}$$

将（2-4-6）式代入（2-4-5）式，有

$$\int_{t_0}^{t_f}\eta(t)\left\{\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right\}dt+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\eta(t)\Big|_{t_0}^{t_f}=0 \qquad \text{（2-4-7）}$$

因两端点固定，$\eta(t_0)=\eta(t_f)=0$，故（2-4-7）式化为

$$\int_{t_0}^{t_f}\eta(t)\left\{\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right\}dt=0 \qquad \text{（2-4-8）}$$

至此，我们引入变分预备定理。

变分预备定理：

设 $M(t)$是区间$[t_0,t_1]$上的 n 维连续向量函数，如果对于任意连续向量函数 $\eta(t)$，$\eta(t_0)=\eta(t_1)=0$，皆有$\int_{t_0}^{t_1}M(t)\eta(t)dt=0$，则在区间$[t_0,t_1]$上 $M(t)\equiv 0$。

根据变分预备定理，由于在极值轨线 $\hat{x}(t)$ 处（2-4-8）式对任意 $\eta(t)$都应成立，所以有

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\equiv 0 \qquad \text{（2-4-9）}$$

由此，可以得到以下定理：

定理 2-4：设已知轨线 $x(t)$ 及其始端 $x(t_0)=x_0$ 和终端 $x(t_f)=x_f$，则其使性能泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f}L[x(t),\dot{x}(t),t]\,dt \qquad \text{（2-4-10）}$$

取极值的必要条件是轨线 $x(t)$ 为下列微分方程

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 \qquad \text{（2-4-11）}$$

或其展开形式

$$L_x-L_{\dot{x}t}-L_{\dot{x}x}\dot{x}-L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}=0 \qquad \text{（2-4-12）}$$

的解。

方程（2-4-11）即为欧拉方程(Euler Equation)，也称为欧拉－拉格朗日方程(Euler-Lagrange Equation)。

必须注意的是，欧拉方程只是泛函取极值的必要条件。

一般情况下，欧拉方程是二阶非线性微分方程，属于两点边值问题。

例 2－1：

设轨线 $x(t)$ 的始端 $x(0)=0$ ，终端 $x(\frac{\pi}{2})=1$ ，求使性能泛函 $J(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\dot{x}^2(t)-x^2(t)]\,dt$ 达到极值的极值轨线。

解：这里 $L[x(t),\dot{x}(t),t]=\dot{x}^2(t)-x^2(t)$

由欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$， 有

$$-2x(t)-\frac{d}{dt}[2\dot{x}(t)]=0$$

整理可得 $\ddot{x}(t)+x(t)=0$

解此微分方程得 $x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$

考虑边界条件 $x(0)=0$ 和 $x(\frac{\pi}{2})=1$ 得 $c_1=0$ ，$c_2=1$

∴ $x(t)=\sin t$ 即为所求的极值曲线。 ##

以上欧拉方程的推导是将 $J(x)$看作是 ε 的函数，按一般微积分运算中求极值方法处理。另一种方法可以直接应用变分的定义表达式求性能泛函极值。

对性能泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f}L[\hat{x}(t)+\varepsilon\eta(t),\dot{\hat{x}}(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t),t]\,dt \tag{2-4-13}$$

将 L 在 ε =0 的邻域展开为 Taylor 级数

$$L[\hat{x}(t)+\varepsilon\eta(t),\dot{\hat{x}}(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t),t]=L[\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),t]+\frac{\partial L}{\partial x}\varepsilon\eta(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\varepsilon\dot{\eta}(t)+H.O.T. \tag{2-4-14}$$

其中，$H.O.T.$为关于 $\eta(t)$和 $\dot{\eta}(t)$ 的高阶无穷小项。

泛函的增量为

$$\Delta J=J(\hat{x}+\varepsilon\eta)-J(\hat{x})$$

即

$$\Delta J=\int_{t_0}^{t_f}\{L[\hat{x}(t)+\varepsilon\eta(t),\dot{\hat{x}}(t)+\varepsilon\dot{\eta}(t),t]-L[\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t),t]\}dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}\{\frac{\partial L}{\partial x}\varepsilon\eta+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\varepsilon\dot{\eta}+H.O.T.\}dt \tag{2-4-15}$$

可定义 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 的一阶变分为 $\delta x=\varepsilon\eta(t)$ 和 $\delta\dot{x}=\varepsilon\dot{\eta}(t)$，则有

$$\Delta J=\int_{t_0}^{t_f}\{\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}+H.O.T.\}dt \tag{2-4-16}$$

取泛函增量其 ΔJ 的线性主部即为其一阶变分

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\{\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\}dt \tag{2-4-17}$$

上式分部积分后有

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right\}\delta x dt+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f} \tag{2-4-18}$$

当端点固定时有 $\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$，所以有 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}=0$，即

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right\}\delta x dt \tag{2-4-19}$$

由泛函极值必要条件 $\delta J=0$、δx 为任意取值以及变分预备定理，即可求得欧拉方程为

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 \tag{2-4-20}$$

与（2-4-11）式结果相同。

欧拉方程可以推广到 n 维向量微分方程，即 n 维状态空间。

定理 2-5：

在 n 维状态空间中，已知状态向量 $\mathbf{x}(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 的起点 $\mathbf{x_0}(t)=[x_{10}(t),x_{20}(t),\cdots\cdots,x_{n0}(t)]^{\mathrm{T}}$ 和终点 $\mathbf{x_f}(t)=[x_{1f}(t),x_{2f}(t),\cdots\cdots,x_{nf}(t)]^{\mathrm{T}}$，则性能泛函

$$J[\mathbf{x}(t)]=\int_{t_0}^{t_f}L[\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),t]\,dt \tag{2-4-21}$$

取极值的必要条件，是轨线 $\mathbf{x}(t)$ 为向量微分方程

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}=0 \tag{2-4-22}$$

的解，其中 $\mathbf{x}$ 应有连续的二阶导数，而 L 则至少两次连续可微。