

# 高等数学 A II 习题课讲义

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2023 年 2 月 19 日

## 目录

<b>1 第 1 次习题课: 二重积分</b>	<b>3</b>
1.1 问题	3
1.2 解答	3
1.3 补充 (不要求掌握!)	3
<b>2 第 2 次习题课: 三重积分</b>	<b>4</b>
2.1 问题	4
2.2 解答	4
2.3 补充 (不要求掌握!)	5
<b>3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式</b>	<b>5</b>
3.1 问题	5
3.2 解答	6
3.3 补充 (不要求掌握!)	7
<b>4 第 4 次习题课: 曲面积分</b>	<b>7</b>
4.1 问题	7
4.2 解答	7
4.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式</b>	<b>9</b>
5.1 问题	9
5.2 解答	9
5.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>6 第 6 次习题课: 初等积分法, 解的存在唯一性</b>	<b>9</b>
6.1 问题	9
6.2 解答	9
6.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>7 第 7 次习题课: 二阶线性微分方程</b>	<b>9</b>
7.1 问题	9
7.2 解答	9
7.3 补充 (不要求掌握!)	9

<b>8 第 8 次习题课: 常数变异法</b>	<b>9</b>
8.1 问题	9
8.2 解答	9
8.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>9 第 9 次习题课: 数项级数</b>	<b>9</b>
9.1 问题	9
9.2 解答	9
9.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>10 第 10 次习题课: 数项级数, 函数项级数</b>	<b>9</b>
10.1 问题	9
10.2 解答	9
10.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数</b>	<b>9</b>
11.1 问题	9
11.2 解答	9
11.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>12 第 12 次习题课: 广义积分, 含参积分</b>	<b>9</b>
12.1 问题	9
12.2 解答	9
12.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>13 第 13 次习题课: 含参广义积分, 傅里叶级数</b>	<b>9</b>
13.1 问题	9
13.2 解答	9
13.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>14 第 14 次习题课: 傅里叶级数</b>	<b>9</b>
14.1 问题	9
14.2 解答	9
14.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>15 综合复习</b>	<b>9</b>
15.1 问题	9
15.2 解答	9
<b>16 致谢</b>	<b>9</b>

# 1 第 1 次习题课: 二重积分

## 1.1 问题

1. 累次积分变序:  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx, \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy$ .
2. 求  $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  与  $xoy$  平面所围的体积.
3. 计算积分  $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ .
4. 区域  $D$  由  $y = x^3, y = 0, x = 1$  围成, 计算积分  $I = \iint_D \sqrt{1-x^4} d\sigma$ .
5. 区域  $D$  由  $y = 0, x = 1, y = x$  围成, 计算积分  $I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} d\sigma$ .
6. 区域  $D$  由  $x^2 + y^2 = 4$  和  $y = -x^2 + 1, y = x^2 - 1$  两线在  $|x| \leq 2$  部分所围成, 计算积分  $I = \iint_D (x^2 + y^3) d\sigma$ .
7.  $0 \leq p(x) \in R[a, b], f(x), g(x)$  于  $[a, b]$  单调递增, 证明  $\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$ .
8. 计算极限  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$ .

## 1.2 解答

1. 这种题最好画图. 答案是  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy, \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f(x, y) dx$ .
2. 区域  $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, D_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\}$ . 则体积  $V = \iint_D z d\sigma = 4 \iint_{D_0} z d\sigma = 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 4 \int_0^a \frac{2}{3} \frac{b}{a^3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \dots$  (换元法)  $\dots = \frac{\pi}{2} ab$ .
3. 区域  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ . 累次积分时先对  $x$  积分, 则原积分  $= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy = 1 - \sin 1$ .
4.  $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{1-x^4} dy = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} dx = -\frac{1}{6} (1-x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$ .
5.  $I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{4x^2-y^2}} \sqrt{4x^2-y^2} dy = \int_0^1 dx \left[ \frac{y}{2} \sqrt{4x^2-y^2} + \frac{4x^2}{2} \arcsin \frac{y}{2x} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4x^2-y^2}} = \int_0^1 \left( \frac{x}{2} \sqrt{3x^2} + 2x^2 \arcsin \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$ .
6. 首先, 因为积分区域关于  $y = 0$  对称, 所以  $\iint_D y^3 d\sigma = 0$ . 记  $D_1$  为  $D$  的第一象限部分,  $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}, D_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x^2 + 1\}$ . 因此  $I = 4 \iint_{D_1} x^2 d\sigma = 4 \iint_{D_2} x^2 d\sigma - 4 \iint_{D_3} x^2 d\sigma = 4 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 dy - 4 \int_0^1 dx \int_0^{-x^2+1} x^2 dy = 4 \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx - 4 \int_0^1 x^2 (1-x^2) dx = 4\pi - \frac{8}{15}$ .
7. 利用二重积分.

$$\begin{aligned} \text{RHS} - \text{LHS} &= \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b p(y) dy \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(y) f(y) dy \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b \int_a^b [p(x)p(y)f(x)g(x) - p(x)p(y)f(y)g(x)] d\sigma = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(x)[f(x) - f(y)] d\sigma \end{aligned}$$

同理  $\text{RHS} - \text{LHS} = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y) - f(x)] d\sigma$ . 两式相加得  $2(\text{RHS} - \text{LHS}) = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)[g(x) - g(y)][f(x) - f(y)] d\sigma \geq 0$ .

8. 记  $I(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$ , 则  $I^2(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-a}^a e^{-y^2} dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} d\sigma$ . 记区域  $D(a) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , 积分  $J(a) = \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2} d\sigma$ . 由简单的二维区域包含关系知  $J(a) \leq I^2(a) \leq J(\sqrt{2}a)$ . 再利用二重积分极坐标换元知  $J(a) = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=a} = \pi(1 - e^{-a^2})$ . 因此  $\lim_{a \rightarrow +\infty} J(a) = \pi$ . 由夹逼原理知  $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = \sqrt{\pi}$ .

## 1.3 补充 (不要求掌握!)

类似于累次极限和整体极限的关系, 累次积分和二重积分也不具有相互决定性, 即二重积分存在并不保证累次积分存在. 例如设  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  是区间  $[0, 1]$  上的所有有理数组成的序列, 定义矩形  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  上的函数为  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{if } x = x_k, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ . 可以证明  $f(x, y) \in R(D)$  且  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ . 但是, 由于  $f(x_k, y) = \frac{1}{k} \text{Dirichlet}(y)$  导致  $\int_0^1 f(x_k, y) dy \not\equiv 0$ , 所以  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  不能使用累次积分  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$  计算. 但是若固定  $y$ ,  $f(x, y)$  要么是 Riemann 函数要么恒为 0, 积分值都是 0, 因此  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  可以使用累次积分  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$  计算.

## 2 第2次习题课: 三重积分

### 2.1 问题

1. 区域  $\Omega$  由  $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$  围成, 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} x dv$ .
2. 区域  $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}$ , 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} z dv$ .
3. 区域  $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ , 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv$ .
4. 区域  $D$  由  $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (y>0), (x-2a)^2 + y^2 = 4a^2 (y>0), y=x$  围成, 计算积分  $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$ .
5. 计算椭圆抛物面  $z = x^2 + 2y^2$  及抛物柱面  $z = 2 - x^2$  所围成立体的体积.
6. 区域  $D = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\}$ , 计算积分  $I = \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} d\sigma_{xy}$ .
7. 区域  $\Omega$  由  $z = \frac{x^2+y^2}{m}, z = \frac{x^2+y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y = \beta x (0 < m < n, 9 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$  围成且在第一卦限的部分, 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} xyz dv$ .
8. 设  $h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, f(x) \in C[-h, h]$ , 证明  $\iiint_{\Omega} f(\alpha x + \beta y + \gamma z) dv_{xyz} = \pi \int_{-1}^1 (1-\zeta^2) f(h\zeta) d\zeta$ , 其中区域  $\Omega$  是单位球内部.
9. 区域  $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$ , 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$ .
10. 区域  $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ , 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$ .
11. 区域  $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 计算积分  $I = \iint_D \max\{xy, x^3\} d\sigma$ .

### 2.2 解答

1. 记区域  $D_{xy} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 1\}$ , 累次积分时依次对  $z, y, x$  积分, 有  $I = \iint_{D_{xy}} [\int_0^{1-x-2y} x dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) d\sigma_{xy} = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} [x(1-x)-2xy] dy = \int_0^1 [\frac{1}{2}x(1-x)^2 - \frac{1}{4}x(1-x)^2] dx = \frac{1}{48}$ .
2. 记区域  $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{2}\}$ , 累次积分时先对  $z$  积分再极坐标换元, 有  $I = \iint_{D_{xy}} [\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} z dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [R^2 - 2(x^2+y^2)] d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2} (R^2 - 2r^2) r dr = \frac{\pi R^4}{8}$ .
3. 由对称性,  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv + 2 \iiint_{\Omega} (xy + yz + zx) dv = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$ . 先计算  $I_1 = \iiint_{\Omega} z^2 dv$ . 记区域  $D_z = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} \leq 1\}$ , 累次积分时先对  $\sigma_{xy}$  积分再对  $z$  积分, 有  $I_1 = \int_{-c}^c dz \iint_{D_z} z^2 d\sigma_{xy} = \int_{-c}^c z^2 \pi ab (1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{4\pi abc^3}{15}$ . 因此  $I = \frac{4\pi abc}{15} (a^2 + b^2 + c^2)$ .
4. 令  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ , 有  $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 - 2ar \cos \theta = 0 \Rightarrow r = 2a \cos \theta \\ (x-2a)^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow r = 4a \cos \theta \\ y = x \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ , 从而  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a \cos \theta}^{4a \cos \theta} r^2 dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3} a^3 \cos^3 \theta d\theta = \frac{112-70\sqrt{2}}{9} a^3$ .
5. 联立方程  $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ , 因此区域  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 体积  $V = \iint_D [(2-x^2) - (x^2+2y^2)] d\sigma = 2 \iint_D (1-x^2-y^2) d\sigma$ . 做极坐标换元知  $V = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) dr = \pi$ .
6. 令  $\begin{cases} \xi = x+y \\ \eta = x-y \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ y = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$ , Jacobi 行列式为  $J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$ , 区域  $D_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\} \Rightarrow D_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$ , 所以换元后  $I = \iint_{D_{\xi\eta}} \xi^2 e^{\xi\eta} |J| d\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^1 \xi^2 e^{\xi\eta} d\eta = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi (e^{\xi} - 1) d\xi = \frac{1}{4}$ .
7. 令  $\begin{cases} u = \frac{z}{x^2+y^2} \\ v = xy \\ w = \frac{y}{x} \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{w}} \\ y = \sqrt{vw} \\ z = uv(w + \frac{1}{w}) \end{cases}$ , Jacobi 行列式  $J = |\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}| = \frac{v}{2w} (w + \frac{1}{w})$ , 区域  $\Omega \rightarrow \Omega_{uvw} = \{(u, v, w) : \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, a^2 \leq v \leq b^2, \alpha \leq w \leq \beta\}$ , 所以换元后  $I = \iiint_{\Omega_{uvw}} \sqrt{\frac{v}{w}} \sqrt{vw} uv (w + \frac{1}{w}) \frac{v}{2w} (w + \frac{1}{w}) du dv dw = \iiint_{\Omega_{uvw}} v^3 u (w + \frac{1}{w})^2 \frac{1}{w} du dv dw = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} u du \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} (w + \frac{2}{w} + \frac{1}{w^3}) dw = \frac{1}{32} (\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) (b^8 - a^8) [(\beta^2 - \alpha^2)(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}) + 4 \log \frac{\beta}{\alpha}]$ .

$$8. \text{ 作正交变换 } \begin{cases} \xi = a_1x + b_1y + c_1z \\ \eta = a_2x + b_2y + c_2z \\ \zeta = \frac{1}{h}(\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{cases} \quad (\text{旋转}), \text{ 则 } \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} \right| = 1, \text{ 所以换元后 } \text{LHS} = \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leq 1} f(h\zeta) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$\int_{-1}^1 d\zeta \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq 1-\zeta^2} f(h\zeta) d\xi d\eta = \pi \int_{-1}^1 (1-\zeta^2) f(h\zeta) d\zeta = \text{RHS}.$$

$$9. \text{ 作球坐标变换, 区域 } \Omega: 0 \leq r \leq 2 \cos \phi, \text{ 积分 } I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^{2\cos\phi} r^2 r^2 \sin \phi dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^{2\cos\phi} r^4 dr =$$

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \frac{32}{5} \cos^5 \phi d\phi = -\frac{64}{5} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \phi d\cos \phi = -\frac{64}{5} \frac{\cos^6 \phi}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15} \pi.$$

$$10. \text{ 作广义球坐标系变换 } \begin{cases} x = ar \sin \phi \cos \theta \\ y = br \sin \phi \sin \theta \\ z = cr \cos \phi \end{cases}, \text{ Jacobi 行列式为 } J = abcr^2 \sin \phi, \text{ 所以换元后}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^1 dr r^2 abc \sin \phi (a^2 r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + c^2 r^2 \cos^2 \phi) \\ &= \frac{abc}{5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi -[(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)(1 - \cos^2 \phi) + c^2 \cos^2 \phi] d\cos \phi \\ &= \frac{abc}{5} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{4}{3} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) + \frac{2}{3} c^2 \right] d\theta = \frac{4abc\pi}{15} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$11. \text{ 引入辅助积分 } J = \iint_D \min\{xy, x^3\} d\sigma. \quad I + J = \iint_D (xy + x^3) d\sigma = \int_0^1 dy \int_{-1}^1 (xy + x^3) dx = 0, \quad I - J = \iint_D |xy - x^3| d\sigma = \iint_D |x||y - x^2| d\sigma = 2 \int_0^1 dy \int_0^1 x|y - x^2| dx \stackrel{u=x^2}{=} \int_0^1 dy \int_0^2 |y - u| du \stackrel{\text{几何意义}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 [y^2 + (1-y)^2] dy = \frac{1}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{6}.$$

## 2.3 补充 (不要求掌握!)

$n$  维空间中的球坐标系: 一个向径  $r$ ,  $n-1$  个角度  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ , 其中, 一个角度转一圈 ( $\theta_{n-1}$ ),  $n-2$  个角度转半圈

$$(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}). \text{ 与直角坐标系的关系为 } \begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-2} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \end{cases}, \text{ 利用归纳法可以证明 Jacobi 行列式为}$$

$$|J| = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}.$$

$n$  维空间中半径为  $R$  的球体  $\Omega: x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$  的体积  $V_n$ : 作求坐标变换知

$$\begin{aligned} V_n &= \int \dots \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_n = \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \int_0^\pi d\theta_{n-2} \dots \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^R r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} dr \\ &= \frac{R^n}{n} 2\pi \int_0^\pi \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^\pi \sin^2 \theta_{n-3} d\theta_{n-3} \dots \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \\ &= \frac{R^n}{n} 2\pi \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \dots \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2}\right) \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \end{aligned}$$

关于 Beta 函数, 参见后述的含参积分.

## 3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式

### 3.1 问题

1. 曲线  $\Gamma: x^2 + y^2 = x$ , 计算积分  $I = \int_{\Gamma} \sqrt{1-x^2-y^2} ds$ .

2. 曲线  $C$  是  $y=0, y=x(x \geq 0), x^2 + y^2 = a^2$  所围成图形的边界, 计算积分  $I = \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$ .

- 曲线  $L: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = at \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ , 计算积分  $I = \int_L \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}$ .
- 曲线  $C: \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 计算积分  $I = \int_C (x^2 + y^2)^n ds$ .
- 曲线  $C: x^2 + y^2 = a^2$ , 计算积分  $I = \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ , 方向是逆时针.
- 曲线  $\widehat{AB}$  为单位圆周  $x^2 + y^2 = 1$  的上半部分, 计算积分  $I = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy$ , 方向为从  $A(1, 0)$  到  $B(-1, 0)$ .
- 曲线  $\Gamma$  是从  $(0, 0)$  沿函数  $y = x^\alpha$  到  $(1, 1)$  的部分, 计算积分  $I = \int_\Gamma (x^2 - y^2)dx - 2xydy$ .
- 曲线  $\Gamma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线, 计算积分  $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz$ , 方向是从  $z$  轴正向看回来的逆时针方向.
- 区域  $D$  是由点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$  围成的三角形, 计算积分  $I = \iint_D x^2 dx dy$ .
- 曲线  $C: 741x^8 + 886e^x y^2 + \sin(x^9 \cos(y)) = 5$ , 计算积分  $I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ .
- 证明或否定: 曲线积分  $I = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$  在  $\mathbb{R}^2$  内积分与路径无关.
- (格林第二公式) 设闭区域  $D$  是由有限条逐段光滑曲线围成的,  $u = u(x, y), v = v(x, y) \in C^2(D)$ , 证明  $\iint_D (v\Delta u - u\Delta v) d\sigma = \oint_{\partial D} (v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}) ds$ , 其中  $\vec{n}$  为  $\partial D$  的单位外法向量.
- 求函数  $u(x, y)$  使得  $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy$ .

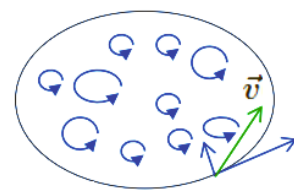
## 3.2 解答

- 曲线参数方程  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ , 则  $ds = \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} dt = \frac{1}{2} dt$ , 原积分  $I = \int_\Gamma \sqrt{1-x} ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}| dt = \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 2$ .
- 记  $C_1, C_2, C_3$  分别为曲线  $C$  的下、右上、左上部分, 则原积分  $I = \int_{C_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{C_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{C_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\theta + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx = (e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a + e^{\sqrt{2}x} \big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4} a e^a + 2(e^a - 1)$ .
- 直接使用公式,  $I = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2} dt = \int_0^{2\pi} t^2 \sqrt{2} a dt = \frac{8\sqrt{2}}{3} a \pi^3$ .
- 直接使用公式,  $I = \int_0^{2\pi} a^{2n} a d\theta = 2\pi a^{2n+1}$ .
- 曲线参数方程  $x = a \cos t, y = a \sin t$ , 因此  $I = \oint \frac{a^2 (\cos t + \sin t)(-\sin t) - a^2 (\cos t - \sin t) \cos t}{a^2} dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi$ .
- 由  $x^2 + y^2 = 1$  知  $xdx + ydy = 0$  得  $dy = -\frac{x}{y} dx$ , 从而有  $\int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy = \int_1^{-1} -ydx + x(-\frac{x}{y} dx) = \int_{-1}^1 (\frac{x^2+y^2}{y}) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$ .
- 直接计算得  $I = \int_0^1 (x^2 - x^{2\alpha}) dx - 2xx^\alpha (\alpha x^{\alpha-1}) dx = \int_0^1 (x^2 - (2\alpha+1)x^{2\alpha}) dx = -\frac{2}{3}$ .
- 球面的单位法向量为  $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ , 平面的单位法向量为  $\vec{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ . 所以曲线  $\Gamma$  的单位切向量为  $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ . 从而积分为  $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot \vec{\tau} ds = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) ds = \int_\Gamma 0 ds = 0$ .
- $AB$  的方程为  $y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ ,  $BC$  的方程为  $y = y_2 + \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$ ,  $CA$  的方程为  $y = y_3 + \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_3)$ . 由格林公式, 知原积分  $I = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{3} x^3) d\sigma = \oint_{\partial D} \frac{1}{3} x^3 dy = \int_{AB} \frac{1}{3} x^3 dy + \int_{BC} \frac{1}{3} x^3 dy + \int_{CA} \frac{1}{3} x^3 dy = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} dx + \int_{x_3}^{x_1} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3} dx = \frac{1}{12} [(y_2-y_1)(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1) + (y_3-y_2)(x_3^2+x_2^2)(x_3+x_2) + (y_1-y_3)(x_1^2+x_3^2)(x_1+x_3)]$ .
- 容易验证圆点  $O$  是闭曲线  $C$  所围成区域的内点. 记  $C_\epsilon: x^2 + y^2 = \epsilon^2$ , 取  $\epsilon$  足够小使  $C_\epsilon$  围成的区域完全在曲线  $C$  内侧. 在  $C$  与  $C_\epsilon$  围成的区域  $D$  上使用格林公式知  $\oint_{\partial D} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x} (\frac{x}{x^2+y^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{-y}{x^2+y^2})) d\sigma = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{C_\epsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \stackrel{x=\epsilon \cos \theta, y=\epsilon \sin \theta}{=} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ .
- 上述积分为两个曲线积分之差, 即  $I = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2} = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \int_\Gamma \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$ . 令  $P_i = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q_i = \frac{(x-i)dy}{(x-i)^2+y^2}, i=0, 1$ , 容易验证  $\frac{\partial P_i}{\partial y} = \frac{\partial Q_i}{\partial x}$ . 但由于  $P_0, Q_0$  包含瑕点  $(0, 0)$ ,  $P_1, Q_1$  包含瑕点  $(1, 0)$ , 且在包含瑕点的区域内积分值可能为  $2\pi$  (第 10 题结论), 不包含瑕点的区域内积分值必为 0, 因此原积分与路径有关, 结论不对.
- 由格林公式,  $\iint_D \nabla \cdot (P, Q) d\sigma = \iint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) d\sigma = \oint_{\partial D} P dy - Q dx = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot (dy, -dx) = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot \vec{n} ds$ . 因此  $\oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \oint_{\partial D} v \nabla u \cdot \vec{n} ds = \iint_D \nabla \cdot (v \nabla u) d\sigma = \iint_D (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) d\sigma$ , 类似有  $\oint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) d\sigma$ . 两式相减即得结果.
- 令  $P(x, y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x, y) = \frac{e^y}{1+x^2}$ , 则有  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xe^y}{(x^2+1)^2}$ .  $\int P(x, y) dx = \frac{e^y-1}{x^2+1} + C'$ ,  $Q(x, y)$  删除掉含  $x$  的项后为 0, 因此  $u(x, y) = \frac{e^y-1}{1+x^2} + C$ .

### 3.3 补充 (不要求掌握!)

格林公式的物理意义: 平面定常流体 (各点流速只与位置有关, 与时间无关) 于  $(x, y)$  点的流速为  $\vec{v}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ . 对于固定的  $x$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  决定了  $x$  方向向  $y$  方向的旋转, 所以若以逆时针方向为正向, 则  $x$  方向向  $y$  方向的旋转度量为  $-\frac{\partial P}{\partial y}$ . 对于固定的  $y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  决定了  $y$  方向向  $x$  方向的旋转, 其度量为  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ . 从而,  $(x, y)$  点的流体的旋转度的度量为  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ , 命名为 (平面流场的旋度), 记为  $\text{rot } \vec{v}$ .

物理现象: 边界线  $\partial D$  上的环流量等于区域  $D$  上各点旋转量的迭加.



## 4 第 4 次习题课: 曲面积分

### 4.1 问题

1.

### 4.2 解答

1.





#### 4.3 补充 (不要求掌握!)

### 5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式

#### 5.1 问题

#### 5.2 解答

#### 5.3 补充 (不要求掌握!)

### 6 第 6 次习题课: 初等积分法, 解的存在唯一性

#### 6.1 问题

#### 6.2 解答

#### 6.3 补充 (不要求掌握!)

### 7 第 7 次习题课: 二阶线性微分方程

#### 7.1 问题

#### 7.2 解答

#### 7.3 补充 (不要求掌握!)

### 8 第 8 次习题课: 常数变异法

#### 8.1 问题

#### 8.2 解答

#### 8.3 补充 (不要求掌握!)

### 9 第 9 次习题课: 数项级数

#### 9.1 问题

#### 9.2 解答

#### 9.3 补充 (不要求掌握!)

### 10 第 10 次习题课: 数项级数, 函数项级数

#### 10.1 问题

#### 10.2 解答

#### 10.3 补充 (不要求掌握!)

### 11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数

#### 11.1 问题

#### 11.2 解答

#### 11.3 补充 (不要求掌握!)