

高等数学 A II 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2023 年 2 月 19 日

目录

1 第 1 次习题课: 二重积分	3
1.1 问题	3
1.2 解答	3
1.3 补充 (不要求掌握!)	3
2 第 2 次习题课: 三重积分	4
2.1 问题	4
2.2 解答	4
2.3 补充 (不要求掌握!)	5
3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式	5
3.1 问题	5
3.2 解答	6
3.3 补充 (不要求掌握!)	7
4 第 4 次习题课: 曲面积分	7
4.1 问题	7
4.2 解答	7
4.3 补充 (不要求掌握!)	9
5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式	9
5.1 问题	9
5.2 解答	9
5.3 补充 (不要求掌握!)	9
6 第 6 次习题课: 初等积分法, 解的存在唯一性	9
6.1 问题	9
6.2 解答	9
6.3 补充 (不要求掌握!)	9
7 第 7 次习题课: 二阶线性微分方程	9
7.1 问题	9
7.2 解答	9
7.3 补充 (不要求掌握!)	9

8 第 8 次习题课: 常数变异法	9
8.1 问题	9
8.2 解答	9
8.3 补充 (不要求掌握!)	9
9 第 9 次习题课: 数项级数	9
9.1 问题	9
9.2 解答	9
9.3 补充 (不要求掌握!)	9
10 第 10 次习题课: 数项级数, 函数项级数	9
10.1 问题	9
10.2 解答	9
10.3 补充 (不要求掌握!)	9
11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数	9
11.1 问题	9
11.2 解答	9
11.3 补充 (不要求掌握!)	9
12 第 12 次习题课: 广义积分, 含参积分	9
12.1 问题	9
12.2 解答	9
12.3 补充 (不要求掌握!)	9
13 第 13 次习题课: 含参广义积分, 傅里叶级数	9
13.1 问题	9
13.2 解答	9
13.3 补充 (不要求掌握!)	9
14 第 14 次习题课: 傅里叶级数	9
14.1 问题	9
14.2 解答	9
14.3 补充 (不要求掌握!)	9
15 综合复习	9
15.1 问题	9
15.2 解答	9
16 致谢	9

1 第 1 次习题课: 二重积分

1.1 问题

1. 累次积分变序: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx, \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy$.
2. 求 $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 与 xoy 平面所围的体积.
3. 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$.
4. 区域 D 由 $y = x^3, y = 0, x = 1$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{1-x^4} d\sigma$.
5. 区域 D 由 $y = 0, x = 1, y = x$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} d\sigma$.
6. 区域 D 由 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $y = -x^2 + 1, y = x^2 - 1$ 两线在 $|x| \leq 2$ 部分所围成, 计算积分 $I = \iint_D (x^2 + y^3) d\sigma$.
7. $0 \leq p(x) \in R[a, b], f(x), g(x)$ 于 $[a, b]$ 单调递增, 证明 $\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$.
8. 计算极限 $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$.

1.2 解答

1. 这种题最好画图. 答案是 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy, \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f(x, y) dx$.
2. 区域 $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, D_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\}$. 则体积 $V = \iint_D z d\sigma = 4 \iint_{D_0} z d\sigma = 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 4 \int_0^a \frac{2}{3} \frac{b}{a^3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \dots$ (换元法) $\dots = \frac{\pi}{2} ab$.
3. 区域 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$. 累次积分时先对 x 积分, 则原积分 $= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy = 1 - \sin 1$.
4. $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{1-x^4} dy = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} dx = -\frac{1}{6} (1-x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.
5. $I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{4x^2-y^2}} \sqrt{4x^2-y^2} dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y}{2} \sqrt{4x^2-y^2} + \frac{4x^2}{2} \arcsin \frac{y}{2x} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4x^2-y^2}} = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} \sqrt{3x^2} + 2x^2 \arcsin \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$.
6. 首先, 因为积分区域关于 $y = 0$ 对称, 所以 $\iint_D y^3 d\sigma = 0$. 记 D_1 为 D 的第一象限部分, $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}, D_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x^2 + 1\}$. 因此 $I = 4 \iint_{D_1} x^2 d\sigma = 4 \iint_{D_2} x^2 d\sigma - 4 \iint_{D_3} x^2 d\sigma = 4 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 dy - 4 \int_0^1 dx \int_0^{-x^2+1} x^2 dy = 4 \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx - 4 \int_0^1 x^2 (1-x^2) dx = 4\pi - \frac{8}{15}$.
7. 利用二重积分.

$$\begin{aligned} \text{RHS} - \text{LHS} &= \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b p(y) dy \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(y) f(y) dy \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b \int_a^b [p(x)p(y)f(x)g(x) - p(x)p(y)f(y)g(x)] d\sigma = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(x)[f(x) - f(y)] d\sigma \end{aligned}$$

同理 $\text{RHS} - \text{LHS} = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y) - f(x)] d\sigma$. 两式相加得 $2(\text{RHS} - \text{LHS}) = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)[g(x) - g(y)][f(x) - f(y)] d\sigma \geq 0$.

8. 记 $I(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$, 则 $I^2(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-a}^a e^{-y^2} dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} d\sigma$. 记区域 $D(a) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 积分 $J(a) = \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2} d\sigma$. 由简单的二维区域包含关系知 $J(a) \leq I^2(a) \leq J(\sqrt{2}a)$. 再利用二重积分极坐标换元知 $J(a) = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=a} = \pi(1 - e^{-a^2})$. 因此 $\lim_{a \rightarrow +\infty} J(a) = \pi$. 由夹逼原理知 $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = \sqrt{\pi}$.

1.3 补充 (不要求掌握!)

类似于累次极限和整体极限的关系, 累次积分和二重积分也不具有相互决定性, 即二重积分存在并不保证累次积分存在. 例如设 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 是区间 $[0, 1]$ 上的所有有理数组成的序列, 定义矩形 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 上的函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{if } x = x_k, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$. 可以证明 $f(x, y) \in R(D)$ 且 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$. 但是, 由于 $f(x_k, y) = \frac{1}{k} \text{Dirichlet}(y)$ 导致 $\int_0^1 f(x_k, y) dy \nexists$, 所以 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 不能使用累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ 计算. 但是若固定 y , $f(x, y)$ 要么是 Riemann 函数要么恒为 0, 积分值都是 0, 因此 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 可以使用累次积分 $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ 计算.

2 第2次习题课: 三重积分

2.1 问题

1. 区域 Ω 由 $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$ 围成, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} x dv$.
2. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} z dv$.
3. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv$.
4. 区域 D 由 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (y>0), (x-2a)^2 + y^2 = 4a^2 (y>0), y=x$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$.
5. 计算椭圆抛物面 $z = x^2 + 2y^2$ 及抛物柱面 $z = 2 - x^2$ 所围成立体的体积.
6. 区域 $D = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} d\sigma_{xy}$.
7. 区域 Ω 由 $z = \frac{x^2+y^2}{m}, z = \frac{x^2+y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y = \beta x (0 < m < n, 9 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$ 围成且在第一卦限的部分, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} xyz dv$.
8. 设 $h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, f(x) \in C[-h, h]$, 证明 $\iiint_{\Omega} f(\alpha x + \beta y + \gamma z) dv_{xyz} = \pi \int_{-1}^1 (1-\zeta^2) f(h\zeta) d\zeta$, 其中区域 Ω 是单位球内部.
9. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$.
10. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$.
11. 区域 $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iint_D \max\{xy, x^3\} d\sigma$.

2.2 解答

1. 记区域 $D_{xy} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 1\}$, 累次积分时依次对 z, y, x 积分, 有 $I = \iint_{D_{xy}} [\int_0^{1-x-2y} x dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) d\sigma_{xy} = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} [x(1-x)-2xy] dy = \int_0^1 [\frac{1}{2}x(1-x)^2 - \frac{1}{4}x(1-x)^2] dx = \frac{1}{48}$.
2. 记区域 $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{2}\}$, 累次积分时先对 z 积分再极坐标换元, 有 $I = \iint_{D_{xy}} [\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} z dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} [R^2 - 2(x^2+y^2)] d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2} (R^2 - 2r^2) r dr = \frac{\pi R^4}{8}$.
3. 由对称性, $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv + 2 \iiint_{\Omega} (xy + yz + zx) dv = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$. 先计算 $I_1 = \iiint_{\Omega} z^2 dv$. 记区域 $D_z = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} \leq 1\}$, 累次积分时先对 σ_{xy} 积分再对 z 积分, 有 $I_1 = \int_{-c}^c dz \iint_{D_z} z^2 d\sigma_{xy} = \int_{-c}^c z^2 \pi ab (1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{4\pi abc^3}{15}$. 因此 $I = \frac{4\pi abc}{15} (a^2 + b^2 + c^2)$.
4. 令 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 有 $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 - 2ar \cos \theta = 0 \Rightarrow r = 2a \cos \theta \\ (x-2a)^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow r = 4a \cos \theta \\ y = x \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$, 从而 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a \cos \theta}^{4a \cos \theta} r^2 dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3} a^3 \cos^3 \theta d\theta = \frac{112-70\sqrt{2}}{9} a^3$.
5. 联立方程 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$, 因此区域 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, 体积 $V = \iint_D [(2-x^2) - (x^2+2y^2)] d\sigma = 2 \iint_D (1-x^2-y^2) d\sigma$. 做极坐标换元知 $V = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) dr = \pi$.
6. 令 $\begin{cases} \xi = x+y \\ \eta = x-y \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ y = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$, 区域 $D_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\} \Rightarrow D_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$, 所以换元后 $I = \iint_{D_{\xi\eta}} \xi^2 e^{\xi\eta} |J| d\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^1 \xi^2 e^{\xi\eta} d\eta = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi (e^{\xi} - 1) d\xi = \frac{1}{4}$.
7. 令 $\begin{cases} u = \frac{z}{x^2+y^2} \\ v = xy \\ w = \frac{y}{x} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{w}} \\ y = \sqrt{vw} \\ z = uv(w + \frac{1}{w}) \end{cases}$, Jacobi 行列式 $J = |\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}| = \frac{v}{2w} (w + \frac{1}{w})$, 区域 $\Omega \rightarrow \Omega_{uvw} = \{(u, v, w) : \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, a^2 \leq v \leq b^2, \alpha \leq w \leq \beta\}$, 所以换元后 $I = \iiint_{\Omega_{uvw}} \sqrt{\frac{v}{w}} \sqrt{vw} uv (w + \frac{1}{w}) \frac{v}{2w} (w + \frac{1}{w}) du dv dw = \iiint_{\Omega_{uvw}} v^3 u (w + \frac{1}{w})^2 \frac{1}{w} du dv dw = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} u du \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} (w + \frac{2}{w} + \frac{1}{w^3}) dw = \frac{1}{32} (\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) (b^8 - a^8) [(\beta^2 - \alpha^2)(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}) + 4 \log \frac{\beta}{\alpha}]$.

$$8. \text{ 作正交变换 } \begin{cases} \xi = a_1x + b_1y + c_1z \\ \eta = a_2x + b_2y + c_2z \\ \zeta = \frac{1}{h}(\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{cases} \quad (\text{旋转}), \text{ 则 } \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} \right| = 1, \text{ 所以换元后 } \text{LHS} = \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leq 1} f(h\zeta) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$\int_{-1}^1 d\zeta \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq 1-\zeta^2} f(h\zeta) d\xi d\eta = \pi \int_{-1}^1 (1-\zeta^2) f(h\zeta) d\zeta = \text{RHS}.$$

$$9. \text{ 作球坐标变换, 区域 } \Omega: 0 \leq r \leq 2 \cos \phi, \text{ 积分 } I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^{2\cos\phi} r^2 r^2 \sin \phi dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^{2\cos\phi} r^4 dr =$$

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \frac{32}{5} \cos^5 \phi d\phi = -\frac{64}{5} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \phi d\cos \phi = -\frac{64}{5} \frac{\cos^6 \phi}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15} \pi.$$

$$10. \text{ 作广义球坐标系变换 } \begin{cases} x = ar \sin \phi \cos \theta \\ y = br \sin \phi \sin \theta \\ z = cr \cos \phi \end{cases}, \text{ Jacobi 行列式为 } J = abcr^2 \sin \phi, \text{ 所以换元后}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^1 dr r^2 abc \sin \phi (a^2 r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + c^2 r^2 \cos^2 \phi) \\ &= \frac{abc}{5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi -[(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)(1 - \cos^2 \phi) + c^2 \cos^2 \phi] d\cos \phi \\ &= \frac{abc}{5} \int_0^{2\pi} \left[\frac{4}{3} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) + \frac{2}{3} c^2 \right] d\theta = \frac{4abc\pi}{15} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$11. \text{ 引入辅助积分 } J = \iint_D \min\{xy, x^3\} d\sigma. \quad I + J = \iint_D (xy + x^3) d\sigma = \int_0^1 dy \int_{-1}^1 (xy + x^3) dx = 0, \quad I - J = \iint_D |xy - x^3| d\sigma = \iint_D |x||y - x^2| d\sigma = 2 \int_0^1 dy \int_0^1 x|y - x^2| dx \stackrel{u=x^2}{=} \int_0^1 dy \int_0^2 |y - u| du \stackrel{\text{几何意义}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 [y^2 + (1-y)^2] dy = \frac{1}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{6}.$$

2.3 补充 (不要求掌握!)

n 维空间中的球坐标系: 一个向径 r , $n-1$ 个角度 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$, 其中, 一个角度转一圈 (θ_{n-1}), $n-2$ 个角度转半圈

$$(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}). \text{ 与直角坐标系的关系为 } \begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-2} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \end{cases}, \text{ 利用归纳法可以证明 Jacobi 行列式为}$$

$$|J| = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}.$$

n 维空间中半径为 R 的球体 $\Omega: x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$ 的体积 V_n : 作球坐标变换知

$$\begin{aligned} V_n &= \int \dots \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_n = \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \int_0^\pi d\theta_{n-2} \dots \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^R r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} dr \\ &= \frac{R^n}{n} 2\pi \int_0^\pi \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^\pi \sin^2 \theta_{n-3} d\theta_{n-3} \dots \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \\ &= \frac{R^n}{n} 2\pi \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \dots \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2}\right) \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \end{aligned}$$

关于 Beta 函数, 参见后述的含参积分.

3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式

3.1 问题

1. 曲线 $\Gamma: x^2 + y^2 = x$, 计算积分 $I = \int_{\Gamma} \sqrt{1-x^2-y^2} ds$.

2. 曲线 C 是 $y=0, y=x(x \geq 0), x^2 + y^2 = a^2$ 所围成图形的边界, 计算积分 $I = \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$.

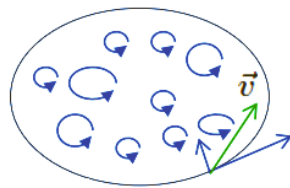
3. 曲线 $L: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = at \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, 计算积分 $I = \int_L \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}$.
4. 曲线 $C: \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 计算积分 $I = \int_C (x^2 + y^2)^n ds$.
5. 曲线 $C: x^2 + y^2 = a^2$, 计算积分 $I = \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 方向是逆时针.
6. 曲线 \widehat{AB} 为单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半部分, 计算积分 $I = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy$, 方向为从 $A(1, 0)$ 到 $B(-1, 0)$.
7. 曲线 Γ 是从 $(0, 0)$ 沿函数 $y = x^\alpha$ 到 $(1, 1)$ 的部分, 计算积分 $I = \int_\Gamma (x^2 - y^2)dx - 2xydy$.
8. 曲线 Γ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 计算积分 $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz$, 方向是从 z 轴正向看回来的逆时针方向.
9. 区域 D 是由点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 围成的三角形, 计算积分 $I = \iint_D x^2 dx dy$.
10. 曲线 $C: 741x^8 + 886e^x y^2 + \sin(x^9 \cos(y)) = 5$, 计算积分 $I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.
11. 证明或否定: 曲线积分 $I = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$ 在 \mathbb{R}^2 内积分与路径无关.
12. (格林第二公式) 设闭区域 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的, $u = u(x, y), v = v(x, y) \in C^2(D)$, 证明 $\iint_D (v\Delta u - u\Delta v) d\sigma = \oint_{\partial D} (v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}) ds$, 其中 \vec{n} 为 ∂D 的单位外法向量.
13. 求函数 $u(x, y)$ 使得 $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy$.

3.2 解答

1. 曲线参数方程 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, 则 $ds = \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} dt = \frac{1}{2} dt$, 原积分 $I = \int_\Gamma \sqrt{1-x} ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}| dt = \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 2$.
2. 记 C_1, C_2, C_3 分别为曲线 C 的下、右上、左上部分, 则原积分 $I = \int_{C_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{C_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{C_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx = (e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a + e^{\sqrt{2}x} \big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} a e^a + 2(e^a - 1)$.
3. 直接使用公式, $I = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2} dt = \int_0^{2\pi} t^2 \sqrt{2} a dt = \frac{8\sqrt{2}}{3} a \pi^3$.
4. 直接使用公式, $I = \int_0^{2\pi} a^{2n} a d\theta = 2\pi a^{2n+1}$.
5. 曲线参数方程 $x = a \cos t, y = a \sin t$, 因此 $I = \oint \frac{a^2(\cos t + \sin t)(-\sin t) - a^2(\cos t - \sin t) \cos t}{a^2} dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi$.
6. 由 $x^2 + y^2 = 1$ 知 $xdx + ydy = 0$ 得 $dy = -\frac{x}{y} dx$, 从而有 $\int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy = \int_1^{-1} -ydx + x(-\frac{x}{y} dx) = \int_{-1}^1 (\frac{x^2+y^2}{y}) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.
7. 直接计算得 $I = \int_0^1 (x^2 - x^{2\alpha}) dx - 2xx^\alpha(\alpha x^{\alpha-1}) dx = \int_0^1 (x^2 - (2\alpha+1)x^{2\alpha}) dx = -\frac{2}{3}$.
8. 球面的单位法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$, 平面的单位法向量为 $\vec{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$. 所以曲线 Γ 的单位切向量为 $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. 从而积分为 $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot \vec{\tau} ds = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) ds = \int_\Gamma 0 ds = 0$.
9. AB 的方程为 $y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, BC 的方程为 $y = y_2 + \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$, CA 的方程为 $y = y_3 + \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_3)$. 由格林公式, 知原积分 $I = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{3} x^3) d\sigma = \oint_{\partial D} \frac{1}{3} x^3 dy = \int_{AB} \frac{1}{3} x^3 dy + \int_{BC} \frac{1}{3} x^3 dy + \int_{CA} \frac{1}{3} x^3 dy = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} dx + \int_{x_3}^{x_1} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3} dx = \frac{1}{12} [(y_2-y_1)(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1) + (y_3-y_2)(x_3^2+x_2^2)(x_3+x_2) + (y_1-y_3)(x_1^2+x_3^2)(x_1+x_3)]$.
10. 容易验证圆点 O 是闭曲线 C 所围成区域的内点. 记 $C_\epsilon: x^2 + y^2 = \epsilon^2$, 取 ϵ 足够小使 C_ϵ 围成的区域完全在曲线 C 内侧. 在 C 与 C_ϵ 围成的区域 D 上使用格林公式知 $\oint_{\partial D} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x} (\frac{x}{x^2+y^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{-y}{x^2+y^2})) d\sigma = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{C_\epsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \stackrel{x=\epsilon \cos \theta, y=\epsilon \sin \theta}{=} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.
11. 上述积分为两个曲线积分之差, 即 $I = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2} = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \int_\Gamma \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$. 令 $P_i = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q_i = \frac{(x-i)dy}{(x-i)^2+y^2}, i=0, 1$, 容易验证 $\frac{\partial P_i}{\partial y} = \frac{\partial Q_i}{\partial x}$. 但由于 P_0, Q_0 包含瑕点 $(0, 0)$, P_1, Q_1 包含瑕点 $(1, 0)$, 且在包含瑕点的区域内积分值可能为 2π (第 10 题结论), 不包含瑕点的区域内积分值必为 0, 因此原积分与路径有关, 结论不对.
12. 由格林公式, $\iint_D \nabla \cdot (P, Q) d\sigma = \iint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) d\sigma = \oint_{\partial D} P dy - Q dx = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot (dy, -dx) = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot \vec{n} ds$. 因此 $\oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \oint_{\partial D} v \nabla u \cdot \vec{n} ds = \iint_D \nabla \cdot (v \nabla u) d\sigma = \iint_D (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) d\sigma$, 类似有 $\oint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) d\sigma$. 两式相减即得结果.
13. 令 $P(x, y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x, y) = \frac{e^y}{1+x^2}$, 则有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xe^y}{(x^2+1)^2}$. $\int P(x, y) dx = \frac{e^y-1}{x^2+1} + C'$, $Q(x, y)$ 删除掉含 x 的项后为 0, 因此 $u(x, y) = \frac{e^y-1}{1+x^2} + C$.

3.3 补充 (不要求掌握!)

格林公式的物理意义: 平面定常流体 (各点流速只与位置有关, 与时间无关) 于 (x, y) 点的流速为 $\vec{v}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. 对于固定的 x , $\frac{\partial P}{\partial y}$ 决定了 x 方向向 y 方向的旋转, 所以若以逆时针方向为正向, 则 x 方向向 y 方向的旋转度量为 $-\frac{\partial P}{\partial y}$. 对于固定的 y , $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 决定了 y 方向向 x 方向的旋转, 其度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x}$. 从而, (x, y) 点的流体的旋转度的度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, 命名为 (平面流场的旋度), 记为 $\text{rot } \vec{v}$.



物理现象: 边界线 ∂D 上的环流量等于区域 D 上各点旋转量的迭加.

4 第 4 次习题课: 曲面积分

4.1 问题

1. 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 被柱面 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 割下的部分的面积.
2. 求螺旋面 $\Sigma: \begin{cases} x = u \sin v \\ y = u \cos v \\ z = av \end{cases}$ 在 $0 \leq u \leq R, 0 \leq v \leq 2\pi$ 部分的面积, 其中 $a > 0$ 是常数.
3. Σ 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS$.
4. Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq H$, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$.
5. 求均匀物质曲面 $\Sigma: z = 2 - (x^2 + y^2), z \geq 0$ 的质心坐标.
6. Σ 是平面 $2x + 2y + z = 6$ 于第一卦限部分上侧, 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, 其中 $\vec{F} = (xy, -x^2, x + z)$.

4.2 解答

1. 由对称性, 所求面积 S 为 xy 平面上方曲面的面积的两倍. 割下部分 $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D, D = \{(x, y) : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$. 则面积 $S = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} d\sigma_{xy} = 2 \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} d\sigma_{xy}$. 利用极坐标变换知 $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2} \Big|_0^{\cos \theta} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2\pi - 4$.
2. $\vec{\tau}_1 = (\sin v, \cos v, 0), \vec{\tau}_2 = (u \cos v, -u \sin v, a), |\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2| = \sqrt{u^2 + a^2} \Rightarrow S = \iint_{\Sigma} |\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2| d\sigma_{uv} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^R \sqrt{u^2 + a^2} du = 2\pi [\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(u + \sqrt{u^2 + a^2})]_0^R = \pi R \sqrt{R^2 + a^2} + \pi a^2 \log(\frac{R + \sqrt{R^2 + a^2}}{a})$.
3. Σ 在 xoy 平面的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$. 又有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$, 所以 $\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $I = \iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS = \iint_D x^2 y^2 \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = R \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^R \frac{r^5}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$. 分开计算: $\int_0^R \frac{r^5}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{r^4}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{(R^2 - t)^2}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^R (R^4 t^{-\frac{1}{2}} - 2R^2 t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}) dt = \frac{1}{2} [2R^4 t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} R^2 t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}}]_0^R = \frac{8}{15} R^5$, $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{\pi}{4}$. 所以 $I = R \frac{\pi}{4} \frac{8}{15} R^5 = \frac{2}{15} \pi R^6$.
4. Σ 可以表示为 $x = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$, 其在 $yo z$ 平面的投影区域为 $D_{yz}: -R \leq y \leq R, 0 \leq z \leq H$. 又 $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}$. 再考虑对称性, $I = 2 \iint_{D_{yz}} (R^2 + z^2) \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} d\sigma_{yz} = 2R \int_{-R}^R \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \int_0^H (R^2 + z^2) dz = 2R \arcsin \frac{y}{R} \Big|_{-R}^R (R^2 z + \frac{1}{3} z^3) \Big|_0^H = 2RH\pi(R^2 + \frac{H^2}{3})$.
5. 设其质心坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 由对称性有 $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{\iint_{\Sigma} z dS}{\iint_{\Sigma} dS}$. 易知 $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$, 因此 $\iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3} \pi$, $\iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} (2 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(2 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{37}{10} \pi$. 所以 $z_0 = \frac{111}{130}$.
6. $\vec{n} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), z = 6 - 2x - 2y, D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}, dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} d\sigma_{xy} = 3d\sigma_{xy}$, 则 $I = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} [\frac{2}{3} xy - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{3} (x + z)] dS = \iint_D [\frac{2}{3} xy - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{3} (x + 6 - 2x - 2y)] \cdot 3 d\sigma_{xy} = \iint_D [2xy - 2x^2 - x - 2y + 6] d\sigma_{xy} = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} [2xy - 2x^2 - x - 2y + 6] dy = \frac{27}{4}$.

4.3 补充 (不要求掌握!)

5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式

5.1 问题

5.2 解答

5.3 补充 (不要求掌握!)

6 第 6 次习题课: 初等积分法, 解的存在唯一性

6.1 问题

6.2 解答

6.3 补充 (不要求掌握!)

7 第 7 次习题课: 二阶线性微分方程

7.1 问题

7.2 解答

7.3 补充 (不要求掌握!)

8 第 8 次习题课: 常数变异法

8.1 问题

8.2 解答

8.3 补充 (不要求掌握!)

9 第 9 次习题课: 数项级数

9.1 问题

9.2 解答

9.3 补充 (不要求掌握!)

10 第 10 次习题课: 数项级数, 函数项级数

10.1 问题

10.2 解答

10.3 补充 (不要求掌握!)

11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数

11.1 问题

11.2 解答

11.3 补充 (不要求掌握!)