泛函分析

北京大学 龚诚欣
wqgcx.github.io

0 简介

• 变分问题、泛函的极值或求值问题、微分方程、积分方程、物理问题
• 无穷维空间（一般是由函数构成的空间）上的极值理论：函数→泛函，映射→算子
• 无穷维空间的解析几何
• 有限→无限

1 度量空间

1.1 压缩映像原理

定义：H：非空集合，ρ：H×H→R，称(H,ρ)是度量空间（距离空间），若ρ满　足：1° ρ(x,y)≥0，ρ(x,y)=0 当且仅当 x=y；2° ρ(x,y)=ρ(y,x)；3° ρ(x,z)≤ρ(x,y)+ρ(y,z)。

定义：$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$∈(H,ρ)，如果存在 x_0∈H 使得 lim ρ(x_0,x_n)=0，则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 x_0，记为 lim x_n=x_0 或 x_n→x_0，n→+∞。

定义：$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m,n > N, \rho(x_m,x_n) < \varepsilon$，则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个基本列（Cauchy 列）。

定义：E⊂(H,ρ)，若 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ E 且 x_n→x_0 有 x_0∈E，则称 E 为闭集。若(H,ρ)的所有 Cauchy 列都是收敛列，则称完备。

定义：映射 T:(H,ρ)→(L,r)，若 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ∈H，x_n→x_0∈H，有 r(T(x_n),T(x_0))→0，即 T(x_n)→T(x_0)，则称 T 连续。

定义：映射 T:(H,ρ)→(H,ρ)，若存在α∈(0,1)，s.t.∀x,y∈H，ρ(T(x),T(y))≤αρ(x,y)，则称 T 为压缩映射。

定理：（Banach 不动点定理/压缩映像原理）(H,ρ)完备，T:(H,ρ)→(H,ρ)为压缩映射，则 T 在 H 上有唯一的不动点。

注记：条件可改为：
1° ρ(Tx,Ty)≤ρ(x,y)且等号当且仅当 x=y（次压缩映射）；
2° T 的像是紧集。
“紧集”条件不可去，如考虑 Tx=π/2+x-arctanx。

应用：F(t,x)关于 x 在 0 附近一致 Lipchitz 连续，即 $\exists \delta > 0, L > 0, \forall t, \forall x,y \in B(0,\delta)$，$|F(t,x)-F(t,y)| \le L|x-y|$，则存在 h_0>0，当 h<h_0 时，方程 $\frac{dx}{dt} = F(t,x), x(0) = \xi$（初值问题）在 C[-h,h]上有唯一解。

应用：（隐函数存在定理）f:R^n×R^m→R^m 满足 1° f(x_0,y_0)=0，(x_0,y_0)∈(R^n×R^m)；2° f，$\frac{\partial f}{\partial y}$∈C(U×V)，其中($x_0$,$y_0$)∈U×V⊂$R^n$×$R^m$；3° $\det(\frac{\partial f}{\partial y})|_{(x_0,y_0)} \ne 0$；则存

在 (x_0,y_0) 的邻域 $U_0\times V_0\subset U\times V$ 以及唯一的连续函数 $u:U_0\to V_0$ s.t.：1° $f(x,u(x))=0$，$x\in U_0$；2° $u(x_0)=y_0$。

Fredholm 第二类积分方程：$x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k(t,s)x(s)ds$，$\lambda$充分小；

1° 当 $f(t)\in C[a,b]$，$k(t,s)\in C([a,b]\times[a,b])$时，x 在 $C[a,b]$中有唯一解；
2° 当 $f(t)\in L^2[a,b]$，$k(t,s)\in L^2([a,b]\times[a,b])$时，x 在 $L^2[a,b]$中有唯一解。

1.2 完备化

定义：(H,ρ),(H_1,ρ_1)是距离空间，若存在满射 $f:H\to H_1$ 使得$\rho(x,y)=\rho_1(fx,fy)$；则称 f 为等距同构映射。若$(H,\rho)\to(H_1,\rho_1)\subset(H_2,\rho_2)$，则称$(H,\rho)$等距嵌入$(H_2,\rho_2)$。
定义：(H,ρ)是距离空间，$E\subset H$。若$\forall x\in H$，存在$\{x_n\}\subset E$ 使得 $x_n\to x$ $(n\to\infty)$，则称 E 是 H 的稠密子集。
定义：在等距同构意义下含有(H,ρ)的最小的完备度量空间称为(H,ρ)的完备化。
命题：$(H,\rho)\subset(H_1,\rho_1)$，其中$\rho=\rho_1|_{H\times H}$，H 在 H_1 中稠密，(H_1,ρ_1)完备，则(H_1,ρ_1)是(H,ρ)的完备化空间。
定理：（完备化定理）每一个度量空间都有在等距同构意义下唯一的完备化空间。

1.3 列紧集

定义：(H,ρ)是距离空间，A 是 H 的一个子集，A 称为是有界的，如果$\exists x_0\in H$ 及 $r>0$，使得 $A\subset B(x_0,r)$。
定义：(H,ρ)是距离空间，$E\subset H$。若 E 中任意点列有收敛子列（极限在 H 中），称 E 列紧；若 E 中任意点列有收敛子列（极限在 E 中），称 E 自列紧；若(H,ρ)是列紧的，称为列紧空间。
注记：列紧空间的（闭）子集是（自）列紧的；(H,ρ)列紧，则完备。
定义：(H,ρ)是距离空间，$M\subset H$。若 $N\subset M$ 满足$\exists\varepsilon>0$，$\forall x\in M$，$\exists y\in N$ 使得$\rho(x,y)<\varepsilon$，则称 N 为 M 的一个ε网；若 N 是有限集，则称为有穷ε网；若$\forall\varepsilon>0$ 存在 M 的有穷ε网，则称 M 完全有界。
注记：R^n 中有界$\Leftrightarrow$完全有界。
定理：（Hausdorff）(H,ρ)是距离空间，$M\subset H$。则：1° M 列紧$\Rightarrow$完全有界；2° M 完全有界+H 完备/M 闭$\Rightarrow$M 列紧。
定理：(H,ρ)是距离空间，$M\subset H$。则 M 紧$\Leftrightarrow$自列紧(列紧+闭)。
定义：(H,ρ)是距离空间，若有可数的稠密子集，则称可分。
注记：完全有界$\Rightarrow$可分。
考虑(M,ρ)紧度量空间，$C(M)=\{u|M\to R$ 连续$\}$，$d(u,v)=\max\{|u(x)-v(x)|,x\in M\}$，则$(C(M),d)$完备。
定义：设 $F\subset C(M)$。
1° F 一致有界：$\exists M_0>0$，使得$\forall f\in F$，$\forall x\in M$，成立$|f(x)|\leq M_0$；
2° F 等度连续：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得$\forall f\in F$，$\forall x,x'\in M$ 满足$\rho(x,x')<\delta$，成立$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$。
定理：（Arzela-Ascoli）(M,ρ)紧度量空间，$F\subset C(M)$列紧$\Leftrightarrow$F 一致有界且等度连续。

1.4 线性赋范空间

引入：考虑线性度量空间(H,ρ)，K 是数域，则希望有：
1° 加法对ρ连续，即$\rho(x_n,x)\to0$，$\rho(y_n,y)\to0$，则$\rho(x_n+y_n,x+y)\to0\Leftrightarrow\rho$有平移不变性，即$\rho(x,y)=\rho(x+z,y+z)$；
2° 数乘对ρ连续，即 i) $\rho(x_n,x)\to0$，则$\forall a\in K$，$\rho(ax_n,ax)\to0$；ii) $a_n\to a\in K$，则$\forall x$

$\in H$，$\rho(a_n x, ax)\to 0$。
设 $p:H\to R$，$p(x):=\rho(x,0)$，则由距离公理可得函数 p 的条件。
定义：H 是线性空间，函数$\|\cdot\|$满足：
1° $\forall x\in H$，$\|x\|\geqslant 0$，且等号成立当且仅当 $x=0$；2° $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；
3° $\forall x\in H$，$\|-x\|=\|x\|$；4° $\lim\limits_{a_n\to 0}\|a_n x\|=0$，$\lim\limits_{\|x_n\|\to 0}\|ax_n\|=0$；
则称$\|\cdot\|$为 H 的一个准范数。以$\|x_n-x\|\to 0$ 定义 $x_n\to x$，则称 H 为 F*空间；完备的 F*空间称为 F 空间。
注记：准范数可诱导度量$\rho(x,y)=\|x-y\|$，满足平移不变性、加法连续性和数乘连续性。
定义：H 是线性空间，函数$\|\cdot\|$满足：
1° $\forall x\in H$，$\|x\|\geqslant 0$，且等号成立当且仅当 $x=0$；2° $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；
3° $\forall a\in K$，$x\in H$，$\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$；
则称$\|\cdot\|$为 H 的一个范数。此时称 H 为 B*空间；完备的 B*空间称为 B 空间。
定义：H 是线性空间，映射 $p:H\to R$ 满足：
1° $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$（次可加性）；2° $p(ax)=a\cdot p(x)(a>0)$（正齐次性）；
则称 p 为次线性泛函。若 p 还满足 $p(x)\geqslant 0$ 且 $p(ax)=|a|\cdot p(x)$，则称 p 为半范数。
定义：对于线性空间 H 上的范数$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$：
1° 若$\|x_n\|_1\to 0\Rightarrow\|x_n\|_2\to 0$，则称$\|\cdot\|_1$ 比$\|\cdot\|_2$ 强；
2° 若$\|x_n\|_1\to 0\Leftrightarrow\|x_n\|_2\to 0$，则称$\|\cdot\|_1$ 和$\|\cdot\|_2$ 等价。
命题：1° $\|\cdot\|_2$ 比$\|\cdot\|_1$ 强$\Leftrightarrow\exists C>0$，$\forall x\in H$，$\|x\|_1\leqslant C\|x\|_2$；
2° $\|\cdot\|_2$ 和$\|\cdot\|_1$ 等价$\Leftrightarrow\exists C_1,C_2>0$，$\forall x\in H$，$C_1\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant C_2\|x\|_2$。
定理：H 是有限维线性空间，则$\|\cdot\|_1$ 和$\|\cdot\|_2$ 一定等价（与欧式范数等价）。
推论：有限维 B*空间一定是 B 空间；B*空间的有限维子空间一定为闭子空间。
推论：$(H,\|\cdot\|)$是有限维 B*空间，p 为次线性泛函。若 $p(x)\geqslant 0$ 且 $p(x)=0$ 当且仅当 $x=0$，则$\exists C_1,C_2>0$，使得 $C_1\|x\|\leqslant p(x)\leqslant C_2\|x\|$。
定义：$(H,\|\cdot\|)$是 B*空间，若$\forall x\neq y$，$\|x\|=\|y\|=1\Rightarrow\forall a,b>0$ 且 $a+b=1$，有$\|ax+by\|<1$ 成立，则称$(H,\|\cdot\|)$严格凸。
定理：（最佳逼近问题）$(H,\|\cdot\|)$是 B*空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$线性无关。$\forall x\in H$，存在 $x_0\in\mathrm{Span}\{e_1,\cdots,e_n\}:=M$，s.t.$\|x-x_0\|=\min\{\|x-y\| \mid y\in M\}$，且当$(H,\|\cdot\|)$严格凸时唯一。
定理：B*空间$(H,\|\cdot\|)$有限维$\Leftrightarrow$单位球面列紧。
引理：（F.Riesz 引理）如果 H_0 是 B*空间 H 的一个真闭子空间，那么$\forall 0<\varepsilon<1$，$\exists y\in H$ s.t. $\|y\|=1$ 且$\|y-x\|\geqslant 1-\varepsilon$，$\forall x\in H_0$。
1.5 凸集与不动点
回忆：（Brouwer 不动点定理）$B\subset R^n$ 是闭单位球，$T:B\to B$ 连续，则存在 $x\in B$ s.t. $Tx=x$。
定义：H 是线性空间，$E\subset H$，
1° $\forall x,y\in E$，$\lambda\in[0,1]$，有$\lambda x+(1-\lambda)y\in E$，则称 E 为凸集；
2° 若 $0\in E$ 且$\forall x\in H$，$\exists\lambda>0$ s.t. $x/\lambda\in E$，则称 E 为吸收凸集；
3° $\forall x\in E$，有$-x\in E$，则称 E 为对称凸集；
4° 若 $K=C$，$\forall x\in E$，$\alpha\in C$，$|\alpha|=1$，有$\alpha x\in E$，则称 E 为均衡凸集。
定义：H 是线性空间，$E\subset H$，H 中包含 E 的最小凸集称为凸包，记为 Co(E)。
$Co(E)=\{\Sigma\lambda_i x_i(\text{凸组合})|\Sigma\lambda_i=1，\lambda_i\geqslant 0，x_i\in E\}$。

定义：H 是线性空间，凸集 $E\subset H$，$0\in E$，$p(x)=\inf\{\lambda>0|x/\lambda\in E\}$称为 Minkowski 泛函。$p(x)\in[0,+\infty]$，满足正齐次性、次线性性。(H,R):若 E 吸收，则 p(x)是实值函数；若 E 对称，则 p(x)满足齐次性；若 E 吸收且对称，则 p(x)为半模；若 E 还是有界集，则 p(x)为模。(H,C):若 E 吸收且均衡，则 p(x)为半模。
命题：H 是 B*空间，闭凸集 $E\subset H$，$0\in E$，则
1° $E=\{x\in H:p(x)\leqslant 1\}$；2° p(x)下半连续；3° 若 0 为内点，则 E 吸收且 p(x)Lipschitz 连续。
推论 1：$E\subset R^n$ 是紧凸子集，则存在 $m\leqslant n$，使得 E 同胚于 R^m 中的单位球。
推论 2：$E\subset R^n$ 是紧凸子集，$T:E\to E$ 连续，则存在 x s.t. Tx=x。
推论 3：H 是 B*空间，紧凸子集 $E\subset H$，$T:E\to E$ 连续，则存在 x s.t. Tx=x。
定理：（Schauder 不动点定理）H 是 B*空间，闭凸子集 $E\subset H$，$T:E\to E$ 连续且 T(E)列紧，则存在 x s.t. Tx=x。
定义：H 是 B*空间，$E\subset H$，$T:E\to H$ 连续且将有界集映成列紧集，则称 T 为紧映射。
推论：H 是 B*空间，有界闭凸子集 $E\subset H$，若 $T:E\to E$ 紧，则存在 x s.t. Tx=x。
定理：（Caratheodory）$f(t,x)\in C[-h,h]\times[\xi-b,\xi+b]$，$M=\max|f(t,x)|$，则当 $h<b/M$ 时，方程$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)\\x(0)=\xi\end{cases}$在[−h,h]上有解。

1.6 内积空间

定义：H 是线性空间，$a(\cdot,\cdot)$: $H\times H\to K$ 满足 1° $a(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)=\alpha_1a(x_1,y)+\alpha_2a(x_2,y)$；2° $a(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)$=\bar{$\alpha_1$}$a(x,y_1)$+\bar{$\alpha_2$}$a(x,y_2)$，则称为共轭双线性函数。特别地，q(x)=a(x,x)称为由 a 诱导的二次型。
命题：$q(x)\in R$，$\forall x\in H\Leftrightarrow a(x,y)=\overline{a(y,x)}$。

定义：H 上的共轭双线性函数 $a(\cdot,\cdot)$满足：1° $(x,y)=\overline{(y,x)}$；2° $(x,x)\geqslant 0$ 且等号当且仅当 x=0 成立；则称$(H,(\cdot,\cdot),K)$为内积空间。特别地，若 H 完备，则称为 Hilbert 空间。
性质：令||x||=(x,x)^(1/2)，满足：
1° Cauchy-Schwarz 不等式：$|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$，取等号当且仅当线性相关；
2° $(H,\|\cdot\|)$构成 B*空间；
3° $(\cdot,\cdot)$关于$\|\cdot\|$是一个二元连续函数；
4° 内积空间一定严格凸；
5° 平行四边形等式：$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$；
6° 内积可以被平行四边形等式诱导。
定义：$(H,(\cdot,\cdot))$是内积空间，
1° 若(x,y)=0，称正交，记为 $x\perp y$；
2° $\theta=\arccos[(x,y)/(\|x\|\cdot\|y\|)]$；
3° $M\subset H$，$M^\perp:=\{x\in H|\forall y\in M,(x,y)=0\}$；
4° x=y+z 且 $y\perp z$，则$\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$；
5° $\forall n$，$x_n\perp y$，$x_n\to x$，则(x,y)=0；
6° $M^\perp$是闭线性子空间。

定义：H 是内积空间，$S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$，
1° 若$\forall\alpha\neq\beta$，$e_\alpha\perp e_\beta$，称 S 为正交集；
2° 若正交集还满足$\|e_\alpha\|=1$，称 S 为规范正交集；
3° 若 $S^\perp=\{0\}$，称 S 为完备正交集；
4° S 正交规范且$\forall x\in H$，$x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$，则称 S 为一个基。

引理：(Bessel 不等式)H 是内积空间，$\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$规范正交集，则$\forall x\in H$，$\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\leqslant\|x\|^2$。

推论：（收敛性）H 是 Hilbert 空间，$S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$规范正交集，则$\forall x$，$\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\in H$，且$\|x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2$。

注记：若 A 是可数集，称$\sum_{\alpha=1}^{+\infty}(x,e_\alpha)e_\alpha$称为 Fourier 级数。

命题：非零的内积空间 H 中有完备正交集。
定理：H 是 Hilbert 空间，S 是规范正交集，则以下等价：
1° S 是完备的；
2° $\forall x\in H$，$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2$；
3° S 是一个基；
4° $(x,y)=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)\overline{(y,e_\alpha)}$。

定义：Hilbert 空间$(H_1,(\cdot,\cdot)_1),(H_2,(\cdot,\cdot)_2)$，线性同构 $T:H_1\to H_2$ 保持内积不变，则称$(H_1,(\cdot,\cdot)_1)$和$(H_2,(\cdot,\cdot)_2)$同构。
定理：H 是 Hilbert 空间，
1° H 可分$\Leftrightarrow$H 有至多可数的规范正交基 S；
2° 若 S 元素个数有限，则 $H\sim K^n$；
3° 若 S 元素可数，则 $H\sim l^2$。
定理：H 是 Hilbert 空间，$M\subset H$ 是闭凸集，则$\forall x\in H$，在 M 中存在唯一的最佳逼近元。
定理：H 是 Hilbert 空间，$M\subset H$ 是闭凸集，$\forall y\in H$，x_0 为最佳逼近元$\Leftrightarrow\forall x\in H$，$\mathrm{Re}(y-x_0,x_0-x)\geqslant0$。
定理：（投影定理）M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间，则$\forall x\in H$，存在 M 中唯一的投影，即$\exists x_0\in M$，$y\in M^\perp$，使得 $x=x_0+y$。即是 $M=H\oplus H^\perp$。
推论：M 为 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间，则$(M^\perp)^\perp=M$。

2 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子的概念

定义：X,Y 是线性空间，$T:D\subset X\to Y$，满足$\forall x,y\in D,\alpha,\beta\in K$，$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$，则称 T 为 X 到 Y 的线性算子。特别地，若 Y=R 或 C，则称为实或复线性泛函。$D(T)=D$ 称为定义域，$R(T)=\{Tx|x\in D\}$称为值域，$N(T)=\{x\in X|Tx=0\}$称为核。
定义：X,Y 是 F*空间，$D(T)\subset X$，$T:D(T)\to Y$，若$\forall\{x_n\}\subset D(T)$，$x_n\to x\in D(T)$，

有 $Tx_n \to Tx_0$，则称 T 在 x_0 连续。
注记：若 T 为线性算子，则 T 在 $x_0\in D(T)$连续$\Leftrightarrow$ T 在 D(T)内任意点连续。
定义：X,Y 是 B*空间，线性算子 $T:X\to Y$，若存在 $M\geqslant 0$ 使得$\forall x\in X$，$\|Tx\|_Y\leqslant M\|x\|_X$，则称 T 为有界线性算子（把有界集映成有界集）。

定义：记$\|T\|=\sup\limits_{x\in X\setminus\{0\}}\dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|_Y$，称为 T 的范数。

定义：记 L(X,Y)为所有 X 到 Y 的有界线性算子集合。特别地，记 L(X)=L(X,X)，X*=L(X,K)。
命题：X,Y 是 B*空间，$T:X\to Y$ 是线性算子，则 T 有界$\Leftrightarrow$ T 连续。
定理：X 是 B*空间，Y 是 B 空间，$\forall T_1,T_2\in L(X,Y)$，$\alpha_1,\alpha_2\in K$，定义$(\alpha_1T_1+\alpha_2T_2)(x)=\alpha_1T_1x+\alpha_2T_2x\in L(X,Y)$，则 L(X,Y)按算子范数$\|\cdot\|$构成 B 空间。

2.2 Riesz 定理及其应用

命题：X 是 Hilbert 空间，$y\in X$，定义 $f_y:x\to(x,y)$，则 $f_y\in X^*$且$\|f_y\|=\|y\|$。
定理：（Riesz）X 是 Hilbert 空间，$\forall f\in X^*$，存在唯一 $y_f\in X$，使得 $f(x)=(x,y_f)$，且$\|f\|=\|y_f\|$。

推论：f 为 $L^2[a,b]$上的有界线性泛函，则$\exists v\in L^2[a,b]$，对$\forall u\in L^2$，$f(u)=\int_a^b u\bar{v}dt$。

应用：（Laplace 方程的 Dirichlet 问题）$\Omega\subset R^n$，$\begin{cases}-\Delta u=f(x),x\in\Omega\\ u=g(x),x\in\partial\Omega\end{cases}$。不妨设 g=0，

否则$\forall$ g 延拓为Ω上的一个函数 u_0，令 $v=u-u_0$，则$\begin{cases}-\Delta v=f(x)+\Delta u_0,x\in\Omega\\ v=0,x\in\partial\Omega\end{cases}$。

定义：$H_0^1(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega)|\ u|_{\partial\Omega}=0,|\nabla u|\in L^2(\Omega)\}$。

命题：$H_0^1(\Omega)$是 Hilbert 空间，按内积$\langle u,v\rangle_1=\int\nabla u\cdot\nabla v dx$。

定理：（Poincare 不等式）$\sum\limits_{|\alpha|<m}\int_\Omega|\partial^\alpha u(x)|^2dx\le C(\Omega,m)\sum\limits_{|\alpha|=m}\int_\Omega|\partial^\alpha u(x)|^2dx$。特别地，

当 m=1 时成立$\int_\Omega|u(x)|^2dx\le C\int_\Omega|\nabla u(x)|^2dx$。

定义：$u\in H_0^1(\Omega)$满足$\forall v\in H_0^1(\Omega)$，$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v=\int_\Omega fv\left(=\int_\Omega-\Delta u\cdot v\right)$，则称 u 为 Dirichlet 问题的弱解。

定理：$f\in L^2(\Omega)$，则 Dirichlet 问题有唯一的弱解。
定理：X 是 Hilbert 空间，a(x,y)为 H 上的共轭双线性函数，且存在 M＞0，使得 $a(x,y)\leqslant M\|x\|\cdot\|y\|$。则存在 $A\in L(X)$，使得 $a(x,y)=\langle x,Ay\rangle$。

2.3 纲与开映像定理

定义：$T:X\to Y$，若存在 T'使得$\forall x\in D(T)$，$T'Tx=x$；$\forall y\in F(T)$，$TT'y=y$，则称 T'为 T 的逆算子。
注记：1° 逆算子存在$\Leftrightarrow$ T 为一一映射；2° 逆算子存在，则一定唯一；3° T^{-1}是线性算子；4° $(T^{-1})^{-1}=T$。

定义：(X,ρ)是度量空间，$E\subset X$，若$\overline{E}$没有内点，则称 E 为疏集。

命题：$E\subset X$ 是疏集$\Leftrightarrow \forall B(x_0,r_0)$，存在 $B(x_1,r_1)\subset B(x_0,r_0)$使得$\overline{E}\cap\overline{B}(x_1,r_1)=\phi$。

定义：(X,ρ)是度量空间，$E\subset X$，若 $E=\bigcup_{n=1}^{+\infty}E_n$，$E_n$是疏集，则称 E 是第一纲集，否则称为第二纲集。

定理：（Baire）完备度量空间是第二纲集。

应用：C[0,1]中处处不可微函数的集合的余集为第一纲集。

定义：$T:X\to Y$，$\forall U\subset X$ 开，$T(U)\subset Y$ 开，则称 T 为开映射。

定义：$T:X\to Y$，若$\{x_n\}\subset D(T)$满足 $x_n\to x$，$Tx_n\to y$，则 $x\in D(T)$且 $y=Tx$，则称 T 为闭算子。

注记：1°连续算子 T 并不一定有 $x_n\to x$，则 $x\in D(T)$；

2°若 D(T)闭且 T 连续，则 T 为闭算子；

3°定义 T 的图象 $G(T):=\{(x,Tx)\in X\times Y|x\in D(T)\}$，$X\times Y$ 上模$\|(x,y)\|:=\|x\|_X+\|y\|_Y$ 称为图模，则 T 为闭算子$\Leftrightarrow$G(T)在$(X\times Y,\|\cdot\|)$中为闭集；

4°闭算子不一定连续。

定理：（开映像定理）X,Y 是 B 空间，$T:X\to Y$ 是闭线性算子且为满射/R(T)是第二纲集，则 T 为开映射。（重要中间结论：映射有内点）

定理：（逆算子定理）X,Y 是 B 空间，$T\in L(X,Y)$既单又满，则 $T^{-1}\in L(Y,X)$。

推论：（等价范数定理）线性空间 X 上的两个模$\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$，X 关于他们分别都是 B 空间，且$\|\cdot\|_2$比$\|\cdot\|_1$强，则一定等价。

定理：（B.L.T.）X 是 B*空间，Y 是 B 空间，$T:X\to Y$ 连续，则 T 一定可以唯一延拓到$\overline{D(T)}$上作为$\overline{D(T)}$上的连续线性算子。

定理：（闭图像定理）X,Y 是 B 空间，$T:X\to Y$ 闭线性算子，且 D(T)闭，则 T 连续。

定理：（共鸣定理）X 是 B 空间，Y 是 B*空间，W 为 L(X,Y)是一族算子，满足$\forall x\in X$，$\sup\|Ax\|<+\infty$，$A\in W$。则存在 $M>0$，$\forall A\in W$，$\|A\|<M$。

定理：（Banach-Steinhaus 定理）X 是 B 空间，Y 是 B*空间，$M\subset X$ 稠密子集，$\{A_n\}\subset L(X,Y)$，$A\in L(X,Y)$有$\forall x\in X$，$A_nx\to Ax\Leftrightarrow$ 1°$\|A_n\|$一致有界；2°$\forall x\in M$，$A_nx\to Ax$。

定理：（Lax-Milgram 定理）X 是 Hilbert 空间，$a(\cdot,\cdot)$共轭双线性，满足：1°存在 $M>0$，$|a(x,y)|\leqslant M\|x\|\cdot\|y\|$；2°存在$\delta>0$，$|a(x,x)|\geqslant\delta\|x\|^2$，则存在唯一有连续逆的 $A\in L(X)$，使得 $a(x,y)=(x,Ay)$，且$\|A\|^{-1}\leqslant 1/\delta$。

2.4 Hahn-Banach 定理

定理：（实 Hahn-Banach）X 是实线性空间，$X_0\subset X$ 是线性子空间，p 是 X 上的次线性泛函，f_0是 X_0上的实线性泛函，满足$\forall x\in X_0$，$f_0(x)\leqslant p(x)$。则存在 X 上的线性泛函 f，使得 1°$\forall x\in X_0$，$f(x)=f_0(x)$；2°$\forall x\in X$，$f(x)\leqslant p(x)$。

定理：（复 Hahn-Banach）X 是复线性空间，$X_0\subset X$ 是线性子空间，p 是 X 上的半模，f_0是 X_0上的复线性泛函，满足$\forall x\in X_0$，$|f_0(x)|\leqslant p(x)$。则存在 X 上的线性泛函 f，使得 1°$\forall x\in X_0$，$f(x)=f_0(x)$；2°$\forall x\in X$，$|f(x)|\leqslant p(x)$。

定理：X 是复线性空间，X 中含有均衡吸收凸集，则 X 上存在非零线性泛函。

定理：X 是 B*空间，$X_0\subset X$ 线性空间，$f_0\in X_0^*$，则存在 $f\in X^*$，1°$\forall x\in X^*$，$f_0(x)=f(x)$；2°$\|f\|=\|f_0\|$。

推论：（点与点可分离）X 是 B*空间，则：
1° $\forall x_0\in X\backslash\{0\}$，存在 $f\in X^*$，s.t. $f(x_0)=\|x_0\|$，且$\|f\|=1$；
2° $\forall x_1,x_2\in X$，存在 $f\in X^*$，s.t.$f(x_1)\neq f(x_2)$，且$\|f\|=1$；
3° $x_0=0\Leftrightarrow\forall f\in X^*$，$f(x_0)=0$。
定理：（点与子空间可分离）X 是 B*空间，$M\subset X$ 线性子空间，$x_0\in X$，$d(x_0,M)=d>0$，则存在 $f\in X^*$，使得 1° $\forall x\in M$，$f(x)=0$；2° $f(x_0)=d$；3° $\|f\|=1$。
推论：X 是 B*空间，$M\subset X$ 是子集，$x_0\in X$，$x_0\neq 0$，则 $x_0\in\overline{\mathrm{span}(M)}\Leftrightarrow\forall f\in X^*$，$f(M)=0$ 都有 $f(x_0)=0$。
定义：X 是 B*空间，
1° $X_0\subset X$ 称为极大线性子空间$\Leftrightarrow\forall X_1$ 满足 $X_0\subset X_1\subset X$，则 $X_1=X\Leftrightarrow X=X_0\oplus\{\lambda x_0\}$，$\lambda\in R$，$\forall x_0\notin X_0\Leftrightarrow\dim(X/X_0)=1.$；
2° M 称为极大线性子流形/超平面$\Leftrightarrow M=X_0+x_0$ 是极大线性子空间。
定理：M 是超平面$\Leftrightarrow M=X_f^r$，其中 $f\in X^*$，f 非零，$X_f^r:=\{x\in X|f(x)=r\}$。
定义：X 是 B*空间，凸集 $E,F\subset X$，
1° 若存在 $L=X_f^r$，$f\in X^*$使得 $f|_E\leqslant r$，$f|_F\geqslant r$，则称 L 分离 E,F；
2° 若存在 $L=X_f^r$，$f\in X^*$使得 $f|_E<r$，$f|_F>r$，则称 L 严格分离 E,F。
定理：（Hahn-Banach 几何形式）X 是 B*空间，以 0 为内点的真凸子集 $E\subset X$，$x_0\notin E$，则存在超平面分离 x_0 和 E。
注记：1° E 可以是一般的有内点的真凸子集；2° $L=H_f^r$ 是闭的（即由 f 连续）。
定理：（凸集与凸集分离）X 是 B*空间，凸集 $E_1,E_2\subset X$，$E_1\cap E_2$ 空，E_1 有内点，则存在 $f\in X^*$，$r\in R$，使得 H_f^r 分离 E_1 和 E_2。
定理：（点与凸集分离）X 是 B*空间，闭凸集 $E\subset X$，$x_0\notin E$，则存在 $f\in X^*$，$s\in R$，使得 $f|_E<s<f(x_0)$。
定理：（Mazur）X 是 B*空间，E 是有内点的凸集，F 是线性子空间，$E^\circ\cap F$ 空，则存在超平面 L 满足 $F\subset L$ 且 E 在 L 的一侧。
定义：凸集 $E\subset X$，H_f^r 称为 E 在 x_0 处的支撑超平面$\Leftrightarrow x_0\in$ E 的闭包$\cap H_f^r$ 且 E 在 H_r^f 的一侧$\Leftrightarrow f|_E\geqslant r=f(x_0)$或 $f|_E\leqslant r=f(x_0)$。
定理：X 是 B*空间，$E\subset X$ 是有内点的闭凸集，x_0 是 E 的边界点，则存在 x_0 处的支撑超平面。
定义：$f:X\to R$，$x_0\in X$，若存在 $A\in X^*$使得 $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\Delta x+o(\|\Delta x\|)$，称 f 在 x_0 处 Frechet 可导，$A=f'(x_0)$称 Frechet 导数。
定义：$f:(a,b)\to X$，X 是 B*空间，$t\in(a,b)$，$f'(t):=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$。
定理：若 $f'(t)$处处存在，则$\forall t_1,t_2\in(a,b)$，$t_1\subset t_2$，$\exists\theta\in(0,1)$，使得$\|f(t_2)-f(t_1)\|\leqslant\|f'(\theta t_2+(1-\theta)t_1)\|\cdot|t_2-t_1|$。
定义：$f:X\to R$ 是凸泛函，$x_0\in X$，$\partial f(x_0):=\{x^*\in X^*|f(x)\geqslant f(x_0)+x^*(x-x_0)\}$称为 f 在 x_0 处的次微分。
定理：$f:X\to R$ 在 x_0 处连续，则$\partial f(x_0)$不空。

2.5 共轭空间·弱收敛·自反空间

定义：X 是 B*空间，X^*(B 空间)$:=L(X,K)$称为 X 的共轭空间。
例子：$(l^p)^*=l^q$，$(L^p)^*=L^q(1\leqslant p<\infty)$，$(l^\infty)^*\neq l^1$，。
定义：$T:X\to X^{**}$，$X\to Z$ 称为自然映射，其中 $Z:X^*\to K,f\to f(x)$，$T\in L(X,X^{**})$。
定理：X 是 B*空间，则 $T:X\to X^{**}$为保范嵌入。

定义：若 T 为满射，则 X 和 X**保范同构，称 X 为自反空间。
注记：1° B*空间 X 自反，则 X 为 B 空间；2° X 自反$\Leftrightarrow$X*自反。
定义：X,Y 是 B*空间，T∈L(X,Y)，若 T*:Y*→X*s.t.∀y*∈Y*，(T*y*)(x)=y*(Tx)，称 T*为 T 的共轭算子。
定理：T*∈L(Y*,X*)且映射※:L(X,Y)→L(Y*,X*),T→T*是保范映射。
性质：1° T_1∈L(X,Y),T_2∈L(Y,Z)，则$(T_2T_1)^*=T_1^*T_2^*$；
2° 若 T∈L(X,Y)且 T^{-1}∈L(Y,X)，则$(T^*)^{-1}$存在且$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$；
3° T∈L(X,Y)，则 T**∈L(X**,Y**)是 T 的保范延拓。
定义：X 是 B*空间，$\{x_n\}\subset X$，$x_0\in X$，若∀f∈X*，$f(x_n)\to f(x_0)$，则称$\{x_n\}$弱收敛到 x_0。
注记：1° 强收敛$\Rightarrow$弱收敛；2° 有限维空间强收敛$\Leftrightarrow$弱收敛。
定理：（Mazur）X 是 B*空间，x_n弱收敛到 $x_0\in X$，则∀ε>0，存在 n 以及$\lambda_i\geq 0$，$\Sigma\lambda_i=1$，使得$\|\Sigma\lambda_i x_i-x_0\|<\varepsilon$。
定理：（Banach）X 是 B*空间，X*可分$\Rightarrow$X 可分。
定义：X 是 B*空间，$\{f_n\}\subset X^*$，f∈X*，若∀x∈X，$f_n(x)\to f(x)$，则称 f_n*弱收敛到 f。
定理：X 是 B*空间，$\{x_n\}\subset X$，x∈X，则 x_n弱收敛到 x$\Leftrightarrow$1° $\|x_n\|$一致有界；2° 对 X*的稠密子集 M*，$f(x_n)\to f(x)$。
定理：X 是 B 空间，$\{f_n\}\subset X^*$，f∈X*，则 f_n *弱收敛到 f$\Leftrightarrow$1° $\|f_n\|$一致有界；2° 对 X 的稠密子集 M，$f_n(x)\to f(x)$。
定义：X,Y 是 B*空间，T_n∈L(X,Y)，T∈L(X,Y)，
1° 当$\|T_n-T\|\to 0$，称 T_n一致收敛到 T；
2° ∀x∈X，$T_nx\to Tx$，称 T_n强收敛到 T；
3° 若∀x∈X，f∈Y*，$f(T_nx)\to f(Tx)$，称 T_n弱收敛到 T。
一致收敛$\Rightarrow$强收敛$\Rightarrow$弱收敛。
定义：1° A⊂X 弱列紧$\Leftrightarrow$A 中任意点列有弱收敛子列；
2° A⊂X* *弱列紧$\Leftrightarrow$A 中任意点列有*弱收敛子列。
定理：可分 B*空间 X 的共轭空间 X*有界集一定*弱列紧。
定理：（范数可达）X 是自反空间，则∀f∈X*，存在 x∈X，s.t.$\|x\|=1,f(x)=\|f\|$。
定理：有限维 Banach 空间是自反空间。
定理：（James）∀f∈X*，存在 x∈X，s.t.$\|x\|=1,f(x)=\|f\|$，则 X 自反。
定理：（Pettis）自反空间 X 的闭子空间 X_0 自反。
定理：（Banach-Alaoglu 定理）X 是 B*空间，则 X*的单位球*弱列紧。
注记：1° X 的可分闭子空间都自反，则 X 自反；
2° X 自反$\Leftrightarrow$∀闭凸子集 E，存在 x_0∈E，使得$\|x_0\|=\inf\{\|x\|,x\in E\}\Leftrightarrow$∀闭凸子集 E，∀x∈X，存在 x_0∈E，使得$\|x-x_0\|=\inf\{\|x-x_0\|,x\in E\}$。
定理：（Eberlein-Smulian）自反空间的单位（闭）球/有界集是弱（自）列紧的。
注记："$\Leftarrow$"也成立。

2.6 线性算子的谱

定义：X 是复 B 空间，A:D(A)⊂X→X 是线性算子，
1° 若存在 $x_0\in D(A)\backslash\{0\}$，λ∈C 使得 $Ax_0=\lambda x_0$，称λ为本征值，x_0 为本征元；
2° 若$(\lambda I-A)^{-1}\in L(X)$，则称λ为正则值；记ρ(A)为所有正则值全体，称为预解集。
3° (a) λI-A 既单又满，则λ∈ρ(A)；(b) λI-A 不单，则λ为本征值，记$\sigma_p(A)$为所有本征值全体，称为点谱；(c) λI-A 单但不满，且 $\overline{R(\lambda I-A)}$=X，所有λ的集合称连

续谱，记为$\sigma_c(A)$；(d) λI-A 单且不满，且$\overline{R(\lambda I-A)}\neq X$，称剩余谱，记为$\sigma_r(A)$；

(e) $\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$，称算子 A 的谱。
命题：$\rho(A)$不空，则 A 为闭线性算子；A 不为闭线性算子，则$\rho(A)$空。
定义：算子值函数 $R_\lambda(A):\rho(A)\to L(X),\lambda\to(\lambda I-A)^{-1}$，称为 A 的预解式。$\rho(A)$是开集，$R_\lambda(A)$解析，且谱点存在。
定理：（Von-Neumann）X 是 B 空间，$T\in L(X)$，$\|T\|<1$，则$(I-T)^{-1}\in L(X)$，且$(I-T)^{-1}$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}T^n$，$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|T\|}$。

推论：A 为闭线性算子，则$\rho(A)$是开集。
定理：（谱点存在）$A\in L(X)$，则$\sigma(A)$不空。
引理：（第一预解公式）$\forall\lambda,\mu\in\rho(A)$，$R_\lambda(A)-R_\mu(A)=(\mu-\lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$。
定义：$A\in L(X)$，$r_\sigma(A):=\sup\{|\lambda|\mid\lambda\in\sigma(A)\}$称谱半径。
定理：（Gelfand）X 是 B 空间，$A\in L(X)$，则 $r_\sigma(A)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$。

3 广义函数与 Sobolev 空间

(I) 广义函数

记号：1° $\Omega\subset R^n$开，$u\in C(\overline{\Omega})$，记 supp(u)=$\overline{\{x\in R^n\mid u(x)\neq 0\}}$，称 u 的支集；

2° $k\in Z_+$，$C_0^k(\Omega)=\{u\in C^k(\Omega)|\text{supp}(u)\subset\subset(\text{紧包含})\Omega\}$；

3° 多重指标：$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，$\alpha_i\in Z$，$\alpha_i\geqslant 0$，$|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$，则 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$，$\partial^\alpha=$

$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}\cdots\partial^{\alpha_n}}$。

定义：$C_0^\infty(\Omega)$上的收敛性：$\{f_j(x)\}\subset C_0^\infty(\Omega)$，$f_0(x)\in C_0^\infty(\Omega)$，若
1° 存在 $K\subset\subset\Omega$，使得 supp $f_j\subset K$；
2° $\forall\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha f_j(x)-\partial^\alpha f_0(x)|\to 0$；
则称 f_j 在 $C_0^\infty(\Omega)$上收敛到 f_0。记 $D(\Omega)$为带有收敛性的空间 $C_0^\infty(\Omega)$，称基本空间。
命题：$D(\Omega)$为序列完备空间。
定义：$f:D(\Omega)\to R$ 称为一个广义函数，如果 1° f 线性；2° $\forall\{g_j\}\subset D(\Omega)$，$g_j\to g$，有 $f(g_j)\to f(g)$。所有广义函数的集合记为 $D'(\Omega)$。
定义：$\{f_j\}\subset D'(\Omega)$，$f_0\in D'(\Omega)$，若$\forall g\in D(\Omega)$，$f_i(g)\to f(g)$，则称 f_j 收敛到 f。
定义：$f\in D'(\Omega)$，若存在 $g\in D'(\Omega)$，使得$\forall h\in D(\Omega)$，$f(\partial_{x_i}h)=-g(h)$，称 g 为 f

关于 x_i 方向的广义偏导数，记为$\tilde{\partial}_{x_i}f$。若 $f\in C^1$，则$\tilde{\partial}_{x_i}f=\partial_{x_i}f$。

(II) Sobolev 空间

定义：$k\in Z$，$k\geqslant 0$，$1<p<+\infty$，$W^{k,p}(\Omega):=\{u\in L^p(\Omega)|\tilde{\partial}^\alpha u\in L^p(\Omega),|\alpha|\leqslant k\}$，模$\|u\|=$

$(\sum_{|\alpha|\le k}\|\widetilde{\partial}^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p)^{1/p}$，称 Sobolev 空间。

定理：1° $W^{k,p}(\Omega)$为 Banach 空间；

2° $W^{k,2}(\Omega)$为 Hilbert 空间，常记 $H^k(\Omega)$。

注记：$W_0^{k,p}(\Omega)$记为 $C_0^k(\Omega)$在 $W^{k,p}(\Omega)$中的闭包。

定理：（Sobolev 嵌入定理）$W_0^{1,p}(\Omega)\to\begin{cases}L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega),\ p<n\\ L^{\varphi}(\Omega),\quad p=n,\text{其中}\ \varphi(t)=e^{|t|^{\frac{n}{n-1}}}-1\\ C^{\alpha}(\overline{\Omega}),\quad p>n,\text{其中}\ \alpha<1-\dfrac{n}{p}\end{cases}$，

$L^{\varphi}(\Omega)=\{u\,|\int_{\Omega}(e^{|u|^{\frac{n}{n-1}}}-1)dx<+\infty\},C^{\alpha}(\overline{\Omega})=\{u\,|\sup_{\Omega}\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}<+\infty\}$ (Orlicz 空间)。

定理：1° p＜n 时，∃C＞0，s.t.$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)}\le C\|\widetilde{\partial}u\|_{L^p(\Omega)}$；

2° p=n 时，∃C_1,C_2＞0，s.t.$\int e^{\left(C_1\frac{\|u\|}{\|\widetilde{\partial}u\|_{L^p(\Omega)}}\right)^{\frac{n}{n-1}}}dx\le C_2|\Omega|$；

3° p＞n 时，∃C＞0，s.t.$\|u\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})}\le C(1+diam(\Omega)^{\alpha})\|\widetilde{\partial}u\|_{L^p(\Omega)}$。

4 紧算子与 Fredholm 算子

4.1 紧算子的定义和基本性质

定义：X,Y 是 B 空间，A:X→Y 线性，B_1为 X 的单位球。若$\overline{A(B_1)}$在 Y 中紧，则称 A 为紧算子。全体紧算子记为 C(X,Y)。（等价定义：A⊂C(X,Y)⇔∀X 的有界集 E，$\overline{A(E)}$在 Y 中紧⇔∀$\{x_n\}$⊂X 有界点列，$\{Ax_n\}$有收敛子列。

性质：1° C(X,Y)⊂L(X,Y)；2° a,b∈C，A,B∈L(X,Y)，则 aA+bB∈C(X,Y)；3° A∈C(X,Y)，X_0⊂X 闭子空间，则 $A|_{X_0}$∈C(X_0,Y)；4° A∈C(X,Y),B∈C(Y,Z)，则 BA∈C(X,Z); 5° A∈C(X,Y)⇒R(A)可分; 6° C(X,Y)在 L(X,Y)中闭; 7° T∈C(X,Y)⇔T*∈C(Y*,X*)；8° L(X)是一个代数，C(X)是 L(X)的一个理想。

定义：A∈L(X,Y)，若 x_n弱收敛到 x，Ax_n→Ax，则称 A 全连续。

命题：1° A∈C(X,Y)，则 A 全连续；2° A 全连续且 X 自反，则 A∈C(X,Y)。

定义：T∈L(X,Y)，dim R(T)=N＜∞，称 T 为有穷秩算子。所有的有穷秩算子记为 F(X,Y)。

注记：1° F(X,Y)⊂C(X,Y)；2° f∈X*,y∈Y，定义 1 秩算子 y⊗f：x→f(x)y。

定理：T∈F(X,Y)⇔存在 $y_1,\cdots,y_n$∈Y，$f_1,\cdots,f_n$∈X*，s.t. $T=\Sigma_i y_i\otimes f_i$。

定理：X 是 Hilbert 空间，则$\overline{F(X)}=C(X)$。

定义：X 是可分 B 空间，若存在$\{e_n\}$⊂Xs.t.∀x∈X，有唯一的$\{c_n(x)\}$，$x=\Sigma_n c_n(x)e_n$，称$\{e_n\}$为 X 的 Schauder 基。

引理：$c_n(x)\in X^*$。

定理：可分 B 空间 X 上有一组 Schauder 基，则 $\overline{F(X)}=C(X)$。

4.2 Riesz-Fredholm 理论

考虑一般情形 $T=I-A\in L(X)$，其中 A 是紧算子。

记号：1° R(T)值域，N(T)核；2° $\forall M\subset X$，${}^{\perp}M=\{f\in X^*|f|_M=0\}$；3° $\forall N\subset X^*$，$N^{\perp}=\{x\in X|\forall f\in N,f(x)=0\}$；4° $f\in X^*,x\in X$，$f\perp X$ 代表 $f(x)=0$。

定理：（Fredholm）$A\in C(X)$，$T=I-A$，则：

1° $N(T)=0\Leftrightarrow R(T)=X$；

2° $\sigma(A)=\sigma(A^*)$；

3° $\dim N(T)=\dim N(T^*)<\infty$；

4° $R(T)=N(T^*)^{\perp}$，$R(T^*)={}^{\perp}N(T)$；

5° $\operatorname{codim} R(T):=\dim(X/R(T))=\dim N(T)$。

Fredholm 方程：$\lambda x(t)-\int_a^b K(t,s)x(s)ds=f(t)\,(*)$，$\lambda x(t)-\int_a^b K(t,s)x(s)ds=0\,(**)$。

(L^2 空间)二择一定理：$\lambda\neq0$ 时：

1° 若(**)只有零解，则$\forall f$，(*)有唯一解；

2° 若(**)有非零解，则(*)有解$\Leftrightarrow$ f 与共轭方程 $\lambda x(t)-\int_a^b K(s,t)x(s)ds=0\,(**)$ 解空间正交。

定义：$T\in L(X)$，若满足 R(T)闭，则称 T 为闭值域算子。

定理：$A\in C(X)$，则 $T=I-A$ 为闭值域算子。

4.3 紧算子的谱理论

定理：X 是 B 空间，$A\in C(X)$，则

1° $0\in\sigma(A)$，除非 $\dim X<\infty$；

2° $\sigma(A)\backslash\{0\}=\sigma_p(A)\backslash\{0\}$；

3° $\sigma_p(A)$至多以 0 为聚点。

定义：X 是 B 空间，$A\in L(X)$，$M\subset X$ 且 $A(M)\subset M$，称 M 为 A 的不变子空间。

性质：1° $\{0\}$,X 都是不变子空间；

2° 若 M 是不变子空间，则 $\overline{M}$ 也是；

3° $\forall\lambda\in\sigma_p(A)$，$N(\lambda I-A)$是 A 的不变子空间；

4° $\forall y\in X$，$L_y:\{P(A)y|P$ 是多项式$\}$为 A 的不变子空间。

定理：$\dim X\geqslant2$，$A\in C(X)$，则必有非平凡闭不变子空间。

定理：$A\in C(X)$，$T=I-A$，则存在 $p\in Z_+$，使得 $X=N(T^p)\oplus R(T^p)$，且 $T|_{R(T^p)}$有线性有界逆算子。

记号：p(T)为满足 $N(T^k)=N(T^{k+1})$的最小数，称零链长；q(T)为满足 $R(T^k)=R(T^{k+1})$的最小数，称像链长。

性质：1° 当 $N(T^k)=N(T^{k+1})$，则$\forall n\geqslant k$，$N(T^n)=N(T^{n+1})$；

2° 当 $R(T^k)=R(T^{k+1})$，则则$\forall n\geqslant k$，$R(T^n)=R(T^{n+1})$；

3° $A\in C(X)$，$T=I-A$，则 $p=q<\infty$。

4.4 Hilbert-Schmidt 定理

定义：X 是 Hilbert 空间，$A\in L(X)$，若$(Ax,y)=(x,Ay)[=(x,A^*y)]$，则称 A 为对称算子或自共轭算子[蕴含 $A=A^*$]。

性质：1° A 对称$\Leftrightarrow$(Ax,x)∈R；

2° A 对称，则σ(A)⊂R，且当λ∈C 且 Imλ≠0 时，$\|(\lambda I-A)^{-1}x\|\le\frac{1}{|\operatorname{Im}(\lambda)|}\|x\|$；

3° X_1⊂X 是闭线性子空间，A 在 X 上对称$\Rightarrow$$A|_{X_1}$上对称；
4° A 对称，则∀λ≠λ'∈$\sigma_p(A)$，N(λI-A)⊥N(λ'I-A)；
5° 若 A 对称，则$\sigma_r(A)$空；
6° 若 A 对称，则||A||=sup|(Ax,x)|(||x||=1)。
定理：A∈C(X)且对称，则存在 x_0∈X，$\|x_0\|=1$ 满足 $Ax_0=\lambda x_0$，其中$|\lambda|=|(Ax_0,x_0)|=\sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|$。
引理：X 是复 Hilbert 空间，A 对称紧，令 M=$\bigcup_{\lambda\in\sigma(A)}N(\lambda I-A)$，则 X=$\overline{\operatorname{span}(M)}$。

定理：（Hilbert-Schmidt）X 是复 Hilbert 空间，A 对称紧，则存在可数$\{\lambda_i\}$⊂R 以 0 为聚点以及对应的本征值$\{e_n\}$构成规范正交基，s.t.∀x∈X，$x=\Sigma(x,e_i)e_i+v$，v∈N(A)。
推论：（极值刻画）将本征值排列$|\lambda_1|\geqslant\cdots$，则$|\lambda_n|=\sup\{|(Ax,x)|\mid x\perp\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_{n-1}\},\|x\|=1\}$。

推论：（极大极小刻画）排列$\lambda_1^+\geqslant\cdots\geqslant0$，$\lambda_1^-\leqslant\cdots\leqslant0$，则$\lambda_n^+=\inf_{E_{n-1}}\sup_{x\in E_{n-1}^{\perp},x\neq0}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}$，

$\lambda_n^-=\sup_{E_{n-1}}\inf_{x\in E_{n-1}^{\perp},x\neq0}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}$，其中 E_{n-1} 是 X 的任意 n-1 维闭线性子空间。

推论：A,B∈C(X)且对称，(Ax,x)≤(Bx,x)恒成立，则$\lambda_j^+(A)\leqslant\lambda_j^+(B)$。

4.6 Fredholm 算子

定义：X,Y 是 B 空间，T∈L(X,Y)称为 Fredholm 算子，如果 1° R(T)闭；2° dim N(T)＜∞；3° codim R(T)＜∞。
定义：若 T∈F(X,Y)，记 ind(T):=dimN(T)−codimR(T)为 T 的指标。
定理：（Atkinson）1° 若 T∈F(X,Y)，则存在 S∈F(Y,X)以及 A_1∈C(X),A_2∈C(Y)使得 $ST=I_X-A_1$,$TS=I_Y-A_2$;2° 若 T∈L(X,Y)且存在 R_1,R_2∈L(Y,X)以及 A_1∈C(X), A_2∈C(Y)使得 $R_1T=I_X-A_1$，$TR_2=I_Y-A_2$，则 T∈F(X,Y)。
定理：T_1∈F(X,Y)，T_2∈F(Y,Z)，则 T_2T_1∈F(X,Z)，且 $\operatorname{ind}(T_2T_1)=\operatorname{ind}(T_1)+\operatorname{ind}(T_2)$。
定理：T_1∈L(X,Y)，T∈L(Y,Z)，T_1T_2∈F(X,Z)，则 T_1∈F(X,Z)$\Leftrightarrow$$T_2$∈F(X,Z)。
命题：T∈F(X,Y)，A∈C(X,Y)，则 T+A∈F(X,Y)，且 ind(T+A)=ind(T)。
定理：T∈F(X,Y)，则存在ε＞0，当 S∈L(X,Y)满足||S||＜ε时，T+S∈F(X,Y)且 ind(T+S)=ind(T)。（F(X,Y)在 L(X,Y)中开且 ind 局部等值）