

# 高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2024 年 11 月 28 日

## 目录

<b>1</b>	<b>第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法</b>	<b>3</b>
1.1	问题	3
1.2	解答	3
<b>2</b>	<b>第 2 次习题课: 矩阵的基本运算, 集合论</b>	<b>4</b>
2.1	问题	4
2.2	解答	5
<b>3</b>	<b>第 3 次习题课: 行列式 (1)</b>	<b>6</b>
3.1	问题	6
3.2	解答	7
<b>4</b>	<b>第 4 次习题课: 行列式 (2)</b>	<b>9</b>
4.1	问题	9
4.2	解答	10
<b>5</b>	<b>第 5 次习题课: 线性空间, 行列式 (3)</b>	<b>12</b>
5.1	问题	12
5.2	解答	13
<b>6</b>	<b>第 6 次习题课: 秩 (1)</b>	<b>14</b>
6.1	问题	14
6.2	解答	14
<b>7</b>	<b>第 7 次习题课: 秩 (2), 线性方程组的解空间</b>	<b>15</b>
7.1	问题	15
7.2	解答	16
<b>8</b>	<b>期中考试</b>	<b>18</b>
8.1	问题	18
8.2	解答	18
<b>9</b>	<b>第 8 次习题课: 可逆矩阵</b>	<b>19</b>
9.1	问题	19
9.2	解答	20

<b>10 第 9 次习题课: 矩阵的分块, 正交矩阵</b>	<b>21</b>
10.1 问题 . . . . .	21
10.2 解答 . . . . .	21
<b>11 第 10 次习题课: 线性映射</b>	<b>23</b>
11.1 问题 . . . . .	23
11.2 解答 . . . . .	23
<b>12 致谢</b>	<b>24</b>

# 1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

## 1.1 问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$
2. 设  $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-2, 1, 5), \alpha_3 = (a, 2, 10), \beta = (1, b, -1)$ . 当  $a, b$  取何值时, 向量  $\beta$  能被  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出? 何时表示系数唯一?
3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表出某个向量  $\beta$  的方式唯一 (不唯一), 则  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  表出任何向量-如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).
4. 某食品厂有四种原料  $A, B, C, D$ . 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

5. (1) 求复矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$  的行简化阶梯型矩阵  $\text{rref}(A)$ ; (2) 求齐次方程组  $AX = 0$  在复数域上的解集合;
- (3) 求齐次方程组  $AX = 0$  在实数域上的解集合; (4) 当  $y_1, y_2, y_3$  满足什么关系时, 方程组  $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$  有解?
6. 已知向量  $\alpha, \beta$  不共线, 并看成是由原点出发的有向线段  $\vec{OA}$  与  $\vec{OB}$ . 设  $u, v \in \mathbb{R}$  且  $u+v=1$ , 问向量  $\vec{OC} = u\alpha + v\beta$  的终点  $C$  在什么位置,  $\vec{AC}$  与  $\vec{CB}$  的比值是多少, 何时比值为正数.
7. 求单叶双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  上的所有直线.
8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体  $ABCD$  每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.
9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异? 
$$\begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .067 \end{cases}, \begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .066 \end{cases}$$
10. 考虑带截距的线性回归  $y \sim x_1 + \dots + x_p$ , 参考上一题, 你有什么想法和改进?

## 1.2 解答

1. 
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=7*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=2*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$
2. 
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=\textcircled{1}, \textcircled{3}-=4*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{13}{3}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
. 因此, 当  $a \neq -4$  或  $a = -4, b = -\frac{13}{2}$  时,  $\beta$  能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

3. 只需注意到表出某个向量  $\beta$  唯一  $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0)$ .

$$\textcircled{2} - = 8 * \textcircled{1}$$

4. 注意  $A, B, C, D$  的比例和为 1, 因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} - = 5 * \textcircled{1} \\ \textcircled{4} - = 15 * \textcircled{1} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} + = 10 * \textcircled{2} \\ \textcircled{4} - = 5 * \textcircled{2} \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{4} + = \frac{2}{3} * \textcircled{3} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ 因此解是 } (\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25}).$$

5. (1)  $\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} - = 2 * \textcircled{1} \\ \textcircled{3} - = i * \textcircled{1} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} - = \frac{i}{2+2i} * \textcircled{2} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} * = \frac{1}{2+2i} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(2)  $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ . (3)  $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}$ . (4) 将  $A$  变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是  $(y_1, \frac{y_2-2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$ , 因此只有当  $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$  时才有解.

6.  $\overrightarrow{AC} = (u-1)\alpha + v\beta, \overrightarrow{CB} = -u\alpha + (1-v)\beta, \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{1-u}{1-v} = \frac{v}{1-v}$ , 因此  $A, C, B$  三点共线, 且当  $0 < u, v < 1$  时比值为正数.

7.  $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$ , 因此直线可以表示形式为  $\begin{cases} x-z = k(1-y) \\ x+z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$ , 即是  $\begin{cases} x+ky-z = k \\ kx-y+kz = 1 \end{cases}$ . 特别

地, 当  $y = \pm 1$  时,  $z = \pm x$  也是位于该曲面上的直线.

8.  $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$ , 设  $BC, AC, AB$  中点分别为  $D, E, F$ , 设  $G = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$ . 只需验证  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$  分别与  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$  共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.

9. 用 Gauss 消元法可求得解为  $(1, -1)$  和  $(-666, 834)$ . 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.

10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如  $L_2$  正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着强相关变量, 干扰回归结果.

## 2 第 2 次习题课: 矩阵的基本运算, 集合论

### 2.1 问题

1. (1) 用向量表示平面  $x+2y+3z=1$ ; (2) 用向量表示直线  $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$ ; (3) 求平面  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $k, l \in \mathbb{R}$  的平面方程.

2. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ . (1) 解齐次方程组  $AX=0$ ; (2) 已知  $X = (1, 1, 2, 3, 0)^T$  是方程组  $AX = \beta$  的一个

解, 写出  $AX = \beta$  的所有解.

3. 用  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  表示从全体有理数及  $\sqrt{3}$  出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由  $\sqrt{3}$  生成的数域.

(1) 证明  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ; (2) 数域  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  中的每个数写成  $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$  的方式唯一.

4. 用  $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$  表示从全体整数及  $\sqrt{-5}$  出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由  $\sqrt{-5}$  生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

5. 若  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  能线性表出  $\beta_1, \dots, \beta_s$ , 且  $\beta_1, \dots, \beta_s$  又能线性表出  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ , 证明  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  能线性表出  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ .
6. 考虑  $n$  个城市之间的航班问题: 记  $H = (a_{ij})$  为邻接矩阵, 这里  $a_{ij}$  表示从城市  $i$  到  $j$  的航班数. (1) 解释  $H^k$  的  $(i, j)$  元的含义; (2) 设  $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?
7. 设  $A$  是有向图  $G$  的邻接矩阵, 证明  $G$  中的循环三角形的个数等于  $\text{tr}(A^3)/3$ .
8. 由集合  $A$  的所有子集组成的集合称为  $A$  的幂集, 记为  $P(A)$ . 设集合  $A$  非空, 证明  $\text{card}(P(A)) > \text{card}(A)$ .
9.  $X$  为非空集合, 映射  $f: P(X) \rightarrow P(X)$  满足  $f(A) \subset f(B), \forall A \subset B$ . 那么存在  $T \subset X$  使得  $f(T) = T$ .
10. (1) 找到  $[0, 1]$  到  $[0, 1] \times [0, 1]$  的双射; (2) 找到  $(0, 1)$  到  $\mathbb{R}$  的双射.
11. 罗素悖论: 某班的同学在习题课上作游戏. 每个学生可以给班里任意多同学发一次短信 (可包括自己). 记  $X$  是全体没有给自己发短信的同学构成的集合. 若某同学猜中  $X$  并给且只给  $X$  中的每个同学发了短信, 则该同学获胜. 问: 此游戏有无获胜者?
12. 学习使用 numpy 包, 并实现矩阵的基本运算.

## 2.2 解答

1. (1) 先求得一个点坐标  $(1, 0, 0)$ , 再去求  $x + 2y + 3z = 0$  的一组基础解系:  $(2, -1, 0)$  和  $(3, 0, -1)$ , 因此向量表示为  $(1, 0, 0) + k(2, -1, 0) + l(3, 0, -1), k, l \in \mathbb{R}$ .
- (2) 先求得一个点坐标  $(0, -1, 1)$ , 再去求方向向量  $(1, 2, 3) \times (3, 2, 1) = (-4, 8, 4)$ , 因此向量表示为  $(0, -1, 1) + t(-1, 2, 1), t \in \mathbb{R}$ .
- (3) 先求得一个点坐标  $(1, 1, 2)$ , 再去求法向量  $(1, 2, 0) \times (2, 0, 1) = (2, -1, -4)$ , 因此平面可表示为  $2x - y - 4z = -7$ .

$$2. (1) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}-\frac{3}{2}*\text{①}, \text{③}-\frac{1}{2}*\text{①}, \text{④}-\text{①}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}-\frac{2}{3}*\text{③}, \text{②}+\frac{5}{3}*\text{③}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_5 \\ x_3 = -2x_5 \\ x_1 + 2x_2 = -3x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$X = (-3n - 2m, m, -2n, -n, n)^T, m, n \in \mathbb{R}$  是自由变元.

(2) 解集是基础解系加上代表元, 即  $(1 - 3n - 2m, 1 + m, 2 - 2n, 3 - n, n)^T$ .

3. (1) 只需证明  $\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  对于加减乘除封闭. (2) 只需证明  $\sqrt{3}$  不是有理数 (因为  $a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \in \mathbb{Q}$ ). 用反证法,  $\sqrt{3} = \frac{a}{b}, \text{gcd}(a, b) = 1$ , 那么  $a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3|a \Rightarrow 9|a^2 \Rightarrow 3|b^2 \Rightarrow 3|b$ , 矛盾.

4. 类似可知  $\mathbb{Z}(\sqrt{-5}) = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ . 容易证明  $2 + \sqrt{-5}$  是不可约数:  $2 + \sqrt{-5} = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) \Rightarrow 9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5}) = (a + b\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$  无解; 但是  $2 + \sqrt{-5} \nmid 3 \times 3$  而  $2 + \sqrt{-5} \nmid 3$ , 因此不是素数.

5.  $(\beta_1, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)A, (\gamma_1, \dots, \gamma_t) = (\beta_1, \dots, \beta_s)B \Rightarrow (\gamma_1, \dots, \gamma_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(AB)$ , 因此可以线性表出.

6. (1) 从  $a_{ij}^2 = \sum_s a_{is}a_{sj}$  可以看出  $H^k$  的  $(i, j)$  元表示从  $i$  到  $j$  乘坐恰  $k$  次航班有多少种乘坐方式. (2)  $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3$ , 分别有 1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 2 种航班选择;  $2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$  都要倒 3 次, 是最多的.

7. 由上题知  $A^3$  的  $(i, i)$  元表示从  $i$  到  $i$  有几条恰走 3 次的路径, 三角形会在结点上算 3 次, 因此要除以 3.

8. 本题的关键是处理集合  $A$  包含无穷元素的情形. 假设存在一一映射  $f: A \mapsto P(A)$ , 则考虑集合  $A = \{x : x \notin f(x)\}$ . 此时若  $f^{-1}(A) \notin A$ , 则根据定义  $f^{-1}(A) \in A$ ; 反之亦矛盾.

9. 我们的思路应当去找满足条件  $A \subset f(A)$  的最大集合, 即令  $T = \{\cup_{\alpha} A_{\alpha} : A_{\alpha} \subset f(A_{\alpha})\}$ . 根据定义有  $T = \cup_{\alpha} A_{\alpha} \subset \cup_{\alpha} f(A_{\alpha}) = f(\cup_{\alpha} A_{\alpha}) = f(T)$ , 再根据题给条件有  $f(T) \subset f(f(T)) \Rightarrow f(T) \subset T$ .

10. (1) 全部写成无限小数, 然后作映射  $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots \rightarrow (0.a_1a_3a_5\cdots, 0.a_2a_4a_6\cdots)$ ; (2)  $y = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$ .
11. 因此在 ZF 公理体系中, 我们不考虑包含自身作为元素的集合.
12. 从 `pip install numpy` 开始. 学习使用 `np.zeros`, `np.random`, `np.mean`, `np.sum`, `np.dot`, `np.linalg.det`, `np.eye` 等函数, 并做切片和取值运算.

### 3 第 3 次习题课: 行列式 (1)

#### 3.1 问题

- 用行列式求解线性方程组  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$ .
- 求以下向量在三维几何空间张成的平行六面体体积:  $\alpha_1 = (3, 2, 1), \alpha_2 = (0, 3, 0), \alpha_3 = (7, 4, 2)$ .
- 判断以下向量组的定向:  $(1, 1), (3, -2); (2, 1, 0), (1, 0, 3), (1, 1, 1); (x, y, z), (z, x, y), (y, z, x); (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)$ ; 其中  $x + y + z > 0$  且互不相等.

4. 计算行列式: (1)  $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$ ; (2)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$ .

5. 对  $n$  阶矩阵  $A$  作如下操作: 第 1 行加上第 2 行的  $k$  倍, 第 2 行加上第 3 行的  $k$  倍, 以此类推; 最后, 第  $n$  行加上此时第 1 行的  $k$  倍. 问做这些变换相当于在  $A$  左边乘一个什么样的矩阵?  $A$  的行列式值会如何变化? 如果第  $n$  行加上的是原来第 1 行的  $k$  倍呢?

6. 计算行列式  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ .

7. 计算行列式  $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$ .

8. 计算行列式  $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$ , 其中  $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$ .

9. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & & \\ \gamma & \alpha & \beta & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 其中  $\alpha^2 - 4\beta\gamma > 0$ .

10. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

11. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$

### 3.2 解答

1.  $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = 2, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = -1.$

2.  $V = \|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

3.  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow \text{左手}; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow \text{左手}; \begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0 \Rightarrow \text{右手};$   
 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 \leq 0 \Rightarrow \text{左手}.$

4. (1)  $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2 + 16 + 16 - 4(x+1) - 16(x-2) - 4(x+1) = x^3 - 27x + 54;$

(2)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

5. 相当于左乘  $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k^2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ , 其行列式无变化, 因为是初等变换. 后面一问相当于左乘  $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$

其行列式有变化, 因为最后一步不是初等变换, 相较于原值乘上了  $1 + (-1)^{n-1}k^n$ .

6. 用第一列减去第  $i$  列的  $b_i$  倍,  $i = 2, 3, \dots, n$ , 得到  $\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i.$

7. 法 1(加边法):  $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$ , 然后用第  $i+1$  行减去第 1

行的  $x_i$  倍,  $i = 1, 2, 3, 4$ , 得到  $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$

$$\text{法 2(拆项法): } \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五}$$

$$\text{项: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4x_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3x_4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_4x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 原行列式是 } 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

$$8. \text{ 采用第 7 题的法 2(拆项法), 最后剩下 } n+1 \text{ 项: } \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \dots, \text{ 它们分别是 } (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} x_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} a_1 x_2 \cdots a_n, \dots, \text{ 整理得到原}$$

$$\text{行列式为 } (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \right) - 1 \right].$$

$$9. \text{ 若 } \beta\gamma = 0, \text{ 则行列式为 } \alpha^n. \text{ 对于一般情形, 按第一行展开得到 } D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}, \text{ 且有初值条件 } D_1 = \alpha, D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma, \text{ 然后用数列的特征值和特征公式设 } D_n = A \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n + B \left( \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n, \text{ 代入 } n=1, 2 \text{ 解出 } A \text{ 和 } B, \text{ 得到 } D_n = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}.$$

$$10. n=1 \text{ 时, } D_1 = \cos \alpha; n=2 \text{ 时, } D_2 = \cos 2\alpha; \text{ 因此可以猜测 } D_n = \cos n\alpha. \text{ 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 } D_{n+1} = 2 \cos \alpha D_n - D_{n-1} = \cos(n+1)\alpha, \text{ 知该假设成立.}$$

$$11. \text{ 法 1: 将第 1 行至第 } n-1 \text{ 行减去第 } n \text{ 行, 并提出各行和各列公因子, 得}$$

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{再将第 1 列至第 } n-1 \text{ 列减去第 } n \text{ 列, 并提出各行和各列的公因子, 得}$$

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdot & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$



按第  $n$  行展开得到递推式  $D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n(a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n)} D_{n-1}$ , 并直接计算出  $D_2$ , 得

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

法 2: 若  $a_i = a_j$  或  $b_i = b_j (i \neq j)$ , 即两行 (或两列) 相同, 则  $D_n = 0$ . 因此  $D_n$  含有因子  $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$ . 将  $D_n$  的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得  $D_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)} D'_n$ . 显然  $D'_n$  也含有上述因子. 另一方面, 由于  $D'_n$  的  $(i, j)$  元为  $\prod_{k \neq j} (a_i + b_k)$ , 所以每一个  $a_i$  在  $D'_n$  的展开式中的次数均为  $n-1$ , 因此设  $D_n = \lambda \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$ . 为确定常数  $\lambda$  的值, 我们不妨令  $a_i = -b_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 此时  $D'_n$  为对角行列式, 且有  $D_n = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \Rightarrow \lambda = 1$ . 因此可得一样的结果.

## 4 第 4 次习题课: 行列式 (2)

### 4.1 问题

1. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ . 你能求出行列式  $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$  的通式吗?

2. (1) 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$ ; (2) 计算行列式  $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ .

3.  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$  是  $n$  维列向量, 且  $|A| = a, |A - \alpha\alpha^T| = b$ , 求  $|A + 2\alpha\alpha^T|$ .

4. 考虑 3 线行列式  $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & & & \\ b_2 & a_2 & c_3 & & \\ & b_3 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_n \\ & & & b_n & a_n \end{vmatrix}$ , 记其顺序主子式为  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , 并假设它们都不为 0. 证明递推

关系  $D_s = a_s D_{s-1} - b_s c_s D_{s-2}, s \geq 3$ , 并将该矩阵  $M_n$  写成下三角矩阵和对角元都为 1 的上三角矩阵的乘积.

5. 试确定所有 3 阶 (0, 1) 行列式 (即所有元素只能是 0 或 1) 的最大值, 并给出证明和取到最大值的一个构造.

6. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}_+$ , 证明  $n$  阶行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$  能被  $2!3!\cdots(n-1)!$  整除.

7. 设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  非平凡. 证明: 若矩阵  $A$  的每一个元素  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij} = a_{ij}$ , 则  $|A|^{n-2} = 1$ .

8. 若方阵每一行每一列都恰有一个元素为 1, 其余的元素都是 0, 则称此方阵为置换矩阵. (1) 写出所有的 3 阶置换矩阵. 这些矩阵最少可由其中的几个通过反复作乘法得到? (2) 证明任意  $n$  阶置换矩阵都可由以下  $n-1$  个矩阵反复作乘法得

到:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

进一步, 任意  $n$  阶置换矩阵都可由以下两个矩阵反复作乘法得到:  $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$

9. 设  $n \geq 3, f_1, f_2, \cdots, f_n$  是次数  $\leq n-2$  的多项式, 证明: 对  $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ , 行列式  $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} \equiv 0$ , 并举例说明条件“次数  $\leq n-2$ ”不可去.

10. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos 2\phi_1 & \cdots & \cos(n-1)\phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos 2\phi_2 & \cdots & \cos(n-1)\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos 2\phi_n & \cdots & \cos(n-1)\phi_n \end{vmatrix}.$

## 4.2 解答

1. 把后  $n-1$  列加到第一列, 提出公因子  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , 用第  $(1,1)$  元消去同列其他元素, 再按第一列展开得到  $n-1$  阶行列式:

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

用所得  $n-1$  阶行列式的第  $(1,1)$  元消去同行的其他元素, 再按第一行展开得到  $n-2$  阶上三角行列式:

$$D_n = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -n & \cdots & -n & -n \\ \ddots & \vdots & \vdots \\ & -n & -n \\ & & -n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.$$

2. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c-a & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a & a-b \end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知  $D_n = b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}$ . 初始条件是  $D_1 = a$ , 因此知  $D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$ .

(2) 按第  $n$  列拆项, 得  $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & a_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b+(a_n-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + (a_n-b)E_{n-1} = b(a_1-c)(a_2-c)\cdots(a_{n-1}-c) + (a_n-b)E_{n-1}$ ; 按第  $n$  列拆项 (或由对称性), 得  $E_n = c(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_{n-1}-b) + (a_n-c)E_{n-1}$ . 两式联立得  $E_n = \frac{bf(c)-cf(b)}{b-c}$ , 其中  $f(x) = (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$ .

3. 考虑函数  $f(x) = |A + x\alpha\alpha^T| = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}$ , 因此是线性函数. 由  $f(0) = a, f(-1) = b$  知  $f(x) = a + (a-b)x$ , 因此  $f(2) = 3a - 2b$ .

4. 按最后一行展开立刻得到递推关系,  $M_n = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & & & \\ b_2 & \frac{D_2}{D_1} & 0 & & \\ & b_3 & \frac{D_3}{D_2} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & b_{n-1} & \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} & 0 \\ & & & & b_n & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2 \frac{1}{D_1} & & & \\ & 1 & c_3 \frac{D_1}{D_2} & & \\ & & 1 & c_4 \frac{D_2}{D_3} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & c_n \frac{D_{n-2}}{D_{n-1}} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$ .

5. 按第 1 行展开, 得到  $D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \leq 3$ . 下面证明  $D \neq 3$ . 若不然, 则必有  $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$ , 且  $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 1$ . 前两个行列式为 1 可以得到  $a_{22} = a_{33} = 1, a_{23} = a_{31} = 1$ ,

而此时  $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = a_{21}a_{32} - 1 \leq 0$ , 矛盾. 因此  $D \leq 2$ , 一个构造是  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ .

6. 注意到  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & \cdots & a_1(a_1-1)\cdots(a_1-n+2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & \cdots & a_2(a_2-1)\cdots(a_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n(a_n-1) & \cdots & a_n(a_n-1)\cdots(a_n-n+2) \end{vmatrix}$  (利用初等列变换, 用后面的列加减前面的列), 再将第  $k$  列提取公因子  $(k-1)!, k=3, 4, \dots, n$  即可.

7. 首先容易看出  $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 > 0$ . 其次  $|A|^2 = |AA^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n \Rightarrow |A|^{n-2} = 1$ .

8. (1) 所有 3 阶置换矩阵:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 可由其中第 2 个和第 5 个做反复乘积生成 (答案不唯一). (2)  $n$  元置换可以分解成至多  $n-1$  个对换的乘积, 而每一个对换都可以分解成

相邻对换的乘积, 因此可被这  $n-1$  个相邻对换生成; 进一步, 所有相邻对换都可被表示为  $S^{n-k}TS^k, k=0, 1, \dots, n-1$ , 因此可被  $S, T$  生成.

9. 不妨设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  互不相同. 考虑  $F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$ , 这是一个至多  $n-2$  次多项式, 有至少

$a_2, a_3, \dots, a_n$  这  $n-1$  个不同的根, 因此必恒等于 0. 若删去条件“次数  $\leq n-2$ ”, 则可令  $f_k(x) = x^{k-1}$ , 此时原行列式构成 Vandermonde 行列式, 只要  $a_1, a_2, \dots, a_n$  两两不同就不为 0.

10. 由高中三角函数知识知  $\cos k\theta = 2^{k-1} \cos^k \theta + P_{k-2}(\cos \theta)$ , 其中  $P_{k-2}$  是  $k-2$  次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos^2 \phi_1 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos^2 \phi_2 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos^2 \phi_n & \cdots & \cos^{n-1} \phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\cos \phi_i - \cos \phi_j).$$

## 5 第 5 次习题课: 线性空间, 行列式 (3)

### 5.1 问题

1. 在正实数集  $\mathbb{R}^+$  上定义运算加法  $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}^+$  和数乘  $ka = a^k, \forall k \in \mathbb{Q}$ , 证明  $\mathbb{R}^+$  在这两种运算下构成  $\mathbb{Q}$ -线性空间; 并问  $110, \sqrt{105}$  是否属于  $\text{span}\{1, 2, \dots, 10\}$ .

2. 设  $W = \{f(x) | f(1) = 0, f(x) \in \mathbb{R}[x]_n\}$ , 这里  $\mathbb{R}[x]_n$  表示实数域  $\mathbb{R}$  上的次数小于  $n$  的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明  $W$  是  $\mathbb{R}[x]_n$  的线性子空间; (2) 求  $W$  的维数和一组基.

3. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1)  $A$  的列向量组; (2)  $A$  的行向量组.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ .

4. 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ ; (2)  $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4$ ; (3)  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ ; (4)  $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 8\alpha_4, \alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4, 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3$ .

5. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$  为  $s+1$  个  $n$  维向量, 且  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$ . 证明向量组  $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_s$  线性无关的充要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关.

6. 设  $f(x)$  是复系数一元多项式, 且对于任意整数  $n$  有  $f(n)$  仍是整数. 证明或否定: (1)  $f(x)$  系数都是有理数; (2)  $f(x)$  系数都是整数.

7. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ .

8. 计算行列式  $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$  和  $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 741 & 886 & 114 & 514 \\ -741 & 0 & 1919 & 810 & 2002 \\ -886 & -1919 & 0 & 520 & 1314 \\ -114 & -810 & -520 & 0 & 220 \\ -514 & -2002 & -1314 & -220 & 0 \end{vmatrix}$ .

9. 设  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $I$  表示  $n$  阶单位矩阵. 计算行列式  $D_1 = \begin{vmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{vmatrix}$  和  $D_2 = \begin{vmatrix} I & -B \\ 0 & AB \end{vmatrix}$ , 并证明  $D_1 = D_2$ .

10. 求  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  的行列式  $A$ , 其中  $a_{ij} = \frac{\alpha_i^n - \beta_j^n}{\alpha_i - \beta_j}, i, j = 1, 2, \dots, n$ .

## 5.2 解答

1. 交换律结合律显然; 零元存在:  $1 \oplus a = a \oplus 1 = a$ ; 负元存在:  $a \oplus \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \oplus a = 1$ ; 么元存在:  $1a = a^1 = a$ ; 左分配律:  $(k+l)a = a^{k+l} = a^k a^l = ka \oplus la$ ; 右分配律:  $k(a \oplus b) = (ab)^k = a^k b^k = ka \oplus kb$ .  $\sqrt{105}$  属于, 因为  $105 = \frac{1}{2}(3 \oplus 5 \oplus 7)$ ; 110 不属于, 因为整数只能生成它的倍数的某个次方, 而  $110 = 11 \times 10$  其中 11 是素数无法生成.

2. (1) 容易证明对  $\forall f(x), g(x) \in W \Rightarrow af(x) + bg(x) \in W$ , 因此是线性子空间. (2) 令  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ ,  $f(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0$ , 因此  $f(x) = a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + \cdots + a_{n-1}(x^{n-1}-1)$ . 下面我们只需证明  $x-1, x^2-1, \cdots, x^{n-1}-1$  确实是  $W$  的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以  $\dim W = n-1$ .

3. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且  $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3, -5\alpha_1 - 4\alpha_2 = \alpha_4$ ;

(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且  $-\frac{3}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 = \beta_1$ .

4. (1) 线性相关;  $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$ . (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这五个向量却只有四个自由度.

5. 用矩阵表示为  $(\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \cdots, \beta - \alpha_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} := (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)P$ . 容易计算得

到  $\det P = (s-1)(-1)^{s-1} \neq 0$ , 因此两者线性无关等价.

6. (1) 设  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m (a_m \neq 0)$ . 取  $x_k = k$  代入, 得到线性方程组 
$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_mx_0^m = f(x_0), \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_1^m = f(x_1), \\ \cdots \\ a_0 + a_1x_m + \cdots + a_mx_m^m = f(x_m). \end{cases},$$

其系数行列式是 Vandermonde 行列式不为 0, 因此由 Cramer 法则其有唯一解  $a_i = \frac{D_i}{D}, i = 0, 1, \cdots, m$ . 由于  $D_i$  的元素均为整数, 因此  $a_i$  是有理数. (2) 结论不对, 反例是  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ .

7. 按第 3、4 行展开:  $D = (-1)^{3+4+1+6} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ . 再按第 2、3 行展开:  $D = (-1)^{2+3+1+4} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} *$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -24.$$

8. 前者是偶数阶斜对称矩阵. 若  $a = 0$ . 则按第 1、2 行展开, 得到  $D_1 = (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -b & -d \\ -c & -e \end{vmatrix} = (be - cd)^2$ .

若  $a \neq 0$ , 则将第 1 行的  $\frac{d}{a}$  倍和第 2 行的  $\frac{b}{a}$  倍加到第 3 行上, 将第 1 行的  $\frac{e}{a}$  倍和第 2 行的  $\frac{c}{a}$  倍加到第 4 行上, 得到

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f + \frac{cd}{a} - \frac{be}{a} \\ 0 & 0 & -f + \frac{be}{a} - \frac{cd}{a} & 0 \end{vmatrix}. \text{ 然后按第 1、2 行展开, 得到 } D_1 = (af - be + cd)^2.$$

后者是奇数阶斜对称矩阵, 因此行列式为  $D_2 = 0$  (因为  $|M_2| = |M_2^T| = |-M_2| = (-1)^{2k+1}|M_2| \Rightarrow |M_2| = 0$ ).

9. 按前  $n$  行展开, 得到  $D_1 = |A||B|, D_2 = |AB|$ . 将后面  $n$  行减去前面  $n$  行的  $A$  倍 (按矩阵  $(I, -B)$  左乘  $A$  理解), 可使  $M_1$  转化为  $M_2$ .

10. 利用  $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$  及行列式乘法规则  $|AB| = |A||B|$ , 知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \\ \beta_1^{n-2} & \beta_2^{n-2} & \cdots & \beta_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j).$$

## 6 第6次习题课: 秩 (1)

### 6.1 问题

1. 作初等行变换将矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$  化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求

$A$  列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出  $A$  的每个列向量. (2) 求  $A$  行空间的维数和一组基, 写出  $A$  的各个行向量在此基下的坐标. (3)  $a, b$  取何值时, 向量  $(3, a, b, b, 3)$  属于  $A$  的行空间?

2. 设向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  能线性表出  $\beta_1, \dots, \beta_s$ , 并且有  $\beta_i = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r, \forall i = 1, 2, \dots, s$ . 证明若矩阵  $B = (b_{ij})_{s \times r}$  列向量线性无关, 则  $\beta_1, \dots, \beta_s$  也能线性表出  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ .

3. 证明: 若组 I 能线性表出组 II, 且  $\text{rank}(I) = \text{rank}(II)$ , 则组 II 也能表出组 I.

4. 矩阵  $A, B, C$  满足  $A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$ . 证明: (1)  $A$  的列向量组能线性表出  $C$  的列向量组; (2)  $\text{rank}(A) \geq \text{rank}(C)$ ; (3) 若矩阵  $B$  行满秩, 则  $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$ , 且  $C$  的列向量组也能线性表出  $A$  的列向量组.

5. 对不同的  $\lambda$  取值, 讨论矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$  的秩.

6. 若矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  满足  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \leq i \leq n$ , 则称  $A$  是主对角占优矩阵. 证明  $\det(A) \neq 0$ . 进一步, 证明若  $a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i \leq n$ , 则  $\det(A) > 0$ .

7. 设矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  满足 (1)  $a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i \leq n$ ; (2)  $a_{ij} < 0, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$ ; (3)  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j \leq n$ . 求矩阵  $A$  的秩.

8. 设线性方程组  $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, 1 \leq i \leq n$  的系数矩阵  $A$  的秩等于矩阵  $B = \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$  的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.

9. 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \beta = (b_1, \dots, b_m)^T$ . 证明下列命题相互等价: (1)  $Ax = \beta$  有解; (2)  $A^T x = 0$  的解均满足  $x^T \beta = 0$ ; (3) 方程组  $\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} \\ 1 \end{pmatrix}$  无解.

10. 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 且  $|a_{ii}a_{jj}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$  对任意  $1 \leq i \neq j \leq n$  成立. 证明  $\det(A) \neq 0$ .

11. 利用矩阵  $\begin{pmatrix} I_{s \times s} & 0_{s \times m} \\ 0_{n \times s} & A_{n \times s} B_{s \times m} \end{pmatrix}$  的初等行列变换证明  $s + \text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .

12. 设  $A, B$  是幂等矩阵 (即  $A^2 = A, B^2 = B$ ), 且  $I - A - B$  满秩, 证明  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

### 6.2 解答

1.  $A$  的简化阶梯型矩阵是  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是  $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ , 且  $\beta_3 = 2\beta_1 - \beta_2, \beta_5 =$

$3\beta_1 + 5\beta_2 - \beta_4$ . (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ , 且  $\alpha_3 = -\frac{31}{9}\alpha_1 - \frac{55}{9}\alpha_2 + \frac{17}{9}\alpha_4, \alpha_5 = -\frac{20}{9}\alpha_1 - \frac{23}{9}\alpha_2 + \frac{22}{9}\alpha_4$ . (3) 仔细计算即可.  $a = 4, b = 2$ .

2. 只需证明能表出  $\alpha_1$ . 利用高斯消元法去解方程  $\beta_{i1} = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r$ , 由于  $B$  列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成  $\begin{bmatrix} I_{r \times r} \\ 0_{(s-r) \times r} \end{bmatrix}$  (可用递推法或归纳法证明之), 从而  $\alpha_1$  能被  $\beta_1, \dots, \beta_s$  线性表出.

3. 设  $\beta_1, \dots, \beta_s$  是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量  $\alpha$ , 由于组 I 能表出  $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$ , 从而  $\text{rank}(\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha) \leq s$ , 即  $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$  线性相关. 由于  $\beta_1, \dots, \beta_s$  线性无关, 因此它们能表出  $\alpha$ .

4. (1) 由矩阵乘法定义知  $c_i = b_{1i}a_1 + \cdots + b_{ni}a_n, \forall 1 \leq i \leq p$ . (2) 由第 (1) 问结论立得. (3) 用第 2 题结论立得.  
 5. 显然矩阵  $A$  的秩至少为 2 (第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和  $-2$ , 因此  $\lambda = 0$ , 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4 列线性表出. 综上,  $\lambda = 0$  时秩为 2, 否则为 3.

6. (1) 反证法. 假设  $A$  的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$ . 我们不妨设在这  $n$  个系数里面  $k_1$  的绝对值最大, 那么就有  $k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n} = 0$ . 但是  $|k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_2a_{12}| - \cdots - |k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_1|(|a_{12}| + \cdots + |a_{1n}|) > 0$ , 矛盾. 因此  $\det(A) \neq 0$ .

(2) 考虑函数  $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & a_{23}t & \cdots & a_{2n}t \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33} & \cdots & a_{3n}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ . 那么任意  $t \in [0, 1]$ ,  $A(t)$  都是主对角阵占优矩阵, 因此  $\det(A(t)) \neq 0$ .

0. 由于  $\det(A(0)) > 0$ , 由函数连续性知  $\det(A(1)) > 0$ , 此即原命题.

7. 首先由条件 (3) 知  $|A| = 0$ , 因此  $\text{rank}(A) \leq n - 1$ . 其次考虑  $A$  中元素  $a_{11}$  的余子式  $M_{11}$ , 由条件 (1)(2) 知其严格主对角占优, 因此  $M_{11} > 0$ . 这意味着  $\text{rank}(A) = n - 1$ .

8. (1)  $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A, b) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}(B) = \text{rank}(A)$ , 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.

(2) 不成立, 考虑  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$ ,  $\text{rank}(A) = 2$ , 而  $\text{rank}(B) = 3$ .

9. (1)  $\Rightarrow$  (2): 设  $A\xi = \beta$ , 从而  $x^T\beta = x^TA\xi = (A^Tx)^T\xi = 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): 显然.

(3)  $\Rightarrow$  (1):  $\text{rank} \begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < \text{rank} \begin{pmatrix} A^T & \mathbf{0} \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$ , 即是  $\text{rank}(A, \beta) < \text{rank} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \leq \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \text{rank} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + 1$ , 因此  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, \beta)$ , 从而方程组  $Ax = \beta$  有解.

10. 反证法. 假设  $\det(A) = 0$ , 则  $Ax = 0$  有非零解  $(c_1, \cdots, c_n)$ . 若仅有  $c_i \neq 0$ , 则  $A$  的第  $i$  列全零, 与条件矛盾. 下设第  $i, j$  个分量不为 0, 且  $|c_i| \geq |c_j| \geq |c_k|, i \neq j$ . 考察第  $i$  个和第  $j$  个等式, 有  $|a_{ii}c_i| \cdot |a_{jj}c_j| = |\sum_{k \neq i} a_{ik}c_k| \cdot |\sum_{l \neq j} a_{jl}c_l| \leq |c_j| \cdot |\sum_{k \neq i} a_{ik}| \cdot |c_i| \cdot |\sum_{l \neq j} a_{jl}| \Rightarrow |a_{ii}a_{jj}| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$ , 矛盾.

11.  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}+} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}-} \begin{pmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{pmatrix}$ , 最左边矩阵秩为  $s + \text{rank}(AB)$ , 最右边矩阵秩大于等于  $\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .

12.  $A(I - A - B) = -AB$ , 因此  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A(I - A - B)) = \text{rank}(A)$ , 同理  $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$ .

## 7 第 7 次习题课: 秩 (2), 线性方程组的解空间

### 7.1 问题

1. 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵. 证明  $A$  的列向量组线性无关当且仅当  $A$  至少有一个  $n$  阶非零子式.  
 2. 设矩阵  $A$  的列向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,  $\alpha_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ , 且  $\beta = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4$ . (1) 求  $AX = \beta$  的通解. (2) 求  $A$  行空间的一组基. (3) 将  $A$  分解为一个列满秩与一个行满秩矩阵的乘积.

3. 计算矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  的秩  $r$ , 并计算其  $r$  阶非零子式的个数.

4. 设矩阵  $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$  列满秩,  $B = (\beta_1, \cdots, \beta_s), C = (\gamma_1, \cdots, \gamma_s)$  满足  $AB = C$ . 证明: (1)  $B$  的解空间和  $C$  的解空间相同; (2) 若  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$  线性无关, 则  $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \cdots, \gamma_{i_r}$  也线性无关; 特别地, 有  $\text{rank}(B) = \text{rank}(C)$ .

5. 设  $W$  是矩阵空间  $M_n(K)$  的一个子空间. 证明: 若  $\dim(W) \geq n^2 - n + 1$ , 则  $W$  中至少包含一个满秩的矩阵.

6. 已知矩阵  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$  满秩, 求两直线  $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{x-b_3}{b_1-b_2} = \frac{x-c_3}{c_1-c_2}, \frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$  的位置关系.
7. 设  $B$  是  $3 \times 4$  矩阵,  $(2, 0, 1, 3)^T$  是齐次方程组  $BX = 0$  的一个解. 设  $A$  是将行向量  $(2, 0, 1, 3)$  添加到  $B$  的最下面得到的方阵. 已知  $A$  的  $(4, 1)$  元的余子式为 6, 求  $\det(A)$ .
8.  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $b$  是  $m \times 1$  矩阵. 证明线性方程组  $A^T Ax = A^T b$  总有解.
9. 设数域  $K$  上的  $n$  阶方阵  $A$  的第  $(i, j)$  元是  $a_i - b_j$ . 求  $\det(A)$ , 并计算当  $n \geq 2$  且  $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$  时  $AX = 0$  的解空间维数和一组基.
10. 设  $A, B$  是数域  $K$  上的  $n$  阶方阵,  $AX = 0, BX = 0$  分别有  $l, m$  个线性无关的解向量. 证明: (1)  $(AB)X = 0$  至少有  $\max(l, m)$  个线性无关的解向量; (2) 如果  $l + m > n$ , 那么  $(A + B)X = 0$  必有非零解; (3) 如果  $AX = 0$  和  $BX = 0$  没有公共的非零解向量, 且  $l + m = n$ , 那么  $K^n$  中的任一向量  $\alpha$  都可以唯一的分解为  $\alpha = \beta + \gamma$ , 其中  $\beta, \gamma$  分别是  $AX = 0$  和  $BX = 0$  的解向量.
11.  $A, B$  都是  $m \times n$  矩阵, 线性方程组  $AX = 0$  和  $BX = 0$  同解. 问  $A, B$  的列向量组是否等价、行向量组是否等价.
12. 证明: 若数域  $K$  上的  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  的主对角元  $a_{ii}$  均不为零, 则存在向量  $X$  使得  $AX$  的每个分量都不为零.
13. 证明:  $AX = 0$  有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是  $A$  的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.
14. 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 证明: (1) 若  $A^{k-1}\alpha \neq 0, A^k\alpha = 0$ , 那么  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  线性无关; (2)  $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$ .

## 7.2 解答

1. 充分性: 存在  $n$  阶非零子式  $\Rightarrow$  在这  $n$  阶子式内的列向量组线性无关  $\Rightarrow$  作为延长组的  $A$  列向量组线性无关.  
 必要性:  $A$  列向量组线性无关  $\Rightarrow \text{rank}(A) = n \Rightarrow$  行向量组秩也为  $n \Rightarrow$  存在  $n$  个线性无关的行向量  $\Rightarrow$  这  $n$  个线性无关的行向量构成的子式行列式非零.
2. (1) 其实是去求解方程  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4(2\alpha_2 - \alpha_3) = \alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 + 2x_4 = 2, x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow$  通解是  $(1, 2 - 2t, t, t)$ .
- (2)(3)  $\text{rank}(A) = 3$ , 且有分解  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 因此行空间一组基为  $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1)$ .
3. 先求出其行简化阶梯矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  知其秩为 3, 且有 5 个列极大线性无关组 (第 5 列必选, 第 2 列、第 3 列至多选一个, 其余随意); 观察原矩阵易知有 2 个行极大无关组 (第 2 行、第 3 行至多选一个, 其余随意); 因此有  $2 \times 5 = 10$  个 3 阶非零子式.
4. (1) 由于  $A$  列满秩, 因此  $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ , 即  $CX = ABX = 0 \Rightarrow BX = 0$ . 反过来则显然.  
 (2) 只需注意到  $k_1\gamma_{i_1} + \dots + k_r\gamma_{i_r} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)(k_1\beta_{i_1} + \dots + k_r\beta_{i_r}) = 0 \Leftrightarrow k_1\beta_{i_1} + \dots + k_r\beta_{i_r} = 0$ . 后一问取极大线性无关组知  $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(C)$ , 由矩阵乘法又知道  $\text{rank}(C) = \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$ .
5. 将  $M_n(K)$  的矩阵平铺开看成是  $n^2$  维的行向量, 并取该子空间的一组基  $A_1, \dots, A_r$ . 把这  $r$  个行向量在  $\text{axis} = 0$  方向拼成  $r \times n^2$  的矩阵, 并可得到其简化阶梯型矩阵  $J$ . 注意到  $J$  的行向量  $B_1, \dots, B_r$  也是该子空间的一组基, 这组基的线性组合能使得矩阵在某  $r$  个位置取到任意的值. 下面用归纳法证明: 任取  $n \times n$  矩阵  $A$  中的  $n^2 - n + 1$  个位置, 我们总可以在这些位置填上 0 或 1, 使得不管矩阵  $A$  其余的  $n - 1$  个位置填什么数,  $A$  的行列式总为  $\pm 1$ . 假设命题对  $n - 1$  级的方阵成立, 考察  $n$  阶方阵. 由抽屉原理, 总有一行 (不妨设是第  $i$  行), 该行的  $n$  个元素都可任意填选. 再选一列 (不妨设是第  $j$  列), 该列中存在某个位置不能任意填选. 取  $(i, j)$  元为 1,  $(i, j)$  元为 0, 那么在  $(i, j)$  元的余子式中最多只有  $n - 2$  个元素不能任选, 由归纳假设知总可在子阵中能任意填选的地方填上 0 或 1, 使得  $(i, j)$  元的余子式取  $\pm 1$ . 在此填法下,  $n$  阶方阵  $A$  的行列式是  $(i, j)$  元的代数余子式, 即  $\pm 1$ . 由数学归纳法知命题得证.
6. 由矩阵满秩知  $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$  和  $(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$  线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三



列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证  $x_3 + k(x_1 - x_2) = x_1 + t(x_2 - x_3), x = a, b, c$  对于  $k, t$  是否有解. 由于矩阵满秩, 该方程系数必须满足  $t + 1 = k - 1 = t + k = 0$ , 因此  $t = -1, k = 1$ . 从而两直线相交.

7. 即  $|(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)| = 6$ , 问  $\left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right|$ . 按第四行展开得  $|A| = 2 * (-6) - 1 * |(-\frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_4, \alpha_2, \alpha_4)| + 3 * |(-\frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_4, \alpha_2, \alpha_3)| = -42$ .

8. 先证明  $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$ . 首先显然  $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A)$ , 其次  $A^T A x = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker}(A) \Rightarrow \text{rank}(A^T A) \geq \text{rank}(A)$ . 接着, 由于  $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A^T A, A^T b) \leq \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A)$  知系数矩阵和增广矩阵秩相等, 因此方程有解.

9. (1)  $n = 1$  时  $|A| = a_1 - b_1$ ,  $n = 2$  时  $|A| = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$ .  $n > 2$  时由于  $A = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ , 因此

此  $\text{rank}(A) \leq 2$ , 从而  $|A| = 0$ .

(2)  $n = 2$  时  $|A| \neq 0$ , 因此解空间只有零解, 维数为 0, 不存在基.  $n > 2$  时, 由于  $\text{rank}(A) \leq 2$  且显然  $A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} \neq 0$ , 因此

此  $\text{rank}(A) = 2$ , 解空间维数是  $n - 2$ . 因此只需解方程  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} X = 0$  即可 (这个分解后的系数矩阵秩也为

2, 因此同解). 直接计算得到一组基为  $\eta_i = \left( \frac{b_i - b_2}{b_2 - b_1}, \frac{b_1 - b_i}{b_2 - b_1}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{第 } i \text{ 个}}, 0, \dots, 0 \right)^T, i = 3, 4, \dots, n$ .

10. (1)  $n - \text{rank}(AB) \geq \max(n - \text{rank}(A), n - \text{rank}(B)) \geq \max(l, m)$ .

(2)  $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n - l + n - m < n$ , 因此  $(A + B)X = 0$  必有非零解.

(3) 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  与  $\beta_1, \dots, \beta_m$  分别是  $AX = 0, BX = 0$  线性无关的解. 考虑方程  $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l + \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_m \beta_m = 0$ , 则  $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l = -\mu_1 \beta_1 - \dots - \mu_m \beta_m$  是  $AX = 0$  和  $BX = 0$  的公共解. 由题意知其必然为零向量, 又由  $\{\alpha_i\}_{i=1}^l, \{\beta_j\}_{j=1}^m$  线性无关性知  $\lambda_1 = \dots = \lambda_l = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$ . 因此  $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_m$  整体线性无关. 又由于  $l + m = n$ , 因此他们是  $K^n$  一组基, 从而任一向量都可唯一被它们线性表出, 相应的被表出的两部分也就对应了  $\beta$  和  $\gamma$ . 唯一性可由  $\alpha = \beta_1 + \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1$  是  $AX = 0$  和  $BX = 0$  的公共解  $\Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1 = 0$  得到.

11. 第 1 个结论不对, 比如  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . 第 2 个结论对. 若解空间 0 维, 则  $A, B$  均列满秩, 也都可以通

过初等行列变换得到其简化阶梯形矩阵  $\begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}$ , 因此等价. 其余情况, 设解空间  $r \geq 1$  维, 任取  $AX = 0$  的一个基础解系  $X_1, \dots, X_r$  构成  $n \times r$  矩阵  $C$ . 考虑线性方程组  $C^T X = 0$ , 其解空间维数为  $n - r = \text{rank}(A)$ . 由于  $C^T A^T = 0$ , 因此  $A$  的行空间是该解空间的一个子空间. 由于它们维数相等, 因此  $A$  的行空间就是该解空间. 同理  $B$  的行空间也是该解空间.

12. 注意到  $W_i = \{X \in K^n : (a_{i1}, \dots, a_{in})X = 0\}, i = 1, 2, \dots, n$  都是  $K^n$  的  $n - 1$  维子空间, 由于有限个  $n - 1$  维子空间张不满  $n$  维全空间, 从而存在  $X_0 \in K^n \setminus (W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n)$ , 此时  $AX_0$  的每个分量都不为零.

13. 必要性. 设  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$  是强非零解, 则  $\alpha_i = \sum_{k \neq i} (-\frac{x_k}{x_i}) \alpha_k, \forall i = 1, \dots, n$ .

充分性. 不妨设  $\alpha_i = \sum_{k \neq i} t_{ki} \alpha_k, \forall i = 1, \dots, n$ , 则记  $T = \begin{pmatrix} 1 & -t_{12} & -t_{13} & \cdots & -t_{1,n-1} & -t_{1,n} \\ -t_{21} & 1 & -t_{23} & \cdots & -t_{2,n-1} & -t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t_{n-1,1} & -t_{n-1,2} & -t_{n-1,3} & \cdots & 1 & -t_{n-1,n} \\ -t_{n1} & -t_{n2} & -t_{n3} & \cdots & -t_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ , 从

而  $AT = 0$ . 由于  $T$  的任一主对角元均不为零, 从而存在  $X_0$  使得  $TX_0$  每个分量都不为零, 此即该强非零解.

14. (1) 设  $\lambda_1 \alpha + \lambda_2 A\alpha + \dots + \lambda_k A^{k-1} \alpha = 0$ , 两边左乘  $A^{k-1}$  知  $\lambda_1 = 0$ , 再左乘  $A^{k-2}$  知  $\lambda_2 = 0$ , 以此类推知线性无关.

(2) 显然  $A^n X = 0 \Rightarrow A^{n+1} X = 0$ . 若存在  $A^{n+1} \alpha = 0$  但  $A^n \alpha \neq 0$ , 则根据 (1) 结论知  $\alpha, A\alpha, \dots, A^n \alpha$  线性无关, 这是  $n$  维空间是不可能的. 因此  $A^{n+1}$  和  $A^n$  解空间相同, 从而  $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$ .

## 8 期中考试

### 8.1 问题

1. 求  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

2. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \dots, \beta_s$  是  $\mathbb{R}^n$  中的两个线性无关组. 证明  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$  线性无关当且仅当  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle = \{0\}$ .

3. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} b_n & x & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ b_2 & \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x+b_1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . (1) 将  $A$  写成一个上三角矩阵与一个下三角矩阵的乘积; (2) 求  $A$  的行

列式.

4. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \dots, \beta_r$  是  $\mathbb{R}^n$  中的两个向量组, 其中  $\beta_1, \dots, \beta_r$  线性无关. 证明存在无穷多个实数  $k$ , 使得向量组  $\alpha_1 + k\beta_1, \dots, \alpha_r + k\beta_r$  线性无关.

5. 已知矩阵  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5]$  与  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$  的行向量组等价, 且  $\alpha_2 = (2, 1, 2, 1)^T$ ,  $\alpha_5 = (7, 3, 7, 3)^T$ . 又知方

程组  $AX = \beta$  的一个解为  $X = (1, 1, -1, 0, 1)^T$ , 这里  $\beta = (7, 5, 7, 4)^T$ . (1) 写出矩阵  $A$  及其行简化阶梯形矩阵  $J$ ; (2) 求  $A$  行空间的一组基, 并确定当  $a, b$  为何值时,  $(5, 3, 6, a, b)$  落在  $A$  的行空间里; (3) 求方程组  $AX = \beta$  的所有解; (4) 求所有矩阵  $B$ , 使得  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5]B$ .

6. 设  $A_{ij}$  是行列式  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$  中  $(i, j)$  元的代数余子式. 证明  $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n & y \end{vmatrix} = Dy - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_ix_j$ .

7. 已知矩阵  $A$  的列数与矩阵  $B$  的行数相等. 记  $A$  的解空间为  $W$ ,  $B$  的列空间为  $V$ . 证明  $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$  当且仅当  $V \cap W = \{0\}$ .

### 8.2 解答

1. 利用拆项大法, 注意若有两列成比例则行列式为 0. 从而最后只会剩下  $n+1$  个行列式:

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3y_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1y_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1}y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_ny_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

2. “ $\Rightarrow$ ”: 若  $x = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = \mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_s\beta_s \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle$ , 则  $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r - \mu_1\beta_1 - \cdots - \mu_s\beta_s = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_1 = \cdots = \mu_s = 0 \Rightarrow x = 0$ .

“ $\Leftarrow$ ”: 考虑  $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r + \mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_s\beta_s = 0$ , 这意味着  $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = -\mu_1\beta_1 - \cdots - \mu_s\beta_s \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle = \{0\} \Rightarrow \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r = 0, \mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_s\beta_s = 0$ . 由两组向量  $\{\alpha_i\}_{i=1}^r, \{\beta_j\}_{j=1}^s$  各自内部的线性无关

性知  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_1 = \cdots = \mu_s = 0$ , 因此整体也线性无关.

3. (1) 通过行变换 (倒数第二行加上倒数第一行的  $x$  倍, 倒数第三行加上倒数第二行的  $x$  倍,  $\cdots$ ) 得到  $A = LU$ , 其中

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^2 + b_1x + b_2 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ x + b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2)  $|A| = |L||U| = (-1)^{n-1}(x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n)$ .

4. 将  $\beta_1, \cdots, \beta_r$  扩充为  $\mathbb{R}^n$  的一组基  $\beta_1, \cdots, \beta_n$ , 并任意选择  $n-r$  个向量  $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ . 行列式  $|(\alpha_1 + k\beta_1, \cdots, \alpha_n + k\beta_n)|$  是一个关于  $k$  的至多  $n$  次多项式, 其等于零至多只有  $n$  个解 (令  $k \rightarrow \infty$  知此多项式不恒为零), 且在该行列式不等于零时  $\alpha_1 + k\beta_1, \cdots, \alpha_r + k\beta_r$  线性无关, 因此存在无穷多个实数  $k$ .

5. (1) 容易得到  $\alpha_1 - \alpha_3 = (-2, 1, -2, 0)^T$ , 并求出题给定的矩阵行空间一组基是  $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ . 考虑其前三个分量, 由能被这组基表出知  $\alpha_3 = 2\alpha_2 = (4, 2, 4, 2)^T$ ,  $\alpha_1 = (2, 3, 2, 2)^T$ , 从而  $\alpha_4 = (8, 6, 8, 3)$ . 因此

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 一组基为  $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ . 考察各系数, 知当  $a = 14, b \in \mathbb{R}$  时, 该向量落在  $A$  的行空间里.

(3) 先求出  $AX = 0$  的解, 即  $(\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_5)X = 0$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$  线性无关. 通解为  $(t_1, 3t_1 - 2t_2, t_2, -t_1, 0)^T$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  是自由变元. 因此  $AX = \beta$  的通解是  $(t_1 + 1, 3t_1 - 2t_2 + 1, t_2 - 1, -t_1, 1)^T$ .

(4) 容易求得  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

6. 按最后一行展开, 得到  $\text{LHS} = Dy + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i+1} x_i D_i$ , 其中  $D_i$  是把  $D$  中第  $i$  列删去, 最后一列补上  $(x_1, \cdots, x_n)^T$  得到的行列式. 再按最后一列对所有  $D_i$  展开, 得到  $D_i = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} (-1)^{i+j} A_{ij} x_j$ , 直接代入得到 RHS.

7. 注意到  $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB) \Leftrightarrow \text{Ker}(B) = \text{Ker}(AB)$ .

“ $\Rightarrow$ ”: 考虑  $x \in V \cap W$ , 则可设  $x = By$ . 由于  $AB y = Ax = 0$ , 因此  $y \in \text{Ker}(AB) = \text{Ker}(B) \Rightarrow By = 0 \Rightarrow x = 0$ .

“ $\Leftarrow$ ”: 显然  $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$ . 若  $\text{rank}(AB) < \text{rank}(B)$ , 则  $\text{Ker}(AB) \neq \text{Ker}(B)$ , 即  $\exists x \in \text{Ker}(AB)$  但  $x \notin \text{Ker}(B)$ , 此时  $Bx \neq 0$ , 但是  $Bx \in V \cap W$ .

## 9 第 8 次习题课: 可逆矩阵

### 9.1 问题

1.  $n$  阶方阵  $A, B, A+B$  均可逆, 证明  $A^{-1} + B^{-1}$  也可逆并求其逆矩阵.

2.  $n$  阶方阵  $A, B$  满足  $A+B=AB$ , 证明  $AB=BA$ .

3. 证明可逆的上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵.

4. 计算矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & & 1 & \cdots & n-2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$  的逆.

5.  $A$  是  $n$  阶方阵, 试根据  $\text{rank}(A)$  的取值讨论  $\text{rank}(A^*)$ , 其中  $A^*$  是它的伴随矩阵.

6. 已知  $I_{m \times m} - A_{m \times n} B_{n \times m}$  可逆, 证明  $I_{n \times n} - B_{n \times m} A_{m \times n}$  也可逆并求其逆矩阵.

7.  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵,  $\alpha, \beta$  是  $n$  维列向量, 且矩阵  $A + \alpha\beta^T$  可逆, 证明  $(A + \alpha\beta^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1 + \beta^TA^{-1}\alpha}$ .

8. 计算矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix}$  的逆, 其中  $a_i > 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$ .

9. 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 求  $(A^*)^*$ .

10. 设  $n$  阶方阵  $A$  恰有  $k$  个  $n-1$  阶子式等于 0, 其中  $1 \leq k \leq n-1$ . 证明  $A$  可逆.

11. 设  $A, B$  是  $n$  阶方阵,  $A^*, B^*$  为对应的伴随矩阵, 试求  $2n$  阶方阵  $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$  的伴随矩阵.

12.  $A$  是  $n$  阶方阵 ( $n \geq 3$ ),  $A^3 = O$ , 证明矩阵  $M = \begin{bmatrix} I & A \\ A & I \end{bmatrix}$  可逆, 并求其逆.

## 9.2 解答

1. 由于  $[(A+B)^{-1}B](I+B^{-1}A) = I$ , 因此  $(I+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = I \Rightarrow (A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B = (I+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = I \Rightarrow (A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B$ .

2.  $A+B=AB \Rightarrow (A-I)(B-I) = I \Rightarrow (B-I)(A-I) = I \Rightarrow BA = A+B = AB$ .

3. 将单位矩阵拼在原矩阵右边, 其行变换只需不断用上面的行加减下面的行, 此操作只会将单位矩阵变成上三角矩阵.

4. 记  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $A = I + 2J + \cdots + nJ^{n-1}$ . 由于  $A(I - 2J + J^2) = 0$ , 因此  $A^{-1} = I - 2J + J^2$ .

5. 当  $\text{rank}(A) = n$  时, 由于  $AA^* = |A|I$ , 从而  $A^*$  可逆, 因此  $\text{rank}(A^*) = n$ . 当  $\text{rank}(A) = n-1$  时, 由于  $AA^* = 0$ , 且  $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rank}(A) = 1$ , 又有  $A$  中存在  $n-1$  阶非零子式, 因此  $A^*$  不全零,  $\text{rank}(A^*) = 1$ . 当  $\text{rank}(A) \leq n-2$  时,  $A$  中不存在  $n-1$  阶非零子式, 因此  $A^*$  全零, 从而  $\text{rank}(A^*) = 0$ .

6.  $(I-BA)(I+B(I-AB)^{-1}A) = I - BA + B(I-AB)^{-1}A - BAB(I-AB)^{-1}A = I - BA + B(I-AB)(I-AB)^{-1}A = I$ , 因此  $(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A$ .

7. 注意到  $A + \alpha\beta^T = A(I + A^{-1}\alpha\beta^T)$ , 因此  $(A + \alpha\beta^T)^{-1} = (I + A^{-1}\alpha\beta^T)^{-1}A^{-1} = (I - A^{-1}\alpha(1 + \beta^TA^{-1}\alpha)^{-1}\beta^T)A^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1 + \beta^TA^{-1}\alpha}$ .

8.  $A = \text{diag}(a_1, \cdots, a_n)(I_n + \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}) \Rightarrow A^{-1} = (I_n - (1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}) \text{diag}(\frac{1}{a_1}, \cdots, \frac{1}{a_n})$ .

9. 当  $n = 2$  时, 由伴随矩阵定义知  $(A^*)^* = A$ . 当  $n > 2$  时, 若  $A$  可逆, 由  $A^* = |A|(A^*)^{-1}$  知  $(A^*)^* = |A^*|A^{-1} = |A|^{n-1}|A|^{-1}A = |A|^{n-2}A$ . 若  $A$  不可逆此结论也对, 因为  $\text{rank}(A^*) = 1$ ,  $A^*$  的伴随矩阵全零.

10. 反证法. 若  $\text{rank}(A) \leq n-1$ , 则由第 5 题结论知  $\text{rank}(A^*) = 1$ . 任取某个  $A_{ij}^* = 0$ , 由于其秩为 1, 因此其第  $i$  行全零, 这与恰有  $k$  个子式为 0 矛盾.

11. 只需简单计算即可,  $M^* = \begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$ .

12. 设  $P = \begin{bmatrix} I & O \\ -A & I \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix}$ , 则  $PMQ = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I - A^2 \end{bmatrix}$ .  $A^3 = O \Rightarrow (PMQ)^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I + A^2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = Q \begin{bmatrix} I & O \\ O & I + A^2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} I + A^2 & -A \\ -A & I + A^2 \end{bmatrix}$ .

## 10 第 9 次习题课: 矩阵的分块, 正交矩阵

### 10.1 问题

1. 证明对任意  $n$  阶可逆矩阵, 存在方阵  $P, L, U$  使得  $PA = LU$ , 其中  $P$  是对换矩阵 (对换单位矩阵某两行所得矩阵) 的积,  $L$  是对角元均为 1 的下三角矩阵,  $U$  是上三角矩阵.
2. 求与任意可逆矩阵乘法可交换的矩阵构成的集合.
3. 证明行列式为 1 的  $n$  阶方阵可以写成若干个行列式为 1 的初等矩阵的乘积.
4. 已知  $P = \begin{bmatrix} A & I \\ I & I \end{bmatrix}$ , 证明  $P$  可逆当且仅当  $I - A$  可逆, 并利用  $(I - A)^{-1}$  表出  $P^{-1}$ .
5.  $A$  是  $n$  阶方阵, 证明  $\text{rank}(A - I) + \text{rank}(A^2 + A + I) = n$  当且仅当  $A^3 = I$ .
6.  $A, B$  是  $n$  阶方阵, 且满足  $\text{rank}(I - AB) + \text{rank}(I + BA) = n$ , 证明或否定:  $A$  是可逆矩阵.
7.  $A, B, C$  分别是  $m \times n, n \times s, s \times t$  矩阵, 证明  $\text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(B)$ .
8.  $A, B$  都是  $m \times n$  矩阵, 证明  $\text{rank}(A + B) \geq \text{rank}(A, B) + \text{rank}(A^T, B^T) - \text{rank}(A) - \text{rank}(B)$ .
9.  $A, B, C, D$  都是  $n$  阶方阵,  $AC = CA, AD = CB$ , 且  $A$  可逆. 求矩阵  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  的秩.
10. 矩阵  $A_{m \times m}, B_{m \times n}, C_{n \times m}, D_{n \times n}$  满足  $A$  和  $E := D - CA^{-1}B$  可逆. 证明分块矩阵  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  也可逆并求其逆.
11.  $A, B, C, D$  都是  $n$  阶方阵, 且  $AC = CA$ , 证明或否定  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$ .
12.  $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$  都是  $n$  阶方阵, 且  $A_1, B_1$  都是  $r$  阶方阵,  $AB = I$ . 证明  $|A||B_4| = |A_1|$ .
13. 记  $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, B_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ , 试证明  $A_\theta A_\omega = A_{\theta+\omega}, B_\theta B_\omega = A_{\theta-\omega}, A_\theta B_\omega = B_{\theta+\omega} = B_\omega A_{-\theta}$ , 并解释  $A_\theta, B_\theta$  作为  $\mathbb{R}^2$  上线性变换的几何含义.
14. 设  $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 0, 2)^T$ . (1) 求  $\alpha_3$  在  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  上的正交投影; (2) 求  $\alpha_3$  到  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  的距离; (3) 求到  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  的正交投影算子 (用矩阵表示).
15. 将向量  $\alpha_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T$  扩充成  $\mathbb{R}^3$  中的一组标准正交基.
16.  $U, V$  是  $\mathbb{R}^n$  子空间,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$  是任意两个向量. 证明  $\text{dist}(\alpha + U, \beta + V) = \text{dist}(\alpha - \beta, U + V)$ .

### 10.2 解答

1. 由于  $A$  可逆, 因此第一列必至少存在一个非零元  $a_{i1}$ . 将第 1 行与第  $i$  行互换使得新矩阵  $(1, 1)$  元非零, 再把第一列的  $(i, 1)$  元都化成零,  $i = 2, 3, \dots, n$ . 这意味着  $Q_1 P_{i1} A = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix}$ , 其中  $P_{i1}$  是对换矩阵,  $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}$ . 利用归纳法, 假设存在  $P_{n-1} A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$ , 因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} Q_1 P_{i1} A = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & P_{n-1} A_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

等式右边已经是一个对角元均为 1 的下三角矩阵乘一个上三角矩阵, 因此观察等式左边. 注意到  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$  是对换矩阵的积, 而  $Q_1$  是对角元均为 1 的下三角矩阵, 要是能把这两矩阵换个位置就好了. 计算知

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1} \alpha & P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1} \alpha & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix},$$

这样就可以写出

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} P_{i1} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1} \alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_{n-1} \alpha & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

于是令  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$ ,  $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_{n-1}\alpha & L_{n-1} \end{bmatrix}$ ,  $U = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}$  即可. 显然  $n = 1$  是平凡的, 因此任意  $n$  都成立.

2. 先验证初等矩阵  $P(j, i(1))$ , 即  $AP(j, i(1)) = P(j, i(1))A$ , 两边同时减去矩阵  $A$  得到  $AE_{ij} = E_{ij}A \Rightarrow a_{ii} = a_{jj}, a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ , 因此只能是数量矩阵, 其与所有矩阵都可交换.

3. 只需验证  $A$  可经一系列消法变换 (即不经过第三类初等矩阵  $P(i(c))$ ) 化为单位矩阵. 利用归纳法, 由于  $A$  可逆, 总可通过消法变换化得到  $a_{11} = 1$ , 从而再通过消法变换化为  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$ ,  $n-1$  阶方阵  $A_1$  的行列式为 1, 从而可消法变换化为单位矩阵  $I_{n-1}$ , 因此  $A$  也可通过消法变换化为单位矩阵  $I_n$ . 显然  $n = 1$  是平凡的.

4. 利用分块初等变换得  $\begin{bmatrix} A & I \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & I \end{bmatrix}$ , 因此  $|P| = |A-I|$ , 两者可逆性相互等价. 另一方面, 由上式

两边求逆得  $P^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(I-A)^{-1} & (I-A)^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(I-A)^{-1} & (I-A)^{-1} \\ (I-A)^{-1} & I-(I-A)^{-1} \end{bmatrix}$ .

5. 由裴蜀定理, 存在多项式  $f, g$  使得  $f(x)(x-1) + g(x)(x^2+x+1) = 1$ , 即  $f(A)(A-I) + g(A)(A^2+A+I) = I$ . 从而利用分块初等行列变换,

$$\begin{bmatrix} A-I & O \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} A-I & f(A)(A-I) \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ I-A^3 & O \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} O & I \\ A^3-I & O \end{bmatrix}.$$

从而  $\text{rank}(A-I) + \text{rank}(A^2+A+I) = n + \text{rank}(A^3-I)$ , 因此原命题成立.

6. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I+BA \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I+AB & O \\ O & I \end{bmatrix},$$

从而知  $\text{rank}(I+BA) = \text{rank}(I+AB)$ . 因此原条件等价于  $\text{rank}(I-AB) + \text{rank}(I+AB) = n$ , 由上一小题的类似结论知  $(I-AB)(I+AB) = 0 \Rightarrow (AB)^2 = I$ , 因此  $A$  可逆.

7. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix} ABC & O \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} O & AB \\ BC & B \end{bmatrix},$$

从而知  $\text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC)$ .

8. 令  $P = (I_m, I_m)$ ,  $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}$ , 然后代入第 7 题的不等式. 只需注意  $\text{rank}(A^T, B^T) = \text{rank}(A^T, B^T)^T$ .

9. 利用分块初等变换, 得  $\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$ . 由于  $\text{rank}(D-CA^{-1}B) = \text{rank}(A(D-CA^{-1}B)) = 0$ , 因此  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{rank}(A) = n$ .

$$\begin{aligned} 10. & \begin{pmatrix} A & B & I & O \\ C & D & O & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} A & B & I & O \\ O & D-CA^{-1}B & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B & A^{-1} & O \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \\ & \begin{pmatrix} I & O & A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & O & A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & I & -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11. 若  $A$  可逆, 则  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{vmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A(D-CA^{-1}B)| = |AD-CB|$ . 若  $A$  不可逆, 构造  $A(t) = A + tI$ ,

从而存在无穷多个  $t \in \mathbb{R}$  使得  $A(t)$  可逆, 且对这些  $t$  成立  $\begin{vmatrix} A(t) & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A(t)D-CB|$ . 两边都是关于  $t$  的多项式, 因此对于所有  $t \in \mathbb{R}$  等式都成立, 特别地对于  $t = 0$  也成立.

12. 容易计算出  $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & B_2 \\ O & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ A_3 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ , 两边同时取行列式即可.

13.  $A_\theta$  是逆时针旋转  $\theta$  角,  $B_\theta$  是按逆时针方向的  $\frac{\theta}{2}$  角做镜面反射. 有了几何含义, 验证这些矩阵乘法也就很简单了.
14. 容易求出  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  的一组标准正交基是  $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$  和  $\beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$ . (1) 投影是  $(\alpha_3, \beta_1)\beta_1 + (\alpha_3, \beta_2)\beta_2 = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$ . (2) 距离是  $|(0, 1, 0, 2) - (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5})| = |(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})| = \frac{\sqrt{35}}{5}$ . (3) 任意向量  $\alpha = (x, y, z, w)$ ,

其投影是  $(\alpha, \beta_1)\beta_1 + (\alpha, \beta_2)\beta_2 = (\frac{3x+y+2z+w}{5}, \frac{x+2y-z+2w}{5}, \frac{2x-y+3z-w}{5}, \frac{x+2y-z+2w}{5})$ , 因此算子是  $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

15. (答案不唯一)  $\alpha_2 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T, \alpha_3 = \frac{1}{3}(2, -1, -2)^T$ .

16.  $\text{dist}(\alpha + U, \beta + V) = \min_{\gamma \in U, \delta \in V} \|\alpha + \gamma - \beta - \delta\| = \min_{\gamma \in U, \delta \in V} \|(\alpha - \beta) - (\delta - \gamma)\|_2 = \text{dist}(\alpha - \beta, U + V)$ .

## 11 第 10 次习题课: 线性映射

### 11.1 问题

1. (1)  $ABCD$  是中心为原点、边与坐标轴平行的单位正方形. 求所有  $\mathbb{R}^2$  上所有保持该正方形不变的线性变换, 写出它们的矩阵, 并证明它们可被两个变换生成. (2) 试求出保持中心为原点的正十二面体不变的线性变换的个数.

2.  $A$  是从  $K^n$  到  $K^m$  的线性映射, 将  $\text{Ker} A$  的一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  扩充成  $K^n$  的一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_n$ . (1) 证明  $\beta_1 = A\alpha_{s+1}, \dots, \beta_r = A\alpha_n$  线性无关 (其中  $r = n - s$ ), 并构成  $\text{Im} A$  的一组基; (2) 将  $\beta_1, \dots, \beta_r$  扩充成  $K^m$  的一组基  $\beta_1, \dots, \beta_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_m$ , 并证明  $A(\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; (3) 矩阵  $A = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$

与  $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  行向量组等价, 求可逆矩阵  $P, Q$  使得  $AP = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

3.  $P$  是线性空间  $V$  上的幂等变换 (即  $P^2 = P$ ), 证明  $P = \text{Ker} P \oplus \text{Im} P$ , 且  $P$  是沿  $\text{Ker} P$  向  $\text{Im} P$  的投影,  $I - P$  是沿  $\text{Im} P$  向  $\text{Ker} P$  的投影.

4.  $P$  是实线性空间上的幂等矩阵, 证明  $A$  是正交投影当且仅当  $A$  是对称矩阵.

5.  $\beta \in \mathbb{R}^n$  是单位向量 ( $\|\beta\|_2 = 1$ ),  $P = I - \beta\beta^T$ ,  $A = I - 2\beta\beta^T$ . (1) 证明  $P$  是幂等对称矩阵, 并写出第 3 题中的 (正交) 直和分解; (2)  $A$  是实对称正交矩阵, 且满足  $A^2 = I$ ; 计算  $\det(A)$ , 并探究  $A$  的几何性质.

6.  $A_1, A_2, A_3, A_4$  是  $n$  维线性空间上的线性变换, 它们之间任意两个均可交换, 且  $A_1A_2 + A_3A_4 = I$ . 证明  $\text{Ker}(A_1A_3) = \text{Ker} A_1 \oplus \text{Ker} A_3$ .

7.  $A, B$  是  $n$  维线性空间上的线性变换,  $AB = BA$ , 证明或否定  $\text{rank} A^2 + \text{rank} B^2 \geq 2\text{rank}(AB)$ .

8.  $A, B$  是幂等变换, 证明  $\text{Ker} A = \text{Ker} B$  当且仅当  $AB = A, BA = B$ .

9.  $A, B$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $A^2 = B^2 = O, AB + BA = I$ . (1) 证明  $\text{Ker} A = A(\text{Ker} B), \text{Ker} B = B(\text{Ker} A)$ , 且  $V = \text{Ker} A \oplus \text{Ker} B$ ; (2) 是否存在  $n = 2023$  维且满足上述约束关系的线性变换; (3) 若  $\dim V = 2$ , 证明  $A, B$  在某组基下的矩阵可以是  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

10.  $V_1, V_2, V_3$  都是数域  $F$  上的有限维线性空间,  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2, \psi: V_1 \rightarrow V_3$  是两个线性映射. 证明  $\psi$  可以写成  $\psi = \sigma\varphi$ , 其中  $\sigma: V_2 \rightarrow V_3$  是线性映射的充要条件是  $\text{Ker} \varphi \subset \text{Ker} \psi$ .

11.  $A$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 证明存在  $r \in \mathbb{N}$  使得对于  $\forall s \in \mathbb{N}, \text{Ker} A^r = \text{Ker} A^{r+s}$ .

### 11.2 解答

1. (1) 只需确定基的像.  $e_1$  可以有 4 种选择,  $e_2$  在  $e_1$  的基础上有 2 种选择, 因此有 8 种:  $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$ . 它

们可由逆时针旋转  $90^\circ$  和关于  $y$  轴的反射这两个变换生成, 即  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(2) 只需确定其中任意三个点 (对应的向量) 的像, 这里我们考虑共面的某三个点. 因为有 20 个顶点, 每个顶点又有 3 个邻结点, 和这 2 个点具有原始度量关系的点又有 2 个, 因此有  $20 \times 3 \times 2 = 120$  个线性变换.

2. (1)  $k_1\beta_1 + \cdots + k_r\beta_r = A(k_1\alpha_{s+1} + \cdots + k_r\alpha_n) = 0 \Rightarrow k_1\alpha_{s+1} + \cdots + k_r\alpha_n \in \text{Ker}A \Rightarrow k_1\alpha_{s+1} + \cdots + k_r\alpha_n = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_r = 0$ , 因此线性无关.  $\forall \alpha \in \text{Im}A, \alpha = A(m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n) = m_{s+1}\beta_1 + \cdots + m_n\beta_r$ , 因此是一组基.

(2) 显然.

(3) 求出  $\text{Ker}A$  的一组基是  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 因此可以求出  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q = (\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \text{线性无关的})$ .

3.  $P|_{\text{Im}P} = \text{id}$ , 因为  $\forall \alpha = P\beta \in \text{Im}P$  有  $P\alpha = P^2\beta = P\beta = \alpha$ . 其次  $\text{Ker}P \cap \text{Im}P = \{0\}$ , 因为  $\alpha = P\beta \in \text{Ker}P \cap \text{Im}P$  有  $0 = P\alpha = P^2\beta = P\beta = \alpha$ . 又因为  $\forall \alpha \in V$  有  $\alpha = (I - P)\alpha + P\alpha \in \text{Ker}P + \text{Im}P$ , 因此有直和分解. 同理知  $I - P$  的性质, 因为它也是幂等变换, 且  $\text{Ker}(I - P) = \text{Im}P$ ,  $\text{Im}(I - P) = \text{Ker}P$ .

4. 从上一问我们已知  $A$  是投影. “ $\Rightarrow$ ”:  $A$  是正交投影  $\Rightarrow \forall \alpha, \beta, \langle (I - A)\alpha, A\beta \rangle = 0 \Rightarrow \forall \alpha, \beta, \alpha^T(I - A^T)A\beta = 0 \Rightarrow A = A^TA$ . 同理有  $\forall \alpha, \beta, \langle A\alpha, (I - A)\beta \rangle = 0 \Rightarrow A^T = A^TA$ . 因此  $A = A^T$ . “ $\Leftarrow$ ”:  $\forall \alpha \in \text{Ker}A, \beta = A\gamma \in \text{Im}A \Rightarrow \langle \alpha, A\gamma \rangle = \langle A^T\alpha, \gamma \rangle = \langle A\alpha, \gamma \rangle = 0$ . 因此  $\text{Ker}A \perp \text{Im}A$ .

5. (1)  $P^2 = (I - \beta\beta^T)(I - \beta\beta^T) = I - 2\beta\beta^T + \beta(\beta^T\beta)\beta^T = I - \beta\beta^T = P$ , 且对称性显然. 直和分解是  $\mathbb{R} = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P = \langle \beta \rangle + \langle \beta \rangle^\perp$ . (2) 对称性显然, 且  $A^TA = A^2 = I - 4\beta\beta^T + 4\beta\beta^T\beta\beta^T = 1$ , 因此正交.  $|A| = |I - 2\beta\beta^T| = 1 - 2\beta^T\beta = -1$ . 注意到  $P$  是在  $\langle \beta \rangle^\perp$  上的投影, 因此  $A$  是关于  $\langle \beta \rangle^\perp$  作镜面反射.

6. 任取  $\alpha \in \text{Ker}(A_1A_3)$ , 有  $\alpha = A_1A_2\alpha + A_3A_4\alpha \in \text{Ker}A_3 + \text{Ker}A_1$ ; 反之任取  $\beta \in \text{Ker}A_1, \gamma \in \text{Ker}A_3$ , 有  $A_1A_3(\beta + \gamma) = 0 \Rightarrow \beta + \gamma \in \text{Ker}(A_1A_3)$ . 因此  $\text{Ker}A_1 + \text{Ker}A_3 = \text{Ker}(A_1A_3)$ . 又由于  $\forall \delta \in \text{Ker}A_1 \cap \text{Ker}A_3 \Rightarrow \delta = A_1A_2\delta + A_3A_4\delta = 0$ , 因此是直和.

7. 结论不对. 取  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} J & \\ & J \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} J & I \\ O & J \end{pmatrix}$ .  $A^2 = O, B^2 = \begin{pmatrix} O & 2J \\ O & O \end{pmatrix}, AB = BA = \begin{pmatrix} O & J \\ O & O \end{pmatrix}$ , 不满足题设不等式.

8. “ $\Rightarrow$ ”:  $\forall \alpha, A(A\alpha - \alpha) = 0 \Rightarrow B(A\alpha - \alpha) = 0 \Rightarrow BA = B$ . 同理  $AB = A$ .

“ $\Leftarrow$ ”:  $\forall \alpha \in \text{Ker}A, B\alpha = BA\alpha = 0 \Rightarrow \text{Ker}A \subset \text{Ker}B$ . 同理  $\text{Ker}B \subset \text{Ker}A$ .

9. (1)  $\forall \alpha = A\beta \in A(\text{Ker}B)$ , 有  $A\alpha = A^2\beta = O$ ;  $\forall \gamma \in \text{Ker}A$ , 有  $\gamma = AB\gamma + BA\gamma = AB\gamma$ , 且注意到  $B\gamma \in \text{Ker}(B)$ . 因此  $\text{Ker}A = A(\text{Ker}B)$ , 同理  $\text{Ker}B = B(\text{Ker}A)$ . 又因为  $\forall \delta \in V$  有  $\delta = AB\delta + BA\delta = A(\text{Ker}B) + B(\text{Ker}A) = \text{Ker}A + \text{Ker}B$ , 且  $\theta \in \text{Ker}A \cap \text{Ker}B \Rightarrow \theta = AB\theta + BA\theta = 0$ , 因此  $V = \text{Ker}A \oplus \text{Ker}B$ .

(2) 注意到  $\text{Ker}A = A(\text{Ker}B) \subset \text{Im}A$ , 且  $\dim(\text{Ker}A) + \dim(\text{Im}A) = n$ , 因此  $\dim(\text{Ker}A) \leq \frac{n}{2}$ , 同理  $\dim(\text{Ker}B) \leq \frac{n}{2}$ . 由直和关系知  $\dim(\text{Ker}A) + \dim(\text{Ker}B) = n$ , 因此  $n$  只能为偶数.

(3) 由上一问论证过程知  $\dim(\text{Ker}A) = 1$ . 取  $\text{Ker}A$  的一组基  $\alpha_1$ , 并考虑  $\alpha_2 = B\alpha_1 \in \text{Ker}B$ . 由于  $\text{Ker}A \cap \text{Ker}B = \{0\}$ , 因此  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关. 在这组基  $\alpha_1, \alpha_2$  下,  $A, B$  有题设的矩阵表示 ( $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = AB\alpha_1 = \alpha_1 - BA\alpha_1 = \alpha_1, B\alpha_1 = \alpha_2, B\alpha_2 = B^2\alpha_1 = 0$ ).

10. 必要性是显然的, 下面证明充分性. 取  $\text{Ker}\varphi$  的一组基  $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ , 并扩充成  $\text{Ker}\psi$  的基  $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$ , 又再扩充成  $V_1$  的一组基  $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s, \gamma_1, \cdots, \gamma_t$ . 显然  $\varphi(\beta_1), \cdots, \varphi(\beta_s), \varphi(\gamma_1), \cdots, \varphi(\gamma_t)$  是  $\text{Im}\varphi$  的一组基, 并可扩充成  $V_2$  的一组基  $\varphi(\beta_1), \cdots, \varphi(\beta_s), \varphi(\gamma_1), \cdots, \varphi(\gamma_t), \delta_1, \cdots, \delta_l$ . 现在, 对于任意  $\beta = \sum_{i=1}^s a_i\varphi(\beta_i) + \sum_{j=1}^t b_j\varphi(\gamma_j) + \sum_{k=1}^l c_k\delta_k \in V_2$ , 只需定义  $\sigma(\beta) = \sum_{j=1}^t b_j\psi(\gamma_j)$  即可.

11. 先证明存在  $r \in \mathbb{N}$  使得  $\text{Ker}A^r = \text{Ker}A^{r+1}$ . 显然有无穷递升链  $\dim(\text{Ker}A) \leq \dim(\text{Ker}A^2) \leq \dim(\text{Ker}A^3) \leq \cdots$ , 注意到这条链有上界  $n$ , 因此必然存在  $r$  使得  $\dim(\text{Ker}A^r) = \dim(\text{Ker}A^{r+1})$ , 这意味着  $\text{Ker}A^r = \text{Ker}A^{r+1}$ . 现在开始推广到  $r + s$ : 由于  $A^{r+2}\alpha = 0 \Leftrightarrow A^{r+1}(A\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^r(A\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^{r+1}\alpha = 0$ , 以此类推知  $\text{Ker}A^{r+s} = \text{Ker}A^r, \forall s \in \mathbb{N}$ .

## 12 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢北京大学数学科学学院 23 级本科生陈全同学, 他极大地辅助了我的教学工作. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.