数学分析 II 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 2 月 4 日

目录

1 第 1 次习题课: 定积分基本概念与可积性

1.1 问题

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x)\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.
2. $f(x)\in R[a,b],\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$. 证明 $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b],\text{s.t.}\forall x\in[\alpha,\beta],f(x)>0$.
3. $f(x)\in R[a,b]$, 问 $\lfloor f(x)\rfloor$ 是否一定 $\in R[a,b]$?
4. 讨论区间 $[a,b]$ 上 $f,|f|,f^2$ 的可积性之间的关系.
5. 设非负函数 $f(x)\in C[a,b]$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ 存在并求之.
6. $f(x)\geq 0,f''(x)\leq 0,x\in[a,b]$. 证明 $\max_{x\in[a,b]}f(x)\leq\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
7. $n\in\mathbb{N}_+,f(x)\in C[a,b],\int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x=0,k=0,1,\cdots,n$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个零点.
8. 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}=1,\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.
10. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x),g(x)\in R[a,b],p,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq\left(\int_a^b f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}}$.
11. $f(x)\in R[a,b],A=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x),B=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x),g(y)\in C[A,B]$, 证明 $G(x):=g(f(x))\in R[a,b]$.
12. 已知 $(0,1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ 存在, 问是否有 $f(x)\in R[0,1]$?

1.2 解答

1. 显然 $f(x)$ 有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次 $\forall\epsilon>0,\forall x\in[a,b],\exists\delta_x>0,\text{s.t.}\omega_{(x-\delta_x,x+\delta_x)}<\epsilon$. 由于 $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)\supset[a,b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\supset[a,b]$. 不妨设 $a\leq x_1<\cdots<x_n\leq b$. 可取分割点 $y_i\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap(x_{i+1}-\delta_{i+1},x_i+\delta_{i+1})$, 对于这个分割, $\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\epsilon(b-a)$, 因此有可积性. 由于 $|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x|\leq\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leq\sum_{i=1}^n\int_{y_{i-1}}^{y_i}|f(x)|\mathrm{d}x\leq\epsilon(b-a)$, ϵ 的任意性知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

2. 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.

3. $f(x)=-\text{Riemann}(x)\in R[0,1],\lfloor f(x)\rfloor=-\text{Dirichlet}(x)\notin R[0,1]$.

4. $f\in R[a,b]\Rightarrow|f|,f^2\in R[a,b]$, 因为 f 在 x_0 处连续 $\Rightarrow|f|,f^2$ 在 x_0 处连续.
$|f|\in R[a,b]\Rightarrow f^2\in R[a,b],\not\Rightarrow f\in R[a,b]$. $|f|$ 在 x_0 处连续 $\Rightarrow f^2$ 在 x_0 处连续, 而对于 f 有反例 $f(x)=1_{\mathbb{Q}}-1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.
$f^2\in R[a,b]\Rightarrow|f|\in R[a,b],\not\Rightarrow f\in R[a,b]$. 理由与上一个相同.

5. 设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x),f(\xi)=M$. 由连续性, $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0\text{ s.t.}\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta),f(x)>M-\epsilon$. 因此当 n 足够大时成立 $M+2\epsilon>((b-a)M^n)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}>(2\delta(M-\epsilon)^n)^{\frac{1}{n}}>M-2\epsilon\Rightarrow\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\to M$.

6. 设 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. 由题意知 $f(x)$ 是凹函数, 因此成立 $f(x)\geq\begin{cases}\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}(x-a)+f(a), & x\in[a,\xi]\\ \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}(x-\xi)+f(\xi), & x\in[\xi,b]\end{cases}\Rightarrow\text{RHS}\geq\frac{2}{b-a}\left(\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\right)\geq\frac{2}{b-a}\left((\xi-a)\frac{f(\xi)+f(a)}{2}+(b-\xi)\frac{f(b)+f(\xi)}{2}\right)\geq\frac{2}{b-a}\frac{f(\xi)}{2}(\xi-a+b-\xi)=f(\xi)=\text{LHS}$.

7. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\exists 1$ 零点, 记为 x_1. $\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\exists 2$ 零点, 记为 x_2. $\cdots\int_a^b\left[\prod_{i=1}^n(x-x_i)\right]f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\exists n+1$ 零点.

8.

$$\text{原式}=2^{\alpha-\beta}\frac{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\frac{2}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}\xrightarrow{\text{定积分定义}}2^{\alpha-\beta}\frac{\left(\int_0^2 x^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta\mathrm{d}x\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

9. $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,n^\alpha(1-\epsilon)<a_n<n^\alpha(1+\epsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\epsilon,\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\epsilon,\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]\right|\leq\frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\leq\frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha=\frac{\epsilon}{n}\sum\limits_{i=1}^n(\frac{i}{n})^\alpha\leq\epsilon\int_0^1 x^\alpha\mathrm{d}x+\epsilon=\frac{\epsilon}{\alpha+1}+\epsilon\leq 2\epsilon$. 这意味着 $\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i-\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha\right)\right|\leq 4\epsilon\Rightarrow$ 原极限 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$.

10. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = 1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha \ln a + (1-\alpha)\ln b \le \ln(\alpha a + (1-\alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \le \alpha a + (1-\alpha)b$. 令 $\alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}\mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
本题也可以将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.
11. 证法 a: $G(x)$ 的间断点集合是 $f(x)$ 间断点集合的子集, 因此其 Lebesgue 测度为 0, 从而可积.
证法 b: 由于 $g(y)$ 一致连续, 因此 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall |y_1 - y_2| < \delta, |g(y_1) - g(y_2)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 由于 $f(x) \in R[a,b]$, 因此 $\exists [a,b]$ 的分割 Δ, 使得 $\sum\limits_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\delta\epsilon}{4M}$, 其中 $M = \sup\limits_{y\in[A,B]} |g(y)|$. 若 $\omega_i(f) < \delta$, 则 $\omega_i(G) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 若 $\omega_i(f) \ge \delta$, 其区间长度 $\sum\limits_{i:\omega_i(f)\ge\delta} \Delta x_i$ 不会超过 $\frac{\epsilon}{4M}$. 因此 $\sum\limits_{i=1}^n \omega_i(G)\Delta x_i = \sum\limits_{i:\omega_i(f)<\delta} \omega_i(G)\Delta x_i + \sum\limits_{i:\omega_i(f)\ge\delta} \omega_i(G)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{2} + 2M\frac{\epsilon}{4M} = \epsilon$. 这样对于任意 $\epsilon > 0$ 我们都找到了一个分割 Δ 使得 $\sum\limits_{i=1}^n \omega_i(G)\Delta x_i < \epsilon$.
12. 考虑 $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) = 0$, 但是 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

2 第 2 次习题课: 定积分的性质与计算

2.1 问题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 证明 $\forall a, b \in \mathbb{R}, \lim\limits_{h\to 0} \int_a^b [f(x+h) - f(x)]\mathrm{d}x = 0$.
2. (Riemann-Lebesgue 引理). $f \in R[a,b], g \in R[0,T], g(x+T) = g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x \to \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$.
3. 计算积分 $I = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}, \alpha \in (0, \pi)$.
4. 计算积分 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.
5. 计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x \mathrm{d}x$.
6. 计算积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\mathrm{d}x$, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.
7. $f(x) \in C[a,b]$, 且对于任意的 $[\alpha, \beta] \subset [a,b], \exists \delta > 0, M > 0, \text{s.t.} \left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right| \le M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x) \equiv 0$.
8. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x) = f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) \equiv 0$.
9. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明 $f(x) = xf(1)$.
10. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x) \in R[0,x], \forall x \in (0,+\infty)$, 且 $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.
11. $f(x) \in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x} = f(0)$.
12. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续, 且 $f^2(t) \le 1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$. 证明 $f(t) \le 1 + t$.

2.2 解答

1. WLOG $h < 1$. 由可积函数性质, 存在 $[a, b+1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $\int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \epsilon$, 且 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in [a, b+1], |x - y| < \delta$, 成立$|g(x) - g(y)| \le \frac{\epsilon}{b-a}$. 从而 $\left|\int_a^b [f(x+h) - f(x)]\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x+h) - g(x+h)|\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x+h) - g(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x) - f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\mathrm{d}x + \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x \le 3\epsilon$.
2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$.

由 Riemann 积分定义, $\forall \epsilon > 0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \le x < x_1 \\ C_2 & x_1 \le x < x_2 \\ \cdots & \\ C_m & x_{m-1} \le x \le x_m = b \end{cases}$ 使得 $\int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|\mathrm{d}x < \epsilon$. 设 $M = \sup_{x\in[0,T]} |g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x| = |\int_a^b (f(x) - s_\epsilon(x))g(nx)\mathrm{d}x + \int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)\mathrm{d}x| \le \int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)||g(nx)|\mathrm{d}x + |\sum\limits_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)\mathrm{d}x < M\epsilon + \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)\mathrm{d}x \le M\epsilon + \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^m C_i MT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)\mathrm{d}x = \int_c^{c+T} g(x)\mathrm{d}x + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{c+kT}^d g(x)\mathrm{d}x$ (设 $c + kT \le d < c + (k+1)T$) $= \int_{c+kT}^d g(x)\mathrm{d}x \le MT$. 选择一个足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^m C_i MT < \epsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x| \le (M+1)\epsilon$.

3. $I=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+1}=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2\sin\alpha}$.
4. $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2(-x)}{1+e^{x}}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.
5. $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}(1-\cos x)=(1-\cos x)\ln\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\mathrm{d}(\ln\sin x)=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin x+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x=[\cos x-\ln(1+\cos x)]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2-1$.
6. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(2nx)}{2\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x]\cos 2x+\sin[(2n-2)x]\sin 2x}{2\sin x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x](1-2\sin^2 x)+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x]}{2\sin x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 x\cos[(2n-2)x]+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x\\
&=I_{n-1}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos[(2n-2)x]+\sin[(2n-2)x]\cos x\mathrm{d}x=I_{n-1}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\\
&=I_{n-1}-\frac{1}{2n-1}\cos[(2n-1)x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=I_{n-1}+\frac{1}{2n-1}
\end{aligned}$$

由于 $I_1=1$, 因此 $I_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}}{\ln n}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{\ln n}=\frac{1}{2}$.
7. 假设 $\exists f(x_0)>0$. 由连续性, $\exists\delta>0,\text{s.t.}\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta), f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$, 从而 $\forall[\alpha,\beta]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta), \left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|>\frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha)>M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$(最后一个大于号成立只需令 $\beta-\alpha<\left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.
8. 构造 $G(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2, G'(x)=g(x)$ 单调递减, $g(0)=0$, 因此 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 且 $G(0)=0, G(x)\geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x)\equiv 0\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\equiv 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$.
9. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=\frac{\alpha^2}{2}f(1)$. 由集合 $\{q\alpha:q\in\mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha)=qf(\alpha)$, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha)\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^2}{2}f(1)\Rightarrow f(\alpha)=\alpha f(1)$.
10. 凸函数开区间上连续 $\Rightarrow$ 闭区间上可积. 做变换 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(\frac{t}{x}\cdot x)\mathrm{d}\frac{t}{x}=\int_0^1 f(ux)\mathrm{d}u$, 从而 $F(\sum_{i=1}^n t_i x_i)=\int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i(ux_i)\right)\mathrm{d}u\leq\int_0^1\sum_{i=1}^n t_i f(ux_i)\mathrm{d}u=\sum_{i=1}^n t_i F(x_i)\Rightarrow F(x)$ 凸.
11. 往证 $\frac{\int_{-1}^1(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\to 0$, 用极限定义. $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}\forall x\in(-\delta,\delta),|f(x)-f(0)|<\epsilon$. 设 $\max|f(x)|=M$. 从而原式 $=\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}:=I_1+I_2+I_3$. $|I_1|\leq\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\epsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq\epsilon$. $|I_2|\leq 2M\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\epsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M\frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M(1-\delta)\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n}=2M\frac{1-\delta}{\delta}(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2})^n$. 注意到 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}<1$, 从而可以取足够大的 n 使得 $|I_2|<\epsilon$. 类似地放缩 I_3, 从而 $|I_1+I_2+I_3|<3\epsilon$.
12. 原命题条件 $\Rightarrow\frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}}\leq 1\Rightarrow\int_0^x\frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}}dt\leq\int_0^x 1\mathrm{d}t\Rightarrow\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\Big|_0^x\leq x\Rightarrow\sqrt{1+2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}\leq 1+x\Rightarrow f(x)\leq\sqrt{1+2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}\leq 1+x$.

3 第 3 次习题课: 定积分的应用与中值定理

3.1 问题

1. $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递减正函数, 证明对于 $\forall 0<\alpha<\beta\leq 1$ 都有 $\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geq\alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.
2. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$, 求 $f(x)$.
3. 已知 $A>0, AC-B^2>0$, 求椭圆 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 的面积.
4. 证明极坐标下曲线 $r=r(\theta)$ 与 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为 $V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$.
5. 求双扭线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ 绕轴 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.
6. $f(x)\in C^1[0,1], f(x)\in[0,1], f(0)=f(1)=0, f'(x)$ 单调递减. 证明曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的弧长不大于 3.
7. 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?

8. 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r = e^\theta$ 在 $(r,\theta) = (1,0)$ 和 $(r,\theta) = (e^\phi,\phi)$ 之间一段的重心坐标.

9. 求圆的渐伸线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $,t \in [0,2\pi]$ 上 $A(a,0), B(a,-2\pi a)$ 之间部分与直线 $\overline{AB}$ 围成图形的面积.

10. 试求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

11. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 用定积分第二中值定理证明 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

12. (Dirichlet 判别法). 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\forall A \geq a, g(x) \in R[a,A]$ 且 $|\int_a^A g(x)\mathrm{d}x| \leq M$ 恒成立. 证明极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 存在.

3.2 解答

1. $\mathrm{LHS} = \beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geq \beta\alpha f(\alpha) \geq \alpha(\beta-\alpha)f(\alpha) \geq \alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{RHS}$.

2. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(y) + \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^y f(t)\mathrm{d}t + yf(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 两式相减得 $xf(y) + \frac{x^3y}{3} = yf(x) + \frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^3}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$. 经验证符合题意.

3. 设矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 有相似标准型 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 λ_1, λ_2 是方程 $\lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) = 0$ 的两个根. 则原椭圆在新坐标系下的方程为 $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 = 1$, 面积 $S = \pi\sqrt{\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}} = \pi\sqrt{\frac{1}{AC-B^2}}$.

4. 对应 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的扇形面积 $\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$, 其质心位于 $\frac{2}{3}r(\theta)$ 处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为 $\mathrm{d}V = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta 2\pi\frac{2}{3}r(\theta)\sin\theta = \frac{2\pi}{3}r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$. 两边积分得到结果.

5. 原命题等价于 $r^2 = 2a^2\sin 2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases} x = a\sqrt{2\sin 2\theta}\cos\theta \\ y = a\sqrt{2\sin 2\theta}\sin\theta \end{cases}$, 则面积 $S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta)\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta = 8\pi a^2$.

6. 设 $f'(M) = 0$. 则周长 $C = \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1(1+|f'(x)|)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^M f'(x)\mathrm{d}x - \int_M^1 f'(x)\mathrm{d}x = 1 + 2f(M) \leq 3$.

7. 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h) = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 + \int_0^h \pi(\sqrt{R^2-z^2})^2\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi R^3 + \pi(R^2h - \frac{1}{3}h^3)$. 对应位移 $[h,h+\mathrm{d}h]$ 所做的微功 $\mathrm{d}W = gV(h)\rho\mathrm{d}h$. 从而 $W = g\int_0^R V(h)\mathrm{d}h = g(\frac{2}{3}\pi R^4 + \frac{5}{12}\pi R^4) = \frac{13}{12}g\pi R^4$.

8. $\bar{x} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^\phi e^\theta\mathrm{d}\theta} = \frac{e^{2\phi}(\sin\phi + 2\cos\phi) - 2}{5(e^\phi - 1)}, \bar{y} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^\phi e^\theta\mathrm{d}\theta} = \frac{e^{2\phi}(2\sin\phi - \cos\phi) + 1}{5(e^\phi - 1)}$.

9. 直线 AB 的参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) = a \\ y = \psi(t) = t \end{cases}$ $,t \in [-2\pi a, 0]$. 于是 $S = -\int_0^{2\pi} y(t)\mathrm{d}x(t) - \int_{-2\pi a}^0 \psi(t)\mathrm{d}\phi(t) = -\int_0^{2\pi} a(\sin t - t\cos t)a(t\cos t)\mathrm{d}t + 0 = \frac{4}{3}\pi^3a^2 + \pi a^2$.

10. 焦点为 $(\frac{1}{2},0)$, 设过焦点的直线为 $x - \frac{1}{2} = ky$, 与抛物线交点为 y_1, y_2, 则围成的面积为 $S = \int_{y_1}^{y_2}\left(ky + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{k}{2}(y_2-y_1)(y_2+y_1) + \frac{1}{2}(y_2-y_1) - \frac{1}{6}(y_2-y_1)(y_2^2+y_1y_2+y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1+y_2 = 2k, y_1y_2 = -1$. 则 $S = \frac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k = 0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.

11. $f(x)$ 单调, $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理, $\int_a^b(x - \frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi(x - \frac{a+b}{2})\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b(x - \frac{a+b}{2})\mathrm{d}x = f(a)\int_a^b(x - \frac{a+b}{2})\mathrm{d}x + (f(b) - f(a))\int_\xi^b(x - \frac{a+b}{2})\mathrm{d}x = (f(b) - f(a))\frac{1}{2}(b-\xi)(\xi-a) \geq 0$.

12. 由极限定义, $\forall\epsilon > 0, \exists X > a, \mathrm{s.t.}\forall x \geq X, |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{4M}$. 从而 $\forall A', A'' \geq X, |\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x| = |f(A')\int_{A'}^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(A'')\int_\xi^{A''} g(x)\mathrm{d}x| \leq 2M(|f(A')| + |f(A'')|) \leq \epsilon$. 由柯西收敛定理知极限存在.

4 第 4 次习题课: 广义积分

4.1 问题

1. $f(x) > 0, x \in (1,+\infty), \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x} = -\lambda, \lambda > 1$, 试判断 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性.

2. (Euler 积分). 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x$.

3. (Dirichlet 积分). 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

4. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \cos^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 0$.

5. 计算 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.
6. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭可积, $f(+\infty)=A, f(-\infty)=B$. 证明 $\forall a\in\mathbb{R}$, 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+a)-f(x)]\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.
7. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 的收敛性.
8. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^x\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性和绝对收敛性.
9. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^p}\mathrm{d}x, p\geq 0, a\in\mathbb{R}$ 的收敛性.
10. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x, p,q,r>0$ 的收敛性.
11. $f(x)\in C^1[0,1]$ 且 $f'(x)>0$, 证明广义积分 $\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{x^p}\mathrm{d}x$ 在 $p<2$ 时收敛, 在 $p\geq 2$ 时发散.
12. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$ 收敛.

4.2 解答

1. 由极限定义, $\exists X>1, \mathrm{s.t.}\forall x>X, \frac{\ln f(x)}{\ln x}<-\frac{\lambda+1}{2}\Leftrightarrow f(x)<x^{-\frac{\lambda+1}{2}}$. 由比较判别法知无穷积分收敛.
2. 由对称性, $I=\frac{1}{2}\int_0^\pi\ln\sin x\mathrm{d}x$. 做两倍变换, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.
3. 注意到 $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^n\cos kx$, 从而 $\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. 定义 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$. 由于 $x\to 0$ 时 $f(x)=O(x)$, 因此 $f(x)\in R[0,\pi]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理 (2.1.2) 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\mathrm{d}x=0$, 即是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}$. 再利用恒等式 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 立得结论.
4. 做变换 $t=\frac{1}{x}$, 则 $\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\int_1^A\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t:=I_1+I_2$. 对于 I_1, 由定积分第二中值定理知 $\exists\xi_A\in[1,A]\ \mathrm{s.t.}I_1=\int_1^{\xi_A}\cos^n t\mathrm{d}t$. 因此对于任意固定的 A, $n\to+\infty$ 时 $I_1\to 0$. 对于 I_2, 成立 $|I_2|\leq\int_A^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{A}$. 因此 $\forall\epsilon>0$, 选择 $A=\frac{2}{\epsilon}$, 则 $|I_2|\leq\frac{\epsilon}{2}$, 并选择充分大的 n 使得 $|I_1|<\frac{\epsilon}{2}$, 此时 $|I|\leq\epsilon$, 由极限定义知结论成立.
5. 做倒数变换, 知 $I(\alpha)=\int_{+\infty}^0\frac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{(1+x^{-2})(1+x^{-\alpha})}=I(-\alpha)$. 又由于 $I(\alpha)+I(-\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, 因此 $I(\alpha)\equiv\frac{\pi}{4}$.
6. $\int_M^N[f(x+a)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_N^{N+a}f(x)\mathrm{d}x-\int_M^{M+a}f(x)\mathrm{d}x\to(A-B)a$.
7. 函数恒正, 只需讨论有界性. 令 $u_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$, 则 $u_k\leq k\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}=k\pi\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}=2k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2 x}\leq 2k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+4(k-1)^6\pi^4x^2}=\frac{k}{\pi(k-1)^3}\int_0^{(k-1)^3\pi^3}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\sim\frac{1}{2k^2}$. 由于 $\int_0^{n\pi}=\sum\limits_{k=1}^n u_k\sim\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{k^2}<+\infty$, 因此原广义积分收敛.
8. 先考虑积分收敛性. 显然当 $p\leq 0$ 时原积分发散. 当 $p>0$ 时, 由于 $|\int_a^A e^{\sin x}\sin 2x\mathrm{d}x|=2|\int_{\sin a}^{\sin A}e^{\sin x}\sin x\mathrm{d}\sin x|=2|e^{\sin A}(\sin A-1)-e^{\sin a}(\sin a-1)|<8e$, $\frac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{e^x\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 我们只需考察积分在 0 处的性质. 由于当 $x\to 0$ 时 $\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\sim\frac{2}{x^{p-1}}$, 因此 $p\geq 2$ 时原积分发散, $p<2$ 时原积分收敛. 再考虑绝对收敛性. 当 $1<p<2$ 时, $\left|\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right|\leq\frac{e}{x^p}$, 因此绝对收敛. 当 $0<p\leq 1$ 时, $\left|\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right|\geq\frac{2^p}{e}\left|\frac{\sin 2x}{(2x)^p}\right|\geq\frac{1}{e}\left|\frac{\sin^2 2x}{(2x)^p}\right|=\frac{1}{2e}\left(\frac{1-\cos 4x}{(2x)^p}\right)$, 而 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4x}{(2x)^p}\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(2x)^p}\mathrm{d}x$ 发散, 因此原积分条件收敛.
9. 当 $a\neq 0, p>0$ 时, $\frac{1}{1+x^p}$ 单调递减趋于 0, $\int_0^N\cos ax\mathrm{d}x$ 有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 当 $a\neq 0, p=0$ 时显然发散. 当 $a=0, p>1$ 时显然收敛. 当 $a=0, 0\leq p\leq 1$ 时显然发散.
10. 显然当 $q\leq p+1$ 时原积分发散. 当 $q>p+1$ 时, 一方面,

$$I=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^\pi\frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}\mathrm{d}t\leq 2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^p\pi^p\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}t}{1+(k\pi)^q|\frac{2}{\pi}t|^r}\leq C_1\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^p}{k^{\frac{q}{r}}}\int_0^{2(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}$$

另一方面,

$$I=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^\pi\frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}\mathrm{d}t\geq\sum_{k=0}^{+\infty}(k\pi)^p\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}t}{1+[(k+1)\pi]^q|t|^r}\geq C_2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^p}{(k+1)^{\frac{q}{r}}}\int_0^{\pi[(k+1)\pi]^{\frac{q}{r}}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}$$

$r>1$, $\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}$ 一致有界. $r=1$, $\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}\sim\ln A$. $r<1$, $\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}\sim A^{1-r}$. 因此原积分收敛 iff $q>(p+1)\max(r,1)$.
11. 由柯西微分中值定理, $\exists\xi\in(0,x)\ \mathrm{s.t.}\frac{f(x)-f(0)}{x^p}=\frac{f'(\xi)}{x^{p-1}}$. 由于 $f'(x)$ 连续且大于 0, 因此 $\exists 0<m<M\ \mathrm{s.t.}m<f'(x)<M$ 对 $\forall x\in[0,1]$ 均成立, 即 $\frac{m}{x^{p-1}}<\frac{f(x)-f(0)}{x^p}<\frac{M}{x^{p-1}}$. 从而 $p\geq 2$ 时发散, $p<2$ 时收敛.
12. $\int_0^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}f(t)\mathrm{d}t$. 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ 收敛, $\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}$ 单调有界, 由 Abel 判别法知 $\int_0^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$ 收敛. 另一侧同理.

5 第 5 次习题课: 积分的综合运用

5.1 问题

1.

5.2 解答

1.

6　第 6 次习题课: 正项级数

6.1　问题

6.2　解答

7　第 7 次习题课: 任意项级数, 数项级数的性质

7.1　问题

7.2　解答

8　第 8 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (1)

8.1　问题

8.2　解答

9　第 9 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (2)

9.1　问题

9.2　解答

10　第 10 次习题课: 幂级数的基本性质

10.1　问题

10.2　解答

11　第 11 次习题课: 泰勒展开与多项式逼近

11.1　问题

11.2　解答

12　第 12 次习题课: 傅里叶级数的基本性质

12.1　问题

12.2　解答

13　第 13 次习题课: 傅里叶级数的收敛性

13.1　问题

13.2　解答

14　致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2024 春数学分析 II 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.