

数学分析 II 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 2 月 3 日

目录

1	第 1 次习题课: 定积分基本概念与可积性	3
1.1	问题	3
1.2	解答	3
2	第 2 次习题课: 定积分的性质与计算	4
2.1	问题	4
2.2	解答	4
3	第 3 次习题课: 定积分中值定理与定积分的应用	5
3.1	问题	5
3.2	解答	5
4	第 4 次习题课: 广义积分	6
4.1	问题	6
4.2	解答	6
5	第 5 次习题课: 正项级数	7
5.1	问题	7
5.2	解答	7
6	第 6 次习题课: 任意项级数, 数项级数的性质	7
6.1	问题	7
6.2	解答	7
7	第 7 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (1)	7
7.1	问题	7
7.2	解答	7
8	第 8 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (2)	7
8.1	问题	7
8.2	解答	7
9	第 9 次习题课: 幂级数的基本性质	7
9.1	问题	7
9.2	解答	7

10 第 10 次习题课: 泰勒展开与多项式逼近	7
10.1 问题	7
10.2 解答	7
11 第 11 次习题课: 傅里叶级数的基本性质	7
11.1 问题	7
11.2 解答	7
12 第 12 次习题课: 傅里叶级数的收敛性	7
12.1 问题	7
12.2 解答	7
13 致谢	7

1 第 1 次习题课: 定积分基本概念与可积性

1.1 问题

1. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x) \in R[a, b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$.
2. $f(x) \in R[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx > 0$. 证明 $\exists[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, s.t. $\forall x \in [\alpha, \beta], f(x) > 0$.
3. $f(x) \in R[a, b]$, 问 $\lfloor f(x) \rfloor$ 是否一定 $\in R[a, b]$?
4. 设非负函数 $f(x) \in C[a, b]$, 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}}$ 存在并求之.
5. $f(x) \geq 0, f''(x) \leq 0, x \in [a, b]$. 证明 $\max_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.
6. $n \in \mathbb{N}_+, f(x) \in C[a, b], \int_a^b x^k f(x)dx = 0, k = 0, 1, \dots, n$. 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个零点.
7. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \dots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \dots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1, \alpha > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.
9. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x), g(x) \in R[a, b], p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}$.
10. $f(x) \in R[a, b], A = \inf_{x \in [a, b]} f(x), B = \sup_{x \in [a, b]} f(x), g(y) \in C[A, B]$, 证明 $G(x) := g(f(x)) \in R[a, b]$.

1.2 解答

1. 显然 $f(x)$ 有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次 $\forall \epsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$, s.t. $\omega_{(x-\delta_x, x+\delta_x)} < \epsilon$. 由于 $\cup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x) \supset [a, b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$. 不妨设 $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. 可取分割点 $y_i \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1})$, 对于这个分割, $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon(b-a)$, 因此有可积性. 由于 $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)|dx \leq \epsilon(b-a)$, ϵ 的任意性知 $\int_a^b f(x)dx = 0$.
2. 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.
3. $f(x) = -\text{Riemann}(x) \in R[0, 1], \lfloor f(x) \rfloor = -\text{Dirichlet}(x) \notin R[0, 1]$.
4. 设 $M = \max_{x \in [a, b]} f(x), f(\xi) = M$. 由连续性, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), f(x) > M - \epsilon$. 因此当 n 足够大时成立 $M + 2\epsilon > ((b-a)M^n)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} > (2\delta(M-\epsilon)^n)^{\frac{1}{n}} > M - 2\epsilon \Rightarrow \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow M$.
5. 设 $f(\xi) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. 由题意知 $f(x)$ 是凹函数, 因此成立 $f(x) \geq \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}(x-a) + f(a), & x \in [a, \xi] \\ \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}(x-\xi) + f(\xi), & x \in [\xi, b] \end{cases} \Rightarrow \text{RHS} \geq \frac{2}{b-a} \left(\int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx \right) \geq \frac{2}{b-a} \left((\xi-a)\frac{f(\xi)+f(a)}{2} + (b-\xi)\frac{f(b)+f(\xi)}{2} \right) \geq \frac{2}{b-a} \frac{f(\xi)}{2} (\xi-a+b-\xi) = f(\xi) = \text{LHS}$.
6. $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists 1$ 零点, 记为 x_1 . $\int_a^b (x-x_1)f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists 2$ 零点, 记为 x_2 . $\dots \int_a^b [\prod_{i=1}^n (x-x_i)] f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists n+1$ 零点.
- 7.

$$\text{原式} = 2^{\alpha-\beta} \frac{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^\alpha + \frac{2}{n} \left(\frac{3}{n} \right)^\alpha + \dots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^\alpha \right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^\beta + \frac{2}{n} \left(\frac{4}{n} \right)^\beta + \dots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n}{n} \right)^\beta \right]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{定积分定义}} 2^{\alpha-\beta} \frac{\left(\int_0^2 x^\alpha dx \right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta dx \right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

8. $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\epsilon) < a_n < n^\alpha(1+\epsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \dots + N^\alpha) < \epsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \dots + a_N) < \epsilon, \left| \frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \dots + (a_n - n^\alpha)] \right| \leq \frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha + \dots + n^\alpha] \leq \frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^\alpha \leq \epsilon \int_0^1 x^\alpha dx + \epsilon = \frac{\epsilon}{\alpha+1} + \epsilon \leq 2\epsilon$. 这意味着 $\left| \frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i^\alpha \right) \right| \leq 4\epsilon \Rightarrow \text{原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$.
9. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} = 1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha \ln a + (1-\alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1-\alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$. 令 $\alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
也可以将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式证明.
10. 证法 a: $G(x)$ 的间断点集合是 $f(x)$ 间断点集合的子集, 因此其 Lebesgue 测度为 0, 从而可积.

证法 b: 由于 $g(y)$ 一致连续, 因此 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall |y_1 - y_2| < \delta, |g(y_1) - g(y_2)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 由于 $f(x) \in R[a, b]$, 因此 $\exists [a, b]$ 的分割 Δ , 使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\delta \epsilon}{4M}$, 其中 $M = \sup_{y \in [A, B]} |g(y)|$. 若 $\omega_i(f) < \delta$, 则 $\omega_i(G) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 若 $\omega_i(f) \geq \delta$, 其区间长度 $\sum_{i: \omega_i(f) \geq \delta} \Delta x_i$ 不会超过 $\frac{\epsilon}{4M}$. 因此 $\sum_{i=1}^n \omega_i(G) \Delta x_i = \sum_{i: \omega_i(f) < \delta} \omega_i(G) \Delta x_i + \sum_{i: \omega_i(f) \geq \delta} \omega_i(G) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{\epsilon}{4M} = \epsilon$. 这样对于任意 $\epsilon > 0$ 我们都找到了一个分割 Δ 使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i(G) \Delta x_i < \epsilon$.

2 第 2 次习题课: 定积分的性质与计算

2.1 问题

1. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, 证明 $\forall a, b \in \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b [f(x+h) - f(x)] dx = 0$.
2. (Riemann-Lebesgue 引理). $f \in R[a, b], g \in R[0, T], g(x+T) = g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$.
3. 计算积分 $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}, \alpha \in (0, \pi)$.
4. 计算积分 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx$.
5. 设 $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x \in [0, \frac{\pi}{2}], I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$, 求 I_n 的表达式并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{\ln n}$.
6. $f(x) \in C[a, b]$, 且对于任意的 $[\alpha, \beta] \subset [a, b], \exists \delta > 0, M > 0$, s.t. $|\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx| \leq M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x) \equiv 0$.
7. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) \equiv 0$.
8. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明 $f(x) = xf(1)$.
9. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x) \in R[0, x], \forall x \in (0, +\infty)$, 且 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ 也是 $(0, +\infty)$ 上的凸函数.
10. $f(x) \in C[-1, 1]$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$.

2.2 解答

1. WLOG $h < 1$. 由可积函数性质, 存在 $[a, b+1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $\int_a^{b+1} |f(x) - g(x)| dx < \epsilon$, 且 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in [a, b+1], |x - y| < \delta$, 成立 $|g(x) - g(y)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$. 从而 $|\int_a^b [f(x+h) - f(x)] dx| \leq \int_a^b |f(x+h) - g(x+h)| dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - f(x)| dx \leq \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx + \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)| dx \leq 3\epsilon$.
2. WLOG 设 $\int_0^T g(x) dx = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx$.

由 Riemann 积分定义, $\forall \epsilon > 0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq b \end{cases}$ 使得 $\int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)| dx < \epsilon$. 设

$M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx) dx| = |\int_a^b (f(x) - s_\epsilon(x))g(nx) dx + \int_a^b s_\epsilon(x)g(nx) dx| \leq \int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)| |g(nx)| dx + |\sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx) dx| < M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x) dx \leq M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x) dx = 0$, 这意味着 $\int_c^d g(x) dx = \int_c^{c+T} g(x) dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x) dx + \dots + \int_{c+kT}^d g(x) dx$ (设 $c+kT \leq d < c+(k+1)T$) $= \int_{c+kT}^d g(x) dx \leq MT$. 选择一个足够大的 n , 使得 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \epsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx) dx| \leq (M+1)\epsilon$.

$$3. I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(\frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha})^2 + 1} = \frac{1}{\sin \alpha} \arctan \left(\frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2 \sin \alpha}.$$

$$4. I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

5. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x] \cos 2x + \sin[(2n-2)x] \sin 2x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x](1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x]}{2 \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x \cos[(2n-2)x] + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\
&= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x] \cos x dx = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx \\
&= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1}
\end{aligned}$$

由于 $I_1 = 1$, 因此 $I_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}$.

6. 假设 $\exists f(x_0) > 0$. 由连续性, $\exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$, 从而 $\forall [\alpha, \beta] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$ (最后一个大于号成立只需令 $\beta - \alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

7. 构造 $G(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2$, $G'(x) = g(x)$ 单调递减, $g(0) = 0$, 因此 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且 $G(0) = 0, G(x) \geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

8. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^{\alpha} f(x) dx = \frac{\alpha^2}{2} f(1)$. 由集合 $\{q\alpha : q \in \mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha) = qf(\alpha)$, $\int_0^{\alpha} f(x) dx = f(\alpha) \frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha) \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2} f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$.

9. 凸函数开区间上连续 \Rightarrow 闭区间上可积. 做变换 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f\left(\frac{t}{x}\right) d\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux) du$, 从而 $F\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) =$

$$\int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i(ux_i)\right) du \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n t_i f(ux_i) du = \sum_{i=1}^n t_i F(x_i) \Rightarrow F(x) \text{ 凸}.$$

10. 往证 $\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \rightarrow 0$, 用极限定义. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon$. 设 $\max |f(x)| = M$.

$$\text{从而原式} = \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{\delta}^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3. \quad |I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \epsilon.$$

$$|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\delta^2)^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} \left(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}\right)^n. \text{ 注意到 } \frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1, \text{ 从而可以取足}$$

够大的 n 使得 $|I_2| < \epsilon$. 类似地放缩 I_3 , 从而 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$.

3 第3次习题课: 定积分中值定理与定积分的应用

3.1 问题

1. $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的递减正函数, 证明对于 $\forall 0 < \alpha < \beta \leq 1$ 都有 $\beta \int_0^{\alpha} f(x) dx \geq \alpha \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.
2. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$, 求 $f(x)$.
3. 已知 $A > 0, AC - B^2 > 0$, 求椭圆 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 的面积.
4. 证明极坐标下曲线 $r = r(\theta)$ 与 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为 $V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin \theta d\theta$.
5. 求双扭线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ 绕轴 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.
6. $f(x) \in C^1[0, 1], f(x) \in [0, 1], f(0) = f(1) = 0, f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减. 证明曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的弧长不大于 3.

7. 求圆的渐伸线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ 上 $A(a, 0), B(a, -2\pi a)$ 之间部分与直线 \overline{AB} 围成图形的面积.

8. 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?

9. 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r = e^{\theta}$ 在 $(r, \theta) = (1, 0)$ 和 $(r, \theta) = (e^{\phi}, \phi)$ 之间一段的重心坐标.

10. 试求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

11. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 用定积分第二中值定理证明 $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

12. (Dirichlet 判别法). 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. $\forall A \geq a, g(x) \in R[a, A]$ 且 $|\int_a^A g(x) dx| \leq M$ 恒成立. 证明极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) g(x) dx$ 存在.

3.2 解答

$$1. \text{ LHS} = \beta \int_0^{\alpha} f(x) dx \geq \beta \alpha f(\alpha) \geq \alpha(\beta - \alpha) f(\alpha) \geq \alpha \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \text{RHS}.$$

2. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + xf(y) + \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y} f(t)dt + \int_0^y f(t)dt + yf(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 两式相减得 $xf(y) + \frac{x^3y}{3} = yf(x) + \frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$. 经验证符合题意.

3. 设矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 有相似标准型 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 λ_1, λ_2 是方程 $\lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC-B^2) = 0$ 的两个根. 则原椭圆在新坐标系下的方程为 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$, 面积 $S = \pi \sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}} = \pi \sqrt{\frac{1}{AC-B^2}}$.

4. 对应 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的扇形面积 $dS = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$, 其质心位于 $\frac{2}{3}r(\theta)$ 处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为 $dV = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta 2\pi \frac{2}{3}r(\theta) \sin \theta = \frac{2\pi}{3}r^3(\theta) \sin \theta d\theta$. 两边积分得到结果.

5. 原命题等价于 $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases} x = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \cos \theta \\ y = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \sin \theta \end{cases}$, 则

面积 $S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta) \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = 8\pi a^2$.

6. 设 $f'(M) = 0$. 则周长 $C = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \leq \int_0^1 (1 + |f'(x)|) dx = 1 + \int_0^M f'(x) dx - \int_M^1 f'(x) dx = 1 + 2f(M) \leq 3$.

7. 直线 AB 的参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) = a \\ y = \psi(t) = t \end{cases}, t \in [-2\pi a, 0]$. 于是 $S = -\int_0^{2\pi} y(t) dx(t) - \int_{-2\pi a}^0 \psi(t) d\phi(t) = -\int_0^{2\pi} a(\sin t - t \cos t) a(t \cos t) dt + 0 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 + \pi a^2$.

8. 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_0^h \pi(\sqrt{R^2 - z^2})^2 dz = \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi(R^2 h - \frac{1}{3} h^3)$. 对应位移 $[h, h + dh]$ 所做的微功 $dW = gV(h)\rho dh$. 从而 $W = g \int_0^R V(h) dh = g(\frac{2}{3} \pi R^4 + \frac{5}{12} \pi R^4) = \frac{13}{12} g \pi R^4$.

9. $\bar{x} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \cos \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(\sin \phi + 2 \cos \phi) - 2}{5(e^\phi - 1)}, \bar{y} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(2 \sin \phi - \cos \phi) + 1}{5(e^\phi - 1)}$.

10. 焦点为 $(\frac{1}{2}, 0)$, 设过焦点的直线为 $x - \frac{1}{2} = ky$, 与抛物线交点为 y_1, y_2 , 则围成的面积为 $S = \int_{y_1}^{y_2} (ky + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}) dy = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1 + y_2 = 2k, y_1 y_2 = -1$. 则 $S = \frac{2}{3}(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k = 0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.

11. $f(x)$ 单调, $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理, $\int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) f(x) dx = f(a) \int_a^\xi (x - \frac{a+b}{2}) dx + f(b) \int_\xi^b (x - \frac{a+b}{2}) dx = f(a) \int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) dx + (f(b) - f(a)) \int_\xi^b (x - \frac{a+b}{2}) dx = (f(b) - f(a)) \frac{1}{2}(b - \xi)(\xi - a) \geq 0$.

12. 由极限定义, $\forall \epsilon > 0, \exists X > a, \text{s.t.} \forall x \geq X, |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{4M}$. 从而 $\forall A', A'' \geq X, |\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx| = |f(A') \int_{A'}^\xi g(x)dx + f(A'') \int_\xi^{A''} g(x)dx| \leq 2M(|f(A')| + |f(A'')|) \leq \epsilon$. 由柯西收敛定理知极限存在.

4 第 4 次习题课: 广义积分

4.1 问题

1.

5. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = 0$.

4.2 解答

1.

5. 做变换 $t = \frac{1}{x}$, 则 $\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt = \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt := I_1 + I_2$. 对于 I_1 , 由定积分第二中值定理知 $\exists \xi_A \in [1, A]$ s.t. $I_1 = \int_1^{\xi_A} \cos^n t dt$. 因此对于任意固定的 $A, n \rightarrow +\infty$ 时 $I_1 \rightarrow 0$. 对于 I_2 , 成立 $|I_2| \leq \int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{A}$. 因此 $\forall \epsilon > 0$, 选择 $A = \frac{2}{\epsilon}$, 则 $|I_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$, 并选择充分大的 n 使得 $|I_1| < \frac{\epsilon}{2}$, 此时 $|I| \leq \epsilon$, 由极限定义知结论成立.

5 第 5 次习题课: 正项级数

5.1 问题

5.2 解答

6 第 6 次习题课: 任意项级数, 数项级数的性质

6.1 问题

6.2 解答

7 第 7 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (1)

7.1 问题

7.2 解答

8 第 8 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (2)

8.1 问题

8.2 解答

9 第 9 次习题课: 幂级数的基本性质

9.1 问题

9.2 解答

10 第 10 次习题课: 泰勒展开与多项式逼近

10.1 问题

10.2 解答

11 第 11 次习题课: 傅里叶级数的基本性质

11.1 问题

11.2 解答

12 第 12 次习题课: 傅里叶级数的收敛性

12.1 问题

12.2 解答

13 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2024 春数学分析 II 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.