高等数学 A I 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2022 年 11 月 3 日

目录

1 第 1 次习题课: 函数, 序列极限

1.1 问题

1. $f(x)=|x\sin^3 x|e^{\cos x}$. 判断函数 $f(x)$ 的有界性、单调性和奇偶性.
2. 证明 $f(x)=x-[x]$ 是有界周期函数.
3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ \cos x+\sin x & x>0 \end{cases}$. 计算 $f(-x)$.
4. $f(x)=e^{x^2}$, $f\circ\phi=1-3x$ 并且 $\phi(x)\ge 0$, 求解 $\phi(x)$ 及其定义域.
5. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{n^2-n}=4$.
6. 设 $q>1, k\in\mathbb{N}_+$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{q^n}=0$.
7. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$.
8. 令 $x_1>0$ 并且 $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.
9. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{1/n}=1$.
10. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$.
11. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\exists$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty, \frac{a_n}{b_n}\to 0, a_n, b_n>0$, 证明 $\frac{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}{\sum_{n=1}^{\infty}b_n}=0$.
13. (Stolz) $0<b_n\uparrow+\infty, a_n>0$, 如果 $(a_n-a_{n-1})/(b_n-b_{n-1})\to L$, 则 $a_n/b_n\to L$.

1.2 解答

1. 注意到 $f(2k\pi+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}(2k\pi+\frac{\pi}{4})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\to\infty$, 所以 $f(x)$ 无界. 又因为 $f(k\pi)\equiv 0$ 且对于 $x\ne k\pi$ 成立 $f(x)\ne 0$, 所以 $f(x)$ 不单调. 由定义知 $f(x)$ 是偶函数.
2. 容易看出 $f(x)$ 有周期 1 且 $|f(x)|\le 1$ 对于所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立.
3. 代入验证即可. $f(-x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ \cos x-\sin x & x<0 \end{cases}$.
4. $f(\phi)=e^{\phi^2}=1-3x\Rightarrow\phi=\sqrt{\log(1-3x)}$. $\phi(x)$ 的定义域是 $\log(1-3x)\ge 0\Leftrightarrow x\le 0$.
5. $|\frac{4n^2}{n^2-n}-4|=\frac{4}{n-1}$. 所以当 $n\ge\frac{4}{\epsilon}+1$ 时, $\frac{4n^2}{n^2-n}$ 与 4 相差不超过 ϵ.
6. 注意到 $q^n=(1+q-1)^n\ge C_n^{k+1}(q-1)^{k+1}=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+\cdots+a_0$ 是 n^k 的高阶无穷大量.
7. 使用夹逼定理. (*) $\ge\frac{\sum_{i=1}^{n}i}{(n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{2(n+1)^2}\to\frac{1}{2}$, (*) $\le\frac{\sum_{i=1}^{n}i}{n^2+n}=\frac{n(n+1)}{2(n^+n)}\to\frac{1}{2}$.
8. 在这类问题中, $\{x_n\}$ 一定会是单调有界的. 首先凑答案, 假设极限存在, 令递推公式两边 $n\to+\infty$, 我们有 $a=\frac{3(1+a)}{3+a}\Rightarrow a=\sqrt{3}$. 然后使用递推公式, 利用数学归纳法, 容易证明如果 $0<x_1<\sqrt{3}$ 则 $0<x_n<x_{n+1}<\sqrt{3}$; 如果 $x_1>\sqrt{3}$ 则 $x_n>x_{n+1}>\sqrt{3}$. 这意味着极限 $\lim x_n$ 存在.
9. $n^{1/n}>(n+1)^{1/(n+1)}\Leftrightarrow n>(1+1/n)^n$ 对于 $n\ge 3$ 成立, 这意味着 $n^{1/n}$ 是单调递减的. 注意到我们作业中已经证明了对于任意 $\epsilon>0$, 成立 $n^{1/n}<1+\epsilon\Leftrightarrow n<(1+\epsilon)^n$ 对于足够大的 n. 然后使用极限定义的 $N-\epsilon$ 语言.
10. $3\le\sqrt[n]{2^n+3^n}\le\sqrt[n]{2\times 3^n}\to 3$.
11. 单调上升性显然. 由于 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}$, 从而 $\sum\limits_n\frac{1}{n^2}<\sum\limits_n\frac{1}{(n-1)n}$, 有上界 2.
12. 使用截断. $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,|a_n/b_n|<\epsilon/2$. 从而 $\sum a_n/\sum b_n=\sum\limits_{i=1}^{N}a_i/\sum\limits_{i=1}^{n}b_i+\sum\limits_{i=N+1}^{n}a_i/\sum\limits_{i=1}^{n}b_i:=I_1+I_2$. 当 n 足够大时, $I_1<\epsilon/2$(因为 $\sum b_n\to+\infty$); 而 $I_2<\epsilon/2$ 对于所有的 $n\ge N$ 成立. 因此当 n 足够大时, 可以让 $I_1+I_2<\epsilon$.
13. 用定义. $\forall\epsilon>0,\exists N$, 使得对于 $\forall n>N$, 成立 $(L-\epsilon)(b_n-b_{n-1})\le(a_n-a_{n-1})\le(L+\epsilon)(b_n-b_{n-1})$. 然后用累加 $\Rightarrow(L-\epsilon)(b_n-b_N)\le a_n-a_N\le(L+\epsilon)(b_n-b_N)\Rightarrow L-\epsilon<\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}<L+\epsilon$. 然后估计误差 $|\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-\frac{a_n}{b_n}|=|\frac{(a_n-a_N)b_N}{(b_n-b_N)b_n}+\frac{a_Nb_N}{(b_n-b_N)b_n}+\frac{a_N}{b_n-b_N}|\le(L+\epsilon)\frac{b_N}{b_n}+\frac{a_Nb_N}{(b_n-b_N)b_n}+\frac{a_N}{b_n-b_N}<\epsilon$ (这三项都是趋于 0 的, 所以你总可以找一个足够大的 n 使得上式成立).

1.3 补充 (不要求掌握!)

作为一个已经学习数学这么多年的北京大学练习生, 我相信你一定关心过下面这个问题: 可导函数和连续函数之间差多少? 事实上, 我们有以下定义和结论:

(1) 开集: 我们称集合 $A \subset \mathbb{R}$ 是开的, 当且仅当 $\forall x \in A$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset A$.

(2) 闭集: 我们称集合 $B \subset \mathbb{R}$ 是闭的, 当且仅当它的补集是开的.

(3) 定义 $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$, 这里 f 是一个函数.

(4) 你可以证明一个函数 f 是连续的当且仅当任意开集 $A \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(A)$ 是开集.

(5) 内点: 我们称 $x \in A$ 是集合 A 的内点当且仅当 $\exists \delta_x > 0$, 使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset A$.

(6) 可数/可列: 我们称集合 A 是可数的当且仅当存在一个从 A 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一一映射或者 $|A| < \infty$, 这里 $|A|$ 是集合 A 中元素的个数.

(7) 极限点: 我们称 x 是集合 A 的极限点, 当且仅当存在一个序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ 使得 $x_i \to x$. 我们用记号 A' 来表示 A 所有极限点构成的集合.

(8) 闭包: 我们称集合 $\bar{A} = A \cup A'$ 是集合 A 的闭包.

(9) 那么, 对于所有 $[a,b]$ 上的连续函数, 至少存在一点可导的函数构成的集合是无处稠密集的可列并 (第一纲集). 这里, 无处稠密集是指其闭包不存在内点的集合, 并且连续函数之间的度量定义为 $\rho_{[a,b]}(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f-g|$.

(10) Baire 纲集定理: 闭集 B_n 无内点, 则 $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ 也无内点. 由此容易知道第一纲集是没有内点的.

2 第 2 次习题课: 序列极限, 函数极限

2.1 问题

1. 证明 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1$.
2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$.
3. 计算 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$.
4. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$.
5. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}$.
6. 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.
7. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2}$.
8. 设数列 $a_n \to 0$ 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = a$. 证明 $a \le 1$.
9. 令 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1)$, 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
10. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \exists$, 证明 $\frac{a_n}{n} \to 0$.
11. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} (n!)^{1/n^2} = 1$.
12. $a_1 = b, a_2 = c, a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$, 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
13. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1})^{\frac{1}{x}}$. 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.
14. $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, 且 $|f(x)| \le \sin x$. 证明 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \le 1$.
15. 设 $\delta > 0$, 且 $f(x)$ 在区间内 $(-\delta, \delta)$ 有界. $\exists a > 1, b > 1$ 使得 $f(ax) = bf(x)$. 证明当 $x \to 0$ 时 $f(x) \to 0$.
16. a_n 收敛到 a 当且仅当 a_n 的任意子列都收敛到 a.

2.2 解答

1. 注意到 $|\frac{1}{x-1} - 1| = |\frac{x-2}{x-1}|$, 取 $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\epsilon)$.
2. 注意到 $|x^2 \sin\frac{1}{x}| \le |x^2| \to 0$, 取 $\delta = \sqrt{\epsilon}$.
3. $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^3 + h^3}{h} \to 3x^2$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to \frac{1}{2}$.

5. $|\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}| = |2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}| \le |\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}| \le \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} \to 0$.
6. $\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2} = \frac{2\sin 2x\sin x}{x^2} \sim \frac{2\times 2x\times x}{x^2} = 4$.
7. 这种形如 $(1+0)^\infty$ 的极限问题一定是去试图凑 e. 原式 $= [(1+\frac{3}{x^2-2})^{\frac{x^2-2}{3}}]^{\frac{3x^2}{x^2-2}} \to e^3$.
8. 如果 $a>1$, 那么 $\exists N$ 使得 $\forall n>N, |a_{n+1}/a_n| > (1+a)/2$, 则 $|a_n| > |a_N|(\frac{1+a}{2})^{n-N} \Rightarrow |a_n| \to \infty$.
9. $\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}(\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}})$. $(*) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\times\frac{1}{2} \to \frac{1}{4}$. $(*) \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\times\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{4}$.
10. $a_n/n = \sum a_n/n - \frac{n-1}{n}\sum a_{n-1}/(n-1) \to 0 - 1\times 0 \to 0$.
11. 使用夹逼定理知 $1 \le (n!)^{1/n^2} \le n^{1/n} \to 1$. (PLUS: Stirling: $n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$).
12. $a_n - a_{n-1} = (-\frac{1}{2})(a_{n-1}-a_{n-2}) = (-\frac{1}{2})^2(a_{n-2}-a_{n-3}) = \cdots = (-\frac{1}{2})^{n-1}(a_1-a_0)$, 从而 $a_n - a_0 = (a_1-a_0)[1+(-\frac{1}{2})+\cdots+(-\frac{1}{2})^{n-1}] \to \frac{2}{3}(a_1-a_0) \Rightarrow a_n \to \frac{1}{3}a_0+\frac{2}{3}a_1$.
13. 我们已经证明了 $(a-1)^{1/x} \to 1, (1/x)^{1/x} \to 1$, 所以原极限值等于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x-1)^{1/x}$. 从而: 如果 $a>1$, $\lim = a$; 如果 $0<a<1$, $\lim = 1$.
14. 注意到 $|f(x)/\sin x| \le 1$. 令 $x \to 0$ 即可.
15. $x \in (-\delta,\delta), |f(x)| < M \Rightarrow x \in (-\delta/a, \delta/a), |f(x)| = \frac{1}{b}|f(ax)| \le \frac{M}{b} \Rightarrow x \in (-\delta/a^n, \delta/a^n), |f(x)| \le \frac{M}{b^n} \Rightarrow f(x) \to 0$ 当 $x \to 0$ 时.
16. $\Rightarrow$ 是显然的. $\Leftarrow$. 反证法, 如果结论不对, 则 $\exists\epsilon_0>0, \forall N, \exists n_k > N$ 使得 $|a_{n_k}-a| > \epsilon_0$. 取子列 $\{a_{n_k}\}$ 即可.

2.3 补充 (不要求掌握!)

闭区间套定理: $a_n\uparrow, b_n\downarrow, 0<b_n-a_n\to 0$, 那么 $\exists$ 唯一一个点 $x \in \cap_n[a_n,b_n]$.
证明: 令 $x = \lim\limits_{n\to+\infty}a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}b_n$ 即可.
有限覆盖定理: $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族开集 (可能不可数). 如果 $[a,b] \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$, 则 $\exists I_1,\cdots,I_m \in \{I_\lambda\}$ 使得 $[a,b] \subset \cup_{i=1}^m I_i$.
证明. 如果结论不对, 即不存在可数子覆盖, 那么对于区间 $[a,(a+b)/2]$ 和 $[(a+b)/2,b]$, 至少有一个区间不存在有限子覆盖, 这样一直切半, 由闭区间套, 必然夹出一个点 x. 由于这是开覆盖, 因此存在开集 O_x 使得 $x \in O_x$. 从而由极限知这个开区间迟早会覆盖前面的从某项开始的闭区间列, 这与假设 (不存在有限覆盖) 矛盾.
聚点原理: $|a_n| < M$, 那么 $\exists\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, 使得 $a_{n_k} \to a$ 当 $k\to\infty$ 时. (有界序列必有收敛子列)
我们给出几种证明方法:
(1) 取 M 使得 $\forall n, |x_n| \le M$, 取 $a_1 = -M, b_1 = M$. 对 $[a_n,b_n]$ 多次迭代, 每次找到 $\frac{a_n+b_n}{2}$, 这个点将当前区间划分为两个子区间. 两个子区间中必然至少有一个含有无穷项. 任取其中一个含有无穷项的区间作为 $[a_{n+1},b_{n+1}]$. 由闭区间套定理, 最终 a_n, b_n 有相同的极限 x, 同时 x_n 中有无穷项与 x 任意接近. 选取 $x_{n_k} \in [a_i,b_i]$, 则 $x_{n_k} \to x$.
(2) 如果不存在这样的子列, 那么 $\forall x \in [a,b]$, $\exists\delta>0$ 使得 $|(x-\delta,x+\delta)\cap\{x_i\}_{i=1}^n| \le 1$. 这样构造出的开区间集合覆盖了 $[a,b]$, 由有限覆盖定理, 必然存在有限个开区间覆盖整个区间. 而由假设, 对于取出的每个开区间中至多只有原序列中的一个点, 由于开区间的数量为有限个, 可以得出原序列长度也是有限的, 这显然不成立.
柯西收敛: $\forall\epsilon>0, \exists N, \forall n,m > N, |a_n - a_m| < \epsilon$. 这与之前的极限定义是等价的, 但优点是不需要提前知道 "无理数".
证明. $\Rightarrow$: 取 $\epsilon = 1$ 以及满足条件的 N, 那么 $1+\max_{i=1,2,\cdots,N}|x_i|$ 给出了整个序列 $\{x_n\}$ 的界. 取它的一个收敛子列 x_{n_k}, 并记这个极限为 x. 从而 $|x_n - x| \le |x_{n_k}-x| + |x_n - x_{n_k}| \to 0$. $\Leftarrow$: $|a_n-a_m| \le |a_n-a|+|a_m-a| \to 0$.

3 第 3 次习题课: 闭区间上的连续函数

3.1 问题

1. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.
2. $\{x_n\}$ 收敛且 $\{y_n\}$ 收敛, 证明 $\{x_n+y_n\}$ 收敛. $\{x_n\}$ 且 $\{y_n\}$ 发散, 是否有 $\{x_n+y_n\}$ 或者 $\{x_ny_n\}$ 一定发散? 如果 $\{x_ny_n\}$ 是无穷小量, 是否有 $\{x_n\}$ 或者 $\{y_n\}$ 一定是无穷小?
3. 求极限. $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$.
4 (不要求掌握). $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}\exists$. (这个引理在大偏差理论中很有用).

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. 求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_{n+1-i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} = a$. 其中 $p_k > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} = 0$.
6. 求极限. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})^x$.
7. 证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\exists \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)\exists$, 但是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\exists \not\Leftarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$.
8. 举例说明存在 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处不连续, 但 $|f(x)|$ 处处连续.
9. $a_1, a_2, \cdots, a_p > 0$, 计算 $\lim\limits_{x\to 0+0} (\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i^x}{p})^{\frac{1}{x}}$.
10. 求极限. $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x\log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}$.
11 (不要求掌握). 举例说明存在一个函数处处不连续, 其定义域是 $[0,1]$ 但是值域为区间.
12. $f(x) \in C[a,b]$, $|f(x)|$ 单调. 证明 $f(x)$ 单调.
13 (不要求掌握). $|f(x)-f(y)| \le k|x-y|$. $0<k<1$. 证明 $kx - f(x)$ 单调上升并且 $\exists c, f(c) = c$.
14. $f(x) \in C[a,b]$, $\forall x, \exists y$, 使得 $|f(y)| \le \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明 $\exists \xi$, 使得 $f(\xi) = 0$.
15 (不要求掌握). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有第一类间断点, 证明 $f(x)$ 有界.
16. 设 $f(x) \in C[a,b], f(a)f(b) < 0$. 证明 $\forall n = 1,2,\cdots, \exists \{\xi_i\}_{i=1}^{n} \subset [a,b], \xi_i \ne \xi_j$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} e^{f(\xi_i)} = n$.
17. 非负函数 $f \in C[0,1], f(0) = f(1) = 0$. 证明 $\forall a \in (0,1), \exists x_0 \in [0,1]$ 使得 $x_0 + a \in [0,1]$ 且 $f(x_0) = f(x_0+a)$. 如果去掉非负条件还对吗?
18. $f_n(x) = x^n + x$. (1) 证明: $\forall n$, $f_n(x) = 1$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 中有且仅有一个根 c_n; (2) 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.
19. 不等于常数的连续周期函数一定有最小正周期. 如果把连续性去掉结论如何?
20 (不要求掌握). f 在 $[a,b]$ 内处处有极限. 证明: (1) $\forall \epsilon > 0$, 在 $[a,b]$ 中使得 $|\lim\limits_{t\to x} f(t) - f(x)| > \epsilon$ 的点至多有有限个. (2) $f(x)$ 至多有可列个间断点.

3.2 解答

1. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (使用不等式 $\frac{i}{i+1} < \frac{i+1}{i+2}$), 那么 $x_n^2 < \frac{1}{2n+1}$, 这意味着 $x_n \to 0$.
2. 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{x_n + y_n\}$ 都收敛, 那么 $\{x_n + y_n - x_n = y_n\}$ 也会收敛. 构造 $x_n = (-1)^{n-1}, y_n = (-1)^n$, 那么 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 发散但是 $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ 都收敛. 再构造 $x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}, x_{2n} = 1, y_{2n-1} = 1, y_{2n} = \frac{1}{2n}$. $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都不是无穷小量但是 $\{x_n y_n\}$ 是无穷小量.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{2\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n-1}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.
4. 考虑 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 的下确界 α. 那么 $\exists n$ 使得 $x_n/n < a + \epsilon$. 设 $\max_{i=1,2,\cdots,n} x_i = M$. 那么 $\frac{x_m}{m} \le \frac{x_n}{m} + \frac{x_{m-n}}{n} \le \frac{2x_n}{m} + \frac{x_{m-2n}}{m}$ (假设 $m = kn + b$) $\le \cdots \le \frac{kx_n}{m} + \frac{x_b}{m} \le \frac{kx_n}{kn+b} + \frac{M}{m} \le \frac{x_n}{n} + \frac{M}{m}$. 选择足够大的 m 使得 $\frac{M}{m} < \epsilon$. 从而 $a \le \frac{x_m}{m} < a + 2\epsilon$.
5. WLOG 令 $a = 0$. 设 $\sup_n\{a_n\} = M$. $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n \ge N_1$, 使得 $|a_n| < \epsilon$; $\exists N_2, \forall n \ge N_2$, 使得 $p_n / \sum\limits_{n} p_n < \epsilon / N_1$. 令 $n > N_1 + N_2$, 则 $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i p_{n+1-i} / \sum\limits_{i=1}^{n} p_i| \le |\sum\limits_{i=1}^{n-N_1} p_i a_{n+1-i} / \sum\limits_{i=1}^{n} p_i| + |\sum\limits_{i=n-N_1+1}^{n} p_i a_{n+1-i} / \sum\limits_{i=1}^{n} p_i| < \epsilon + \frac{\epsilon}{N_1} \times N_1 \times M = (M+1)\epsilon$.
6. $(e^{ax} - e^{bx})/x = a \cdot \frac{e^{ax}-1}{ax} + b \cdot \frac{1-e^{bx}}{b} \to a - b, \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1/x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3}}}+1} \to \frac{1}{2}$
$(\sin 1/x + \cos 1/x)^x = [(1 + \cos 1/x + \sin 1/x - 1)^{\frac{1}{\cos 1/x + \sin 1/x - 1}}]^{x\cos 1/x + \sin 1/x - 1} = (1/x = t) = e^{(\cos t + \sin t - 1)/t} = e^1$.
7. $x \to 0 \Leftrightarrow x^3 \to 0$, 但是 $x^2 \to 0 \Leftrightarrow x \to 0+0$.
8. $f(x) = 1_{\mathbb{Q}} - 1_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$.
9. $(\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i^x}{p})^{1/x} = [1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x - 1)}{p}]^{1/x} = \{[1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}{p}]^{\frac{p}{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}}\}^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}{px}} \to e^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}\log a_i}{p}} = (a_1 a_2 \cdots a_p)^{1/p}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x\log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2} \sim \frac{x \cdot 3x}{(2x)^2} = \frac{3}{4}, \lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x} = \frac{(2/3)^x - 1}{1 - (4/3)^x} \sim \frac{x\log(2/3)}{-x\log(4/3)} = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 4 - \log 3}$.
11. $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x + \frac{1}{2} & x \in [0, \frac{1}{2}] \& x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1] \& x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.
12. 不妨设 $|f(x)|$ 单调递增. 只需注意到如果 $f(x_0) = 0$, 那么对于所有的 $x \in [a, x_0]$, $f(x) = 0$.

13. 第一问是定义, 第二问用柯西收敛准则, 重复利用已知不等式来证明 $x, f(x), f(f(x)), \cdots$ 是柯西列.
14. 如果不存在 ξ 使得 $f(\xi)=0$. 那么 $f(x)$ 始终保号, 不妨设 $f(x)>0$. 设 $x_0=\arg\min f(x)$. 这样就不存在 y 使得 $|f(y)|\leq \frac{1}{2}f(x)$, 矛盾.
15. 第一类间断点 $\Rightarrow$ 每一点都有一个邻域有界 $\Rightarrow$ 所有邻域构成开覆盖, 必有有限子覆盖, 有限个有界总能找到最大界.
16. $\exists\eta>0$, 使得 $f([a,b])\supset[-\eta,\eta]$, 这意味着 $e^{f([a,b])}\supset[e^{-\eta},e^{\eta}]\supset[1-\epsilon,1+\epsilon]$($\exists$ 一个足够小的 $\epsilon>0$). 从而如果 n 是奇数, 选择 $e^{f(\xi_1)}=1, e^{f(\xi_2)}=1-\epsilon/2, e^{f(\xi_3)}=1+\epsilon/2, e^{f(\xi_4)}=1-\epsilon/3, e^{f(\xi_5)}=1+\epsilon/3,\cdots$; 如果 n 是偶数, 选择 $e^{f(\xi_1)}=1-\epsilon/2, e^{f(\xi_2)}=1+\epsilon/2, e^{f(\xi_3)}=1-\epsilon/3, e^{f(\xi_4)}=1+\epsilon/3,\cdots$.
17. 令 $g(x)=f(x+a)-f(x)$. $g(0)\geq 0, g(1-a)\leq 0$, 用介值定理. 去掉非负条件不对, 比如说 $f(x)=\sin(2\pi x), a=0.7$.
18. (1) 注意到 $f_n\uparrow\in[\frac{1}{2},1]$ 且 $f(\frac{1}{2})<1, f(1)>1$, 使用介值定理. (2) 由于 $\forall\epsilon,\exists N$, 使得 $\forall n>N,(1-\epsilon)^n+1-\epsilon<1$. 由于 $f(1-\epsilon)<1=f(c_n)$ 且 $f_n\uparrow\Rightarrow c_n>1-\epsilon$. 由极限定义知 $c_n\to 1$.
19. 反证法. 如果 $f(a)\neq f(b)$, 考虑正周期序列 $T_n\to 0$, 则由带余除法, $(b-a)\div T_n=S_n\cdots m_n$, 其中 $0\leq m_n<T_n\to 0$. 所以 $a+S_nT_n\to b$, $f(a)=f(a+S_nT_n)\to f(b)$ (连续性) $\Rightarrow f(a)=f(b)$, 矛盾. 把连续性去掉则结论不对, 比如说 Dirichlet 函数.
20. (1) 如果集合有无穷多个元素那一定有聚点 (有界序列必有收敛子列). 从而 $x_n\to x$. 考虑 y_n 使得 $|y_n-x_n|<1/n$, 且 $|f(y_n)-f(x_n)|>\epsilon$(这是集合的定义, 函数极限差 $>\epsilon$ 那么必然存在一个比较近的点使得函数差 $>\epsilon$). 从而 $y_n\to x$, f 在 x 的极限何在?(极限存在当且仅当任意趋于其的数列极限均相等, 而这里 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)$ 显然与 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 不同). (2) 记 (1) 中集合为 A_ϵ. 注意到间断点集合可以写成 $\cup_n A_{1/n}$. 可列个有限元素集合的并元素一定是可列个的.

3.3 补充 (不要求掌握!)

有界性定理: $f(x)\in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 有界.
证明. 如果无界, 则选择 x_n 使得 $f(x_n)\to\infty$, 那么存在一个子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ 收敛到某个 x(聚点原理). 由连续性知 $f(x)=\infty$, 矛盾.
最值定理: $f(x)\in C[a,b]$, 那么 $\arg\max f(x)\exists$.
证明. 找一个数列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)\to\max f(x)$. 利用有界数列必有收敛子列和 $f(x)$ 的连续性.
介值定理: $f(x_1)>0, f(x_2)<0, f(x)\in C[x_1,x_2], \exists x_0$ 使得 $f(x_0)=0$.
证明. 使用 Lebesgue 方法. 令 $x_0=\sup\{x: f(x)>0\}$. 利用连续性知如果 $f(x_0)>0$ 则 x_0 不是上界 (因为根据连续性会有 x_0 的一个邻域都满足 $f(x)>0$), 如果 $f(x_0)<0$ 则有更好的上确界 (同样根据连续性会有 x_0 的一个邻域满足 $f(x)<0$).

4 第 4 次习题课: 导数, 高阶导数

4.1 问题

1. $f(x)\in C(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 证明 $\arg\min_{x\in\mathbb{R}}f(x)\exists$.
2. 证明 $\cos x=\frac{1}{x}$ 有无穷多个正实数根.
3. $f(x)\in C[a,b], x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$. 证明 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$.
4. $f(x)=|x|^{1/4}+|x|^{1/2}-\frac{1}{2}\cos x$. 问 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中有多少个根?
5. $f(x)\in C[0,2], f(0)=f(2)$, 证明 $\exists x_1,x_2\in[0,2]$ 使得 $|x_1-x_2|=1$ 并且 $f(x_1)=f(x_2)$.
6. $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$. 讨论连续性.
7. $f(x)\in C(\mathbb{R}), f(x+y)=f(x)+f(y)$. 求解 $f(x)$.
8. $f(x)$ 连续, 问 $|f(x)|$ 连续否?
9. $f(x)\in C[0,1], 0\leq f(x)\leq 1$, 证明 $\exists t\in[0,1]$ 使得 $f(t)=t$.
10 (不要求掌握). $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, $0\leq f(x)\leq 1$, 证明 $\exists t\in[0,1]$ 使得 $f(t)=t$.
11. $f(x)$ 在 $x=3$ 连续, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=2$. 求 $f'(3)$.
12. $f(x)$ 在 x_0 处可导, 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x}$.

13. 证明奇函数导数是偶函数, 偶函数导数是奇函数.
14. 求导数. $y=\sqrt[3]{2+3x^3}, y=\arcsin\frac{1}{x^2}, y=\log(\arctan 5x)+\log(1-x), y=e^{\sin^2 x}+\sqrt{\cos x}2^{\sqrt{\cos x}}$.
15. $f(x)=x|x(x-2)|$, 求 $f'(x)$.
16. $f(x), x\in[-1,1], x\le f(x)\le x^2+x$, 证明 $f'(0)=1$.
17. 求导数. $e^{xy}=3x^2y, \arctan y/x=\log\sqrt{x^2+y^2}$.
18. 求导数. $f(x)^{g(x)}, x^{x^x}$.
19. 求 $\frac{x^n}{1-x}, \sin^4 x+\cos^4 x$ 的 n 阶导数.
20. 求 $\arcsin^2 x$ 在 0 处的 n 阶导数.
21. 求极限. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x, \lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n^2]{n}-1), \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}$.
22. $f([a,b])\subset[a,b], |f(x)-f(y)|\le|x-y|$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$, 证明 $\forall x_1\in[a,b]$, 都有 x_n 收敛.

4.2 解答

1. 由极限定义知 $\exists X>0, \forall |x|>X, f(x)>f(0)$. 那么 $\arg\min_{x\in[-X,X]} f(x)=\arg\min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, 由最值定理知存在性.
2. 设 $f(x)=\cos x-1/x$, 那么 $f(2k\pi)>0, f(2k\pi+\frac{\pi}{2})<0$, 由介值定理立得.
3. 注意到 $\min f(x)\le\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\le\max f(x)$. 使用介值定理.
4. 注意到 $f(x)$ 是偶函数. 由于 $\forall x>1$, $f(x)>0$, 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上单调递增, 则 $f(0)<0, f(1)>0\Rightarrow$ 有且仅有一个正实数根. 从而在 $\mathbb{R}$ 上有两个根.
5. 令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$. 那么 $g(0)g(1)\le 0\Rightarrow\exists x\in[0,1]$ 使得 $g(x)=0$.
6. $f(x)=\begin{cases} x^2 & |x|>1 \\ -x & 0<|x|<1 \end{cases}$.
7. 先证有理数点. $f(n)=f(1)+f(n-1)=2f(1)+f(n-2)=\cdots=nf(1), f(1)=f(1/n)+f((n-1)/n)=2f(2/n)+f((n-2)/n)=\cdots=nf(1/n)\Rightarrow f(m/n)=mf(1/n)=m/n\times f(1)$. 有理数点满足 $f(x)=xf(1)$, 无理数点用有理数逼近用连续性就可以了.
8. 注意到 $||f(x)|-|f(y)||\le|f(x)-f(y)|$. 因此连续.
9. 令 $g(t)=f(t)-t$, $g(0)\ge 0, g(1)\le 1$, 利用介值定理.
10. 使用 Lebesgue 方法. 令 $x_0=\sup_x\{f(x)>x\}$, 往证 $f(x_0)=x_0$. 如果 $f(x_0)>x_0$, 那么 $\forall x_1, x_0<x_1<f(x_0)$, 都有 $f(x_1)\ge f(x_0)>x_1$. 这意味着 x_0 不是上界. 如果 $f(x_0)<x_0$, 那么 $\forall x_1, f(x_0)<x_1<x_0$, 都有 $f(x_1)\le f(x_0)<x_1$. 这意味着 x_0 不是上确界, 因为有更好的上界. 因此 $f(x_0)=x_0$.
11. 当 $x\to 3$ 时, $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)/(x-3)\times(x-3)\sim 2\times(x-3)=0$. 从而 $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$.
12. $\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x}=\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+\frac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x}\to 2f'(x_0)$.
13. 奇函数导数是偶函数: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{-x\to -x_0}\frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)}=f'(-x_0)$. 同理偶函数导数是奇函数.
14. $y'=\frac{3x^2\sqrt[3]{2+3x^3}}{2+3x^3}, y'=\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}, y'=\frac{5}{\arctan 5x\times(1+25x^2)}+\frac{1}{x-1}, y'=e^{\sin^2 x}\sin 2x-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}2^{\sqrt{\cos x}}(1+\sqrt{\cos x}\log 2)$.
15. 直接计算即可, 注意验证分段点左右导数是否相等. $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-4x & x<0 \text{ or } x>2 \\ 4x-3x^2 & 0\le x<2 \\ \nexists & x=2 \end{cases}$.
16. 注意到 $f(0)=0$. 从而当 $x\to 0$ 时, $1\leftarrow\frac{x}{x}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x^2+x}{x}\to 1$.
17. 两边同时对 x 求导数, 计算可知 $y'=\frac{y(2-xy)}{x(xy-1)}, y'=\frac{x+y}{x-y}$.
18. 方法都是写成指数函数, $e^{g\log f}, e^{e^{x\log x}\log x}$. 结果是 $f^g(g'\log f+\frac{f}{g}f'), x^{x^x}(x^x(1+\log x)\log x+x^{x-1})$.
19. $\frac{x^n}{1-x}=\frac{x^n-x^{n-1}+x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+x-1+1}{1-x}=-(x^{n-1}+\cdots+x+1)+\frac{1}{1-x}$, 因此 n 阶导数是 $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. 第二个用倍角公式写出来是 $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$. $y'=-\sin 4x$. 由课上已知关于三角函数高阶导数的结论, 知 $y^{(n)}=-4^{n-1}\sin(4x+\frac{n-1}{2}\pi)$.
20. $f'(x)=2\arcsin x/\sqrt{1-x^2}$, 从而 $(1-x^2)f'(x)^2=4f(x)$. 两边求导 $-2xf'(x)^2+2(1-x^2)f'(x)f''(x)=4f'(x)\Rightarrow -xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2$. 两边求 $n-2$ 次导数, 并代入 $x=0$, 利用 Leibniz 公式知道 $f^{(n)}(0)=(n-2)^2f^{(n-2)}(0)$. 然后再把 $f'(0), f''(0)$ 算出来用递推就可以了.

21. (1) $\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1}\to\frac{1}{2}$. (2) $n(\sqrt[n^2]{n}-1)=n(e^{\log n/n^2}-1)\sim n\log n/n^2\to 0$.
(3) $(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}=[(1+2x)^{1/(2x)}]^{2(x+1)^2}\to e^2$.
22. 回忆: 这种题一定是单调数列. 容易验证数列是良定义的, 即不会跑出区间 $[a,b]$ 外. 如果 $x_n\ge x_{n-1}$, 有 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(f(x_n)+x_n)$ (利用 $f(x_n)-f(x_{n-1})\ge x_{n-1}-x_n$) $\ge\frac{1}{2}(f(x_{n-1})+x_{n-1})=x_n$. 从而如果 $x_2\ge x_1$, 则这成为单调上升有界数列, 必收敛. 同理若 $x_{n-1}\ge x_n$ 也可以推出 $x_n\ge x_{n+1}$.

4.3 补充 (不要求掌握!)

参考 https://wqgcx.github.io/courses/analysis1.pdf.

5 第 5 次习题课: 隐函数求导, 微分, 不定积分

5.1 问题

1. 求出闭区间 $[-1,1]$ 上的一元函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 达到最小值的所有 $[-1,1]$ 上的点.
2. 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x^m\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 其中 m 为正整数. 在 $x\ne 0$ 处, 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$. 求 m 满足的条件, 使得 $f(x)$ 有连续的二阶导函数.
3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\log(1+x)}{x}+\frac{x}{2} & x>0\\ a & x=0\\ \frac{\sin bx}{x}+cx & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 确定常数 $a,b,c,$ 的值 (需要用洛必达法则).
4. $y=e^{-x^2}$, 求 $y^{(4)}|_{x=0}$.
5. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\arccos\frac{x}{a}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
6. $y^2\tan(x+y)-\sin(x-y)=0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
7. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
8. 求函数 $f(x)=x^{\arcsin x}(0<x<1)$ 的导函数 $f'(x)$.
9. 求函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 点的 3 阶导数 $f'''(0)$.
10. 设 $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$, 求 $f^{(n)}(x),n\in\mathbb{N}$.
11. 求方程 $y^2+2\log y=x^4$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的二阶导数.
12. 判断下列结论是否正确.
(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0)>0$, 那么: (1.1) $f(x)$ 在 x_0 点一定连续. (1.2) $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内一定连续. (1.3) $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内一定单调上升.
(2) $f(x)$ 在 x_0 点二阶可导, 那么: (2.1) $f(x)$ 在 x_0 点一定连续. (2.2) $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内一定连续.
13. 设 $f(x)=e^{x(x-1)\cdots(x-2021)}$, 求 $f'(2021)$.
14. 设 $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
15. 设 $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 并化简.
16. 求积分. $\int\frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)}dx,\int\frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6}dx,\int\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx,\int\frac{3+5x}{\sqrt{4x^2-4x+5}}dx$.
17. 设 $y=f(x)=x^3,x=g(t)=t^2,y=f(g(t))=t^6,\Delta t=0.1,\Delta x=g(1+0.1)-g(1)=0.21$.
(1) 当把 t 作为自变量时, 函数 $y=f(g(t))$ 的二阶微分记为 d_t^2y, 函数 $x=g(t)$ 的一阶微分记为 d_tx. 计算出: 当 $t=1,\Delta t=0.1$ 时, 函数 $y=f(g(t))$ 的二阶微分 $d_t^2y|_{t=1,\Delta t=0.1}$ 和函数 $x=g(t)$ 的一阶微分 $d_tx|_{t=1,\Delta t=0.1}$.
(2) 当把 x 作为自变量时, 函数 $y=f(x)$ 的二阶微分记为 d_x^2y, x(看作 x 的函数) 的一阶微分记为 d_xx. 计算出: 当 $x=1,\Delta x=0.21$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的二阶微分 $d_x^2y|_{x=1,\Delta x=0.21}$ 和函数 x(看作 x 的函数) 的一阶微分 $d_xx|_{x=1,\Delta x=0.21}$.
(3) $\frac{d_t^2y}{(d_tx)^2}|_{t=1,\Delta t=0.1}$ 与 $\frac{d_x^2y}{(d_xx)^2}|_{x=1,\Delta x=0.21}$ 相等吗?
18. 求极限. $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x,\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x+\tan x},\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}\cdots\cos\frac{a}{2^n}\ (a\in(0,1)),\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^{x^2},\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.
19. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=0$.

20. 设 $f(x) \in C[0,1]$, 如果极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(0)+f(1/n)+f(2/n)+\cdots+f(1)}{n} = M$, 其中 $M = \max_{x\in[0,1]} f(x)$, 则 $f(x) \equiv M$.

21 (Riemann-Lebesgue 引理). $f \in R[a,b], g \in R[0,T], g(x+T) = g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)dx \to \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.

5.2 解答

1. $f(1) = f(-1) = 1, f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2x}{3(x^2-1)^{2/3}} = \frac{2[(x^2-1)^{2/3}-x^{4/3}]}{3x^{1/3}(x^2-1)^{2/3}} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $-1 < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 注意到 $f(0) = 1$. 从而达到最小值的点是 $-1, 0, 1$.

2. $f'(x) = -x^{m-2}\cos\frac{1}{x} + mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}, f''(x) = -x^{m-4}\sin\frac{1}{x} - (m-2)x^{m-3}\cos\frac{1}{x} - mx^{m-3}\cos\frac{1}{x} - m(m-1)x^{m-2}\sin\frac{1}{x}$. 要使得 $f''(0)$ 存在需要 $f'(0)\exists, f'(x) \to f'(0)$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\exists \Rightarrow m \geq 4$, 二阶导函数连续性意味着 $f''(x) \to f''(0) \Rightarrow m \geq 5$.

3. 连续性: $f(0+0) = a \Rightarrow a = 1, b = 1$. $f'_+(0) = 0, f'_-(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (需要用洛必达).

4. $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}, y''' = -2x(4x^2-2)e^{-x^2} + 8xe^{-x^2}, y'''' = (-24x^2+12)e^{-x^2} + (16x^4-24x^2)e^{-x^2}$. 从而 $y''''(0) = 12$.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

6. 两边求导, $2yy'\tan(x+y) + \frac{y^2}{\cos^2(x+y)}(y'+1) + (y'-1)\cos(x-y) = 0 \Rightarrow y' = \frac{\cos^2(x+y)\cos(x-y)-y^2}{\cos^2(x+y)\cos(x-y)+y^2+2y\sin(x+y)\cos(x+y)}$.

7. $y' = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a+1}x^{a-1}\log a + a^{a^x+x}(\log a)^2$.

8. $f(x) = e^{\arcsin x \log x}, f'(x) = x^{\arcsin x}(\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x})$.

9. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2-8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow f'''(0) = -2$.

10. $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{4}(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}})$.

11. 两边求导, $2yy' + 2\frac{y'}{y} = 4x^3 \Rightarrow y^2y' + y' = 2x^3y$, 再求一次, $2y(y')^2 + y^2y'' + y'' = 6x^2y + 2x^3y'$, 利用 $y' = \frac{2x^3y}{y^2+1}$, 得到 $y'' = \frac{6x^2y}{y^2+1} + \frac{4x^6y}{(y^2+1)^2} - \frac{8x^6y^3}{(y^2+1)^3}$.

12. (1.1) 可导一定连续. (1.2)(1.3) 不一定, 比如说 $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x + x^2 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$. (2.1) (2.2) 都是对的.

13. $f'(x) = e^{x(x-1)\cdots(x-2021)}[x(x-1)\cdots(x-2021)]'$, 从而 $f'(2021) = 2021!$.

14. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{sgn}(t)$, 注意到 t, x 同号, 因此 $\frac{dy}{dx} = \mathrm{sgn}(x)$.

15. 直接计算, 小心化简. $y'(x) = \frac{1}{x^4+1}$.

16. (1) $\frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{x}{(x^2+1)}$, 因此积分后是 $2\log|x+1| + \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$.

(2) $\frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6} = \frac{11}{10\sqrt{3}}\frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{11}{10\sqrt{3}}\frac{1}{x+\sqrt{3}} - \frac{1}{5\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{x^2+2} + \frac{1}{5}\frac{x}{x^2-3} - \frac{1}{5}\frac{x}{x^2+2}$, 因此积分后是 $\frac{11}{10\sqrt{3}}\log|x-\sqrt{3}| - \frac{11}{10\sqrt{3}}\log|x+\sqrt{3}| - \frac{1}{5\sqrt{2}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{10}\log|x^2-3| - \frac{1}{10}\log(x^2+2) + C$.

(3) $\frac{\cos^3 x dx}{\sin x+\cos x} = \frac{d\tan x}{(\tan x+1)(\tan^2 x+1)^2}$, 后面用有理式展开积分. 结果是 $\frac{1}{4}\log|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin x\cos x + \frac{1}{4}\cos^x + C$. (注: 本题也可以用对偶积分, 考虑 $\int\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$).

(4) $\frac{3+5x}{\sqrt{(2x-1)^2+4}} = \frac{5(x-\frac{1}{2})}{2\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}} + \frac{11}{4\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}}$, 因此积分后是 $\frac{5}{2}\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1} + \frac{11}{4}\log|x - \frac{1}{2} + \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}| + C$.

17. (1) $d_t^2y|_{t=1,\Delta t=0.1} = 30t^4(\Delta t)^2|_{t=1,\Delta t=0.01} = 0.3, d_tx|_{t=1,\Delta t=0.1} = 2t\Delta t|_{t=1,\Delta t=0.1} = 0.2$.

(2) $d_x^2y|_{x=1,\Delta x=0.21} = 6x(\Delta x)^2 = 0.2646, d_xx|_{x=1,\Delta x=0.21} = 1\Delta_x|_{x=1,\Delta x=0.21} = 0.21$.

(3) $(d_tx)^2|_{t=1,\Delta t=0.1} = 0.2^2 = 0.04, (d_xx)^2|_{x=1,\Delta x=0.21} = 0.21^2 = 0.0441, \frac{d_t^2y}{(d_tx)^2}|_{t=1,\Delta t=0.1} = \frac{0.3}{0.04} = 7.5 \neq 6 = \frac{0.2646}{0.0441} = \frac{d_x^2y}{(d_xx)^2}|_{x=1,\Delta x=0.21}$, 因此不相等.

18. (1) $x^x = e^{x\log x} \to e^0 = 1$.

(2) $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x, x + \tan x \sim 2x$, 因此极限值为 $\frac{1}{6}$.

(3) $\cos\frac{a}{2}\cdots\cos\frac{a}{2^n}\sin\frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n}$(不断利用 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$), 因此极限值为 $\frac{\sin a}{a}$.

(4) $(1 + \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x})^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x}x(\sqrt{1+x^2}-x)}$, 由于 $x(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to \frac{1}{2}$, 因此原极限为 $\sqrt{e}$.

(5) $\sqrt{n}(\sqrt[n]{n} - 1) \sim \sqrt{n}(e^{(\log n)/n} - 1) \sim \sqrt{n}(\log n)/n = \log n/\sqrt{n} \to 0$.

19. 分奇偶讨论. 使用 $a_n \to a$ 则 $\sum a_n/n \to a$ 这个结论.

20. 如果结论不对, 则存在一个长度为 δ 的区间, 在这个区间上 $f(x) \leq M - \epsilon$, 则至少有 $[\delta/n] - 1$ 个 $f(i/n)$ 落在这个区间里, 这样一来极限值就会小于等于 $M(1-\delta) + (M-\epsilon)\delta$, 矛盾.

21. WLOG 设 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.

由 Riemann 积分定义, $\forall \epsilon > 0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \le x < x_1 \\ C_2 & x_1 \le x < x_2 \\ \cdots \\ C_m & x_{m-1} \le x \le b \end{cases}$ 使得 $\int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|dx < \epsilon$. 设 $M = \sup_{x\in[0,T]} |g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx| = |\int_a^b (f(x)-s_\epsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx| \le \int_a^b |f(x)-s_\epsilon(x)|g(nx)dx + |\sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx < M\epsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \le M\epsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_i MT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \cdots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$ (设 $c+kT \le d < c+(k+1)T$) $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \le MT$. 选择一个足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_i MT < \epsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx| \le (M+1)\epsilon$.

5.3 补充 (不要求掌握!)

参考 https://wqgcx.github.io/courses/analysis2.pdf, 初步了解可积性理论.

6 第 6 次习题课: 不定积分, 变上限积分, 定积分

6.1 问题

1. 求极限. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}})$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}) \sin\frac{i\pi}{n^2}$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.
2. 求导数. $\int_{x^3+1}^{2^x} \frac{\sin t}{t^4+2}dt$, $\int_e^{e^x} \frac{dt}{1+\log t}(x>1)$, $(\int_a^x f(t)dt)^2$.
3. 求积分. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$, $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$, $\int_{-1}^1 \log(x+\sqrt{1+x^2})dx$.
4. 求积分. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, $\int \sqrt{\tan x}dx$, $\int \frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$, $\int \frac{dx}{x(x^3+2)}$, $\int x^2 \arctan x dx$, $\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$, $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.
5. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数. 证明: 对于任意 $x \in [0,1]$, 有 $|f(x)| \le \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |f'(t)|dt$, 并写出取等号条件.
6. $x_1 > 0$, 对于每个正整数 n, 有 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$. 证明 $\lim_{n\to+\infty} x_n$ 存在并求之.
7. 设 $x > 0$, 定义 $p(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}}$, 证明方程 $p(x+1) = p(x) + \sin x$ 有无穷个互不相等的正实数解.
8. 设 $f(x) \in R[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx > 0$, 证明 $\exists[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ 使得 $f(x) > 0, x \in [\alpha,\beta]$.
9 (不要求掌握). $f(x) \in R[a,b]$, 是否有 $[f(x)]$ 可积? 其中 $[\cdot]$ 表示向下取整.
10. 设 $f(x) \in C[0,\pi]$ 满足 $\int_0^\pi f(x)\cos x dx = \int_0^\pi f(x)\sin x dx = 0$, 证明 $\exists \alpha,\beta \in (0,\pi), \alpha \ne \beta$, 使得 $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.
11. 证明柯西不等式 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$, 并说明取等号条件.
12 (不要求掌握). 证明 Holder 不等式 $\int_a^b f(x)g(x)dx \le [\int_a^b f^p(x)dx]^{\frac{1}{p}}[\int_a^b g^q(x)dx]^{\frac{1}{q}}$, 其中 $p,q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $f,g \ge 0$.
13 (不要求掌握). 证明 Minkowski 不等式 $[\int_a^b [f(x)+g(x)]^p dx]^{\frac{1}{p}} \le [\int_a^b f^p(x)dx]^{\frac{1}{p}} + [\int_a^b g^p(x)dx]^{\frac{1}{p}}$, 其中 $p \ge 1, f,g \ge 0$.
14. 设 $f(x) \in C[a,b]$ 满足 $\forall \phi(x) \in C[a,b]$, 只要 $\int_a^b \phi(x)dx = 0$, 就有 $\int_a^b f(x)\phi(x)dx = 0$. 证明 $f(x) \equiv C$.
15. $a_n/n^\alpha \to 1, \alpha > 0$, 求 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.
16. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'(a) = m, f'(b) = n$, 证明存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f'(c) = \xi$, 其中 ξ 是 $[m,n]$ 或 $[n,m]$ 中的任意一个数. 本题说明导函数虽然不一定连续, 但具有介值性质.
17. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 证明存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
18. 记 $f_n(x) = n^2xe^{-nx}, x \in [0,1]$, 求 $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$ 和 $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$. 本题说明积分极限不一定可交换.
19. 记 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, 求 $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$ 和 $(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))'$. 本题说明求导极限不一定可交换.

6.2 解答

1. 利用定积分定义. (1) $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}|_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$.
(2) $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.
(3) $\frac{i\pi}{n^2} - \epsilon\frac{i\pi}{n^2} \le \sin\frac{i\pi}{n^2} \le \frac{i\pi}{n^2}$, $\sum_{i=1}^n (1+\frac{i}{n})\frac{i\pi}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (1+\frac{i}{n})\frac{i\pi}{n} \to \int_0^1 (1+x)\pi x dx = \frac{5\pi}{6}$, 同理左边 $\ge (1-\epsilon)\frac{5\pi}{6}$, 由 ϵ-N 语言.

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2$.

2. 利用变上限积分导数结论. $f' = \frac{\sin 2^x}{16^x+2} 2^x \log 2 - \frac{\sin(x^3+1)}{(x^3+1)^4+2} 3x^2$. $f' = \frac{e^x}{1+x}$. $f' = 2f(x) \int_a^x f(t)dt$.

3. $\arcsin \frac{x}{a} + C, \log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C, \log|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C, \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin(x/a))+C, \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log|x+\sqrt{x^2+a^2}|)+C, \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|)+C, 0$(注意是奇函数). 都是利用换元或者分部积分.

4.(1) 令 $u = x+\sqrt{x^2+x+1}, x = \frac{u^2-1}{2u+1} \Rightarrow 2\int \frac{u^2+u+1}{u(2u+1)^2} du = 2\int \frac{1}{u} - \frac{3(u+1)}{(2u+1)^2} du = 2\log|u| - 3\int \frac{du}{2u+1} - 3\int \frac{du}{(2u+1)^2} + C = 2\log u - \frac{3}{2}\log|2u+1| + \frac{3}{2}\frac{1}{2u+1} + C$.

(2) 令 $u = \sqrt{\tan x}, x = \arctan u^2 \Rightarrow$ 原积分 $= 2\int \frac{u^2}{1+u^4} du$. 使用对偶积分. 记 $I = \int \frac{u^2}{1+u^4} du, J = \int \frac{1}{1+u^4} du$, $I+J = \int \frac{1+u^2}{1+u^4} du = \int \frac{1+1/u^2}{u^2+1/u^2} du = \int \frac{1}{(u+1/u)^2-2} d(u+1/u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}}) + C_1$, $I - J = \int \frac{u^2-1}{u^4+1} du = \int \frac{1-1/u^2}{u^2+1/u^2} du = \int \frac{1}{(u+1/u)^2-2} d(u+1/u) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log|\frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}}| + C_2$. 从而 $I = \frac{I+J}{2} + \frac{I-J}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log|\frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}}| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log|\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}| + C$.

(3) $= \int \frac{e^x(1-x^2)+e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} de^x + \int \frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx \overset{\text{分部积分}}{=} e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \int e^x d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \int \frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx + C = e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$.

(4) $= \frac{1}{2}\int \sqrt{x^4+x^2} dx^2 = \frac{1}{2}\int \sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} d(x^2+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(x^2+\frac{1}{2})\sqrt{x^4+x^2} - \frac{1}{16}\log|x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2}| + C$.

(5) $= \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{x^3(x^3+2)} = \frac{1}{6}\int \frac{dx^3}{x^3} - \frac{dx^3}{x^3+2} = \frac{1}{6}\log|\frac{x^3}{x^3+2}| + C$.

(6) $= \frac{1}{3}\int \arctan x dx^3 = \frac{1}{3}x^3 \arctan x + C - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{3}x^3 \arctan x + C - \frac{1}{6}\int \frac{x^2 dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{3}x^3 \arctan x + C - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\log|1+x^2|$.

(7) $= \int \frac{1}{(1-\sin^2 x)^2} d\sin x = \frac{1}{4}\log|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}| + \frac{\sin x}{2(1-\sin^2 x)} + C$. 最后一个等号是积分 $\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt$, 注意到 $\int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{t}{1-t^2} - \int t d\frac{1}{1-t^2} + C = \frac{t}{1-t^2} - \int \frac{2t^2}{(1-t^2)^2} dt + C = \frac{t}{1-t^2} + \int \frac{2}{1-t^2} dt - \int \frac{2}{(1-t^2)^2} dt + C \Rightarrow \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t^2} dt + \frac{t}{2(1-t^2)} + C = \frac{1}{4}\log|\frac{1+t}{1-t}| + \frac{t}{2(1-t^2)} + C$.

(8) $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt, \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sin t} dt = -\int \frac{d\cos t}{\sin^2 t} = -\int \frac{d\cos t}{1-\cos^2 t} = \frac{1}{2}\log|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}| + C = \frac{1}{2}\log|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}| + C = \frac{1}{2}\log|\frac{(1-x)+(1+x)-2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{(1-x)+(1+x)+2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}| + C = \log|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}| + C$.

5. 由连续性和积分中值定理知 $\exists \xi \in [0,1]$, 使得 $|f(\xi)| = \int_0^1 |f(t)|dt$. 从而 $\int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |f'(t)|dt \geq |f(\xi)| + \int_\xi^x |f'(t)|dt \geq |f(\xi)| + |\int_\xi^x f'(t)dt| = |f(\xi)| + |f(x) - f(\xi)| \geq |f(x)|$. 等号处处成立意味着 $f'(x) = 0$, 这也意味着 $f(x) \equiv C$.

6. 重复这种题很多次了. 首先 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 1/x_n) \geq 1$. 其次如果 $x_n \geq 1$, 则 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(1/x_n - x_n) \leq 0$. 说明单调递减有下界, 两边求极限知答案是 1.

7. $p(x+1) - p(x) = \int_x^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}} \in [\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3+2021}}, \frac{1}{\sqrt{x^3+2021}}]$. 令 $g(x) = p(x+1) - p(x) - \sin x, g(2k\pi) > 0, g(2k\pi + \pi/2) < 0$, 用介值定理.

8. 反证法, 如果任意区间都有点 $f(x) \leq 0$, 那么 Riemann 和的极限怎么可能 > 0?(我就偏偏取那个 ≤ 0 的点)

9. 负的 Riemann 函数可积, 但取整后变成不可积的 Dirichlet 函数.

10. 由于 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = 0$, 从而存在零点 $\alpha \in (0,\pi)$. 再考虑 $\int f(x)\sin(x-\alpha)dx = 0$, 知如果只有一个零点, 那么这个积分不可能为 0 (注意到 $f(x)\sin(x-\alpha)$ 在只有一个零点 $x = \alpha$ 时是始终同号的).

11. $\int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx \geq 0$ 对于 $\forall t \in \mathbb{R}$ 恒成立. 若 $\int_a^b g^2(x)dx = 0$ 则不等式左右两边都是 0. 对于其余情况, 这是关于 t 的一元二次不等式, 因此 $\Delta \leq 0 \Rightarrow 4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leq 0$. 取等号条件是 $f(x) = Cg(x)$.

12. 不妨设 $\int f^p(x)dx = \int g^q(x)dx = 1$. 注意到 $\frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \leq \log(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. 从而 $\int f(x)g(x)dx = \leq \int \frac{f^p(x)}{p} dx + \int \frac{g^q(x)}{q} dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

13. $\int_a^b (f+g)^p dx = \int_a^b (f+g)^{p-1} f dx + \int_a^b (f+g)^{p-1} g dx$ 利用上一问结论 $\leq [\int_a^b (f+g)^p dx]^{(p-1)/p} [\int_a^b f^p dx]^{1/p} + [\int_a^b (f+g)^p dx]^{(p-1)/p} [\int_a^b g^p dx]^{1/p} \Rightarrow [\int_a^b (f+g)^p dx]^{1/p} \leq [\int_a^b f^p dx]^{1/p} + [\int_a^b g^p dx]^{1/p}$.

14. 考虑 $\phi(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. 从而 $\int_a^b f^2(x)dx = \frac{1}{b-a}[\int_a^b f(t)dt]^2 \Rightarrow \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b 1dt = [\int_a^b f(t)dt]^2$. 由 Cauchy 不等式取等条件知 $f(x) \equiv C$.

15. 这个题提醒大家很多时候感觉虽然可靠, 但要严格说明依然应该使用 N-ϵ 语言. $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\epsilon) < a_n < n^\alpha(1+\epsilon)$. 从而存在足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + N^\alpha) < \epsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) < \epsilon, |\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \cdots + (a_n - n^\alpha)]| \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[(N+1)^\alpha + \cdots + n^\alpha] \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha] = \epsilon\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^\alpha \to \epsilon\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{\epsilon}{\alpha+1}$. 这意味着当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)$ 和 $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(\sum\limits_{i=1}^{n} i^\alpha)$ 差不多. 因此原极限是 $\frac{1}{\alpha+1}$.

16. 通过平移只需证明 $f'(a)>0, f'(b)<0$, 证明存在 $f'(c)=0$. $f'(a)>0$ 说明一定有数 $x>a$ 使得 $f(x)>f(a)$, $f'(b)<0$ 说明一定有数 $x<b$ 使得 $f(x)>f(b)$. 闭区间上的连续函数必有最大值, 从而最大值点的导数一定为 0 (利用左导数 ≥ 0, 右导数 ≤ 0). 这就是 $f'(c)=0$.
17. 构造 $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. $g(a)=g(b)=f(a)$, 从而考虑 $[a,b]$ 区间上 $g(x)$ 的最大值点, 其必有 $g'(x_0)=0$, 此即 $f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
18. 这个题告诉我们求导和极限未必可交换. $f_n(x)\to 0$ 对于所有 $x\in[0,1]$ 从而 $\int_0^1 \lim f_n(x)dx=0$. 而 $\int_0^1 f_n(x)dx=1-e^{-n}-ne^{-n}\to 1$.
19. $f_n'(x)=\cos(nx)$, $f_n'(0)\to 1$, 而对于 $x\neq 0$ 其极限不存在. $f_n(x)\to 0$ 对于所有 $x\in\mathbb{R}$, 从而 $[\lim f_n(x)]'=0$.

6.3 补充 (不要求掌握!)

测度: 我们把满足以下性质的非负集函数 (定义域是集合, 且函数值非负) 叫做测度: $m(\emptyset)=0$, 并且对于任意不交的集合 $A_1,A_2,\cdots$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)=m(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)$. 外测度: 把上述不交条件去掉, 并把 $=$ 改成 $\geq$.
π 系: 一族集合构成的集合 $\mathscr{P}$, 且满足 $\forall A,B\in\mathscr{P}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{P}$.
半环: $\mathscr{P}$ 是 π 系, 若 $A,B\in\mathscr{P}, A\supset B$, 则存在有限个两两不交的集合 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 使得 $A\backslash B=\cup_k C_k$.
σ-域: 如果 $\emptyset,\Omega\in\mathscr{P}; A\in\mathscr{P}\Rightarrow A^c\in\mathscr{P}; A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{P}\Rightarrow\cup_i A_i\in\mathscr{P}$, 则称 $\mathscr{P}$ 是 σ-域.
容易验证所有形如 $(a,b], a,b\in\mathbb{R}$ 的区间构成的集合是半环, 定义 $m((a,b])=b-a$, 这是半环上的外测度. 由测度扩张定理, 这个外测度可以扩张到 $\sigma(\{(a,b]\})$ 上. 利用 Caratheodory 条件可以完备化. 这个测度成为 Lebesgue 测度.
更多关于 Lebesgue 测度的知识: Cantor 集, 胖 Cantor 集, Cantor-Lebesgue 函数, 等等.
Lebesgue 定理: $f(x)\in R[a,b]$ 当且仅当 $m(\{x: f(x)在x处间断\})=0$, 其中 m 是 Lebesgue 测度.
证明. "$\Rightarrow$" 对于区域 $[a,b]$ 的任何分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 定义 $\omega_i=\sup\{|f(x)-f(y)|, x,y\in[x_{i-1},x_i]\}, \Delta_i=|x_i-x_{i-1}|, \Delta=\max\{\Delta_i\}$. 因而 f 是 Riemann 可积等价于 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_i \omega_i\Delta_i=0$. 再定义 $\omega_\epsilon(f)=\{x: \lim\limits_{\delta\to 0}\sup_{y\in[x-\delta,x+\delta]}|f(y)-f(x)|\geq\epsilon\}$. 先假设如果 f 的不连续点集测度为正, 那么存在 ϵ_0 使得 $\omega_{\epsilon_0}(f)>0$. 对任意分割, 我们有 $\sum\limits_i \omega\Delta_i\geq\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap\omega_{\epsilon_0}(f)\neq\emptyset}\omega_i\Delta_i\geq\epsilon_0\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap\omega_{\epsilon_0}(f)\neq\emptyset}(x_i-x_{i-1})\geq\epsilon_0 m(\omega_\epsilon(f))$. 这表明 f 不是 Riemann 可积的. 因此如果 f 是 Riemann 可积的, 那么不连续点集必定是零测集.
"$\Leftarrow$" 现在我们假设 $\omega_\epsilon(f)$ 是零测集, 我们证明 f 是 Riemann 可积的. 对任意 $\epsilon>0$, 存在闭集 $A_\epsilon\subset[a,b]$ 使得 f 在 A_ϵ 上连续. 对 $x_0\in A_\epsilon$, 存在 $\delta>0$ 使得 $|f(x)-f(y)|<\epsilon, \forall x,y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 由于 A_ϵ 是有界闭集, 因此存在有限个开区间 $(x_l-\frac{1}{2}\delta_l, x_l+\frac{1}{2}\delta_l)$ 覆盖住 A_ϵ. 取 $\delta=\min\{\frac{1}{3}\delta_l\}$. 这表明对于任意 $x_0\in A_\epsilon$, 必定有某个 $x_l\in A_\epsilon$, 使得 $x_0\in(x_l-\frac{1}{2}\delta_l, x_l+\frac{1}{2}\delta_l)$. 这表明 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(x_l-\delta_l,x_l+\delta_l)$, 因而有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon, \forall x,y\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$. 取 $[a,b]$ 分割使得 $\Delta<\frac{1}{2}\delta$. 现在我们来考虑 $\sum\limits_i\omega_i\Delta_i$. 如果区间 $[x_{i-1},x_i]$ 与 A_ϵ 的交集非空, 含有某个点 $y_0\in[x_{i-1},x_i]\cap A_\epsilon$, 那么对于任意 $x,y\in[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 都有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. 注意到 $[x_{i-1},x_i]\subset[y_0-\delta,y_0+\delta]$, 故而 $\omega_i<\epsilon$. 这样我们可以估计 $\sum\limits_i\omega_i\Delta_i=\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap A_\epsilon\neq\emptyset}\omega_i\Delta_i+\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap A_\epsilon=\emptyset}\omega_i\Delta_i\leq\epsilon(b-a)+2Mm([a,b]\backslash A_\epsilon)$. 这里 M 为 f 在 $[a,b]$ 上的上界. 这就表明如果 f 的不连续点零测且 f 有界, 则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.
极限和积分可交换的三大定理 (Lebesgue 可积意义下, 但是我们有定理保证 Riemann 可积一定是 Lebesgue 可积):
Fatou 引理: 如果 $f_n\geq 0$, 那么 $\liminf\limits_{n\to+\infty}\int f_n dx\geq\int\liminf\limits_{n\to+\infty}f_n dx$.
单调收敛定理: 如果 $f_n\geq 0$ 且 $f_n\uparrow f$, 那么 $\int f_n dx\uparrow\int f dx$.
控制收敛定理: 如果 $f_n\to f$ 几乎处处成立, $|f_n|\leq g$ 对于所有 n 成立, 并且 g 可积, 那么 $\int f_n dx\to\int f dx$.

7 第 7 次习题课: 定积分及其应用

7.1 问题

1. 判断对错. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个给定的函数, 记 $f_1(x)=f(x)+g(x), f_2(x)=f(x)g(x), f_3(x)=|f(x)|, f_4(x)=\max\{f(x),g(x)\}$. (1) 假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 $x=x_0$ 处可导. 问 f_1,f_2,f_3,f_4 中哪些函数在 x_0 处一定可导, 哪些不一定? (2) 假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 $[a,b]$ 可积, 问 f_1,f_2,f_3,f_4 中哪些函数在区间 $[a,b]$ 一定可积, 哪些不一定?

2. 判断对错. $f_1, f_3 \in C[0,1]$, $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x), \forall x \in [0,1]$, 且 $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 f_3(x)$. 则 $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f_3(x)$.
3. 是否存在 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 f 在所有点上局部无界?
4. 证明 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个根 x_n, 并计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
5. 求积分. $\int_{-1}^1 \frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}dx, \int_0^2 |x^2-1|e^{-|x-1|}dx, \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin 2x}dx, \int_{-1}^1 (x^4+2x^2+1)\sin^3 xdx, \int_0^1 \log(x+\sqrt{x^2+1})dx,$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx.$
6. 设函数 $f(x) \in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x \cdot f(x)dx = 0$. 证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中至少有两个零点.
7. 设 $0 < \lambda < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{1-\lambda}$.
8. 求直角坐标 (x,y) 给出的抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(1, \frac{1}{2})$ 的弧长.
9. 设奇数 $n \ge 3$, 求极坐标 (r,θ) 给出的 n 叶玫瑰线 $r = \sin(n\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$ 所围的有界图形的面积.
10. 证明不等式. (1) $\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. (2) $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \frac{1}{10}$.
11. $f(x) \in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x)dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \to f(0)$.
12. $f(x) \in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{h\to 0+0} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x)dx \to \pi f(0)$.
13. 推导重力场中粒子数量密度的分布率 $n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$, 其中 T 是温度, k_B 是玻尔兹曼常量.

7.2 解答

1. (1) f_1, f_2 一定可导, 依据导数四则运算. f_3 不一定可导, $f(x) = x$. f_4 不一定可导, $f(x) = x, g(x) = -x$. (2) 均可积.
2. 正确. 用反证法, 如果 $f_3(x_0) > f_1(x_0)$, 由连续性存在 $\epsilon > 0$ 和 x_0 的某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 使得 $f_3(x) > f_1(x) + \epsilon$.
3. 存在. 考虑 $f(x) = \begin{cases} p, & x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.
4. 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$. $f_n(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, f(1) = n > 1$, 再由 $f_n(x)$ 单调递增和连续性知有且仅有一个根. 由于 $f_n(\frac{1}{2}+\epsilon) = (\frac{1}{2}+\epsilon)\frac{1-(\frac{1}{2}+\epsilon)^n}{\frac{1}{2}-\epsilon} \to \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon} > 1$, 因此当 n 足够大时 $f_n(x_n) = 1 < f_n(\frac{1}{2}+\epsilon) \Rightarrow x_n < \frac{1}{2}+\epsilon$, 再根据极限的 N-ϵ 定义.
5. (1) 注意到 $\frac{x^2\arcsin x}{1+x^2} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{x^2\arcsin x}{1+x^2}dx = 0$. 从而原积分 $= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = 2 - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 2 - (\arctan x)|_{-1}^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$.
(2) $= \int_0^1 (1-x^2)e^{x-1}dx + \int_1^2 (x^2-1)e^{1-x}dx = (-x^2+2x-1)e^{x-1}|_0^1 + (-x^2-2x-1)e^{1-x}|_1^2 = 4 - \frac{8}{e}$.
(3) $= 2\int_0^\pi \sqrt{1-\sin 2x}dx = 2\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}dx = 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin xdx + \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \sin x - \cos xdx) = 4\sqrt{2}$.
(4) 这是奇函数, 积分自然为 0.
(5) $= x\log(x+\sqrt{x^2+1})|_0^1 - \int_0^1 xd\log(x+\sqrt{x^2+1}) = \log(1+\sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{x^2+1})|_0^1 = \log(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$.
(6) $= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}dx = (\arcsin x - \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2})|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.
(7) 令 $x = \sin t$, 则原积分 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos td\sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 tdt$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 tdt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 td\cos t =$ 分部积分 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\sin^4 t\cos^2 tdt = 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 tdt \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 tdt = \frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 tdt$. 从而原积分 $= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 tdt =$ 分部积分 $= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = \frac{\pi}{32}$.
(8) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}d\sin x = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\log(1+t^2)|_0^1 = \frac{\log 2}{2}$.
6. $\int_0^1 f(x)dx = 0 \Rightarrow$ 一个零点 α. $\int_0^1 (x-\alpha)f(x)dx = 0 \Rightarrow$ 另一个零点 β(若不存在则 $(x-\alpha)f(x)$ 保号).
7. WLOG 令 $a = 0$. 由定义 $\forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n| < \epsilon$; $\exists M, \forall n > M, |\lambda^n| < \epsilon$. 设 $\max_n |a_n| = A$(极限存在蕴含有界). 选择 $n > N + M$. 从而 $|a_n + \lambda a_{n-1} + \cdots + a_N\lambda^{n-N}| < \epsilon|1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-N}| < \frac{\epsilon}{1-\lambda}$, 且 $|a_{N-1}\lambda^{n-N+1} + \cdots + a_0\lambda^n| < A\lambda^{n-N+1}\frac{1-\lambda^N}{1-\lambda} < \frac{A}{1-\lambda}\epsilon$. 从而整个求和 $< \frac{A+1}{1-\lambda}\epsilon$.
8. $\int_0^1 \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = [\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2})]|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$.
9. $S = n \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 n\theta d\theta = (t = n\theta) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.
10. (1) 在区间 $[0,1]$ 上成立 $\sqrt{2} \le \sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} \le \frac{3}{2}$. (2) 注意到 $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}} \le 1$, 从而 $\frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9dx < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \int_0^1 x^9dx = \frac{1}{10}$.
11. 往证 $\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \to 0$. 使用 N-ϵ 语言. $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon$. 设 $\max|f(x)| = M$. 从而原式 $= \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{\delta}^1 (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3$. $|I_1| \le \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n\epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \le \epsilon$.

$|I_2| \le 2M\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\epsilon dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx} \le 2M\frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n dx} \le 2M(1-\delta)\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M\frac{1-\delta}{\delta}(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2})^n$. 注意到 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$, 从而可以取足够大的 n 使得 $|I_2| < \epsilon$. 类似地放缩 I_3, 从而 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$.

12. 只需证明 $\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}[f(x) - f(0)]dx \to 0$. $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon$. 设 $\max|f(x)| = M$. 从而原式 $= \int_{-\delta}^{\delta}\frac{h}{x^2+h^2}[f(x) - f(0)]dx + \int_{-1}^{-\delta}\frac{h}{x^2+h^2}[f(x) - f(0)]dx + \int_{\delta}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}[f(x) - f(0)]dx := I_1 + I_2 + I_3$. 类似的有 $|I_1| \le \epsilon\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h}{x^2+h^2}dx < \epsilon\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}dx = \epsilon(\arctan\frac{x}{h})|_{-1}^{1} < \pi\epsilon$. $|I_2| \le 2M\int_{-1}^{-\delta}\frac{h}{x^2+h^2} \le 2M(1-\delta)\frac{h}{\delta^2+h^2} < 2M\frac{1-\delta}{\delta^2}h < \epsilon$ 只要 h 足够接近 0. 同理 $|I_3| < \epsilon$. 从而 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$.

13. 由基本力学知识, 重力场中的压力差 dF 托起了单位体积内的粒子重力 dG. 从而 $dF + dG = 0 \Rightarrow Sdp + \rho gSdz = 0 \Rightarrow dp + nmgdz = 0$. 由 $p = nk_BT$ 知 $dp = k_BTdn \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_BT}dz$. 两边积分知 $\log n(z) - \log n(0) = \frac{-mgz}{k_BT} \Rightarrow n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_BT}}$.

7.3 补充 (不要求掌握!)

计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-x^2}dx$. (也写成 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx$). 这和正态分布的归一化因子有关.

证法 1: 使用二元积分. $(\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx)^2 = \int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx\int_{\mathbb{R}}e^{-y^2}dy = \int_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy =$ 二元积分换元公式, 改写成极坐标 $= \int_{\mathbb{R}^2}e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\infty re^{-r^2}dr = 2\pi \times (-\frac{1}{2}e^{-r^2})|_0^\infty = \pi$. 从而 $\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$. 我们回顾标准正态分布 $\mathcal{N}(0,1)$ 的密度函数是 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 这意味着 $\int_{\mathbb{R}}p(x)dx = 1$(概率的归一化!).

证法 2: 使用极限逼近. 我们来证明: $\forall x \in [-A, A], (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \rightrightarrows e^{-x^2}$. 其中, $\rightrightarrows$ 表示极限的一致性 (一致收敛). 我们都知道 $(1+\frac{x^2}{n})^{-n} \to e^{-x^2}$, 但是不同的 x 可能会有不同的收敛速度. 对于某个 x_1, 可能从第 N_1 项开始有 $|f_n(x_1)-f(x_1)| < \epsilon$, 而对于某个 x_2, 可能从第 N_2 项开始有 $|f_n(x_2) - f(x_2)| < \epsilon, \cdots$. 在给出一致收敛的正式定义前, 我们先看几个例子.

例 1: $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}, f(x) \equiv 0$. 容易看出来 $f_n \to f$, 且对于不同的 x, 他们的收敛步调一致: 因为只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$, 不管 x 的值都有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

例 2: $f_n(x) = x^n, x \in [0,1], f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$. 容易看出来 $f_n \to f$, 但对于不同的 x, 他们的收敛步调并不一致: 距离 1 更近的 x 收敛速度更慢! 当 $x < \frac{1}{2}$ 时, 只要 $n > \log_2(\frac{1}{\epsilon})$ 就有 $x^n < \epsilon$; 但是当 $x = 1 - \frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})}$ 时, $x^n \approx (1 - \frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})})^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \approx \frac{1}{e}$ 距离 ϵ 还远着呢, 更有 $\lim\limits_{x\to1-0}x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \to 1 \Rightarrow \exists\delta, \forall x \in (1-\delta, 1), x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} > 1 - \epsilon$. 前面的 $f_n(x)$ 已经很小于 ϵ 了, 而后面的一些 $f_n(x)$ 甚至还在原地打转 $(> 1 - \epsilon)$! 下面我们给出定义.

一致收敛: 我们说在区间 $[a,b]$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$(记作 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$), 意味着 $\forall\epsilon > 0, \exists N$, 使得 $\forall n > N, \forall x \in [a,b], |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

如果在有限区间上收敛具有一致性, 那么积分和极限顺序可交换. 因为 $|\int_a^b f_n(x) - f(x)dx| \le \int_a^b|f_n(x) - f(x)|dx < \epsilon(b-a) \to 0 \Rightarrow \int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$, 即是 $\lim\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim f_n(x)dx$.

回到原题, 往证 $\forall x \in [-A, A], (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \rightrightarrows e^{-x^2}$. 注意到 $(1 + \frac{x^2}{n})^n \ge 1 + C_n^1\frac{x^2}{n} + \cdots + C_n^k(\frac{x^2}{n})^k$. 由带 Lagrange 余项的泰勒展开知 $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!}t^{k+1} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!}t^{k+1}$, 其中 $f(t) = e^t, \xi \in (0,t)$. 令 $t = x^2$ 知 $e^{x^2} = 1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!}x^{2k+2}$. 从而对于 $\forall x \in [-A, A]$, 成立估计 $e^{x^2} - 1 - x^2 - \cdots - \frac{x^{2k}}{k!} = \frac{e^\xi}{(k+1)!}x^{2k+2} \le \frac{e^{A^2}A^{2k+2}}{(k+1)!} \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时 (利用 $n! > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$). 这里的估计有一致性! 从而存在 $K, \forall k > K, x \in [-A, A]$, 成立 $|e^{x^2} - 1 - x^2 - \cdots - \frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$. 再回头来看 $1 + C_n^1\frac{x^2}{n} + \cdots + C_n^k(\frac{x^2}{n})^k$ 和 $1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}$. 他们之间的差是一个 $2k$ 阶关于 x 的多项式, 且 $< \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{n}x^{2i} < \frac{1}{n}(A^2 + A^4 + \cdots + A^{2k})$. 这里的估计又有一致性! 所以说, 当 n 足够大时, $\forall x \in [-A, A]$, 成立 $|[1 + C_n^1\frac{x^2}{n} + \cdots + C_n^k(\frac{x^2}{n})^k] - [1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$. 整理一下思路, $\forall\epsilon > 0, \exists K$, 使得 $\forall k > K, \forall x \in [-A, A]$, 成立 $|e^{x^2} - 1 - x^2 - \cdots - \frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$. $\exists N$, 使得 $\forall n > N, \forall x \in [-A, A]$, 成立 $|[1 + C_n^1\frac{x^2}{n} + \cdots + C_n^k(\frac{x^2}{n})^k] - [1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$. 这样的话就有 $e^{x^2} - (1 + \frac{x^2}{n})^n < e^{x^2} - [1 + C_n^1\frac{x^2}{n} + \cdots + C_n^k(\frac{x^2}{n})^k] < \{e^{x^2} - [1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}]\} + \{[1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}] - [1 + C_n^1\frac{x^2}{n} + \cdots + C_n^k(\frac{x^2}{n})^k]\} < 2\epsilon$. 这样 $(1 + \frac{x^2}{n}) \rightrightarrows e^{x^2}$. 取倒数后当然也成立, 这和极限的除法是一个道理, 留作练习. 又注意到当 $A \to \infty$ 时, $\int_A^\infty(1 + \frac{x^2}{n})^{-n}dx \le \int_A^\infty(1 + x^2)^{-1}dx = \arctan x|_A^{+\infty} \to 0$ 对 n 有一致性. 这说明我们可以取足够大的 A 使得 $\int_A^\infty e^{-x^2}dx < \epsilon$, 且 $\forall n, \int_A^\infty(1 + \frac{x^2}{n})^{-n}dx < \epsilon$. 这样一来 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\infty(1 + \frac{x^2}{n})^{-n}dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan^2 t)^n}d\sqrt{n}\tan t = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}\alpha d\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 最后一步使用了 Wallis 公式, 其推导就是通过分部积分计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$. 从而 $\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

8 第 8 次习题课: 微分中值定理, 洛必达法则

8.1 问题

1. $f(x)\in D[a,b], f(a)=f(b)=0$, 证明 $\forall\lambda\in\mathbb{R},\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\lambda f(\xi)$.
2. $f(x)\in D[0,1], f(1)=0$, 证明 $\forall k>0,\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $kf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微, $f(a)=f(b)=0$, 证明 $\forall x\in(a,b),\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$.
4. 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上二阶可导, $f(0)=0$, 证明 $\forall x>0,\exists\xi\in(0,x)$ 使得 $f'(x)-\frac{f(x)}{x}=\xi f''(\xi)$.
5. 设 $P_n(x)$ 为 n 次多项式, 证明 $e^x=P_n(x)$ 至多有 $n+1$ 个解.
6. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导, 且 $f(a)=f'(a)=f(b)=f'(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'''(\xi)=0$.
7. $f(x)>0, x\in[a,b], f''(x)\exists$, 且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)f''(\xi)-2[f'(\xi)]^2=0$.
8. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的二阶可导函数, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在有限, 且 $f''(x)$ 有界. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.
9. 非常值函数 $f(x)\in C[-1,1]$, 在 $(-1,1)$ 上二阶可导, $f'(0)=0$. 证明存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得 $|f''(\xi)|>|f(1)-f(-1)|$.
10. 证明等式 $\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x\in\mathbb{R}$.
11. 设 $0<b<a$, 证明 $\frac{a-b}{a}<\log\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.
12. 设 $0<a<b$, 证明 $(1+a)\log(1+a)+(1+b)\log(1+b)<(1+a+b)\log(1+a+b)$.
13. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=1, f(1)=0, f(2)=3$, 证明存在 $c\in(0,2)$ 使得 $f''(c)=4$.
14. 证明: 当 $x\ge0$ 时, 等式 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$ 中的 $\theta(x)$ 满足 $\frac14\le\theta(x)\le\frac12$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\frac14$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac12$.
15. $f(x)\in D(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\exists$, 证明存在 c 使得 $f'(c)=0$.
16. 计算极限 $\lim\limits_{x\to0+0}x^{x^x-1}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x-\sin^2x}{x^4}$, $\lim\limits_{x\to0}(\frac1x-\frac{1}{\tan x})$, $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin x^3})$.
17. $m,n,k\in\mathbb{N}_+$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left((1+\frac{m}{n})^k-(1+\frac{k}{n})^m\right)$.
18. 设 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上二阶可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+2f'(x)+f''(x)]=l$, 则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.
19. 设 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上 n 阶可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=B$, 证明 $B=0$.
20. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=1$.
21. $x_0\in(0,1), x_n=\sin(x_{n-1})$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}x_n=\sqrt3$.

8.2 解答

1. 令 $g(x)=f(x)e^{-\lambda x}$. 则 $g(a)=g(b)=0$, 由 Rolle 微分中值定理, $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0=e^{-\lambda\xi}(f'(\xi)-\lambda f(\xi))\Rightarrow f'(\xi)=\lambda f(\xi)$.
2. 令 $g(x)=x^kf(x)$, 则 $g(0)=g(1)=0$, 由 Rolle 微分中值定理, $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0=\xi^kf'(\xi)=k\xi^{k-1}f(\xi)\Rightarrow kf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.
3. 设 $m=\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$, 并设 $g(t)=f(t)-\frac{m}{2}(t-a)(t-b)$. 往证存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $m=f''(\xi)$. 易知 $g(a)=0, g(b)=0, g(x)=0\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $g''(\xi)=0=f''(\xi)-m\Rightarrow f''(\xi)=m$.
4. 由 Lagrange 微分中值定理, $\exists\xi\in(0,x)$ 使得 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x}=\frac{[xf'(x)-f(x)]-[0f'(0)-f(0)]}{x-0}=\xi f''(\xi)$.
5. 令 $g(x)=e^x-P_n(x)$, 则 $g(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$. 由于 $g^{(n+1)}(x)=e^x>0$, 从而 $g^{(n)}(x)$ 至多有 1 个零点 (否则由 Rolle 微分中值矛盾), $g^{(n-1)}(x)$ 至多有 2 个零点, $\cdots$, $g(x)$ 至多有 $n+1$ 个零点.
6. $f(a)=f(b)=0\Rightarrow\exists x_1\in(a,b)$ 使得 $f'(x_1)=0$. 又因为 $f'(a)=f'(b)=0$, 从而存在 $x_2\in(a,x_1), x_3\in(x_1,b)$ 使得 $f''(x_2)=f''(x_3)=0$. 从而存在 $\xi\in(x_2,x_3)\subset(a,b)$ 使得 $f'''(\xi)=0$.
7. 令 $g(x)=\frac{f'(x)}{f^2(x)}$. 则 $g(a)=0, g(b)=0$, 从而 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0=\frac{f^2(\xi)f''(\xi)-2f(\xi)f'(\xi)^2}{f^4(\xi)}\Rightarrow f(\xi)f''(\xi)-2[f'(\xi)]^2=0$.
8. 反证法. 若结论不对, 则存在 $\epsilon_0>0$ 使得 $\forall K\in(1,+\infty)$, 存在 $x>K$ 满足 $|f'(x)|>\epsilon_0$. 设 $|f''(x)|\le M$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$. 取 $\delta_0=\min\{1,\frac{\epsilon_0}{2M}\}$, 则对 $\epsilon_0\delta_0>0$, 存在 $K_0\in(0,\infty)$, 使得 $\forall x>K_0$, 有 $|f(x)-a|<\frac{\epsilon_0\delta_0}{2}$. 从而 $\forall x_1,x_2>K_0$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon_0\delta_0$. 对 K_0, 存在 $x_0>K_0$ 使得 $|f'(x_0)|>\epsilon$. 不妨设 $f'(x_0)>\epsilon$, 则对 $x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$, 由微分中值定理, 存在介于 x 和 x_0 之间的 ξ_x 使得 $|f'(x)-f'(x_0)|=|f''(\xi_x)(x-x_0)|\le M\cdot\frac{\epsilon}{2M}\le\frac{\epsilon_0}{2}$. 从而 $f'(x)>\frac{\epsilon_0}{2}$. 再由微分中值定理, 存在 $\xi_2\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 使得 $f(x_0+\delta_0)-f(x_0-\delta_0)=f'(\xi_2)\cdot2\delta_0>\frac{\epsilon_2}{2}\cdot2\delta_0=\epsilon_0\delta_0$, 矛盾.

9. 不妨设 $f(1) \geq f(-1)$. 采用反证法, 设 $k = f(1) - f(-1)$, 且 $|f''(x)| \leq k, \forall x \in (-1, 1)$. 从而根据微分中值定理, $\forall x \in (0, 1), f'(x) \leq kx$, 积分得到 $f(x) - f(0) \leq \int_0^x f'(t)dt \leq \int_0^x ktdt = \frac{kx^2}{2}$. 令 $x \to 1$, 则 $f(1) - f(0) \leq \frac{k}{2}$. 类似有 $f(0) - f(-1) \leq \frac{k}{2}$. 由于 $k = f(1) - f(-1)$, 从而 $f(1) - f(0) = f(0) - f(-1) = \frac{k}{2}$. 容易证明如果 $\exists x_0 \in [0, 1)$ 使得 $f'(x_0) < kx_0$, 那么 $f(1) - f(0) < \frac{k}{2}$, 矛盾. 从而 $f'(x) \equiv kx, \forall x \in [0, 1)$. 同理 $f'(x) \equiv -kx, \forall x \in (-1, 0]$. 从而 $f''(0) = k = -k$, 这意味着 $k = 0, f(x)$ 是常值函数, 矛盾.

10. 首先两边求导验证导数相等, 然后 $\arctan 0 = \arcsin 0$(意味着不相差常数).

11. 原命题转化证明 $\frac{1}{a} < \frac{\log a - \log b}{a - b} < \frac{1}{b}$, 令 $f(x) = \log x$, 利用 Lagrange 微分中值定理.

12. 设 $f(x) = (1 + x)\log(1 + x)$, 利用 Lagrange 微分中值定理知 $\frac{(1+a+b)\log(1+a+b)-(1+b)\log(1+b)}{(a+b)-b} = 1 + \log(1 + c)$, 其中 $c \in (b, a + b)$. 注意到 $\log(1 + c) > \log(1 + a)$ 和 $a > \log(1 + a)$, 从而 $(1 + a + b)\log(1 + a + b) - (1 + b)\log(1 + b) = a + a\log(1 + c) > \log(1 + a) + a\log(1 + a) = (1 + a)\log(1 + a)$.

13. 构造 $\phi(x) = f(x) - 2x^2 + 3x - 1$. 则 $\phi(0) = \phi(1) = \phi(2) = 0$, 由 Rolle 微分中值定理, 存在 $c \in (0, 2)$ 使得 $\phi''(c) = 0 \Rightarrow f''(c) = 4$.

14. 可以解出 $\theta(x) = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{x(x + 1)} - 2x)$. 当 $x \geq 0$ 时 $\sqrt{x(x + 1)} > x$ 从而 $\theta(x) \geq \frac{1}{4}$, 再利用均值不等式 $\sqrt{x(x + 1)} \leq \frac{x+(x+1)}{2}$ 知 $\theta(x) \leq \frac{1}{2}$. 然后对 x 求极限.

15. 不妨设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ 且 $f(x)$ 不为常数. 不妨设 $\exists x_0$ 使得 $f(x_0) > l$. 任取 $l < \eta < f(x_0)$. 由连续函数的介值性知 $\exists \xi_1 \in (-\infty, x_0), \xi_2 \in (x_0, +\infty)$ 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \eta$. 然后利用 Rolle 微分中值定理.

16. (1) $\lim\limits_{x\to0+0} x^{x^x-1} = \exp(\lim\limits_{x\to0+0}(x^x - 1)\log x) = \exp(\lim\limits_{x\to0+0}(e^{x\log x} - 1)\log x) \overset{\text{等价无穷小}:e^x-1\sim x}{=} \exp(\lim\limits_{x\to0+0} x\log^2 x) \overset{\text{倒数换元}}{=} \exp(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{x}) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \exp(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\log x}{x}}{1}) = \exp(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\log x}{x}) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \exp(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1}) = \exp(0) = 1$.

(2) $\overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - 2\sin x\cos x}{4x^3} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x\cos x + x - 2\sin x\cos^3 x}{4x^3} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + 1 - 2\cos^4 x + 6\sin^2 x\cos^2 x}{12x^2} = \frac{2}{3}$.

(3) $= \lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x - x}{x\tan x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x - x}{x^2} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin^2 x}{2x} = 0$.

(4) $= \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x^3 - x^3}{x^3\sin x^3} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x^3 - x^3}{x^6} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \frac{3x^2\cos x^3 - 3x^2}{6x^5} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x^3 - 1}{2x^3} \overset{\text{等价无穷小}: \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{-x^6}{4x^3} = 0$.

17. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left((1 + \frac{m}{n})^k - (1 + \frac{k}{n})^m\right) = \lim\limits_{x\to0+0} \frac{(1+mx)^k - (1+kx)^m}{x^2} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to0+0} \frac{km(1+mx)^{k-1} - km(1+kx)^{m-1}}{2x} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \frac{km}{2} \lim\limits_{x\to0+0} \frac{m(k-1)(1+mx)^{k-2} - k(m-1)(1+kx)^{m-2}}{1} = \frac{km(k-m)}{2}$.

18. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x[f(x) + f'(x)]}{e^x} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x[f(x) + 2f'(x) + f''(x)]}{e^x} = l$.

19. $0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} \overset{n\text{次 L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{B}{n!}$. 由极限的唯一性.

20. 这几个极限都是显然的, 只是用来告诉大家有时候会洛不出来或者洛错. 应用洛必达法则时必须验证条件, 比如说分子分母是否满足 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{*}{\infty}$, 求导后极限是否存在等等.

21. 我们来证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n^2 = 3$. 显然数列有下界 0, 且 $x_n = \sin x_{n-1} < x_{n-1}$ 意味着单调递减, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \exists$, 两边求极限知 $x_n \to 0$. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} \overset{\text{Stolz}}{=} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{x\to0+0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}}$. 因此我们来计算 $\lim\limits_{x\to0+0}(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{x\to0+0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to0+0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to0+0} \frac{2x - 2\sin x\cos x}{4x^3} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to0+0} \frac{2 - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x}{12x^2} = \frac{1}{3}$. 综上所述 $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n^2 = 3$.

8.3 补充 (不要求掌握!)

参考 https://wqgcx.github.io/courses/analysis1.pdf.

9 第 9 次习题课: 泰勒公式, 函数的凹凸性

9.1 问题

1. 在 $x = 0$ 处做 n 阶带 Peano 余项的泰勒展开. $\frac{1}{1+x}, \log(1+x), (1+x)^\alpha(\alpha \neq -1), \arctan x, \arcsin x, \sin^2(1+x^2), \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$. 我们有了这些函数在 0 点处的泰勒展开式后, 便可以计算该点的 n 阶导数值 (只能计算该点, 不能得到通式!).

2. 计算极限. $\lim\limits_{x\to0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt{x^2 - 2x})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(1 - n\sin\frac{1}{n})$, $\lim\limits_{x\to0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}$, $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x})\frac{1}{x}$.

3. 确定下列无穷小量是 x 的几阶无穷小量. $e^x-1-x-\frac{1}{2}x\sin x, \cos x-e^{-x^2/2}, \cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$.
4. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有二阶导数, 且有 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}]=0$, 求 $f(0),f'(0),f''(0)$.
5. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有三阶导数, 并且存在常数 $M_0,M_3>0$, 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立 $|f(x)|\le M_0,|f'''(x)|\le M_3$. 证明对任意 $x\in\mathbb{R}$ 成立 $|f'(x)|\le 4M_0^{\frac{2}{3}}M_3^{\frac{1}{3}}, |f''(x)|\le 4M_0^{\frac{1}{3}}M_3^{\frac{2}{3}}$.
6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导, $f(0)=f(1)=0, \max\limits_{0\le x\le 1}f(x)=2$, 证明 $\min\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\le -16$.
7. $P_n(x)$ 是一个 n 次多项式, $P_n(a)>0, P_n^{(k)}(a)\ge 0, k=1,2,\cdots,n$. 证明 $P_n(x)$ 的所有实根都不超过 a.
8. 设 $y=\log\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$. 试求出该函数的定义域、极值点、单调区间、凹凸区间、拐点以及渐近线.
9. 设 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$. 证明: 对于 $\forall t_1,\cdots,t_n>0$ 只要满足 $t_1+\cdots+t_n=1$, 就有 $f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)\le t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n)$.
10. 设 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \forall 0<\lambda<1$. 证明 $f(x)$ 在每个点处左右导数均存在 (但不一定相等), 从而连续.
11. 证明积分版本的 Jensen 不等式, 即: $f(x),g(x),p(x)$ 是连续函数, $f(x)$ 凸, $\int_a^b p(x)dx=1$, 则 $\int_a^b p(x)f(g(x))dx\ge f(\int_a^b p(x)g(x)dx)$.
12. 证明 KL 散度非负, 即 $\int p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}dx\ge 0$, 其中 $p(x),q(x)$ 连续且 $\int p(x)dx=\int q(x)dx=1$.
13. 设 $f(x)\in D[0,1]$, 且 $f(1)=5\int_0^{\frac{1}{5}}e^{x-1}f(x)dx$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.
14. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导, 且 $f(0)=f'(0)=0, |f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|, x\in(-1,1)$. 证明: $\exists\delta>0$ 使得 $f(x)\equiv 0, \forall x\in(-\delta,\delta)$.
15. 设非线性函数 $f(x)\in C[a,b], D(a,b)$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
16. 设 $f(x)\in D(a,b)$, 且 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=+\infty$, 证明 $\forall M>0, \forall\delta>0, \exists\xi\in(b-\delta,b)$ 使得 $f'(\xi)>M$.
17. 设 $P(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的多项式, 证明: (1) 若 $P(x)+P'(x)\ge 0$ 恒成立, 则 $P(x)\ge 0$; (2) 若 $P(x)-P'(x)\ge 0$ 恒成立, 则 $P(x)\ge 0$; (3) 若 $P'''(x)-P''(x)-P'(x)+P(x)\ge 0$ 恒成立, 则 $P(x)\ge 0$.

9.2 解答

1. (1) $\frac{1}{x+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o(x^n)$. (2) $\log(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n)$. (3) $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{n}C_\alpha^kx^k+o(x^n)$.
(4) $\arctan x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$. (5) $\arcsin x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}C_{-\frac{1}{2}}^kx^{2k+1}+o(x^{2n+1})=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$.
(6) $\sin^2(1+x^2)=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2}{2}\cos(2x^2)+\frac{\sin 2}{2}\sin(2x^2)$. $\sin x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+1}), \cos x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n})\Rightarrow$ $\sin 2x^2=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{4k+2}+o(x^{4n+2}), \cos 2x^2=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k4^k}{(2k)!}x^{4k}+o(x^{4n})\Rightarrow\sin^2(1+x^2)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}4^k\cos 2}{2(2k)!}x^{4k}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k4^k\sin 2}{(2k+1)!}x^{4k+2}+o(x^{4n})$.
(7) $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}=1-\frac{2x}{1+x+x^2}=1-\frac{2x(1-x)}{1-x^3}=1-(2x-2x^2)[\sum\limits_{k=0}^{n}x^{3k}+o(x^{3n})]=1-2\sum\limits_{k=0}^{n}x^{3k+1}+2\sum\limits_{k=0}^{n}x^{3k+2}+o(x^{3n+1})$.
2. (1) $\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin x+2x}{4x^3}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{12x^2}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{24x}=\frac{1}{12}$.
(2) $\overset{\text{倒数换元}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x^2)^{\frac{1}{3}}-(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{x}\overset{\text{泰勒展开}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{[1+\frac{1}{3}\cdot 3x^2+o(x^2)]-[1-\frac{1}{2}\cdot 2x+o(x)]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x}=1$.
(3) $\overset{\text{泰勒展开}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\{1-n[\frac{1}{n}+\frac{1}{6}(\frac{1}{n})^3+o(\frac{1}{n^3})]\}=\lim\limits_{n\to+\infty}n^3\{\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\}=\frac{1}{6}$.
(4) $\overset{\text{等价无穷小}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{8x^4}\overset{\text{泰勒展开}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2-[1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)]}{8x^4}=-\frac{1}{16}$.
(5) $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\overset{\text{等价无穷小}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\overset{\text{泰勒展开}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]-x[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]}{x^3}=\frac{1}{3}$.
3. (1) $e^x-1-x-\frac{1}{2}x\sin x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-1-x-\frac{1}{2}x(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$, 因此是 3 阶无穷小.
(2) $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4+o(x^4), e^{-x^2/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\Rightarrow\cos x-e^{-x^2/2}=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$, 因此是 4 阶无穷小.
(3) $=\cos x-1-\frac{(a-b)x^2}{1+bx^2}=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)+(b-a)x^2(1-bx^2+b^2x^4+o(x^4))$. 从而当 $b-a=\frac{1}{2}$ 且 $(b-a)b=\frac{1}{24}$(即 $a=-\frac{5}{12},b=\frac{1}{12}$) 时, 是 6 阶无穷小; 当 $b-a=\frac{1}{2}$ 且 $(b-a)b\ne\frac{1}{24}$ 时, 是 4 阶无穷小; 当 $b-a\ne\frac{1}{2}$ 时, 是 2 阶无穷小.
4. $=\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}\overset{\text{泰勒展开}}{=}\frac{1}{x^3}\{3x-\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^3)+x[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)]\}=\frac{1}{x^3}\{[3+f(0)]x+f'(0)x^2+[\frac{f''(0)}{2}-\frac{9}{2}]x^3+o(x^3)\}=0$ 当 $x\to 0$ 时. 从而 $f(0)=-3, f'(0)=0, f''(0)=9$.

5. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开. $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3, f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2-\frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$. 从而 $f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{12}h^2 \Rightarrow |f'(x)|\le \frac{2M_0}{2h}+\frac{2M_3}{12}h^2=\frac{M_0}{h}+\frac{M_3h^2}{6}$. 注意到这对于任意的 $h>0$ 都成立, 从而考虑不等式右边取最小值的时候, 此时 $h=\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}$, 从而 $|f'(x)|\le \frac{\sqrt[3]{9}}{2}M_0^{\frac{2}{3}}M_3^{\frac{1}{3}}\le 4M_0^{\frac{2}{3}}M_3^{\frac{1}{3}}$. 同理 $f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}+\frac{-f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}h \Rightarrow |f''(x)|\le \frac{4M_0}{h^2}+\frac{2M_3}{6}h=\frac{4M_0}{h^2}+\frac{M_3}{3}h$. 类似地取 $h=\sqrt[3]{\frac{24M_0}{M_3}}$, 从而 $|f''(x)|\le \sqrt[3]{3}M_0^{\frac{1}{3}}M_3^{\frac{2}{3}}\le 4M_0^{\frac{1}{3}}M_3^{\frac{1}{3}}$.

6. 设 $x_0=\underset{0\le x\le 1}{\arg\max} f(x)$ (若有多个则随便取一个). 在 $x=x_0$ 处做带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 估计 $x=0$ 和 $x=1$ 处, 知 $f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2, f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 \Rightarrow 0=2+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2, 0=2+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 \Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{-4}{x_0^2}, f''(\xi_2)=\frac{-4}{(1-x_0)^2}$. 由于 $\max\{\frac{1}{x_0^2},\frac{1}{(1-x_0)^2}\}\ge 4$, 从而 $\min\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}\le -16$.

7. 注意到 n 次多项式的 $n+1$ 阶导数恒为 0. 从而在 $x=a$ 处做带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 得到 $P_n(x)=P_n(a)+P_n'(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)(x-a)^n$. 从而对于任意 $x>a$, 成立 $P_n(x)\ge P_n(a)>0$, 从而 x 不可能是 $P_n(x)=0$ 的根.

8. (1) 定义域. 应成立 $1+x\ge 0, 1-x\ge 0, \sqrt{1+x}>\sqrt{1-x}\Rightarrow 0<x\le 1$.

(2) 极值点. $f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. 由于对于 $x\in(0,1)$ 总有 $f'(x)>0$, 这意味着 $f(x)$ 没有极值点.

(3) 单调区间. 由于 $f'(x)>0$, 这意味着 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.

(4) 凹凸区间与拐点. $f''(x)=\frac{2x^2-1}{x^2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. 从而当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $f''(x)<0\Rightarrow f''(x)$ 凹; 当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$ 时 $f''(x)>0\Rightarrow f''(x)$ 凸. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是拐点.

(5) 渐近线. $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=-\infty$, 从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的垂直渐近线.

9. 首先利用向前-向后数学归纳法来证明 $f(\frac{x_1+\cdots+x_m}{m})\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_m)}{m}$. 向前: 利用数学归纳法证明 $f(\frac{x_1}{2^k}+\cdots+\frac{x_{2^k}}{2^k})\le \frac{1}{2^k}f(x_1)+\cdots+\frac{1}{2^k}f(x_{2^k})$ 对于 $k=1,2,\cdots$ 成立. 假设对于 $k=1,2,\cdots,n-1$ 成立. 则 $f(\frac{x_1}{2^n}+\cdots+\frac{x_{2^n}}{2^n})=f(\frac{1}{2^{n-1}}\frac{x_1+x_2}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\frac{x_{2^n-1}+x_{2^n}}{2})\le\frac{1}{2^{n-1}}f(\frac{x_1+x_2}{2})+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}f(\frac{x_{2^n-1}+x_{2^n}}{2})\le\frac{1}{2^n}f(x_1)+\frac{1}{2^n}f(x_2)+\cdots+\frac{1}{2^n}f(x_{2^n-1})+\frac{1}{2^n}f(x_{2^n})$, 这说明对于 $k=n$ 也成立, 由数学归纳法知原命题对于 $m=2,4,8,16,\cdots$ 都成立. 向后: 如果 $f(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n})\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$, 则 $f(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1})=f(\frac{x_1}{n}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{n}+\frac{1}{n}\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1})\le\frac{1}{n}f(x_1)+\cdots+\frac{1}{n}f(x_{n-1})+\frac{1}{n}f(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1})\Rightarrow f(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1})\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})}{n-1}$. 从而原命题成立. 那么对于 $t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{Q}$ 的情况也成立, 因为这些有理数总可以通分写成一个个同分母的分数求和. 最后再由连续性知对于无理数也成立.

10. 只需注意到对于 $x<y<z$, 成立 $\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\ge\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Leftrightarrow\frac{z-y}{z-x}f(x)+\frac{y-x}{z-x}f(z)\ge f(y)=f(\frac{z-y}{z-x}x+\frac{y-x}{z-x}z)$(这是已知条件). 同理 $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\ge\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. 从而固定 y, 关于 z 的函数 $g(z)=\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ 随着 $z\to y+0$ 单调递减有下界 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Rightarrow$ 极限 (右导数) 存在. 同理左导数存在. 左右导数可能不相等的例子: $f(x)=|x|$.

11. 写成 Riemann 和, 然后利用离散版本的 Jensen 不等式.

12. $\int p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}dx=-\int p(x)\log\frac{q(x)}{p(x)}dx\overset{\text{Jensen 不等式}}{\ge}-\log\int p(x)\cdot\frac{q(x)}{p(x)}dx=0$.

13. 由积分中值定理知存在 $t\in(0,\frac{1}{5})$ 使得 $f(1)=5\times\frac{1}{5}e^{t-1}f(t)\Rightarrow e^1f(1)=e^tf(t)$. 从而对函数 $g(x)=e^xf(x)$ 应用 Rolle 微分中值定理即可.

14. 在闭区间 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上 $f'(x),f(x)$ 都是有界函数, 从而 $f''(x)$ 也有界, 可设 $|f''(x)|\le M$. 从而对于任意 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, 成立 $|f'(x)|=|\int_0^x f''(t)dt|\le\int_0^x|f'(t)|dt\le M|x|\le\frac{M}{2}$, 同理 $|f(x)|\le\frac{Mx^2}{2}\le\frac{M}{8}\Rightarrow|f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|\le\frac{5}{8}M$. 如此迭代下去, 反复上述过程, 可得 $|f''(x)|\le(\frac{5}{8})^nM\to 0$. 从而对于 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], f''(x)=0\Rightarrow f'(x)=C\Rightarrow f(x)=Cx+D$. 由 $f(0)=0, f'(0)=0$ 知 $C=0, D=0$, 即 $f(x)\equiv 0$.

15. 显然 $\exists x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)\ne\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a)+f(a)$, 否则 $f(x)$ 是线性函数. 若 $f(x_0)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a)+f(a)$, 则由 Lagrange 微分中值定理, $\exists\xi\in(a,x_0)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 若 $f(x_0)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a)+f(a)$, 则由 Lagrange 微分中值定理, $\exists\xi\in(x_0,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

16. 反证法, 如果存在 δ,M 使得 $\forall x\in(b-\delta,b), f'(x)<M$, 则由 Lagrange 微分中值定理, $\forall x\in(b-\delta,b), f(x)=f(b-\delta)+f'(\xi)(x-(b-\delta))\le f(b-\delta)+M\delta$, 这与 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=+\infty$ 矛盾.

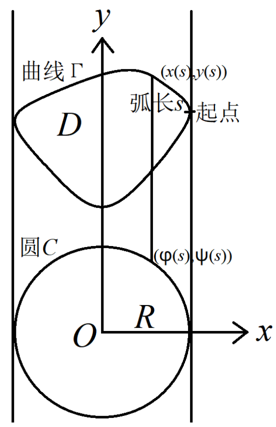
17. (1) 记 $f(x)=e^xP(x)$. 则 $f'(x)=e^x(P(x)+P'(x))\ge 0$, 且 $f(-\infty)=0\Rightarrow f(x)\ge f(-\infty)=0$ 恒成立 $\Rightarrow P(x)\ge 0$.

(2) 记 $f(x)=e^{-x}P(x)$. 则 $f'(x)=e^{-x}(P'(x)-P(x))\le 0$, 且 $f(+\infty)=0\Rightarrow f(x)\ge f(+\infty)=0$ 恒成立 $\Rightarrow P(x)\ge 0$.

(3) 记 $P_1(x)=P(x)-P''(x)$, 从而 $P_1(x)-P_1'(x)\ge 0\Rightarrow P_1(x)\ge 0$. 记 $P_2(x)=P(x)-P'(x)$, 从而 $P_2(x)+P_2'(x)=P_1(x)\ge 0\Rightarrow P_2(x)\ge 0\Rightarrow P(x)-P'(x)\ge 0\Rightarrow P(x)\ge 0$.

9.3 补充 (不要求掌握!)

等周问题: 长为 L 的曲线何时围成区域面积最大? 答案: 圆 (一年级小学生皆可猜出).



证明: 不妨设 D 为凸区域 (D 内任意两点连线位于 D 内). 设 $\Gamma:\begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \end{cases} \in C^1[0,L]$, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2+y'(s)^2=1$, 且 D 的面积为 $A=\int_0^L xdy=\int_0^L x(s)y'(s)ds$. 设 $C:\begin{cases} x=\varphi(s)=x(s) \\ y=\psi(s) \end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为半径的圆, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面积为 $\pi R^2=-\int_0^L ydx=-\int_0^L \psi(s)x'(s)ds$. 从而 $A+\pi R^2=\int_0^L(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))ds \le \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))^2}ds \le \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2+y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)}ds = RL$. 因此我们成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \le A+\pi R^2 \le RL \Rightarrow A \le \frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))^2=(x'(s)^2+y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s)+\psi(s)y'(s))^2=0$. 由于 $x(s)^2+\psi(s)^2=R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s)+\psi(s)\psi'(s)=0 \Rightarrow \psi'(s)=y'(s), \psi(s)=y(s)+y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2+(y-y_0)^2=R^2$, 圆也!

泰勒公式在物理中的一些引用可参考 https://www.zhihu.com/question/302968510/answer/577451859.

10 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识. 感谢北京大学元培学院 21 级本科生徐奕辰同学和另一位不愿意透露姓名的同学, 他们提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2022 秋高等数学 A I 习题课 12 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.