

第四章 导数与微分

基础概念:

$$f' = \frac{d}{dx} f; df = f' dx;$$

$$(f+g)' = f' + g'; (f-g)' = f' - g'; (fg)' = f'g + g'f; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$d(f+g) = df + dg; d(f-g) = df - dg; d(fg) = gdf + fdg; d\frac{f}{g} = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)}; [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}; r = r(\theta) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\tan \theta + \frac{r'(\theta)}{r(\theta)}}{1 - \tan \theta \frac{r'(\theta)}{r(\theta)}}$$

对于形如 $F(x,y)=0$ 的隐函数的求导, 我们可以将 y 看成是 $y=y(x)$, 直接对原方程求导。比如 $(x^2)' = 2x$; $(y^2)' = 2yy'$ 。

$dy = f'(u)du$, u 可以是因变量。这就是一阶微分的形式不变性。

Leibniz 公式: $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{i=1}^n C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$ 。可以利用该公式直接暴展或写出递推公式。

典型例题:

题组 1: 概念与 $\varepsilon-N$ 语言

1. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义, 且在点 $x_0 \in (a,b)$ 处可导, 并假定序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足

$$a < x_n < x_0 < y_n < b, \quad n=1,2,\dots,$$

且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x_0)。$$

$$\text{解: } \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0) - f(x_n)}{x_0 - x_n} = f'(x_0),$$

$$\therefore \text{对 } \forall \varepsilon, \exists N_1 \in \mathbb{N}^+, \forall n > N_1, \text{ s.t. } \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x_0) \right| < \varepsilon;$$

对 $\forall \varepsilon, \exists N_2 \in \mathbf{N}^+, \forall n > N_2, s.t. |\frac{f(x_0) - f(x_n)}{x_0 - x_n} - f'(x_0)| < \varepsilon$;

取定 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 上述两个不等式同时成立。

因此我们有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{y_n - x_0}{y_n - x_n} \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} + \frac{x_0 - x_n}{y_n - x_n} \frac{f(x_0) - f(x_n)}{x_0 - x_n} - f'(x_0) \right| \\ & = \left| \frac{y_n - x_0}{y_n - x_n} \left[\frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} - f'(x_0) \right] + \frac{x_0 - x_n}{y_n - x_n} \left[\frac{f(x_0) - f(x_n)}{x_0 - x_n} - f'(x_0) \right] \right| \\ & \leq \left| \frac{y_n - x_0}{y_n - x_n} \right| \left| \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} - f'(x_0) \right| + \left| \frac{x_0 - x_n}{y_n - x_n} \right| \left| \frac{f(x_0) - f(x_n)}{x_0 - x_n} - f'(x_0) \right| \\ & < \frac{y_n - x_0}{y_n - x_n} \varepsilon + \frac{x_0 - x_n}{y_n - x_n} \varepsilon = \varepsilon. \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x_0). \end{aligned}$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有定义, 且 $f'(0)$ 存在, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n^2}) - nf(0)]$ 。

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{i}{n^2}) - f(0)}{\frac{i}{n^2} - 0} = f'(0), \quad i = 1, 2, \dots, n;$

$$\therefore \forall \varepsilon, \exists N, \forall n > N, s.t. \left| \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} - f'(0) \right| < \varepsilon. \quad (0 < \frac{i}{n^2} \leq \frac{1}{n}, \text{ 此式对其他极限成立})$$

$$\text{即 } \frac{i}{n^2} [f'(0) - \varepsilon] \leq f(\frac{i}{n^2}) - f(0) \leq \frac{i}{n^2} [f'(0) + \varepsilon], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{又 } \because \sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n^2}) - nf(0) = \sum_{i=1}^n [f(\frac{i}{n^2}) - f(0)];$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} [f'(0) - \varepsilon] \leq \sum_{i=1}^n [f(\frac{i}{n^2}) - f(0)] \leq \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} [f'(0) + \varepsilon]. \quad \text{同时求极限, 得}$$

$$\frac{1}{2} [f'(0) - \varepsilon] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n^2}) - nf(0)] \leq \frac{1}{2} [f'(0) + \varepsilon].$$

由 ε 的任意性知答案为 $\frac{1}{2} f'(0)$ 。

题组 2: 微分导数的对象

1. 设函数 $y = f(x)$ 是严格单调的三阶可导函数, 而且 $f'(x) \neq 0$, 求 $(f^{-1})^{(3)}(y)$ 。

解：根据反函数导数公式有 $f^{-1}(y)' = \frac{1}{f'(x)}$ 。对等式两边求导，得：

$$f^{-1}(y)'' = \frac{d}{dy} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(x)} \left(\frac{1}{f'(x)} \right)' = \frac{-f''(x)}{f'(x)^3}。再求一次导，得：$$

$$f^{-1}(y)''' = \frac{d}{dy} \frac{-f''(x)}{f'(x)^3} = \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \frac{-f''(x)}{f'(x)^3} = \frac{1}{f'(x)} \left(\frac{-f''(x)}{f'(x)^3} \right)' = -\frac{f'''(x)}{f'(x)^4} + \frac{3f''(x)^2}{f'(x)^5}。$$

题组 3：数学归纳法

1. 求证：若 $y = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ ，则 $y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$ 。

解：当 $n=1$ 时，显然成立。下面假设 $n=k$ 时 $y^{(k)} = \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$ 。

当 $n=k+1$ 时，欲证： $y^{(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}$ 。我们直接对 y 求 $k+1$ 次导数：

$$y^{(k+1)} = (x \cdot x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} = (x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}x + C_{k+1}^1(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} = (x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}x + (-1)^k(k+1)\frac{1}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}。$$

对 $n=k$ 时的等式两边求一次导，知 $(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{x^{k+3}}e^{\frac{1}{x}} + (k+1)\frac{1}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} \right)$ 。

代入上式，得：（ $n=k+1$ 的情形）

$$y^{(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} + (-1)^{k+1}(k+1)\frac{1}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} + (-1)^k(k+1)\frac{1}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} = \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}。$$

2. 设 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上有任意阶导数。证明：对任意正整数 n 都有

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(n)}。$$

解：当 $n=1$ 时，有 $(-1)[f(\frac{1}{x})]' = \frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$ 成立。

利用数学归纳法，假设 $n=k$ 时等式成立。则当 $n=k+1$ 时，我们欲证：

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{k+2}}f^{(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) &= (-1)^{k+1} \left(x^k f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(k+1)}。观察等式右边：(-1)^{k+1} \left(x^k f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(k+1)} \\ &= (-1)^{k+1} \left(x \cdot x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(k+1)} = (-1)^{k+1} x \left(x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(k+1)} + (-1)^{k+1} C_{k+1}^1 \left(x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(k)} (*) \end{aligned}$$

我们继而对 $n=k$ 时的等式左右求导，知：

$\frac{1}{x^{k+1}} \frac{-1}{x^2} f^{(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) + (-k-1) \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^k \left(x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k+1)}$ 。化简得：

$(-1)^{k+1} x \left(x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k+1)} = \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1) \frac{1}{x^{k+1}} f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)$ 。代入 (*) 式，有：

$$(-1)^{k+1} \left(x^k f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k+1)} = \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1) \frac{1}{x^{k+1}} f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right) + (-1)^{k+1} (k+1) \left(x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)}$$

再利用 $n=k$ 时的等式： $\frac{1}{x^{k+1}} f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^k \left(x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)}$ ， $\therefore (-1)^{k+1} \left(x^k f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k+1)}$

$$= \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) + (-1)^k (k+1) \left(x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)} + (-1)^{k+1} (k+1) \left(x^{k-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)} = \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

特别提醒： $f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \neq [f\left(\frac{1}{x}\right)]^{(n)}$ 。前者表示的是先对 f 求 n 次导再用 $\frac{1}{x} = x$ 代入，后者表示先用 $\frac{1}{x} = x$ 代入再求 n 次导。

题组 4: Leibniz 暴展

1. 对 $y = (\arctan x)^2$ 计算 $y^{(n)}(0)$ 。

解： 我们需要先知道函数 $z = \arctan x$ 的 $z^{(n)}(0)$ 。

$z' = \frac{1}{1+x^2}$ ，得 $z'(1+x^2) = 1$ 。两边同时求 $n-1$ 阶导数，施用 *leibniz* 公式，得：

$(1+x^2)z^{(n)} + C_{n-1}^1 2xz^{(n-1)} + C_{n-1}^2 2z^{(n-2)} = 0$ 。将 $x=0$ 代入，得：

$z^{(n)} + (n-1)(n-2)z^{(n-2)} = 0$ 。易知 $z'(0)=1, z''(0)=0$ ，利用递推，知道

$$z^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^{k-1} (2k-2)! & n = 2k-1 \end{cases}.$$

下面我们来求 $y^{(n)}(0)$ 。左右两边同时求 n 次导数，施用 *leibniz* 公式：

$$y^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^n C_n^i (\arctan x)^i (\arctan x)^{(n-i)}.$$

当 $n = 2k+1$ 时，循环和的每一项都含有一个奇数一个偶数，由上面结论知道

$$y^{(2k+1)}(0) = 0.$$

当 $n = 2k$ 时，消灭 0 项，将上式改写为

$$y^{(2k)}(0) = \sum_{i=1}^k C_{2k}^{2i-1} [(-1)^{i-1} (2i-2)!] [(-1)^{k-i} (2k-2i)!]$$

$$= (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^k \frac{(2k)!}{(2i-1)!(2k-2i+1)!} (2i-2)!(2k-2i)! = (-1)^{k-1} (2k)! \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2k-2i+1)}$$

$$= (-1)^{k-1} (2k-1)! \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2k-2i+1} \right) = (-1)^{k-1} 2(2k-1)! \sum_{i=1}^k \frac{1}{2i-1}.$$

综上所述, $y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2k-1 \\ (-1)^{k-1} 2(2k-1)! \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{2i-1} \right) & n = 2k \end{cases}.$

2. 设 $f(x) = x^n \ln x, n \in N_+$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}.$

解: 直接对 $f(x)$ 施用 *leibniz* 暴展, 得:

$$\frac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!} = g(n) - \ln n, \quad g(n) \text{ 是关于 } n \text{ 的一个多项式}.$$

利用数学归纳法证明 $g(n)$ 是调和级数即可。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!} = \gamma \quad (\text{欧拉常数}).$$

题组 5: 拆项找规律

1. 设 $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 计算 $y^{(n)}(x), n \in N_+.$

解: $\frac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \frac{x-1}{\sqrt{1-x}} + \frac{2}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x} + \frac{2}{\sqrt{1-x}}.$ 直接求 n 次导知:

$$y^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} & n=1 \\ \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{2i-1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(1-x)^{2n-1}}} + 2 \left(\prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(1-x)^{2n+1}}} & n \geq 2 \end{cases}$$

题组 6: 增项法 (类似于数列通项公式)

1. 设 $y = (1+\sqrt{x})^{2n+2}, n \in N_+,$ 求 $y^{(n)}(1).$

解: 设 $z = (1-\sqrt{x})^{2n+2},$ 则 $z^{(n)}(1) = 0.$ 因此 $y^{(n)}(1) = (y+z)^{(n)}(1).$

$$\because y+z = (1+\sqrt{x})^{2n+2} + (1-\sqrt{x})^{2n+2} = 2x^{n+1} + 2C_{2n+2}^2 x^n + \cdots (\text{次数} < n \text{ 的项}),$$

$$\therefore (y+z)^{(n)}(1) = 2(n+1)! + 2C_{2n+2}^2 n! = 4(n+1)(n+1)!.$$

题组 7: 引入辅助函数

1. 证明: 对于每个正整数 n , 成立 $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^m = \begin{cases} 0, & 0 \leq m \leq n-1, \\ (-1)^n n!, & m = n. \end{cases}$ 。

解: 引入辅助函数 $f_m(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k k^m x^{k-1}$, 求 $f_m(1)$ 。注意到 $f_{m+1}(x) = [xf_m(x)]'$ 和

$$xf_0(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k x^k = (-1)^n \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{n-k} x^k = (-1)^n (x-1)^n。归纳知当 $0 \leq m \leq n-1$$$

时, 所求的导函数仍存在形如 $(x-1)^k$ 的项, 故 $f_m(1) = 0$ 。当 $m = n$ 时, 唯一不出现 $(x-1)^k$ 形式的项是 $(-1)^n [(x-1)^n]^{(n)} x^n = (-1)^n n! x^n$, 此时 $f_n(1) = (-1)^n n!$ 。

陷阱易错:

1. 设 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内有 $n-1$ 阶导数, 求 $f^{(n)}(a)$ 。

错误解法: 两边直接求 n 次导得到 $f^{(n)}(a)$ 。

错误分析: $\varphi(x)$ 的 n 次导数不一定存在。

解: 对 $f(x)$ 求 $n-1$ 次导数得到

$$f^{(n-1)}(x) = [(x-a)^n]^{(n-1)} \varphi(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [(x-a)^n]^{(n-1-k)} \varphi(x)^{(k)}。注意到, 在右边的循环和$$

中, 每一项都包含形如 $(x-a)^k (k \geq 2)$ 的项, 且 $f^{(n-1)}(a) = 0$ 。

利用定义求出 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数: $f^{(n-1)}(a)' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{n!(x-a)\varphi(a) + (x-a)^2 S(k, n)}{x-a}$, 其

中 $S(k, n)$ 表示关于 k 和 n 的一个多项式, 且当 $x \rightarrow a$ 时不为无穷大量。

$\therefore f^{(n)}(a) = n! \varphi(a)$ 。

第五章 导数的应用

基础概念：

极值的定义：存在邻域，使得 $f(x_0)$ 最大（小）。

Fermat：极值点 $f'(x_0)$ 若存在，则 $f'(x_0)=0$ 。

Rolle： $f(x) \in C[a, b], f(x) \in D(a, b), f(a) = f(b)$, 则必存在 $f'(\xi) = 0$ 。

广义 *Rolle*： $f(x) \in C[a, b], f(x) \in D(a, b), f(a+0) = f(b-0) = l$, $a = \text{有限数 or } -\infty$,

$b = \text{有限数 or } +\infty$, $l = \text{有限数 or } \pm\infty$, 则必存在 $f'(\xi) = 0$ 。

Lagrange： $f(x) \in C[a, b], f(x) \in D(a, b)$, 则必存在 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 。

我们常常这样使用 *Lagrange* 定理： $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \xi \in (a, b)$ 。

Lagrange 推论： $f'(x) \equiv 0 \Leftrightarrow f(x) = C, f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + C$ 。

Cauchy： $f(x), g(x) \in C[a, b] \text{ and } D(a, b); g'(x) \neq 0$; 则必存在 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 。

Darboux： $f(x) \in D[a, b], \forall \eta \in [f_+(a), f_-(b)], \exists \xi, s.t. f'(\xi) = \eta$. 即导函数具有中介值性质。换言之，若 $f'(x) \neq 0$ 在区间 I 上恒成立，则必有 $f(x)$ 单调。

L'Hospital ($\frac{0}{0}$)： $\lim_x f(x) = \lim_x g(x) = 0; g'(x) \neq 0; \lim_x \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. 我们有 $\lim_x \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

L'Hospital ($\frac{*}{\infty}$)： $\lim_x g(x) = \infty; g'(x) \neq 0; \lim_x \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. 我们有 $\lim_x \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Taylor_P： $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

$+ o((x - x_0)^n) (x \rightarrow x_0)$ 。前面的部分叫做 *Taylor* 多项式，后面的叫做 *Peano* 余项。

Taylor_L： $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \forall \xi \in (x_0, x) \text{ or } (x, x_0)$ 。后面的叫做 *Lagrange* 余项。

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + [o(x^n)(x \rightarrow 0) / \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}]$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + [o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) / \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + [o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0) / \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + [o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0) / \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}]$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + [o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) / \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \cdots + C_\alpha^n x^n + [o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) / C_\alpha^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}]$$

Lagrange 余项与 Peano 余项在运用上的主要区别是 Lagrange 便于计算具体数值，而 Peano 便于进行极限估计。

$$f'(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}) \quad (x \rightarrow 0) \Leftrightarrow$$

根据导函数反推原函数：

$$f(x) = f(0) + a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n} x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{Lagrange 插值多项式: } L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}, \text{ 其中 } \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)。$$

$$\text{其中误差函数 } R(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)。$$

特别提醒： $L_n(x)$ 实际上是用 x_0, \cdots, x_n $n+1$ 项插值的结果！

设 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内 n 阶可导， $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ，且 $f^{(n)}(x) \neq 0$ ，则：

- (1) 当 n 为奇数时， $f(x)$ 在点 x_0 不取极值；
- (2) 当 n 为偶数时， $f^{(n)}(x) > 0$ 时， $f(x)$ 在 x_0 处取严格极小值；
- (3) 当 n 为偶数时， $f^{(n)}(x) < 0$ 时， $f(x)$ 在 x_0 处取严格极大值。

(下) 凸函数： $\forall t \in (0, 1)$ ，成立 $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ 。

$$\text{凸函数的充要条件是 } 1) \quad \forall x_1 < x_3 < x_2, \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}；$$

进而有凸函数在非端点处的左右导数一定存在，且满足 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ 。

$$2) \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1, \quad t_i > 0, \quad \text{则 } f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n)。$$

若 $f(x) \in C[a, b], D(a, b)$ ，则 $f(x)$ 为凸函数的充要条件是 $f'(x)$ 单调上升。

若 $f(x) \in C[a, b], D^2(a, b)$ ，则 $f(x)$ 为凸函数的充要条件是 $f''(x) \geq 0$ 。

拐点：前凸后凹或前凹后凸。拐点处的二阶导数存在则必为 0。

渐近线：曲线与该直线的距离趋于 0。

典型例题：

题组 1：待定常数法（一种特殊的还原函数的方法）

1. 设 f 在 $[a, b]$ 上二阶可微, $f(a) = f(b) = 0$ 。证明：对每个 $x \in (a, b)$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得成立 $f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$ 。

解：固定 x , 我们设 $\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)} = \lambda$, 往证 $\exists \xi \in (a, b), s.t. f''(\xi) = \lambda$ 。

构造 $F(t) = f(t) - \frac{\lambda}{2}(t-a)(t-b)$, 知道 $F(a) = F(b) = F(x) = 0$ 。

在 $[a, x]$ 和 $[x, b]$ 上使用 *Rolle* 定理知道 $\exists \eta_1, \eta_2, s.t. F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$ 。

再在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上使用 *Rolle* 定理知道 $\exists \xi, s.t. F''(\xi) = f''(\xi) - \lambda = 0$, 即 $f''(\xi) = \lambda$ 。

2. 设 $x_0 \in I, x_0 + h \in I, \lambda \in (0, 1), f(x)$ 在区间 I 上二次可微。证明：

$\exists \theta \in (0, 1), s.t. f(x_0 + \lambda h) = \lambda f(x_0 + h) + (1 - \lambda)f(x_0) - \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} h^2 f''(x_0 + \theta h)$ 。

解：引入辅助函数 $F(t) = f(x_0 + ht) - f(x_0 + h)t - (1 - t)f(x_0) + \frac{t(1 - t)}{2} h^2 s, t \in [0, 1]$,

其中 $s = \frac{f(x_0 + \lambda h) - \lambda f(x_0 + h) - (1 - \lambda)f(x_0)}{-\frac{\lambda(1 - \lambda)}{h^2}}$ 。

我们去证： $\exists \xi \in (x_0, x_0 + h), s.t. f''(\xi) = s$ 。由于 $F(0) = F(1) = F(\lambda) = 0$,

根据 *Rolle* 微分中值定理, $\exists \eta_1 \in (0, \lambda), \eta_2 \in (\lambda, 1) s.t. F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$,

进而有 $\exists \xi \in (\eta_1, \eta_2), s.t. F''(\xi) = 0$ 。惊讶地发现, $F''(\xi) = h^2[f(x_0 + h\xi) - s] = 0$

\therefore 令 $\theta = \xi$, 我们知道 $f''(\xi) = s$ 。结论得证!

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 证明:

$\exists \xi \in [a, b], s.t. f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f^{(3)}(\xi)$ 。

解：引入辅助函数 $F(h) = f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2}h[f'(a) + f'(a+h)] + \frac{1}{12}h^3 s$ 。

其中 s 是使得 $f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 s$ 成立的数。

我们去证明： $\exists \beta \in [a, b], s.t. f(\beta) = s$ 成立。

$\because F(0) = F(b-a) = 0, \therefore \exists \eta \in (0, b-a), s.t. F'(\eta) = 0$ 。

又因为 $F'(h) = \frac{1}{2}f'(a+h) - \frac{1}{2}f'(a) - \frac{1}{2}hf''(a+h) + \frac{1}{4}h^2 s$ 在 $h=0$ 处取值为 0,

在 $[0, \eta]$ 上使用 *Rolle* 定理知道 $\exists \xi \in (0, \eta), s.t. F''(\xi) = 0$ 。

而 $F''(\xi) = \frac{1}{2}f''(a+\xi) - \frac{1}{2}f''(a) - \frac{1}{2}\xi f'''(a+\xi) + \frac{1}{2}\xi s = \frac{1}{2}\xi[s - f^{(3)}(a+\xi)] = 0$

$\Leftrightarrow f^{(3)}(a+\xi) = s$ 。知道 $\exists \beta \in (a, b) s.t. f^{(3)}(\beta) = 0$ 。

题组 2: 广义 Rolle 定理

1. 证明: Legendre 多项式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}$ 在 $(-1, 1)$ 上内有 n 个不同实根。

解: 我们应注意到, $x = \pm 1$ 是 $P_n(x)$ 的 n 重零点。

$P_1(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有 $P_1(-1) = P_1(1) = 0$ 。则 $P_2(x) = P_1'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有零点, 在 $x = \pm 1$ 又是它的零点, 合着有 3 个零点。利用相同方法递推下去。

容易验证, $P_k(x)$ 有 $k+2$ 个零点 ($1 \leq k \leq n$)。当 $k=n$ 时, $x = \pm 1$ 的零点不复存在, 所以 $P_n(x)$ 有 n 个零点。

2. 证明: Laguerre 多项式 $L_n(x) = e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$ 有 n 个不同正根。

解: 记 $T_n(x) = (x^n e^{-x})^{(n)}$ 。显然 $L_n(x)$ 有 n 个不同正根等价于 $T_n(x)$ 有 n 个不同正根。

显然 $x=0$ 是 $T_n(x)$ 的 n 重零点。而当 $1 \leq k \leq n-1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n e^{-x})^{(k)} = 0$ 。

$T_0(x)$ 有两个广义零点 (作者自己定义的, 意为无穷小量): 0 和 $+\infty$ 。

在 $[0, +\infty)$ 上使用广义 Rolle 定理, 知道 $T_1(x)$ 有 3 个广义零点。

剩余过程参考上题, 我们知道 $T_n(x)$ 有 n 个狭义零点。

3. 证明: Chebyshev-Hermite 多项式 $H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}})$ 有 n 个不同零点。

解: 注意到 $\pm\infty$ 是 n 重广义零点。套用 n 次广义 Rolle 定理即可。

题组 3: 还原函数系列

1. 设 f, g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可微, 且导函数 g' 在区间 (a, b) 上无零点。证明:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}.$$

解: 对结论通分, 得到 $f'(\xi)g(\xi) + g'(\xi)f(\xi) - g(b)f'(\xi) - f(a)g'(\xi) = 0$ 。引入函数:

$F(x) = f(x)g(x) - g(b)f(x) - f(a)g(x) + f(a)g(b)$, 易见 $F(a) = F(b) = 0$ 。在区间 $[a, b]$ 上使用 Rolle 定理, 知

$\exists \xi \in (a, b), s.t. F'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) - g(b)f'(\xi) - f(a)g'(\xi) = 0$ 。得证!

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且 $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$ 。证明: $\exists \xi > 0, s.t. f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$ 。

解: 引入还原后的函数 $F(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}$, 在 $[0, +\infty)$ 上使用广义 Rolle 定理, 知

$$\exists \xi \in (0, +\infty), s.t. f'(\xi) - \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2} = 0. \text{ 这就是原题欲证结论。}$$

3. 设函数 f 在 a 处二阶可导, 且 $f''(a) \neq 0$, 则在 h 充分小时, 成立 $f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h$, 而且其中的 θ 具有性质 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{2}$ 。

解: 第一问: 直接使用 Lagrange 定理。

第二问: 我们提供两种方法。

法 1: 因二阶导数存在, 联想二阶导数的定义: $f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$ 。

我们发现: $[f(a+h) - f'(a)h]'_h = f'(a+h) - f'(a)$, $[h^2]' = 2h$ 。如果前面这个式子再减去一个无关的常数项 $f(a)$, 刚好又和前面的 $f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)$ 呼应!

故引入 $F(x) = f(a+x) - f(a) - f'(a)x$, $G(x) = x^2$ 。我们有:

$$I = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h^2} = \frac{F(h) - F(0)}{h^2} = \frac{F'(\xi)}{2\xi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(a+\xi) - f'(a)}{\xi}, \exists \xi \in (0, h)$$

$$\text{又} \because I = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h^2} = \frac{f'(a+\theta h)h - f'(a)h}{h^2} = \theta \cdot \frac{f'(a+\theta h) - f'(a)}{\theta h}$$

\therefore 两边令 $h \rightarrow 0$, 有 $\theta \rightarrow 1/2$ 。

法 2: 对(1)等式两边使用 Taylor 展开, 得 $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a+\theta_1 h)$;

$f'(a+\theta h) = f'(a) + \theta h f''(a+\theta_2 \theta h)$ 。由 $f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)$ 知:

$$2\theta f''(a+\theta_2 \theta h) = f''(a+\theta_1 h), \text{ 即 } \theta = \frac{f''(a+\theta_1 h)}{2f''(a+\theta_2 \theta h)}, \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{2}。$$

注: 此题可推广到 n 阶导数存在的情形, 我们有 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{n-1}$ 。

4. 设 $f(x) \in D[a, b]$, $f(a) = f(b)$ 。证明: $\exists \xi, s.t. f(a) - f(\xi) = \frac{\xi f'(\xi)}{2}$ 。

解: 我们先用 $f(a)=0$ 试一下。我们发现导函数前面的 x 系数高于原函数, 此时引入 $F(x) = x^2 f(x)$ 就能完美解决问题了。

类似地, 我们引入函数 $F(x) = x^2 [f(x) - f(a)]$ 。观察发现 $F(0) = F(a) = F(b) = 0$ 。根据 Rolle 微分中值定理, 我们知道导函数的零点夹在原函数零点之间。所以大胆消去导函数的 x , 得到 $\exists \xi, s.t. F'(\xi) = \xi[2f(\xi) - 2f(a) + \xi f'(\xi)] = 0 \Rightarrow f(a) - f(\xi) = \frac{\xi f'(\xi)}{2}$ 。

5. 设 f 在 \mathbb{R} 上二阶连续可导, $|f(x)| \leq 1$, 且有 $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$, 证明: 存在 ξ , s.t. $f(\xi) + f''(\xi) = 0$ 。

解: 先由 $|f(0)| \leq 1$ 知 $|f'(0)| \geq \sqrt{3}$ 。引入函数 $F(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$, 满足 $F(0) = 4$

且 $F'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)]$ 。下面采用反证法: 如果 $f(\xi) + f''(\xi) \neq 0$ 恒成立, 由介值定理, 知 $f(\xi) + f''(\xi)$ 在 \mathbb{R} 上保号。不妨设 $f(\xi) + f''(\xi) > 0$ 即 $f'(x)F'(x) > 0$ 成立。

1.1) $f'(0) \geq \sqrt{3}$ 且 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有零点的情形。设其最小的零点(这是由于函数的连续性, 所以存在)为 x_1 , 此时对任意 $x \in (0, x_1)$ 有 $f'(x) > 0$ 。则 $F'(x) > 0$ 。

$\therefore 1 \geq [f(x_1)]^2 = [f(x_1)]^2 + [f'(x_1)]^2 = F(x_1) > F(0) = 4$, 矛盾。

1.2) $f'(0) \geq \sqrt{3}$ 且 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点的情形。则 $f'(x) > 0$, 进而 $F'(x) > 0$ 。所以

以 $F(x) > F(0) = 4, \forall x \in (0, +\infty)$ 。根据 $|f(x)| \leq 1$ 知 $|f'(x)| \geq \sqrt{3}$ 恒成立。这与 $|f(x)|$

≤ 1 显然矛盾!

其余情况类似考虑。知原命题成立。

题组 4: 凑 or 计算 L'Hospital.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有直到 n 阶导数, 且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = B$. 求证: $B=0$ 。

解: 构造 $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(x)}{x^n}$, 令 $x \rightarrow +\infty$, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ ($\because f(x) = O(1)$) 和

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} \xrightarrow{n \text{ 次 } L'Hospital} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{B}{n!}$. 由极限的唯一性知 $B=0$ 。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = k, k \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. 求证:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$.

解: 构造 $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{e^x f(x)}{e^x}$, 令 $x \rightarrow +\infty$, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x [f(x) + f'(x)]}{e^x} = k$.

3. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{x^{x-1}}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{x^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{(x^x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x\ln^2 x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln^2 t}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{2\ln t}{t}} = 1$.

其中 $t=1/x$ 。

题组 5: Taylor 展开

【待定系数法】

1. 写出函数 $\frac{x}{\sin x}$ 在 $x=0$ 处的带有 Peano 余项的 Taylor 公式。(展到 x^4)

解: 设 $\frac{x}{\sin x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$.

则 $x = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)) \sin x \quad (x \rightarrow 0)$

$\Rightarrow x = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \quad (x \rightarrow 0)$

$\Rightarrow x = a_0 x + a_1 x^2 + \left(a_2 - \frac{a_0}{6}\right)x^3 + \left(a_3 - \frac{a_1}{6}\right)x^4 + \left(a_4 - \frac{a_2}{6} + \frac{a_0}{120}\right)x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$

$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = 0, a_4 = \frac{7}{360}$

$\Rightarrow \frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$

【层层展开法】

2. 写出函数 $\ln(\cos x + \sin x)$ 在 $x=0$ 处的带有 Peano 余项的 Taylor 公式。(展到 x^4)

解：先展开 $(\cos x + \sin x)$ 项。

$$\cos x + \sin x = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\therefore \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\therefore \ln(\cos x + \sin x) = \ln \left(1 + \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \right) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} &= \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^3}{3} \\ &\quad - \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^4}{4} + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0) \\ &= x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

【消项估计法】

3. 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $p(x)$ 具有连续二阶导数，计算极限：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f(x+h) & g(x+h) & p(x+h) \\ f(x+2h) & g(x+2h) & p(x+2h) \end{vmatrix}.$$

解：对 $f/g/p(x+h)$ 、 $f/g/p(x+2h)$ 进行 $Taylor_P$ 展开，并进行初等行列变换，得：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f(x+h) & g(x+h) & p(x+h) \\ f(x+2h) & g(x+2h) & p(x+2h) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & p(x) \\ f'(x) & g'(x) & p'(x) \\ f''(x) & g''(x) & p''(x) \end{vmatrix}.$$

题组 6: $Taylor_L$ 展开

【特殊点展开】（注意：以下两题是不同的展开法）

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微， $f(0)=f(1)=0$ ， $\max\{f(x)\}=2$ ，证明： $\max\{f(x)\} \geq -16$ 。

解： \forall fixed a ，利用 $Taylor$ 公式将 $f(x)$ 在 x 处展开，并代入 $x_0=0, 1$ ，得

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x)^2,$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2.$$

再令 $f(M)=2$ ，则 $f'(M)=0$ 。代入上述两式，得：

$$f''(\xi_1) = -\frac{4}{x^2}, f''(\xi_2) = -\frac{4}{(1-x)^2}. \text{ 显然 } \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\} \geq -16. \text{ 命题得证!}$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$ 。证明：存在 $c \in (a,b)$ ，

$$\text{s.t. } |f'''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

解：利用 Taylor 公式将 $f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处展开，得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2, \quad f(x) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2. \quad \text{令 } x = \frac{a+b}{2}, \text{ 有} \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2. \text{ 联立, 得} \\ \frac{4}{(b-a)^2} [f(b) - f(a)] &= \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{2} \Rightarrow \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)| = \left| \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{2} \right| \\ &\Rightarrow \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)| \leq \frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2}. \end{aligned}$$

由 Darboux 定理易知 $|f''(x)|$ 也具有中介值性质。所以 $\exists c \in (\xi_1, \xi_2), \text{ s.t. } |f''(c)| = \frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2}$ 。题目得证！

【两头夹中间】

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上三阶可导，且 $|f(x)| \leq M_0, |f'''(x)| \leq M_3, \forall x \in (0, +\infty)$ 。

证明： $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界。

解：用 Taylor 公式将 $f(x+1)$ 和 $f(x+2)$ 展开：

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + f'(x) + \frac{f''(x)}{2} + \frac{f'''(\xi_1)}{6}; \\ f(x+2) &= f(x) + 2f'(x) + \frac{4f''(x)}{2} + \frac{8f'''(\xi_2)}{6}; \end{aligned}$$

显然， $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 可以被 $f(x), f(x+1), f(x+2), f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)$ 线性表出。由于这组基有界，所以它们有界。

4. 设 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上有 n 阶导数，且存在实数 α 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f^{(n)}(x) = 0$ 。

证明： $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f^{(k)}(x) = 0, k = 1, 2, \dots, n-1$ 。

解：用 Taylor 公式将 $f(x+1), \dots, f(x+n)$ 展开：

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + f'(x) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}; \dots \\ f(x+n) &= f(x) + nf'(x) + \dots + \frac{n^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{n^n f^{(n)}(\xi_n)}{n!}. \end{aligned}$$

由未知数组 $(f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$ 组成的线性方程组行列式是 Vandermonde 行列式，不为 0，所以它们可以被 $f(x+1), \dots, f(x+n), f^{(n)}(\xi_1), \dots, f^{(n)}(\xi_n)$ 线性表出。由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x+t) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+t)^\alpha f(x+t) = 0, \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f^{(k)}(x) = 0.$$

5. 设函数 $f(x) \in C^2(0, +\infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \exists, f''(x) = O(1)$ 。证明： $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 。

解: 设 $|f''(x)| \leq M$ 恒成立。Taylor 展开, 得 $f(x+y) = f(x) + f'(x)y + \frac{f''(\xi)}{2}y^2$ 。

$\therefore f'(x) = \frac{1}{y}[f(x+y) - f(x)] - \frac{y}{2}f''(\xi)$ 。两边令 $x \rightarrow +\infty$ 取上极限, 得:

$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = \frac{y}{2}M$ 。有 y 的任意性知道 $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$ 。 $\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$ 。

【造点展开法】

6. $f(x) \in C^2[a, b]$, $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$ 。证明: $\forall a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$, $k_i \geq 0$,

且 $\sum_{i=1}^n k_i = 1$, 有 $f(\sum_{i=1}^n k_i x_i) > \sum_{i=1}^n k_i f(x_i)$ 。

解: 设 $x_0 = \sum_{i=1}^n k_i x_i$, 利用 Taylor 公式展开 $f(x_i)$:

$$f(x_i) = f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0) + \frac{f''(\xi_i)}{2}(x_i - x_0)^2 < f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0)。$$

$\therefore \sum_{i=1}^n k_i f(x_i) < \sum_{i=1}^n k_i f(x_0) + f'(x_0) \sum_{i=1}^n k_i (x_i - x_0) = f(x_0)$ 。命题得证!

【综合运用】

7. (Bernstein 定理) 设 f 在 (a, b) 上任意阶可微, 且对于每个 n 成立 $f^{(n)}(x) \geq 0$ 。证明: 对每个 $x_0 \in (a, b)$ 存在 $r_0 > 0$, 使得当 $x \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0] \subset (a, b)$ 时, 成立

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k。$$

解: 先证明: 对于任意 n 阶导有 $f^{(n)}(x) \leq \frac{2Mn!}{r^n}$ 。其中 M 是使得 $|f(x)| \leq M$ 在区间 $[x-r, x+r] \subset (a, b)$ 上恒成立的“界”。

$$\text{Taylor}_L \text{ 展开得 } f(x+r) = f(x) + f'(x)r + \frac{f''(x)r^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x)r^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)r^{n+1}}{(n+1)!} \Leftrightarrow$$

$$2M \geq f(x+r) - f(x) = f'(x)r + \frac{f''(x)r^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x)r^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)r^{n+1}}{(n+1)!} \geq \frac{f^{(n)}(x)r^n}{n!}$$

$\therefore f^{(n)}(x) \leq \frac{2Mn!}{r^n}$ 成立。

再证明原命题成立。只需证 $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k] = 0$ 。

由于 $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \leq \left| \frac{2M(x - x_0)^{n+1}}{r^{n+1}} \right|。$

只需取 $r_0 < r$ 。此时有 $x - x_0 < r$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) = 0$ 成立。证毕!

第六章 不定积分

基础概念：

积分的概念： $F'(x)=f(x)$ ，则 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 。

特别提醒： $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ，结尾的常数 C 不要漏掉。

换元法： 1) $\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u(x)) du(x)$ ；

2) $\int f(x) dx = \int f(g(t)) dg(t)$ 。

分部积分法： $\int u dv = uv - \int v du + C$ 。

有理函数积分：最简**真分式**： $\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} (k>1)$

真分式的原函数： $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln(x-a) + C$ ； $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$ ；

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax + \frac{Ap}{2} + (B - \frac{Ap}{2})}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} dx$$

$$= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + (B - \frac{Ap}{2}) \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right) + C；$$

$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$ 利用同样方法与分部积分知识写递推式。(注： I_k 写出来的是 I_k

与 I_{k+1} 的关系)

三角函数有理式积分：简化成有理函数积分： $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ 。

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C；$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C；$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C；$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|}{2} + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|}{2} + C;$$

典型例题:

类型 1: 凑微法

1. 求 $\int \frac{dx}{x(x^3+2)}$ 。

解: $\int \frac{dx}{x(x^3+2)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{x^3(x^3+2)} = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^3+2} dx^3 = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^3}{x^3+2} \right| + C。$

2. 求 $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}$ 。

解: $\left(\frac{2+x}{2-x}\right)' = \frac{4}{(2-x)^2}$, $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-\frac{1}{3}} d\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = \frac{3}{8} \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{2}{3}} + C。$

3. 求 $\int x^2 \sqrt{x^2+1} dx$ 。

解: $\int x^2 \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^4+x^2} dx^2 = \frac{1}{2} \int \sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$
 $= \frac{1}{4} \left(x^2+\frac{1}{2}\right) \sqrt{x^4+x^2} - \frac{1}{16} \ln \left(x^2+\frac{1}{2} + \sqrt{x^4+x^2}\right) + C_1$
 $= \frac{1}{8} x(2x^2+1) \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{16} \ln(x+\sqrt{x^2+1})^2 + C \quad (C = C_1 + \frac{\ln 2}{16})$
 $= \frac{1}{8} x(2x^2+1) \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{8} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$

类型 2: 分部积分法

1. 求 $\int \frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx$ 。

解: $\int \frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{e^x(1-x^2)+e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx = \int e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \left(\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} de^x \right) + \int \frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx$
 $= e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \int e^x d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \int \frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx = e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}。$

类型 3: 大换元法

1. 求 $\int \sqrt{\tan x} dx$ 。

解: 法 1: $\int \sqrt{\tan x} dx \xrightarrow{u=\sqrt{\tan x}} \int u d \arctan u^2 = 2 \int \frac{u^2}{1+u^4} du$ 。

记 $I = \int \frac{u^2}{1+u^4} du, J = \int \frac{1}{1+u^4} du$ 。则

$$I + J = \int \frac{1+u^2}{1+u^4} du = \int \frac{\frac{1}{u^2}+1}{\frac{1}{u^2}+u^2} du = \int \frac{1}{(u-\frac{1}{u})^2+2} d(u-\frac{1}{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}\right) + C_1;$$

$$I - J = \int \frac{u^2-1}{u^4+1} du = \int \frac{1-\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}} du = \int \frac{1}{(u+\frac{1}{u})^2-2} d(u+\frac{1}{u}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u+\frac{1}{u}-\sqrt{2}}{u+\frac{1}{u}+\sqrt{2}} \right| + C_2;$$

$$\therefore I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u+\frac{1}{u}-\sqrt{2}}{u+\frac{1}{u}+\sqrt{2}} \right| + C。将 u = \sqrt{\tan x} 代回:$$

$$\therefore \int \sqrt{\tan x} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2} \tan x}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\tan x - \sqrt{2} \tan x + 1}{\tan x + \sqrt{2} \tan x + 1} \right| + C。$$

法 2: 记 $P = \int \sqrt{\tan x} dx, Q = \int \sqrt{\cot x} dx$ 。则

$$P + Q = \int \sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} dx = \sqrt{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2 \sin x \cos x}} dx = \sqrt{2} \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}$$

$$= \sqrt{2} \arcsin(\sin x - \cos x) + C_1;$$

$$P - Q = \int \sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} dx = -\sqrt{2} \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2 \sin x \cos x}} dx = -\sqrt{2} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1}}$$

$$= -\sqrt{2} \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1}| + C_2 = -\sqrt{2} \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}| + C_2$$

$$\therefore \int \sqrt{\tan x} dx = P = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sin x - \cos x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}| + C。$$

2. 求 $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ 。

解: $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} \xrightarrow{u=x+\sqrt{x^2+x+1}} \int \frac{d(\frac{u^2-1}{2u+1})}{u} = 2 \int \frac{u^2+u+1}{u(2u+1)^2} du = 2 \int \frac{1}{u} - \frac{3(u+1)}{(2u+1)^2} du$

$$= 2 \int \frac{du}{u} - 3 \int \frac{du}{2u+1} - 3 \int \frac{du}{(2u+1)^2} = 2 \ln u - \frac{3}{2} \ln(2u+1) + \frac{3}{2} \frac{1}{2u+1}。 \text{ 将 } u \text{ 代回:}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 2 \ln |x + \sqrt{x^2 + x + 1}| - \frac{3}{2} \ln |2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 1| + \frac{3}{4x + 4\sqrt{x^2 + x + 1} + 2}。$$

类型 4: 待定系数法

1. 求 $\int (\sqrt{x} - x)e^{2\arctan \sqrt{x}} dx$ 。

$$\text{解: } \int (\sqrt{x} - x)e^{2\arctan \sqrt{x}} dx \xrightarrow{u=\sqrt{x}} \int (u - u^2)e^{2\arctan u} du^2 = 2 \int (u^2 - u^3)e^{2\arctan u} du。$$

设 $\int (u^2 - u^3)e^{2\arctan u} du = f(u)e^{2\arctan u}$, 其中 u 是关于 u 的多项式函数。

$$\text{则 } f'(u) + \frac{2f(u)}{1+u^2} = u^2 - u^3, \text{ 即 } (1+u^2)f'(u) + 2f(u) = u^2 - u^3 + u^4 - u^5。$$

设 $f(u) = a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0$, 则 $f'(u) = 4a_4 u^3 + 3a_3 u^2 + 2a_2 u + a_1$ 。

$$\text{则 } (1+u^2)f'(u) + 2f(u) = 4a_4 u^5 + (3a_3 + 2a_4)u^4 + (4a_4 + 2a_3 + 2a_2)u^3 + (3a_3 + 2a_2 + a_1)u^2 + (2a_2 + 2a_1)u + (a_1 + 2a_0) = -u^5 + u^4 - u^3 + u^2。$$

$$\therefore a_4 = -\frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_0 = -\frac{1}{4}。$$

$$\therefore \int (\sqrt{x} - x)e^{2\arctan \sqrt{x}} dx = \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)e^{2\arctan \sqrt{x}}。$$