

高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 12 月 19 日

目录

1	第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法	3
1.1	问题	3
1.2	解答	3
2	第 2 次习题课: 矩阵的基本运算, 集合论	4
2.1	问题	4
2.2	解答	5
3	第 3 次习题课: 行列式 (1)	6
3.1	问题	6
3.2	解答	7
4	第 4 次习题课: 行列式 (2)	9
4.1	问题	9
4.2	解答	10
5	第 5 次习题课: 线性空间, 行列式 (3)	12
5.1	问题	12
5.2	解答	13
6	第 6 次习题课: 秩 (1)	14
6.1	问题	14
6.2	解答	14
7	第 7 次习题课: 秩 (2), 线性方程组的解空间	15
7.1	问题	15
7.2	解答	16
8	期中考试	18
8.1	问题	18
8.2	解答	18
9	第 8 次习题课: 可逆矩阵	19
9.1	问题	19
9.2	解答	20

10 第 9 次习题课: 矩阵的分块, 正交矩阵	21
10.1 问题	21
10.2 解答	21
11 第 10 次习题课: 线性映射	23
11.1 问题	23
11.2 解答	23
12 第 11 次习题课: 特征值, 特征向量	24
12.1 问题	24
12.2 解答	25
13 第 12 次习题课: 矩阵的相似与对角化	26
13.1 问题	26
13.2 解答	27
14 第 13 次习题课: 二次型, 矩阵的合同	29
14.1 问题	29
14.2 解答	30
15 第 14 次习题课: 正定矩阵	31
15.1 问题	31
15.2 解答	31
16 致谢	32

1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$
2. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-2, 1, 5), \alpha_3 = (a, 2, 10), \beta = (1, b, -1)$. 当 a, b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?
3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 表出任何向量-如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).
4. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D . 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

5. (1) 求复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\text{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集合;
- (3) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1, y_2, y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解?
6. 已知向量 α, β 不共线, 并看成是由原点出发的有向线段 \vec{OA} 与 \vec{OB} . 设 $u, v \in \mathbb{R}$ 且 $u+v=1$, 问向量 $\vec{OC} = u\alpha + v\beta$ 的终点 C 在什么位置, \vec{AC} 与 \vec{CB} 的比值是多少, 何时比值为正数.
7. 求单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线.
8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体 $ABCD$ 每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.
9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异?
$$\begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .067 \end{cases}, \begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .066 \end{cases}$$
10. 考虑带截距的线性回归 $y \sim x_1 + \dots + x_p$, 参考上一题, 你有什么想法和改进?

1.2 解答

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=7*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=2*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$
2.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}, \textcircled{3}-4*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\frac{13}{3}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
. 因此, 当 $a \neq -4$ 或 $a = -4, b = -\frac{13}{2}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

3. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0)$.

$$\textcircled{2} - = 8 * \textcircled{1}$$

4. 注意 A, B, C, D 的比例和为 1, 因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} - = 5 * \textcircled{1} \\ \textcircled{4} - = 15 * \textcircled{1} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} + = 10 * \textcircled{2} \\ \textcircled{4} - = 5 * \textcircled{2} \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{4} + = \frac{2}{3} * \textcircled{3} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ 因此解是 } (\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25}).$$

5. (1) $\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} - = 2 * \textcircled{1} \\ \textcircled{3} - = i * \textcircled{1} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} - = \frac{i}{2+2i} * \textcircled{2} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} * = \frac{1}{2+2i} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(2) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. (3) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1, \frac{y_2-2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$ 时才有解.

6. $\overrightarrow{AC} = (u-1)\alpha + v\beta, \overrightarrow{CB} = -u\alpha + (1-v)\beta, \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{1-u}{1-v} = \frac{v}{1-v}$, 因此 A, C, B 三点共线, 且当 $0 < u, v < 1$ 时比值为正数.

7. $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x-z = k(1-y) \\ x+z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x+ky-z = k \\ kx-y+kz = 1 \end{cases}$. 特别

地, 当 $y = \pm 1$ 时, $z = \pm x$ 也是位于该曲面上的直线.

8. $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$, 设 BC, AC, AB 中点分别为 D, E, F , 设 $G = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$. 只需验证 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$ 分别与 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ 共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.

9. 用 Gauss 消元法可求得解为 $(1, -1)$ 和 $(-666, 834)$. 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.

10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如 L_2 正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着强相关变量, 干扰回归结果.

2 第 2 次习题课: 矩阵的基本运算, 集合论

2.1 问题

1. (1) 用向量表示平面 $x+2y+3z=1$; (2) 用向量表示直线 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$; (3) 求平面 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k, l \in \mathbb{R}$ 的平面方程.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k, l \in \mathbb{R} \text{ 的平面方程.}$$

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$. (1) 解齐次方程组 $AX=0$; (2) 已知 $X = (1, 1, 2, 3, 0)^T$ 是方程组 $AX = \beta$ 的一个

解, 写出 $AX = \beta$ 的所有解.

3. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域.

(1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$ 的方式唯一.

4. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

5. 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 能线性表出 β_1, \dots, β_s , 且 β_1, \dots, β_s 又能线性表出 $\gamma_1, \dots, \gamma_t$, 证明 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 能线性表出 $\gamma_1, \dots, \gamma_t$.
6. 考虑 n 个城市之间的航班问题: 记 $H = (a_{ij})$ 为邻接矩阵, 这里 a_{ij} 表示从城市 i 到 j 的航班数. (1) 解释 H^k 的 (i, j) 元的含义; (2) 设 $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?
7. 设 A 是有向图 G 的邻接矩阵, 证明 G 中的循环三角形的个数等于 $\text{tr}(A^3)/3$.
8. 由集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集, 记为 $P(A)$. 设集合 A 非空, 证明 $\text{card}(P(A)) > \text{card}(A)$.
9. X 为非空集合, 映射 $f: P(X) \rightarrow P(X)$ 满足 $f(A) \subset f(B), \forall A \subset B$. 那么存在 $T \subset X$ 使得 $f(T) = T$.
10. (1) 找到 $[0, 1]$ 到 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的双射; (2) 找到 $(0, 1)$ 到 \mathbb{R} 的双射.
11. 罗素悖论: 某班的同学在习题课上作游戏. 每个学生可以给班里任意多同学发一次短信 (可包括自己). 记 X 是全体没有给自己发短信的同学构成的集合. 若某同学猜中 X 并给且只给 X 中的每个同学发了短信, 则该同学获胜. 问: 此游戏有无获胜者?
12. 学习使用 numpy 包, 并实现矩阵的基本运算.

2.2 解答

1. (1) 先求得一个点坐标 $(1, 0, 0)$, 再去求 $x + 2y + 3z = 0$ 的一组基础解系: $(2, -1, 0)$ 和 $(3, 0, -1)$, 因此向量表示为 $(1, 0, 0) + k(2, -1, 0) + l(3, 0, -1), k, l \in \mathbb{R}$.
- (2) 先求得一个点坐标 $(0, -1, 1)$, 再去求方向向量 $(1, 2, 3) \times (3, 2, 1) = (-4, 8, 4)$, 因此向量表示为 $(0, -1, 1) + t(-1, 2, 1), t \in \mathbb{R}$.
- (3) 先求得一个点坐标 $(1, 1, 2)$, 再去求法向量 $(1, 2, 0) \times (2, 0, 1) = (2, -1, -4)$, 因此平面可表示为 $2x - y - 4z = -7$.

$$2. (1) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}-\frac{3}{2} * \text{①} \quad \text{③}-\frac{1}{2} * \text{①} \quad \text{④}-\text{①}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}-\frac{2}{3} * \text{③} \quad \text{②}+\frac{5}{3} * \text{③}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_5 \\ x_3 = -2x_5 \\ x_1 + 2x_2 = -3x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$X = (-3n - 2m, m, -2n, -n, n)^T, m, n \in \mathbb{R}$ 是自由变元.

(2) 解集是基础解系加上代表元, 即 $(1 - 3n - 2m, 1 + m, 2 - 2n, 3 - n, n)^T$.

3. (1) 只需证明 $\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \in \mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}, \text{gcd}(a, b) = 1$, 那么 $a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3|a \Rightarrow 9|a^2 \Rightarrow 3|b^2 \Rightarrow 3|b$, 矛盾.

4. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5}) = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2 + \sqrt{-5}$ 是不可约数: $2 + \sqrt{-5} = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) \Rightarrow 9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5}) = (a + b\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$ 无解; 但是 $2 + \sqrt{-5} \nmid 3 \times 3$ 而 $2 + \sqrt{-5} \nmid 3$, 因此不是素数.

5. $(\beta_1, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)A, (\gamma_1, \dots, \gamma_t) = (\beta_1, \dots, \beta_s)B \Rightarrow (\gamma_1, \dots, \gamma_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(AB)$, 因此可以线性表出.

6. (1) 从 $a_{ij}^2 = \sum_s a_{is}a_{sj}$ 可以看出 H^k 的 (i, j) 元表示从 i 到 j 乘坐恰 k 次航班有多少种乘坐方式. (2) $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3$, 分别有 1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 2 种航班选择; $2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$ 都要倒 3 次, 是最多的.

7. 由上题知 A^3 的 (i, i) 元表示从 i 到 i 有几条恰走 3 次的路径, 三角形会在结点上算 3 次, 因此要除以 3.

8. 本题的关键是处理集合 A 包含无穷元素的情形. 假设存在一一映射 $f: A \mapsto P(A)$, 则考虑集合 $A = \{x : x \notin f(x)\}$. 此时若 $f^{-1}(A) \notin A$, 则根据定义 $f^{-1}(A) \in A$; 反之亦矛盾.

9. 我们的思路应当去找满足条件 $A \subset f(A)$ 的最大集合, 即令 $T = \{\cup_{\alpha} A_{\alpha} : A_{\alpha} \subset f(A_{\alpha})\}$. 根据定义有 $T = \cup_{\alpha} A_{\alpha} \subset \cup_{\alpha} f(A_{\alpha}) = f(\cup_{\alpha} A_{\alpha}) = f(T)$, 再根据题给条件有 $f(T) \subset f(f(T)) \Rightarrow f(T) \subset T$.

10. (1) 全部写成无限小数, 然后作映射 $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots \rightarrow (0.a_1a_3a_5\cdots, 0.a_2a_4a_6\cdots)$; (2) $y = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$.
11. 因此在 ZF 公理体系中, 我们不考虑包含自身作为元素的集合.
12. 从 `pip install numpy` 开始. 学习使用 `np.zeros`, `np.random`, `np.mean`, `np.sum`, `np.dot`, `np.linalg.det`, `np.eye` 等函数, 并做切片和取值运算.

3 第 3 次习题课: 行列式 (1)

3.1 问题

- 用行列式求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$.
- 求以下向量在三维几何空间张成的平行六面体体积: $\alpha_1 = (3, 2, 1), \alpha_2 = (0, 3, 0), \alpha_3 = (7, 4, 2)$.
- 判断以下向量组的定向: $(1, 1), (3, -2); (2, 1, 0), (1, 0, 3), (1, 1, 1); (x, y, z), (z, x, y), (y, z, x); (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)$; 其中 $x + y + z > 0$ 且互不相等.

4. 计算行列式: (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

5. 对 n 阶矩阵 A 作如下操作: 第 1 行加上第 2 行的 k 倍, 第 2 行加上第 3 行的 k 倍, 以此类推; 最后, 第 n 行加上此时第 1 行的 k 倍. 问做这些变换相当于在 A 左边乘一个什么样的矩阵? A 的行列式值会如何变化? 如果第 n 行加上的是原来第 1 行的 k 倍呢?

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$.

8. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

9. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & & \\ \gamma & \alpha & \beta & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其中 $\alpha^2 - 4\beta\gamma > 0$.

10. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

11. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$

3.2 解答

1. $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = 2, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = -1.$

2. $V = \|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow \text{左手}; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow \text{左手}; \begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0 \Rightarrow \text{右手}; \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 \leq 0 \Rightarrow \text{左手}.$

4. (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2 + 16 + 16 - 4(x+1) - 16(x-2) - 4(x+1) = x^3 - 27x + 54;$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

5. 相当于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k^2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 其行列式无变化, 因为是初等变换. 后面一问相当于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$

其行列式有变化, 因为最后一步不是初等变换, 相较于原值乘上了 $1 + (-1)^{n-1}k^n$.

6. 用第一列减去第 i 列的 b_i 倍, $i = 2, 3, \dots, n$, 得到 $\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i.$

7. 法 1(加边法): $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$, 然后用第 $i+1$ 行减去第 1

行的 x_i 倍, $i = 1, 2, 3, 4$, 得到 $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$

$$\text{法 2(拆项法): } \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五}$$

$$\text{项: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4x_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3x_4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_4x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 原行列式是 } 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

$$8. \text{ 采用第 7 题的法 2(拆项法), 最后剩下 } n+1 \text{ 项: } \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \dots, \text{ 它们分别是 } (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} x_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} a_1 x_2 \cdots a_n, \dots, \text{ 整理得到原}$$

$$\text{行列式为 } (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \right) - 1 \right].$$

$$9. \text{ 若 } \beta\gamma = 0, \text{ 则行列式为 } \alpha^n. \text{ 对于一般情形, 按第一行展开得到 } D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}, \text{ 且有初值条件 } D_1 = \alpha, D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma, \text{ 然后用数列的特征值和特征公式设 } D_n = A \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n + B \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n, \text{ 代入 } n=1, 2 \text{ 解出 } A \text{ 和 } B, \text{ 得到 } D_n = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}.$$

$$10. n=1 \text{ 时, } D_1 = \cos \alpha; n=2 \text{ 时, } D_2 = \cos 2\alpha; \text{ 因此可以猜测 } D_n = \cos n\alpha. \text{ 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 } D_{n+1} = 2 \cos \alpha D_n - D_{n-1} = \cos(n+1)\alpha, \text{ 知该假设成立.}$$

$$11. \text{ 法 1: 将第 1 行至第 } n-1 \text{ 行减去第 } n \text{ 行, 并提出各行和各列公因子, 得}$$

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{再将第 1 列至第 } n-1 \text{ 列减去第 } n \text{ 列, 并提出各行和各列的公因子, 得}$$

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdot & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第 n 行展开得到递推式 $D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n(a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n)} D_{n-1}$, 并直接计算出 D_2 , 得

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

法 2: 若 $a_i = a_j$ 或 $b_i = b_j (i \neq j)$, 即两行 (或两列) 相同, 则 $D_n = 0$. 因此 D_n 含有因子 $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$. 将 D_n 的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得 $D_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)} D'_n$. 显然 D'_n 也含有上述因子. 另一方面, 由于 D'_n 的 (i, j) 元为 $\prod_{k \neq j} (a_i + b_k)$, 所以每一个 a_i 在 D'_n 的展开式中的次数均为 $n-1$, 因此设 $D_n = \lambda \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$. 为确定常数 λ 的值, 我们不妨令 $a_i = -b_i, i = 1, 2, \dots, n$. 此时 D'_n 为对角行列式, 且有 $D_n = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \Rightarrow \lambda = 1$. 因此可得一样的结果.

4 第 4 次习题课: 行列式 (2)

4.1 问题

1. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. 你能求出行列式 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$ 的通式吗?

2. (1) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$; (2) 计算行列式 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

3. A 是 n 阶矩阵, $\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$ 是 n 维列向量, 且 $|A| = a, |A - \alpha\alpha^T| = b$, 求 $|A + 2\alpha\alpha^T|$.

4. 考虑 3 线行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & & & \\ b_2 & a_2 & c_3 & & \\ & b_3 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_n \\ & & & b_n & a_n \end{vmatrix}$, 记其顺序主子式为 D_1, D_2, \dots, D_n , 并假设它们都不为 0. 证明递推

关系 $D_s = a_s D_{s-1} - b_s c_s D_{s-2}, s \geq 3$, 并将该矩阵 M_n 写成下三角矩阵和对角元都为 1 的上三角矩阵的乘积.

5. 试确定所有 3 阶 (0, 1) 行列式 (即所有元素只能是 0 或 1) 的最大值, 并给出证明和取到最大值的一个构造.

6. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}_+$, 证明 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 能被 $2!3!\cdots(n-1)!$ 整除.

7. 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 非平凡. 证明: 若矩阵 A 的每一个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = a_{ij}$, 则 $|A|^{n-2} = 1$.

8. 若方阵每一行每一列都恰有一个元素为 1, 其余的元素都是 0, 则称此方阵为置换矩阵. (1) 写出所有的 3 阶置换矩阵. 这些矩阵最少可由其中的几个通过反复作乘法得到? (2) 证明任意 n 阶置换矩阵都可由以下 $n-1$ 个矩阵反复作乘法得

到: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

进一步, 任意 n 阶置换矩阵都可由以下两个矩阵反复作乘法得到: $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$

9. 设 $n \geq 3, f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是次数 $\leq n-2$ 的多项式, 证明: 对 $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, 行列式 $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} \equiv 0$, 并举例说明条件“次数 $\leq n-2$ ”不可去.

10. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos 2\phi_1 & \cdots & \cos(n-1)\phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos 2\phi_2 & \cdots & \cos(n-1)\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos 2\phi_n & \cdots & \cos(n-1)\phi_n \end{vmatrix}.$

4.2 解答

1. 把后 $n-1$ 列加到第一列, 提出公因子 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 用第 $(1,1)$ 元消去同列其他元素, 再按第一列展开得到 $n-1$ 阶行列式:

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

用所得 $n-1$ 阶行列式的第 $(1,1)$ 元消去同行的其他元素, 再按第一行展开得到 $n-2$ 阶上三角行列式:

$$D_n = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -n & \cdots & -n & -n \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & -n & -n \\ & & & -n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.$$

2. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c-a & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a & a-b \end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知 $D_n = b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}$. 初始条件是 $D_1 = a$, 因此知 $D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

(2) 按第 n 列拆项, 得 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & a_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b+(a_n-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + (a_n-b)E_{n-1} = b(a_1-c)(a_2-c) \cdots (a_{n-1}-c) + (a_n-b)E_{n-1}$; 按第 n 列拆项 (或由对称性), 得 $E_n = c(a_1-b)(a_2-b) \cdots (a_{n-1}-b) + (a_n-c)E_{n-1}$. 两式联立得 $E_n = \frac{bf(c) - cf(b)}{b-c}$, 其中 $f(x) = (a_1-x)(a_2-x) \cdots (a_n-x)$.

3. 考虑函数 $f(x) = |A + x\alpha\alpha^T| = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}$, 因此是线性函数. 由 $f(0) = a, f(-1) = b$ 知 $f(x) = a + (a-b)x$, 因此 $f(2) = 3a - 2b$.

4. 按最后一行展开立刻得到递推关系, $M_n = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & & & \\ b_2 & \frac{D_2}{D_1} & 0 & & \\ & b_3 & \frac{D_3}{D_2} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & b_{n-1} & \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} & 0 \\ & & & & b_n & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2 \frac{1}{D_1} & & & \\ & 1 & c_3 \frac{D_1}{D_2} & & \\ & & 1 & c_4 \frac{D_2}{D_3} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & c_n \frac{D_{n-2}}{D_{n-1}} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$.

5. 按第 1 行展开, 得到 $D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \leq 3$. 下面证明 $D \neq 3$. 若不然, 则必有 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$, 且 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 1$. 前两个行列式为 1 可以得到 $a_{22} = a_{33} = 1, a_{23} = a_{31} = 1$,

而此时 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = a_{21}a_{32} - 1 \leq 0$, 矛盾. 因此 $D \leq 2$, 一个构造是 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

6. 注意到 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & \cdots & a_1(a_1-1) \cdots (a_1-n+2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & \cdots & a_2(a_2-1) \cdots (a_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n(a_n-1) & \cdots & a_n(a_n-1) \cdots (a_n-n+2) \end{vmatrix}$ (利用初等列变换, 用后面的列加减前面的列), 再将第 k 列提取公因子 $(k-1)!, k=3, 4, \dots, n$ 即可.

7. 首先容易看出 $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 > 0$. 其次 $|A|^2 = |AA^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n \Rightarrow |A|^{n-2} = 1.$$

8. (1) 所有 3 阶置换矩阵: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 可由其中第 2 个和第 5 个做反复乘积生成 (答案不唯一). (2) n 元置换可以分解成至多 $n-1$ 个对换的乘积, 而每一个对换都可以分解成

相邻对换的乘积, 因此可被这 $n-1$ 个相邻对换生成; 进一步, 所有相邻对换都可被表示为 $S^{n-k}TS^k, k=0, 1, \dots, n-1$, 因此可被 S, T 生成.

9. 不妨设 a_1, a_2, \dots, a_n 互不相同. 考虑 $F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$, 这是一个至多 $n-2$ 次多项式, 有至少

a_2, a_3, \dots, a_n 这 $n-1$ 个不同的根, 因此必恒等于 0. 若删去条件“次数 $\leq n-2$ ”, 则可令 $f_k(x) = x^{k-1}$, 此时原行列式构成 Vandermonde 行列式, 只要 a_1, a_2, \dots, a_n 两两不同就不为 0.

10. 由高中三角函数知识知 $\cos k\theta = 2^{k-1} \cos^k \theta + P_{k-2}(\cos \theta)$, 其中 P_{k-2} 是 $k-2$ 次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos^2 \phi_1 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos^2 \phi_2 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos^2 \phi_n & \cdots & \cos^{n-1} \phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\cos \phi_i - \cos \phi_j).$$

5 第 5 次习题课: 线性空间, 行列式 (3)

5.1 问题

1. 在正实数集 \mathbb{R}^+ 上定义运算加法 $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}^+$ 和数乘 $ka = a^k, \forall k \in \mathbb{Q}$, 证明 \mathbb{R}^+ 在这两种运算下构成 \mathbb{Q} -线性空间; 并问 $110, \sqrt{105}$ 是否属于 $\text{span}\{1, 2, \dots, 10\}$.

2. 设 $W = \{f(x) | f(1) = 0, f(x) \in \mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 \mathbb{R} 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.

3. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

4. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$; (2) $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4$; (3) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$; (4) $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 8\alpha_4, \alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4, 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3$.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 为 $s+1$ 个 n 维向量, 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$. 证明向量组 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_s$ 线性无关的充要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

6. 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 且对于任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数. 证明或否定: (1) $f(x)$ 系数都是有理数; (2) $f(x)$ 系数都是整数.

7. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

8. 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ 和 $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 741 & 886 & 114 & 514 \\ -741 & 0 & 1919 & 810 & 2002 \\ -886 & -1919 & 0 & 520 & 1314 \\ -114 & -810 & -520 & 0 & 220 \\ -514 & -2002 & -1314 & -220 & 0 \end{vmatrix}$.

9. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, I 表示 n 阶单位矩阵. 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{vmatrix}$ 和 $D_2 = \begin{vmatrix} I & -B \\ 0 & AB \end{vmatrix}$, 并证明 $D_1 = D_2$.

10. 求 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式 A , 其中 $a_{ij} = \frac{\alpha_i^n - \beta_j^n}{\alpha_i - \beta_j}, i, j = 1, 2, \dots, n$.

5.2 解答

1. 交换律结合律显然; 零元存在: $1 \oplus a = a \oplus 1 = a$; 负元存在: $a \oplus \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \oplus a = 1$; 么元存在: $1a = a^1 = a$; 左分配律: $(k+l)a = a^{k+l} = a^k a^l = ka \oplus la$; 右分配律: $k(a \oplus b) = (ab)^k = a^k b^k = ka \oplus kb$. $\sqrt{105}$ 属于, 因为 $105 = \frac{1}{2}(3 \oplus 5 \oplus 7)$; 110 不属于, 因为整数只能生成它的倍数的某个次方, 而 $110 = 11 \times 10$ 其中 11 是素数无法生成.

2. (1) 容易证明对 $\forall f(x), g(x) \in W \Rightarrow af(x) + bg(x) \in W$, 因此是线性子空间. (2) 令 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, $f(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0$, 因此 $f(x) = a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + \cdots + a_{n-1}(x^{n-1}-1)$. 下面我们只需证明 $x-1, x^2-1, \cdots, x^{n-1}-1$ 确实是 W 的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以 $\dim W = n-1$.

3. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3, -5\alpha_1 - 4\alpha_2 = \alpha_4$;

(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\frac{3}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 = \beta_1$.

4. (1) 线性相关; $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$. (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这五个向量却只有四个自由度.

5. 用矩阵表示为 $(\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \cdots, \beta - \alpha_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} := (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)P$. 容易计算得

到 $\det P = (s-1)(-1)^{s-1} \neq 0$, 因此两者线性无关等价.

6. (1) 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m (a_m \neq 0)$. 取 $x_k = k$ 代入, 得到线性方程组
$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_mx_0^m = f(x_0), \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_1^m = f(x_1), \\ \cdots \\ a_0 + a_1x_m + \cdots + a_mx_m^m = f(x_m). \end{cases},$$

其系数行列式是 Vandermonde 行列式不为 0, 因此由 Cramer 法则其有唯一解 $a_i = \frac{D_i}{D}, i = 0, 1, \cdots, m$. 由于 D_i 的元素均为整数, 因此 a_i 是有理数. (2) 结论不对, 反例是 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

7. 按第 3、4 行展开: $D = (-1)^{3+4+1+6} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 6 \end{vmatrix}$. 再按第 2、3 行展开: $D = (-1)^{2+3+1+4} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} *$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -24.$$

8. 前者是偶数阶斜对称矩阵. 若 $a = 0$. 则按第 1、2 行展开, 得到 $D_1 = (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -b & -d \\ -c & -e \end{vmatrix} = (be - cd)^2$.

若 $a \neq 0$, 则将第 1 行的 $\frac{d}{a}$ 倍和第 2 行的 $\frac{b}{a}$ 倍加到第 3 行上, 将第 1 行的 $\frac{e}{a}$ 倍和第 2 行的 $\frac{c}{a}$ 倍加到第 4 行上, 得到

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f + \frac{cd}{a} - \frac{be}{a} \\ 0 & 0 & -f + \frac{be}{a} - \frac{cd}{a} & 0 \end{vmatrix}. \text{ 然后按第 1、2 行展开, 得到 } D_1 = (af - be + cd)^2.$$

后者是奇数阶斜对称矩阵, 因此行列式为 $D_2 = 0$ (因为 $|M_2| = |M_2^T| = |-M_2| = (-1)^{2k+1}|M_2| \Rightarrow |M_2| = 0$).

9. 按前 n 行展开, 得到 $D_1 = |A||B|, D_2 = |AB|$. 将后面 n 行减去前面 n 行的 A 倍 (按矩阵 $(I, -B)$ 左乘 A 理解), 可使 M_1 转化为 M_2 .

10. 利用 $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ 及行列式乘法规则 $|AB| = |A||B|$, 知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \\ \beta_1^{n-2} & \beta_2^{n-2} & \cdots & \beta_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j).$$

6 第6次习题课: 秩 (1)

6.1 问题

1. 作初等行变换将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求

A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a, b 取何值时, 向量 $(3, a, b, b, 3)$ 属于 A 的行空间?

2. 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 能线性表出 β_1, \dots, β_s , 并且有 $\beta_i = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r, \forall i = 1, 2, \dots, s$. 证明若矩阵 $B = (b_{ij})_{s \times r}$ 列向量线性无关, 则 β_1, \dots, β_s 也能线性表出 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

3. 证明: 若组 I 能线性表出组 II, 且 $\text{rank}(I) = \text{rank}(II)$, 则组 II 也能表出组 I.

4. 矩阵 A, B, C 满足 $A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$. 证明: (1) A 的列向量组能线性表出 C 的列向量组; (2) $\text{rank}(A) \geq \text{rank}(C)$; (3) 若矩阵 B 行满秩, 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$, 且 C 的列向量组也能线性表出 A 的列向量组.

5. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.

6. 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \leq i \leq n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明 $\det(A) \neq 0$. 进一步, 证明若 $a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i \leq n$, 则 $\det(A) > 0$.

7. 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 (1) $a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i \leq n$; (2) $a_{ij} < 0, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$; (3) $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j \leq n$. 求矩阵 A 的秩.

8. 设线性方程组 $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, 1 \leq i \leq n$ 的系数矩阵 A 的秩等于矩阵 $B = \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.

9. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \beta = (b_1, \dots, b_m)^T$. 证明下列命题相互等价: (1) $Ax = \beta$ 有解; (2) $A^T x = 0$ 的解均满足 $x^T \beta = 0$; (3) 方程组 $\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解.

10. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 且 $|a_{ii}a_{jj}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$ 对任意 $1 \leq i \neq j \leq n$ 成立. 证明 $\det(A) \neq 0$.

11. 利用矩阵 $\begin{pmatrix} I_{s \times s} & 0_{s \times m} \\ 0_{n \times s} & A_{n \times s} B_{s \times m} \end{pmatrix}$ 的初等行列变换证明 $s + \text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

12. 设 A, B 是幂等矩阵 (即 $A^2 = A, B^2 = B$), 且 $I - A - B$ 满秩, 证明 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

6.2 解答

1. A 的简化阶梯型矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$, 且 $\beta_3 = 2\beta_1 - \beta_2, \beta_5 =$

$3\beta_1 + 5\beta_2 - \beta_4$. (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, 且 $\alpha_3 = -\frac{31}{9}\alpha_1 - \frac{55}{9}\alpha_2 + \frac{17}{9}\alpha_4, \alpha_5 = -\frac{20}{9}\alpha_1 - \frac{23}{9}\alpha_2 + \frac{22}{9}\alpha_4$. (3) 仔细计算即可. $a = 4, b = 2$.

2. 只需证明能表出 α_1 . 利用高斯消元法去解方程 $\beta_{i1} = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r$, 由于 B 列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成 $\begin{bmatrix} I_{r \times r} \\ 0_{(s-r) \times r} \end{bmatrix}$ (可用递推法或归纳法证明之), 从而 α_1 能被 β_1, \dots, β_s 线性表出.

3. 设 β_1, \dots, β_s 是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量 α , 由于组 I 能表出 $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$, 从而 $\text{rank}(\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha) \leq s$, 即 $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$ 线性相关. 由于 β_1, \dots, β_s 线性无关, 因此它们能表出 α .

4. (1) 由矩阵乘法定义知 $c_i = b_{1i}a_1 + \cdots + b_{ni}a_n, \forall 1 \leq i \leq p$. (2) 由第 (1) 问结论立得. (3) 用第 2 题结论立得.
 5. 显然矩阵 A 的秩至少为 2 (第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2 , 因此 $\lambda = 0$, 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4 列线性表出. 综上, $\lambda = 0$ 时秩为 2, 否则为 3.

6. (1) 反证法. 假设 A 的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$. 我们不妨设在这 n 个系数里面 k_1 的绝对值最大, 那么就有 $k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n} = 0$. 但是 $|k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_2a_{12}| - \cdots - |k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_1|(|a_{12}| + \cdots + |a_{1n}|) > 0$, 矛盾. 因此 $\det(A) \neq 0$.

(2) 考虑函数 $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & a_{23}t & \cdots & a_{2n}t \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33} & \cdots & a_{3n}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. 那么任意 $t \in [0, 1]$, $A(t)$ 都是主对角阵占优矩阵, 因此 $\det(A(t)) \neq 0$.

0. 由于 $\det(A(0)) > 0$, 由函数连续性知 $\det(A(1)) > 0$, 此即原命题.

7. 首先由条件 (3) 知 $|A| = 0$, 因此 $\text{rank}(A) \leq n - 1$. 其次考虑 A 中元素 a_{11} 的余子式 M_{11} , 由条件 (1)(2) 知其严格主对角占优, 因此 $M_{11} > 0$. 这意味着 $\text{rank}(A) = n - 1$.

8. (1) $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A, b) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}(B) = \text{rank}(A)$, 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.

(2) 不成立, 考虑 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$, $\text{rank}(A) = 2$, 而 $\text{rank}(B) = 3$.

9. (1) \Rightarrow (2): 设 $A\xi = \beta$, 从而 $x^T\beta = x^TA\xi = (A^Tx)^T\xi = 0$.

(2) \Rightarrow (3): 显然.

(3) \Rightarrow (1): $\text{rank} \begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < \text{rank} \begin{pmatrix} A^T & \mathbf{0} \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$, 即是 $\text{rank}(A, \beta) < \text{rank} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \leq \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \text{rank} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + 1$, 因此 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, \beta)$, 从而方程组 $Ax = \beta$ 有解.

10. 反证法. 假设 $\det(A) = 0$, 则 $Ax = 0$ 有非零解 (c_1, \cdots, c_n) . 若仅有 $c_i \neq 0$, 则 A 的第 i 列全零, 与条件矛盾. 下设第 i, j 个分量不为 0, 且 $|c_i| \geq |c_j| \geq |c_k|, i \neq j$. 考察第 i 个和第 j 个等式, 有 $|a_{ii}c_i| \cdot |a_{jj}c_j| = |\sum_{k \neq i} a_{ik}c_k| \cdot |\sum_{l \neq j} a_{jl}c_l| \leq |c_j| \cdot |\sum_{k \neq i} a_{ik}| \cdot |c_i| \cdot |\sum_{l \neq j} a_{jl}| \Rightarrow |a_{ii}a_{jj}| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$, 矛盾.

11. $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}+} A \times \text{①} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}-} \text{①} \times B \begin{pmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{pmatrix}$, 最左边矩阵秩为 $s + \text{rank}(AB)$, 最右边矩阵秩大于等于 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

12. $A(I - A - B) = -AB$, 因此 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A(I - A - B)) = \text{rank}(A)$, 同理 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$.

7 第 7 次习题课: 秩 (2), 线性方程组的解空间

7.1 问题

1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 证明 A 的列向量组线性无关当且仅当 A 至少有一个 n 阶非零子式.
 2. 设矩阵 A 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4$. (1) 求 $AX = \beta$ 的通解. (2) 求 A 行空间的一组基. (3) 将 A 分解为一个列满秩与一个行满秩矩阵的乘积.

3. 计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩 r , 并计算其 r 阶非零子式的个数.

4. 设矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 列满秩, $B = (\beta_1, \cdots, \beta_s), C = (\gamma_1, \cdots, \gamma_s)$ 满足 $AB = C$. 证明: (1) B 的解空间和 C 的解空间相同; (2) 若 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$ 线性无关, 则 $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \cdots, \gamma_{i_r}$ 也线性无关; 特别地, 有 $\text{rank}(B) = \text{rank}(C)$.

5. 设 W 是矩阵空间 $M_n(K)$ 的一个子空间. 证明: 若 $\dim(W) \geq n^2 - n + 1$, 则 W 中至少包含一个满秩的矩阵.

6. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{x-b_3}{b_1-b_2} = \frac{x-c_3}{c_1-c_2}, \frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.
7. 设 B 是 3×4 矩阵, $(2, 0, 1, 3)^T$ 是齐次方程组 $BX = 0$ 的一个解. 设 A 是将行向量 $(2, 0, 1, 3)$ 添加到 B 的最下面得到的方阵. 已知 A 的 $(4, 1)$ 元的余子式为 6, 求 $\det(A)$.
8. A 是 $m \times n$ 矩阵, b 是 $m \times 1$ 矩阵. 证明线性方程组 $A^T A x = A^T b$ 总有解.
9. 设数域 K 上的 n 阶方阵 A 的第 (i, j) 元是 $a_i - b_j$. 求 $\det(A)$, 并计算当 $n \geq 2$ 且 $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$ 时 $AX = 0$ 的解空间维数和一组基.
10. 设 A, B 是数域 K 上的 n 阶方阵, $AX = 0, BX = 0$ 分别有 l, m 个线性无关的解向量. 证明: (1) $(AB)X = 0$ 至少有 $\max(l, m)$ 个线性无关的解向量; (2) 如果 $l + m > n$, 那么 $(A + B)X = 0$ 必有非零解; (3) 如果 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 没有公共的非零解向量, 且 $l + m = n$, 那么 K^n 中的任一向量 α 都可以唯一的分解为 $\alpha = \beta + \gamma$, 其中 β, γ 分别是 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的解向量.
11. A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解. 问 A, B 的列向量组是否等价、行向量组是否等价.
12. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.
13. 证明: $AX = 0$ 有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.
14. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha \neq 0, A^k\alpha = 0$, 那么 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$.

7.2 解答

1. 充分性: 存在 n 阶非零子式 \Rightarrow 在这 n 阶子式内的列向量组线性无关 \Rightarrow 作为延长组的 A 列向量组线性无关.
 必要性: A 列向量组线性无关 $\Rightarrow \text{rank}(A) = n \Rightarrow$ 行向量组秩也为 $n \Rightarrow$ 存在 n 个线性无关的行向量 \Rightarrow 这 n 个线性无关的行向量构成的子式行列式非零.
2. (1) 其实是去求解方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4(2\alpha_2 - \alpha_3) = \alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 + 2x_4 = 2, x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow$ 通解是 $(1, 2 - 2t, t, t)$.
- (2)(3) $\text{rank}(A) = 3$, 且有分解 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 因此行空间一组基为 $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1)$.
3. 先求出其行简化阶梯矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 知其秩为 3, 且有 5 个列极大线性无关组 (第 5 列必选, 第 2 列、第 3 列至多选一个, 其余随意); 观察原矩阵易知有 2 个行极大无关组 (第 2 行、第 3 行至多选一个, 其余随意); 因此有 $2 \times 5 = 10$ 个 3 阶非零子式.
4. (1) 由于 A 列满秩, 因此 $AX = 0 \Rightarrow X = 0$, 即 $CX = ABX = 0 \Rightarrow BX = 0$. 反过来则显然.
 (2) 只需注意到 $k_1\gamma_{i_1} + \dots + k_r\gamma_{i_r} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)(k_1\beta_{i_1} + \dots + k_r\beta_{i_r}) = 0 \Leftrightarrow k_1\beta_{i_1} + \dots + k_r\beta_{i_r} = 0$. 后一问取极大线性无关组知 $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(C)$, 由矩阵乘法又知道 $\text{rank}(C) = \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$.
5. 将 $M_n(K)$ 的矩阵平铺开看成是 n^2 维的行向量, 并取该子空间的一组基 A_1, \dots, A_r . 把这 r 个行向量在 $\text{axis} = 0$ 方向拼成 $r \times n^2$ 的矩阵, 并可得到其简化阶梯型矩阵 J . 注意到 J 的行向量 B_1, \dots, B_r 也是该子空间的一组基, 这组基的线性组合能使得矩阵在某 r 个位置取到任意的值. 下面用归纳法证明: 任取 $n \times n$ 矩阵 A 中的 $n^2 - n + 1$ 个位置, 我们总可以在这些位置填上 0 或 1, 使得不管矩阵 A 其余的 $n - 1$ 个位置填什么数, A 的行列式总为 ± 1 . 假设命题对 $n - 1$ 级的方阵成立, 考察 n 阶方阵. 由抽屉原理, 总有一行 (不妨设是第 i 行), 该行的 n 个元素都可任意填选. 再选一列 (不妨设是第 j 列), 该列中存在某个位置不能任意填选. 取 (i, j) 元为 1, (i, j) 元为 0, 那么在 (i, j) 元的余子式中最多只有 $n - 2$ 个元素不能任选, 由归纳假设知总可在子阵中能任意填选的地方填上 0 或 1, 使得 (i, j) 元的余子式取 ± 1 . 在此填法下, n 阶方阵 A 的行列式是 (i, j) 元的代数余子式, 即 ± 1 . 由数学归纳法知命题得证.
6. 由矩阵满秩知 $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ 和 $(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$ 线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三

列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证 $x_3 + k(x_1 - x_2) = x_1 + t(x_2 - x_3), x = a, b, c$ 对于 k, t 是否有解. 由于矩阵满秩, 该方程系数必须满足 $t + 1 = k - 1 = t + k = 0$, 因此 $t = -1, k = 1$. 从而两直线相交.

7. 即 $|(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)| = 6$, 问 $\left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right|$. 按第四行展开得 $|A| = 2 * (-6) - 1 * |(-\frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_4, \alpha_2, \alpha_4)| + 3 * |(-\frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_4, \alpha_2, \alpha_3)| = -42$.

8. 先证明 $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$. 首先显然 $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A)$, 其次 $A^T A x = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker}(A) \Rightarrow \text{rank}(A^T A) \geq \text{rank}(A)$. 接着, 由于 $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A^T A, A^T b) \leq \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A)$ 知系数矩阵和增广矩阵秩相等, 因此方程有解.

9. (1) $n = 1$ 时 $|A| = a_1 - b_1$, $n = 2$ 时 $|A| = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$. $n > 2$ 时由于 $A = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$, 因此

此 $\text{rank}(A) \leq 2$, 从而 $|A| = 0$.

(2) $n = 2$ 时 $|A| \neq 0$, 因此解空间只有零解, 维数为 0, 不存在基. $n > 2$ 时, 由于 $\text{rank}(A) \leq 2$ 且显然 $A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} \neq 0$, 因此

此 $\text{rank}(A) = 2$, 解空间维数是 $n - 2$. 因此只需解方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} X = 0$ 即可 (这个分解后的系数矩阵秩也为

2, 因此同解). 直接计算得到一组基为 $\eta_i = \left(\frac{b_i - b_2}{b_2 - b_1}, \frac{b_1 - b_i}{b_2 - b_1}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{第 } i \text{ 个}}, 0, \dots, 0 \right)^T, i = 3, 4, \dots, n$.

10. (1) $n - \text{rank}(AB) \geq \max(n - \text{rank}(A), n - \text{rank}(B)) \geq \max(l, m)$.

(2) $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n - l + n - m < n$, 因此 $(A + B)X = 0$ 必有非零解.

(3) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ 与 β_1, \dots, β_m 分别是 $AX = 0, BX = 0$ 线性无关的解. 考虑方程 $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l + \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_m \beta_m = 0$, 则 $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l = -\mu_1 \beta_1 - \dots - \mu_m \beta_m$ 是 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的公共解. 由题意知其必然为零向量, 又由 $\{\alpha_i\}_{i=1}^l, \{\beta_j\}_{j=1}^m$ 线性无关性知 $\lambda_1 = \dots = \lambda_l = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$. 因此 $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_m$ 整体线性无关. 又由于 $l + m = n$, 因此他们是 K^n 一组基, 从而任一向量都可唯一被它们线性表出, 相应的被表出的两部分也就对应了 β 和 γ . 唯一性可由 $\alpha = \beta_1 + \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1$ 是 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的公共解 $\Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1 = 0$ 得到.

11. 第 1 个结论不对, 比如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 第 2 个结论对. 若解空间 0 维, 则 A, B 均列满秩, 也都可以通

过初等行列变换得到其简化阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}$, 因此等价. 其余情况, 设解空间 $r \geq 1$ 维, 任取 $AX = 0$ 的一个基础解系 X_1, \dots, X_r 构成 $n \times r$ 矩阵 C . 考虑线性方程组 $C^T X = 0$, 其解空间维数为 $n - r = \text{rank}(A)$. 由于 $C^T A^T = 0$, 因此 A 的行空间是该解空间的一个子空间. 由于它们维数相等, 因此 A 的行空间就是该解空间. 同理 B 的行空间也是该解空间.

12. 注意到 $W_i = \{X \in K^n : (a_{i1}, \dots, a_{in})X = 0\}, i = 1, 2, \dots, n$ 都是 K^n 的 $n - 1$ 维子空间, 由于有限个 $n - 1$ 维子空间张不满 n 维全空间, 从而存在 $X_0 \in K^n \setminus (W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n)$, 此时 AX_0 的每个分量都不为零.

13. 必要性. 设 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ 是强非零解, 则 $\alpha_i = \sum_{k \neq i} (-\frac{x_k}{x_i}) \alpha_k, \forall i = 1, \dots, n$.

充分性. 不妨设 $\alpha_i = \sum_{k \neq i} t_{ki} \alpha_k, \forall i = 1, \dots, n$, 则记 $T = \begin{pmatrix} 1 & -t_{12} & -t_{13} & \cdots & -t_{1,n-1} & -t_{1,n} \\ -t_{21} & 1 & -t_{23} & \cdots & -t_{2,n-1} & -t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t_{n-1,1} & -t_{n-1,2} & -t_{n-1,3} & \cdots & 1 & -t_{n-1,n} \\ -t_{n1} & -t_{n2} & -t_{n3} & \cdots & -t_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, 从

而 $AT = 0$. 由于 T 的任一主对角元均不为零, 从而存在 X_0 使得 TX_0 每个分量都不为零, 此即该强非零解.

14. (1) 设 $\lambda_1 \alpha + \lambda_2 A\alpha + \dots + \lambda_k A^{k-1} \alpha = 0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1 = 0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2 = 0$, 以此类推知线性无关.

(2) 显然 $A^n X = 0 \Rightarrow A^{n+1} X = 0$. 若存在 $A^{n+1} \alpha = 0$ 但 $A^n \alpha \neq 0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha, A\alpha, \dots, A^n \alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$.

8 期中考试

8.1 问题

1. 求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

2. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_s 是 \mathbb{R}^n 中的两个线性无关组. 证明 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ 线性无关当且仅当 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle = \{0\}$.

3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} b_n & x & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ b_2 & \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x+b_1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (1) 将 A 写成一个上三角矩阵与一个下三角矩阵的乘积; (2) 求 A 的行列式.

4. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_r 是 \mathbb{R}^n 中的两个向量组, 其中 β_1, \dots, β_r 线性无关. 证明存在无穷多个实数 k , 使得向量组 $\alpha_1 + k\beta_1, \dots, \alpha_r + k\beta_r$ 线性无关.

5. 已知矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5]$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ 的行向量组等价, 且 $\alpha_2 = (2, 1, 2, 1)^T$, $\alpha_5 = (7, 3, 7, 3)^T$. 又知方程组 $AX = \beta$ 的一个解为 $X = (1, 1, -1, 0, 1)^T$, 这里 $\beta = (7, 5, 7, 4)^T$. (1) 写出矩阵 A 及其行简化阶梯形矩阵 J ; (2) 求 A 行空间的一组基, 并确定当 a, b 为何值时, $(5, 3, 6, a, b)$ 落在 A 的行空间里; (3) 求方程组 $AX = \beta$ 的所有解; (4) 求所有矩阵 B , 使得 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5]B$.

6. 设 A_{ij} 是行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中 (i, j) 元的代数余子式. 证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n & y \end{vmatrix} = Dy - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_ix_j$.

7. 已知矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等. 记 A 的解空间为 W , B 的列空间为 V . 证明 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$ 当且仅当 $V \cap W = \{0\}$.

8.2 解答

1. 利用拆项大法, 注意若有两列成比例则行列式为 0. 从而最后只会剩下 $n+1$ 个行列式:

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3y_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1y_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1}y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_ny_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{ 相加得到原行列式为 } 1 + \sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

2. “ \Rightarrow ”: 若 $x = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = \mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_s\beta_s \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle$, 则 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r - \mu_1\beta_1 - \cdots - \mu_s\beta_s = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_1 = \cdots = \mu_s = 0 \Rightarrow x = 0$.

“ \Leftarrow ”: 考虑 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r + \mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_s\beta_s = 0$, 这意味着 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = -\mu_1\beta_1 - \cdots - \mu_s\beta_s \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle = \{0\} \Rightarrow \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = 0, \mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_s\beta_s = 0$. 由两组向量 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r, \{\beta_j\}_{j=1}^s$ 各自内部的线性无关

性知 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_1 = \cdots = \mu_s = 0$, 因此整体也线性无关.

3. (1) 通过行变换 (倒数第二行加上倒数第一行的 x 倍, 倒数第三行加上倒数第二行的 x 倍, \cdots) 得到 $A = LU$, 其中

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^2 + b_1x + b_2 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ x + b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2) $|A| = |L||U| = (-1)^{n-1}(x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n)$.

4. 将 β_1, \cdots, β_r 扩充为 \mathbb{R}^n 的一组基 β_1, \cdots, β_n , 并任意选择 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$. 行列式 $|(\alpha_1 + k\beta_1, \cdots, \alpha_n + k\beta_n)|$ 是一个关于 k 的至多 n 次多项式, 其等于零至多只有 n 个解 (令 $k \rightarrow \infty$ 知此多项式不恒为零), 且在该行列式不等于零时 $\alpha_1 + k\beta_1, \cdots, \alpha_r + k\beta_r$ 线性无关, 因此存在无穷多个实数 k .

5. (1) 容易得到 $\alpha_1 - \alpha_3 = (-2, 1, -2, 0)^T$, 并求出题给定的矩阵行空间一组基是 $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$. 考虑其前三个分量, 由能被这组基表出知 $\alpha_3 = 2\alpha_2 = (4, 2, 4, 2)^T$, $\alpha_1 = (2, 3, 2, 2)^T$, 从而 $\alpha_4 = (8, 6, 8, 3)$. 因此

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 一组基为 $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$. 考察各系数, 知当 $a = 14, b \in \mathbb{R}$ 时, 该向量落在 A 的行空间里.

(3) 先求出 $AX = 0$ 的解, 即 $(\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_5)X = 0$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 线性无关. 通解为 $(t_1, 3t_1 - 2t_2, t_2, -t_1, 0)^T$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 是自由变元. 因此 $AX = \beta$ 的通解是 $(t_1 + 1, 3t_1 - 2t_2 + 1, t_2 - 1, -t_1, 1)^T$.

(4) 容易求得 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. 按最后一行展开, 得到 $\text{LHS} = Dy + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i+1} x_i D_i$, 其中 D_i 是把 D 中第 i 列删去, 最后一列补上 $(x_1, \cdots, x_n)^T$ 得到的行列式. 再按最后一列对所有 D_i 展开, 得到 $D_i = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} (-1)^{i+j} A_{ij} x_j$, 直接代入得到 RHS.

7. 注意到 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB) \Leftrightarrow \text{Ker}(B) = \text{Ker}(AB)$.

“ \Rightarrow ”: 考虑 $x \in V \cap W$, 则可设 $x = By$. 由于 $AB y = Ax = 0$, 因此 $y \in \text{Ker}(AB) = \text{Ker}(B) \Rightarrow By = 0 \Rightarrow x = 0$.

“ \Leftarrow ”: 显然 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$. 若 $\text{rank}(AB) < \text{rank}(B)$, 则 $\text{Ker}(AB) \neq \text{Ker}(B)$, 即 $\exists x \in \text{Ker}(AB)$ 但 $x \notin \text{Ker}(B)$, 此时 $Bx \neq 0$, 但是 $Bx \in V \cap W$.

9 第 8 次习题课: 可逆矩阵

9.1 问题

1. n 阶方阵 $A, B, A+B$ 均可逆, 证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆并求其逆矩阵.

2. n 阶方阵 A, B 满足 $A+B=AB$, 证明 $AB=BA$.

3. 证明可逆的上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵.

4. 计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & & 1 & \cdots & n-2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ 的逆.

5. A 是 n 阶方阵, 试根据 $\text{rank}(A)$ 的取值讨论 $\text{rank}(A^*)$, 其中 A^* 是它的伴随矩阵.

6. 已知 $I_{m \times m} - A_{m \times n} B_{n \times m}$ 可逆, 证明 $I_{n \times n} - B_{n \times m} A_{m \times n}$ 也可逆并求其逆矩阵.

7. A 是 n 阶可逆矩阵, α, β 是 n 维列向量, 且矩阵 $A + \alpha\beta^T$ 可逆, 证明 $(A + \alpha\beta^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1 + \beta^T A^{-1}\alpha}$.

8. 计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix}$ 的逆, 其中 $a_i > 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$.

9. 设 A 是 n 阶方阵, 求 $(A^*)^*$.

10. 设 n 阶方阵 A 恰有 k 个 $n-1$ 阶子式等于 0, 其中 $1 \leq k \leq n-1$. 证明 A 可逆.

11. 设 A, B 是 n 阶方阵, A^*, B^* 为对应的伴随矩阵, 试求 $2n$ 阶方阵 $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵.

12. A 是 n 阶方阵 ($n \geq 3$), $A^3 = O$, 证明矩阵 $M = \begin{bmatrix} I & A \\ A & I \end{bmatrix}$ 可逆, 并求其逆.

9.2 解答

1. 由于 $[(A+B)^{-1}B](I+B^{-1}A) = I$, 因此 $(I+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = I \Rightarrow (A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B = (I+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = I \Rightarrow (A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B$.

2. $A+B=AB \Rightarrow (A-I)(B-I) = I \Rightarrow (B-I)(A-I) = I \Rightarrow BA = A+B = AB$.

3. 将单位矩阵拼在原矩阵右边, 其行变换只需不断用上面的行加减下面的行, 此操作只会将单位矩阵变成上三角矩阵.

4. 记 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A = I + 2J + \cdots + nJ^{n-1}$. 由于 $A(I - 2J + J^2) = 0$, 因此 $A^{-1} = I - 2J + J^2$.

5. 当 $\text{rank}(A) = n$ 时, 由于 $AA^* = |A|I$, 从而 A^* 可逆, 因此 $\text{rank}(A^*) = n$. 当 $\text{rank}(A) = n-1$ 时, 由于 $AA^* = 0$, 且 $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rank}(A) = 1$, 又有 A 中存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 不全零, $\text{rank}(A^*) = 1$. 当 $\text{rank}(A) \leq n-2$ 时, A 中不存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 全零, 从而 $\text{rank}(A^*) = 0$.

6. $(I-BA)(I+B(I-AB)^{-1}A) = I - BA + B(I-AB)^{-1}A - BAB(I-AB)^{-1}A = I - BA + B(I-AB)(I-AB)^{-1}A = I$, 因此 $(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A$.

7. 注意到 $A + \alpha\beta^T = A(I + A^{-1}\alpha\beta^T)$, 因此 $(A + \alpha\beta^T)^{-1} = (I + A^{-1}\alpha\beta^T)^{-1}A^{-1} = (I - A^{-1}\alpha(1 + \beta^T A^{-1}\alpha)^{-1}\beta^T)A^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1 + \beta^T A^{-1}\alpha}$.

8. $A = \text{diag}(a_1, \cdots, a_n)(I_n + \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}) \Rightarrow A^{-1} = (I_n - (1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}) \text{diag}(\frac{1}{a_1}, \cdots, \frac{1}{a_n})$.

9. 当 $n = 2$ 时, 由伴随矩阵定义知 $(A^*)^* = A$. 当 $n > 2$ 时, 若 A 可逆, 由 $A^* = |A|(A^*)^{-1}$ 知 $(A^*)^* = |A^*|A^{-1} = |A|^{n-1}|A|^{-1}A = |A|^{n-2}A$. 若 A 不可逆此结论也对, 因为 $\text{rank}(A^*) = 1$, A^* 的伴随矩阵全零.

10. 反证法. 若 $\text{rank}(A) \leq n-1$, 则由第 5 题结论知 $\text{rank}(A^*) = 1$. 任取某个 $A_{ij}^* = 0$, 由于其秩为 1, 因此其第 i 行全零, 这与恰有 k 个子式为 0 矛盾.

11. 只需简单计算即可, $M^* = \begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$.

12. 设 $P = \begin{bmatrix} I & O \\ -A & I \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix}$, 则 $PMQ = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I - A^2 \end{bmatrix}$. $A^3 = O \Rightarrow (PMQ)^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I + A^2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = Q \begin{bmatrix} I & O \\ O & I + A^2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} I + A^2 & -A \\ -A & I + A^2 \end{bmatrix}$.

10 第 9 次习题课: 矩阵的分块, 正交矩阵

10.1 问题

1. 证明对任意 n 阶可逆矩阵, 存在方阵 P, L, U 使得 $PA = LU$, 其中 P 是对换矩阵 (对换单位矩阵某两行所得矩阵) 的积, L 是对角元均为 1 的下三角矩阵, U 是上三角矩阵.
2. 求与任意可逆矩阵乘法可交换的矩阵构成的集合.
3. 证明行列式为 1 的 n 阶方阵可以写成若干个行列式为 1 的初等矩阵的乘积.
4. 已知 $P = \begin{bmatrix} A & I \\ I & I \end{bmatrix}$, 证明 P 可逆当且仅当 $I - A$ 可逆, 并利用 $(I - A)^{-1}$ 表出 P^{-1} .
5. A 是 n 阶方阵, 证明 $\text{rank}(A - I) + \text{rank}(A^2 + A + I) = n$ 当且仅当 $A^3 = I$.
6. A, B 是 n 阶方阵, 且满足 $\text{rank}(I - AB) + \text{rank}(I + BA) = n$, 证明或否定: A 是可逆矩阵.
7. A, B, C 分别是 $m \times n, n \times s, s \times t$ 矩阵, 证明 $\text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(B)$.
8. A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 证明 $\text{rank}(A + B) \geq \text{rank}(A, B) + \text{rank}(A^T, B^T) - \text{rank}(A) - \text{rank}(B)$.
9. A, B, C, D 都是 n 阶方阵, $AC = CA, AD = CB$, 且 A 可逆. 求矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的秩.
10. 矩阵 $A_{m \times m}, B_{m \times n}, C_{n \times m}, D_{n \times n}$ 满足 A 和 $E := D - CA^{-1}B$ 可逆. 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 也可逆并求其逆.
11. A, B, C, D 都是 n 阶方阵, 且 $AC = CA$, 证明或否定 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.
12. $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ 都是 n 阶方阵, 且 A_1, B_1 都是 r 阶方阵, $AB = I$. 证明 $|A||B_4| = |A_1|$.
13. 记 $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, B_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, 试证明 $A_\theta A_\omega = A_{\theta+\omega}, B_\theta B_\omega = A_{\theta-\omega}, A_\theta B_\omega = B_{\theta+\omega} = B_\omega A_{-\theta}$, 并解释 A_θ, B_θ 作为 \mathbb{R}^2 上线性变换的几何含义.
14. 设 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 0, 2)^T$. (1) 求 α_3 在 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 上的正交投影; (2) 求 α_3 到 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 的距离; (3) 求到 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 的正交投影算子 (用矩阵表示).
15. 将向量 $\alpha_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T$ 扩充成 \mathbb{R}^3 中的一组标准正交基.
16. U, V 是 \mathbb{R}^n 子空间, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 是任意两个向量. 证明 $\text{dist}(\alpha + U, \beta + V) = \text{dist}(\alpha - \beta, U + V)$.

10.2 解答

1. 由于 A 可逆, 因此第一列必至少存在一个非零元 a_{i1} . 将第 1 行与第 i 行互换使得新矩阵 $(1, 1)$ 元非零, 再把第一列的 $(i, 1)$ 元都化成零, $i = 2, 3, \dots, n$. 这意味着 $Q_1 P_{i1} A = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix}$, 其中 P_{i1} 是对换矩阵, $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}$. 利用归纳法, 假设存在 $P_{n-1} A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$, 因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} Q_1 P_{i1} A = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & P_{n-1} A_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

等式右边已经是一个对角元均为 1 的下三角矩阵乘一个上三角矩阵, 因此观察等式左边. 注意到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$ 是对换矩阵的积, 而 Q_1 是对角元均为 1 的下三角矩阵, 要是能把这两矩阵换个位置就好了. 计算知

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1} \alpha & P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1} \alpha & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix},$$

这样就可以写出

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} P_{i1} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1} \alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_{n-1} \alpha & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

于是令 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_{n-1}\alpha & L_{n-1} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}$ 即可. 显然 $n = 1$ 是平凡的, 因此任意 n 都成立.

2. 先验证初等矩阵 $P(j, i(1))$, 即 $AP(j, i(1)) = P(j, i(1))A$, 两边同时减去矩阵 A 得到 $AE_{ij} = E_{ij}A \Rightarrow a_{ii} = a_{jj}, a_{ij} = 0, \forall i \neq j$, 因此只能是数量矩阵, 其与所有矩阵都可交换.

3. 只需验证 A 可经一系列消法变换 (即不经过第三类初等矩阵 $P(i(c))$) 化为单位矩阵. 利用归纳法, 由于 A 可逆, 总可通过消法变换化得到 $a_{11} = 1$, 从而再通过消法变换化为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$, $n-1$ 阶方阵 A_1 的行列式为 1, 从而可消法变换化为单位矩阵 I_{n-1} , 因此 A 也可通过消法变换化为单位矩阵 I_n . 显然 $n = 1$ 是平凡的.

4. 利用分块初等变换得 $\begin{bmatrix} A & I \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & I \end{bmatrix}$, 因此 $|P| = |A-I|$, 两者可逆性相互等价. 另一方面, 由上式

两边求逆得 $P^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(I-A)^{-1} & (I-A)^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(I-A)^{-1} & (I-A)^{-1} \\ (I-A)^{-1} & I-(I-A)^{-1} \end{bmatrix}$.

5. 由裴蜀定理, 存在多项式 f, g 使得 $f(x)(x-1) + g(x)(x^2+x+1) = 1$, 即 $f(A)(A-I) + g(A)(A^2+A+I) = I$. 从而利用分块初等行列变换,

$$\begin{bmatrix} A-I & O \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} A-I & f(A)(A-I) \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ I-A^3 & O \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} O & I \\ A^3-I & O \end{bmatrix}.$$

从而 $\text{rank}(A-I) + \text{rank}(A^2+A+I) = n + \text{rank}(A^3-I)$, 因此原命题成立.

6. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I+BA \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I+AB & O \\ O & I \end{bmatrix},$$

从而知 $\text{rank}(I+BA) = \text{rank}(I+AB)$. 因此原条件等价于 $\text{rank}(I-AB) + \text{rank}(I+AB) = n$, 由上一小题的类似结论知 $(I-AB)(I+AB) = 0 \Rightarrow (AB)^2 = I$, 因此 A 可逆.

7. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix} ABC & O \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} O & AB \\ BC & B \end{bmatrix},$$

从而知 $\text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC)$.

8. 令 $P = (I_m, I_m), M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}$, 然后代入第 7 题的不等式. 只需注意 $\text{rank}(A^T, B^T) = \text{rank}(A^T, B^T)^T$.

9. 利用分块初等变换, 得 $\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$. 由于 $\text{rank}(D-CA^{-1}B) = \text{rank}(A(D-CA^{-1}B)) = 0$, 因此 $\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{rank}(A) = n$.

10. $\begin{pmatrix} A & B & I & O \\ C & D & O & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} A & B & I & O \\ O & D-CA^{-1}B & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B & A^{-1} & O \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & O & A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & O & A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & I & -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}.$

11. 若 A 可逆, 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{vmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A(D-CA^{-1}B)| = |AD-CB|$. 若 A 不可逆, 构造 $A(t) = A + tI$,

从而存在无穷多个 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $A(t)$ 可逆, 且对这些 t 成立 $\begin{vmatrix} A(t) & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A(t)D-CB|$. 两边都是关于 t 的多项式, 因此对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 等式都成立, 特别地对于 $t = 0$ 也成立.

12. 容易计算出 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & B_2 \\ O & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ A_3 & I_{n-r} \end{pmatrix}$, 两边同时取行列式即可.

13. A_θ 是逆时针旋转 θ 角, B_θ 是按逆时针方向的 $\frac{\theta}{2}$ 角做镜面反射. 有了几何含义, 验证这些矩阵乘法也就很简单了.
14. 容易求出 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 的一组标准正交基是 $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ 和 $\beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$. (1) 投影是 $(\alpha_3, \beta_1)\beta_1 + (\alpha_3, \beta_2)\beta_2 = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$. (2) 距离是 $|(0, 1, 0, 2) - (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5})| = |(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})| = \frac{\sqrt{35}}{5}$. (3) 任意向量 $\alpha = (x, y, z, w)$,

其投影是 $(\alpha, \beta_1)\beta_1 + (\alpha, \beta_2)\beta_2 = (\frac{3x+y+2z+w}{5}, \frac{x+2y-z+2w}{5}, \frac{2x-y+3z-w}{5}, \frac{x+2y-z+2w}{5})$, 因此算子是 $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

15. (答案不唯一) $\alpha_2 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T, \alpha_3 = \frac{1}{3}(2, -1, -2)^T$.

16. $\text{dist}(\alpha + U, \beta + V) = \min_{\gamma \in U, \delta \in V} \|\alpha + \gamma - \beta - \delta\| = \min_{\gamma \in U, \delta \in V} \|(\alpha - \beta) - (\delta - \gamma)\|_2 = \text{dist}(\alpha - \beta, U + V)$.

11 第 10 次习题课: 线性映射

11.1 问题

1. (1) $ABCD$ 是中心为原点、边与坐标轴平行的单位正方形. 求所有 \mathbb{R}^2 上所有保持该正方形不变的线性变换, 写出它们的矩阵, 并证明它们可被两个变换生成. (2) 试求出保持中心为原点的正十二面体不变的线性变换的个数.

2. A 是从 K^n 到 K^m 的线性映射, 将 $\text{Ker} A$ 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 扩充成 K^n 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_n$. (1) 证明 $\beta_1 = A\alpha_{s+1}, \dots, \beta_r = A\alpha_n$ 线性无关 (其中 $r = n - s$), 并构成 $\text{Im} A$ 的一组基; (2) 将 β_1, \dots, β_r 扩充成 K^m 的一组基 $\beta_1, \dots, \beta_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_m$, 并证明 $A(\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; (3) 矩阵 $A = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$

与 $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 行向量组等价, 求可逆矩阵 P, Q 使得 $AP = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. P 是线性空间 V 上的幂等变换 (即 $P^2 = P$), 证明 $P = \text{Ker} P \oplus \text{Im} P$, 且 P 是沿 $\text{Ker} P$ 向 $\text{Im} P$ 的投影, $I - P$ 是沿 $\text{Im} P$ 向 $\text{Ker} P$ 的投影.

4. P 是实线性空间上的幂等矩阵, 证明 A 是正交投影当且仅当 A 是对称矩阵.

5. $\beta \in \mathbb{R}^n$ 是单位向量 ($\|\beta\|_2 = 1$), $P = I - \beta\beta^T$, $A = I - 2\beta\beta^T$. (1) 证明 P 是幂等对称矩阵, 并写出第 3 题中的 (正交) 直和分解; (2) A 是实对称正交矩阵, 且满足 $A^2 = I$; 计算 $\det(A)$, 并探究 A 的几何性质.

6. A_1, A_2, A_3, A_4 是 n 维线性空间上的线性变换, 它们之间任意两个均可交换, 且 $A_1A_2 + A_3A_4 = I$. 证明 $\text{Ker}(A_1A_3) = \text{Ker} A_1 \oplus \text{Ker} A_3$.

7. A, B 是 n 维线性空间上的线性变换, $AB = BA$, 证明或否定 $\text{rank} A^2 + \text{rank} B^2 \geq 2\text{rank}(AB)$.

8. A, B 是幂等变换, 证明 $\text{Ker} A = \text{Ker} B$ 当且仅当 $AB = A, BA = B$.

9. A, B 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $A^2 = B^2 = O, AB + BA = I$. (1) 证明 $\text{Ker} A = A(\text{Ker} B), \text{Ker} B = B(\text{Ker} A)$, 且 $V = \text{Ker} A \oplus \text{Ker} B$; (2) 是否存在 $n = 2023$ 维且满足上述约束关系的线性变换; (3) 若 $\dim V = 2$, 证明 A, B 在某组基下的矩阵可以是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. V_1, V_2, V_3 都是数域 F 上的有限维线性空间, $\varphi: V_1 \rightarrow V_2, \psi: V_1 \rightarrow V_3$ 是两个线性映射. 证明 ψ 可以写成 $\psi = \sigma\varphi$, 其中 $\sigma: V_2 \rightarrow V_3$ 是线性映射的充要条件是 $\text{Ker} \varphi \subset \text{Ker} \psi$.

11. A 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明存在 $r \in \mathbb{N}$ 使得对于 $\forall s \in \mathbb{N}, \text{Ker} A^r = \text{Ker} A^{r+s}$.

11.2 解答

1. (1) 只需确定基的像. e_1 可以有 4 种选择, e_2 在 e_1 的基础上有 2 种选择, 因此有 8 种: $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$. 它

们可由逆时针旋转 90° 和关于 y 轴的反射这两个变换生成, 即 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 只需确定其中任意三个点 (对应的向量) 的像, 这里我们考虑共面的某三个点. 因为有 20 个顶点, 每个顶点又有 3 个邻结点, 和这 2 个点具有原始度量关系的点又有 2 个, 因此有 $20 \times 3 \times 2 = 120$ 个线性变换.

2. (1) $k_1\beta_1 + \cdots + k_r\beta_r = A(k_1\alpha_{s+1} + \cdots + k_r\alpha_n) = 0 \Rightarrow k_1\alpha_{s+1} + \cdots + k_r\alpha_n \in \text{Ker}A \Rightarrow k_1\alpha_{s+1} + \cdots + k_r\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_r = 0$, 因此线性无关. $\forall \alpha \in \text{Im}A, \alpha = A(m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n) = m_{s+1}\beta_1 + \cdots + m_n\beta_r$, 因此是一组基.

(2) 显然.

(3) 求出 $\text{Ker}A$ 的一组基是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 因此可以求出 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = (\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \text{线性无关的})$.

3. $P|_{\text{Im}P} = \text{id}$, 因为 $\forall \alpha = P\beta \in \text{Im}P$ 有 $P\alpha = P^2\beta = P\beta = \alpha$. 其次 $\text{Ker}P \cap \text{Im}P = \{0\}$, 因为 $\alpha = P\beta \in \text{Ker}P \cap \text{Im}P$ 有 $0 = P\alpha = P^2\beta = P\beta = \alpha$. 又因为 $\forall \alpha \in V$ 有 $\alpha = (I - P)\alpha + P\alpha \in \text{Ker}P + \text{Im}P$, 因此有直和分解. 同理知 $I - P$ 的性质, 因为它也是幂等变换, 且 $\text{Ker}(I - P) = \text{Im}P, \text{Im}(I - P) = \text{Ker}P$.

4. 从上一问我们已知 A 是投影. “ \Rightarrow ”: A 是正交投影 $\Rightarrow \forall \alpha, \beta, \langle (I - A)\alpha, A\beta \rangle = 0 \Rightarrow \forall \alpha, \beta, \alpha^T(I - A^T)A\beta = 0 \Rightarrow A = A^TA$. 同理有 $\forall \alpha, \beta, \langle A\alpha, (I - A)\beta \rangle = 0 \Rightarrow A^T = A^TA$. 因此 $A = A^T$. “ \Leftarrow ”: $\forall \alpha \in \text{Ker}A, \beta = A\gamma \in \text{Im}A \Rightarrow \langle \alpha, A\gamma \rangle = \langle A^T\alpha, \gamma \rangle = \langle A\alpha, \gamma \rangle = 0$. 因此 $\text{Ker}A \perp \text{Im}A$.

5. (1) $P^2 = (I - \beta\beta^T)(I - \beta\beta^T) = I - 2\beta\beta^T + \beta(\beta^T\beta)\beta^T = I - \beta\beta^T = P$, 且对称性显然. 直和分解是 $\mathbb{R} = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P = \langle \beta \rangle + \langle \beta \rangle^\perp$. (2) 对称性显然, 且 $A^TA = A^2 = I - 4\beta\beta^T + 4\beta\beta^T\beta\beta^T = 1$, 因此正交. $|A| = |I - 2\beta\beta^T| = 1 - 2\beta^T\beta = -1$. 注意到 P 是在 $\langle \beta \rangle^\perp$ 上的投影, 因此 A 是关于 $\langle \beta \rangle^\perp$ 作镜面反射.

6. 任取 $\alpha \in \text{Ker}(A_1A_3)$, 有 $\alpha = A_1A_2\alpha + A_3A_4\alpha \in \text{Ker}A_3 + \text{Ker}A_1$; 反之任取 $\beta \in \text{Ker}A_1, \gamma \in \text{Ker}A_3$, 有 $A_1A_3(\beta + \gamma) = 0 \Rightarrow \beta + \gamma \in \text{Ker}(A_1A_3)$. 因此 $\text{Ker}A_1 + \text{Ker}A_3 = \text{Ker}(A_1A_3)$. 又由于 $\forall \delta \in \text{Ker}A_1 \cap \text{Ker}A_3 \Rightarrow \delta = A_1A_2\delta + A_3A_4\delta = 0$, 因此是直和.

7. 结论不对. 可取 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} J & \\ & J \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} J & I \\ O & J \end{pmatrix}. A^2 = O, B^2 = \begin{pmatrix} O & 2J \\ O & O \end{pmatrix}, AB = BA = \begin{pmatrix} O & J \\ O & O \end{pmatrix}.$

8. “ \Rightarrow ”: $\forall \alpha, A(A\alpha - \alpha) = 0 \Rightarrow B(A\alpha - \alpha) = 0 \Rightarrow BA = B$. 同理 $AB = A$.

“ \Leftarrow ”: $\forall \alpha \in \text{Ker}A, B\alpha = BA\alpha = 0 \Rightarrow \text{Ker}A \subset \text{Ker}B$. 同理 $\text{Ker}B \subset \text{Ker}A$.

9. (1) $\forall \alpha = A\beta \in A(\text{Ker}B)$, 有 $A\alpha = A^2\beta = O$; $\forall \gamma \in \text{Ker}A$, 有 $\gamma = AB\gamma + BA\gamma = AB\gamma$, 且注意到 $B\gamma \in \text{Ker}(B)$. 因此 $\text{Ker}A = A(\text{Ker}B)$, 同理 $\text{Ker}B = B(\text{Ker}A)$. 又因为 $\forall \delta \in V$ 有 $\delta = AB\delta + BA\delta = A(\text{Ker}B) + B(\text{Ker}A) = \text{Ker}A + \text{Ker}B$, 且 $\theta \in \text{Ker}A \cap \text{Ker}B \Rightarrow \theta = AB\theta + BA\theta = 0$, 因此 $V = \text{Ker}A \oplus \text{Ker}B$.

(2) 注意到 $\text{Ker}A = A(\text{Ker}B) \subset \text{Im}A$, 且 $\dim(\text{Ker}A) + \dim(\text{Im}A) = n$, 因此 $\dim(\text{Ker}A) \leq \frac{n}{2}$, 同理 $\dim(\text{Ker}B) \leq \frac{n}{2}$. 由直和关系知 $\dim(\text{Ker}A) + \dim(\text{Ker}B) = n$, 因此 n 只能为偶数.

(3) 由上一问论证过程知 $\dim(\text{Ker}A) = 1$. 取 $\text{Ker}A$ 的一组基 α_1 , 并考虑 $\alpha_2 = B\alpha_1 \in \text{Ker}B$. 由于 $\text{Ker}A \cap \text{Ker}B = \{0\}$, 因此 α_1, α_2 线性无关. 在这组基 α_1, α_2 下, A, B 有题设的矩阵表示 ($A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = AB\alpha_1 = \alpha_1 - BA\alpha_1 = \alpha_1, B\alpha_1 = \alpha_2, B\alpha_2 = B^2\alpha_1 = 0$).

10. 必要性是显然的, 下面证明充分性. 取 $\text{Ker}\varphi$ 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 并扩充成 $\text{Ker}\psi$ 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$, 又再扩充成 V_1 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s, \gamma_1, \cdots, \gamma_t$. 显然 $\varphi(\beta_1), \cdots, \varphi(\beta_s), \varphi(\gamma_1), \cdots, \varphi(\gamma_t)$ 是 $\text{Im}\varphi$ 的一组基, 并可扩充成 V_2 的一组基 $\varphi(\beta_1), \cdots, \varphi(\beta_s), \varphi(\gamma_1), \cdots, \varphi(\gamma_t), \delta_1, \cdots, \delta_l$. 现在, 对于任意 $\beta = \sum_{i=1}^s a_i\varphi(\beta_i) + \sum_{j=1}^t b_j\varphi(\gamma_j) + \sum_{k=1}^l c_k\delta_k \in V_2$, 只需定义 $\sigma(\beta) = \sum_{j=1}^t b_j\psi(\gamma_j)$ 即可.

11. 先证明存在 $r \in \mathbb{N}$ 使得 $\text{Ker}A^r = \text{Ker}A^{r+1}$. 显然有无穷递升链 $\dim(\text{Ker}A) \leq \dim(\text{Ker}A^2) \leq \dim(\text{Ker}A^3) \leq \cdots$, 注意到这条链有上界 n , 因此必然存在 r 使得 $\dim(\text{Ker}A^r) = \dim(\text{Ker}A^{r+1})$, 这意味着 $\text{Ker}A^r = \text{Ker}A^{r+1}$. 现在开始推广到 $r + s$: 由于 $A^{r+2}\alpha = 0 \Leftrightarrow A^{r+1}(A\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^r(A\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^{r+1}\alpha = 0$, 以此类推知 $\text{Ker}A^{r+s} = \text{Ker}A^r, \forall s \in \mathbb{N}$.

12 第 11 次习题课: 特征值, 特征向量

12.1 问题

1. 矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 诱导了 \mathbb{R}^2 上的线性变换 A . (1) 写出 A 在基 $\alpha_1 = (1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -1)^T$ 下的矩阵; (2) 求在变换 A 下保持不动的直线; (3) $\alpha = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2$, 求 $A\alpha$ 在基 α_1, α_2 下的坐标.

2. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量. 你能求出任意一个三阶矩阵的特征值和特征向量吗?
3. 3 阶矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 对应的特征向量是 $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$, 求 A^m . 你能推广到 e^A 吗?
4. A, B 是 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵. 证明 AB 与 BA 有相同的非零特征值, 且这些特征值的几何重数和代数重数也相同.
5. 利用矩阵方法求出斐波拉契数列的通项公式.
6. A 是第一类 3 阶正交矩阵. (1) 证明 $\lambda = 1$ 是 A 的一个特征值. (2) 设 α_1 是 $\lambda = 1$ 的一个单位特征向量, 将其扩充为一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 证明 $\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 仍是一组标准正交基. (3) 已知 $A\alpha_2 = (\cos \theta)\alpha_2 + (\sin \theta)\alpha_3$, 求 $A\alpha_3$. (4) 探究 A 的几何性质.
7. A 是第二类 3 阶正交矩阵. (1) 证明 $\lambda = -1$ 是 A 的一个特征值. (2) 设 α_1 是 $\lambda = -1$ 的一个单位特征向量, 将其扩充为一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 证明 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. (3) 探究 A 的几何性质.
8. A, B 是二阶实方阵, 且满足 $A^2 + B^2 = O$. 证明 $\det(AB - BA) \leq 0$.
9. 求 n 阶循环矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ 的行列式.
10. A, B, C 分别是 $n \times n, m \times m, n \times m$ 矩阵, 其中 $n > m$, $\text{rank}(C) = m$, 且 $AC = CB$. 证明 $|\lambda I_m - B|$ 整除 $|\lambda I_n - A|$.
11. A, B 分别是 m, n 阶方阵, 且无公共特征值. 求解矩阵方程 $AX = XB$ (你可以设定一些未知数来表示答案).
12. σ, δ, τ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $\tau\delta = 0$ 且 $\text{rank}(\sigma) < \text{rank}(\tau)$. 证明 σ 和 δ 存在公共特征向量.
13. 现有 n 维线性空间 V 和线性变换 A . 证明特征值的代数重数大于等于几何重数, 并举例说明等号可以不取到.
14. n 维空间 V 上的线性变换 A 有 $n+1$ 个特征向量, 且其中任意 n 个线性无关. 求所有可能的 A 构成的集合.

12.2 解答

1. (1) 矩阵是 $(\alpha_1, \alpha_2)^{-1}A(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (2) 保持不动的直线即特征向量, 先解 $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 4$, 然后求得特征向量分别是 $\beta_1 = (1, -1)^T, \beta_2 = (2, 1)^T$, 即这两个向量所对应的直线保持不变. (3) 根据 (1), 坐标为 $(4y_1, y_1 + y_2)$.
2. 先解 $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (重根), 10, 对应的特征向量分别是 $(2, -1, 0)^T, (2, 0, 1)^T, (1, 2, -2)^T$. 一元三次实方程在实数范围内必有解, 剩下两个解要么都是实数要么是共轭复数.
3. $A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \lambda_3^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \lambda_1^m - \lambda_3^m \\ 0 & \lambda_2^m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^m \end{pmatrix}$.
4. WLOG $m \geq n$. 由 $|I - AB| = |I - BA|$ 知 $|\lambda I - AB| = \lambda^m |I - \lambda^{-1}AB| = \lambda^m |I - \lambda^{-1}BA| = \lambda^{m-n} |\lambda I - BA|$, 因此非零特征值的代数重数相同. 另一方面, 若 $AB\mu = \lambda\mu$ 对于某个特征值 λ 有解空间 $\langle \mu_1, \dots, \mu_d \rangle$ (基), 则 $\langle B\mu_1, \dots, B\mu_d \rangle$ 属于 $BAX = \lambda X$ 的解空间, 且它们线性无关 ($k_1 B\mu_1 + \dots + k_d B\mu_d = 0 \Rightarrow k_1 \mu_1 + \dots + k_d \mu_d \in \text{Ker } B \Rightarrow \lambda(k_1 \mu_1 + \dots + k_d \mu_d) = AB(k_1 \mu_1 + \dots + k_d \mu_d) = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_d = 0$). 同理反过来也成立, 因此它们的解空间维数相同, 即非零特征值的几何重数相同.
5. 先写出递推公式 $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$, 做特征值分解 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \\ & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$, 因此 $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$, 利用特征值分解可推导 $a_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. 代入 $n = 0, 1$ 知 $A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, 因此 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.
6. (1) $|I - A| = -|A - I| = -|A||I - A^{-1}| = -|I - A^T| = -|I - A| \Rightarrow |I - A| = 0$. (2) 正交矩阵诱导等距同构, 因此 $\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ (即 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$) 仍是标准正交基.

(3) 原题可转化为已知 A 的前两列为 $(1, 0, 0)^T, (0, \cos \theta, \sin \theta)^T$, 去补全第三列. 显然是 $(0, -\sin \theta, \cos \theta)^T$, 因此 $A\alpha_3 = -(\sin \theta)\alpha_2 + (\cos \theta)\alpha_3$.

(4) 绕过原点、线向为 α_1 的直线旋转 θ 角.

7. (1) $|I + A| = |A||I + A^{-1}| = -|I + A^T| = -|I + A| \Rightarrow |-I - A| = 0$.

(2) 原题可转化为已知 A 的前两列为 $(-1, 0, 0)^T, (0, \cos \theta, \sin \theta)^T$, 去补全第三列. 过程与 6(3) 类似.

(3) 绕过原点、线向为 α_1 的直线旋转 θ 角, 再关于平面 $\langle \alpha_1 \rangle^\perp$ 作镜面反射.

8. 注意到 $(A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2 - i(AB - BA)$, 因此 $\det(AB - BA) = -\det(A + iB)\det(A - iB)$. 若 $A + iB$ 有特征值 λ_1, λ_2 , 则 $A - iB$ 有特征值 $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}$ (两边取共轭), 从而 $-\det(A + iB)\det(A - iB) = -\lambda_1\lambda_2\overline{\lambda_1}\overline{\lambda_2} = -|\lambda_1\lambda_2|^2 \leq 0$.

9. 记 $J = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$, 则 $A = a_1I + a_2J + a_3J^2 + \cdots + a_nJ^{n-1}$. 注意到 J 的特征多项式是 $\lambda^n - 1$, 因此其特征值为 $w_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1$, 从而 A 的特征值是 $\sum_{i=1}^n a_i w_k^{i-1}$, 这意味着 $|A| = \prod_{k=1}^n (\sum_{i=1}^n a_i w_k^{i-1})$.

10. 由于 C 列满秩, 因此存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $C = P \begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}$, 从而 $AC = CB$ 可写为 $(P^{-1}AP)P^{-1}C = P^{-1}CB$.

对 $P^{-1}AP$ 作分块 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, 其中 A_1 是 m 阶方阵, 代入上式知 $A_1 = B, A_3 = O$. 于是 $|\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - P^{-1}AP| = \begin{vmatrix} \lambda I_m - B & -A_2 \\ O & \lambda I_{n-m} - A_4 \end{vmatrix} = |\lambda I_m - B||\lambda I_{n-m} - A_4|$, 此即整除关系.

11. 方程只有零解. 假设存在 $AC = CB$, 并且 $\text{rank}(C) = r \geq 1$. 则存在 m, n 阶可逆矩阵 P, Q 使得 $PCQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

由 $AC = CB$ 知 $(PAP^{-1})(PCQ) = (PCQ)(Q^{-1}BQ)$, 并作分块 $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 代入计算得到 $A_1 = B_1, B_2 = O, A_3 = O$. 因此 A, B 的特征多项式分别为 $|\lambda I_m - A| = |\lambda I_m - PAP^{-1}| = |\lambda I_r - A_1||\lambda I_{m-r} - A_4|, |\lambda I_n - B| = |\lambda I_n - Q^{-1}BQ| = |\lambda I_r - A_1||\lambda I_{n-r} - B_4|$. 这与无公共特征值矛盾.

12. 由题设知 $\text{Im}(\delta) \subset \text{Ker}(\tau)$, 因此 $\text{rank}(\delta) \leq n - \text{rank}(\tau)$, 从而 $\text{rank}(\delta) + \text{rank}(\sigma) < n, \dim(\text{Ker}(\delta)) + \dim(\text{Ker}(\sigma)) > n$, 故 $\dim(\text{Ker}(\delta) \cap \text{Ker}(\sigma)) > 0$. 取 $\xi \in \text{Ker}(\delta) \cap \text{Ker}(\sigma)$, 这就是它们对应于特征值为 0 的公共特征向量.

13. 设 $\dim V_{\lambda_0} = r$, 并取其一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 然后扩充成 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$. 则 A 在这组基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} \lambda_0 I_r & B \\ O & C \end{pmatrix}$, 从而 $|\lambda I - A| = |(\lambda - \lambda_0)I_r||\lambda I_{n-r} - C| = (\lambda - \lambda_0)^r |\lambda I_{n-r} - C|$, 这表明其代数重数至少是 r . 对于矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = 0$ 是其代数二重特征值, 但几何重数是 1.

14. A 只能是数乘变换. 考虑特征向量 η_0, \cdots, η_n 对应于特征值 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$. 考虑 $\eta_0 = a_1\eta_1 + \cdots + a_n\eta_n$, 显然 a_1, \cdots, a_n 均不为 0 (否则剔除它对应的 η_i 后剩余的 n 个向量线性相关). 两边同时左乘 A 知 $a_1(\lambda_1 - \lambda_0)\eta_1 + \cdots + a_n(\lambda_n - \lambda_0)\eta_n = 0 \Rightarrow a_1(\lambda_1 - \lambda_0) = \cdots = a_n(\lambda_n - \lambda_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. 这表明其是数乘变换.

13 第 12 次习题课: 矩阵的相似与对角化

13.1 问题

1. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 找到正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $A = PDP^T$.

2. 分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ 可对角化, 其中 A, B 是方阵. 问是否有 A, B 都可对角化?

3. 方阵 A, B 可对角化, 问是否有 AB 可对角化? 若加上 A, B 可交换条件呢?

4. 证明: (1) (Schur 引理) 在复数域上, 任何方阵 A 都相似于上三角矩阵; (2) 若矩阵 A, B 可交换, 则 A, B 有公共的复特征向量; (3) 若矩阵 A, B 可交换, 则存在可逆复矩阵 U 使得 $U^{-1}AU$ 和 $U^{-1}BU$ 同为上三角矩阵.

5. $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_2 & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$ 是分块上三角矩阵, 对角块为 n_i 阶上三角矩阵 $A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$, 且 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$

互异. 证明 A 可对角化当且仅当 $A_i = \lambda_i I_{n_i}$.

6. (Roth 定理) $A_{m \times m}, B_{n \times n}, C_{m \times n}$. 证明: 若存在 $m \times n$ 矩阵 X 使得 $AX - XB = C$, 则矩阵 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ 与矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 相似. 该命题的逆命题是否也成立?

7. A, B 是 n 阶复矩阵, $\text{rank}(AB - BA) \leq 1$, 证明 A, B 可同时上三角化.

【编者注】与第 4(3) 题相比, 本题条件有所放松 (秩要求从 0 放宽到 1).

8. n 阶实矩阵 A, B 在复数域上相似, 问它们是否在实数域上相似.

9. $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $A^2 = B^2 = I$, $AB + BA = O$. 证明存在可逆矩阵 T 使得 $TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $TBT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

10. n 维向量 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, \cdots, b_n)^T$, $A = \alpha\beta^T$, 且 $a_1b_1 \neq 0$. 证明 A 可对角化的充要条件是 $\alpha^T\beta \neq 0$.

11. 考虑数域 F 上的 n 阶方阵构成的线性空间 $M_n(F)$. 定义线性运算 $\sigma(A) = A^T$, 求出它的特征值和对应的特征子空间, 并证明它可以对角化.

12. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$. 证明 \mathbb{R}^n 不能分解成 A 的两个非平凡不变子空间的直和, 并求 A 的所有不变子空间.

13. 集合 S 由一些可对角化的 n 阶方阵构成, 且其中任意两个矩阵都可交换. 问是否有 S 中所有矩阵都可同时对角化.

【编者注】本题是第 3 题的一个推广.

14. n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明 $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$.

15. A, B, M 是 n 阶实方阵, $AM = MB$, 且 A, B 具有相同的特征多项式. 证明对于任意 n 阶实方阵 X , $\det(A - XM) = \det(B - XM)$.

13.2 解答

1. $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = -3$ (重根), 6, 对应的一组标准正交特征向量是 $(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)^T, (\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, -\frac{\sqrt{5}}{3})^T, (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$. 因此

$$D = \text{diag}(-3, -3, 6), P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

2. 由题意, 存在可逆分块矩阵 $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}$ 使得 $A \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & D_2 \end{bmatrix}$, 其中 D_1, D_2 是对角矩阵. 这得到 $BU_3 = U_3D_1, BU_4 = U_4D_2$. 取一个 $[U_3, U_4]$ 的列极大线性无关组知 B 可对角化. 对于 A , 注意到只需证明 A^T 可对角化, 对原矩阵取转置然后类似证明即可.

3. (1) 有反例 $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 可以对角化. 不妨设 A 是对角矩阵 $\text{diag}(\lambda_1 I_1, \cdots, \lambda_s I_s)$, 并将 B 按照这种格式分块 $\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{ss} \end{bmatrix}$, 计算 $AB =$

BA 知 $B_{ij} = 0, \forall i \neq j$. 由第二题结论知 B 可对角化 \Rightarrow 每个 B_{ii} 均可对角化, 因此 AB 可对角化.

【编者注】本题也说明了 A, B 可同时对角化. 因为可将 B_{ii} 对角化时对应的基矩阵 U_{ii} 按对角线拼接成大矩阵 U , 在此矩阵对应的基下 A, B 都是对角阵.

4. (1) 对矩阵阶数用数学归纳法. 考虑 A 的某个特征值 λ_1 对应的单位特征向量 α_1 , 扩充成一组标准正交基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 记 $U_1 = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. 则 $A = U_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} U_1^{-1}$. 由归纳假设 $A_1 = U_2 B_1 U_2^{-1}$, 其中 B_1 上三角, U_2 正交, 因此

$$A = \underbrace{U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}}_{\text{正交}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & C_1 U_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}}_{\text{上三角}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^{-1} \end{bmatrix}}_{\text{正交}^{-1}} U_1^{-1}.$$

(2) 记 A 对应于特征值 λ 的特征子空间为 V_λ . $\forall \alpha \in V_\lambda, AB\alpha = BA\alpha = \lambda B\alpha \Rightarrow B\alpha$ 也是 A 属于 λ 的特征向量 $\Rightarrow V_\lambda$ 是 B 的不变子空间. 从而只需取 $B|_{V_\lambda}$ 的一个特征向量即可.

(3) 对空间维数用数学归纳法. 考虑 A, B 的某个公共单位特征向量 α_1 , 扩充成一组标准正交基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. 在这组基下 A, B 的矩阵分别是 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_1 & D_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$. 它们可交换, 因此 A_1, B_1 也可交换. 可定义 $\tilde{A}_1 = P_{\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle} A_1|_{\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle}$, 其中 $P_{\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle}$ 是平行于 $\langle \alpha_1 \rangle$ 的投影算子, 然后类似定义 \tilde{B}_1 . 因此由归纳假设存在 $\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ 上的一组基 β_2, \dots, β_n 使得 A_1, B_1 为上三角矩阵. 此时, 在基 $\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下, A, B 都是上三角矩阵.

5. 容易验证特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 每个特征值分别为 n_i 重. 由于 A 可对角化当且仅当特征值的对应几何重数也为 n_i 重, 而这当且仅当 $A_i = \lambda_i I_{n_i}$ (考虑 $\text{rank}(A)$ 即可, 取其主子式).

$$6. (1) \begin{bmatrix} I & X \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$

(2) 成立. 记 $V = F^{(m+n) \times (m+n)}$, 构造 V 上的线性变换 $\varphi_1(Y) := \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, \varphi_2(Y) := \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. 由于 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 相似, 因此存在可逆矩阵 $T \in V$ 使得 $T^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. 简单计算得 $\varphi_2(Y) = T\varphi_1(T^{-1}Y)$, 这表明 $Y \in \text{Ker}\varphi_2 \Leftrightarrow T^{-1}Y \in \text{Ker}\varphi_1$, 即 $\dim(\text{Ker}\varphi_1) = \dim(\text{Ker}\varphi_2)$. 将 Y 分块为 $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$, 计算可知

$$\begin{aligned} \text{Ker}\varphi_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} : AP = PA, AQ = QB, BR = RA, BS = SB \right\}, \\ \text{Ker}\varphi_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} : AP + CR = PA, AQ + CS = QB, BR = RA, BS = SB \right\}. \end{aligned}$$

再构造线性映射 $\mu_i : \text{Ker}\varphi_i \rightarrow F^{n \times (m+n)}, \mu_i \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = (R, S), i = 1, 2$. 由于

$$\text{Ker}\mu_1 = \text{Ker}\mu_2 = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ O & O \end{pmatrix} : AP = PA, AQ = QB \right\}, \text{Im}\mu_2 \subset \text{Im}\mu_1 = \{(R, S) : BR = RA, BS = SB\},$$

因此由维数关系知 $\text{Im}\mu_1 = \text{Im}\mu_2$. 注意到 $\begin{pmatrix} O & O \\ O & -I \end{pmatrix} \in \text{Ker}\varphi_1$, 因此 $(O, -I) \in \text{Im}\varphi_1 = \text{Im}\varphi_2$, 从而必然存在某个 P, Q 使得 $\begin{pmatrix} P & Q \\ O & -I \end{pmatrix} \in \text{Ker}\varphi_2$, 此时 $AQ - QB = C$.

【编者注】Roth 定理的另一部分: $AX - YB = C$ 有解 X, Y 的充要条件是 $\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$. 有兴趣的读者可以试着自己探究证明, 利用分块矩阵的行列变换技巧.

7. 只需找到公共的低维不变子空间, 剩下的可对维数归纳. 不妨设 $\det A = 0$, 否则只需将 A 换成 $A - \lambda_A I$, 其中 λ_A 是 A 的某个特征值. 若 $\text{Ker}A$ 不是 B 的不变子空间, 则存在 $\alpha \in \text{Ker}A$ 使得 $B\alpha \notin \text{Ker}A$. 此时 $(AB - BA)\alpha = AB\alpha \neq 0$, 这也意味着 $\text{Im}(AB - BA) = \text{span}\{AB\alpha\}$. 从而 $\forall \beta \in \mathbb{C}^n, (AB - BA)\beta = \lambda_\beta AB\alpha \Rightarrow BA\beta = AB(\beta - \lambda_\beta \alpha)$, 这表明 $\text{Im}A$ 是 B 的不变子空间. 因此 $\text{Ker}A, \text{Im}A$ 中必有 B 的不变子空间, 由 $\det A = 0$ 知除非 $A = 0$, 否则此问题已降维.

8. 是. 设 $(Q_1 + iQ_2)A = B(Q_1 + iQ_2)$, 且它们都是实矩阵. 那么 $Q_1A = BQ_1, Q_2A = BQ_2$. 由于 $|Q_1 + \lambda Q_2| = 0$ 至多只有有限多个解 ($Q_2 = 0$ 是平凡情形), 从而存在 λ_0 使得 $Q_0 := Q_1 + \lambda_0 Q_2$ 可逆, 此时 $A = Q_0^{-1}BQ_0$, 因此实相似.
9. 用类似于第 9 次习题课第 5 题的办法知 $\text{rank}(I - A) + \text{rank}(I + A) = 2$, 即 $\dim(\text{Ker}(I - A)) + \dim(\text{Ker}(I + A)) = 2$. 又由于 $1 - x$ 与 $1 + x$ 互质, 从而根据裴蜀定理知 $\text{Ker}(I - A) \cap \text{Ker}(I + A) = \{0\}$, 从而 $\mathbb{R}^2 = \text{Ker}(I - A) \oplus \text{Ker}(I + A)$. 这同样适用于矩阵 B . 且由题意 $AB + BA = O$ 知 A, B 均不为 $\pm I$, 因此 A, B 的特征值均为 ± 1 . 从而存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 令 $H = PBP^{-1}$, 则 $B^2 = H^2 = I; AB + BA = O \Rightarrow (PAP^{-1})H + H(PAP^{-1}) = O$. 这可以得到 $H = \begin{pmatrix} 0 & h \\ \frac{1}{h} & 0 \end{pmatrix} (h \neq 0)$. 现在取 $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} P^{-1}$ 即可.
10. 容易验证 $\text{rank}(A) = n - 1$, 且 $|\lambda I - A| = \lambda^{n-1}|\lambda * 1 - \alpha^T \beta| \Rightarrow A$ 有特征值 $0((n - 1)\text{重})$ 和 $\alpha^T \beta$, 且特征值 0 的几何重数是 $n - 1$. 因此若 $\alpha^T \beta \neq 0$, 正好有 n 个特征向量; 若 $\alpha^T \beta = 0$, 只有 $n - 1$ 个特征向量.
11. 注意到 $\sigma^2(A) = A$. 从而有 2 个特征值 ± 1 , 对应的特征子空间为 $\text{span}\{E_{11}, \dots, E_{nn}, E_{ij} + E_{ji}, \dots\} (1 \leq i \neq j \leq n)$ 和 $\text{span}\{E_{ij} - E_{ji}, \dots\} (1 \leq i \neq j \leq n)$. 它们维数加起来是 n^2 , 因此可以对角化.
12. (1) 设一个非平凡不变子空间是 W , 并取 $\xi = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in W$. 从而 $A\xi = \lambda\xi + \sum_{i=2}^n a_i e_{i-1} \Rightarrow a_2 e_1 + \dots + a_n e_{n-1} \in W$. 如此往复作用下去, 可知 $e_1 \in W$. 这也表明不可能存在直和, 不变子空间比至少交于 $\text{span}\{e_1\}$.
- (2) 设 $a_s \neq 0$ 而 $a_{s+1} = \dots = a_n = 0$. 根据上问倒数第二步 $a_{s-1} e_1 + a_s e_2 \in W$ 知 $e_2 \in W$, 再根据倒数第三步知 $e_3 \in W$, 以此类推. 因此若 $\dim W = m$, 其必为 $\text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$. 从而 A 有 $n + 1$ 个不变子空间: $\{0\}, \text{span}\{e_1\}, \text{span}\{e_1, e_2\}, \dots, \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}, \mathbb{R}^n$.
13. 考虑集合 $M = \{\phi_i \in \text{End}_K(V) : \phi_i \phi_j = \phi_j \phi_i, \text{且 } \phi_i \text{ 可对角化}, \forall i, j \in I\}$, 然后对维数用数学归纳法. $n = 1, 2$ 时结论显然成立. 假设对一切维数小于 n 的线性空间成立, 下面考虑 n 维空间. 任取某非数乘变换 $\phi_0 \in M$, 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 是其特征值, 对应重数为 n_1, \dots, n_s , 且 $\sum_{j=1}^s n_j = n$, 特征子空间为 V_1, \dots, V_s . 与该分块单位矩阵可交换的矩阵必然也是相应的分块对角矩阵 (即 V_j 都是 ϕ_i 的不变子空间), 且所有 ϕ_i 在 V_j 上的限制都可交换. 因此由归纳假设, 存在 V_j 的一组基 $\xi_{j1}, \dots, \xi_{jn_j}$ 使得 $\phi_i|_{V_j}$ 在这组基下的矩阵都是对角阵. 然后把这 s 组基按顺序拼接起来即可.
14. 注意到 $A^2 - A = O$, 用类似于第 9 次习题课第 5 题的办法知 A 可对角化且有特征值 $0, 1$. 因此 A 相似于对角矩阵 $\text{diag}(I_r, O_{n-r})$. 由于相似矩阵具有相同的秩和迹, 因此 $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$.
15. 设 $\text{rank} M = r$, 则存在可逆矩阵 P, Q 使得 $PMQ = \text{diag}(I_r, O_{n-r})$. 由 $AM = MB$ 得到 $(PAP^{-1})\text{diag}(I_r, O_{n-r}) = \text{diag}(I_r, O_{n-r})(Q^{-1}BQ)$, 对 PAP^{-1} 和 $Q^{-1}BQ$ 作分块 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 代入得 $A_{11} = B_{11}, A_{21} = B_{12} = O$.
- 又由 $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$ 知 $A_{22} = B_{22}$. 最后对 $Q^{-1}XP^{-1}$ 作分块 $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, 计算知 $|A - MX| = |A_{11} - X_{11}||A_{22}| = |B_{11} - X_{11}||B_{22}| = |B - XM|$.

14 第 13 次习题课: 二次型, 矩阵的合同

14.1 问题

- 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$. (1) 将 $f(X)$ 写成 X^TAX 的形式, 其中 $X = (x_1, x_2, x_3)^T, A$ 是对称矩阵; (2) 求正交矩阵 $P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 和对角矩阵 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 满足 $A = PDP^T$ 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$; (3) 作变量的正交替换 $X = PY = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + y_3\beta_3$, 试用 Y 表示 $f(X)$; (4) 证明 $\lambda_3\|X\|_2^2 \leq X^TAX \leq \lambda_1\|X\|_2^2$, 并求出取等号条件; (5) 确定二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的类型和对称轴; (6) 用成对的行列变换法将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 \mathbb{Q} 上的合同标准型, 并将 A 写成 UDU^T 的形式, 其中 U 是 \mathbb{Q} 上的可逆矩阵, D 是 \mathbb{Q} 上的对角矩阵.
- 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的 SVD 分解, 并写出它的最佳秩 1 逼近和 Moore-Penrose 逆 A^+ .
- 写出下列矩阵在实数域上的相抵分类, 相似分类和合同分类.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 实正规矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{bmatrix}$ (即 $AA^T = A^T A$), 且 A_1, A_2 是方阵. 证明 $A_3 = 0$, 且 A_1, A_2 都实正规.
5. 设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, 对应的单位正交特征向量是 β_1, \cdots, β_n . (1) 证明: 对任意 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$ 且 $X \perp \langle \beta_1, \cdots, \beta_{k-1} \rangle$, 有 $\frac{X^T A X}{X^T X} \leq \lambda_k$; (2) 对任意 $n-k+1$ 维子空间 $V \subset \mathbb{R}^n$, 都有 $\max_{0 \neq X \in V} \frac{X^T A X}{X^T X} \geq \lambda_k$. 注意到两问都是可以取等号的, 因此 $\lambda_k = \min_{V \subset \mathbb{R}^n, \dim V = n-k+1} \max_{0 \neq X \in V} \frac{X^T A X}{X^T X}$.
- 【编者注】这是特征值的极小-极大刻画. 当然也有极大-极小刻画, 你能写出来吗?
6. 设 n 阶实对称矩阵 A, B 的特征值分别为 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n, \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$. 若 $A - B \succeq 0$, 证明 $\lambda_k - \mu_k \geq 0, \forall k$.
7. 证明: 线性空间 V 上的双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 是反对称的充要条件是 $f(\alpha, \alpha) \equiv 0$.
8. 已知数域 K 上的非平凡对称双线性函数 f 可以分解成两个线性函数 f_1, f_2 的积: $f(\alpha, \beta) = f_1(\alpha)f_2(\beta)$, 问是否存在线性函数 g 使得 $f(\alpha, \beta) = g(\alpha)g(\beta)$? 如果存在, 请说明理由; 如果不存在, 请举出反例, 并做适当修改使得命题成立.
9. A, B 是 n 阶实对称矩阵, 证明 $A, B, A+B$ 的正惯性指数 $p(A), p(B), p(A+B)$ 满足 $p(A) + p(B) \geq p(A+B)$.
10. A_1, \cdots, A_s 都是 n 阶实对称矩阵, $1 \leq s \leq n$, 且 $A_1 + \cdots + A_s = I_n$. 证明下述两个条件等价: (1) $A_i^2 = A_i, \forall i$; (2) $\text{rank} A_1 + \cdots + \text{rank} A_s = n$.

14.2 解答

1. (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (2) 特征值是 $1, 1, -2$, 对应单位特征向量 $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T, \beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T, \beta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$. (3) $f(X) = Y^T D Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$.
 (4) 正交变换不改变矩阵的模长, 因此等价于 $\lambda_3 \|Y\|^2 \leq Y^T D Y \leq \lambda_1 \|Y\|^2$, 取等号条件分别是与 β_3 同向和与 β_1 同向.
 (5) 由于特征值有两个正数和一个负数, 因此是单叶双曲面, 对称轴是 $X = t\beta_3, t \in \mathbb{R}$.

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}$$

$$(6) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} + = \frac{1}{2} * \textcircled{2} \\ -\frac{2}{7} \\ \textcircled{1} + = \frac{1}{2} * \textcircled{2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{3} + = \frac{1}{2} * \textcircled{1} \\ -\frac{2}{7} \\ \textcircled{2} - = \textcircled{1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{3} + = \frac{3}{2} * \textcircled{2} \\ -\frac{2}{7} \\ \textcircled{3} + = \frac{3}{2} * \textcircled{2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} :=$$

$$\begin{matrix} \textcircled{3} + = \frac{1}{2} * \textcircled{1} \end{matrix}$$

$$D. \text{ 由成对行列变换过程知 } U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 先求 AA^T 的非零特征值为 $6, 1$, 因此 $\sigma_1 = \sqrt{6}, \sigma_2 = 1, U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, 其最佳秩 1

$$\text{逼近是 } \sigma_1 u_1 v_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 2 \end{pmatrix}, A^+ = \sum_{i=1}^2 \sigma_i^{-1} v_i u_i^T = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. 相抵分类: $\text{rank}(A) = 2, \text{rank}(B) = 2, \text{rank}(C) = 3, \text{rank}(D) = 2$, 因此是 $\{A, B, D\}, \{C\}$.

相似分类: $\sigma(A) = \{2, 1, 0\}, \sigma(B) = \{\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}, 0\}, \sigma(C) = \{1, 1, 1\}, \sigma(D) = \{2, 1, 0\}$, 因此是 $\{A, D\}, \{B\}, \{C\}$.

合同分类: $\text{sgn} \sigma(A) = \{1, 1, 0\}, \text{sgn} \sigma(B) = \{1, 0, -1\}, \text{sgn} \sigma(C) = \{1, 1, 1\}, \text{sgn} \sigma(D) = \{1, 1, 0\}$, 因此是 $\{A, D\}, \{B\}, \{C\}$.

4. 比较 $AA^T = A^T A$ 的左上角知 $A_1 A_1^T + A_3 A_3^T = A_1^T A_1$. 两边取迹知 $\text{tr}(A_3 A_3^T) = 0 \Rightarrow A_3 = 0$. 从而 A_1 正规, 再比较右下角知 A_2 也正规.

5. (1) 设 $X = a_k \beta_k + \cdots + a_n \beta_n$ 后显然. (2) 记 $U = \langle \beta_1, \cdots, \beta_k \rangle$, 显然 $\forall \beta \in U$, 有 $\frac{\beta^T A \beta}{\beta^T \beta} \geq \lambda_k$; 又由于 $\dim U + \dim V = n+1 > n$, 因此必然存在 $0 \neq \gamma \in U \cap V$, 从而 $\max_{0 \neq X \in V} \frac{X^T A X}{X^T X} \geq \frac{\gamma^T A \gamma}{\gamma^T \gamma} \geq \lambda_k$.

6. 由 $A - B \succeq 0$ 知 $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha^T A \alpha \geq \alpha^T B \alpha$. 从而

$$\lambda_k = \min_{V \subset \mathbb{R}^n, \dim V = n-k+1} \max_{0 \neq X \in V} \frac{X^T A X}{X^T X} \geq \min_{V \subset \mathbb{R}^n, \dim V = n-k+1} \max_{0 \neq X \in V} \frac{X^T B X}{X^T X} = \mu_k.$$

7. 必要性: $f(\alpha, \alpha) = -f(\alpha, \alpha) \Rightarrow f(\alpha, \alpha) = 0$. 充分性: $f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) = f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) - f(\alpha, \alpha) - f(\beta, \beta) = 0$.
8. 反例是 $K = V = \mathbb{Q}, f(\alpha, \beta) = 2\alpha\beta$. 可做如下修改: $\exists k \in K$ 使得 $f(\alpha, \beta) = kg(\alpha)g(\beta)$.
 首先 $\exists \alpha_0, \beta_0$ 使得 $f(\alpha_0, \beta_0) = f_1(\alpha_0)f_2(\beta_0) = f_1(\beta_0)f_2(\alpha_0) \neq 0 \Rightarrow f_1(\alpha_0) \neq 0, f_2(\alpha_0) \neq 0$. 其次由对称性知 $f(\alpha_0, \beta) = f(\beta, \alpha_0) = f_1(\alpha_0)f_2(\beta) = f_1(\beta)f_2(\alpha_0) \Rightarrow f_2(\beta) = \frac{f_2(\alpha_0)}{f_1(\alpha_0)}f_1(\beta)$, 取 $k = \frac{f_2(\alpha_0)}{f_1(\alpha_0)}, g = f_1$ 即可.
9. 若 A, B 均半正定, 则 $A + B$ 也半正定, 从而 $p(A + B) = \text{rank}(A + B) \leq \text{rank}A + \text{rank}B = p(A) + p(B)$. 否则, 可设 $A = C^T \text{diag}(I_p, -I_{r-p}, O_{n-r})C$, 其中 C 是可逆矩阵, 并记 $A_1 = C^T \text{diag}(I_p, O_{n-p})C, A_2 = C^T \text{diag}(O_p, -I_{r-p}, O_{n-r})C$, 那么 $p(A) = p(A_1), A = A_1 + A_2$. 同理可以找到 B_1, B_2 . 那么 $A + B = (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2)$, 而 $A_1 + B_1$ 是半正定矩阵, $A_2 + B_2$ 是半负定矩阵, 因此 $p(A + B) \leq p(A_1 + B_1) \leq p(A_1) + p(B_1) = p(A) + p(B)$.
10. (1) \Rightarrow (2): $A_i^2 = A_i \Rightarrow A_i$ 相似于对角矩阵 $\text{diag}(I_{r_i}, O)$, 从而 $\sum_{i=1}^s \text{rank}A_i = \sum_{i=1}^s \text{tr}A_i = \text{tr}(\sum_{i=1}^s A_i) = \text{tr}(I_n) = n$.
 (2) \Rightarrow (1): 不妨设 $s \geq 2$. 令 $B_i = \sum_{j \neq i} A_j$, 则 $A_i + B_i = I_n$. A_i 是实对称矩阵, 因此存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T A_i Q = \text{diag}(D_i, O_{n-r_i})$, 其中 $D_i = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_i})$, 且 $\lambda_j \neq 0, r_i = \text{rank}A_i$. 于是 $Q^T B_i Q = I - Q^T A_i Q = \text{diag}(1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_{r_i}, 1, \dots, 1)$. 这表明 $\text{rank}(Q^T B_i Q) \geq n - r_i$. 另一方面又有 $\text{rank}(Q^T B_i Q) = \text{rank}B_i \leq \sum_{j \neq i} \text{rank}A_j = n - \text{rank}A_i = n - r_i$. 这表明啊 $\lambda_1 = \dots = \lambda_{r_i} = 1$, 因此 $A_i = Q^T \text{diag}(I_{r_i}, O_{n-r_i})Q \Rightarrow A_i^2 = A_i$.

15 第 14 次习题课: 正定矩阵

15.1 问题

7. A, B 是 n 阶正定矩阵, 证明: (1) AB 的特征值全大于零; (2) 若 A, B 可交换, 则 AB 也正定.
8. S 是 n 阶实对称正定矩阵. 证明: (1) 存在实对称正定矩阵 S_1 使得 $S_1^2 = S$, 并判断这样的 S_1 是否唯一; (2) 若 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 AS 的特征值都是实数.
9. Q 是 n 阶实对称正定矩阵, $x \in \mathbb{R}^n$, 证明 $0 \leq x^T(Q + xx^T)^{-1}x < 1$.
10. (Riesz 表示定理) 设 V 是实数域上的 n 维线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是正定双线性函数. 证明对于任意 $g \in V^*$, 存在唯一的 $\alpha \in V$ 使得 $g(\beta) = f(\alpha, \beta), \forall \beta \in V$.
11. A, B 是同阶实对称正定矩阵, $A \succ B$, 问是否一定有 $A^2 \succ B^2$? 若将条件和结论里的 \succ 同时改为 \succeq 呢?

15.2 解答

7. (1) 设 $A = C^T C, B = D^T D$, 其中 C, D 是可逆矩阵, 则 $AB = C^T C D^T D$. 由于 $C^T C D^T D$ 和 $C D^T D C^T$ 有相同特征值, 而后者是正定矩阵, 因此 AB 的特征值都大于零.
 (2) 因为 $AB = BA$, 所以 $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, 因此由 (1) 的结论知是正定矩阵.
8. (1) 设 $S = P D P^T$, 其中 P 是正交矩阵, D 是对角元均为正数的对角矩阵. 可自然地定义 $D_1 = D^{\frac{1}{2}}$, 则 $S_1 = P D_1 P^T$. 下面证唯一性. 若还存在 $S = S_2^2$, 则 S_1 和 S_2 具有相同的特征值, 也就会存在正交矩阵 P_1, P_2 使得 $S_1 = P_1 D_1 P_1^T, S_2 = P_2 D_1 P_2^T$. 那么 $S_1^2 = S_2^2 \Rightarrow D(P_1^T P_2) = (P_1^T P_2)D$. 记 $P = P_1^T P_2 = (p_{ij})_{n \times n}$, 比较等式两边元素知 $\lambda_i p_{ij} = p_{ij} \lambda_j$, 这也意味着 $\sqrt{\lambda_i} p_{ij} = p_{ij} \sqrt{\lambda_j} \Rightarrow D_1 P = P D_1 \Rightarrow S_1 = S_2$.
 (2) 只需注意到 $AS = AS_1^2$ 与 $S_1 A S_1$ 有相同特征值, 而后者实对称矩阵.
9. Q 正定, xx^T 半正定, 因此 $Q + xx^T$ 也正定, 其逆也正定, 从而左边不等式成立. 利用成对行列变换知 $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 合同于 $\begin{pmatrix} Q + xx^T & 0 \\ 0 & 1 - x^T(Q + xx^T)^{-1}x \end{pmatrix}$, 从而利用正定矩阵的主子式大于零知 $x^T(Q + xx^T)^{-1}x < 1$.
10. 考虑子空间 $M := \{x : g(x) = 0\}$, 则存在 $x_0 \in M^\perp$, 不妨设 $\|x_0\|_{f,2} = 1$. $\forall x \in V$, 其可分解为 $x = \frac{g(x)}{g(x_0)}x_0 + y$, 且满足 $g(y) = 0$. 等式两边同时和 x_0 作用于 f 得到 $f(x, x_0) = \frac{g(x)}{g(x_0)}f(x_0, x_0) + f(x_0, y) = \frac{g(x)}{g(x_0)}$. 因此取 $\alpha = g(x_0)x_0$ 即可.
11. 都不一定. (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. (2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢北京大学数学科学学院 23 级本科生陈全同学, 他极大地辅助了我的教学工作. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.