数学分析 II 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 2 月 5 日

目录

1 第 1 次习题课：定积分的基本概念与可积性 **3**
1.1 问题 3
1.2 解答 3

2 第 2 次习题课：定积分的性质与计算 **4**
2.1 问题 4
2.2 解答 4

3 第 3 次习题课：定积分的应用与中值定理 **5**
3.1 问题 5
3.2 解答 6

4 第 4 次习题课：广义积分的收敛性与计算 **6**
4.1 问题 6
4.2 解答 7

5 第 5 次习题课：积分的综合运用 **8**
5.1 问题 8
5.2 解答 8

6 第 6 次习题课：数项级数的基本概念与正项级数 **10**
6.1 问题 10
6.2 解答 10

7 第 7 次习题课：任意项级数与数项级数的运算 **11**
7.1 问题 11
7.2 解答 11

8 第 8 次习题课：无穷乘积与函数项级数的基本概念 **12**
8.1 问题 12
8.2 解答 12

9 第 9 次习题课：函数项级数的一致收敛 **13**
9.1 问题 13
9.2 解答 13

10 第 10 次习题课：一致收敛函数项级数的性质 13
10.1 问题 13
10.2 解答 13

11 第 11 次习题课：幂级数的基本概念与性质 13
11.1 问题 13
11.2 解答 13

12 第 12 次习题课：幂级数展开与多项式逼近 13
12.1 问题 13
12.2 解答 13

13 第 13 次习题课：傅里叶级数的基本概念与性质 13
13.1 问题 13
13.2 解答 13

14 第 14 次习题课：傅里叶级数的收敛性 13
14.1 问题 13
14.2 解答 13

15 致谢 14

1 第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性

1.1 问题

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x)\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.
2. $f(x)\in R[a,b],\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$. 证明 $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b],\mathrm{s.t.}\forall x\in[\alpha,\beta],f(x)>0$.
3. $f(x)\in R[a,b]$, 问 $\lfloor f(x)\rfloor$ 是否一定 $\in R[a,b]$?
4. 讨论区间 $[a,b]$ 上 $f,|f|,f^2$ 的可积性之间的关系.
5. 设非负函数 $f(x)\in C[a,b]$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ 存在并求之.
6. $f(x)\geq 0,f''(x)\leq 0,x\in[a,b]$. 证明 $\max_{x\in[a,b]}f(x)\leq\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
7. $n\in\mathbb{N}_+,f(x)\in C[a,b],\int_a^b x^kf(x)\mathrm{d}x=0,k=0,1,\cdots,n$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个零点.
8. 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}=1,\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.
10. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x),g(x)\in R[a,b],p,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq\left(\int_a^b f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}}$.
11. $f(x)\in R[a,b],A=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x),B=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x),g(y)\in C[A,B]$, 证明 $G(x):=g(f(x))\in R[a,b]$.
12. 已知 $(0,1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ 存在, 问是否有 $f(x)\in R[0,1]$?

1.2 解答

1. 显然 $f(x)$ 有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次 $\forall\epsilon>0,\forall x\in[a,b],\exists\delta_x>0,\mathrm{s.t.}\omega_{(x-\delta_x,x+\delta_x)}<\epsilon$. 由于 $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)\supset[a,b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\supset[a,b]$. 不妨设 $a\leq x_1<\cdots<x_n\leq b$. 可取分割点 $y_i\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap(x_{i+1}-\delta_{i+1},x_i+\delta_{i+1})$, 对于这个分割, $\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\epsilon(b-a)$, 因此有可积性. 由于 $|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x|\leq\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leq\sum_{i=1}^n\int_{y_{i-1}}^{y_i}|f(x)|\mathrm{d}x\leq\epsilon(b-a)$, ϵ 的任意性知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.
2. 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.
3. $f(x)=-\mathrm{Riemann}(x)\in R[0,1],\lfloor f(x)\rfloor=-\mathrm{Dirichlet}(x)\notin R[0,1]$.
4. $f\in R[a,b]\Rightarrow|f|,f^2\in R[a,b]$, 因为 f 在 x_0 处连续 $\Rightarrow|f|,f^2$ 在 x_0 处连续.
$|f|\in R[a,b]\Rightarrow f^2\in R[a,b],\not\Rightarrow f\in R[a,b]$. $|f|$ 在 x_0 处连续 $\Rightarrow f^2$ 在 x_0 处连续, 而对于 f 有反例 $f(x)=1_{\mathbb{Q}}-1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.
$f^2\in R[a,b]\Rightarrow|f|\in R[a,b],\not\Rightarrow f\in R[a,b]$. 理由与上一个相同.
5. 设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x),f(\xi)=M$. 由连续性, $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$ s.t.$\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta),f(x)>M-\epsilon$. 因此当 n 足够大时成立 $M+2\epsilon>((b-a)M^n)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}>(2\delta(M-\epsilon)^n)^{\frac{1}{n}}>M-2\epsilon\Rightarrow\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\to M$.
6. 设 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. 由题意知 $f(x)$ 是凹函数, 因此成立 $f(x)\geq\begin{cases}\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}(x-a)+f(a), & x\in[a,\xi]\\ \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}(x-\xi)+f(\xi), & x\in[\xi,b]\end{cases}\Rightarrow\mathrm{RHS}\geq$ $\frac{2}{b-a}\left(\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\right)\geq\frac{2}{b-a}\left((\xi-a)\frac{f(\xi)+f(a)}{2}+(b-\xi)\frac{f(b)+f(\xi)}{2}\right)\geq\frac{2}{b-a}\frac{f(\xi)}{2}(\xi-a+b-\xi)=f(\xi)=\mathrm{LHS}$.
7. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\exists 1$ 零点, 记为 x_1. $\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\exists 2$ 零点, 记为 x_2. $\cdots\int_a^b\left[\prod_{i=1}^n(x-x_i)\right]f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ $\exists n+1$ 零点.
8.

$$\text{原式}=2^{\alpha-\beta}\frac{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\frac{2}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}\xrightarrow{\text{定积分定义}}2^{\alpha-\beta}\frac{\left(\int_0^2x^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2x^\beta\mathrm{d}x\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

9. $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,n^\alpha(1-\epsilon)<a_n<n^\alpha(1+\epsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\epsilon,\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\epsilon,\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]\right|\leq\frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\leq\frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha=\frac{\epsilon}{n}\sum\limits_{i=1}^n(\frac{i}{n})^\alpha\leq$ $\epsilon\int_0^1x^\alpha\mathrm{d}x+\epsilon=\frac{\epsilon}{\alpha+1}+\epsilon\leq 2\epsilon$. 这意味着 $\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i-\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha\right)\right|\leq 4\epsilon\Rightarrow$ 原极限 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$.

10. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}=1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha\ln a+(1-\alpha)\ln b\le\ln(\alpha a+(1-\alpha)b)\Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha}\le\alpha a+(1-\alpha)b$. 令 $\alpha=\frac{1}{p},1-\alpha=\frac{1}{q},a=x^p,b=y^q\Rightarrow xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\Rightarrow\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b\frac{f(x)^p}{p}+\frac{g(x)^q}{q}\mathrm{d}x=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
本题也可以将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.
11. 证法 a: $G(x)$ 的间断点集合是 $f(x)$ 间断点集合的子集, 因此其 Lebesgue 测度为 0, 从而可积.
证法 b: 由于 $g(y)$ 一致连续, 因此 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 使得 $\forall|y_1-y_2|<\delta,|g(y_1)-g(y_2)|<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 由于 $f(x)\in R[a,b]$, 因此 $\exists[a,b]$ 的分割 Δ, 使得 $\sum\limits_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\delta\epsilon}{4M}$, 其中 $M=\sup\limits_{y\in[A,B]}|g(y)|$. 若 $\omega_i(f)<\delta$, 则 $\omega_i(G)<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 若 $\omega_i(f)\ge\delta$, 其区间长度 $\sum\limits_{i:\omega_i(f)\ge\delta}\Delta x_i$ 不会超过 $\frac{\epsilon}{4M}$. 因此 $\sum\limits_{i=1}^n\omega_i(G)\Delta x_i=\sum\limits_{i:\omega_i(f)<\delta}\omega_i(G)\Delta x_i+\sum\limits_{i:\omega_i(f)\ge\delta}\omega_i(G)\Delta x_i<\frac{\epsilon}{2}+2M\frac{\epsilon}{4M}=\epsilon$. 这样对于任意 $\epsilon>0$ 我们都找到了一个分割 Δ 使得 $\sum\limits_{i=1}^n\omega_i(G)\Delta x_i<\epsilon$.
12. 考虑 $f(x)=\tan(\pi x-\frac{\pi}{2})$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})=0$, 但是 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

2 第 2 次习题课: 定积分的性质与计算

2.1 问题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 证明 $\forall a,b\in\mathbb{R},\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x=0$.
2. (Riemann-Lebesgue 引理). $f\in R[a,b],g\in R[0,T],g(x+T)=g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\to\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$.
3. 求积分 $I=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1},\alpha\in(0,\pi)$.
4. 求积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.
5. 求积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\mathrm{d}x$.
6. 求积分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\mathrm{d}x$, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n}{\ln n}$.
7. $f(x)\in C[a,b]$, 且对于任意的 $[\alpha,\beta]\subset[a,b],\exists\delta>0,M>0,\text{s.t.}\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|\le M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x)\equiv 0$.
8. $f(x)\in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)\equiv 0$.
9. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明 $f(x)=xf(1)$.
10. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x)\in R[0,x],\forall x\in(0,+\infty)$, 且 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.
11. $f(x)\in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_{-1}^1(1-x^2)^n f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=f(0)$.
12. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续, 且 $f^2(t)\le 1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$. 证明 $f(t)\le 1+t$.

2.2 解答

1. WLOG $h<1$. 由可积函数性质, 存在 $[a,b+1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\epsilon$, 且 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x,y\in[a,b+1],|x-y|<\delta$, 成立$|g(x)-g(y)|\le\frac{\epsilon}{b-a}$. 从而 $\left|\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x+h)-g(x+h)|\mathrm{d}x+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|g(x)-f(x)|\mathrm{d}x\le\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b\frac{\epsilon}{b-a}\mathrm{d}x+\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\le 3\epsilon$.
2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x=0$, 否则考虑 $h(x)=g(x)-\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$.

由 Riemann 积分定义, $\forall\epsilon>0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x)=\begin{cases}C_1 & a=x_0\le x<x_1\\ C_2 & x_1\le x<x_2\\ \cdots & \\ C_m & x_{m-1}\le x\le x_m=b\end{cases}$ 使得 $\int_a^b|f(x)-s_\epsilon(x)|\mathrm{d}x<\epsilon$. 设 $M=\sup_{x\in[0,T]}|g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x|=|\int_a^b(f(x)-s_\epsilon(x))g(nx)\mathrm{d}x+\int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)\mathrm{d}x|\le\int_a^b|f(x)-s_\epsilon(x)|g(nx)\mathrm{d}x+|\sum\limits_{i=1}^m C_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)\mathrm{d}x<M\epsilon+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^m C_i\int_{nx_{i-1}}^{nx_i}g(x)\mathrm{d}x\le M\epsilon+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^m C_iMT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x=0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)\mathrm{d}x=\int_c^{c+T}g(x)\mathrm{d}x+\int_{c+T}^{c+2T}g(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{c+kT}^d g(x)\mathrm{d}x$ (设 $c+kT\le d<c+(k+1)T$) $=\int_{c+kT}^d g(x)\mathrm{d}x\le MT$. 选择一个足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^m C_iMT<\epsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x|\le(M+1)\epsilon$.

3. $I=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+1}=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2\sin\alpha}$.
4. $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2(-x)}{1+e^{x}}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.
5. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}(1-\cos x)=(1-\cos x)\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\mathrm{d}(\ln\sin x)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin x+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x=[\cos x-\ln(1+\cos x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2-1$.
6. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(2nx)}{2\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x]\cos 2x+\sin[(2n-2)x]\sin 2x}{2\sin x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x](1-2\sin^2 x)+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x]}{2\sin x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 x\cos[(2n-2)x]+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x\\
&=I_{n-1}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos[(2n-2)x]+\sin[(2n-2)x]\cos x\mathrm{d}x=I_{n-1}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\\
&=I_{n-1}-\frac{1}{2n-1}\cos[(2n-1)x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=I_{n-1}+\frac{1}{2n-1}
\end{aligned}$$

由于 $I_1=1$, 因此 $I_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}}{\ln n}-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{\ln n}=\frac{1}{2}$.
7. 假设 $\exists f(x_0)>0$. 由连续性, $\exists\delta>0,\text{s.t.}\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta), f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$, 从而 $\forall[\alpha,\beta]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta), \left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|>\frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha)>M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$(最后一个大于号成立只需令 $\beta-\alpha<\left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.
8. 构造 $G(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2, G'(x)=g(x)$ 单调递减, $g(0)=0$, 因此 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 且 $G(0)=0, G(x)\geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x)\equiv 0\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\equiv 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$.
9. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=\frac{\alpha^2}{2}f(1)$. 由集合 $\{q\alpha:q\in\mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha)=qf(\alpha)$, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha)\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^2}{2}f(1)\Rightarrow f(\alpha)=\alpha f(1)$.
10. 凸函数开区间上连续 $\Rightarrow$ 闭区间上可积. 做变换 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(\frac{t}{x}\cdot x)\mathrm{d}\frac{t}{x}=\int_0^1 f(ux)\mathrm{d}u$, 从而 $F(\sum\limits_{i=1}^{n}t_ix_i)=\int_0^1 f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}t_i(ux_i)\right)\mathrm{d}u\leq\int_0^1\sum\limits_{i=1}^{n}t_if(ux_i)\mathrm{d}u=\sum\limits_{i=1}^{n}t_iF(x_i)\Rightarrow F(x)$ 凸.
11. 往证 $\frac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\to 0$, 用极限定义. $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}\forall x\in(-\delta,\delta),|f(x)-f(0)|<\epsilon$. 设 $\max|f(x)|=M$. 从而原式 $=\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}:=I_1+I_2+I_3$. $|I_1|\leq\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\epsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq\epsilon$. $|I_2|\leq 2M\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\epsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M\frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M(1-\delta)\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n}=2M\frac{1-\delta}{\delta}(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2})^n$. 注意到 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}<1$, 从而可以取足够大的 n 使得 $|I_2|<\epsilon$. 类似地放缩 I_3, 从而 $|I_1+I_2+I_3|<3\epsilon$.
12. 原命题条件 $\Rightarrow\frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}}\leq 1\Rightarrow\int_0^x\frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}}dt\leq\int_0^x 1\mathrm{d}t\Rightarrow\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\Big|_0^x\leq x\Rightarrow\sqrt{1+2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}\leq 1+x\Rightarrow f(x)\leq\sqrt{1+2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}\leq 1+x$.

3 第 3 次习题课: 定积分的应用与中值定理

3.1 问题

1. $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递减正函数, 证明对于 $\forall 0<\alpha<\beta\leq 1$ 都有 $\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geq\alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.
2. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$, 求 $f(x)$.
3. 已知 $A>0, AC-B^2>0$, 求椭圆 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 的面积.
4. 证明极坐标下曲线 $r=r(\theta)$ 与 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为 $V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$.
5. 求双扭线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ 绕轴 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.
6. $f(x)\in C^1[0,1], f(x)\in[0,1], f(0)=f(1)=0, f'(x)$ 单调递减. 证明曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的弧长不大于 3.
7. 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?

8. 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r=e^{\theta}$ 在 $(r,\theta)=(1,0)$ 和 $(r,\theta)=(e^{\phi},\phi)$ 之间一段的重心坐标.

9. 求圆的渐伸线 $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$ 上 $A(a,0),B(a,-2\pi a)$ 之间部分与直线 $\overline{AB}$ 围成图形的面积.

10. 试求由抛物线 $y^2=2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

11. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 用定积分第二中值定理证明 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

12. (Dirichlet 判别法). 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. $\forall A\geq a, g(x)\in R[a,A]$ 且 $|\int_a^A g(x)\mathrm{d}x|\leq M$ 恒成立. 证明极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 存在.

3.2 解答

1. $\mathrm{LHS}=\beta\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \geq \beta\alpha f(\alpha)\geq \alpha(\beta-\alpha)f(\alpha)\geq \alpha\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{RHS}$.

2. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(y)+\frac{x^3y}{3}+\frac{x^2y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^y f(t)\mathrm{d}t+yf(x)+\frac{xy^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}$. 两式相减得 $xf(y)+\frac{x^3y}{3}=yf(x)+\frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x}-\frac{x^2}{3}=\frac{f(y)}{y}-\frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x}-\frac{x^3}{3}\equiv C\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}+Cx$. 经验证符合题意.

3. 设矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 有相似标准型 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 λ_1,λ_2 是方程 $\lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2)=0$ 的两个根. 则原椭圆在新坐标系下的方程为 $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=1$, 面积 $S=\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}}=\pi\sqrt{\frac{1}{AC-B^2}}$.

4. 对应 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的扇形面积 $\mathrm{d}S=\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$, 其质心位于 $\frac{2}{3}r(\theta)$ 处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为 $\mathrm{d}V=\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta 2\pi\frac{2}{3}r(\theta)\sin\theta=\frac{2\pi}{3}r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$. 两边积分得到结果.

5. 原命题等价于 $r^2=2a^2\sin 2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases} x=a\sqrt{2\sin 2\theta}\cos\theta \\ y=a\sqrt{2\sin 2\theta}\sin\theta \end{cases}$, 则面积 $S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta)\sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta=8\pi a^2$.

6. 设 $f'(M)=0$. 则周长 $C=\int_0^1\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x\leq\int_0^1(1+|f'(x)|)\mathrm{d}x=1+\int_0^M f'(x)\mathrm{d}x-\int_M^1 f'(x)\mathrm{d}x=1+2f(M)\leq 3$.

7. 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h)=\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3+\int_0^h\pi(\sqrt{R^2-z^2})^2\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi R^3+\pi(R^2h-\frac{1}{3}h^3)$. 对应位移 $[h,h+\mathrm{d}h]$ 所做的微功 $\mathrm{d}W=gV(h)\rho\mathrm{d}h$. 从而 $W=g\int_0^R V(h)\mathrm{d}h=g(\frac{2}{3}\pi R^4+\frac{5}{12}\pi R^4)=\frac{13}{12}g\pi R^4$.

8. $\bar{x}=\frac{\int_0^{\phi}e^{2\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^{\phi}e^{\theta}\mathrm{d}\theta}=\frac{e^{2\phi}(\sin\phi+2\cos\phi)-2}{5(e^{\phi}-1)}, \bar{y}=\frac{\int_0^{\phi}e^{2\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^{\phi}e^{\theta}\mathrm{d}\theta}=\frac{e^{2\phi}(2\sin\phi-\cos\phi)+1}{5(e^{\phi}-1)}$.

9. 直线 AB 的参数方程 $\begin{cases} x=\phi(t)=a \\ y=\psi(t)=t \end{cases}$, $t\in[-2\pi a,0]$. 于是 $S=-\int_0^{2\pi} y(t)\mathrm{d}x(t)-\int_{-2\pi a}^0\psi(t)\mathrm{d}\phi(t)=-\int_0^{2\pi} a(\sin t-t\cos t)a(t\cos t)\mathrm{d}t+0=\frac{4}{3}\pi^3a^2+\pi a^2$.

10. 焦点为 $(\frac{1}{2},0)$, 设过焦点的直线为 $x-\frac{1}{2}=ky$, 与抛物线交点为 y_1,y_2, 则围成的面积为 $S=\int_{y_1}^{y_2}\left(ky+\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{k}{2}(y_2-y_1)(y_2+y_1)+\frac{1}{2}(y_2-y_1)-\frac{1}{6}(y_2-y_1)(y_2^2+y_1y_2+y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1+y_2=2k, y_1y_2=-1$. 则 $S=\frac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k=0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.

11. $f(x)$ 单调, $g(x)=x-\frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理, $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x=f(a)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x+(f(b)-f(a))\int_{\xi}^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x=(f(b)-f(a))\frac{1}{2}(b-\xi)(\xi-a)\geq 0$.

12. 由极限定义, $\forall\epsilon>0,\exists X>a,\mathrm{s.t.}\forall x\geq X,|f(x)|\leq\frac{\epsilon}{4M}$. 从而 $\forall A',A''\geq X,|\int_{A'}^{A''}f(x)g(x)\mathrm{d}x|=|f(A')\int_{A'}^{\xi}g(x)\mathrm{d}x+f(A'')\int_{\xi}^{A''}g(x)\mathrm{d}x|\leq 2M(|f(A')|+|f(A'')|)\leq\epsilon$. 由柯西收敛定理知极限存在.

4 第 4 次习题课: 广义积分的收敛性与计算

4.1 问题

1. $f(x)>0,x\in(1,+\infty),\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda,\lambda>1$, 试判断 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性.

2. (Euler 积分). 求积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$.

3. (Dirichlet 积分). 求积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

4. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$.

5. 计算 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.
6. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭可积, $f(+\infty)=A, f(-\infty)=B$. 证明 $\forall a\in\mathbb{R}$, 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+a)-f(x)]\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.
7. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 的收敛性.
8. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^x\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性和绝对收敛性.
9. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^p}\mathrm{d}x, p\geq 0, a\in\mathbb{R}$ 的收敛性.
10. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x, p,q,r>0$ 的收敛性.
11. $f(x)\in C^1[0,1]$ 且 $f'(x)>0$, 证明广义积分 $\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{x^p}\mathrm{d}x$ 在 $p<2$ 时收敛, 在 $p\geq 2$ 时发散.
12. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$ 收敛.

4.2 解答

1. 由极限定义, $\exists X>1, \text{s.t.}\forall x>X, \frac{\ln f(x)}{\ln x}<-\frac{\lambda+1}{2}\Leftrightarrow f(x)<x^{-\frac{\lambda+1}{2}}$. 由比较判别法知无穷积分收敛.
2. 由对称性, $I=\frac{1}{2}\int_0^\pi\ln\sin x\mathrm{d}x$. 做两倍变换, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.
3. 注意到 $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^n\cos kx$, 从而 $\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. 定义 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$. 由于 $x\to 0$ 时 $f(x)=O(x)$, 因此 $f(x)\in R[0,\pi]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理 (2.1.2) 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\mathrm{d}x=0$, 即是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}$. 再利用恒等式 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 立得结论.
4. 做变换 $t=\frac{1}{x}$, 则 $\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\int_1^A\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t:=I_1+I_2$. 对于 I_1, 由定积分第二中值定理知 $\exists\xi_A\in[1,A]$ $\text{s.t.}I_1=\int_1^{\xi_A}\cos^n t\mathrm{d}t$. 因此对于任意固定的 A, $n\to+\infty$ 时 $I_1\to 0$. 对于 I_2, 成立 $|I_2|\leq\int_A^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{A}$. 因此 $\forall\epsilon>0$, 选择 $A=\frac{2}{\epsilon}$, 则 $|I_2|\leq\frac{\epsilon}{2}$, 并选择充分大的 n 使得 $|I_1|<\frac{\epsilon}{2}$, 此时 $|I|\leq\epsilon$, 由极限定义知结论成立.
5. 做倒数变换, 知 $I(\alpha)=\int_{+\infty}^0\frac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{(1+x^{-2})(1+x^{-\alpha})}=I(-\alpha)$. 又由于 $I(\alpha)+I(-\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, 因此 $I(\alpha)\equiv\frac{\pi}{4}$.
6. $\int_M^N[f(x+a)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_N^{N+a}f(x)\mathrm{d}x-\int_M^{M+a}f(x)\mathrm{d}x\to(A-B)a$.
7. 函数恒正, 只需讨论有界性. 令 $u_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$, 则 $u_k\leq k\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}=k\pi\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}=2k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}\leq 2k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+4(k-1)^6\pi^4x^2}=\frac{k}{\pi(k-1)^3}\int_0^{(k-1)^3\pi^3}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\sim\frac{1}{2k^2}$. 由于 $\int_0^{n\pi}=\sum\limits_{k=1}^n u_k\sim\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{k^2}<+\infty$, 因此原广义积分收敛.
8. 先考虑积分收敛性. 显然当 $p\leq 0$ 时原积分发散. 当 $p>0$ 时, 由于 $|\int_a^A e^{\sin x}\sin 2x\mathrm{d}x|=2|\int_{\sin a}^{\sin A}e^{\sin x}\sin x\mathrm{d}\sin x|=2|e^{\sin A}(\sin A-1)-e^{\sin a}(\sin a-1)|<8e$, $\frac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{e^x\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 我们只需考察积分在 0 处的性质. 由于当 $x\to 0$ 时 $\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\sim\frac{2}{x^{p-1}}$, 因此 $p\geq 2$ 时原积分发散, $p<2$ 时原积分收敛. 再考虑绝对收敛性. 当 $1<p<2$ 时, $\left|\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right|\leq\frac{e}{x^p}$, 因此绝对收敛. 当 $0<p\leq 1$ 时, $\left|\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right|\geq\frac{2^p}{e}\left|\frac{\sin 2x}{(2x)^p}\right|\geq\frac{1}{e}\left|\frac{\sin^2 2x}{(2x)^p}\right|=\frac{1}{2e}\left(\frac{1-\cos 4x}{(2x)^p}\right)$, 而 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4x}{(2x)^p}\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(2x)^p}\mathrm{d}x$ 发散, 因此原积分条件收敛.
9. 当 $a\neq 0, p>0$ 时, $\frac{1}{1+x^p}$ 单调递减趋于 0, $\int_0^N\cos ax\mathrm{d}x$ 有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 当 $a\neq 0, p=0$ 时显然发散. 当 $a=0, p>1$ 时显然收敛. 当 $a=0, 0\leq p\leq 1$ 时显然发散.
10. 显然当 $q\leq p+1$ 时原积分发散. 当 $q>p+1$ 时, 一方面,

$$I=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^\pi\frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}\mathrm{d}t\leq 2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^p\pi^p\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}t}{1+(k\pi)^q|\frac{2}{\pi}t|^r}\leq C_1\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^p}{k^{\frac{q}{r}}}\int_0^{2(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}$$

另一方面,

$$I=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^\pi\frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}\mathrm{d}t\geq\sum_{k=0}^{+\infty}(k\pi)^p\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}t}{1+[(k+1)\pi]^q|t|^r}\geq C_2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^p}{(k+1)^{\frac{q}{r}}}\int_0^{\pi[(k+1)\pi]^{\frac{q}{r}}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}$$

$r>1$, $\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}$ 一致有界. $r=1$, $\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}\sim\ln A$. $r<1$, $\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}\sim A^{1-r}$. 因此原积分收敛 iff $q>(p+1)\max(r,1)$.
11. 由柯西微分中值定理, $\exists\xi\in(0,x)$ $\text{s.t.}\frac{f(x)-f(0)}{x^p}=\frac{f'(\xi)}{x^{p-1}}$. 由于 $f'(x)$ 连续且大于 0, 因此 $\exists 0<m<M$ $\text{s.t.}m<f'(x)<M$ 对 $\forall x\in[0,1]$ 均成立, 即 $\frac{m}{x^{p-1}}<\frac{f(x)-f(0)}{x^p}<\frac{M}{x^{p-1}}$. 从而 $p\geq 2$ 时发散, $p<2$ 时收敛.
12. $\int_0^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}f(t)\mathrm{d}t$. 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ 收敛, $\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}$ 单调有界, 由 Abel 判别法知 $\int_0^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$ 收敛. 另一侧同理.

5 第 5 次习题课: 积分的综合运用

5.1 问题

1. 证明 π 是无理数. 你可以按照以下步骤: (1) 设 $\pi=\frac{a}{b},a,b\in\mathbb{Z}$, 定义 $f(x)=\frac{b^nx^n(\pi-x)^n}{n!}$, 证明 $\forall i\in\mathbb{N}_+,f^{(i)}(0),f^{(i)}(\pi)$ 都是整数. (2) 证明定积分 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 也是整数. (3) 证明 $0<\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x<1$, 得到矛盾.
2. $f(x)\in C^2[0,1],f(0)=f(1)=f'(0)=0,f'(1)=1$, 证明 $\int_0^1(f''(x))^2\mathrm{d}x\geq 4$, 取等号当且仅当 $f(x)=x^3-x^2$.
3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上恒正, 且满足 Lipschitz 条件 $|f(x_1)-f(x_2)|\leq L|x_1-x_2|$. 又已知对于 $a\leq c\leq d\leq b$ 成立 $\int_c^d\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\alpha,\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\beta$. 证明积分不等式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{e^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.
4. $f(x)\in C[0,+\infty)$ 且平方可积, $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\leq 4\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$.
5. (Euler-Poisson 积分). 利用数列 $\left\{\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right\}$ 的极限, 求积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$. (你也许需要用到如下命题: 当 $a\geq 1$ 时, $0\leq e^{-x}-\left(1-\frac{x}{a}\right)^a\leq\frac{x^2}{a}e^{-x}$ 在区间 $[0,a]$ 上恒成立. 这由导数知识容易验证.)
6. 求积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$.
7. $a,b>0$, 广义积分 $\int_0^{+\infty}f(ax+\frac{b}{x})\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty}f(ax+\frac{b}{x})\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t$.
8. $f(x)\in C^2[a,b]$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(\frac{a+b}{2})=\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$.
9. $f'(x)\in R[0,1]$, 定义 $A_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}nA_n=\frac{1}{2}(f(0)-f(1))$.
10. (等周问题). 长为 L 的曲线何时围成的区域面积最大? 你可以假设围成的区域是凸域且边界足够光滑, 以及其他正则性条件.
11. 广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $\forall k=1,2,\cdots,n,u_k(x)$ 均单调有界. 证明 $\int_0^{+\infty}f(x)\prod\limits_{k=1}^n u_k(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
12. $f(x)\in C[0,+\infty),a>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+a\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=A<\infty$, 证明 $f(+\infty)=0$.

5.2 解答

1. (1) $f(x)$ 是一个次数从 n 到 $2n$ 的多项式. 至于 $f^{(i)}(0)$ 是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时 $i\geq n$, 求导后得到的非零常数值是 $i!c$, 且 c 是整数除以 $n!$ 得到的有理数, 从而 $i!c$ 是整数. 由于 $f(x)=f(\pi-x)\Rightarrow f^{(i)}(\pi)=(-1)^nf^{(i)}(0)$, 因此 $f^{(i)}(\pi)$ 也是整数.
(2) 由分部积分, $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=f(x)(-\cos x)|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x=f(0)+f(\pi)+f'(x)\sin x|_0^\pi-\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x=f(0)+f(\pi)-\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x$. $f(x)$ 是 $2n$ 此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=f(0)+f(\pi)-f''(0)-f''(\pi)+\cdots+(-1)^nf^{(2n)}(0)+(-1)^nf^{(2n)}(\pi)$, 因此是整数.
(3) 在区间 $[0,\pi]$ 上成立 $0\leq a-bx=b(\pi-x)\leq a$, 因此 $0\leq f(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\leq\frac{\pi^na^n}{n!}$, 从而 $0<\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x\leq\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x<\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$. 当 n 足够大时, $\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}<1$.
2. 令 $p(x)=x^3-x^2$, 从而有 $\int_0^1[(f''(x))^2-(p''(x))^2]\mathrm{d}x=\int_0^1[f''(x)-p''(x)]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1 f''(x)p''(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1[p''(x)]^2\mathrm{d}x\geq 0+2f'(x)p''(x)|_0^1-2\int_0^1 f'(x)p'''(x)\mathrm{d}x-8=2f'(1)p''(1)-2f(x)p'''(x)|_0^1+2\int_0^1 f(x)p''''(x)\mathrm{d}x-8=0$.
3. 设 $m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)=f(x_0)$, 从而 $m\leq f(x)\leq m+L|x-x_0|,\frac{1}{m+L|x-x_0|}\leq\frac{1}{f(x)}\leq\frac{1}{m}$. 两边积分, 得到

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq m(b-a)+\frac{L}{2}[(x_0-a)^2+(x_0-b)^2]$$
$$\frac{b-a}{m}\geq\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\beta\geq\frac{1}{L}\ln\frac{(x_0+\frac{m}{L}-a)(-x_0+\frac{m}{L}+b)}{(\frac{m}{L})^2}$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\sup_{x_0\in[a,b]}\left\{m(b-a)+\frac{L}{2}[(x_0-a)^2+(x_0-b)^2]\right\}=m(b-a)+\frac{L}{2}(b-a)^2$$
$$\beta\geq\inf_{x_0\in[a,b]}\left\{\frac{1}{L}\ln\frac{(x_0+\frac{m}{L}-a)(-x_0+\frac{m}{L}+b)}{(\frac{m}{L})^2}\right\}\Rightarrow b-a\leq\frac{(e^{L\beta}-1)m}{L}$$

从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq m\left(\frac{(e^{L\beta}-1)m}{L}\right)+\frac{L}{2}\left(\frac{(e^{L\beta}-1)m}{L}\right)^2=\frac{(e^{2L\beta}-1)m^2}{2L}$$

对比欲证结论, 只需证明

$$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x \geq \alpha m^2 = m^2\int_c^d \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{\int_c^d f(x)\mathrm{d}x}{\int_c^d \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x} \geq m^2$$

这由 $f(x) \geq m, \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}$ 立得.

4. 由 L'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{g^2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0} 2g(x)f(x) = 0$. 因此 $\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^A g^2(x)\mathrm{d}(-\frac{1}{x}) = -\frac{g^2(A)}{A} + 2\int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$. 再由 Cauchy 不等式, $\left(\int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_0^A f^2(x)\mathrm{d}x \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \left(\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \frac{g^2(A)}{A}\right)^2 \leq 4\int_0^A f^2(x)\mathrm{d}x \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \left(\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leq 4\int_0^A f^2(x)\mathrm{d}x \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \leq 4\int_0^A f^2(x)\mathrm{d}x$. 令 $A \to +\infty$ 即可.

5. 记 $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. 做变换 $t = \sqrt{n}\sin x$ 知 $I_n = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\mathrm{d}x = \sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 由于 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, 因此只需求出极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right]\mathrm{d}t$. 在提示中令 $x = t^2, a = n$, 得到估计式 $0 \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right]\mathrm{d}t \leq \frac{\int_0^{\sqrt{n}} t^4 e^{-t^2}\mathrm{d}t}{n}$. 当 $n \to +\infty$ 时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0, 由夹逼原理知欲求极限存在且为 0. 从而 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. $I = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(2x)}{(2x)^2+4}\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{6}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{\ln 2}{6}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \overset{x=e^t}{=} \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t - \frac{\pi\ln 2}{12} = -\frac{\pi\ln 2}{12}$.

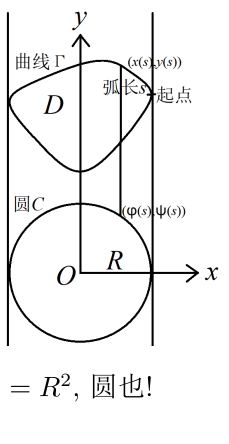
7. 令 $t = ax - \frac{b}{x}$, 则 $x = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a}, ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2+4ab}, \mathrm{d}x = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t$, 从而

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(ax+\frac{b}{x})\mathrm{d}x &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

8. $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}(x-a) = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)\mathrm{d}\frac{(x-a)^2}{2} = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2}\mathrm{d}x$. 同理 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} + f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2}\mathrm{d}x$. 两式相加得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + (f''(\xi_1)+f''(\xi_2))\frac{(b-a)^3}{48} = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$. 最后一步用了 Darboux 定理.

9. 注意到 $A_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2} + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1)) = \sum\limits_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n}\right) + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1))$. 设 $|f'(x)| \leq M$, 从而 $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}(x - \frac{2k-1}{2n}) = f(x)(x - \frac{2k-1}{2n})\Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (x - \frac{2k-1}{2n})f'(x)\mathrm{d}x = \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n} - B_n$, 其中 $B_n := \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (x - \frac{2k-1}{2n})f'(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} (x - \frac{2k-1}{2n})f'(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} (x - \frac{2k-1}{2n})f'(x)\mathrm{d}x = f'(\xi_{k,1})\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} (x - \frac{2k-1}{2n})\mathrm{d}x + f'(\xi_{k,2})\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} (x - \frac{2k-1}{2n})\mathrm{d}x = -\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2} + \frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}$. 综上所述, 我们有 $nA_n = \sum\limits_{k=1}^n \frac{f'(\xi_{k,2})-f'(\xi_{k,1})}{8n} + \frac{f(0)-f(1)}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} nA_n = \frac{1}{8}(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x) + \frac{f(0)-f(1)}{2} = \frac{f(0)-f(1)}{2}$.

10. 设曲线方程为 $\Gamma : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0,L]$, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, 且 D 的面积为 $A = \int_0^L xdy = \int_0^L x(s)y'(s)ds$. 又设 $C : \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为半径的圆, 此处仍选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面积为 $\pi R^2 = -\int_0^L ydx = -\int_0^L \psi(s)x'(s)ds$. 从而由 Cauchy 不等式, $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))ds \leq \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2}ds \leq \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2+y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)}ds = RL$. 因此我们成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq A + \pi R^2 \leq RL \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s) + \psi(s)y'(s))^2 = 0$. 由于 $x(s)^2 + \psi(s)^2 = R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = y'(s), \psi(s) = y(s) + y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2 + (y-y_0)^2 = R^2$, 圆也!



11. 由 Abel 判别法, $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $u_2(x)$ 单调有界, 因此 $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)u_2(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 依此类推.

12. 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 由 L'Hospital 法则, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}F(x)}{e^{ax}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}(aF(x)+f(x))}{ae^{ax}}=\frac{A}{a}$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A-a\cdot\frac{A}{a}=0$.

6 第 6 次习题课: 数项级数的基本概念与正项级数

6.1 问题

1. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ 的收敛性.

2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!})^p$ 的收敛性.

3. 判断级数 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$ 的收敛性.

4. 计算 $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1}$.

5. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{n}(n+1)}\le p, p\ge 1$.

6. $a_n>0$, 证明 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1)\ge 1$.

7. $a_n>0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.

8. $0<a_1<\frac{\pi}{2}, a_n=\sin a_{n-1}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^p$ 的收敛性.

9. (Bertrand 判别法). 对于正项级数, 证明: $\begin{cases}\varliminf\limits_{n\to+\infty}\ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]>1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\text{收敛}\\ \varlimsup\limits_{n\to+\infty}\ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]<1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\text{发散}\end{cases}$.

10. 正项级数 a_n 单调递减, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^k a_{2^k}$ 同敛散.

11. 是否存在部分和序列有界但通项趋于 0 的发散级数?

12. $a_n>0, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, a_n-a_{n+1} 单调下降. 证明 a_n 单调区域趋于 0, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty$.

6.2 解答

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}=1$, 因此原级数发散.

2. 考虑 Rabbe 判别法. $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n[(\frac{2n+5}{2n+2})^p-1]=n[(1+\frac{3}{2n+2})^p-1]=n[1+\frac{3p}{2n+2}+o(\frac{1}{n})-1]\to\frac{3}{2}p$, 因此 $p>\frac{2}{3}$ 时收敛, $p<\frac{2}{3}$ 时发散. $p=\frac{2}{3}$ 时, 记 $f(x)=(1+x)^{\frac{2}{3}}$, 则 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=(1+\frac{3}{2(n+1)})^{\frac{2}{3}}=1+\frac{1}{n+1}+\frac{f''(\xi)}{2!}(\frac{3}{2(n+1)})^2<1+\frac{1}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}}:=\frac{b_n}{b_{n+1}}$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n=+\infty$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=+\infty$, 即级数发散.

3. $\sqrt{2}=2\sin\frac{\pi}{4}, \sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=2\sin\frac{\pi}{8}, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{16}$, 依此类推, 再利用 $\sin x\sim x$ 知原级数收敛.

4. 注意到 $\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1}=\arctan\frac{1}{2k-1}-\arctan\frac{1}{2k}$, 从而 $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1}=\arctan\frac{1}{2}$.

5. $\frac{1}{\sqrt[p]{n}(n+1)}=n^{\frac{p-1}{p}}[(\frac{1}{\sqrt[p]{n}})^p-(\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}})^p]\overset{f(x)=x^p\text{的微分中值定理}}{=}n^{\frac{p-1}{p}}p(\frac{1}{\sqrt[p]{n+\theta}})^{p-1}(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}})\le p(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}})$. 两边求和.

6. 反证法. 若 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1)<1$. 则 $\exists N>0,\text{s.t.}\forall n\ge N, n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1)<1\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}$. 两边累加, 知 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{N+i}<\frac{a_N}{N}$, 这与调和级数的发散性矛盾.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛 $\Rightarrow\frac{1}{a_n}\to 0\Rightarrow a_n\to+\infty$. 因此可按从小到大顺序将 $\{a_n\}$ 重排为 $a_{\phi(1)}\le a_{\phi(2)}\le\cdots\le a_{\phi(n)}\le\cdots$. 令 $b_n=\frac{n}{a_{\phi(1)}+a_{\phi(2)}+\cdots+a_{\phi(n)}}$, 则 $\{b_n\}$ 单调递减, 且 $b_{2n}=\frac{2n}{a_{\phi(1)}+\cdots+a_{\phi(2n)}}\le\frac{2n}{a_{\phi(n)}+\cdots+a_{\phi(2n)}}\le\frac{2n}{na_{\phi(n)}}=\frac{2}{a_{\phi(n)}}$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n<+\infty$. 又因为 $\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}\le b_n$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$ 收敛.

8. 上学期例题已证 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n^2=3$, 因此 $a_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}, a_n^p\sim(\frac{3}{n})^{\frac{p}{2}}$, 从而当 $p\le 2$ 时级数发散, $p>2$ 时级数收敛.

9. 先证明第一种情况. 由条件知 $\exists N_1>0, \text{s.t.}\forall n>N_1, \ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]>r_1>1 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{n\ln n}{(n+1)\ln n+r_1}$. 可以验证当 $1<p<r_1$ 时, $\frac{n\ln n}{(n+1)\ln n+r_1}<\frac{n\ln^p n}{(n+1)\ln^p(n+1)} \Leftrightarrow \frac{(n+1)[\ln^p(n+1)-\ln^p n]}{\ln^{p-1}n}<r_1$. 利用 $f(x)=x^p$ 的微分中值定理, 知 LHS $=\dfrac{(n+1)p\ln^{p-1}(n+\theta)[\ln(n+1)-\ln n]}{\ln^{p-1}n}<p\underbrace{(n+1)[\ln(n+1)-\ln n]}_{\to1}\underbrace{\dfrac{\ln^{p-1}(n+1)}{\ln^{p-1}n}}_{\to1}<r_1=$ RHS 当 n 足够大时成立.

因此有 $\exists N_2>N_1, \text{s.t.}\forall n>N_2, \frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{n\ln^p n}{(n+1)\ln^p(n+1)}\Rightarrow a_n<\frac{C}{n\ln^p n}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{C}{n\ln^p n}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

再证明第二种情况. 由条件知 $\exists N_3>0, \text{s.t.}\forall n>N_3, \ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1]<1\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{n\ln n}{(n+1)\ln n+1}>\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}\Rightarrow a_n>\frac{C}{n\ln n}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{C}{n\ln n}$ 发散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.

10. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}a_{2^n+k}\le\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n a_{2^n}=2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^{n-1}a_{2^n}\le2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}a_{2^{n-1}+k}=2\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_n$.

11. 存在. 一个例子为 $1,-\frac12,-\frac12,\frac13,\frac13,\frac13,-\frac14,-\frac14,-\frac14,-\frac14,\cdots$.

12. 前者显然. 对于后者, $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}\ge\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}=\frac{a_n-a_{n+1}}{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(a_k^2-a_{k+1}^2)}=\frac{a_n-a_{n+1}}{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(a_k-a_{k+1})(a_k+a_{k+1})}\ge\frac{a_n-a_{n+1}}{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(a_n-a_{n+1})(a_k+a_{k+1})}\ge\frac{1}{2\sum\limits_{k=n}^{+\infty}a_n}\to+\infty$ 当 $n\to+\infty$ 时.

7 第 7 次习题课: 任意项级数与数项级数的运算

7.1 问题

1. 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin n}{\ln n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$ 的收敛性.

3. $p,q>0$, 讨论级数 $1-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}+\cdots$ 的收敛性与绝对收敛性.

4. 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]$ 的收敛性与绝对收敛性.

5. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 数列 $p_n>0$ 且单调递增趋于 $+\infty$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^n p_ka_k}{p_n}=0$.

7. 计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{5}n)}{n}$.

8. $p>0$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}>\frac{2^p}{2^p+1}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=A$ 且绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n=B$ 且条件收敛, 证明 Cauchy 乘积收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n=AB$.

10. 对于两个发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

11. 对于收敛级数和发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

12. 对于正项收敛级数和正项发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

7.2 解答

1. $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减趋于 0, $\sum\limits_{n=2}^{k}\sin n$ 对于 $\forall k\ge1$ 有一致上界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 由于 $|\frac{\sin n}{\ln n}|\ge\frac{\sin^2 n}{\ln n}=\frac{1-\cos 2n}{2\ln n}=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos 2n}{\ln n}$, 而 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos 2n}{\ln n}$ 收敛, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2\ln n}$ 发散, 因此不绝对收敛.

2. 合并同号项, 级数改写为 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^kb_k$, 其中 $b_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\le\frac{2k+1}{k^2}\to0$. 另一方面, $b_k\ge\int_0^1\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{2k}^{2k+1}\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x=\int_0^{2k+1}\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x=\ln\frac{(k+1)^2}{k^2}$, 而 $b_{k+1}\le\int_{-1}^0\frac{1}{(k+1)^2+x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{2k+1}^{2k+2}\frac{1}{(k+1)^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2k+2}\frac{1}{(k+1)^2+x^2}\mathrm{d}x=\ln\frac{(k+1)^2+2(k+1)}{k(k+2)}\Rightarrow b_k-b_{k+1}\ge\ln\frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)}\ge0$. 由 Leibniz 判别法知收敛.

3. (a) 当 $p>1,q>1$ 时, $|a_n|\le\frac{1}{n^{\min(p,q)}}$, 因此绝对收敛.
(b) 当 $0<p=q\le1$ 时, 由 Leibniz 判别法知原级数条件收敛.
(c) 当 $p>1,0<q\le1$ 或 $0<p\le1,q>1$ 时, 原级数正部 (或负部) 收敛, 负部 (或正部) 发散, 因此发散.
(d) 当 $0<p<q\le1$ 时, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}}{\frac{1}{(2n-1)^p}}=1$ 知原级数发散.
(e) 当 $0<q<p\le1$ 时, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{(2n)^q}+\frac{1}{(2n+1)^p}}{-\frac{1}{(2n)^q}}=1$ 知原级数发散.
4. (a) $p>1$ 时, 由 $\left|\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]\right|<\frac{1}{n^p}$ 知绝对收敛.
(b) 由 Taylor 展开, $\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2(1+\xi_n)^2}\frac{1}{n^{2p}}$, 因此 $\frac12<p\le1$ 时级数条件收敛, $0<p<\frac12$ 时级数发散.
5. 记 $S_{n,n+p}=\sum\limits_{k=n}^{n+p}b_k,M=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}|a_n-a_{n-1}|$. 由收敛性, $\exists N>0,\text{s.t.}\forall n>N,|S_{n,n+p}|<\frac{\epsilon}{2M}$. 从而有 $\forall n>N,|\sum\limits_{k=n}^{n+p}a_kb_k|=|\sum\limits_{k=n}^{n+p}a_k(S_{n,k}-S_{n,k-1})|=|a_{n+p}S_{n,n+p}+\sum\limits_{k=n}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})S_{n,k}|\le|a_{n+p}||S_{n,n+p}|+\sup\limits_{n\le k\le n+p-1}|S_{n,k}|\sum\limits_{k=n}^{n+p-1}|a_{k+1}-a_k|\le\sup\limits_{n\le k\le n+p}|S_{n,k}|\left[|a_{n+p}|+\sum\limits_{k=n}^{n+p-1}|a_{k+1}-a_k|\right]\le\frac{\epsilon}{2M}2M=\epsilon$. 由 Cauchy 判别准则知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛.
6. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 并设 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}p_ka_k=p_1S_1+\sum\limits_{k=2}^{n}p_k(S_k-S_{k-1})=\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k(p_k-p_{k+1})+S_np_n\Rightarrow\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_kS_k}{p_n}=S_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}=(S_n-S)-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}+S\frac{p_1}{p_n}$. 显然 $S_n-S\to0,S\frac{p_1}{p_n}\to0$. 对于第二项, 设 $|S_n|\le M$, 由极限定义, $\exists N_1>1,\text{s.t.}\forall n\ge N_1,|S_n-S|<\frac{\epsilon}{2}$. 从而有估计 $|\sum\limits_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}|\le2M\sum\limits_{k=1}^{N_1}\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}+\frac{\epsilon}{2}\sum\limits_{k=N_1+1}^{n-1}\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}\le2M\frac{p_{N_1+1}-p_1}{p_n}+\frac{\epsilon}{2}$. 又由极限定义, $\exists N_2>N_1,\text{s.t.}\forall n\ge N_2,\frac{p_{N_1+1}-p_1}{p_n}\le\frac{\epsilon}{4M}$. 此时 $|\sum\limits_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}|<\epsilon$, 即 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}\to0$.
7. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\sqrt5k}{k}=-\int_{\sqrt5}^{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt\mathrm{d}t=-\int_{\sqrt5}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac12)t-\sin\frac t2}{2\sin\frac t2}\mathrm{d}t=-\int_{\sqrt5}^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac t2}\sin(n+\frac12)t\mathrm{d}t+\frac12(\pi-\sqrt5)\overset{\text{R-L}}{\to}\frac12(\pi-\sqrt5)$.
8. 利用函数 $f(x)=\frac{1}{x^p}$ 的凸性, 成立 $\frac{1}{(4k-1)^p}-\frac{1}{(4k)^p}+\frac{1}{(4k+1)^p}-\frac{1}{(4k+2)^p}>\frac{1}{(4k)^p}-\frac{1}{(4k+2)^p}$, 从而 $S_{4n+2}>1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}(1-S_{2n})$, 两边取极限知 $S>1-\frac{S}{2^p}$, 即 $S>\frac{2^p}{2^p+1}$.
9. 记 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_n=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1=A_nB+(a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1)$(这里 $\beta_k=B_k-B$)$:=\Delta_1(n)+\Delta_2(n)$. 显然 $\Delta_1(n)\to AB$, 下证 $\Delta_2(n)\to0$. 设 $|\beta_n|\le\beta,\forall n\ge1$. 由定义, $\forall\epsilon>0,\exists N\ge3,\text{s.t.}\forall n>N,\forall p\ge1,|\beta_n|<\frac{\epsilon}{2(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|)},\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\frac{\epsilon}{2\beta}$. 从而当 $n\ge2N$ 时, $|\Delta_2(n)|\le|\sum\limits_{k=1}^{N}a_k\beta_{n+1-k}|+|\sum\limits_{k=N+1}^{n}a_k\beta_{a+1-k}|\le\epsilon$.
10. 不一定, 反例是 $a_0=1,a_n=-(\frac32)^n$ 和 $b_0=1,b_n=(\frac32)^{n-1}(2^n+\frac{1}{2^{n+1}})$. 显然 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n,\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n$ 均发散, 但它们的 Cauchy 乘积 $c_n=(\frac32)^{n-1}(2^n+\frac{1}{2^{n+1}})-(\frac32)^{n-1}(2^{n-1}+\frac{1}{2^n})-\cdots-(\frac32)^{n-1}(2^1+\frac{1}{2^2})-(\frac32)^n=(\frac34)^n\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 收敛.
11. 不一定, 反例是 $a_n\equiv0$ 和 $b_n\equiv1$. 当然也不一定收敛, 如 $a_n=\frac{1}{n^2},b_n=n$.
12. 一定. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散, 则 $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\ge a_1b_{n-1}$, 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 发散.

8 第 8 次习题课: 无穷乘积与函数项级数的基本概念

8.1 问题

1.

8.2 解答

1.

9　第 9 次习题课: 函数项级数的一致收敛

9.1　问题

9.2　解答

10　第 10 次习题课: 一致收敛函数项级数的性质

10.1　问题

10.2　解答

11　第 11 次习题课: 幂级数的基本概念与性质

11.1　问题

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = A, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = B$. 证明若 Cauchy 乘积级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ 收敛, 则它必收敛于 AB.

11.2　解答

1. 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$. $f(1), g(1)$ 收敛 $\Rightarrow \forall |x| < 1, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n x^n|, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n x^n|$ 收敛 $\Rightarrow \forall |x| < 1, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = (\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n)(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n x^n)$. 这三个级数都在 $x = 1$ 处收敛, 因此左连续, 令 $x \to 1 - 0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n = (\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n)(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n)$.

12　第 12 次习题课: 幂级数展开与多项式逼近

12.1　问题

12.2　解答

13　第 13 次习题课: 傅里叶级数的基本概念与性质

13.1　问题

13.2　解答

14　第 14 次习题课: 傅里叶级数的收敛性

14.1　问题

1. 证明余元公式 $\mathrm{Beta}(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, 并计算积分 $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ 和 $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. (提示: 教材习题十二第 12 题)

14.2　解答

1. $\mathrm{Beta}(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$, 利用变量替换 $x = \frac{1}{t}$ 有 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{-p}}{1+x} dx$, 因此 $\mathrm{Beta}(p, 1-p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x} dx$. 将 $\frac{1}{1+x}$ 展成幂级数有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Beta}(p, 1-p) &= \lim_{r \to 1-0} \int_0^r \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x} dx = \lim_{r \to 1-0} \int_0^r \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k+p-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k-p} \right] dx \\
&= \lim_{r \to 1-0} \int_0^r \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} r^{k+p} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k-p+1} r^{k-p+1} \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k-p+1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+p} + \frac{1}{p-k} \right) = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2-k^2}$$

由于 $\cos px$ 的傅里叶级数 $\cos p\pi = \frac{\sin p\pi}{\pi} \left[\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2-k^2} \cos kx \right]$ 在 $|x| \le \pi$ 处处收敛, 令 $x=0$ 得 $\mathrm{Beta}(p, 1-p) = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2-k^2} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx \overset{t=\frac{1}{1+x^\beta}}{=} \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} (1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} \mathrm{Beta}(1-\frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta}) = \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha+1}{\beta}\pi}$.

令 $p = \frac{x}{\pi}, 0 < x < \pi$, 得到 $\frac{\pi}{\sin x} = \frac{\pi}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x\pi}{x^2-n^2\pi^2}$, 即 $1 = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x \sin x}{x^2-n^2\pi^2}$. 两边积分有 $\pi = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{2x \sin x}{x^2-n^2\pi^2} dx$. 从而

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} [\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} \frac{\sin x}{x} dx] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} [\int_0^\pi \frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} dt + \int_0^\pi \frac{\sin[t-(n+1)\pi]}{t-(n+1)\pi} dt] = \frac{1}{2} [\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{2t \sin t}{t^2-n^2\pi^2} dt] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

15 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2024 春数学分析 II 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.