复变函数

北京大学 龚诚欣
https://wqgcx.github.io/

1 复数和复函数

1.1 复数域

复数的指数形式：$z=re^{i\theta}$。
Euler 公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$。

平面直角坐标系中 x,y 表示量可以用 $z,\bar{z}$ 表示，其中 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}, y=\dfrac{z-\bar{\bar{z}}}{2i}$。

1.2 复平面的拓扑

收敛条件：序列$\{z_n\}$收敛于 z_0 的充分必要条件是 $\mathrm{Re}z_n\to\mathrm{Re}z_0$，$\mathrm{Im}z_n\to\mathrm{Im}z_0$。
完备：任意 Cauchy 列都有极限。复数域是完备的。

连通：$S\subseteq C$ 称为连通，如果不存在 C 中开集 O_1,O_2 使得 $S\subseteq O_1\cup O_2, O_1\cap S, O_2\cap S$ 不空，但$(O_1\cap S)\cap(O_2\cap S)$空。
单连通：区域 D 中任意 Jordan 曲线 L，都存在 D 中的有界区域 E 使得$\partial E=L$。

1.3 复函数

可微：称 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\in C^k(D)$，iff $u(x,y),v(x,y)\in C^k(D)$。定义 $df=du+idv$。

偏导数：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，定义 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$。形式规定 $\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$，那么 $df(z)=\dfrac{\partial f}{\partial z}dz+\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$。实际上，考虑 $f(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2i})$，利用函数求导的链式法则，知 $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{1}{2i}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}-i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$。

成立 $\dfrac{\partial}{\partial z}(z)=\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{z})=1, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}(z)=\dfrac{\partial}{\partial z}(\bar{z})=0$； $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial z}=\overline{\left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)}, \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}=\overline{\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)}$。

1.4 扩充复平面(Riemann 球面)

扩充复平面：$\bar{C}=C\cup\{\infty\}$。特殊的邻域是 $D(\infty,\varepsilon)=\{\infty\}\cup\{z\in C\,|\,|z|>\varepsilon^{-1}\}$。

$\bar{C}$ 中任意序列均有收敛子列；$\bar{C}$ 中任意闭集均是紧集。

设 $g(z)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)$，则 $f'(\infty)\exists\Leftrightarrow g'(0)\exists$；若 $f(z)=\infty$，则 $f'(z)\exists\Leftrightarrow(\dfrac{1}{f(z)})'\exists$。

2 解析函数

2.1 解析函数

解析函数：$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\exists$。

实值函数解析的充要条件是其为常数函数。
单叶解析函数：单射；解析同胚：f(z)单叶解析，$f^{-1}(z)$也单叶解析。

单叶解析函数性质：f'(z)≠0；f(D)是区域；$(f^{-1})'=\frac{1}{f'}$。

2.2 Cauchy-Riemann 方程

f(z)=u(x,y)+iv(x,y)解析充要条件是 u,v∈C^1 且 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$。

f(z)=u(x,y)+iv(x,y)解析，则 u,v 调和。
共轭调和函数：如果 u,v 调和且满足 C-R 方程。
单连通区域上的调和函数必定存在共轭调和函数，且函数间只差常数。

Laplace 算子：$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}$。

C-R 方程：f=u+iv，$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$。这表明对于 f(z, $\bar{z}$)，解析函数不依赖于 $\bar{z}$。

设 D 单连通，f(z)是 D 上关于实变量 x 和 y 二阶连续可导且处处不为零的解析函数，则存在 D 上解析函数 g(z)使得 $e^{g(z)}=f(z)$。

2.3 导数的几何意义

设 f=u+iv 在区域 D 上解析，则$|f'(z_0)|^2$是映射(x,y)→(u,v)在(x_0,y_0)处的 Jacobi 行列式。

这也意味着 $S(f(D))=\iint_D|f'(z)|^2\,dxdy$。

推论：f(z)在 D 上解析，f'(z)处处连续，若 $f'(z_0)\neq 0$，则存在 z_0 的邻域 K 使得 1° f(K)开；2° f：K→f(K)是一一映射；3° f^{-1} 在 f(K)上解析。
保角性：若 f(z)是解析函数且 f'(z)≠0，则 f(z)保角（共形）。

2.4 幂级数

判别法：$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$，其收敛半径为 $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$。

2.5 多值函数与反函数

单值解析分支：对一多值函数 F(z)，如果存在 D 上一解析函数 f(z)∈F(z)，则称 f(z)是 F(z)的单值解析分支。

定理：$\Omega=\{z\in C,z\neq 0\mid\arg z\in[0,2\pi)\}$，则 ln z = ln|z| + i argz 是 Ln z 的解析分支；

若 g(z)是 Ln z 的解析分支，则 g(z) = ln|z| + i argz + $2k\pi i$，k∈Z。

2.6 分式线性变换

分式线性变换：$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},a,b,c,d\in C$，且 $ad-bc\neq 0$。这是一个 $\overline{C}\to\overline{C}$ 的单

叶解析满射，且保角。

以$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(C) \mid \det(\cdot)=1\right\}$来表示分式线性变换群，这是 2 对 1 的线性映射。

$\overline{C}$中任意给定 $z_1,z_2,z_3,\omega_1,\omega_2,\omega_3$，一定存在唯一的分式线性变换使得$f(z_i)=\omega_i$。

基本分式线性变换：旋转、伸缩、平移、反演（z→1/z），可以生成所有分式线性变换。

分式线性变换把圆和直线变成圆或直线。

设 K: $Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C=0$是圆或直线，则$S_K(z)=\dfrac{-B\overline{z}-C}{A\overline{z}+\overline{B}}$称为 z 关于 K 的反演，

即是$Az_1\overline{z_2}+\overline{B}z_1+B\overline{z_2}+C=0$。

如果分式线性变换ω=L(z)将圆 K_1 变为圆 K_2，则将其关于 K_1 的对称点变为关于 K_2 的对称点，即分式线性变换保持对称性不变。其中，平面内两点关于直线 K 的对称的充要条件是 K 是连接直线段的垂直平分线；关于圆 K 对称的充要条件是在圆心出发的同一射线上且到圆心距离乘积等于圆半径的平方。

交比：$(z_1,z_2,z_3,z_4)=\dfrac{\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}}{\frac{z_1-z_4}{z_4-z_2}}$。分式线性变换保持交比不变，即是考察：

$(z,z_2,z_3,z_4)=(L(z),1,0,\infty)\Rightarrow L(z)=\dfrac{z-z_3}{z-z_4}\dfrac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$，其中 $L(z_2)=1$，$L(z_3)=0$，$L(z_4)=\infty$。

将单位圆盘 D(0,1)变为自身的分式线性变换：$e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$。

将上半平面变为单位圆盘的分式线性变换：$e^{i\theta}\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$。

将上半平面变为上半平面的分式线性变换：$\dfrac{az+b}{cz+d},a,b,c,d\in R,ad-bc>0$。

3 Cauchy 定理和 Cauchy 公式

3.1 路径积分

方向性、线性性、可加性、绝对值不等式。

3.2 Cauchy 定理

设 D 是 C 中以有限条逐段光滑曲线为边界的有界区域，f(z)在$\overline{D}$上连续，D 上解析，则$\int_{\partial D} f(z)dz=0$。

3.3 Cauchy 公式

设 D 是 C 中以有限条逐段光滑曲线为边界的有界区域，f(z)在 $\overline{D}$ 上连续，D 上解析，则 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{w-z}dw$。

函数 f(z)在区域 D 上解析的充分必要条件是在任意点都可以展开为幂级数。

Morera 定理：区域 D 上的连续函数解析的充要条件是任意逐段光滑曲线围成的有界区域 K，$\overline{K}\subset D$，就有 $\int_{\partial K} f(w)dw=0$。此定理证明过程也保证了单连通区域上的解析函数必有原函数。

区域 D 上的解析函数列在 D 内闭一致收敛于 f(z)，则 f(z)解析。

函数 $f(z)$原函数存在的充要条件是 $\forall\gamma,\int_{\gamma} f(z)dz=0$。

高阶导计算公式：$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$。

3.4 利用幂级数研究解析函数

f(z)在区域 D 内解析，若有 z_0 使得任意阶导数均为 0，则 f(z)恒为 0。

对于不为常数的解析函数，$\forall z_0\in D$，存在正整数 m 使得 $f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$，$f^{(m)}(z_0)\neq 0$，这时 $f(z)-f(z_0)=(z-z_0)^m g(z)$，g(z)解析，且 $g(z_0)\neq 0$。这就说明其零点是孤立性的，即是对于区域 D 上的解析函数 f,g 存在收敛点列使得 $f(z_n)=g(z_n)$，且收敛到点 $z_0\in D$，那么 f=g（解析函数唯一性定理）。

开映射定理：f(z)是区域 D 上不为常数解析函数，则 f(z)将 D 中开集映成开集。

最大模原理：f(z)是区域 D 上不为常数的解析函数，则|f(z)|在 D 内无最大值点。

代数学基本定理：复系数多项式必有根。

3.5 Cauchy 不等式

设 f(z)在区域 D 上解析，在 D 上有|f(z)|≤M，则 $\forall z_0\in D$，$0<r\leq \mathrm{dist}(z_0,\partial D)$，成立 $|f^{(n)}(z_0)|\leq\frac{n!M}{r^n}$。

Liouville 定理：f(z)在 C 上解析且有界，则 f(z)为常数。这也是说，复平面 C 与 D(0,1)不能解析同胚。

Weierstrass 定理：f(z)是不为常数的解析函数，那么 f(C)在 C 中稠密。

Picard 小定理：f(z)是超越整函数，那么集合 C-f(C)至多包含一个点，称为 Picard 额外值。

平均值定理：对于解析函数有 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta=\frac{1}{\pi R^2}\iint_{D(z_0,R)} f(z)dS$，取模后称为平均值不等式。

3.7 Schwarz 引理和非欧几何介绍

Schwarz 引理：f(z)是单位圆盘 D(0,1)到自身解析映射，满足 f(0)=0，则

1° $|f(z)|\leq|z|$，且 $|f'(0)|\leq 1$；

2° 存在 $z_0\neq 0$ 使得 $|f(z_0)|=|z_0|$或 $|f'(0)|=1$ 的充要条件是 $f(z)=e^{i\theta}z$。

如果 g(z)是单位圆盘到自身的解析自同胚，则 $g(z)=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}, z_0\in D(0,1)$。

Schwarz 引理：如果 f(z)是单位圆盘 D(0,1)到自身解析映射，则有

$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \le \left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}z_2}\right|$，取等号条件是 $f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$(是解析自同胚)。

Poincare 圆盘 D(0,1)，曲线γ:[a,b]→D(0,1)，分段光滑，弧长微元 ds=|dz|/(1-|z|^2)，

$l(\gamma)=\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|\,dt}{1-|\gamma(t)|^2}$，距离 d($z_1$,$z_2$)=inf{$l$(γ)|γ(0)=$z_1$,γ(1)=$z_2$}在全纯自同胚下保持不变，因此 f 把测地线变为测地线。

d(0,z)=$\frac{1}{2}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}$，d($z_1$,$z_2$)=$\frac{1}{2}\ln\frac{1+|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}|}{1-|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}|}$。测地直线包括直径及其在全纯自同胚下的像。

测地线：d(γ(t_1),γ(t_2))=l(γ)from t_1 to t_2。若 t_1=-∞，t_2=+∞，称为测地直线。

4 Laurent 级数

4.1 Laurent 级数

称 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{1}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ 为 Laurent 级数，前者为主部，后者为正则部分。

若令 a_{-n}=b_n，则改写为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ 。

函数 f(z)在圆环区域 D(z_0,r,R)内解析的充要条件是可展开为关于(z-z_0)的 Laurent 级数。

4.2 孤立奇点的分类

如果函数 f(z)在 z_0 的空心邻域上解析，则称 z_0 是 f(z)的孤立奇点。

设 z_0 是 f(z)的孤立奇点，则：

1° 如果存在 c∈C 使得 f(z)在 z 邻域上解析，则称 f(z)可解析开拓到 z_0 处，并称 z_0 为 f(z)可去奇点；

2° 如果不能，但 1/f(z)可以解析开拓到 z_0 处，则称为极点；

3° 如果都不能，则成为本性奇点。

设 z_0 是 f(z)的孤立奇点，则下面条件等价：

1° z_0 是可去奇点；2° lim f(z)存在；3° f(z)在 z_0 邻域上有界；4° f(z)在 z 的 Laurent 展式主部为 0。

设 z_0 是 f(z)的孤立奇点，则下面条件等价：

1° z_0 是 f(z)的极点；2° z_0 是 1/f(z)的零点；3° lim f(z)=+∞；4° f(z)在 z_0 处 Laurent 展式的主部中有且仅有有限项不为零。

设 z_0 是 f(z)的孤立奇点，则下面条件等价：

1° z_0 是 f(z)的本性奇点；2° lim f(z)不存在；3° f(z)在 z_0 处 Laurent 展式有无穷多项不为零。

Weierstrass 定理：如果 z_0 是 f(z)本性奇点，则∀ε>0，f(D_0(z_0,ε))在 C 中稠密。

Picard 大定理：设 z_0 是 f(z)本性奇点，f(z)在 D_0(z_0,R)上解析，则∀0<ε<R，集

合 C-f($D_0(z_0,\varepsilon)$)中最多包含一个点。
f：C→C 为全纯自同胚的充要条件是 f(z)=az+b。
4.3 亚纯函数
设 D 为$\overline{C}$中区域，f(z)是 D 上的函数。若 f(z)在 D 内除了可能有极点外处处解析，则称 f(z)为 D 上的亚纯函数。
f 和 g 是区域 D 上亚纯函数，如果存在 D 中收敛列{z_n}使得 f(z_n)=g(z_n)且极限点在 D 内，则 f=g。
Mittag-Leffler 定理：设{z_n}是 C 中给定的两两不等的点列，lim z_n=∞，对于每一个 z_n，给定$L_n(z)=\dfrac{a_{n_1}}{z-z_n}+\cdots+\dfrac{a_{n_{m_n}}}{(z-z_n)^{m_n}}$，则存在 C 上的亚纯函数 f(z)，使得 f(z)在 z_n 处 Laurent 展式的主部为 $L_n(z)$。

$\overline{C}$上的亚纯函数都是有理函数。

f：$\overline{C}\to\overline{C}$是全纯自同胚的充要条件是 f(z)是分式线性变换。
设{z_n}是给定序列，lim z_n=∞，{m_n}是给定正整数列，则存在 C 上解析函数 f(z)使得 f(z)以序列{z_n}为其零点，且对应阶数为 m_n。
C 上的亚纯函数可以表示为解析函数的商。
5 留数
5.1 留数的概念与计算
f(z)在 $D_0(z_0,R)$内解析，函数 f(z)在 z_0 处的留数，记作 Res(f,z_0)，定义为 Res(f,z_0)=$\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}f(z)dz=a_{-1}$，∞处为$-\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)dz=-a_{-1}$。

计算公式：m 阶极点 z_0，Res(f,z_0)=$\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$。

留数定理：设 D 是$\overline{C}$中以有限条逐段光滑曲线为边界的区域，$\infty\notin\partial$D，$z_1,\cdots,z_n$ 位于 D 内部，除去 $z_1,\cdots,z_n$ 外解析、连续，则$\int_{\partial D}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res(f,z_k)$。

设函数 f(z)在$\overline{C}$内除去 $z_1,\cdots,z_n$ 外是解析的，则有$\sum_{k=1}^{n}Res(f,z_k)+Res(f,\infty)=0$。

5.2 辐角原理与 Rouche 定理
辐角原理：设 f(z)在区域 D 内亚纯，Γ是 D 内一条可求长的简单闭曲线，其内部⊂D，再设 f(z)在Γ上无零点和极点，则$\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$，N 是Γ内部的零点和极点个数（记重数）。（沿着曲线幅角变化量）
Rouche 定理：设Γ是 D 内可求长的 Jordan 曲线且其内部属于 D，再设 f(z)和 g(z)

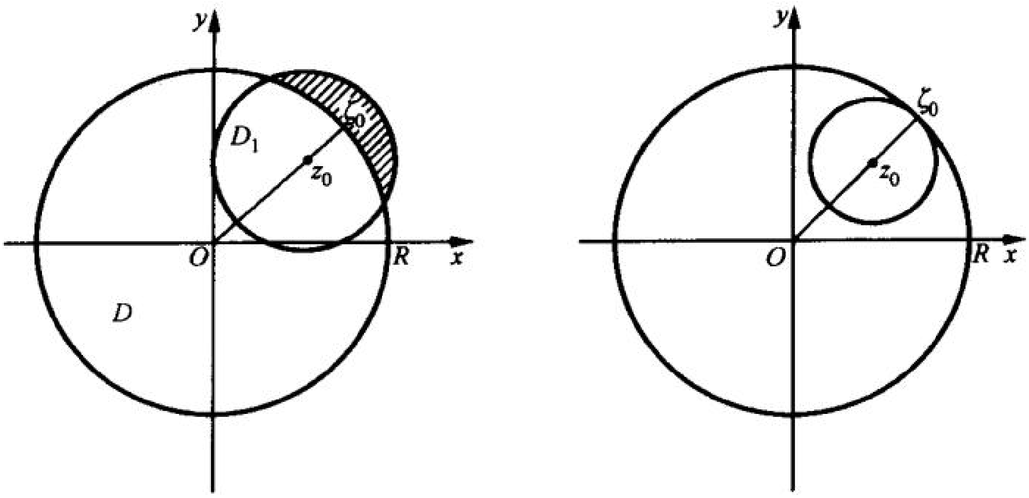
在 D 内解析，在Γ上满足|g(z)|＜|f(z)|，则 f(z)和 f(z)+g(z)在Γ内零点个数（记重数）相同。
分歧覆盖定理：f(z)在区域 D 内解析，z_0∈D，w_0=f(z_0)。设 z_0 是 f(z)-w_0 的 m 阶零点，则存在 r＞0 和δ＞0，使得对于任意 w∈D(w_0,r)，f(z)-w 在圆盘 D(z_0,δ)内有且恰有 m 个不同的零点。

设 D 是 $\overline{C}$ 中以有线条逐段光滑曲线为边界的区域，∞∉∂D，f(z)是 $\overline{D}$ 的邻域上的亚纯函数，且 f(z)在∂D 上无零点和极点。再设 f(z)在 D 内的零点为 $z_1,\cdots,z_n$，并设 z_j 是 f(z)的 a_j 阶零点；极点是 $w_1,\cdots,w_m$，w_j 是 f(z)的 b_j 阶极点。则对任意 $\overline{D}$ 邻域上的解析函数 g(z)，有 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n} a_j g(z_j)-\sum_{j=1}^{m} b_j g(w_j)$。

7 解析开拓

7.1 解析开拓的幂级数方法与单值性定理

区域 D 上的解析函数 f(z)不能解析开拓到比 D 更大的区域，则称 f(z)为 D 上的完全解析函数，同时称 D 为 f(z)的自然定义域，∂D 称为 f(z)的自然边界。
D 为 f(z)的自然定义域的充要条件是∀z_0∈D，f(z)在 z_0 处展开的幂级数收敛半径为 dist(z_0,∂D)。



前者能解析开拓的称为直接解析开拓，ζ_0 称为正则点；反之表明 ζ_0 的任何邻域都不存在解析开拓，称为奇异点。
幂级数收敛半径为 R，则在圆周上至少有一个奇异点。
正则点集合是开集，奇异点集合是闭集。

定义 2 设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中以 a,b 为端点的曲线. $f_0(z)$ 是区域 $\Delta_0=D(a,R)$ 上给定的解析函数，以 $(f_0(z),\Delta_0)$ 记之，并将之称为一**解析元素**. 我们称 $f_0(z)$ 可以**沿曲线 γ 由 a 解析开拓到 b**，如果存在一串解析元素 $(f_k(z),\Delta_k=D(a_k,r_k))$，$k=1,2,\cdots,n$，使得 $f_k(z)$ 是 Δ_k 上的解析函数，满足：

(1) 每个 Δ_k 的圆心 a_k 都落在 γ 上，且 a_k 落在 Δ_{k-1} 内，$a_n=b$；

(2) 在 $\Delta_k\cap\Delta_{k-1}$ 上，$f_k(z)=f_{k-1}(z)$.

解析元素 $(f_n(z),\Delta_n)$ 称为 $(f_0(z),\Delta_0)$ **沿曲线 γ 由 a 到 b 的解析开拓**.

单值性定理：设 D 是一个单连通区域，圆盘 $\Delta\subset D$，其圆心为 a，$(f(z),\Delta)$ 是一个解析元素。如果 $(f(z),\Delta)$ 可沿 D 内由 a 出发的任何一条曲线 γ 进行解析开拓，则存在 D 内的单值解析函数 F(z)，使得在 a 的邻域内 F=f；这也是说，对单连通区域，沿曲线的解析开拓与曲线的选取无关。

7.3 对称原理

设 D 是一个区域，且位于实轴的一侧，其边界含有实轴上的区间 γ，D' 是 D 关于实轴的对称区域，再设函数 f(z) 在 D 内解析，在 $D\cup\gamma$ 内连续且在 γ 上取实值，则存在 $D\cup\gamma\cup D'$ 内的解析函数 F(z)，使得在 D 内 F(z)=f(z)。

设 D 为圆周 Γ 所围圆盘内的区域，D 的边界含有 Γ 上的圆弧 γ，D' 为 D 关于 Γ 的对称区域。再设 f(z) 在 D 内解析，在 $D\cup\gamma$ 上连续，且 $f(\gamma)$ 落在一个圆周 Γ' 上。若圆周 Γ' 的圆心 $b\notin f(D)$，则 f(z) 课解析开拓到区域 $D\cup\gamma\cup D'$；otherwise 可亚纯开拓到区域 $D\cup\gamma\cup D'$。

如果以 S_Γ 和 $S_{\Gamma'}$ 分别表示关于圆周 Γ 和 Γ' 的对称映射，则 $D'=S_\Gamma(D)$，$S_{\Gamma'}\circ f\circ S_\Gamma$ 是 f 在 D' 上的解析开拓，其将 $D'=S_\Gamma(D)$ 映为 $S_{\Gamma'}(f(D))$. 定理 2 因此而称为**对称原理**.

Γ 函数在 Re(z)＞0 的解析开拓：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{(s-1)\ln x}e^{-x}dx$。$s\Gamma(s)=\Gamma(s+1)$。

Γ 函数可以解析开拓到 C 上的亚纯函数，奇点为 0,-1,-2,⋯，留数为 $(-1)^n/n!, s=-n$。

$\Gamma_m(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{s+1}\cdots\frac{1}{s+m-1}\Gamma(s+m)$ 在 Re(s)＞-m 有定义，亚纯。

定理：$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$。

$\Gamma(s)\varsigma(s)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$。定理：Re(s)＞1，$\varsigma(s)=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz$，其中 C 是不包含原点和实半轴的象鼻子曲线。从而 $\varsigma(s)$ 可亚纯开拓到复平面上，只有一个单极点 s=1，此时留数为 1。

8 共形映射

8.1 共形映射的性质

D 是区域，f 是 D 上的单叶解析函数，f(D)区域，f:D→f(D)共形。
定理：设 f 是 D 上的单叶解析函数，则 f'(z)≠0 恒成立。
定理：f:D→C 是单叶解析函数，则 f 保持区域的单连通性。
定理：{f_n(z)}是 D 上的解析函数列，且在 D 上内闭一致收敛到 f(z)，且 f(z)不恒为 0。设γ是分段光滑的简单闭曲线，内部⊂D，f(z)在γ上≠0，则存在 N，当 k ≥N 时，f_k(z)与 f(z)在γ内零点个数相同。
定理：(Hurwitz){f_n(z)}是 D 上的单叶解析函数列，且在 D 上内闭一致收敛到 f(z)。则 1° f(z)是常数；2° f(z)单叶。

8.2 Riemann 存在定理

Riemann 存在定理：设 D⊂C 是单连通区域，D≠C，则∀z_0∈D，θ_0 实，存在唯一共形 f，满足 f(z_0)=0，arg f'(z_0)=θ_0。
定义：F 是 D 上的解析函数列，称 f_k(z)→f(z)，假如对任意紧集 K⊂D，有 f_k(z) 在 K 上一致收敛到 f(z)。
定理：(Montel)设 F 是 D 上内闭一致有界解析函数族，则存在{f_k(z)}⊂F，存在子列以及 D 上解析函数 f(z)，使得 f_{kj}(z)→f(z)。

8.3 边界对应原理

边界对应：设 D 的边界是简单闭曲线，f 是 D 到单位圆盘的共形映射，则 f 可以延拓为 $\overline{\mathrm{D}} \to \overline{\mathrm{D}(0,1)}$ 的同胚映射。

8.4 共形映射的例子

上半平面 H，D=H−[0,ih]到 H 的共形映射是 $w=\sqrt{z^2+h^2}$ 。

$f(z)=z^{\alpha}$ 是上半平面 H 到 S_α={z|0<argz<απ}的共形映射。

D 是圆周|z−1/2|=1/2 和虚轴围成的无解区域，则 $e^{\frac{\pi i}{z}}$ 是 D 到 H 的共形映射。

D={|z−1|<2}∩{|z+1|<2}到 H 的共形映射是 $w=-\left(\frac{z-\sqrt{3}i}{z+\sqrt{3}i}\right)^{\frac{3}{2}}$。

D={Imz>0,−π/2<Rez<π/2}到 H 的共形映射是 $-\frac{1}{2}(ie^{iz}+\frac{1}{ie^{iz}})$。

$f(z)=\int_0^z \frac{ds}{(1-s^2)^{1/2}}$ 是 H 到 D={Imz>0,−π/2<Rez<π/2}的共形映射。

Schwarz-Christoffel 公式：设 p 是 C 中的凸 n 边形，$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是顶点，z_k 内角$\alpha_k\pi$，外角$\beta_k\pi=\pi-\alpha_k\pi$，则$\beta_1+\cdots+\beta_k=2$。

S-C 积分：$F(z)=\int_0^z \prod_{k=1}^{n}(s-s_k)^{-\beta_k}ds$，z∈D(0,1)，$s_1,\cdots,s_n\in S^1$。

结论：设 F_1:D(0,1)→P(凸 n 边形)共形，则存在 c_1,c_2∈C，使 $F_1(z)=c_1F(z)+c_2$。

6 调和函数

6.1 调和函数的基本性质

平均值原理：$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta$。
注：u 连续，对Ω区域内平均值原理成立，则 u 调和。
最大最小值原理：非常值调和函数在区域 D 内取不到最大最小值。
6.2 圆盘上的 Dirichlet 问题
Dirichlet 边值问题：△u=0，u(z)=f(z)(z∈∂D)。给定 f，是否有 u 的解。
Dirichlet 原理：H={w∈C^1(D)，w(z)=f(z)(z∈∂D)}。存在唯一 u∈H，满足 I(w)≥I(u)，任意 w∈H，其中$I(w)=\frac{1}{2}\int_D|\nabla w|^2\,dxdy$，且 u 是 Dirichlet 边值问题的解。

定理：设 D={z| |z|＜1}，f(z)在∂D 上连续，则$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)d\theta$是 Dirichlet 边值问题的解（Poisson 公式）。
定理：f:D_1→D_2共形，u(z)是 D_2 上的调和函数，则 w(z)=u(f(z))是 D_1 上调和函数。
推论：f(x)是 R 上有界连续函数，则 u(x,y)=$\frac{y}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(s)}{(s-x)^2+y^2}ds$是 Dirichilet 边值问题在上半平面的解。