

高等数学 A II 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2023 年 2 月 21 日

目录

1 第 1 次习题课: 二重积分	3
1.1 问题	3
1.2 解答	3
1.3 补充 (不要求掌握!)	3
2 第 2 次习题课: 三重积分	4
2.1 问题	4
2.2 解答	4
2.3 补充 (不要求掌握!)	5
3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式	5
3.1 问题	5
3.2 解答	6
3.3 补充 (不要求掌握!)	7
4 第 4 次习题课: 曲面积分	7
4.1 问题	7
4.2 解答	7
4.3 补充 (不要求掌握!)	8
5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式	8
5.1 问题	8
5.2 解答	9
5.3 补充 (不要求掌握!)	10
6 第 6 次习题课: 初等积分法	10
6.1 问题	10
6.2 解答	11
6.3 补充 (不要求掌握!)	11
7 第 7 次习题课: 解的存在唯一性, 高阶线性微分方程	11
7.1 问题	11
7.2 解答	12
7.3 补充 (不要求掌握!)	13

8 第 8 次习题课: 常数变易法, 常系数线性微分方程组	13
8.1 问题	13
8.2 解答	13
8.3 补充 (不要求掌握!)	14
9 第 9 次习题课: 数项级数	14
9.1 问题	14
9.2 解答	14
9.3 补充 (不要求掌握!)	15
10 第 10 次习题课: 数项级数, 函数项级数	15
10.1 问题	15
10.2 解答	15
10.3 补充 (不要求掌握!)	15
11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数	15
11.1 问题	15
11.2 解答	15
11.3 补充 (不要求掌握!)	15
12 第 12 次习题课: 广义积分, 含参积分	15
12.1 问题	15
12.2 解答	15
12.3 补充 (不要求掌握!)	15
13 第 13 次习题课: 含参广义积分, 傅里叶级数	15
13.1 问题	15
13.2 解答	15
13.3 补充 (不要求掌握!)	15
14 第 14 次习题课: 傅里叶级数	15
14.1 问题	15
14.2 解答	15
14.3 补充 (不要求掌握!)	15
15 综合复习	15
15.1 问题	15
15.2 解答	15
16 致谢	15

1 第 1 次习题课: 二重积分

1.1 问题

1. 累次积分变序: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx, \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy$.
2. 求 $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 与 xoy 平面所围的体积.
3. 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$.
4. 区域 D 由 $y = x^3, y = 0, x = 1$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{1-x^4} d\sigma$.
5. 区域 D 由 $y = 0, x = 1, y = x$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} d\sigma$.
6. 区域 D 由 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $y = -x^2 + 1, y = x^2 - 1$ 两线在 $|x| \leq 2$ 部分所围成, 计算积分 $I = \iint_D (x^2 + y^3) d\sigma$.
7. $0 \leq p(x) \in R[a, b], f(x), g(x)$ 于 $[a, b]$ 单调递增, 证明 $\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$.
8. 计算极限 $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$.

1.2 解答

1. 这种题最好画图. 答案是 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy, \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f(x, y) dx$.
2. 区域 $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, D_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\}$. 则体积 $V = \iint_D z d\sigma = 4 \iint_{D_0} z d\sigma = 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 4 \int_0^a \frac{2}{3} \frac{b}{a^3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \dots$ (换元法) $\dots = \frac{\pi}{2} ab$.
3. 区域 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$. 累次积分时先对 x 积分, 则原积分 $= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy = 1 - \sin 1$.
4. $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{1-x^4} dy = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} dx = -\frac{1}{6} (1-x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.
5. $I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{4x^2-y^2}} \sqrt{4x^2-y^2} dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y}{2} \sqrt{4x^2-y^2} + \frac{4x^2}{2} \arcsin \frac{y}{2x} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4x^2-y^2}} = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} \sqrt{3x^2} + 2x^2 \arcsin \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$.
6. 首先, 因为积分区域关于 $y = 0$ 对称, 所以 $\iint_D y^3 d\sigma = 0$. 记 D_1 为 D 的第一象限部分, $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}, D_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x^2 + 1\}$. 因此 $I = 4 \iint_{D_1} x^2 d\sigma = 4 \iint_{D_2} x^2 d\sigma - 4 \iint_{D_3} x^2 d\sigma = 4 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 dy - 4 \int_0^1 dx \int_0^{-x^2+1} x^2 dy = 4 \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx - 4 \int_0^1 x^2 (1-x^2) dx = 4\pi - \frac{8}{15}$.
7. 利用二重积分.

$$\begin{aligned} \text{RHS} - \text{LHS} &= \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b p(y) dy \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(y) f(y) dy \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b \int_a^b [p(x)p(y)f(x)g(x) - p(x)p(y)f(y)g(x)] d\sigma = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(x)[f(x) - f(y)] d\sigma \end{aligned}$$

同理 $\text{RHS} - \text{LHS} = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y) - f(x)] d\sigma$. 两式相加得 $2(\text{RHS} - \text{LHS}) = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)[g(x) - g(y)][f(x) - f(y)] d\sigma \geq 0$.

8. 记 $I(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$, 则 $I^2(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-a}^a e^{-y^2} dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} d\sigma$. 记区域 $D(a) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 积分 $J(a) = \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2} d\sigma$. 由简单的二维区域包含关系知 $J(a) \leq I^2(a) \leq J(\sqrt{2}a)$. 再利用二重积分极坐标换元知 $J(a) = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=a} = \pi(1 - e^{-a^2})$. 因此 $\lim_{a \rightarrow +\infty} J(a) = \pi$. 由夹逼原理知 $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = \sqrt{\pi}$.

1.3 补充 (不要求掌握!)

类似于累次极限和整体极限的关系, 累次积分和二重积分也不具有相互决定性, 即二重积分存在并不保证累次积分存在. 例如设 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 是区间 $[0, 1]$ 上的所有有理数组成的序列, 定义矩形 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 上的函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{if } x = x_k, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$. 可以证明 $f(x, y) \in R(D)$ 且 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$. 但是, 由于 $f(x_k, y) = \frac{1}{k} \text{Dirichlet}(y)$ 导致 $\int_0^1 f(x_k, y) dy \not\equiv 0$, 所以 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 不能使用累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ 计算. 但是若固定 y , $f(x, y)$ 要么是 Riemann 函数要么恒为 0, 积分值都是 0, 因此 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 可以使用累次积分 $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ 计算.

2 第2次习题课: 三重积分

2.1 问题

1. 区域 Ω 由 $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$ 围成, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} x dv$.
2. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} z dv$.
3. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv$.
4. 区域 D 由 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (y>0), (x-2a)^2 + y^2 = 4a^2 (y>0), y=x$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$.
5. 计算椭圆抛物面 $z = x^2 + 2y^2$ 及抛物柱面 $z = 2 - x^2$ 所围成立体的体积.
6. 区域 $D = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} d\sigma_{xy}$.
7. 区域 Ω 由 $z = \frac{x^2+y^2}{m}, z = \frac{x^2+y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y = \beta x (0 < m < n, 9 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$ 围成且在第一卦限的部分, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} xyz dv$.
8. 设 $h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, f(x) \in C[-h, h]$, 证明 $\iiint_{\Omega} f(\alpha x + \beta y + \gamma z) dv_{xyz} = \pi \int_{-1}^1 (1-\zeta^2) f(h\zeta) d\zeta$, 其中区域 Ω 是单位球内部.
9. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$.
10. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$.
11. 区域 $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iint_D \max\{xy, x^3\} d\sigma$.

2.2 解答

1. 记区域 $D_{xy} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 1\}$, 累次积分时依次对 z, y, x 积分, 有 $I = \iint_{D_{xy}} [\int_0^{1-x-2y} x dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) d\sigma_{xy} = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} [x(1-x)-2xy] dy = \int_0^1 [\frac{1}{2}x(1-x)^2 - \frac{1}{4}x(1-x)^2] = \frac{1}{48}$.
2. 记区域 $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{2}\}$, 累次积分时先对 z 积分再极坐标换元, 有 $I = \iint_{D_{xy}} [\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} z dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}[R^2 - 2(x^2+y^2)] d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}(R^2 - 2r^2) r dr = \frac{\pi R^4}{8}$.
3. 由对称性, $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv + 2 \iiint_{\Omega} (xy + yz + zx) dv = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$. 先计算 $I_1 = \iiint_{\Omega} z^2 dv$. 记区域 $D_z = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} \leq 1\}$, 累次积分时先对 σ_{xy} 积分再对 z 积分, 有 $I_1 = \int_{-c}^c dz \iint_{D_z} z^2 d\sigma_{xy} = \int_{-c}^c z^2 \pi ab(1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{4\pi abc^3}{15}$. 因此 $I = \frac{4\pi abc}{15}(a^2 + b^2 + c^2)$.
4. 令 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 有 $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 - 2ar \cos \theta = 0 \Rightarrow r = 2a \cos \theta \\ (x-2a)^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow r = 4a \cos \theta \\ y = x \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$, 从而 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a \cos \theta}^{4a \cos \theta} r^2 dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3} a^3 \cos^3 \theta d\theta = \frac{112-70\sqrt{2}}{9} a^3$.
5. 联立方程 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$, 因此区域 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, 体积 $V = \iint_D [(2-x^2) - (x^2+2y^2)] d\sigma = 2 \iint_D (1-x^2-y^2) d\sigma$. 做极坐标换元知 $V = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) dr = \pi$.
6. 令 $\begin{cases} \xi = x+y \\ \eta = x-y \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ y = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$, 区域 $D_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\} \Rightarrow D_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$, 所以换元后 $I = \iint_{D_{\xi\eta}} \xi^2 e^{\xi\eta} |J| d\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^1 \xi^2 e^{\xi\eta} d\eta = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi(e^{\xi} - 1) d\xi = \frac{1}{4}$.
7. 令 $\begin{cases} u = \frac{z}{x^2+y^2} \\ v = xy \\ w = \frac{y}{x} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{w}} \\ y = \sqrt{vw} \\ z = uv(w + \frac{1}{w}) \end{cases}$, Jacobi 行列式 $J = |\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}| = \frac{v}{2w}(w + \frac{1}{w})$, 区域 $\Omega \rightarrow \Omega_{uvw} = \{(u, v, w) : \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, a^2 \leq v \leq b^2, \alpha \leq w \leq \beta\}$, 所以换元后 $I = \iiint_{\Omega_{uvw}} \sqrt{\frac{v}{w}} \sqrt{vw} uv(w + \frac{1}{w}) \frac{v}{2w}(w + \frac{1}{w}) du dv dw = \iiint_{\Omega_{uvw}} v^3 u(w + \frac{1}{w})^2 \frac{1}{w} du dv dw = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} u du \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} (w + \frac{2}{w} + \frac{1}{w^3}) dw = \frac{1}{32} (\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) (b^8 - a^8) [(\beta^2 - \alpha^2)(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}) + 4 \log \frac{\beta}{\alpha}]$.

$$\int_{-1}^1 d\zeta \iint_{\xi^2 + \eta^2 < 1 - \zeta^2} f(h\zeta) d\xi d\eta = \pi \int_{-1}^1 (1 - \zeta^2) f(h\zeta) d\zeta = \text{RHS}.$$

9. 作球坐标变换, 区域 $\Omega: 0 \leq r \leq 2 \cos \phi$, 积分 $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^{2\cos\phi} r^2 r^2 \sin \phi dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^{2\cos\phi} r^4 dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \frac{32}{5} \cos^5 \phi d\phi = -\frac{64}{5} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \phi d\cos \phi = -\frac{64}{5} \frac{\cos^6 \phi}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15} \pi$.

10. 作广义球坐标系变换 $\begin{cases} x = ar \sin \phi \cos \theta \\ y = br \sin \phi \sin \theta \\ z = cr \cos \phi \end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J = abcr^2 \sin \phi$, 所以换元后

11. 引入辅助积分 $J = \iint_D \min\{xy, x^3\} d\sigma$. $I + J = \iint_D (xy + x^3) d\sigma = \int_0^1 dy \int_{-1}^1 (xy + x^3) dx = 0$, $I - J = \iint_D |xy - x^3| d\sigma = \iint_D |x||y - x^2| d\sigma = 2 \int_0^1 dy \int_0^1 |x|y - x^2| dx \stackrel{u=x^2}{=} \int_0^1 dy \int_0^2 |y - u| du \stackrel{\text{几何意义}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 [y^2 + (1 - y)^2] dy = \frac{1}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{6}$.

n 维空间中的球坐标系: 一个向径 r , $n-1$ 个角度 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$, 其中, 一个角度转一圈 (θ_{n-1}), $n-2$ 个角度转半圈

[illegible]

$$|J| = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

n 维空间中半径为 R 的球体 $\Omega: x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$ 的体积 V_n : 作球坐标变换知

关于 Beta 函数, 参见后述的含参积分.

3.1 问题

1. 曲线 $\Gamma: x^2 + y^2 = x$, 计算积分 $I = \int_{\Gamma} \sqrt{1 - x^2 - y^2} ds$.

2. 曲线 C 是 $y=0, y=x(x \geq 0), x^2+y^2=a^2$ 所围成图形的边界, 计算积分 $I = \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$.

- 曲线 $L: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = at \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, 计算积分 $I = \int_L \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}$.
- 曲线 $C: \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 计算积分 $I = \int_C (x^2 + y^2)^n ds$.
- 曲线 $C: x^2 + y^2 = a^2$, 计算积分 $I = \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 方向是逆时针.
- 曲线 \widehat{AB} 为单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半部分, 计算积分 $I = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy$, 方向为从 $A(1, 0)$ 到 $B(-1, 0)$.
- 曲线 Γ 是从 $(0, 0)$ 沿函数 $y = x^\alpha$ 到 $(1, 1)$ 的部分, 计算积分 $I = \int_\Gamma (x^2 - y^2)dx - 2xydy$.
- 曲线 Γ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 计算积分 $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz$, 方向是从 z 轴正向看回来的逆时针方向.
- 区域 D 是由点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 围成的三角形, 计算积分 $I = \iint_D x^2 dx dy$.
- 曲线 $C: 741x^8 + 886e^x y^2 + \sin(x^9 \cos(y)) = 5$, 计算积分 $I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.
- 证明或否定: 曲线积分 $I = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$ 在 \mathbb{R}^2 内积分与路径无关.
- (格林第二公式) 设闭区域 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的, $u = u(x, y), v = v(x, y) \in C^2(D)$, 证明 $\iint_D (v\Delta u - u\Delta v) d\sigma = \oint_{\partial D} (v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}) ds$, 其中 \vec{n} 为 ∂D 的单位外法向量.
- 求函数 $u(x, y)$ 使得 $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy$.

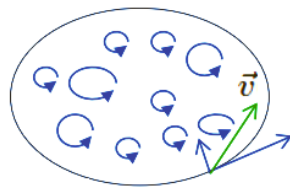
3.2 解答

- 曲线参数方程 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, 则 $ds = \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} dt = \frac{1}{2} dt$, 原积分 $I = \int_\Gamma \sqrt{1-x} ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}| dt = \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 2$.
- 记 C_1, C_2, C_3 分别为曲线 C 的下、右上、左上部分, 则原积分 $I = \int_{C_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{C_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{C_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\theta + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx = (e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a + e^{\sqrt{2}x} \big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4} a e^a + 2(e^a - 1)$.
- 直接使用公式, $I = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2} dt = \int_0^{2\pi} t^2 \sqrt{2} a dt = \frac{8\sqrt{2}}{3} a \pi^3$.
- 直接使用公式, $I = \int_0^{2\pi} a^{2n} a d\theta = 2\pi a^{2n+1}$.
- 曲线参数方程 $x = a \cos t, y = a \sin t$, 因此 $I = \oint \frac{a^2(\cos t + \sin t)(-\sin t) - a^2(\cos t - \sin t) \cos t}{a^2} dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi$.
- 由 $x^2 + y^2 = 1$ 知 $xdx + ydy = 0$ 得 $dy = -\frac{x}{y} dx$, 从而有 $\int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy = \int_1^{-1} -ydx + x(-\frac{x}{y} dx) = \int_{-1}^1 (\frac{x^2+y^2}{y}) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.
- 直接计算得 $I = \int_0^1 (x^2 - x^{2\alpha}) dx - 2xx^\alpha(\alpha x^{\alpha-1}) dx = \int_0^1 (x^2 - (2\alpha+1)x^{2\alpha}) dx = -\frac{2}{3}$.
- 球面的单位法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$, 平面的单位法向量为 $\vec{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$. 所以曲线 Γ 的单位切向量为 $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. 从而积分为 $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot \vec{\tau} ds = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) ds = \int_\Gamma 0 ds = 0$.
- AB 的方程为 $y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, BC 的方程为 $y = y_2 + \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$, CA 的方程为 $y = y_3 + \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_3)$. 由格林公式, 知原积分 $I = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{3} x^3) d\sigma = \oint_{\partial D} \frac{1}{3} x^3 dy = \int_{AB} \frac{1}{3} x^3 dy + \int_{BC} \frac{1}{3} x^3 dy + \int_{CA} \frac{1}{3} x^3 dy = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} dx + \int_{x_3}^{x_1} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3} dx = \frac{1}{12} [(y_2-y_1)(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1) + (y_3-y_2)(x_3^2+x_2^2)(x_3+x_2) + (y_1-y_3)(x_1^2+x_3^2)(x_1+x_3)]$.
- 容易验证圆点 O 是闭曲线 C 所围成区域的内点. 记 $C_\epsilon: x^2 + y^2 = \epsilon^2$, 取 ϵ 足够小使 C_ϵ 围成的区域完全在曲线 C 内侧. 在 C 与 C_ϵ 围成的区域 D 上使用格林公式知 $\oint_{\partial D} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x} (\frac{x}{x^2+y^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{-y}{x^2+y^2})) d\sigma = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{C_\epsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \stackrel{x=\epsilon \cos \theta, y=\epsilon \sin \theta}{=} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.
- 上述积分为两个曲线积分之差, 即 $I = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2} = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \int_\Gamma \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$. 令 $P_i = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q_i = \frac{(x-i)dy}{(x-i)^2+y^2}, i=0, 1$, 容易验证 $\frac{\partial P_i}{\partial y} = \frac{\partial Q_i}{\partial x}$. 但由于 P_0, Q_0 包含瑕点 $(0, 0)$, P_1, Q_1 包含瑕点 $(1, 0)$, 且在包含瑕点的区域内积分值可能为 2π (第 10 题结论), 不包含瑕点的区域内积分值必为 0, 因此原积分与路径有关, 结论不对.
- 由格林公式, $\iint_D \nabla \cdot (P, Q) d\sigma = \iint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) d\sigma = \oint_{\partial D} P dy - Q dx = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot (dy, -dx) = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot \vec{n} ds$. 因此 $\oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \oint_{\partial D} v \nabla u \cdot \vec{n} ds = \iint_D \nabla \cdot (v \nabla u) d\sigma = \iint_D (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) d\sigma$, 类似有 $\oint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) d\sigma$. 两式相减即得结果.
- 令 $P(x, y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x, y) = \frac{e^y}{1+x^2}$, 则有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xe^y}{(x^2+1)^2}$. $\int P(x, y) dx = \frac{e^y-1}{x^2+1} + C'$, $Q(x, y)$ 删除掉含 x 的项后为 0, 因此 $u(x, y) = \frac{e^y-1}{1+x^2} + C$.

3.3 补充 (不要求掌握!)

格林公式的物理意义: 平面定常流体 (各点流速只与位置有关, 与时间无关) 于 (x, y) 点的流速为 $\vec{v}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. 对于固定的 x , $\frac{\partial P}{\partial y}$ 决定了 x 方向向 y 方向的旋转, 所以若以逆时针方向为正向, 则 x 方向向 y 方向的旋转度量为 $-\frac{\partial P}{\partial y}$. 对于固定的 y , $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 决定了 y 方向向 x 方向的旋转, 其度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x}$. 从而, (x, y) 点的流体的旋转度的度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, 命名为 (平面流场的旋度), 记为 $\text{rot } \vec{v}$.

物理现象: 边界线 ∂D 上的环流量等于区域 D 上各点旋转量的迭加.



4 第 4 次习题课: 曲面积分

4.1 问题

- 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 被柱面 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 割下的部分的面积.
- 求螺旋面 $\Sigma: \begin{cases} x = u \sin v \\ y = u \cos v \\ z = av \end{cases}$ 在 $0 \leq u \leq R, 0 \leq v \leq 2\pi$ 部分的面积, 其中 $a > 0$ 是常数.
- 求抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy (a > 0)$ 内的那部分面积.
- Σ 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS$.
- Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq H$, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$.
- 求均匀物质曲面 $\Sigma: z = 2 - (x^2 + y^2), z \geq 0$ 的质心坐标.
- Σ 是平面 $2x + 2y + z = 6$ 于第一卦限部分上侧, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, 其中 $\vec{F} = (xy, -x^2, x + z)$.
- $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, Σ 是 $\partial\Omega$ 的外侧, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} xyz dxdy$.
- 流 $\vec{v} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$, 求穿出 $\frac{1}{8}$ 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (第一卦限) 的流量.
- Σ 是 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq h)$ 外侧, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$.
- Σ 是由三个坐标平面及 $x + y + z = 1$ 所围成四面体外侧, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$.
- S 是曲面 $x^2 + y^2 = 1 (0 \leq z \leq 2)$ 的外侧, 计算积分 $I = \iint_S x(y - z) dy dz + (x - y) dx dy$.
- S 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外表面, 计算积分 $I = \iint_S \frac{dx dy}{z}$.

4.2 解答

- 由对称性, 所求面积 S 为 xy 平面上方曲面的面积的两倍. 割下部分 $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D, D = \{(x, y) : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$. 则面积 $S = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} d\sigma_{xy} = 2 \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} d\sigma_{xy}$. 利用极坐标变换知 $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2} \Big|_0^{\cos \theta} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2\pi - 4$.
- $\vec{\tau}_1 = (\sin v, \cos v, 0), \vec{\tau}_2 = (u \cos v, -u \sin v, a), |\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2| = \sqrt{u^2 + a^2} \Rightarrow S = \iint_{\Sigma} |\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2| d\sigma_{uv} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^R \sqrt{u^2 + a^2} du = 2\pi [\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(u + \sqrt{u^2 + a^2})]_0^R = \pi R \sqrt{R^2 + a^2} + \pi a^2 \log(\frac{R + \sqrt{R^2 + a^2}}{a})$.
- 由抛物面方程得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{a}, dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}$. 从曲线表达式 $\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy \\ z = 0 \end{cases}$ 知 (x, y) 落在第一、四象限. 做极坐标变换, 知柱面方程为 $r^2 = a^2 \sin 2\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2})$. 因此由对称性知 $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} \frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{a} r dr = \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + \sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1] d\theta = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} d\theta - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(\theta + \frac{\pi}{4}) d\theta - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3 u du - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} (-\frac{1}{3} \sin^2 u \cos u - \frac{2}{3} \cos u) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{20}{9} a^2 - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi)$.
- Σ 在 xoy 平面的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$. 又有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$, 所以 $\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $I = \iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS = \iint_D x^2 y^2 \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = R \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^R \frac{r^5}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$. 分开计算: $\int_0^R \frac{r^5}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{r^4}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{(R^2 - t)^2}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^R (R^4 t^{-\frac{1}{2}} - 2R^2 t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}) dt = \frac{1}{2} [2R^4 t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} R^2 t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}}] \Big|_0^R = \frac{8}{15} R^5, \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{\pi}{4}$. 所以 $I = R \frac{\pi}{4} \frac{8}{15} R^5 = \frac{2}{15} \pi R^6$.

5. Σ 可以表示为 $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$, 其在 $yo z$ 平面的投影区域为 $D_{yz} : -R \leq y \leq R, 0 \leq z \leq H$. 又 $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}$. 再考虑对称性, $I = 2 \iint_{D_{yz}} (R^2 + z^2) \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} d\sigma_{yz} = 2R \int_{-R}^R \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \int_0^H (R^2 + z^2) dz = 2R \arcsin \frac{y}{R} \Big|_{-R}^R (R^2 z + \frac{1}{3} z^3) \Big|_0^H = 2RH\pi(R^2 + \frac{H^2}{3})$.
6. 设其质心坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 由对称性有 $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{\iint_{\Sigma} z dS}{\iint_{\Sigma} dS}$. 易知 $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$, 因此 $\iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3}\pi$, $\iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} (2 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(2 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{37}{10}\pi$. 所以 $z_0 = \frac{111}{130}$.
7. $\vec{n} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), z = 6 - 2x - 2y, D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}, dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} d\sigma_{xy} = 3d\sigma_{xy}$, 则 $I = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} [\frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}(x + z)] dS = \iint_D [\frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}(x + 6 - 2x - 2y)] \cdot 3d\sigma_{xy} = \iint_D [2xy - 2x^2 - x - 2y + 6] d\sigma_{xy} = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} [2xy - 2x^2 - x - 2y + 6] dy = \frac{27}{4}$.
8. 记 Σ_1, Σ_2 分别为 Σ 在第一卦限和第五卦限的部分, $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. 由对称性, $I = 2 \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy = 2 \iint_D xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} d\sigma_{xy} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta \sqrt{1 - r^2} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 \sqrt{1 - r^2} dr^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 u \sqrt{1 - u} du \stackrel{t=\sqrt{1-u}}{=} \frac{1}{2} \int_1^0 (1 - t^2) t (-2t) dt = \frac{2}{15}$.
9. $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), Q = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\Sigma} xy dy dz + yz dx dz + xz dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 3 \iint_{\Sigma} xz dx dy = 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} d\sigma_{xy} = \frac{3\pi}{16}$.
10. $I = \iint_{\Sigma} (x, y, z) \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, -z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = \iint_{\Sigma} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 0$.
11. 记 Σ 落在 xy, yz, zx 平面上的部分分别为 Σ_z, Σ_x 和 Σ_y , 在平面 $x + y + z = 1$ 的部分记为 Σ_1 . 则在 Σ_z 上, $z = 0, dy dz = dz dx = 0$, 从而 $\iint_{\Sigma_z} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 0$. 同理在 Σ_y 与 Σ_x 上的积分都为零. 因此 $I = \iint_{\Sigma_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy$. 记 $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, 则由对称性 $I = 3 \iint_D (1 - x - y) d\sigma_{xy} = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \frac{1}{2}$.
12. 注意到曲面 S 在 O_{xy} 平面上的投影为一曲线, 所以 $\iint_S (x - y) dx dy = 0$. 为了计算另一个积分, 将曲面分成两部分 $\begin{cases} S_1 : x = \sqrt{1 - y^2} (0 \leq z \leq 2) \\ S_2 : x = -\sqrt{1 - y^2} (0 \leq z \leq 2) \end{cases}$. 记 $D = \{(y, z) : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$, 由对称性, $I = 2 \iint_{S_1} x(y - z) dy dz = 2 \int_0^2 dz \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} (y - z) dy = -2\pi$.
13. 记 $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, 由对称性知 $I = 2 \iint_D \frac{dx dy}{c \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}} = \frac{2}{c} \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \frac{dy}{\sqrt{(1-x^2/a^2) - y^2/b^2}} = \frac{2}{c} \int_{-a}^a \frac{b\pi}{2} dx = \frac{2\pi ab}{c}$.

4.3 补充 (不要求掌握!)

如何定义某条曲线是“可求长度”的? 如何定义某张曲面是“可求面积”的? 有兴趣的同学可以参考https://wqgcx.github.io/courses/Functions_of_Real_Variables.pdf.

事实上, 有些集合是不可求长的. 用 $m(A)$ 表示集合 A 的“长度”, 在 $[0, 1]$ 中根据规则“ $x_1 \sim x_2$ 当且仅当 $x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}$ ”划分等价类, 每个等价类选取一个元素 x_α (依赖于选择公理), 这样构成了集合 A . 假设 A 可求长, 那么 $A_q = (A + q) \cap [0, 1], \forall q \in \mathbb{Q}$ 也可求长, 且对于 $q \neq p$ 有 $A_q \cap A_p = \emptyset$. 这表明 $1 = m([0, 1]) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m(A_q)$, 即 A 不是零长度的. 注意到对任意的 $q \in \mathbb{Q}$ 成立 $m(A_q) \geq m(A) - q$, 这样只需考虑所有在区间 $[0, \frac{1}{2}m(A)]$ 中的有理数便知矛盾! 这说明集合 A 是不可求长的.

5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式

5.1 问题

- Σ 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq 1)$ 外侧, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} (y - z) dy dz + (z - x) dx dz + (x - y) dx dy$.
- S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上半部分上侧, 计算积分 $I = \iint_S (\sin yz + x) dy dz + (e^{xz} + y) dz dx + (xy + z) dx dy$.
- 设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为一封闭光滑曲面, 以它为边界的闭区域为 D , $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3$ 不在 S 上. 计算积分 $I = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}', \vec{n})}{r^2}$, 其中 $\vec{r}' = (x - \xi, y - \eta, z - \zeta), r = |\vec{r}'|, |\vec{n}|$ 是 S 的单位外法向量.
- 设 $f(x, y, z)$ 表示从原点到椭球面 $\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上点 $P(x, y, z)$ 的切平面的距离, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{f(x, y, z)}$.

5. L 是平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截得三角形 Σ 的边界, 其正向与此三角形上侧成右手系, 计算积分 $I = \oint_L zdx + xdy + ydz$.
6. L 为椭圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \end{cases}$, 方向与椭圆面上侧构成右手系, 计算积分 $I = \oint_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$.
7. Γ_h 是平面 $x + y + z = h$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看去逆时针方向, 计算积分 $I = \oint_{\Gamma_h} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$.
8. C 是平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 切立方体 $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq a\}$ 的表面所得的切痕, 方向是从 x 轴正向看去逆时针方向, 计算积分 $I = \oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$.
9. S 是柱面 $x^2 + y^2 = R^2, -R \leq z \leq R$ 所围成的立体表面外侧, 计算积分 $I = \iint_S \frac{xdydz + z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$.
10. S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1, z = 2$ 所围立体的表面外侧, 计算积分 $\iint_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$.
11. 函数 $P(x, y), Q(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$, 且曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx - Qdy$ 和 $\int_{\Gamma} Pdy + Qdx$ 在 \mathbb{R}^2 中与路径无关, 求证 $P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x + \cos \theta, y + \sin \theta)d\theta, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5.2 解答

1. 记 $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}, \Sigma_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$, 则 $I = \oint_{\partial\Omega} (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy - \iint_{\Sigma_0} (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy := I_1 - I_2$. 根据高斯公式, $I_1 = \iiint_{\Omega} [0 + 0 + 0]dv = 0$, 而 $I_2 = \iint_{\Sigma_0} (x - y)dxdy = \iint_{\Sigma_0} x d\sigma_{xy} - \iint_{\Sigma_0} y d\sigma_{xy} = 0 - 0 = 0$. 因此 $I = 0$.

2. 取 $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, 方向向下, 则 $S \cup S_1$ 构成了上半单位球体 D 的边界外侧. 由高斯公式得 $\iint_{S \cup S_1} (\sin yz + x)dydz + (e^{xz} + y)dzdx + (xy + z)dxdy = 3 \iiint_D dv = 2\pi$. 而 $\iint_{S_1} (xy + z)dxdy = - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} xy d\sigma_{xy} = 0$. 因此 $I = 2\pi$.

3. $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{1}{r} \vec{r} \cdot \vec{n} \Rightarrow I = \iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{x-\xi}{r^3} dydz + \frac{y-\eta}{r^3} dzdx + \frac{z-\zeta}{r^3} dxdy$. 由 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3}) = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}$, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3}) = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-\eta)^2}{r^5}$, $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3}) = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$ 知 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3}) = 0$. 当 $(\xi, \eta, \zeta) \notin D$ 时, 根据高斯公式成立 $I = \iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})]dv = 0$. 当 $(\xi, \eta, \zeta) \in D$ 时, 取 ϵ 充分小使得球面 $S_{\epsilon} = \{(x, y, z) : (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \epsilon^2\}$ 完全落在 D 的内部. 如果取 S_{ϵ} 的内侧 S_{ϵ}^{-} , 设区域 D_{ϵ} 以 S 与 S_{ϵ}^{-} 为边界, 则 $\iint_{S \cup S_{\epsilon}^{-}} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \iint_{D_{\epsilon}} 0 dv = 0$. 注意到在 S_{ϵ} 上, \vec{r} 与 \vec{n} 平行, 从而 $I = - \iint_{S_{\epsilon}^{-}} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \iint_{S_{\epsilon}} \frac{dS}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2} 4\pi \epsilon^2 = 4\pi$.

4. 对 Σ 的方程两边微分得到 $\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2} = 0$, 因此 P 处的外法向量为 $\vec{n} = (\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$, 切平面方程为 $\frac{x}{a^2}(X - a) + \frac{y}{b^2}(Y - y) + \frac{z}{c^2}(Z - z) = 0$, 原点到切平面距离 $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2 + (\frac{y}{b^2})^2 + (\frac{z}{c^2})^2}}$, 因此 $I = \iint_{\Sigma} \sqrt{(\frac{x}{a^2})^2 + (\frac{y}{b^2})^2 + (\frac{z}{c^2})^2} dS = \iint_{\Sigma} (\frac{x}{a^2} \cos \alpha + \frac{y}{b^2} \cos \beta + \frac{z}{c^2} \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma} \frac{x}{a^2} dydz + \frac{y}{b^2} dzdx + \frac{z}{c^2} dxdy$. 记 $V = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 由高斯公式有 $I = \iiint_V (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) dv = \frac{4\pi abc}{3} (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$.

5. $\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = dydz + dzdx + dxdy$, 因此由斯托克斯公式, $I = \iint_{\Sigma} dydz + dxdz + dxdy = 3 \iint_{\Sigma} dxdy = \frac{3}{2}$.

6. 记椭圆面上侧为 Σ , $\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} = -2dydz - 2dzdx - 2dxdy$, 因此由斯托克斯公式, $I = \iint_{\Sigma} -2dydz - 2dzdx - 2dxdy = -2 \iint_{\Sigma} dydz + dxdy = -2[\iint_{D_{yz}} d\sigma_{yz} + \iint_{D_{xy}} d\sigma_{xy}] = -2(\pi ah + \pi a^2)$.

7. 设平面 $x + y + z = h$ 被圆周 Γ_h 所围成部分为 S_h , 则 S_h 是一半径为 $\sqrt{1 - \frac{h^2}{3}}$ 的圆盘. 由斯托克斯公式, $I = \iint_{S_h} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{3}}(x + y + z)dS = -\frac{4h}{\sqrt{3}} \iint_{S_h} dS = -\frac{4h}{\sqrt{3}} \pi (1 - \frac{h^2}{3})$.

8. 令 Σ 是 C 所围的区域, 方向为上侧, 由斯托克斯公式知 $I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z)dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \frac{3}{2} adS = -2\sqrt{3}a \iint_{\Sigma} dS$. 最后, 因为 Σ 是边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的正六边形, 面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, 所以 $I = -\frac{9}{2}a^3$.

9. 记 S_1, S_2, S_3 分别为 S 的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为 $I = \iint_S \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} + \iint_S \frac{z^2 dx dy}{x^2+y^2+z^2} := I_1 + I_2$. 先看第一项, 显然 $\iint_{S_1} \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{S_2} \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} = 0$. 记 $D_{yz} = \{(y, z) : -R \leq y, z \leq R\}$, 从而 $\iint_{S_3} \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} = 2 \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2} dy dz}{R^2+z^2} = 2 \int_{-R}^R \frac{1}{R^2+z^2} dz \int_{-R}^R \sqrt{R^2-y^2} dy = 2 \times \frac{1}{2} \pi R^2 \times \frac{\pi}{2R} = \frac{1}{2} \pi^2 R$. 再看第二项, 显然 $\iint_{S_1+S_2} \frac{z^2 dx dy}{x^2+y^2+z^2} = 0$, $\iint_{S_3} \frac{z^2 dx dy}{x^2+y^2+z^2} = 0$ (前者是因为对称性, 后者是因为 S_3 在 xoy 平面上的投影是一曲线). 因此 $I = \frac{1}{2} \pi^2 R$. 请读者注意, 本题由于区域内存在瑕点 $(0, 0, 0)$, 不可直接使用高斯公式.

10. 记 S_1, S_2, S_3 分别为 S 的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为 $(\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}) \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$. 投影 $D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, 从而 $\iint_{S_1} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = -\iint_{D_1} \frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e dr = -2\pi e$. 投影 $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, 从而 $\iint_{S_2} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \iint_{D_2} \frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^2 dr = 4\pi e^2$. 投影 $D_3 = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, 从而 $\iint_{S_3} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = -\iint_{D_3} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 e^r dr = -2\pi e(e-1)$. 因此 $I = -2\pi e + 4\pi e^2 - 2\pi e(e-1) = 2\pi e^2$.

11. 积分与路径无关意味着 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$. 由格林公式知 \forall 区域 D , $\oint_{\partial D} \frac{\partial P}{\partial n} ds = \iint_D \Delta P d\sigma = 0$. 从而 $0 = \oint_{\partial B((x,y),r)} \frac{\partial P}{\partial n} ds = \oint_{\partial B((x,y),r)} \frac{\partial P}{\partial r} ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)}{\partial r} r d\theta = r \frac{\partial}{\partial r} (\int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) d\theta) \Rightarrow \int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) d\theta \equiv C$. 令 $r \rightarrow 0$ 知 $\int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) d\theta \rightarrow 2\pi P(x, y) \Rightarrow P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x+\cos\theta, y+\sin\theta) d\theta$ (令 $r=1$ 即可).

5.3 补充 (不要求掌握!)

高斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流苏 $\vec{F} = (P, Q, R)$, 定义其散度为 $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}$. $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ 表示点为“源”, 即能生流; $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ 表示点为“汇”, 即能“吸流”; $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ 表示点非源非汇. 因此高斯公式的向量形式为 $\iint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dv$, 即: 流在某区域 Ω 上的总散度等于流通过 Ω 的边界的总流量.

斯托克斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流速 $\vec{F} = (P, Q, R)$, 定义其旋度为 $\operatorname{rot} \vec{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) \vec{i} +$

$$(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) \vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F}, \text{ 因此斯托克斯公式的向量形式为 } \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

即: 流在闭路 L 上的循环量 (环流量), 就是旋度在以 L 为边界的光滑曲面上的流量 (旋流量).

6 第 6 次习题课: 初等积分法

6.1 问题

- 求解微分方程 $(2x \sin y + 3x^2 y) dx + (x^3 + x^2 \cos y + y^2) dy = 0$.
- 求解微分方程 $(x^2 + 1)(y^2 - 1) dx + xy dy = 0$.
- 质量为 m 的物体在空中下落, 初速度为 v_0 , 空气阻力与物体速度的平方成正比, 阻尼系数为 $k > 0$. 沿垂直地面向下的方向取定坐标轴 x , 计算 t 时刻的速度.
- 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = x^3 (x \neq 0)$.
- 设微分方程 $\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$, 其中 $a > 0$ 为常数, 而 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 试求方程的 2π 周期解.
- 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.
- 考虑里卡蒂方程 $\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$, 其中 $a \neq 0, b, m$ 都是常数, $x \neq 0, y \neq 0$. 证明当 $m = 0, -2, \frac{-4k}{2k+1}, \frac{-4k}{2k-1} (k = 1, 2, \dots)$ 时, 方程可通过适当的变换化为变量分离的方程.
- 证明: 若 $\mu = \mu(x, y)$ 是方程 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 的一个积分因子使得 $\mu P(x, y) dx + \mu Q(x, y) dy = d\Phi(x, y)$, 则 $\mu(x, y)g(\Phi(x, y))$ 也是一个积分因子, 其中 $g(\cdot)$ 是任一可微的非零函数.
- 求解微分方程 $(x^3 y - 2y^2) dx + x^4 dy = 0$.
- 证明: 若 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 是齐次方程, 则 $\mu(x, y) = \frac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}$ 是一个积分因子.
- 求解微分方程 $(3x^2 y + 2xy + y^3) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$.
- 假设微分方程 $\frac{dy}{dx} = H(x, y)$ 在 (x, y) 平面上给出了一个以 C 为参数的曲线族 \mathcal{C} . 试求另一个微分方程, 其给出了一个以 K 为参数的曲线族 \mathcal{K} , 并且 \mathcal{C} 中的每一条曲线和 \mathcal{K} 中的每一条曲线相交成定角 $\alpha (-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, 以逆时针方向为正).

6.2 解答

1. $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos y + 3x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 因此是恰当方程. 注意到 $d(x^2 \sin y + x^3 y + \frac{1}{3}y^3) = (2x \sin y + 3x^2 y)dx + (x^3 + x^2 \cos y + y^2)dy$, 因此通积分为 $x^2 \sin y + x^3 y + \frac{1}{3}y^3 = C$.
2. 当因子 $x(y^2 - 1) \neq 0$ 时, 用它除方程两端, 得到等价方程 $\frac{x^2+1}{x}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0$. 积分得到 $x^2 + \log x^2 + \log |y^2 - 1| = C_1 \Rightarrow x^2 e^{x^2} |y^2 - 1| = e^{C_1} \Rightarrow y^2 = 1 + C \frac{e^{-x^2}}{x^2}$, 其中 $C \neq 0$. 当因子 $x(y^2 - 1) = 0$ 时, 得到特解 $x = 0$ 和 $y = \pm 1$. 因此通积分为 $y^2 = 1 + C \frac{e^{-x^2}}{x^2}$ 或 $x = 0$.
3. 由牛顿第二运动定律知 $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 \Rightarrow \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{Ce^{2\sqrt{kg/m}t} + 1}{Ce^{2\sqrt{kg/m}t} - 1}$. 代入初值条件知 $C = (v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}})^{-1}(v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}})$.
4. 积分因子是 $e^{\int \frac{1}{x} dx} = |x|$. 用它乘方程两侧得到 $\frac{d}{dx}(xy) = x^4 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{C}{x}$.
5. 方程通解为 $y(x) = Ce^{-ax} + \int_0^x e^{-a(x-s)} f(s) ds$, 现在选择常数 C , 使 $y(x)$ 成为 2π 周期函数. 代入 $y(2\pi) = y(0)$ 得到 $y(x) = \frac{1}{e^{2a\pi} - 1} \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f(s) ds$, 容易验证它确实是 2π 周期解.
6. 令 $y = ux$, 则 $x \frac{du}{dx} + u = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \arctan u - \log \sqrt{1+u^2} = \log |x| - \log C$. 从而 $|x| \sqrt{1+u^2} = Ce^{\arctan u}$. 以 $u = y/x$ 代回得到通积分 $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\arctan \frac{y}{x}}$.
7. 不妨设 $a = 1$ (否则作变换 $\bar{x} = ax$). 因此考虑 $\frac{dy}{dx} + y^2 = bx^m$. $m = 0$ 时显然是一个变量分离的方程. 当 $m = -2$ 时, 作变换 $z = xy$, 代入方程得到 $\frac{dz}{dx} = \frac{b+z-z^2}{x}$, 这也是一个变量分离的方程. 当 $m = \frac{-4k}{2k+1}$, 作变换 $x = \xi^{\frac{1}{m+1}}, y = \frac{b}{m+1} \eta^{-1}$, 则方程变为 $\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \frac{b}{(m+1)^2} \xi^n$, 其中 $n = \frac{-4k}{2k-1}$. 再作变换 $\xi = \frac{1}{t}, \eta = t - zt^2$, 方程变为 $\frac{dz}{dt} + z^2 = \frac{b}{(m+1)^2} t^l$, 其中 $l = \frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$. 比较 m 与 l 对 k 的依赖关系知只要将上述变换的过程重复 k 次, 就能把原方程化为 $m = 0$ 的情形. 当 $m = \frac{-4k}{2k-1}$ 时, 注意上述过程中 n 对 k 的依赖关系知可以化归到 $m = 0$ 的情形.
8. 直接验证 $\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)g(\Phi(x, y))P(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)g(\Phi(x, y))Q(x, y)]$ 即可.
9. 改写为 $(x^3 y dx + x^4 dy) - 2y^2 dx = 0$. 前一组有积分因子 x^{-3} 和通积分 $xy = C$, 后一组有积分因子 y^{-2} 和通积分 $x = C$. 根据上一题结果, 只需找可微函数 g_1, g_2 使得 $\frac{1}{x^3} g_1(xy) = \frac{1}{y^2} g_2(x)$. 只需取 $g_1(xy) = \frac{1}{(xy)^2}$ 和 $g_2(x) = \frac{1}{x^5}$, 得到原方程的积分因子 $\frac{1}{x^5 y^2}$. 用它乘原方程得到全微分方程 $\frac{1}{(xy)^2} d(xy) - \frac{2}{x^5} dx = 0$, 因此通积分为 $y = \frac{2x^3}{2Cx^4+1}$. 注意到方程还有特解 $x = 0$ 和 $y = 0$, 它们实际上是在用积分因子乘方程时丢失的解.
10. 代入 $P(x, y) = x^m P_1(\frac{y}{x}), Q(x, y) = x^m Q_1(\frac{y}{x})$ 直接验证即可.
11. $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2$, 因此不是恰当方程, 但是 $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 3$ 不依赖于 y , 因此有积分因子 e^{3x} , 用它乘原方程得到 $e^{3x}(3x^2 y + 2xy + y^3)dx + e^{3x}(x^2 + y^2)dy = d[e^{3x}(x^2 y + \frac{1}{3}y^3)] = 0$, 因此通积分为 $e^{3x}(x^2 y + \frac{1}{3}y^3) = C$.
12. 设曲线族 \mathcal{C} 中过点 (x, y) 的线素斜率为 y'_1 , 与它相交成 α 角的线素斜率记为 y' . 当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\tan \alpha = \frac{y' - y'_1}{1 + y' y'_1}$, 即 $y'_1 = \frac{y' - \tan \alpha}{y' \tan \alpha + 1}$. 因为 $y'_1 = H(x, y)$, 所以等角轨线的微分方程为 $\frac{y' - \tan \alpha}{y' \tan \alpha + 1} = H(x, y)$, 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{H(x, y) + \tan \alpha}{1 - H(x, y) \tan \alpha}$. 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时有 $y' = -\frac{1}{y'_1}$, 即微分方程为 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{H(x, y)}$.

6.3 补充 (不要求掌握!)

皮亚诺存在定理: 设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 内连续, 则初值问题 $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$ 在区间 $|x - x_0| \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ($M > \max_{(x, y) \in \mathbb{R}} |f(x, y)|$) 上至少有一个解 $y = y(x)$.
证明过程较为复杂, 有兴趣的同学可以参考《常微分方程教程》(丁同仁、李承治) 第二版 3.2 节.

7 第 7 次习题课: 解的存在唯一性, 高阶线性微分方程

7.1 问题

1. 设初值问题 $\frac{dy}{dx} = F(x, y), y(0) = 0$, 其中函数 $F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0, -\infty < y < \infty \\ 2x, & \text{当 } 0 < x \leq 1, -\infty < y < 0 \\ 2x - \frac{4y}{x}, & \text{当 } 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x^2 \\ -2x, & \text{当 } 0 < x \leq 1, x^2 \leq y < \infty \end{cases}$. 考虑区域 $S: 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty$, 求其皮卡序列.
2. 设函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某个邻域上关于 y 单调下降, 证明初值问题 $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$ 至多有一个右行解.

3. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续, 且满足不等式 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|)$, 其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数, 且 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+0} \int_{\epsilon}^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = +\infty$ ($r_1 > 0$ 是常数). 证明微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 在 G 内经过每一点的解都是唯一的.

4. 设函数 $p(x), q(x), f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 证明初值问题
$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = c, y'(x_0) = d \quad (x_0 \in (a, b)) \end{cases}$$
 在区间 $[a, b]$ 内存在唯一的解.

5. 考虑线性齐次方程 $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y = 0$, 其中 $p_i(x) \in C(\mathbb{R})$, 证明其有且仅有 n 个线性无关的解.

6. 求解微分方程 $y''' - y'' - 2y' = 0$.

7. 求解微分方程 $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 3y' - y = 0$.

8. 求解微分方程 $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x - 5)$.

9. 求解微分方程 $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$.

10. 求解微分方程 $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

7.2 解答

1. $y_1(x) = \int_0^x F(t, 0)dt = x^2, y_2(x) = \int_0^x F(t, t^2)dt = -x^2$, 由数学归纳法知 $y_n(x) = (-1)^{n+1}x^2$. 本题的例子告诉我们没有 Lipschitz 条件, 皮卡序列可能不收敛.

2. 假设不然. 则设方程有两个右行解 $y_1(x), y_2(x)$, 且至少存在一个值 $x_1 > x_0$ 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. 不妨设 $y_1(x_1) > y_2(x_1)$. 令 $\bar{x} = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{x : y_1(x) = y_2(x)\}$, 显然有 $x_0 \leq \bar{x} < x_1$, 而且 $r(x) := y_1(x) - y_2(x) > 0, \forall \bar{x} < x \leq x_1$ 和 $r(\bar{x}) = 0$. 因此, 我们有 $r'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) < 0$, 进而 $r(x_1) = \int_{\bar{x}}^{x_1} r'(t)dt < 0$, 矛盾.

3. 假设不然. 则在 G 内可以找到一点 (x_0, y_0) 使得方程有两个解 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$ 都经过 (x_0, y_0) , 且至少存在一个值 $x_1 \neq x_0$ 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1 > x_0$, 且 $y_1(x_1) > y_2(x_1)$. 令 $\bar{x} = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{x : y_1(x) = y_2(x)\}$, 显然有 $x_0 \leq \bar{x} < x_1$, 而且 $r(x) := y_1(x) - y_2(x) > 0, \forall \bar{x} < x \leq x_1$ 和 $r(\bar{x}) = 0$. 因此, 我们有 $r'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \leq F(|y_1(x) - y_2(x)|) = F(r(x))$, 即 $\frac{dr(x)}{F(r(x))} \leq dx (\bar{x} < x \leq x_1)$. 从 \bar{x} 到 x_1 积分上式, 得到 $\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leq x_1 - \bar{x}$, 其中 $r_1 = r(x_1) > 0$. 但这不等式左端是 $+\infty$, 右端是一个有限的数, 矛盾.

4. 令 $y_1 = y, y_2 = y'$, 则原微分方程可改写为 $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$ ($y_1(x_0) = c, y_2(x_0) = d$), 即是 $\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x)(y(x_0) = (c, d)^T)$. 固定 x , 等式右边显然对 y 满足 Lipschitz 条件, 因此解存在唯一.

5. 令 $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$, 可以将原微分方程改写为 $\frac{dy}{dx} = A(x)y$. 固定 x_0 , 由存在唯一性定理知对于任何常数向量 $y_0 \in \mathbb{R}^n$, 存在唯一的元素 $y(x)$ 使得 $y(x_0) = y_0$. 这样得到一个映射 $H : y_0 \mapsto y(x), \mathbb{R}^n \rightarrow S$ (记解空间为 S). 显然对于任何 $y(x) \in S$, 我们有 $y(x_0) \in \mathbb{R}^n, H(y(x_0)) = y(x)$, 所以 H 是满的. 由唯一性又知 H 是单的. 容易验证 H 是线性的. 因此 H 是一个从 \mathbb{R}^n 到 S 的同构映射, 从而 S 是 n 维的, 即原微分方程有且仅有 n 个线性无关的解.

6. 特征方程 $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$, 因此有通解 $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.

7. 特征方程 $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1) = 0$, 因此有通解 $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + C_4 \cos x + C_5 \sin x$.

8. 特征方程 $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$, 因此齐次方程通解为 $(C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-x}$. 设有特解 $y^* = x^3(a + bx)e^{-x} = (ax^3 + bx^4)e^{-x}$, 代入微分方程得 $a = -\frac{5}{6}, b = \frac{1}{24}$. 因此原方程通解为 $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4)e^{-x}$.

9. 特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$, 因此齐次方程通解为 $(C_1 + C_2x)e^{-2x}$. 设有特解 $y^* = a \cos 2x + b \sin 2x$, 代入微分方程得 $a = 0, b = \frac{1}{8}$. 因此原方程通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{8} \sin 2x$.

10. 传统方法很容易, 但这里笔者希望使用另一种方法. 设 $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, 原方程可写为 $y' = Ay$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 回顾一元情形 $y' = ay$ 的解为 Ce^{ax} , 启发式地, 似乎我们也可以把现在这个方程的解写为 $e^{Ax}C$. 运用一点线性代数知识可知 $A = P\Lambda P^{-1}$, 其中 $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 冥冥之中, $e^{Ax} = Pe^{\Lambda x}P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-x} & \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} \\ \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} & \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-x} \end{pmatrix}$.

因此, 通解可以写成 $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(e^{3x} + e^{-x}) + C_2(e^{3x} - e^{-x}) \\ C_1(e^{3x} - e^{-x}) + C_2(e^{3x} + e^{-x}) \end{pmatrix}$. 由此可见, 这是一个多么和谐的数学世界啊!

7.3 补充 (不要求掌握!)

皮卡存在唯一性定理的另一种证明方法: 考虑连续函数空间上的映射 $F: y \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx$, 由于 $|F(y_1) - F(y_2)| = |\int_{x_0}^x [f(x, y_1) - f(x, y_2)]dx| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_1) - f(x, y_2)|dx \leq \int_{x_0}^x L|y_1 - y_2|dx = L|x - x_0||y_1 - y_2|$. 回顾连续函数空间上的度量为 $\rho_{[a,b]}(y_1, y_2) = \max_{x \in [a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|$, 因此当 $|x - x_0| < \frac{1}{L}$ 时, 映射 F 是一个压缩映射. 由压缩映像原理, F 的不动点存在且唯一, 这就意味着 $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx$ 的解存在且唯一.

8 第 8 次习题课: 常数变易法, 常系数线性微分方程组

8.1 问题

1. 用常数变易法求解一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$.
2. 求解微分方程 $x^2y'' + xy' + 4y = 10$.
3. 求解微分方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$.
4. 求解微分方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin t - 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = \cos t + 4x + 2y \end{cases}$.
5. 求解微分方程组 $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x \end{cases}$.
6. 设有一理想的柔软而不能伸缩的细线, 把它悬挂在两个定点 P_1 和 P_2 之间, 且只受重力作用, 试求悬链线的形状.
7. 利用牛顿第二定律和万有引力定律推导行星运动轨道方程.

8.2 解答

1. 对应齐次方程通解为 $Ce^{-\int p(x)dx}$. 设原微分方程通解为 $C(x)e^{-\int p(x)dx}$, 代入得 $C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$.
2. 作代换 $y = y - \frac{5}{2}$, 仍记为 y , 得到 $x^2y'' + xy' + 4y = 0$. 这是欧拉方程, 因此设 $x = e^t$, 得到 $y'' + 4y = 0$, 特征方程 $\lambda^2 + 4 = 0$, 从而通解是 $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$, 即 $y = C_1 \cos(2 \log |x|) + C_2 \sin(2 \log |x|)$. 因此原方程通解为 $y = C_1 \cos(2 \log |x|) + C_2 \sin(2 \log |x|) + \frac{5}{2}$.
3. 第二式可写为 $x = \frac{1}{2}(\frac{dy}{dt} + y)$, 求得 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(\frac{d^2y}{dt^2} + y)$. 代入第一式得 $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0$, 特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, 因此有通解 $y = (C_1 + C_2t)e^t$. 反代入 $x = \frac{1}{2}(\frac{dy}{dt} + y)$, 可求出 $x = \frac{1}{2}(2C_1 + C_2 + 2C_2t)e^t$.
4. 对第一式两端求导得 $\frac{d^2x}{dt^2} = \cos t - 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$. 由于 $y = \sin t - 2x - \frac{dx}{dt}$, 代入第二式得 $\frac{dy}{dt} = \cos t + 4x + 2(\sin t - 2x - \frac{dx}{dt}) = \cos t + 2\sin t - 2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \cos t - 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -2\sin t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -2\sin t \Rightarrow x = 2\sin t + C_1t + C_2$. 再代回原方程第一式知 $y = -3\sin t - 2\cos t - 2C_1t - C_1 - 2C_2$.
5. 对第一式两端求二阶导再代入第二式, 得到 $\frac{d^4x}{dt^4} = x$, 特征方程 $\lambda^4 - 1 = 0$, 从而通解是 $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t, y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t$.
6. 任取悬链线 $y = y(x)$ 上的一小段 \widehat{PQ} , 设 P 和 Q 的坐标分别为 $(x, y(x))$ 和 $(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$, \widehat{PQ} 的长度为 Δs , 其中 s 表示弧段 $\widehat{P_1P}$ 的长度. 则小段 \widehat{PQ} 所受的重力为 $W = \gamma \cdot \Delta s$, 方向垂直向下. 在 \widehat{PQ} 上的作用力除重力外还有张力 F_1 和 F_2 , 它们分别为 P 点和 Q 点沿着切线方向. 令 F_1 和 F_2 的水平分量分别为 $H_1 = H(x)$ 和 $H_2 = H(x + \Delta x)$, 而垂直分量分别为 $V_1 = V(x)$ 和 $V_2 = V(x + \Delta x)$. 利用平衡条件有 $H_2 - H_1 = 0, V_2 - V_1 - W = 0$. 因此 $H(x) \equiv H_0, V(x + \Delta) - V(x) = \gamma \cdot \Delta s$. 再利用拉格朗日微分中值定理得到 $V'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x = \gamma \cdot \Delta s (0 < \theta < 1)$. 令 $\Delta x \rightarrow 0$ 就有 $V'(x) = \gamma \frac{ds}{dx}$. 由弧长公式知 $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$. 由张力的方向知 $V(x) = H(x)y'(x) = H_0 \cdot y'(x)$. 因此 $H_0 \cdot y''(x) = \gamma \sqrt{1 + (y'(x))^2}$. 令 $z = y'$, 则降为一阶方程 $z' = \frac{\gamma}{H_0} \sqrt{1 + z^2}$, 通解为 $z = \sinh \frac{\gamma}{H_0}(x + C_1)$. 再积分得到通解 $y = \frac{H_0}{\gamma} \cosh \frac{\gamma}{H_0}(x + C_1) + C_2$.
7. 设太阳 S 位于惯性坐标系 (x, y, z) 的原点 O , 地球 E 的坐标向量为 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. 由牛顿第二定律和万有引力定律知 $m_e \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{Gm_s m_e}{|\mathbf{r}(t)|^2} \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}$, 即 $\ddot{x} = -\frac{Gm_s x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \ddot{y} = -\frac{Gm_s y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \ddot{z} = -\frac{Gm_s z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$. 显然 $z\ddot{y} - y\ddot{z} = 0$,

即 $\frac{d}{dt}(z\dot{y}-y\dot{z})=0 \Rightarrow z\dot{y}-y\dot{z}=C_1$. 类似地有 $x\dot{z}-z\dot{x}=C_2, y\dot{x}-x\dot{y}=C_3$. 因此 $C_1x+C_2y+C_3z=0$, 这证明了地球运动轨道永远在同一平面上. 不妨设永远在平面 $z=0$ 上, 则方程改写为 $\ddot{x}+\mu x(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0, \ddot{y}+\mu y(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0$, 其中常数 $\mu=Gm_s$. 由此可得 $(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})+\mu(x\dot{x}+y\dot{y})(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0$, 即 $\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-2\mu\frac{d}{dt}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})=0$. 由此有 $\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_4$. 利用极坐标变换, 改写为 $(\frac{dx}{dt})^2+(r\frac{d\theta}{dt})^2-\frac{2\mu}{r}=C_4$. 注意到 $y\dot{x}-x\dot{y}=C_3$ 也可类似改写为 $r^2\frac{d\theta}{dt}=C_3$. 从而 $(\frac{dx}{dt})^2=C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}$. 再利用 $r^2\frac{d\theta}{dt}=C_3$ 可知 $\frac{dr}{d\theta}=\pm\frac{r^2}{C_3}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}$, 即是 $\frac{d(\frac{C_3}{r})}{\pm\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}}=d\theta$. 由此, 我们得到 $\arccos\frac{\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}}{\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}}=\theta-C_5$. 从上式接出 r 关于 θ 的函数, 得到 $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$, 其中常数 $e=\frac{C_3}{\mu}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}>0, p=\frac{C_3^2}{\mu}>0, \theta_0=C_5$. 由平面解析几何知识知 $e<1$ 时为椭圆, $e=1$ 时为抛物线, $e>1$ 时为双曲线.

8.3 补充 (不要求掌握!)

可适当了解一些常微分方程定性分析的内容, 可以理解为方程解对初值的敏感性. 由微分方程驱动的系统可能会由于初值的微扰引发极端变化. 一个正面的例子是 $\frac{dx}{dt}=x$: 如果 $x(0)=0$, 那它就一直为 0; 如果 $x(0)=1$, 那对不起, $x(t)=e^t$, 越走越远. 一个反面的例子是 $\frac{dx}{dt}=-x$: 如果 $x(0)=1$, 那很幸运, $x(t)=e^{-t}$, 和 $x(0)=0$ 的情形殊途同归. 一个好用的画相图的网站: <https://anvaka.github.io/fieldplay>.

9 第 9 次习题课: 数项级数

9.1 问题

1.

9.2 解答

1.

9.3 补充 (不要求掌握!)

10 第 10 次习题课: 数项级数, 函数项级数

10.1 问题

10.2 解答

10.3 补充 (不要求掌握!)

11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数

11.1 问题

11.2 解答

11.3 补充 (不要求掌握!)

12 第 12 次习题课: 广义积分, 含参积分

12.1 问题

12.2 解答

12.3 补充 (不要求掌握!)

13 第 13 次习题课: 含参广义积分, 傅里叶级数

13.1 问题

13.2 解答

13.3 补充 (不要求掌握!)

14 第 14 次习题课: 傅里叶级数

14.1 问题

14.2 解答

14.3 补充 (不要求掌握!)

15 综合复习

15.1 问题

15.2 解答

16 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢一位不愿意透露姓名的同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2023 春高等数学 A II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.