

# 高等数学 A I 习题课讲义

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2023 年 10 月 18 日

## 目录

<b>1 第 1 次习题课: 函数, 序列极限</b>	<b>3</b>
1.1 问题	3
1.2 解答	3
1.3 补充 (不要求掌握!)	4
<b>2 第 2 次习题课: 序列极限, 函数极限</b>	<b>4</b>
2.1 问题	4
2.2 解答	4
2.3 补充 (不要求掌握!)	5
<b>3 第 3 次习题课: 闭区间上的连续函数</b>	<b>5</b>
3.1 问题	5
3.2 解答	6
3.3 补充 (不要求掌握!)	7
<b>4 第 4 次习题课: 导数, 高阶导数</b>	<b>7</b>
4.1 问题	7
4.2 解答	7
4.3 补充 (不要求掌握!)	8
<b>5 第 5 次习题课: 隐函数求导, 微分, 不定积分</b>	<b>8</b>
5.1 问题	8
5.2 解答	9
5.3 补充 (不要求掌握!)	10
<b>6 第 6 次习题课: 不定积分, 变上限积分, 定积分</b>	<b>11</b>
6.1 问题	11
6.2 解答	11
6.3 补充 (不要求掌握!)	12
<b>7 第 7 次习题课: 定积分及其应用</b>	<b>13</b>
7.1 问题	13
7.2 解答	14
7.3 补充 (不要求掌握!)	14

<b>8 第 8 次习题课: 微分中值定理, 洛必达法则</b>	<b>15</b>
8.1 问题	15
8.2 解答	16
8.3 补充 (不要求掌握!)	17
<b>9 第 9 次习题课: 泰勒公式, 函数的凹凸性</b>	<b>17</b>
9.1 问题	17
9.2 解答	18
9.3 补充 (不要求掌握!)	19
<b>10 第 10 次习题课: 向量代数</b>	<b>20</b>
10.1 问题	20
10.2 解答	20
10.3 补充 (不要求掌握!)	22
<b>11 第 11 次习题课: 空间解析几何</b>	<b>22</b>
11.1 问题	22
11.2 解答	23
11.3 补充 (不要求掌握!)	25
<b>12 第 12 次习题课: 多元函数的极限与连续性</b>	<b>25</b>
12.1 问题	25
12.2 解答	26
12.3 补充 (不要求掌握!)	27
<b>13 第 13 次习题课: 偏导数, 全微分, 梯度</b>	<b>27</b>
13.1 问题	27
13.2 解答	28
13.3 补充 (不要求掌握!)	29
<b>14 第 14 次习题课: 多元函数的泰勒公式、极值问题和隐函数存在定理</b>	<b>29</b>
14.1 问题	29
14.2 解答	30
14.3 补充 (不要求掌握!)	31
<b>15 综合复习</b>	<b>32</b>
15.1 问题	32
15.2 解答	32
<b>16 致谢</b>	<b>34</b>

# 1 第 1 次习题课: 函数, 序列极限

## 1.1 问题

- 有理数的有理数次方一定是有理数吗? 无理数的无理数次方一定是无理数吗?
- $f(x) = |x \sin^3 x| e^{\cos x}$ . 判断函数  $f(x)$  的有界性、单调性和奇偶性.
- 证明  $f(x) = x - [x]$  是有界周期函数.
- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \cos x + \sin x & x > 0 \end{cases}$ . 计算  $f(-x)$ .
- $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f \circ \phi = 1 - 3x$  并且  $\phi(x) \geq 0$ , 求解  $\phi(x)$  及其定义域.
- 证明: (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{n^2 - n} = 4$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$ ; (3) 设  $q > 1, k \in \mathbb{N}_+$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$ .
- (1) 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n}$ ; (2)  $p_1 > p_2 > \cdots > p_m > 0$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^m p_i^n}$ .
- 令  $x_1 > 0$  并且  $x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ . 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .
- 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$  存在. 你能算出它等于多少吗?
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, a_n, b_n > 0$ , 证明  $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} = 0$ .
- (Stolz)  $0 < b_n \uparrow +\infty, a_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ .

## 1.2 解答

- 对于第一问,  $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$  是无理数. 对于第二问, 如果  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  是有理数则原命题得证, 如果是无理数则  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$  是有理数.
- 注意到  $f(2k\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(2k\pi + \frac{\pi}{4})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rightarrow \infty$ , 所以  $f(x)$  无界. 又因为  $f(k\pi) \equiv 0$  且对于  $x \neq k\pi$  成立  $f(x) \neq 0$ , 所以  $f(x)$  不单调. 由定义知  $f(x)$  是偶函数.
- 容易看出  $f(x)$  有周期 1 且  $|f(x)| \leq 1$  对于所有  $x \in \mathbb{R}$  成立.
- 代入验证即可.  $f(-x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ \cos x - \sin x & x < 0 \end{cases}$ .
- $f(\phi) = e^{\phi^2} = 1 - 3x \Rightarrow \phi = \sqrt{\log(1 - 3x)}$ .  $\phi(x)$  的定义域是  $\log(1 - 3x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ .
- (1)  $|\frac{4n^2}{n^2 - n} - 4| = \frac{4}{n-1}$ . 所以当  $n \geq \frac{4}{\epsilon} + 1$  时,  $\frac{4n^2}{n^2 - n}$  与 4 相差不超过  $\epsilon$ .  
(2)  $n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)} \Leftrightarrow n > (1 + 1/n)^n$  对于  $n \geq 3$  成立, 这意味着  $n^{1/n}$  是单调递减的. 注意到我们作业中已经证明了对于任意  $\epsilon > 0$ , 成立  $n^{1/n} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow n < (1 + \epsilon)^n$  对于足够大的  $n$ . 然后使用极限定义的  $N - \epsilon$  语言.  
(3) 注意到  $q^n = (1 + q - 1)^n \geq C_n^{k+1}(q - 1)^{k+1} = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \cdots + a_0$  是  $n^k$  的高阶无穷大量.
- 使用夹逼定理. (1)  $(*) \geq \frac{\sum_{i=1}^n i}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $(*) \leq \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2 + n} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ . (2)  $p_1 \leq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^m p_i^n} \leq \sqrt[n]{np_1^n} \rightarrow p_1$ .
- 在这类问题中,  $\{x_n\}$  一定会是单调有界的. 首先凑答案, 假设极限存在, 令递推公式两边  $n \rightarrow +\infty$ , 我们有  $a = \frac{3(1+a)}{3+a} \Rightarrow a = \sqrt{3}$ . 然后使用递推公式, 利用数学归纳法, 容易证明如果  $0 < x_1 < \sqrt{3}$  则  $0 < x_n < x_{n+1} < \sqrt{3}$ ; 如果  $x_1 > \sqrt{3}$  则  $x_n > x_{n+1} > \sqrt{3}$ . 这意味着极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  存在.
- 单调上升性显然. 由于  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ , 从而  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)i}$ , 有上界 2.
- 使用截断.  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n/b_n| < \epsilon/2$ . 从而  $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} = \frac{\sum_{i=1}^N a_i}{\sum_{i=1}^N b_i} + \frac{\sum_{i=N+1}^n a_i}{\sum_{i=N+1}^n b_i} := I_1 + I_2$ . 当  $n$  足够大时,  $I_1 < \epsilon/2$  (因为  $\sum_{i=1}^n b_i \rightarrow +\infty$ ); 而  $I_2 < \epsilon/2$  对于所有的  $n \geq N$  成立. 因此当  $n$  足够大时, 可以让  $I_1 + I_2 < \epsilon$ .
- 用定义.  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , 使得  $\forall n > N, (L - \epsilon)(b_n - b_{n-1}) \leq (a_n - a_{n-1}) \leq (L + \epsilon)(b_n - b_{n-1})$ . 对  $n$  累加  $\Rightarrow (L - \epsilon)(b_n - b_N) \leq a_n - a_N \leq (L + \epsilon)(b_n - b_N) \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} < L + \epsilon$ . 估计误差  $|\frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} - \frac{a_N}{b_N}| = |\frac{(a_n - a_N)b_N}{(b_n - b_N)b_N} + \frac{a_N b_N}{(b_n - b_N)b_N} + \frac{a_N}{b_n - b_N}| \leq (L + \epsilon)\frac{b_N}{b_n} + \frac{a_N b_N}{(b_n - b_N)b_N} + \frac{a_N}{b_n - b_N} < \epsilon$  (这三项都趋于 0, 因此总可以找一个足够大的  $n$  使之成立).

### 1.3 补充 (不要求掌握!)

作为一个已经学习数学这么多年的北京大学练习生, 我相信你一定关心过下面这个问题: 可导函数和连续函数之间差多少? 事实上, 我们有以下定义和结论:

- (1) 开集: 我们称集合  $A \subset \mathbb{R}$  是开的, 当且仅当  $\forall x \in A$ , 存在  $\delta_x > 0$ , 使得  $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset A$ .
- (2) 闭集: 我们称集合  $B \subset \mathbb{R}$  是闭的, 当且仅当它的补集是开的.
- (3) 定义  $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$ , 这里  $f$  是一个函数.
- (4) 你可以证明一个函数  $f$  是连续的当且仅当任意开集  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(A)$  是开集.
- (5) 内点: 我们称  $x \in A$  是集合  $A$  的内点当且仅当  $\exists \delta_x > 0$ , 使得  $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset A$ .
- (6) 可数/可列: 我们称集合  $A$  是可数的当且仅当存在一个从  $A$  到自然数集  $\mathbb{N}$  的一一映射或者  $|A| < \infty$ , 这里  $|A|$  是集合  $A$  中元素的个数.
- (7) 极限点: 我们称  $x$  是集合  $A$  的极限点, 当且仅当存在一个序列  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$  使得  $x_i \rightarrow x$ . 我们用记号  $A'$  来表示  $A$  所有极限点构成的集合.
- (8) 闭包: 我们称集合  $\bar{A} = A \cup A'$  是集合  $A$  的闭包.
- (9) 那么, 对于所有  $[a, b]$  上的连续函数, 至少存在一点可导的函数构成的集合是无处稠密的不可列并 (第一纲集). 这里, 无处稠密是指其闭包不存在内点的集合, 并且连续函数之间的度量定义为  $\rho_{[a,b]}(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f - g|$ .
- (10) Baire 纲集定理: 闭集  $B_n$  无内点, 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  也无内点. 由此容易知道第一纲集是没有内点的.

## 2 第 2 次习题课: 序列极限, 函数极限

### 2.1 问题

1. 计算 (1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ ; (3)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ ; (4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$ ; (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2}$ ;
- (7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}$ ; (8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{a} \frac{x-1}{x-1})^{\frac{1}{x}}$ , 其中  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ; (9)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1)$ ; (10)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)^{1/n^2}$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1}/a_n| = a$ , 证明  $a \leq 1$ .
3. 已知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$  存在, 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .
4.  $a_1 = b, a_2 = c, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .
5.  $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$ , 且  $|f(x)| \leq \sin x, \forall x > 0$ . 证明  $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$ .
6. 设  $\delta > 0$ , 且  $f(x)$  在区间内  $(-\delta, \delta)$  有界.  $\exists a > 1, b > 1$  使得  $f(ax) = bf(x)$ . 证明当  $x \rightarrow 0$  时  $f(x) \rightarrow 0$ .
7. 证明  $a_n$  收敛到  $a$  当且仅当  $a_n$  的任意子列都有子列收敛到  $a$ .

### 2.2 解答

1. (1) 注意到  $|\frac{1}{x-1} - 1| = |\frac{x-2}{x-1}|$ , 取  $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\epsilon)$ . (2) 注意到  $|x^2 \sin \frac{1}{x}| \leq |x^2| \rightarrow 0$ , 取  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ .
- (3) 当  $h \rightarrow 0$  时,  $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \rightarrow 3x^2$ . (4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{1}{2}$ .
- (5)  $\frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} \sim \frac{2 \times 2x \times x}{x^2} = 4$ . (6) 形如  $(1+0)^\infty$  的极限一定是去凑  $e$ . 原式  $= [(1 + \frac{3}{x^2-2})^{\frac{x^2-2}{3}}]^{\frac{3x^2}{x^2-2}} \rightarrow e^3$ .
- (7)  $|\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}| = |2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}| \leq |\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}| \leq \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \rightarrow 0$ .
- (8) 我们已经证明了当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $|a-1|^{1/x} \rightarrow 1, (1/x)^{1/x} \rightarrow 1$ , 所以原极限值等于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |a^x - 1|^{1/x}$ . 从而如果  $a > 1$  则极限值为  $a$ , 如果  $0 < a < 1$  则极限值为  $1$ .
- (9)  $\sum_{k=1}^n (\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} (\frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}}}) \cdot (*) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \times \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot (*) \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \times \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{4}$ .
- (10)  $1 \leq (n!)^{1/n^2} \leq n^{1/n} \rightarrow 1$ . (PLUS: Stirling's formula:  $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$ ).
2. 如果  $a > 1$ , 那么  $\exists N$  使得  $\forall n > N, |a_{n+1}/a_n| > (1+a)/2$ , 则  $|a_n| > |a_N|(\frac{1+a}{2})^{n-N} \Rightarrow |a_n| \rightarrow \infty$ .
3.  $\frac{a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1} \rightarrow 0 - 1 \times 0 \rightarrow 0$ .
4.  $a_n - a_{n-1} = (-\frac{1}{2})(a_{n-1} - a_{n-2}) = (-\frac{1}{2})^2(a_{n-2} - a_{n-3}) = \cdots = (-\frac{1}{2})^{n-1}(a_1 - a_0)$ , 从而  $a_n - a_0 = (a_1 - a_0)[1 + (-\frac{1}{2}) + \cdots + (-\frac{1}{2})^{n-1}] \rightarrow \frac{2}{3}(a_1 - a_0) \Rightarrow a_n \rightarrow \frac{1}{3}a_0 + \frac{2}{3}a_1$ .

5. 注意到  $|f(x)/\sin x| \leq 1$ . 令  $x \rightarrow 0$  即可.

6.  $x \in (-\delta, \delta), |f(x)| < M \Rightarrow x \in (-\delta/a, \delta/a), |f(x)| = \frac{1}{b}|f(ax)| \leq \frac{M}{b} \Rightarrow x \in (-\delta/a^n, \delta/a^n), |f(x)| \leq \frac{M}{b^n} \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$  当  $x \rightarrow 0$  时.

7.  $\Rightarrow$  是显然的.  $\Leftarrow$  反证法, 如果结论不对, 则  $\exists \epsilon_0 > 0, \forall k \in \mathbb{N}_+, \exists n_k > n_{k-1}$  使得  $|a_{n_k} - a| > \epsilon_0$ . 取子列  $\{a_{n_k}\}$  即可, 这个子列没有子列能收敛到  $a$ .

## 2.3 补充 (不要求掌握!)

**闭区间套定理:**  $a_n \uparrow, b_n \downarrow, 0 < b_n - a_n \rightarrow 0$ , 那么  $\exists$  唯一的一个点  $x \in \cap_n [a_n, b_n]$ .

证明: 令  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$  即可.

**有限覆盖定理:**  $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  是一族开集 (可能不可数). 如果  $[a, b] \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ , 则  $\exists I_1, \dots, I_m \in \{I_\lambda\}$  使得  $[a, b] \subset \cup_{i=1}^m I_i$ .

证明. 如果结论不对, 即不存在可数子覆盖, 那么对于区间  $[a, (a+b)/2]$  和  $[(a+b)/2, b]$ , 至少有一个区间不存在有限子覆盖, 这样一直切半, 由闭区间套, 必然夹出一个点  $x$ . 由于这是开覆盖, 因此存在开集  $O_x$  使得  $x \in O_x$ . 从而由极限知这个开区间迟早会覆盖前面的从某项开始的闭区间列, 这与假设 (不存在有限覆盖) 矛盾.

**聚点原理:**  $|a_n| < M$ , 那么  $\exists \{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ , 使得  $a_{n_k} \rightarrow a$  当  $k \rightarrow \infty$  时. (有界序列必有收敛子列)

证法 1: 取  $M$  使得  $\forall n, |x_n| \leq M$ , 取  $a_1 = -M, b_1 = M$ . 对  $[a_n, b_n]$  多次迭代, 每次找到  $\frac{a_n+b_n}{2}$ , 这个点将当前区间划分为两个子区间. 两个子区间中必然至少有一个含有无穷项. 任取其中一个含有无穷项的区间作为  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ . 由闭区间套定理, 最终  $a_n, b_n$  有相同的极限  $x$ , 同时  $x_n$  中有无穷项与  $x$  任意接近. 选取  $x_{n_k} \in [a_i, b_i]$ , 则  $x_{n_k} \rightarrow x$ .

证法 2: 如果不存在这样的子列, 那么  $\forall x \in [a, b], \exists \delta > 0$  使得  $|(x-\delta, x+\delta) \cap \{x_i\}_{i=1}^n| \leq 1$ . 这样构造出的开区间集合覆盖了  $[a, b]$ , 由有限覆盖定理, 必然存在有限个开区间覆盖整个区间. 而由假设, 对于取出的每个开区间中至多只有原序列中的一个点, 由于开区间的数量为有限个, 可以得出原序列长度也是有限的, 这显然不成立.

**柯西收敛:**  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \epsilon$ . 这与之前的极限定义是等价的, 但优点是不需要提前知道“无理数”.

证明.  $\Rightarrow$ : 取  $\epsilon = 1$  以及满足条件的  $N$ , 那么  $1 + \max_{i=1,2,\dots,N} |x_i|$  给出了整个序列  $\{x_n\}$  的界. 取它的一个收敛子列  $x_{n_k}$ , 并记这个极限为  $x$ . 从而  $|x_n - x| \leq |x_{n_k} - x| + |x_n - x_{n_k}| \rightarrow 0$ .  $\Leftarrow$ :  $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \rightarrow 0$ .

## 3 第 3 次习题课: 闭区间上的连续函数

### 3.1 问题

1. 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ .

2.  $\{x_n\}$  收敛且  $\{x_n + y_n\}$  收敛, 证明  $\{y_n\}$  收敛.  $\{x_n\}$  且  $\{y_n\}$  发散, 是否有  $\{x_n + y_n\}$  或者  $\{x_n y_n\}$  一定发散? 如果  $\{x_n y_n\}$  是无穷小量, 是否有  $\{x_n\}$  或者  $\{y_n\}$  一定是无穷小?

3. 求极限.  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$

4 (不要求掌握).  $0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} \exists$ . (这个引理在大偏差理论和 Kingman 遍历定理中很有用).

5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ . 求证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_{n+1-i}}{\sum_{i=1}^n p_i} = a$ . 其中  $p_k > 0$  且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i} = 0$ .

6. 求极限. (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$ ; (4)  $a_1, a_2, \dots, a_p > 0$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\frac{\sum_{i=1}^p a_i^x}{p})^{\frac{1}{x}}$ ;

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x \log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2}$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x}$ .

7. 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \exists \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) \exists$ , 但是  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \exists \not\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ .

8. 举例说明存在  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上处处不连续, 但  $|f(x)|$  处处连续.

9 (不要求掌握). 举例说明存在一个函数处处不连续, 其定义域是  $[0, 1]$  但是值域为区间.

10.  $f(x) \in C[a, b], |f(x)|$  单调. 证明  $f(x)$  单调.

11 (不要求掌握).  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, 0 < k < 1$ . 证明  $kx - f(x)$  单调上升并且  $\exists c, f(c) = c$ .

12.  $f(x) \in C[a, b], \forall x, \exists y$ , 使得  $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$ . 证明  $\exists \xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

13 (不要求掌握).  $f(x)$  在  $[a, b]$  上只有第一类间断点, 证明  $f(x)$  有界.

14. 设  $f(x) \in C[a, b], f(a)f(b) < 0$ . 证明  $\forall n = 1, 2, \dots, \exists \{\xi_i\}_{i=1}^n \subset [a, b], \xi_i \neq \xi_j$  使得  $\sum_{i=1}^n e^{f(\xi_i)} = n$ .
15. 非负函数  $f \in C[0, 1], f(0) = f(1) = 0$ . 证明  $\forall a \in (0, 1), \exists x_0 \in [0, 1]$  使得  $x_0 + a \in [0, 1]$  且  $f(x_0) = f(x_0 + a)$ . 如果去掉非负条件还对吗?
16.  $f_n(x) = x^n + x$ . (1) 证明:  $\forall n, f_n(x) = 1$  在  $[\frac{1}{2}, 1]$  中有且仅有一个根  $c_n$ ; (2) 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$ .
17. 不等于常数的连续周期函数一定有最小正周期. 如果把连续性去掉结论如何?
- 18 (不要求掌握).  $f$  在  $[a, b]$  内处处有极限. 证明: (1)  $\forall \epsilon > 0$ , 在  $[a, b]$  中使得  $|\lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x)| > \epsilon$  的点至多有有限个. (2)  $f(x)$  至多有可列个间断点.

## 3.2 解答

1.  $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$  (使用不等式  $\frac{i}{i+1} < \frac{i+1}{i+2}$ ), 那么  $x_n^2 < \frac{1}{2n+1}$ , 这意味着  $x_n \rightarrow 0$ .
2. 如果  $\{x_n\}$  和  $\{x_n + y_n\}$  都收敛, 那么  $\{x_n + y_n - x_n = y_n\}$  也会收敛. 构造  $x_n = (-1)^{n-1}, y_n = (-1)^n$ , 那么  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  发散但是  $\{x_n + y_n\}, \{x_n y_n\}$  都收敛. 再构造  $x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}, x_{2n} = 1, y_{2n-1} = 1, y_{2n} = \frac{1}{2n}$ .  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  都不是无穷小量但是  $\{x_n y_n\}$  是无穷小量.
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{2 \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$ .
4. 考虑  $\{\frac{x_n}{n}\}$  的下确界  $\alpha$ . 那么  $\exists n$  使得  $x_n/n < a + \epsilon$ . 设  $\max_{i=1,2,\dots,n} x_i = M$ . 那么  $\frac{x_m}{m} \leq \frac{x_n}{m} + \frac{x_{m-n}}{n} \leq \frac{2x_n}{m} + \frac{x_{m-2n}}{m}$  (假设  $m = kn + b$ )  $\leq \dots \leq \frac{kx_n}{m} + \frac{x_b}{m} \leq \frac{kx_n}{kn+b} + \frac{M}{m} \leq \frac{x_n}{n} + \frac{M}{m}$ . 选择足够大的  $m$  使得  $\frac{M}{m} < \epsilon$ . 从而  $a \leq \frac{x_m}{m} < a + 2\epsilon$ .
5. WLOG 令  $a = 0$ . 设  $\sup_n \{a_n\} = M$ .  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n \geq N_1$ , 使得  $|a_n| < \epsilon; \exists N_2, \forall n \geq N_2$ , 使得  $p_n / \sum p_n < \epsilon / N_1$ . 令  $n > N_1 + N_2$ , 则  $|\sum_{i=1}^n a_i p_{n+1-i} / \sum_{i=1}^n p_i| \leq |\sum_{i=1}^{n-N_1} p_i a_{n+1-i} / \sum_{i=1}^n p_i| + |\sum_{i=n-N_1+1}^n p_i a_{n+1-i} / \sum_{i=1}^n p_i| < \epsilon + \frac{\epsilon}{N_1} \times N_1 \times M = (M+1)\epsilon$ .
6. (1)  $(e^{ax} - e^{bx})/x = a \cdot \frac{e^{ax}-1}{ax} + b \cdot \frac{1-e^{bx}}{b} \rightarrow a - b$ . (2)  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1/x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1/x + \sqrt{1/x^3 + 1}}}} \rightarrow \frac{1}{2}$ .
- (3)  $(\sin 1/x + \cos 1/x)^x = [(1 + \cos 1/x + \sin 1/x - 1)^{\frac{1}{\cos 1/x + \sin 1/x - 1}}]^{x(\cos 1/x + \sin 1/x - 1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} e^{(\cos t + \sin t - 1)/t} = e^1$ .
- (4)  $(\frac{\sum_{i=1}^p a_i^x}{p})^{1/x} = [1 + \frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{p}]^{1/x} = \{[1 + \frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{p}]^{\frac{p}{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}}\}^{\frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{px}} \rightarrow e^{\frac{\sum_{i=1}^p \log a_i}{p}} = (a_1 a_2 \dots a_p)^{1/p}$ .
- (5)  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x \log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2} \sim \frac{x \cdot 3x}{(2x)^2} = \frac{3}{4}$ . (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x} = \frac{(2/3)^x - 1}{1 - (4/3)^x} \sim \frac{x \log(2/3)}{-x \log(4/3)} = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 4 - \log 3}$ .
7.  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow x^3 \rightarrow 0$ , 但是  $x^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0 + 0$ .
8.  $f(x) = 1_{\mathbb{Q}} - 1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ .
9.  $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x + \frac{1}{2} & x \in [0, \frac{1}{2}] \& x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1] \& x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
10. 不妨设  $|f(x)|$  单调递增. 只需注意到如果  $f(x_0) = 0$ , 那么对于所有的  $x \in [a, x_0], f(x) = 0$ .
11. 第一问是定义, 第二问用柯西收敛准则, 重复利用已知不等式来证明  $x, f(x), f(f(x)), \dots$  是柯西列.
12. 如果不存在  $\xi$  使得  $f(\xi) = 0$ . 那么  $f(x)$  始终保号, 不妨设  $f(x) > 0$ . 设  $x_0 = \arg \min f(x)$ . 这样就不存在  $y$  使得  $|f(y)| \leq \frac{1}{2}f(x)$ , 矛盾.
13. 第一类间断点  $\Rightarrow$  每一点都有一个邻域有界  $\Rightarrow$  所有邻域构成开覆盖, 必有有限子覆盖, 有限个有界总能找到最大界.
14.  $\exists \eta > 0$ , 使得  $f([a, b]) \supset [-\eta, \eta]$ , 这意味着  $e^{f([a, b])} \supset [e^{-\eta}, e^{\eta}] \supset [1 - \epsilon, 1 + \epsilon] (\exists \text{ 一个足够小的 } \epsilon > 0)$ . 从而如果  $n$  是奇数, 选择  $e^{f(\xi_1)} = 1, e^{f(\xi_2)} = 1 - \epsilon/2, e^{f(\xi_3)} = 1 + \epsilon/2, e^{f(\xi_4)} = 1 - \epsilon/3, e^{f(\xi_5)} = 1 + \epsilon/3, \dots$ ; 如果  $n$  是偶数, 选择  $e^{f(\xi_1)} = 1 - \epsilon/2, e^{f(\xi_2)} = 1 + \epsilon/2, e^{f(\xi_3)} = 1 - \epsilon/3, e^{f(\xi_4)} = 1 + \epsilon/3, \dots$ .
15. 令  $g(x) = f(x+a) - f(x)$ .  $g(0) \geq 0, g(1-a) \leq 0$ , 用介值定理. 去掉非负条件不对, 比如说  $f(x) = \sin(2\pi x), a = 0.7$ .
16. (1) 注意到  $f_n \uparrow \in [\frac{1}{2}, 1]$  且  $f(\frac{1}{2}) < 1, f(1) > 1$ , 使用介值定理. (2) 由于  $\forall \epsilon, \exists N$ , 使得  $\forall n > N, (1 - \epsilon)^n + 1 - \epsilon < 1$ . 由于  $f(1 - \epsilon) < 1 = f(c_n)$  且  $f_n \uparrow \Rightarrow c_n > 1 - \epsilon$ . 由极限定义知  $c_n \rightarrow 1$ .
17. 反证法. 如果  $f(a) \neq f(b)$ , 考虑正周期序列  $T_n \rightarrow 0$ , 则由带余除法,  $(b-a) \div T_n = S_n \dots m_n$ , 其中  $0 \leq m_n < T_n \rightarrow 0$ . 所以  $a + S_n T_n \rightarrow b, f(a) = f(a + S_n T_n) \rightarrow f(b)$  (连续性)  $\Rightarrow f(a) = f(b)$ , 矛盾. 把连续性去掉则结论不对, 比如说 Dirichlet 函数.

18. (1) 如果集合有无穷多个元素那一定有聚点 (有界序列必有收敛子列). 从而  $x_n \rightarrow x$ . 考虑  $y_n$  使得  $|y_n - x_n| < 1/n$ , 且  $|f(y_n) - f(x_n)| > \epsilon$  (这是集合的定义, 函数极限差  $> \epsilon$  那么必然存在一个比较近的点使得函数差  $> \epsilon$ ). 从而  $y_n \rightarrow x$ ,  $f$  在  $x$  的极限何在? (极限存在当且仅当任意趋于其的数列极限均相等, 而这里  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$  显然与  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$  不同).  
 (2) 记 (1) 中集合为  $A_\epsilon$ . 注意到间断点集合可以写成  $\cup_n A_{1/n}$ . 可列个有限元素集合的并元素一定是可列个的.

### 3.3 补充 (不要求掌握!)

**有界性定理:**  $f(x) \in C[a, b]$ , 则  $f(x)$  有界.

证明. 如果无界, 则选择  $x_n$  使得  $f(x_n) \rightarrow \infty$ , 那么存在一个子列  $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$  收敛到某个  $x$  (聚点原理). 由连续性知  $f(x) = \infty$ , 矛盾.

**最值定理:**  $f(x) \in C[a, b]$ , 那么  $\arg \max f(x) \exists$ .

证明. 找一个数列  $\{x_n\}$  使得  $f(x_n) \rightarrow \max f(x)$ . 利用有界数列必有收敛子列和  $f(x)$  的连续性.

**介值定理:**  $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0, f(x) \in C[x_1, x_2], \exists x_0$  使得  $f(x_0) = 0$ .

证明. 使用 Lebesgue 方法. 令  $x_0 = \sup\{x : f(x) > 0\}$ . 利用连续性知如果  $f(x_0) > 0$  则  $x_0$  不是上界, 如果  $f(x_0) < 0$  则有更好的上确界.

## 4 第 4 次习题课: 导数, 高阶导数

### 4.1 问题

- $f(x) \in C(\mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . 证明  $\arg \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \exists$ .
- 证明  $\cos x = \frac{1}{x}$  有无穷多个正实数根.
- $f(x) \in C[a, b], x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ . 证明  $\exists \xi \in [a, b]$  使得  $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ .
- $f(x) = |x|^{1/4} + |x|^{1/2} - \frac{1}{2} \cos x$ . 问  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  中有多少个根?
- $f(x) \in C[0, 2], f(0) = f(2)$ , 证明  $\exists x_1, x_2 \in [0, 2]$  使得  $|x_1 - x_2| = 1$  并且  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n-1}}$ . 讨论连续性.
- $f(x) \in C(\mathbb{R}), f(x+y) = f(x) + f(y)$ . 求解  $f(x)$ .
- $f(x)$  连续, 问  $|f(x)|$  连续否?
- $f(x) \in C[0, 1], 0 \leq f(x) \leq 1$ , 证明  $\exists t \in [0, 1]$  使得  $f(t) = t$ .
- (不要求掌握).  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增,  $0 \leq f(x) \leq 1$ , 证明  $\exists t \in [0, 1]$  使得  $f(t) = t$ .
- $f(x)$  在  $x = 3$  连续,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2$ . 求  $f'(3)$ .
- $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+x) - f(x_0-x)}{x}$ .
- 证明奇函数导数是偶函数, 偶函数导数是奇函数.
- 求导数.  $y = \sqrt[3]{2+3x^3}, y = \arcsin \frac{1}{x^2}, y = \log(\arctan 5x) + \log(1-x), y = e^{\sin^2 x} + \sqrt{\cos x} 2^{\sqrt{\cos x}}, y = x|x(x-2)|$ .
- $f(x), x \in [-1, 1], x \leq f(x) \leq x^2 + x$ , 证明  $f'(0) = 1$ .
- 求导数.  $e^{xy} = 3x^2y, \arctan y/x = \log \sqrt{x^2 + y^2}, f(x)^{g(x)}, x^{x^x}$ .
- 求  $\frac{x^n}{1-x}, \sin^4 x + \cos^4 x$  的  $n$  阶导数.
- 求  $\arcsin^2 x$  在 0 处的  $n$  阶导数.
- 求极限.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x, \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1), \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}$ .
- $f([a, b]) \subset [a, b], |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ , 证明  $\forall x_1 \in [a, b]$ , 都有  $x_n$  收敛.

### 4.2 解答

- 由极限定义知  $\exists X > 0, \forall |x| > X, f(x) > f(0)$ . 那么  $\arg \min_{x \in [-X, X]} f(x) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ , 由最值定理知存在性.
- 设  $f(x) = \cos x - 1/x$ , 那么  $f(2k\pi) > 0, f(2k\pi + \frac{\pi}{2}) < 0$ , 由介值定理立得.
- 注意到  $\min f(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \max f(x)$ . 使用介值定理.

4. 注意到  $f(x)$  是偶函数. 由于  $\forall x > 1, f(x) > 0$ , 且  $f(x)$  在  $[0, 1]$  区间上单调递增, 则  $f(0) < 0, f(1) > 0 \Rightarrow$  有且仅有一个正实数根. 从而在  $\mathbb{R}$  上有两个根.
5. 令  $g(x) = f(x+1) - f(x)$ . 那么  $g(0)g(1) \leq 0 \Rightarrow \exists x \in [0, 1]$  使得  $g(x) = 0$ .
6.  $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| > 1 \\ -x & 0 < |x| < 1 \end{cases}$ .
7. 先证有理数点.  $f(n) = f(1) + f(n-1) = 2f(1) + f(n-2) = \cdots = nf(1), f(1) = f(1/n) + f((n-1)/n) = 2f(2/n) + f((n-2)/n) = \cdots = nf(1/n) \Rightarrow f(m/n) = mf(1/n) = m/n \times f(1)$ . 有理数点满足  $f(x) = xf(1)$ , 无理数点用有理数逼近用连续性就可以了.
8. 注意到  $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ . 因此连续.
9. 令  $g(t) = f(t) - t, g(0) \geq 0, g(1) \leq 1$ , 利用介值定理.
10. 使用 Lebesgue 方法. 令  $x_0 = \sup_x \{f(x) > x\}$ , 往证  $f(x_0) = x_0$ . 如果  $f(x_0) > x_0$ , 那么  $\forall x_1$  满足  $x_0 < x_1 < f(x_0)$  都有  $f(x_1) \geq f(x_0) > x_1$ . 这意味着  $x_0$  不是上界. 如果  $f(x_0) < x_0$ , 那么  $\forall x_1$  满足  $f(x_0) < x_1 < x_0$  都有  $f(x_1) \leq f(x_0) < x_1$ . 这意味着  $x_0$  不是上确界, 因为有更好的上界. 因此  $f(x_0) = x_0$ .
11. 当  $x \rightarrow 3$  时,  $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)/(x-3) \times (x-3) \sim 2 \times (x-3) = 0$ . 从而  $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 2$ .
12.  $\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x} = \frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x} + \frac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x} \rightarrow 2f'(x_0)$ .
13. 奇函数导数是偶函数:  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{-x \rightarrow -x_0} \frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)} = f'(-x_0)$ . 同理偶函数导数是奇函数.
14.  $y' = \frac{3x^2 \sqrt[3]{2+3x^3}}{2+3x^3}, y' = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}, y' = \frac{5}{\arctan 5x \times (1+25x^2)} + \frac{1}{x-1}, y' = e^{\sin^2 x} \sin 2x - \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} 2^{\sqrt{\cos x}} (1 + \sqrt{\cos x} \log 2),$   
 $y' = \begin{cases} 3x^2 - 4x & x < 0 \text{ or } x > 2 \\ 4x - 3x^2 & 0 \leq x < 2 \\ \emptyset & x = 2 \end{cases}$ .
15. 注意到  $f(0) = 0$ . 从而当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 \leftarrow \frac{x}{x} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \frac{x^2+x}{x} \rightarrow 1$ .
16. 前两问两边对  $x$  求导数, 结果是  $y' = \frac{y(2-xy)}{x(xy-1)}, y' = \frac{x+y}{x-y}$ ; 后两问写成指数函数,  $e^{g \log f}, e^{e^x \log x \log x}$ , 结果是  $f^g(g' \log f + \frac{f}{g} f'), x^{x^x} (x^x (1 + \log x) \log x + x^{x-1})$ .
17.  $\frac{x^n}{1-x} = \frac{x^n - x^{n-1} + x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots + x - 1 + 1}{1-x} = -(x^{n-1} + \cdots + x + 1) + \frac{1}{1-x}$ , 因此  $n$  阶导数是  $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ . 第二个用倍角公式写出来是  $1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$ .  $y' = -\sin 4x$ . 由课上已知关于三角函数高阶导数的结论, 知  $y^{(n)} = -4^{n-1} \sin(4x + \frac{n-1}{2}\pi)$ .
18.  $f'(x) = 2 \arcsin x / \sqrt{1-x^2}$ , 从而  $(1-x^2)f'(x)^2 = 4f(x)$ . 两边求导  $-2xf'(x)^2 + 2(1-x^2)f'(x)f''(x) = 4f'(x) \Rightarrow -xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2$ . 两边求  $n-2$  次导数, 并代入  $x=0$ , 利用 Leibniz 公式知道  $f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$ . 然后再把  $f'(0), f''(0)$  算出来用递推就可以了.
19. (1)  $\sqrt{x^2+x+1} - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2+1}} \rightarrow \frac{1}{2}$ . (2)  $n(\sqrt[n]{n} - 1) = n(e^{\log n/n} - 1) \sim n \log n/n^2 \rightarrow 0$ .
- (3)  $(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}} = [(1+2x)^{1/(2x)}]^{2(x+1)^2} \rightarrow e^2$ .
20. 回忆: 这种题一定是单调数列. 容易验证数列是良定义的, 即不会跑出区间  $[a, b]$  外. 如果  $x_n \geq x_{n-1}$ , 有  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(f(x_n) + x_n)$  (利用  $f(x_n) - f(x_{n-1}) \geq x_{n-1} - x_n \geq \frac{1}{2}(f(x_{n-1}) + x_{n-1}) = x_n$ . 从而如果  $x_2 \geq x_1$ , 则这成为单调上升有界数列, 必收敛. 同理若  $x_{n-1} \geq x_n$  也可以推出  $x_n \geq x_{n+1}$ .

### 4.3 补充 (不要求掌握!)

参考 <https://wqgcx.github.io/courses/analysis1.pdf>.

## 5 第 5 次习题课: 隐函数求导, 微分, 不定积分

### 5.1 问题

1. 求出闭区间  $[-1, 1]$  上的一元函数  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$  达到最小值的所有  $[-1, 1]$  上的点.
2. 考虑函数  $f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ , 其中  $m$  为正整数. 在  $x \neq 0$  处, 求  $f'(x)$  和  $f''(x)$ . 求  $m$  满足的条件, 使得



$f(x)$  有连续的二阶导函数.

$$3. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} + \frac{x}{2} & x > 0 \\ a & x = 0 \text{ 在 } x = 0 \text{ 处可导, 确定常数 } a, b, c, \text{ 的值 (需要用洛必达法则).} \\ \frac{\sin bx}{x} + cx & x < 0 \end{cases}$$

$$4. y = e^{-x^2}, \text{ 求 } y^{(4)}|_{x=0}.$$

$$5. y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \arccos \frac{x}{a}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}.$$

$$6. y^2 \tan(x+y) - \sin(x-y) = 0, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}.$$

$$7. y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}.$$

$$8. \text{ 求函数 } f(x) = x^{\arcsin x} (0 < x < 1) \text{ 的导函数 } f'(x).$$

$$9. \text{ 求函数 } f(x) = \arctan x \text{ 在 } x = 0 \text{ 点的 3 阶导数 } f'''(0).$$

$$10. \text{ 设 } f(x) = \frac{1}{x^2-4}, \text{ 求 } f^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}.$$

$$11. \text{ 求方程 } y^2 + 2 \log y = x^4 \text{ 所确定的函数 } y = f(x) \text{ 的二阶导数.}$$

12. 判断下列结论是否正确.

(1) 设  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且  $f'(x_0) > 0$ , 那么: (1.1)  $f(x)$  在  $x_0$  点一定连续. (1.2)  $f(x)$  在  $x_0$  点的某个邻域内一定连续. (1.3)  $f(x)$  在  $x_0$  点的某个邻域内一定单调上升.

(2)  $f(x)$  在  $x_0$  点二阶可导, 那么: (2.1)  $f(x)$  在  $x_0$  点一定连续. (2.2)  $f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域内一定连续.

$$13. \text{ 设 } f(x) = e^{x(x-1)\cdots(x-2021)}, \text{ 求 } f'(2021).$$

$$14. \text{ 设 } x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}.$$

$$15. \text{ 设 } y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{x^2 - 1}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx} \text{ 并化简.}$$

$$16. \text{ 求积分. } \int \frac{4x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x(x+1)(x^2+1)} dx, \int \frac{2x^2 + x + 5}{x^4 - x^2 - 6} dx, \int \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx, \int \frac{3+5x}{\sqrt{4x^2-4x+5}} dx.$$

$$17. \text{ 设 } y = f(x) = x^3, x = g(t) = t^2, y = f(g(t)) = t^6, \Delta t = 0.1, \Delta x = g(1+0.1) - g(1) = 0.21.$$

(1) 当把  $t$  作为自变量时, 函数  $y = f(g(t))$  的二阶微分记为  $d_t^2 y$ , 函数  $x = g(t)$  的一阶微分记为  $d_t x$ . 计算出: 当  $t = 1, \Delta t = 0.1$  时, 函数  $y = f(g(t))$  的二阶微分  $d_t^2 y|_{t=1, \Delta t=0.1}$  和函数  $x = g(t)$  的一阶微分  $d_t x|_{t=1, \Delta t=0.1}$ .

(2) 当把  $x$  作为自变量时, 函数  $y = f(x)$  的二阶微分记为  $d_x^2 y$ ,  $x$  (看作  $x$  的函数) 的一阶微分记为  $d_x x$ . 计算出: 当  $x = 1, \Delta x = 0.21$  时, 函数  $y = f(x)$  的二阶微分  $d_x^2 y|_{x=1, \Delta x=0.21}$  和函数  $x$  (看作  $x$  的函数) 的一阶微分  $d_x x|_{x=1, \Delta x=0.21}$ .

(3)  $\frac{d_t^2 y}{(d_t x)^2}|_{t=1, \Delta t=0.1}$  与  $\frac{d_x^2 y}{(d_x x)^2}|_{x=1, \Delta x=0.21}$  相等吗?

$$18. \text{ 求极限. } \lim_{x \rightarrow 0+0} x^x, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x+\tan x}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cdots \cos \frac{a}{2^n} \quad (a \in (0, 1)), \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^{x^2}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{n} - 1).$$

$$19. \text{ 设 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0, \text{ 证明 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 0.$$

$$20. \text{ 设 } f(x) \in C[0, 1], \text{ 如果极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(0) + f(1/n) + f(2/n) + \cdots + f(1)}{n} = M, \text{ 其中 } M = \max_{x \in [0, 1]} f(x), \text{ 则 } f(x) \equiv M.$$

$$21. \text{ (Riemann-Lebesgue 引理). } f \in R[a, b], g \in R[0, T], g(x+T) = g(x), \text{ 则 } \int_a^b f(x)g(nx)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx.$$

$$22. f(x) = x \log x, \text{ 找到 } x_n \text{ 和 } y_n \text{ 使得 } \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - y_n| = 0 \text{ 但是 } \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \neq 0.$$

## 5.2 解答

$$1. f(1) = f(-1) = 1, f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2x}{3(x^2-1)^{2/3}} = \frac{2[(x^2-1)^{2/3} - x^{4/3}]}{3x^{1/3}(x^2-1)^{2/3}} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或者 } -1 < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 注意到 } f(0) = 1. \text{ 从而达到最小值的点是 } -1, 0, 1.$$

$$2. f'(x) = -x^{m-2} \cos \frac{1}{x} + mx^{m-1} \sin \frac{1}{x}, f''(x) = -x^{m-4} \sin \frac{1}{x} - (m-2)x^{m-3} \cos \frac{1}{x} - mx^{m-3} \cos \frac{1}{x} - m(m-1)x^{m-2} \sin \frac{1}{x}. \text{ 要使得 } f''(0) \text{ 存在需要 } f'(0) \exists, f'(x) \rightarrow f'(0) \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \exists \Rightarrow m \geq 4, \text{ 二阶导函数连续性意味着 } f''(x) \rightarrow f''(0) \Rightarrow m \geq 5.$$

$$3. \text{ 连续性: } f(0+0) = a \Rightarrow a = 1, b = 1. f'_+(0) = 0, f'_-(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ (需要用洛必达).}$$

$$4. y' = -2xe^{-x^2}, y'' = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}, y''' = -2x(4x^2 - 2)e^{-x^2} + 8xe^{-x^2}, y'''' = (-24x^2 + 12)e^{-x^2} + (16x^4 - 24x^2)e^{-x^2}. \text{ 从而 } y''''(0) = 12.$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$6. \text{ 两边求导, } 2yy' \tan(x+y) + \frac{y^2}{\cos^2(x+y)}(y'+1) + (y'-1) \cos(x-y) = 0 \Rightarrow y' = \frac{\cos^2(x+y) \cos(x-y) - y^2}{\cos^2(x+y) \cos(x-y) + y^2 + 2y \sin(x+y) \cos(x+y)}.$$

$$7. y' = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a+1} x^{a-1} \log a + a^{a^x+x} (\log a)^2.$$

8.  $f(x) = e^{\arcsin x \log x}$ ,  $f'(x) = x^{\arcsin x} (\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x})$ .
9.  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ,  $f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow f'''(0) = -2$ .
10.  $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{4} (\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}})$ .
11. 两边求导,  $2yy' + 2\frac{y}{y} = 4x^3 \Rightarrow y^2 y' + y' = 2x^3 y$ , 再求一次,  $2y(y')^2 + y^2 y'' + y'' = 6x^2 y + 2x^3 y'$ , 利用  $y' = \frac{2x^3 y}{y^2+1}$ , 得到  $y'' = \frac{6x^2 y}{y^2+1} + \frac{4x^6 y}{(y^2+1)^2} - \frac{8x^6 y^3}{(y^2+1)^3}$ .
12. (1.1) 可导一定连续. (1.2)(1.3) 不一定, 比如说  $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x+x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ . (2.1) (2.2) 都是对的.
13.  $f'(x) = e^{x(x-1)\cdots(x-2021)} [x(x-1)\cdots(x-2021)]'$ , 从而  $f'(2021) = 2021!$ .
14.  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ ,  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \operatorname{sgn}(t)$ , 注意到  $t, x$  同号, 因此  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sgn}(x)$ .
15. 直接计算, 小心化简.  $y'(x) = \frac{1}{x^4+1}$ .
16. (1)  $\frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{x}{(x^2+1)}$ , 因此积分后是  $2 \log|x+1| + \log|x| + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$ .
- (2)  $\frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6} = \frac{11}{10\sqrt{3}} \frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{11}{10\sqrt{3}} \frac{1}{x+\sqrt{3}} - \frac{1}{5\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{x^2+2} + \frac{1}{5} \frac{x}{x^2-3} - \frac{1}{5} \frac{x}{x^2+2}$ , 因此积分后是  $\frac{11}{10\sqrt{3}} \log|x-\sqrt{3}| - \frac{11}{10\sqrt{3}} \log|x+\sqrt{3}| - \frac{1}{5\sqrt{2}} \arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{10} \log|x^2-3| - \frac{1}{10} \log(x^2+2) + C$ .
- (3)  $\frac{\cos^3 x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{d \tan x}{(\tan x + 1)(\tan^2 x + 1)^2}$ , 后面用有理式展开积分. 结果是  $\frac{1}{4} \log|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin x \cos x + \frac{1}{4} \cos^x + C$ . (注: 本题也可以用对偶积分, 考虑  $\int \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ ).
- (4)  $\frac{3+5x}{\sqrt{(2x-1)^2+4}} = \frac{5(x-\frac{1}{2})}{2\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}} + \frac{11}{4\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}}$ , 因此积分后是  $\frac{5}{2} \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1} + \frac{11}{4} \log|x-\frac{1}{2} + \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}| + C$ .
17. (1)  $d_t^2 y|_{t=1, \Delta t=0.1} = 30t^4(\Delta t)^2|_{t=1, \Delta t=0.01} = 0.3$ ,  $d_t x|_{t=1, \Delta t=0.1} = 2t\Delta t|_{t=1, \Delta t=0.1} = 0.2$ .
- (2)  $d_x^2 y|_{x=1, \Delta x=0.21} = 6x(\Delta x)^2 = 0.2646$ ,  $d_x x|_{x=1, \Delta x=0.21} = 1\Delta x|_{x=1, \Delta x=0.21} = 0.21$ .
- (3)  $(d_t x)^2|_{t=1, \Delta t=0.1} = 0.2^2 = 0.04$ ,  $(d_x x)^2|_{x=1, \Delta x=0.21} = 0.21^2 = 0.0441$ ,  $\frac{d_t^2 y}{(d_t x)^2}|_{t=1, \Delta t=0.1} = \frac{0.3}{0.04} = 7.5 \neq 6 = \frac{0.2646}{0.0441} = \frac{d_x^2 y}{(d_x x)^2}|_{x=1, \Delta x=0.21}$ , 因此不相等.
18. (1)  $x^x = e^{x \log x} \rightarrow e^0 = 1$ .
- (2)  $\sqrt[3]{1+x-1} \sim \frac{1}{3}x$ ,  $x + \tan x \sim 2x$ , 因此极限值为  $\frac{1}{6}$ .
- (3)  $\cos \frac{a}{2} \cdots \cos \frac{a}{2^n} \sin \frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n}$  (不断利用  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ), 因此极限值为  $\frac{\sin a}{a}$ .
- (4)  $(1 + \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x})^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x}(\sqrt{1+x^2}-x)}$ , 由于  $x(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{1}{2}$ , 因此原极限为  $\sqrt{e}$ .
- (5)  $\sqrt[n]{n}(\sqrt[n]{n}-1) \sim \sqrt[n]{n}(e^{(\log n)/n}-1) \sim \sqrt[n]{n}(\log n)/n = \log n/\sqrt[n]{n} \rightarrow 0$ .
19. 分奇偶讨论. 使用  $a_n \rightarrow a$  则  $(\sum_{i=1}^n a_i)/n \rightarrow a$  这个结论.
20. 如果结论不对, 则存在一个长度为  $\delta$  的区间, 在这个区间上  $f(x) \leq M - \epsilon$ , 则至少有  $[\delta/n] - 1$  个  $f(i/n)$  落在这个区间里, 这样一来极限值就会小于等于  $M(1-\delta) + (M-\epsilon)\delta$ , 矛盾.
21. WLOG 设  $\int_0^T g(x)dx = 0$ , 否则考虑  $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$ .
- 由 Riemann 积分定义,  $\forall \epsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $s_\epsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq b \end{cases}$  使得  $\int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|dx < \epsilon$ . 设
- $M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$ . 则  $|\int_a^b f(x)g(nx)dx| = |\int_a^b (f(x) - s_\epsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx| \leq \int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|g(nx)dx + |\sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx| < M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \leq M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT$ . 其中最后一个等式利用了  $\int_0^T g(x)dx = 0$ , 这意味着  $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \cdots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$  (设  $c+kT \leq d < c+(k+1)T$ )  $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \leq MT$ . 选择一个足够大的  $n$ , 使得  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \epsilon$ . 从而  $|\int_a^b f(x)g(nx)dx| \leq (M+1)\epsilon$ .
22. 本质上是  $f(x)$  不一致连续.  $x_n = e^n$ ,  $y_n = e^n + \frac{1}{n}$ , 则  $|f(x_n) - f(y_n)| = (e^n + \frac{1}{n}) \log(e^n + \frac{1}{n}) - ne^n \geq \frac{1}{n} \log(e^n + \frac{1}{n}) \geq 1$ .

### 5.3 补充 (不要求掌握!)

参考 <https://wqgcx.github.io/courses/analysis2.pdf>, 初步了解可积性理论.

## 6 第 6 次习题课: 不定积分, 变上限积分, 定积分

### 6.1 问题

1. 求极限.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}})$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}) \sin \frac{i\pi}{n^2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ .
2. 求导数.  $\int_{x^3+1}^{2^x} \frac{\sin t}{t^4+2} dt$ ,  $\int_e^{e^x} \frac{dt}{1+\log t}$  ( $x > 1$ ),  $(\int_a^x f(t) dt)^2$ .
3. 求积分.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ,  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$ ,  $\int \sqrt{x^2+a^2} dx$ ,  $\int \sqrt{x^2-a^2} dx$ ,  $\int_{-1}^1 \log(x+\sqrt{1+x^2}) dx$ .
4. 求积分.  $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ ,  $\int \sqrt{\tan x} dx$ ,  $\int \frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx$ ,  $\int x^2 \sqrt{x^2+1} dx$ ,  $\int \frac{dx}{x(x^3+2)}$ ,  $\int x^2 \arctan x dx$ ,  $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$ ,  $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ .
5. 函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的导函数. 证明: 对于任意  $x \in [0, 1]$ , 有  $|f(x)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f'(t)| dt$ , 并写出取等号条件.
6.  $x_1 > 0$ , 对于每个正整数  $n$ , 有  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  存在并求之.
7. 设  $x > 0$ , 定义  $p(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}}$ , 证明方程  $p(x+1) = p(x) + \sin x$  有无穷个互不相等的正实数解.
8. 设  $f(x) \in R[a, b]$ ,  $\int_a^b f(x) dx > 0$ , 证明  $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]$  使得  $f(x) > 0, x \in [\alpha, \beta]$ .
- 9 (不要求掌握).  $f(x) \in R[a, b]$ , 是否有  $[f(x)]$  可积? 其中  $[ \cdot ]$  表示向下取整.
10. 设  $f(x) \in C[0, \pi]$  满足  $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$ , 证明  $\exists \alpha, \beta \in (0, \pi), \alpha \neq \beta$ , 使得  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ .
11. 证明柯西不等式  $[\int_a^b f(x)g(x) dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$ , 并说明取等号条件.
- 12 (不要求掌握). 证明 Holder 不等式  $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq [\int_a^b f^p(x) dx]^{\frac{1}{p}} [\int_a^b g^q(x) dx]^{\frac{1}{q}}$ , 其中  $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \geq 0$ .
- 13 (不要求掌握). 证明 Minkowski 不等式  $[\int_a^b [f(x) + g(x)]^p dx]^{\frac{1}{p}} \leq [\int_a^b f^p(x) dx]^{\frac{1}{p}} + [\int_a^b g^p(x) dx]^{\frac{1}{p}}$ , 其中  $p \geq 1, f, g \geq 0$ .
14. 设  $f(x) \in C[a, b]$  满足  $\forall \phi(x) \in C[a, b]$ , 只要  $\int_a^b \phi(x) dx = 0$ , 就有  $\int_a^b f(x)\phi(x) dx = 0$ . 证明  $f(x) \equiv C$ .
15.  $a_n/n^\alpha \rightarrow 1, \alpha > 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ .
16.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f'(a) = m, f'(b) = n$ , 证明存在  $c \in [a, b]$  使得  $f'(c) = \xi$ , 其中  $\xi$  是  $[m, n]$  或  $[n, m]$  中的任意一个数. 本题说明导函数虽然不一定连续, 但具有介值性质.
17.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 证明存在  $c \in [a, b]$  使得  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .
18. 记  $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}, x \in [0, 1]$ , 求  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$  和  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ . 本题说明积分极限不一定可交换.
19. 记  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$  和  $(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x))'$ . 本题说明求导极限不一定可交换.
20. 证明变上限积分的连续性. 若被积函数连续, 则证明变上限积分的可导性.

### 6.2 解答

1. 利用定积分定义. (1)  $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}|_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$ .
- (2)  $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2} \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ .
- (3)  $\frac{i\pi}{n^2} - \epsilon \frac{i\pi}{n^2} \leq \sin \frac{i\pi}{n^2} \leq \frac{i\pi}{n^2}$ ,  $\sum_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}) \frac{i\pi}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}) \frac{i\pi}{n} \rightarrow \int_0^1 (1+x) \pi x dx = \frac{5\pi}{6}$ , 同理左边  $\geq (1-\epsilon) \frac{5\pi}{6}$ , 由  $\epsilon-N$  语言.
- (4)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2$ .
2. 利用变上限积分导数结论.  $f' = \frac{\sin 2^x}{16^{x+2}} 2^x \log 2 - \frac{\sin(x^3+1)}{(x^3+1)^4+2} 3x^2$ .  $f' = \frac{e^x}{1+x}$ .  $f' = 2f(x) \int_a^x f(t) dt$ .
3.  $\arcsin \frac{x}{a} + C, \log |x+\sqrt{x^2+a^2}| + C, \log |x+\sqrt{x^2-a^2}| + C, \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2 \arcsin(x/a)) + C, \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2 \log |x+\sqrt{x^2+a^2}|) + C, \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2 \log |x+\sqrt{x^2-a^2}|) + C, 0$  (注意是奇函数). 都是利用换元或者分部积分.
4. (1) 令  $u = x + \sqrt{x^2+x+1}, x = \frac{u^2-1}{2u+1} \Rightarrow 2 \int \frac{u^2+u+1}{u(2u+1)^2} du = 2 \int \frac{1}{u} - \frac{3(u+1)}{(2u+1)^2} du = 2 \log |u| - 3 \int \frac{du}{2u+1} - 3 \int \frac{du}{(2u+1)^2} + C = 2 \log u - \frac{3}{2} \log |2u+1| + \frac{3}{2} \frac{1}{2u+1} + C$ .
- (2) 令  $u = \sqrt{\tan x}, x = \arctan u^2 \Rightarrow$  原积分  $= 2 \int \frac{u^2}{1+u^4} du$ . 使用对偶积分. 记  $I = \int \frac{u^2}{1+u^4} du, J = \int \frac{1}{1+u^4} du, I+J = \int \frac{1+u^2}{1+u^4} du = \int \frac{1+1/u^2}{u^2+1/u^2} du = \int \frac{1}{(u+1/u)^2-2} d(u+1/u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}}) + C_1, I-J = \int \frac{u^2-1}{u^4+1} du = \int \frac{1-1/u^2}{u^2+1/u^2} du = \int \frac{1}{(u+1/u)^2-2} d(u+1/u) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log |\frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}}| + C_2$ . 从而  $I = \frac{I+J}{2} + \frac{I-J}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log |\frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}}| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2}\tan x}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log |\frac{\tan x-\sqrt{2}\tan x+1}{\tan x+\sqrt{2}\tan x+1}| + C$ .
- (3)  $= \int \frac{e^x(1-x^2)+e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} de^x + \int \frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \int e^x d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \int \frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx + C = e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$ .
- (4)  $= \frac{1}{2} \int \sqrt{x^4+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} d(x^2+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(x^2+\frac{1}{2})\sqrt{x^4+x^2} - \frac{1}{16} \log |x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2}| + C$ .

$$(5) = \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{x^3(x^3+2)} = \frac{1}{6} \int \frac{dx^3}{x^3} - \frac{dx^3}{x^3+2} = \frac{1}{6} \log \left| \frac{x^3}{x^3+2} \right| + C.$$

$$(6) = \frac{1}{3} \int \arctan x dx^3 = \frac{1}{3} x^3 \arctan x + C - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} x^3 \arctan x + C - \frac{1}{6} \int \frac{x^2 dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{3} x^3 \arctan x + C - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \log |1+x^2|.$$

$$(7) = \int \frac{1}{(1-\sin^2 x)^2} d \sin x = \frac{1}{4} \log \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + \frac{\sin x}{2(1-\sin^2 x)} + C. \text{ 最后一个等号是积分 } \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt, \text{ 注意到 } \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{t}{1-t^2} - \int t d \frac{1}{1-t^2} + C = \frac{t}{1-t^2} - \int \frac{2t^2}{(1-t^2)^2} dt + C = \frac{t}{1-t^2} + \int \frac{2}{1-t^2} dt - \int \frac{2}{(1-t^2)^2} dt + C \Rightarrow \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t^2} dt + \frac{t}{2(1-t^2)} + C = \frac{1}{4} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{t}{2(1-t^2)} + C.$$

$$(8) x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt, \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sin t} dt = - \int \frac{d \cos t}{\sin^2 t} = - \int \frac{d \cos t}{1-\cos^2 t} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-\cos t}{1+\cos t} \right| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{(1-x)+(1+x)-2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{(1-x)+(1+x)+2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \right| + C = \log \left| \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} \right| + C.$$

5. 由连续性和积分中值定理,  $\exists \xi \in [0, 1]$  使得  $|f(\xi)| = \int_0^1 |f(t)| dt$ . 从而  $\int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f'(t)| dt \geq |f(\xi)| + \int_\xi^x |f'(t)| dt \geq |f(\xi)| + \left| \int_\xi^x f'(t) dt \right| = |f(\xi)| + |f(x) - f(\xi)| \geq |f(x)|$ . 等号处处成立意味着  $f'(x) = 0$ , 这也意味着  $f(x) \equiv C$ .

6.  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 1/x_n) \geq 1$ .  $x_n \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(1/x_n - x_n) \leq 0$ . 说明单调递减有下界, 两边求极限知答案是 1.

7.  $p(x+1) - p(x) = \int_x^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}} \in \left[ \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3+2021}}, \frac{1}{\sqrt{x^3+2021}} \right]$ . 令  $g(x) = p(x+1) - p(x) - \sin x, g(2k\pi) > 0, g(2k\pi + \pi/2) < 0$ , 然后用介值定理.

8. 反证法, 如果任意区间都有点  $f(x) \leq 0$ , 那么 Riemann 和的极限怎么可能  $> 0$ ? (我就偏偏取那个  $\leq 0$  的点)

9. 负的 Riemann 函数可积, 但取整后变成不可积的 Dirichlet 函数.

10. 由于  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$ , 从而存在零点  $\alpha \in (0, \pi)$ . 再考虑  $\int f(x) \sin(x - \alpha) dx = 0$ , 知如果只有一个零点, 那么这个积分不可能为 0 (注意到  $f(x) \sin(x - \alpha)$  在只有一个零点  $x = \alpha$  时是始终同号的).

11.  $\int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx \geq 0$  对于  $\forall t \in \mathbb{R}$  恒成立. 若  $\int_a^b g^2(x) dx = 0$  则不等式左右两边都是 0. 对于其余情况, 这是关于  $t$  的一元二次不等式, 因此  $\Delta \leq 0 \Rightarrow 4 \left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 - 4 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \leq 0$ . 取等号条件是  $f(x) = Cg(x)$ .

12. 放大或缩小  $f(x), g(x)$  的若干倍数不影响不等式结果, 因此我们设  $\int f^p(x) dx = \int g^q(x) dx = 1$ . 注意到  $\frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) \leq \log \left( \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ . 从而  $\int f(x)g(x) dx \leq \int \frac{f^p(x)}{p} dx + \int \frac{g^q(x)}{q} dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

13.  $\int_a^b (f+g)^p dx = \int_a^b (f+g)^{p-1} f dx + \int_a^b (f+g)^{p-1} g dx$  利用上一问结论  $\leq \left[ \int_a^b (f+g)^p dx \right]^{(p-1)/p} \left[ \int_a^b f^p dx \right]^{1/p} + \left[ \int_a^b (f+g)^p dx \right]^{(p-1)/p} \left[ \int_a^b g^p dx \right]^{1/p} \Rightarrow \left[ \int_a^b (f+g)^p dx \right]^{1/p} \leq \left[ \int_a^b f^p dx \right]^{1/p} + \left[ \int_a^b g^p dx \right]^{1/p}$ .

14. 考虑  $\phi(x) = f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ . 从而  $\int_a^b f^2(x) dx = \frac{1}{b-a} \left[ \int_a^b f(t) dt \right]^2 \Rightarrow \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b 1 dt = \left[ \int_a^b f(t) dt \right]^2$ . 由 Cauchy 不等式取等条件知  $f(x) \equiv C$ .

15. 这个题提醒大家很多时候感觉虽然可靠, 但要严格说明依然应该使用  $N-\epsilon$  语言.  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\epsilon) < a_n < n^\alpha(1+\epsilon)$ . 从而存在足够大的  $n$ , 使得  $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \dots + N^\alpha) < \epsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \dots + a_N) < \epsilon, \left| \frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \dots + (a_n - n^\alpha)] \right| \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[(N+1)^\alpha + \dots + n^\alpha] \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha] = \epsilon \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} \right)^\alpha \rightarrow \epsilon \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{\epsilon}{\alpha+1}$ .

这意味着当  $n$  足够大时,  $\frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n a_i$  和  $\frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha$  差不多. 因此原极限是  $\frac{1}{\alpha+1}$ .

16. 通过平移只需证明  $f'(a) > 0, f'(b) < 0$ , 证明存在  $f'(c) = 0$ .  $f'(a) > 0$  说明一定有数  $x > a$  使得  $f(x) > f(a)$ ,  $f'(b) < 0$  说明一定有数  $x < b$  使得  $f(x) > f(b)$ . 闭区间上的连续函数必有最大值, 从而最大值点的导数一定为 0 (利用左导数  $\geq 0$ , 右导数  $\leq 0$ ). 这就是  $f'(c) = 0$ .

17.  $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ .  $g(a) = g(b) = f(a)$ , 由 Rolle 微分中值定理必有  $g'(x_0) = 0$ , 此即  $f(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

18. 这个题告诉我们求导和极限未必可交换.  $\forall x \in [0, 1], f_n(x) \rightarrow 0 \Rightarrow \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$ . 但是如果我们逐项积分,  $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 - e^{-n} - ne^{-n} \rightarrow 1$ .

19.  $f'_n(x) = \cos(nx), f'_n(0) \rightarrow 1$ , 而对于  $x \neq 0$  其极限不存在.  $f_n(x) \rightarrow 0$  对于所有  $x \in \mathbb{R}$ , 从而  $\left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right]' = 0$ .

20. 函数可积则有界, 从而  $\left| \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right| \leq M\Delta x \Rightarrow$  连续. 若  $f(x)$  连续则  $\exists \Delta x > 0$  使得对  $\forall t \in [x, x+\Delta x]$  成立  $|f(t) - f(x)| \leq \epsilon$ , 从而  $\left| \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} - f(x) \right| = \left| \frac{\int_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x)) dt}{\Delta x} \right| \leq \frac{\epsilon \Delta x}{\Delta x} = \epsilon$ .

### 6.3 补充 (不要求掌握!)

测度: 我们把满足以下性质的非负集函数 (定义域是集合, 且函数值非负) 叫做测度:  $m(\emptyset) = 0$ , 并且对于任意不交的集合  $A_1, A_2, \dots, \sum_{i=1}^\infty m(A_i) = m(\cup_{i=1}^\infty A_i)$ . 外测度: 把上述不交条件去掉, 并把  $=$  改成  $\geq$ .

$\pi$  系: 一族集合构成的集合  $\mathcal{P}$ , 且满足  $\forall A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$ .

半环:  $\mathcal{P}$  是  $\pi$  系, 若  $A, B \in \mathcal{P}, A \supset B$ , 则存在有限个两两不交的集合  $C_1, C_2, \dots, C_k$  使得  $A \setminus B = \cup_k C_k$ .

$\sigma$ -域: 如果  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{P}; A \in \mathcal{P} \Rightarrow A^c \in \mathcal{P}; A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \Rightarrow \cup_i A_i \in \mathcal{P}$ , 则称  $\mathcal{P}$  是  $\sigma$ -域.

容易验证所有形如  $(a, b], a, b \in \mathbb{R}$  的区间构成的集合是半环, 定义  $m((a, b]) = b - a$ , 这是半环上的外测度. 由测度扩张定理, 这个外测度可以扩张到  $\sigma(\{(a, b]\})$  上. 利用 Caratheodory 条件可以完备化. 这个测度成为 Lebesgue 测度.

更多关于 Lebesgue 测度的知识: Cantor 集, 胖 Cantor 集, Cantor-Lebesgue 函数, 等等.

Lebesgue 定理:  $f(x) \in R[a, b]$  当且仅当  $m(\{x : f(x) \text{ 在 } x \text{ 处间断}\}) = 0$ , 其中  $m$  是 Lebesgue 测度.

证明. “ $\Rightarrow$ ” 对于区域  $[a, b]$  的任何分割  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , 定义  $\omega_i = \sup\{|f(x) - f(y)|, x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}, \Delta_i = |x_i - x_{i-1}|, \Delta = \max\{\Delta_i\}$ . 因而  $f$  是 Riemann 可积等价于  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i \omega_i \Delta_i = 0$ . 再定义  $\omega_\epsilon(f) = \{x : \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y \in [x-\delta, x+\delta]} |f(y) - f(x)| \geq \epsilon\}$ . 先假设如果  $f$  的不连续点集测度为正, 那么存在  $\epsilon_0$  使得  $\omega_{\epsilon_0}(f) > 0$ . 对任意分割, 我们有  $\sum_i \omega_i \Delta_i \geq \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap \omega_{\epsilon_0}(f) \neq \emptyset} \omega_i \Delta_i \geq \epsilon_0 \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap \omega_{\epsilon_0}(f) \neq \emptyset} (x_i - x_{i-1}) \geq \epsilon_0 m(\omega_{\epsilon_0}(f))$ . 这表明  $f$  不是 Riemann 可积的.

因此如果  $f$  是 Riemann 可积的, 那么不连续点集必定是零测集.

“ $\Leftarrow$ ” 现在我们假设  $\omega_\epsilon(f)$  是零测集, 我们证明  $f$  是 Riemann 可积的. 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在闭集  $A_\epsilon \subset [a, b]$  使得  $f$  在  $A_\epsilon$  上连续. 对  $x_0 \in A_\epsilon$ , 存在  $\delta > 0$  使得  $|f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . 由于  $A_\epsilon$  是有界闭集, 因此存在有限个开区间  $(x_l - \frac{1}{2}\delta_l, x_l + \frac{1}{2}\delta_l)$  覆盖住  $A_\epsilon$ . 取  $\delta = \min\{\frac{1}{3}\delta_l\}$ . 这表明对于任意  $x_0 \in A_\epsilon$ , 必定有某个  $x_l \in A_\epsilon$ , 使得  $x_0 \in (x_l - \frac{1}{2}\delta_l, x_l + \frac{1}{2}\delta_l)$ . 这表明  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (x_l - \delta_l, x_l + \delta_l)$ , 因而有  $|f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . 取  $[a, b]$  分割使得  $\Delta < \frac{1}{2}\delta$ . 现在我们来考虑  $\sum_i \omega_i \Delta_i$ . 如果区间  $[x_{i-1}, x_i]$  与  $A_\epsilon$  的交集非空, 含有某个点  $y_0 \in [x_{i-1}, x_i] \cap A_\epsilon$ , 那么对于任意  $x, y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$  都有  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ . 注意到  $[x_{i-1}, x_i] \subset [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ , 故而  $\omega_i < \epsilon$ . 这样我们可以估计  $\sum_i \omega_i \Delta_i = \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap A_\epsilon \neq \emptyset} \omega_i \Delta_i + \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap A_\epsilon = \emptyset} \omega_i \Delta_i \leq \epsilon(b-a) + 2Mm([a, b] \setminus A_\epsilon)$ . 这里  $M$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的上界.

这就表明如果  $f$  的不连续点零测且  $f$  有界, 则  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积.

极限和积分可交换的三大定理 (Lebesgue 可积意义下, 但是我们有定理保证 Riemann 可积一定是 Lebesgue 可积):

**Fatou 引理:** 如果  $f_n \geq 0$ , 那么  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n dx \geq \int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n dx$ .

**单调收敛定理:** 如果  $f_n \geq 0$  且  $f_n \uparrow f$ , 那么  $\int f_n dx \uparrow \int f dx$ .

**控制收敛定理:** 如果  $f_n \rightarrow f$  几乎处处成立,  $|f_n| \leq g$  对于所有  $n$  成立, 并且  $g$  可积, 那么  $\int f_n dx \rightarrow \int f dx$ .

## 7 第 7 次习题课: 定积分及其应用

### 7.1 问题

- 判断对错. 设  $f(x)$  和  $g(x)$  是两个给定的函数, 记  $f_1(x) = f(x) + g(x), f_2(x) = f(x)g(x), f_3(x) = |f(x)|, f_4(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ . (1) 假如  $f(x)$  和  $g(x)$  均在点  $x = x_0$  处可导. 问  $f_1, f_2, f_3, f_4$  中哪些函数在  $x_0$  处一定可导, 哪些不一定? (2) 假如  $f(x)$  和  $g(x)$  均在区间  $[a, b]$  可积, 问  $f_1, f_2, f_3, f_4$  中哪些函数在区间  $[a, b]$  一定可积, 哪些不一定?
- 判断对错.  $f_1, f_3 \in C[0, 1], f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x), \forall x \in [0, 1]$ , 且  $\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 f_3(x) dx$ . 则  $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f_3(x)$ .
- 是否存在  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $f$  在所有点上局部无界?
- 证明  $x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内有且仅有一个根  $x_n$ , 并计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .
- 求积分.  $\int_{-1}^1 \frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2} dx, \int_0^2 |x^2 - 1|e^{-|x-1|} dx, \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx, \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^2 + 1) \sin^3 x dx, \int_0^1 \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx, \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx$ .
- 设函数  $f(x) \in C[0, 1]$ , 且  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = 0$ . 证明  $f(x)$  在  $[0, 1]$  中至少有两个零点.
- 设  $0 < \lambda < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \dots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{1-\lambda}$ .
- 求直角坐标  $(x, y)$  给出的抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  上从点  $(0, 0)$  到点  $(1, \frac{1}{2})$  的弧长.
- 设奇数  $n \geq 3$ , 求极坐标  $(r, \theta)$  给出的  $n$  叶玫瑰线  $r = \sin(n\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$  所围的有界图形的面积.
- 证明不等式. (1)  $\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . (2)  $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx < \frac{1}{10}$ .
- $f(x) \in C[-1, 1]$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \rightarrow f(0)$ .
- $f(x) \in C[-1, 1]$ , 证明  $\lim_{h \rightarrow 0+0} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x) dx \rightarrow \pi f(0)$ .
- 推导重力场中粒子数量密度的分布率  $n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$ , 其中  $T$  是温度,  $k_B$  是玻尔兹曼常量.

## 7.2 解答

- (1)  $f_1, f_2$  一定可导, 依据导数四则运算.  $f_3$  不一定可导,  $f(x) = x$ .  $f_4$  不一定可导,  $f(x) = x, g(x) = -x$ . (2) 均可积.
- 正确. 用反证法, 如果  $f_3(x_0) > f_1(x_0)$ , 由连续性存在  $\epsilon > 0$  和  $x_0$  的某个邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  使得  $f_3(x) > f_1(x) + \epsilon$ .
- 存在. 考虑  $f(x) = \begin{cases} p, & x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ .
- 设  $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$ .  $f_n(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, f(1) = n > 1$ , 再由  $f_n(x)$  单调递增和连续性知有且仅有一个根. 由于  $f_n(\frac{1}{2} + \epsilon) = (\frac{1}{2} + \epsilon)^{\frac{1-(\frac{1}{2}+\epsilon)^n}{\frac{1}{2}-\epsilon}} \rightarrow \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon} > 1$ , 因此当  $n$  足够大时  $f_n(x_n) = 1 < f_n(\frac{1}{2} + \epsilon) \Rightarrow x_n < \frac{1}{2} + \epsilon$ , 再根据极限的  $N-\epsilon$  定义.
- (1) 注意到  $\frac{x^2 \arcsin x}{1+x^2} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{1+x^2} dx = 0$ . 从而原积分  $= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 2 - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 2 - (\arctan x)|_{-1}^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$ .  
(2)  $= \int_0^1 (1-x^2)e^{x-1} dx + \int_1^2 (x^2-1)e^{1-x} dx = (-x^2+2x-1)e^{x-1}|_0^1 + (-x^2-2x-1)e^{1-x}|_1^2 = 4 - \frac{8}{e}$ .  
(3)  $= 2 \int_0^\pi \sqrt{1-\sin 2x} dx = 2 \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x} dx = 2(\int_0^\frac{\pi}{4} \cos x - \sin x dx + \int_\frac{\pi}{4}^\pi \sin x - \cos x dx) = 4\sqrt{2}$ .  
(4) 这是奇函数, 积分自然为 0.  
(5)  $= x \log(x + \sqrt{x^2+1})|_0^1 - \int_0^1 x d \log(x + \sqrt{x^2+1}) = \log(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \log(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{x^2+1})|_0^1 = \log(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$ .  
(6)  $= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} dx = (\arcsin x - \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2})|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ .  
(7) 令  $x = \sin t$ , 则原积分  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt \sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 t dt$ .  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t dt \cos t =$  分部积分  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin^4 t \cos^2 t dt = 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 t dt \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = \frac{5}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt$ . 从而原积分  $= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt =$  分部积分  $= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{32}$ .  
(8)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} d \sin x = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \log(1+t^2)|_0^1 = \frac{\log 2}{2}$ .  
6.  $\int_0^1 f(x) dx = 0 \Rightarrow$  一个零点  $\alpha$ .  $\int_0^1 (x-\alpha)f(x) dx = 0 \Rightarrow$  另一个零点  $\beta$  (若不存在则  $(x-\alpha)f(x)$  保号).
- WLOG 令  $a = 0$ . 由定义  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n| < \epsilon; \exists M, \forall n > M, |\lambda^n| < \epsilon$ . 设  $\max_n |a_n| = A$  (极限存在蕴含含有界). 选择  $n > N + M$ . 从而  $|a_n + \lambda a_{n-1} + \cdots + a_N \lambda^{n-N}| < \epsilon |1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-N}| < \frac{\epsilon}{1-\lambda}$ , 且  $|a_{N-1} \lambda^{n-N+1} + \cdots + a_0 \lambda^n| < A \lambda^{n-N+1} \frac{1-\lambda^{N+1}}{1-\lambda} < \frac{A}{1-\lambda} \epsilon$ . 从而整个求和  $< \frac{A+1}{1-\lambda} \epsilon$ .
- $\int_0^1 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = [\frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{1+x^2})]|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$ .
- $S = n \times \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 n\theta d\theta = (t = n\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} (t - \frac{1}{2} \sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ .
- (1) 在区间  $[0, 1]$  上成立  $\sqrt{2} \leq \sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} \leq \frac{3}{2}$ . (2) 注意到  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$ , 从而  $\frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx < \int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{10}$ .
- 往证  $\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \rightarrow 0$ . 使用  $N-\epsilon$  语言.  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x)-f(0)| < \epsilon$ . 设  $\max |f(x)| = M$ . 从而原式  $= \frac{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3$ .  $|I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \epsilon$ .  $|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} (\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2})^n$ . 注意到  $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$ , 从而可以取足够大的  $n$  使得  $|I_2| < \epsilon$ . 类似地放缩  $I_3$ , 从而  $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$ .
- 只需证明  $\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} [f(x)-f(0)] dx \rightarrow 0$ .  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x)-f(0)| < \epsilon$ . 设  $\max |f(x)| = M$ . 从而原式  $= \int_{-\delta}^\delta \frac{h}{x^2+h^2} [f(x)-f(0)] dx + \int_{-1}^{-\delta} \frac{h}{x^2+h^2} [f(x)-f(0)] dx + \int_\delta^1 \frac{h}{x^2+h^2} [f(x)-f(0)] dx := I_1 + I_2 + I_3$ . 类似的有  $|I_1| \leq \epsilon \int_{-\delta}^\delta \frac{h}{x^2+h^2} dx < \epsilon \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} dx = \epsilon (\arctan \frac{x}{h})|_{-1}^1 < \pi \epsilon$ .  $|I_2| \leq 2M \int_{-1}^{-\delta} \frac{h}{x^2+h^2} dx \leq 2M(1-\delta) \frac{h}{\delta^2+h^2} < 2M \frac{1-\delta}{\delta^2} h < \epsilon$  只要  $h$  足够接近 0. 同理  $|I_3| < \epsilon$ . 从而  $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$ .
- 由基本力学知识, 重力场中的压力差  $dF$  托起了单位体积内的粒子重力  $dG$ . 从而  $dF + dG = 0 \Rightarrow Sdp + \rho g Sdz = 0 \Rightarrow dp + nmgdz = 0$ . 由  $p = nk_B T$  知  $dp = k_B T dn \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_B T} dz$ . 两边积分知  $\log n(z) - \log n(0) = \frac{-mgz}{k_B T} \Rightarrow n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$ .

## 7.3 补充 (不要求掌握!)

计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-x^2} dx$ . (也写成  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ ). 这和正态分布的归一化因子有关.  
证法 1: 使用二元积分.  $(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy =$  二元积分换元公式, 改写成极坐标  $= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \times (-\frac{1}{2} e^{-r^2})|_0^\infty = \pi$ . 从而  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ . 我们回顾

标准正态分布  $\mathcal{N}(0, 1)$  的密度函数是  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , 这意味着  $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$  (概率的归一化!).

证法 2: 使用极限逼近. 我们来证明:  $\forall x \in [-A, A], (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \Rightarrow e^{-x^2}$ . 其中,  $\Rightarrow$  表示极限的一致性 (一致收敛). 我们都知道  $(1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \rightarrow e^{-x^2}$ , 但是不同的  $x$  可能会有不同的收敛速度. 对于某个  $x_1$ , 可能从第  $N_1$  项开始有  $|f_n(x_1) - f(x_1)| < \epsilon$ , 而对于某个  $x_2$ , 可能从第  $N_2$  项开始有  $|f_n(x_2) - f(x_2)| < \epsilon, \dots$ . 在给出一致收敛的正式定义前, 我们先看几个例子.

例 1:  $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}, f(x) \equiv 0$ . 容易看出来  $f_n \rightarrow f$ , 且对于不同的  $x$ , 他们的收敛步调一致: 因为只要  $n > \frac{1}{\epsilon}$ , 不管  $x$  的值都有  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

例 2:  $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1], f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ . 容易看出来  $f_n \rightarrow f$ , 但对于不同的  $x$ , 他们的收敛步调并不

一致: 距离 1 更近的  $x$  收敛速度更快! 当  $x < \frac{1}{2}$  时, 只要  $n > \log_2(\frac{1}{\epsilon})$  就有  $x^n < \epsilon$ ; 但是当  $x = 1 - \frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})}$  时,  $x^n \approx (1 - \frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})})^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \approx \frac{1}{e}$  距离  $\epsilon$  还远着呢, 更有  $\lim_{x \rightarrow 1-0} x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \rightarrow 1 \Rightarrow \exists \delta, \forall x \in (1 - \delta, 1), x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} > 1 - \epsilon$ . 前面的  $f_n(x)$  已经很小于  $\epsilon$  了, 而后面的一些  $f_n(x)$  甚至还在原地打转 ( $> 1 - \epsilon$ )! 下面我们给出定义.

一致收敛: 我们说在区间  $[a, b]$  上  $f_n(x)$  一致收敛到  $f(x)$  (记作  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ), 意味着  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , 使得  $\forall n > N, \forall x \in [a, b], |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

如果在有限区间上收敛具有一致性, 那么积分和极限顺序可交换. 因为  $|\int_a^b f_n(x) - f(x) dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \epsilon(b-a) \rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ , 即是  $\lim \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim f_n(x) dx$ .

回到原题, 往证  $\forall x \in [-A, A], (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \Rightarrow e^{-x^2}$ . 注意到  $(1 + \frac{x^2}{n})^n \geq 1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k$ . 由带 Lagrange 余项的泰勒展开知  $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} t^{k+1} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!} t^{k+1}$ , 其中  $f(t) = e^t, \xi \in (0, t)$ . 令  $t = x^2$  知  $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!} x^{2k+2}$ . 从而对于  $\forall x \in [-A, A]$ , 成立估计  $e^{x^2} - 1 - x^2 - \dots - \frac{x^{2k}}{k!} =$

$\frac{e^\xi}{(k+1)!} x^{2k+2} \leq \frac{e^{A^2} A^{2k+2}}{(k+1)!} \rightarrow 0$  当  $k \rightarrow \infty$  时 (利用  $n! > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$ ). 这里的估计有一致性! 从而存在  $K, \forall k > K, x \in [-A, A]$ , 成立  $|e^{x^2} - 1 - x^2 - \dots - \frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$ . 再回头来看  $1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k$  和  $1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}$ . 他们之间的差是一个  $2k$  阶关于  $x$  的多项式, 且  $< \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} x^{2i} < \frac{1}{n} (A^2 + A^4 + \dots + A^{2k})$ . 这里的估计又有一致性! 所以说, 当  $n$  足够大时,  $\forall x \in [-A, A]$ ,

成立  $|[1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k] - [1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$ . 整理一下思路,  $\forall \epsilon > 0, \exists K$ , 使得  $\forall k > K, \forall x \in [-A, A]$ , 成立  $|e^{x^2} - 1 - x^2 - \dots - \frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$ .  $\exists N$ , 使得  $\forall n > N, \forall x \in [-A, A]$ , 成立  $|[1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k] - [1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$ .

这样的话就有  $e^{x^2} - (1 + \frac{x^2}{n})^n < e^{x^2} - [1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k] < \{e^{x^2} - [1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}]\} + \{[1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}] - [1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k]\} < 2\epsilon$ . 这样  $(1 + \frac{x^2}{n})^n \Rightarrow e^{x^2}$ . 取倒数后当然也成立, 这和极限的除法是一个道理, 留作练习.

又注意到当  $A \rightarrow \infty$  时,  $\int_A^\infty (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} dx \leq \int_A^\infty (1 + x^2)^{-1} dx = \arctan x|_A^\infty \rightarrow 0$  对  $n$  有一致性. 这说明我们可以取足够大的  $A$  使得  $\int_A^\infty e^{-x^2} dx < \epsilon$ , 且  $\forall n, \int_A^\infty (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} dx < \epsilon$ . 这样一来  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} dx =$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + \tan^2 t)^n} d\sqrt{n} \tan t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \alpha d\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . 最后一步使用了 Wallis 公式, 其推导就是通过分部积分计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  和  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ . 从而  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

## 8 第 8 次习题课: 微分中值定理, 洛必达法则

### 8.1 问题

1.  $f(x) \in D[a, b], f(a) = f(b) = 0$ , 证明  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$ .
2.  $f(x) \in D[0, 1], f(1) = 0$ , 证明  $\forall k > 0, \exists \xi \in (0, 1)$  使得  $kf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ .
3.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可微,  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明  $\forall x \in (a, b), \exists \xi \in (a, b)$  使得  $f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$ .
4. 设  $f(x)$  在  $[0, \infty)$  上二阶可导,  $f(0) = 0$ , 证明  $\forall x > 0, \exists \xi \in (0, x)$  使得  $f'(x) - \frac{f(x)}{x} = \xi f''(\xi)$ .
5. 设  $P_n(x)$  为  $n$  次多项式, 证明  $e^x = P_n(x)$  至多有  $n+1$  个解.
6.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导, 且  $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$ . 证明存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'''(\xi) = 0$ .
7.  $f(x) > 0, x \in [a, b], f''(x) \geq 0$ , 且  $f'(a) = f'(b) = 0$ . 证明  $\exists \xi \in (a, b)$  使得  $f(\xi)f''(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$ .
8. 设  $f(x)$  是定义在  $(0, \infty)$  上的二阶可导函数,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在有限, 且  $f''(x)$  有界. 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .
9. 非常值函数  $f(x) \in C[-1, 1]$ , 在  $(-1, 1)$  上二阶可导,  $f'(0) = 0$ . 证明存在  $\xi \in (-1, 1)$  使得  $|f''(\xi)| > |f(1) - f(-1)|$ .
10. 证明等式  $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$ .
11. 设  $0 < b < a$ , 证明  $\frac{a-b}{a} < \log \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ .

12. 设  $0 < a < b$ , 证明  $(1+a)\log(1+a) + (1+b)\log(1+b) < (1+a+b)\log(1+a+b)$ .
13. 设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上二阶可导, 且  $f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 3$ , 证明存在  $c \in (0, 2)$  使得  $f''(c) = 4$ .
14. 证明: 当  $x \geq 0$  时, 等式  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$  中的  $\theta(x)$  满足  $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$ .
15.  $f(x) \in D(\mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \exists$ , 证明存在  $c$  使得  $f'(c) = 0$ .
16. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{x-1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x - \sin^2 x}{x^4}, \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}), \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin x^3})$ .
17.  $m, n, k \in \mathbb{N}_+$ , 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 ((1 + \frac{m}{n})^k - (1 + \frac{k}{n})^m)$ .
18. 设  $f(x)$  在  $(0, \infty)$  上二阶可微, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2f'(x) + f''(x)] = l$ , 则必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .
19. 设  $f(x)$  在  $(0, \infty)$  上  $n$  阶可微, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = B$ , 证明  $B = 0$ .
20. 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = 1$ .
21.  $x_0 \in (0, 1), x_n = \sin(x_{n-1})$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}x_n = \sqrt{3}$ .

## 8.2 解答

1. 令  $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$ . 则  $g(a) = g(b) = 0$ , 由 Rolle 微分中值定理,  $\exists \xi \in (a, b)$  使得  $g'(\xi) = 0 = e^{-\lambda \xi}(f'(\xi) - \lambda f(\xi)) \Rightarrow f'(\xi) = \lambda f(\xi)$ .
2. 令  $g(x) = x^k f(x)$ , 则  $g(0) = g(1) = 0$ , 由 Rolle 微分中值定理,  $\exists \xi \in (0, 1)$  使得  $g'(\xi) = 0 = \xi^k f'(\xi) = k\xi^{k-1}f(\xi) \Rightarrow kf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ .
3. 设  $m = \frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$ , 并设  $g(t) = f(t) - \frac{m}{2}(t-a)(t-b)$ . 往证存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $m = f''(\xi)$ . 易知  $g(a) = 0, g(b) = 0, g(x) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$  使得  $g''(\xi) = 0 = f''(\xi) - m \Rightarrow f''(\xi) = m$ .
4. 由 Lagrange 微分中值定理,  $\exists \xi \in (0, x)$  使得  $\frac{xf'(x)-f(x)}{x} = \frac{[xf'(x)-f(x)]-[0f'(0)-f(0)]}{x-0} = \xi f''(\xi)$ .
5. 令  $g(x) = e^x - P_n(x)$ , 则  $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ . 由于  $g^{(n+1)}(x) = e^x > 0$ , 从而  $g^{(n)}(x)$  至多有 1 个零点 (否则由 Rolle 微分中值矛盾),  $g^{(n-1)}(x)$  至多有 2 个零点,  $\dots$ ,  $g(x)$  至多有  $n+1$  个零点.
6.  $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (a, b)$  使得  $f'(x_1) = 0$ . 又因为  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 从而存在  $x_2 \in (a, x_1), x_3 \in (x_1, b)$  使得  $f''(x_2) = f''(x_3) = 0$ . 从而存在  $\xi \in (x_2, x_3) \subset (a, b)$  使得  $f'''(\xi) = 0$ .
7. 令  $g(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$ . 则  $g(a) = 0, g(b) = 0$ , 从而  $\exists \xi \in (a, b)$  使得  $g'(\xi) = 0 = \frac{f^2(\xi)f''(\xi) - 2f(\xi)f'(\xi)^2}{f^4(\xi)} \Rightarrow f(\xi)f''(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$ .
8. 反证法. 若结论不对, 则存在  $\epsilon_0 > 0$  使得  $\forall K \in (1, +\infty)$ , 存在  $x > K$  满足  $|f'(x)| > \epsilon_0$ . 设  $|f''(x)| \leq M, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ . 取  $\delta_0 = \min\{1, \frac{\epsilon_0}{2M}\}$ , 则对  $\epsilon_0\delta_0 > 0$ , 存在  $K_0 \in (0, \infty)$ , 使得  $\forall x > K_0$ , 有  $|f(x) - a| < \frac{\epsilon_0\delta_0}{2}$ . 从而  $\forall x_1, x_2 > K_0$ , 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon_0\delta_0$ . 对  $K_0$ , 存在  $x_0 > K_0$  使得  $|f'(x_0)| > \epsilon$ . 不妨设  $f'(x_0) > \epsilon$ , 则对  $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ , 由微分中值定理, 存在介于  $x$  和  $x_0$  之间的  $\xi_x$  使得  $|f'(x) - f'(x_0)| = |f''(\xi_x)(x - x_0)| \leq M \cdot \frac{\epsilon}{2M} \leq \frac{\epsilon_0}{2}$ . 从而  $f'(x) > \frac{\epsilon_0}{2}$ . 再由微分中值定理, 存在  $\xi_2 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$  使得  $f(x_0 + \delta_0) - f(x_0 - \delta_0) = f'(\xi_2) \cdot 2\delta_0 > \frac{\epsilon_0}{2} \cdot 2\delta_0 = \epsilon_0\delta_0$ , 矛盾.
9. 不妨设  $f(1) \geq f(-1)$ . 采用反证法, 设  $k = f(1) - f(-1)$ , 且  $|f''(x)| \leq k, \forall x \in (-1, 1)$ . 从而根据微分中值定理,  $\forall x \in (0, 1), f'(x) \leq kx$ , 积分得到  $f(x) - f(0) \leq \int_0^x f'(t)dt \leq \int_0^x ktdt = \frac{kx^2}{2}$ . 令  $x \rightarrow 1$ , 则  $f(1) - f(0) \leq \frac{k}{2}$ . 类似有  $f(0) - f(-1) \leq \frac{k}{2}$ . 由于  $k = f(1) - f(-1)$ , 从而  $f(1) - f(0) = f(0) - f(-1) = \frac{k}{2}$ . 容易证明如果  $\exists x_0 \in [0, 1)$  使得  $f'(x_0) < kx_0$ , 那么  $f(1) - f(0) < \frac{k}{2}$ , 矛盾. 从而  $f'(x) \equiv kx, \forall x \in [0, 1)$ . 同理  $f'(x) \equiv -kx, \forall x \in (-1, 0]$ . 从而  $f''(0) = k = -k$ , 这意味着  $k = 0, f(x)$  是常值函数, 矛盾.
10. 首先两边求导验证导数相等, 然后  $\arctan 0 = \arcsin 0$  (意味着不相差常数).
11. 原命题转化证明  $\frac{1}{a} < \frac{\log a - \log b}{a-b} < \frac{1}{b}$ , 令  $f(x) = \log x$ , 利用 Lagrange 微分中值定理.
12. 设  $f(x) = (1+x)\log(1+x)$ , 利用 Lagrange 微分中值定理知  $\frac{(1+a+b)\log(1+a+b) - (1+b)\log(1+b)}{(a+b)-b} = 1 + \log(1+c)$ , 其中  $c \in (b, a+b)$ . 注意到  $\log(1+c) > \log(1+a)$  和  $a > \log(1+a)$ , 从而  $(1+a+b)\log(1+a+b) - (1+b)\log(1+b) = a + a\log(1+c) > \log(1+a) + a\log(1+a) = (1+a)\log(1+a)$ .
13. 构造  $\phi(x) = f(x) - 2x^2 + 3x - 1$ . 则  $\phi(0) = \phi(1) = \phi(2) = 0$ , 由 Rolle 微分中值定理, 存在  $c \in (0, 2)$  使得  $\phi''(c) = 0 \Rightarrow f''(c) = 4$ .
14. 可以解出  $\theta(x) = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{x(x+1)} - 2x)$ . 当  $x \geq 0$  时  $\sqrt{x(x+1)} > x$  从而  $\theta(x) \geq \frac{1}{4}$ , 再利用均值不等式  $\sqrt{x(x+1)} \leq \frac{x+(x+1)}{2}$  知  $\theta(x) \leq \frac{1}{2}$ . 然后对  $x$  求极限.



15. 不妨设  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  且  $f(x)$  不为常数. 不妨设  $\exists x_0$  使得  $f(x_0) > l$ . 任取  $l < \eta < f(x_0)$ . 由连续函数的介值性知  $\exists \xi_1 \in (-\infty, x_0), \xi_2 \in (x_0, +\infty)$  使得  $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \eta$ . 然后利用 Rolle 微分中值定理.
16. (1)  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{x-1} = \exp(\lim_{x \rightarrow 0+0} (x-1) \log x) = \exp(\lim_{x \rightarrow 0+0} (e^{x \log x} - 1) \log x) \stackrel{\text{等价无穷小: } e^x - 1 \sim x}{=} \exp(\lim_{x \rightarrow 0+0} x \log^2 x) \stackrel{\text{倒数换元}}{=} \exp(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^2 x}{x}) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \exp(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x}{1}) = \exp(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x}{x}) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \exp(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}) = \exp(0) = 1.$
- (2)  $\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - 2 \sin x \cos x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x + x - 2 \sin x \cos^3 x}{4x^3} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + 1 - 2 \cos^4 x + 6 \sin^2 x \cos^2 x}{12x^2} = \frac{2}{3}.$
- (3)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x} = 0.$
- (4)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - x^3}{x^3 \sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - x^3}{x^6} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cos x^3 - 3x^2}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^3 - 1}{2x^3} \stackrel{\text{等价无穷小: } \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^6}{4x^3} = 0.$
17.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left( (1 + \frac{m}{n})^k - (1 + \frac{k}{n})^m \right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(1+mx)^k - (1+kx)^m}{x^2} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{km(1+mx)^{k-1} - km(1+kx)^{m-1}}{2x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \frac{km}{2} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{m(k-1)(1+mx)^{k-2} - k(m-1)(1+kx)^{m-2}}{1} = \frac{km(k-m)}{2}.$
18.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x [f(x) + f'(x)]}{e^x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x [f(x) + 2f'(x) + f''(x)]}{e^x} = l.$
19.  $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{B}{n!}.$  由极限的唯一性.
20. 这几个极限都是显然的, 只是用来告诉大家有时候会洛不出来或者洛错. 应用洛必达法则时必须验证条件, 比如说分子分母是否满足  $\frac{0}{0}$  或者  $\frac{\infty}{\infty}$ , 求导后极限是否存在等等.
21. 我们来证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n^2 = 3$ . 显然数列有下界 0, 且  $x_n = \sin x_{n-1} < x_{n-1}$  意味着单调递减, 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \exists$ , 两边求极限知  $x_n \rightarrow 0$ . 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1-n}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}}.$  因此我们来计算  $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{4x^3} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2 - 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}{12x^2} = \frac{1}{3}.$  综上所述  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n^2 = 3$ .

### 8.3 补充 (不要求掌握!)

参考 <https://wqgcx.github.io/courses/analysis1.pdf>.

## 9 第 9 次习题课: 泰勒公式, 函数的凹凸性

### 9.1 问题

- 在  $x = 0$  处做  $n$  阶带 Peano 余项的泰勒展开.  $\frac{1}{1+x}, \log(1+x), (1+x)^\alpha (\alpha \neq -1), \arctan x, \arcsin x, \sin^2(1+x^2), \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}.$  我们有了这些函数在 0 点处的泰勒展开式后, 便可以计算该点的  $n$  阶导数值 (只能计算该点, 不能得到通式!).
- 计算极限.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x} - \sqrt{x^2 - 2x}), \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (1 - n \sin \frac{1}{n}), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{x \sin^3 2x}, \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}) \frac{1}{x}.$
- 确定下列无穷小量是  $x$  的几阶无穷小量.  $e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x \sin x, \cos x - e^{-x^2/2}, \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}.$
- 设  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上有二阶导数, 且有  $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2}] = 0$ , 求  $f(0), f'(0), f''(0).$
- 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有三阶导数, 并且存在常数  $M_0, M_3 > 0$ , 使得  $\forall x \in \mathbb{R}$  成立  $|f(x)| \leq M_0, |f'''(x)| \leq M_3$ . 证明对任意  $x \in \mathbb{R}$  成立  $|f'(x)| \leq 4M_0^{\frac{2}{3}} M_3^{\frac{1}{3}}, |f''(x)| \leq 4M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{\frac{2}{3}}.$
- 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有  $n+1$  阶导数,  $f(x), f^{(n+1)}(x)$  有界, 证明  $f^{(i)}(x), i = 1, 2, \dots, n$  都有界.
- 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导,  $f(0) = f(1) = 0, \max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 2$ , 证明  $\min_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \leq -16.$
- $P_n(x)$  是一个  $n$  次多项式,  $P_n(a) > 0, P_n^{(k)}(a) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$ . 证明  $P_n(x)$  的所有实根都不超过  $a$ .
- 设  $y = \log \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ . 试求出该函数的定义域、极值点、单调区间、凹凸区间、拐点以及渐近线.
- 设  $\mathbb{R}$  上的连续函数  $f(x)$  满足  $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$ . 证明: 对于  $\forall t_1, \dots, t_n > 0$  只要满足  $t_1 + \dots + t_n = 1$ , 就有  $f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n).$
- 设  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \forall 0 < \lambda < 1$ . 证明  $f(x)$  在每个点处左右导数均存在 (但不一定相等), 从而连续.
- 证明积分 Jensen 不等式:  $f(x), g(x), p(x)$  连续,  $f(x)$  下凸,  $\int_a^b p(x)dx = 1$ , 则  $\int_a^b p(x)f(g(x))dx \geq f(\int_a^b p(x)g(x)dx).$
- 证明 KL 散度非负, 即  $\int p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx \geq 0$ , 其中  $p(x), q(x)$  连续且  $\int p(x)dx = \int q(x)dx = 1$ .

14. 设  $f(x) \in D[0, 1]$ , 且  $f(1) = 5 \int_0^{\frac{1}{5}} e^{x-1} f(x) dx$ . 证明存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f(\xi) + f'(\xi) = 0$ .
15. 设  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  内二阶可导, 且  $f(0) = f'(0) = 0, |f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)|, x \in (-1, 1)$ . 证明:  $\exists \delta > 0$  使得  $f(x) \equiv 0, \forall x \in (-\delta, \delta)$ .
16. 设非线性函数  $f(x) \in C[a, b], D(a, b)$ , 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .
17. 设  $f(x) \in D(a, b)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$ , 证明  $\forall M > 0, \forall \delta > 0, \exists \xi \in (b-\delta, b)$  使得  $f'(\xi) > M$ .
18. 设  $P(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的多项式, 证明: (1) 若  $P(x) + P'(x) \geq 0$  恒成立, 则  $P(x) \geq 0$ ; (2) 若  $P(x) - P'(x) \geq 0$  恒成立, 则  $P(x) \geq 0$ ; (3) 若  $P'''(x) - P''(x) - P'(x) + P(x) \geq 0$  恒成立, 则  $P(x) \geq 0$ .

## 9.2 解答

1. (1)  $\frac{1}{x+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$ . (2)  $\log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$ . (3)  $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n)$ .
- (4)  $\arctan x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$ . (5)  $\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_{-\frac{1}{2}}^k x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$ .
- (6)  $\sin^2(1+x^2) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2}{2} \cos(2x^2) + \frac{\sin 2}{2} \sin(2x^2)$ .  $\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$ ,  $\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}) \Rightarrow$   
 $\sin 2x^2 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{4k+2} + o(x^{4n+2})$ ,  $\cos 2x^2 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} x^{4k} + o(x^{4n}) \Rightarrow \sin^2(1+x^2) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1} 4^k \cos 2}{2(2k)!} x^{4k} +$   
 $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 4^k \sin 2}{(2k+1)!} x^{4k+2} + o(x^{4n})$ .
- (7)  $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} = 1 - \frac{2x}{1+x+x^2} = 1 - \frac{2x(1-x)}{1-x^3} = 1 - (2x-2x^2) \left[ \sum_{k=0}^n x^{3k} + o(x^{3n}) \right] = 1 - 2 \sum_{k=0}^n x^{3k+1} + 2 \sum_{k=0}^n x^{3k+2} + o(x^{3n+1})$ .
2. (1)  $\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 2x}{4x^3} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2 \cos x}{12x^2} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{24x} = \frac{1}{12}$ .
- (2)  $\stackrel{\text{倒数换元}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x^2)^{\frac{1}{3}} - (1-2x)^{\frac{1}{2}}}{x} \stackrel{\text{泰勒展开}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1+\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + o(x^2)] - [1-\frac{1}{2} \cdot 2x + o(x)]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+o(x)}{x} = 1$ .
- (3)  $\stackrel{\text{泰勒展开}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \{1 - n[\frac{1}{n} + \frac{1}{6}(\frac{1}{n})^3 + o(\frac{1}{n^3})]\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \{\frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})\} = \frac{1}{6}$ .
- (4)  $\stackrel{\text{等价无穷小}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2-e^{-x^2}}{8x^4} \stackrel{\text{泰勒展开}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2-[1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)]}{8x^4} = -\frac{1}{16}$ .
- (5)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} \stackrel{\text{等价无穷小}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \stackrel{\text{泰勒展开}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)] - x[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]}{x^3} = \frac{1}{3}$ .
3. (1)  $e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x \sin x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 - x - \frac{1}{2}x(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ , 因此是 3 阶无穷小.
- (2)  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ ,  $e^{-x^2/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \Rightarrow \cos x - e^{-x^2/2} = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$ , 因此是 4 阶无穷小.
- (3)  $\cos x - 1 - \frac{(a-b)x^2}{1+b^2x^2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) + (b-a)x^2(1-bx^2+b^2x^4+o(x^4))$ . 从而当  $b-a = \frac{1}{2}$  且  $(b-a)b = \frac{1}{24}$  (即  $a = -\frac{5}{12}, b = \frac{1}{12}$ ) 时, 是 6 阶无穷小; 当  $b-a = \frac{1}{2}$  且  $(b-a)b \neq \frac{1}{24}$  时, 是 4 阶无穷小; 当  $b-a \neq \frac{1}{2}$  时, 是 2 阶无穷小.
4.  $= \frac{\sin 3x + x f(x)}{x^3} \stackrel{\text{泰勒展开}}{=} \frac{1}{x^3} \{3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3) + x[f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)]\} = \frac{1}{x^3} \{[3+f(0)]x + f'(0)x^2 + [\frac{f''(0)}{2} - \frac{9}{2}]x^3 + o(x^3)\} = 0$  当  $x \rightarrow 0$  时. 从而  $f(0) = -3, f'(0) = 0, f''(0) = 9$ .
5. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开.  $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3, f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$ . 从而  $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{12}h^2 \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{2h} + \frac{2M_3}{12}h^2 = \frac{M_0}{h} + \frac{M_3h^2}{6}$ . 注意到这对于任意的  $h > 0$  都成立, 从而考虑不等式右边取最小值的时候, 此时  $h = \sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}$ , 从而  $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt[3]{9}}{2} M_0^{\frac{2}{3}} M_3^{\frac{1}{3}} \leq 4M_0^{\frac{2}{3}} M_3^{\frac{1}{3}}$ . 同理  $f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + \frac{-f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}h \Rightarrow |f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + \frac{2M_3}{6}h = \frac{4M_0}{h^2} + \frac{M_3}{3}h$ . 类似地取  $h = \sqrt[3]{\frac{24M_0}{M_3}}$ , 从而  $|f''(x)| \leq \sqrt[3]{3} M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{\frac{2}{3}} \leq 4M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{\frac{2}{3}}$ .
6. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开.  $f(x+k) = f(x) + f'(x)k + \frac{f''(x)}{2!}k^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}k^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi_k)}{(n+1)!}k^{n+1}, k = 1, 2, \dots, n$ . 把变量  $f'(x), \frac{f''(x)}{2!}, \dots, \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$  当成未知变元, 其余变量当成常数. 未知变元系数矩阵的行列式是范德蒙行列式的  $n!$  倍, 因此线性方程组有唯一解, 未知变元可以被其余变量线性表示, 而其余变量均有界, 从而未知变元都有界.
7. 设  $x_0 = \arg \max_{0 \leq x \leq 1} f(x)$  (若有多个则随便取一个). 在  $x = x_0$  处做带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 估计  $x = 0$  和  $x = 1$  处, 知  $f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(0-x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2, f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 \Rightarrow 0 = 2 + \frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2, 0 = 2 + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 \Rightarrow f''(\xi_1) = \frac{-4}{x_0^2}, f''(\xi_2) = \frac{-4}{(1-x_0)^2}$ . 由于  $\max\{\frac{1}{x_0^2}, \frac{1}{(1-x_0)^2}\} \geq 4$ , 从而  $\min\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\} \leq -16$ .
8. 注意到  $n$  次多项式的  $n+1$  阶导数恒为 0. 从而在  $x = a$  处做带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 得到  $P_n(x) = P_n(a) + P'_n(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)(x-a)^n$ . 从而对于任意  $x > a$ , 成立  $P_n(x) \geq P_n(a) > 0$ .

9. (1) 定义域. 应成立  $1+x \geq 0, 1-x \geq 0, \sqrt{1+x} > \sqrt{1-x} \Rightarrow 0 < x \leq 1$ . (2) 极值点.  $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ . 由于对于  $x \in (0, 1)$  总有  $f'(x) > 0$ , 这意味着  $f(x)$  没有极值点. (3) 单调区间. 由于  $f'(x) > 0$ , 从而  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上单调递增. (4) 凹凸区间与拐点.  $f''(x) = \frac{2x^2-1}{x^2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ . 从而当  $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$  时  $f''(x) < 0 \Rightarrow f''(x)$  凹; 当  $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$  时  $f''(x) > 0 \Rightarrow f''(x)$  凸.  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  是拐点. (5) 渐近线.  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -\infty$ , 从而  $x = 0$  是  $f(x)$  的垂直渐近线.

10. 首先利用向前-向后数学归纳法来证明  $f(\frac{x_1+\dots+x_m}{m}) \leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_m)}{m}$ . 向前: 利用数学归纳法证明  $f(\frac{x_1}{2^k} + \dots + \frac{x_{2^k}}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k} f(x_1) + \dots + \frac{1}{2^k} f(x_{2^k})$  对于  $k = 1, 2, \dots$  成立. 假设对于  $k = 1, 2, \dots, n-1$  成立. 则  $f(\frac{x_1}{2^n} + \dots + \frac{x_{2^n}}{2^n}) = f(\frac{1}{2^{n-1}} \frac{x_1+x_2}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \frac{x_{2^{n-1}-1}+x_{2^{n-1}}}{2}) \leq \frac{1}{2^{n-1}} f(\frac{x_1+x_2}{2}) + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} f(\frac{x_{2^{n-1}-1}+x_{2^{n-1}}}{2}) \leq \frac{1}{2^n} f(x_1) + \frac{1}{2^n} f(x_2) + \dots + \frac{1}{2^n} f(x_{2^{n-1}}) + \frac{1}{2^n} f(x_{2^n})$ , 这说明对于  $k = n$  也成立, 由数学归纳法知原命题对于  $m = 2, 4, 8, 16, \dots$  都成立. 向后: 如果  $f(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}) \leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}$ , 则  $f(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}) = f(\frac{x_1}{n} + \dots + \frac{x_{n-1}}{n} + \frac{1}{n} \frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}) \leq \frac{1}{n} f(x_1) + \dots + \frac{1}{n} f(x_{n-1}) + \frac{1}{n} f(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}) \Rightarrow f(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}) \leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})}{n-1}$ . 从而原命题成立. 那么对于  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Q}$  的情况也成立, 因为这些有理数总可以通分写成一个个同分母的分数求和. 最后再由连续性知对于无理数也成立.

11. 只需注意到对于  $x < y < z$ , 成立  $\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Leftrightarrow \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z) \geq f(y) = f(\frac{z-y}{z-x} x + \frac{y-x}{z-x} z)$  (这是已知条件). 同理  $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ . 从而固定  $y$ , 关于  $z$  的函数  $g(z) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$  随着  $z \rightarrow y+0$  单调递减有下界  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Rightarrow$  极限 (右导数) 存在. 同理左导数存在. 左右导数可能不相等的例子:  $f(x) = |x|$ .

12. 写成 Riemann 和, 然后利用离散版本的 Jensen 不等式.

13.  $\int p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx = - \int p(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} dx \stackrel{\text{Jensen 不等式}}{\geq} - \log \int p(x) \cdot \frac{q(x)}{p(x)} dx = 0$ .

14. 由积分中值定理知存在  $t \in (0, \frac{1}{5})$  使得  $f(1) = 5 \times \frac{1}{5} e^{t-1} f(t) \Rightarrow e^1 f(1) = e^t f(t)$ . 从而对函数  $g(x) = e^x f(x)$  应用 Rolle 微分中值定理即可.

15. 在闭区间  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  上  $f'(x), f(x)$  都是有界函数, 从而  $f''(x)$  也有界, 可设  $|f''(x)| \leq M$ . 从而对于任意  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , 由 Lagrange 微分中值定理, 成立  $|f'(x)| = |f'(x) - f'(0)| = |f''(\xi)x| \leq M|x| \leq \frac{M}{2}$ ,  $|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^x M|t| dt = \frac{Mx^2}{2} \leq \frac{M}{8} \Rightarrow |f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leq \frac{5}{8}M$ . 如此迭代下去, 反复上述过程, 可得  $|f''(x)| \leq (\frac{5}{8})^n M \rightarrow 0$ . 从而对于  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $f''(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = C \Rightarrow f(x) = Cx + D$ . 由  $f(0) = 0, f'(0) = 0$  知  $C = 0, D = 0$ , 即  $f(x) \equiv 0$ .

16. 显然  $\exists x_0 \in (a, b)$  使得  $f(x_0) \neq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) + f(a)$ , 否则  $f(x)$  是线性函数. 若  $f(x_0) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) + f(a)$ , 则由 Lagrange 微分中值定理,  $\exists \xi \in (a, x_0)$  使得  $f'(\xi) = \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . 若  $f(x_0) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) + f(a)$ , 则由 Lagrange 微分中值定理,  $\exists \xi \in (x_0, b)$  使得  $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

17. 反证法, 如果存在  $\delta, M$  使得  $\forall x \in (b-\delta, b), f'(x) < M$ , 则由 Lagrange 微分中值定理,  $\forall x \in (b-\delta, b), f(x) = f(b-\delta) + f'(\xi)(x-(b-\delta)) \leq f(b-\delta) + M\delta$ , 这与  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$  矛盾.

18. (1) 记  $f(x) = e^x P(x)$ . 则  $f'(x) = e^x (P(x) + P'(x)) \geq 0$ , 且  $f(-\infty) = 0 \Rightarrow f(x) \geq f(-\infty) = 0$  恒成立  $\Rightarrow P(x) \geq 0$ .

(2) 记  $f(x) = e^{-x} P(x)$ . 则  $f'(x) = e^{-x} (P'(x) - P(x)) \leq 0$ , 且  $f(+\infty) = 0 \Rightarrow f(x) \geq f(+\infty) = 0$  恒成立  $\Rightarrow P(x) \geq 0$ .

(3) 记  $P_1(x) = P(x) - P''(x)$ , 从而  $P_1(x) - P_1'(x) \geq 0 \Rightarrow P_1(x) \geq 0$ . 记  $P_2(x) = P(x) - P'(x)$ , 从而  $P_2(x) + P_2'(x) = P_1(x) \geq 0 \Rightarrow P_2(x) \geq 0 \Rightarrow P(x) - P'(x) \geq 0 \Rightarrow P(x) \geq 0$ .

### 9.3 补充 (不要求掌握!)

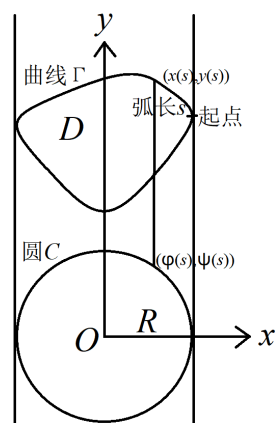
等周问题: 长为  $L$  的曲线何时围成区域面积最大? 答案: 圆 (一年级小学生皆可猜出).

证明: 不妨设  $D$  为凸区域 ( $D$  内任意两点连线位于  $D$  内). 设  $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0, L]$ , 此

处选择  $\Gamma$  的弧长为参数, 则  $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ , 且  $D$  的面积为  $A = \int_0^L x dy = \int_0^L x(s) y'(s) ds$ .

设  $C: \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$  是以  $O$  为中心,  $R$  为半径的圆, 此处选择  $\Gamma$  的弧长为参数, 则  $C$  的

面积为  $\pi R^2 = - \int_0^L y dx = - \int_0^L \psi(s) x'(s) ds$ . 从而  $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s) y'(s) - \psi(s) x'(s)) ds \leq \int_0^L \sqrt{(x(s) y'(s) - \psi(s) x'(s))^2} ds \leq \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)} ds = RL$ . 因此我们成立  $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq A + \pi R^2 \leq RL \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{4\pi}$ . 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是  $(x(s) y'(s) - \psi(s) x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)$ . 用右边减去左边得到  $(x(s) x'(s) +$



$\psi(s)y'(s))^2 = 0$ . 由于  $x(s)^2 + \psi(s)^2 = R^2$ , 两边求导得  $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = -y'(s), \psi(s) = -y(s) + y_0$ , 即  $\Gamma$  方程为  $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ , 圆也!

泰勒公式在物理中的一些应用可参考 <https://www.zhihu.com/question/302968510/answer/577451859>.

## 10 第 10 次习题课: 向量代数

### 10.1 问题

- 对于任意两向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$ , 证明:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$ .
- 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为三个向量, 若存在三个不全为零的常数  $k, l, m$  使  $k\mathbf{a} \times \mathbf{b} + l\mathbf{b} \times \mathbf{c} + m\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ , 证明三个向量  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  共线.
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  是欧氏空间中任给的四个起点为  $O$  的向量. 证明它们的终点共面的充分必要条件是它们中任意取三个得到的混合积满足恒等式  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] + [\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ .
- 求空间 3 点  $A, B, C$  满足下列关系的充要条件:  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = \mathbf{0}$ .
- 如果一个四面体有两对对棱互相垂直, 则第三对对棱也互相垂直, 并且三对对棱的长度平方和相等.
- 设正方体的棱长为  $a$ , 则该正方体的棱在任意平面上的射影长的平方和等于  $8a^2$ .
- 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  是正四面体中心指向其顶点的单位向量, 证明  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{b} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{u})\mathbf{c} + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{u})\mathbf{d} = \frac{4}{3}\mathbf{u}$ .
- 在直角坐标系中, 已知点  $A = (-1, 3, -7), B = (2, -1, 5), C = (0, 1, -5)$ . 计算: (1)  $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) \cdot (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$ ; (2)  $|\overrightarrow{AB}|$ ; (3)  $|\overrightarrow{AC}|$ ; (4)  $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC}, (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})\overrightarrow{AB}$ .
- 证明任意四面体  $ABCD$  三对对棱的中点的连线交于同一点.
- 设已知  $|\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 3, |\overrightarrow{OC}| = 4, |\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{BC}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 4$ , 求混合积的绝对值  $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}|$ .
- 设  $O, A, B, C$  是不共面的四点, 记三个二面角分别为  $\alpha = \langle AOB, AOC \rangle, \beta = \langle AOB, BOC \rangle, \gamma = \langle AOC, BOC \rangle$ . 证明  $|\frac{\sin \alpha}{\sin \angle BOC}| = |\frac{\sin \beta}{\sin \angle AOC}| = |\frac{\sin \gamma}{\sin \angle AOB}|$ .
- 证明三角形三条高线一定交于一点.
- 证明对于任意三个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ .
- 证明对于任意三个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ .
- 对于任意四个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ , 证明拉格朗日恒等式  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$ .
- 设函数  $f(x)$  的二阶导数  $f''(x) \in C[a, b]$ , 且对每一点  $x \in [a, b], f''(x)$  与  $f(x)$  同号. 证明: 若有两点  $c, d \in [a, b]$  使得  $f(c) = f(d) = 0$ , 则  $f(x) \equiv 0, x \in [c, d]$ .
- 证明 Legendre 多项式  $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$  在  $(-1, 1)$  内有  $n$  个根.
- 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可微, 且  $f'(a) = f'(b) = 0$ . 证明存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$ .
- 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上二阶可微, 且  $f(x) \geq 0, f''(x) \leq 0$ . 证明在  $x \geq a$  时  $f'(x) \geq 0$ .
- 证明当  $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  时,  $2 \arcsin x \equiv \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ .
- 设  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  内  $n+1$  阶可微,  $f^{(n+1)}(0) \neq 0$ , 在  $0 < |x| < 1$  上有  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta(x))}{n!}x^n$ , 其中  $0 < \theta(x) < 1$ . 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{n+1}$ .
- 设  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内  $n$  阶可微, 且  $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . 证明当  $0 < |h| < \delta$  时, 成立  $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta(h)h), 0 < \theta < 1$  且成立  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{n-1}$ .
- (不要求掌握, 蹭一下黎曼猜想的热点). 已知  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$  于  $s > 1$  时收敛, 记  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} (s > 1)$ . 记所有素数从小到大依次构成的数列为  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 其中  $p_1 = 2, p_2 = 3, \cdots, \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$ . 证明  $\left[ \prod_{k=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{1}{p_k^s} \right) \right] \zeta(s) = 1$ .

### 10.2 解答

- $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2, (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2$ , 将上两式相加即得欲证之不等式.
- 不妨设  $k \neq 0$ . 用向量  $\mathbf{c}$  点乘上述等式两端, 得到  $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ . 这说明三个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面. 设它们都与平面  $\pi$  平行, 则  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  这三个向量都与平面  $\pi$  垂直, 故这三向量共线.

3.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  终点共面  $\Leftrightarrow$  向量  $\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{d}-\mathbf{a}$  共面  $\Leftrightarrow [\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{d}-\mathbf{a}] = 0 \Leftrightarrow [\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{d}] = [\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{a}] \Leftrightarrow [\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] - [\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{d}] = [\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}] \Leftrightarrow [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] - [\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{d}] + [\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{d}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] \Leftrightarrow [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] - [\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}] + [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0 \Leftrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] + [\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0.$

4. 答案是  $A, B, C$  三点共线. 注意到  $\vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} = \vec{OA} \times \vec{OB} - \vec{OC} \times \vec{OB} + \vec{OC} \times \vec{OA} = \vec{CA} \times \vec{OB} + \vec{OC} \times \vec{OA} = \vec{CA} \times \vec{OB} + \vec{OC} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{CA} = \vec{CA} \times \vec{OB} - \vec{CA} \times \vec{OC} = \vec{CA} \times \vec{CB}$ , 从而  $\vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} = 0 \Leftrightarrow \vec{CA} \times \vec{CB} = 0 \Leftrightarrow A, B, C$  三点共线.

5. 原命题转化为: 如果  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ , 则  $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$ , 且  $\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{BD}^2 = \vec{AD}^2 + \vec{BC}^2$ .  $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = (\vec{AB} + \vec{BD}) \cdot (\vec{BD} + \vec{DC}) = \vec{AB} \cdot \vec{BD} + \vec{BD} \cdot \vec{DC} = (\vec{AC} + \vec{CD}) \cdot \vec{BD} + \vec{BD} \cdot \vec{DC} = \vec{CD} \cdot \vec{BD} + \vec{BD} \cdot \vec{DC} = 0$ .  $\vec{AC}^2 + \vec{BD}^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 + (\vec{BC} + \vec{CD})^2 = \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + 2\vec{BC} \cdot \vec{CD} + 2\vec{BC}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 + 2\vec{BC} \cdot (\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC}) = \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 + 2\vec{BC} \cdot \vec{AD} = \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2$ . 同理  $\vec{AD}^2 + \vec{BC}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2$ .

6. 不妨设正方形 3 种棱所对应向量坐标分别为  $(0, 0, a), (0, a, 0), (a, 0, 0)$ . 我们只需计算这 3 种棱对应的射影长的平方和等于  $2a^2$  即可. 设某一平面的单位法向量为  $(x, y, z)$  (注意  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ), 则这 3 种棱在平面上的射影分别为  $(-axz, -ayz, a - az^2), (-axy, a - ay^2, -ayz), (a - ax^2, -axy, -axz)$ , 其长度平方和为  $a^2(x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 3) = a^2[(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2 + 3] = 2a^2$ .

7. 不妨设  $\mathbf{a} = (0, 0, 1), \mathbf{b} = (-\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3}), \mathbf{c} = (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}), \mathbf{d} = (\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}), \mathbf{u} = (x, y, z)$ . 从而  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{b} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{u})\mathbf{c} + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{u})\mathbf{d} = (0, 0, z) + (\frac{8}{9}x + \frac{2\sqrt{2}}{9}z, 0, \frac{2\sqrt{2}}{9}x + \frac{1}{9}z) + (\frac{2}{9}x + \frac{2\sqrt{3}}{9}y - \frac{\sqrt{2}}{9}z, \frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{2}{9}y - \frac{\sqrt{6}}{9}z, -\frac{\sqrt{2}}{9}x - \frac{\sqrt{6}}{9}y + \frac{1}{9}z) + (\frac{2}{9}x - \frac{2\sqrt{3}}{9}y - \frac{\sqrt{2}}{9}z, -\frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{2}{9}y + \frac{\sqrt{6}}{9}z, -\frac{\sqrt{2}}{9}x + \frac{\sqrt{6}}{9}y + \frac{1}{9}z) = \frac{4}{3}(x, y, z)$ .

8. 纯计算. (1) -524; (2) 13; (3) 3; (4) (-70, 70, -350), (-78, 104, -312).

9. 设顶点坐标分别为  $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$ . 则三对对棱的中点坐标分别为  $[(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}), (\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}, \frac{z_3+z_4}{2})], [(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}, \frac{z_1+z_3}{2}), (\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}, \frac{z_2+z_4}{2})], [(\frac{x_1+x_4}{2}, \frac{y_1+y_4}{2}, \frac{z_1+z_4}{2}), (\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2})]$ . 注意到他们的中点共点, 即连线都经过  $(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4})$ .

10.  $|\vec{OA} \times \vec{OB} \cdot \vec{OC}| = \left| \frac{\vec{OA}^T}{\vec{OB}^T} \right| = \sqrt{\left| \frac{\vec{OA}^T}{\vec{OB}^T} \right| \left| \vec{OA} \quad \vec{OB} \quad \vec{OC} \right|} = \sqrt{\left| \frac{\vec{OA}^T \vec{OA}}{\vec{OB}^T \vec{OA}} \quad \frac{\vec{OA}^T \vec{OB}}{\vec{OB}^T \vec{OB}} \quad \frac{\vec{OA}^T \vec{OC}}{\vec{OB}^T \vec{OC}} \right|}$ . 由题意  $\vec{OA}^T \vec{OA} =$

$4, \vec{OB}^T \vec{OB} = 9, \vec{OC}^T \vec{OC} = 16, \vec{OA}^T \vec{OB} = \frac{1}{2}[\vec{OA}^T \vec{OA} + \vec{OB}^T \vec{OB} - (\vec{OB} - \vec{OA})^T (\vec{OB} - \vec{OA})] = \frac{1}{2}(\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 - \vec{AB}^2) = \frac{9}{2}, \vec{OA}^T \vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA}^2 + \vec{OC}^2 - \vec{AC}^2) = 2, \vec{OB}^T \vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OB}^2 + \vec{OC}^2 - \vec{BC}^2) = 8$ , 从而  $|\vec{OA} \times \vec{OB} \cdot \vec{OC}| = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$ .

11. 过  $C$  作  $CD \perp OA$  交  $OA$  于点  $D$ , 过  $C$  作  $CE \perp$  平面  $OAB$  交平面  $OAB$  于点  $E$ . 从而  $\sin \alpha = \frac{|CE|}{|CD|} = \frac{\frac{3V}{2S_{\triangle AOB}}}{\frac{3V}{2S_{\triangle AOC}}} =$

$\frac{2|OA||OC| \sin \angle AOC \cdot |OA||OB| \sin \angle AOB}{2|OA||OB||OC| \sin \angle AOC \sin \angle AOB} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \angle BOC} = \frac{3V}{2|OA||OB||OC| \sin \angle AOC \sin \angle AOB \sin \angle BOC}$ . 同理对于  $\frac{\sin \beta}{\sin \angle AOC}, \frac{\sin \gamma}{\sin \angle AOB}$  有类似结论.

12. 不妨设 3 个顶点的坐标是  $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (a, b)$ . 过  $A$  作  $BC$  边上的高:  $l_A: y = \frac{1-a}{b}x$ ; 过  $B$  作  $AC$  边上的高:  $l_B: y = -\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}$ . 两条直线交于  $D = (a, \frac{a(1-a)}{b})$ . 显然  $CD \perp AB$ .

13. 设坐标  $\mathbf{a} = (a, 0, 0), \mathbf{b} = (b_1, b_2, 0), \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , 然后暴力计算.

14. 利用 13 题结论显然.

15.  $\text{LHS} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}] \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) = \text{RHS}$ .

16. 只需证明函数在  $[c, d]$  中没有正的最大值, 没有负的最小值. 若  $\max_{x \in [c, d]} f(x) = M > 0$ , 则在该点处  $f''(x) > 0$ , 意味着这是极小值, 矛盾. 同理没有负的极小值.

17. 只需注意到对于  $k = 1, 2, \dots, n-1, x = \pm 1$  始终是函数  $f(x) = (x^2 - 1)^n$  的  $k$  阶导数的零点. 从而不断应用 Rolle 微分中值定理, 1 阶导至少有  $\pm 1, \xi_{1,1}$  这三个零点, 2 阶导至少有  $\pm 1, \xi_{2,1}, \xi_{2,2}$  这四个零点,  $\dots, n-1$  阶导至少有  $\pm 1, \xi_{n-1,1}, \dots, \xi_{n-1,n-1}$  这  $n+1$  个零点, 从而  $n$  阶导至少有  $n$  个零点. 又由于  $f(x)$  是  $2n$  阶多项式, 从而  $f^{(n)}(x)$  是  $n$  阶多项式, 至多有  $n$  个零点. 从而 Legendre 多项式在  $(-1, 1)$  内恰有  $n$  个根.

18. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 成立  $f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(\frac{b-a}{2})^2, f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(\frac{b-a}{2})^2$ , 其中  $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}), \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ . 两式相减, 然后取绝对值得到  $\frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)| = \frac{1}{2}|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \leq \frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2} \leq \max(|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|)$ .

19. 假设  $\exists x_0$  使得  $f'(x_0) < 0$ . 由  $f''(x) \leq 0$  知  $\forall x > x_0, f'(x) \leq f'(x_0) < 0$ . 从而  $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \leq$

$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . 令  $x \rightarrow +\infty$  得到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , 这与  $f(x) \geq 0$  矛盾.

20. 令  $f(x) = 2 \arcsin x - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ , 则  $f'(x) = 0$ , 又因为  $f(0) = 0$ , 从而  $f(x) \equiv 0$ .

21. 这是个固定套路. 首先由导数定义知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(\theta(x)x) - f^{(n)}(0)}{\theta(x)x} = f^{(n+1)}(0)$ . 再利用 Taylor 展式,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(\theta(x)x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{n!}{x^n} [f(x) - f(0) - f'(0)x - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1}] - f^{(n)}(0)x^n}{x} \stackrel{n \text{ 次 L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{(n+1)x} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ . 上下相除, 由极限的四则运算知  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{n+1}$ .

22. 由带 Lagrange 余项的泰勒展开知  $f'(x_0 + \theta(h)h) = f'(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} (\theta(h)h)^{n-1} + o(h^{n-1}) \Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} \theta(h)^{n-1} h^n + o(h^n)$ . 由带 Peano 余项的泰勒展开知  $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + o(h^n)$ . 从而  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n (n\theta(h)^{n-1} - 1) = o(h^n) \Rightarrow n\theta(h)^{n-1} - 1 = o(1) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{n}$ .

23. 对于某个确定的  $p_k$ ,  $\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(np_k)^s}\right] = \sum_{m \neq np_k, \forall n \in \mathbb{N}} \frac{1}{m^s}$ , 即除去  $p_k$  的整倍数之外的所有自然数的  $s$  次幂的倒数之和. 从而  $\left[\prod_{k=1}^l \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)\right] \zeta(s) = \sum_{m \nmid p_k, k=1,2,\dots,l} \frac{1}{m^s}$ , 即除去前  $l$  个素数的整数倍之外的所有自然数的  $s$  次幂的倒数之和. 由于除去所有素数的整数倍之外的所有自然数的  $s$  次幂的倒数之和为 1, 从而  $\left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)\right] \zeta(s) = 1$ .

### 10.3 补充 (不要求掌握!)

实际上, 不是所有的空间都有内积. 为引入内积, 我们先定义范数.

设  $\mathcal{H}$  是数域  $\mathbb{K}$  上的线性空间, 若函数  $\|\cdot\|$  满足: (1)  $\forall x \in \mathcal{H}, \|x\| \geq 0$ , 且等号成立当且仅当  $x = 0$ ; (2)  $\forall x, y \in \mathcal{H}, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ; (3)  $\forall a \in \mathbb{K}, x \in \mathcal{H}, \|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ ; 则称  $\|\cdot\|$  为范数. 范数可以诱导距离:  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . 内积可以诱导范数: 可定义  $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ , 其中  $(\cdot, \cdot)$  表示内积. 读者可自行验证.

范数不一定可以诱导内积: 如果能引入内积满足  $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ , 当且仅当范数满足平行四边形等式:  $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in \mathcal{H}$ .

证明: 必要性显然. 充分性可令  $(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) & \text{if } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) & \text{if } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$ .

若指定了范数的线性空间完备, 则称为 Banach 空间; 若指定了内积的线性空间完备, 则称为 Hilbert 空间. Hilbert 空间一定是 Banach 空间, 但 Banach 空间不一定是 Hilbert 空间.

一些例子: 定义  $L_p$  空间为满足  $\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$  的全体可测函数  $f(x)$  构成的集合. 容易验证在范数  $\|f\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$  的意义下,  $L_p$  空间是 Banach 空间, 但只有当  $p = 2$  时才构成 Hilbert 空间.

定义  $l_p$  空间为满足  $\left[\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$  的全体数列  $a = (a_1, a_2, \dots)$ , 其中  $a_i \in \mathbb{R}$ . 容易验证在范数  $\|a\|_p = \left[\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$  的意义下,  $l_p$  空间是 Banach 空间, 但只有当  $p = 2$  时才构成 Hilbert 空间.

我们常见的欧氏空间, 比如说  $\mathbb{R}^n$ , 都是 Banach 空间和 Hilbert 空间.

更多内积、外积的知识可参考 <https://disk.pku.edu.cn:443/link/E26DE7ABE80D793F9281DCDFB5A740AA> 第一章.

## 11 第 11 次习题课: 空间解析几何

### 11.1 问题

- 判断下列直线的位置关系: (1)  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-2}{1}$  和  $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ ; (2)  $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x+z+1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ .
- 判断下列平面的位置关系: (1)  $x+3y-z-2=0$  和  $2x+6y-2z-2=0$ ; (2)  $x+y+3z-4=0$  和  $x+3y+z-4=0$ .
- 判断下列直线与平面的位置关系: (1) 直线  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-8}{2}$ , 平面  $x+y-z+6=0$ ; (2) 直线  $\begin{cases} x+3y-2z+1=0 \\ 2x+4y+2z-2=0 \end{cases}$ , 平面  $x+2y-z-3=0$ .



4. 求下列直线的方程: (1) 过点  $(0, 1, -1)$ , 与平面  $x - 3y + z - 2 = 0$  平行, 并且和直线  $\begin{cases} 3x - 2y + 2z + 3 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$  共面; (2) 平行于向量  $\mathbf{u} = (8, 7, 1)$ , 并与直线  $\frac{x+13}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$  和  $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$  都相交; (3) 过点  $(0, 1, -1)$ , 与直线  $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - 2z + 7 = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x + 5y - 10 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$  都共面; (4) 经过点  $M(2, -1, 3)$ , 平行于向量  $\mathbf{u} = (1, 0, 3)$ ; (5) 经过点  $M(3, -2, 1)$ , 垂直于平面  $3x + 2y - 3z + 5 = 0$ ; (6) 经过点  $M(0, 1, -1)$ , 并且与直线  $\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$  正交.
5. 求下列平面的方程: (1) 过直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ , 平行于向量  $\mathbf{u} = (2, 1, -2)$ ; (2) 过直线  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$  和原点; (3) 过直线  $\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ , 平行于向量  $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ ; (4) 平行于平面  $\pi: 6x - 2y + 3z + 15 = 0$ , 并且使得点  $(0, -2, -1)$  到所作平面和  $\pi$  的距离相等; (5) 平行于  $x$  轴, 经过点  $M_1(1, -1, 2), M_2(2, 0, -1)$ .
6. 求点到直线的距离: (1) 点  $M(1, 0, 2)$ , 直线  $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ ; (2) 点  $M(3, 10, -1)$ , 直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{10} = \frac{z+1}{-3}$ .
7. 求点到平面的距离: (1) 点  $M(2, 1, 0)$ , 平面  $3x - 4y - 5z + 1 = 0$ ; (2) 点  $M(2, 4, -1)$ , 平面  $x - z - 1 = 0$ .
8. 求下列两条直线的距离: (1)  $\frac{x+2}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$  和  $\frac{x-5}{4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$ ; (2)  $\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$ .
9. 求下列夹角: (1) 两张平面的夹角, 它们的一般方程分别为  $3x - 4y - 5z - 4 = 0$  和  $4x + y - z + 5 = 0$ ; (2) 直线  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$  和  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3}$  的夹角; (3) 直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$  和平面  $x - 2y + 4z - 1 = 0$  的夹角.
10. 求下列异面直线的公垂线方程: (1)  $\begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ ; (2)  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$  和  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}$ .
11. 设直线  $l: \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ , 平面  $\pi: x + y + z = 0$ . 计算: (1) 直线  $l$  在平面  $\pi$  上的投影直线  $l_0$  的方程; (2) 直线  $l_0$  绕  $z$  轴旋转一周而成的曲面方程.
12. 求点  $M = (4, 3, 10)$  关于直线  $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$  的对称点.
13. 已知平面  $\pi$  过点  $(1, 1, \frac{3}{2})$ , 并在  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴上的截距成等差数列, 又知三截距之和为 12. 求平面  $\pi$  的方程.
14. 在直角坐标系中, 平面  $x + y + z = 0$  与二次曲面  $kxy + yz + xz = 0$  相交于两条直线  $I_1, I_2$ . 求正实数  $k$  的值, 使得这两条直线的夹角是  $\frac{\pi}{4}$ .
15. 在直角坐标系中, 已知平面  $ax + by + cz = 0 (abc \neq 0)$  和二次曲面  $xy + yz + zx = 0$  的交线是两条正交的直线, 证明  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ .
16. 设  $M_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$  是不共线的三个点, 证明  $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$  是这三个点所决定的平面的方程.
17. 求经过  $z$  轴, 并且和平面  $2x + y - \sqrt{5}z - 1 = 0$  的夹角为  $60^\circ$  的平面的方程.
18. 求到平面  $3x - 2y - 6z - 4 = 0$  和  $2x + 2y - z + 5 = 0$  距离相等的点的轨迹.

## 11.2 解答

1. (1) 直线的方向是  $(3, 9, 1)$  和  $(-1, 2, 3)$ , 因此不平行也不垂直. 由于它们都过点  $(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}, \frac{11}{5})$ , 从而相交.  
 (2) 直线的方向是  $(0, -1, 1)$  和  $(-1, 1, 1)$ , 因此垂直. 由于它们没有交点, 因此是异面垂直.
2. (1) 由于它们的法向量都是  $(1, 3, -1)$ , 且截距不同, 因此两个平面平行.  
 (2) 它们的法向量是  $(1, 1, 3)$  和  $(1, 3, 1)$ , 不平行也不垂直, 因此两个平面斜交.
3. (1) 直线的方向是  $(1, 1, 2)$ , 平面法向量是  $(1, 1, -1)$ , 它们垂直, 且点  $(1, 1, 8)$  同时在直线和平面上, 因此直线在平面上.  
 (2) 直线的方向是  $(7, -3, -1)$ , 平面法向量是  $(1, 2, -1)$ , 它们不平行也不垂直, 因此直线和平面斜交.
4. (1) 注意到给定的直线的方向是  $(-4, 1, 7)$ , 与平面  $x - 3y + z - 2 = 0$  平行. 因此欲求直线方程为  $\frac{x}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{7}$ .

(2) 设欲求直线方程为  $\frac{x-x_0}{8} = \frac{y-y_0}{7} = \frac{z-z_0}{1}$ . 由题给条件可得  $(x_0, y_0, z_0)$  的一组解是  $(0, -\frac{11}{2}, -\frac{23}{2})$ .

(3) 直接写点分别和两条直线张成的两张平面的交线, 
$$\begin{cases} 12x - 3y - 4z - 1 = 0 \\ 3x + 10y - 5z - 15 = 0 \end{cases}.$$

(4)  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{3}$ . (5)  $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3}$ .

(6) 所给直线线向是  $(2, -3, 4)$ , 过点  $A(1, 1, 5)$ . 因此可求出向量  $\overrightarrow{AM}$  在直线上的投影为  $(-\frac{52}{29}, \frac{78}{29}, -\frac{104}{29})$ , 因此欲求直线线向为  $(23, -78, -70)$ , 方程为  $\frac{x}{23} = \frac{y-1}{-78} = \frac{z+1}{-70}$ .

5. (1) 法向量是  $(1, -2, 0)$ , 过点  $(1, 0, 0)$ , 因此方程是  $x - 2y - 1 = 0$ .

(2) 两个平行向量是  $(-2, 1, 0)$  和  $(3, 0, 1)$ , 因此法向量是  $(1, 2, -3)$ , 方程是  $x + 2y - 3z = 0$ .

(3) 两个平行向量是  $(-5, 3, 1)$  和  $(1, 1, -1)$ , 因此法向量是  $(1, 1, 2)$ , 过点  $(3, -2, 1)$ , 方程是  $x + y + 2z - 3 = 0$ .

(4)  $6x - 2y + 3z - 17 = 0$ . (5)  $3y + z + 1 = 0$ .

6. (1) 直线线向是  $(2, 3, 3)$ , 过点  $A(1, 1, -1)$ , 从而  $\overrightarrow{AM}$  在直线上的投影是  $(\frac{6}{11}, \frac{9}{11}, \frac{9}{11})$ , 因此距离是  $\frac{2}{11}\sqrt{253}$ .

(2) 直线线向是  $(2, 10, -3)$ , 过点  $A(1, 5, -1)$ , 从而  $\overrightarrow{AM}$  在直线上的投影是  $(\frac{108}{113}, \frac{540}{113}, -\frac{162}{113})$ , 因此距离是  $\frac{19}{113}\sqrt{113}$ .

7. (1) 平面的法向量是  $(3, -4, -5)$ , 过点  $A(1, 1, 0)$ , 从而  $\overrightarrow{AM}$  在法向量上的投影是  $(\frac{9}{50}, -\frac{12}{50}, -\frac{15}{50})$ , 因此距离是  $\frac{3}{10}\sqrt{2}$ .

(2) 平面的法向量是  $(1, 0, -1)$ , 过点  $A(1, 0, 0)$ , 从而  $\overrightarrow{AM}$  在法向量上的投影是  $(1, 0, -1)$ , 因此距离是  $\sqrt{2}$ .

8. (1) 转化为点  $(5, 5, 0)$  到平面  $2x - y + 6z - 8 = 0$  的距离, 答案是  $\frac{3}{41}\sqrt{41}$ .

(2) 转化为点  $(1, 0, 0)$  到平面  $x + y + 2z - 2 = 0$  的距离, 答案是  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ .

9. (1) 求平面法向量  $(3, -4, -5)$  和  $(4, 1, -1)$  的夹角, 答案是  $\arccos \frac{13}{30}$ . (2) 求直线线向  $(-1, 1, 2)$  和  $(-2, 4, -3)$  的夹角, 答案是  $\frac{\pi}{2}$ . (3) 求平面法向量  $(1, -2, 4)$  和直线线向  $(2, 1, -1)$  的夹角的余角, 答案是  $\arcsin \frac{2\sqrt{14}}{21}$ .

10. (1) 直线线向分别是  $(1, -3, 3)$  和  $(2, 1, -2)$ , 因此公垂线线向是  $(3, 8, 7)$ . 公垂线与  $l_1, l_2$  分别张成的平面是  $45x - 2y - 17z - 45 = 0$  和  $23x - 20y + 13z = 0$ , 因此公垂线方程为 
$$\begin{cases} 45x - 2y - 17z - 45 = 0 \\ 23x - 20y + 13z = 0 \end{cases}.$$

(2) 直线线向分别是  $(-1, 1, 0)$  和  $(2, -1, 2)$ , 因此公垂线线向是  $(2, 2, -1)$ . 公垂线与  $l_1, l_2$  分别张成的平面是  $x + y + 4z - 1 = 0$  和  $x - 2y - 2z + 3 = 0$ , 因此公垂线方程为 
$$\begin{cases} x + y + 4z - 1 = 0 \\ x - 2y - 2z + 3 = 0 \end{cases}.$$

11. (1) 平面  $\pi$  的法向量是  $(1, 1, 1)$ , 直线  $l$  线向是  $(0, 1, 1)$ . 因此过直线  $l$  且垂直于平面  $\pi$  的平面方程是  $y - z - 1 = 0$ , 从而投影直线  $l_0$  的方程是 
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$
 (2) 直线方程可参数化为  $(-2z - 1, z + 1, z)$ , 从而点  $(x, y, z)$  在曲面上

当且仅当  $x^2 + y^2 = (-2z - 1)^2 + (z + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5z^2 + 6z + 2$ .

12. 过  $M$  作平面  $\pi$  垂直  $l$ , 则  $\pi: 2x + 4y + 5z - 70 = 0$ , 与  $l$  交于点  $(3, 6, 8)$ . 从而  $M$  关于直线的对称点是  $(2, 9, 6)$ .

13. 设平面方程为  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ,  $d$  为截距数列的公差. 则  $b = a + d, c = a + 2d, a + b + c = 12 \Rightarrow b = 4, a = 4 - d, c = 4 + d$ . 再将  $(1, 1, \frac{3}{2})$  代入平面方程知  $d = 2$  或  $-\frac{4}{3} \Rightarrow \pi: \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1$  或  $\pi: \frac{3x}{16} + \frac{y}{4} + \frac{3z}{8} = 1$ .

14. 联立直线和曲面得到 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (2 - k)xy = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases},$$
 从而交线具有形式 
$$\begin{cases} k_1x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} k_2x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

它们线向是  $(-1, -k_1, k_1 + 1)$  和  $(-1, -k_2, k_2 + 1)$ , 其中  $k_1k_2 = 1$ . 它们夹角为  $45^\circ \Rightarrow \left| \frac{2k_1k_2 + k_1 + k_2 + 2}{\sqrt{(2k_1^2 + 2k_1 + 2)(2k_2^2 + 2k_2 + 2)}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow k_1 + k_2 = 2 \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow k = 4 + 3\sqrt{2}$  (舍去负根).

15. 类似于上题做法, 联立验证即可.

16. 点  $(x, y, z)$  在这个平面上  $\Leftrightarrow$  三个向量  $(x_i - x, y_i - y, z_i - z), i = 1, 2, 3$  共面  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z & 0 \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



17. 设欲求平面为  $ax+by=0$ , 其法向量为  $(a,b,0)$ . 已知平面的法向量为  $(2,1,-\sqrt{5})$ , 两者夹角为  $60^\circ$  或  $120^\circ \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$  或  $-3$ , 从而欲求平面为  $x+3y=0$  或  $3x-y=0$ .
18. 设轨迹上某点的坐标为  $(x,y,z)$ , 则  $|\frac{3x-2y-6z-4}{7}| = |\frac{2x+2y-z+5}{3}| \Rightarrow 5x+20y+11z+47=0$  或  $23x+8y-25z+23=0$ .

### 11.3 补充 (不要求掌握!)

平面上的二次曲线可写成矩阵乘法形式:  $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + C = 0$ , 其中  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  是对称矩阵. 由于对称矩阵合同于对角元为  $0, \pm 1$  的对角矩阵 (可以理解成先正交相似于对角矩阵, 然后做尺度变换), 因此我们只需讨论一些简单情况, 就可以对平面上的所有二次曲线进行分类. 三维情况也可类似考虑, 这里我们直接给出结果.

二次曲线标准类型 (7 种)			
椭圆	$\pm(a^2x^2 + b^2y^2 - c^2) = 0$	双曲线	$\pm(a^2x^2 - b^2y^2 + c) = 0$
抛物线	$\pm(a^2x^2 + 2by) = 0$	单点集	$\pm(a^2x^2 + b^2y^2) = 0$
平行直线	$\pm(a^2x^2 - b^2) = 0$	一条直线	$\pm a^2x^2 = 0$
相交直线	$\pm(a^2x^2 - b^2y^2) = 0$		
二次曲面标准类型 (14 种)			
椭球面	$\pm(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - d^2) = 0$	双叶双曲面	$\pm(a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 + d^2) = 0$
单叶双曲面	$\pm(a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 - d^2) = 0$	双曲抛物面	$\pm(a^2x^2 - b^2y^2 + 2cz) = 0$
椭圆抛物面	$\pm(a^2x^2 + b^2y^2 + 2cz) = 0$	双曲柱面	$\pm(a^2x^2 - b^2y^2 + c) = 0$
抛物柱面	$\pm(a^2x^2 + 2by) = 0$	椭圆柱面	$\pm(a^2x^2 + b^2y^2 - c^2) = 0$
相交平面	$\pm(a^2x^2 - b^2y^2) = 0$	平行平面	$\pm(a^2x^2 - b^2) = 0$
一张平面	$\pm a^2x^2 = 0$	椭圆锥面	$\pm(a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2) = 0$
一条直线	$\pm(a^2x^2 + b^2y^2) = 0$	单点集	$\pm(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) = 0$

## 12 第 12 次习题课: 多元函数的极限与连续性

### 12.1 问题

1. 设  $E \subset \mathbb{R}^2$ , 记  $E_1 = \{x \in \mathbb{R}, \exists(x,y) \in E\}$ ,  $E_2 = \{y \in \mathbb{R}, \exists(x,y) \in E\}$ . 判断下列命题是否为真. (1)  $E$  是  $\mathbb{R}^2$  中开 (闭) 集时,  $E_1, E_2$  均为  $\mathbb{R}$  中开 (闭) 集; (2)  $E_1, E_2$  均为  $\mathbb{R}$  中开 (闭) 集时,  $E$  为  $\mathbb{R}^2$  中开 (闭) 集.
2. 设  $E = \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$ , 证明  $\mathbb{R}^2 \setminus E$  是道路连通集.
3. 设  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 证明  $E$  的边界点集和极限点集均是闭集.
4. 证明开 (闭) 集的任意并 (交) 和有限交 (并) 都是开 (闭) 集, 但开 (闭) 集的任意交 (并) 不一定是开 (闭) 集.
5. 判断下列极限是否存在. 若极限存在求极限值, 若极限不存在说明理由.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{xy}$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (\frac{xy}{x^2 + y^2})^x$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + \sin y) \cos \frac{1}{|x| + |y|}$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}$ ,  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \log(x^2 + y^2)$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{x^8 + y^8}$ ,  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2 + z^2}$ ,  $\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} (x^2 + y^2)e^{-(|x| + |y|)}$ ,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{|\mathbf{x}|^2}$ ,  $\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{|x| + |y|})^{\frac{x^2}{|x| + |y|}}$ .
6. 设  $y = f(x)$  在  $0 < |x| < \delta$  中有定义, 满足  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 且对于  $\forall 0 < |x| < \delta$  有  $f(x) \neq 0$ . 记  $E = \{(x,y) : xy \neq 0\}$ . 问极限  $\lim_{(x,y) \in E \rightarrow (0,0)} \frac{f(x)f(y)}{f^2(x) + f^2(y)}$ ,  $\lim_{(x,y) \in E \rightarrow (0,0)} \frac{yf^2(x)}{f^4(x) + y^2}$  是否存在.
7. 证明或否定:  $\forall k \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) \rightarrow 0$ , 则有  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ .
8. 证明或否定:  $\mathbf{x}_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n, \lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_k| = +\infty$ . (1)  $\forall i (1 \leq i \leq n)$ , 序列  $\{x_i^k\}$  趋于  $\infty$ ; (2)  $\exists i_0 (1 \leq i_0 \leq n)$ , 序列  $\{x_{i_0}^k\}$  趋于  $\infty$ .
9. 构造一个二元函数  $f(x,y)$ , 极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  存在但极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$  不存在.

10. 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是一个非空开集, 证明: 向量函数  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  在  $U$  内连续的充要条件是开集的原像是开集, 即对  $\mathbb{R}^m$  中的任意开集  $E$ ,  $f^{-1}(E)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开集.
11. 设  $f(x, y)$  是  $[0, 1] \times [0, 1]$  上的函数, 对于每个固定的  $y \in [0, 1]$ ,  $f(x, y)$  对  $x \in [0, 1]$  连续; 对于每个固定的  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x, y)$  对  $y \in [0, 1]$  连续. 问是否一定有  $f(x, y)$  连续.
12. 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是有界闭集,  $f$  是  $\Omega$  到自身的映射, 满足  $|f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x, y \in \Omega, x \neq y$ . 证明  $f(x) = x$  在  $\Omega$  中有且仅有一个解.
13. 设函数  $f(x, y)$  在  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  上连续, 它的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ , 证明对于  $\forall c \in (m, M)$ , 存在无限多个  $(\xi, \eta) \in D$  使得  $f(\xi, \eta) = c$ .
14. 设  $A$  是  $n \times n (n \geq 2)$  非退化矩阵, 证明存在  $\lambda > 0$ , 使得对于  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , 成立  $|Ax| \geq \lambda|x|$ .
15. 设  $D$  是  $Oxy$  平面上的有界闭区域,  $M_0 = (x_0, y_0)$  是  $D$  外一点, 求证: 在  $D$  上存在一点离  $M_0$  最近, 也存在一点离  $M_0$  最远.
16. 设  $f(x, y) = \sqrt{xy}$ , 定义域是  $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ . 证明  $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, y_1, x_2, y_2$  满足  $(x_i, y_i) \in D (i = 1, 2)$ , 且  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta$ , 但是  $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| > \epsilon$ .

## 12.2 解答

1. (1) 若  $E$  是开集, 则  $E_1, E_2$  均为开集. 若  $E$  是闭集则未必正确, 比如  $E = \{(\frac{1}{k}, k) : k \in \mathbb{N}\}$ . (2) 均未必正确, 比如  $E_1 = E_2 = \{(-1, 1)\}$ , 而  $E = \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 < 1\}$ ;  $E_1 = E_2 = \{[-1, 1]\}$ , 而  $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$ .
2. 对于点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ , 只需考虑道路  $y = y_1$  和  $x = x_2$  即可. 对于其余点 (即有且仅有一个坐标是有理数) 的情况, 不妨设横坐标是有理数而纵坐标是无理数, 只需沿着横坐标方向平移到无理数点即可.
3. 注意闭集的几个等价定义: (1) 包含所有的边界点; (2) 包含所有的极限点; (3) 开集的补集. (1)  $\Rightarrow$  (2): 假设存在  $\{x_n\} \subset C$  但  $x_n \rightarrow x \notin C$ . 则  $x$  显然不是内点, 也不是外点 (因为任意邻域总存在足够近的  $x_N \in C$ ), 则  $x$  是边界点, 矛盾. (2)  $\Rightarrow$  (3): 对于任意  $x \notin C$ , 由于  $x$  不是极限点, 因此存在邻域  $U(x, \delta)$  使得  $U(x, \delta) \cap C = \emptyset$ , 这说明  $x$  是  $C$  的补集的内点, 即  $C$  是开集的补集. (3)  $\Rightarrow$  (1): 由于开集的边界点和其补集的边界点是一致的, 而开集只有内点, 因此其边界点全被包含在其补集中, 即开集的补集包含所有的边界点.
- 边界点集 (记作  $\partial E$ ): 只需说明其包含所有的极限点. 若  $x_1, x_2, \dots \in \partial E$ , 且  $x_n \rightarrow x$ , 则  $x$  不是内点 (若  $x$  是内点, 则距离很近的某个  $x_N$  也是内点),  $x$  也不是外点 (任意邻域都有距离很近的某个  $x_N$ ), 从而  $x$  是边界点, 即  $x \in \partial E$ .
- 极限点集 (记作  $E'$ ): 只需说明其包含所有的极限点. 若  $x_1, x_2, \dots \in E'$ , 且  $x_n \rightarrow x$ , 则由极限点的定义, 存在  $y_1, y_2, \dots \in E$  使得  $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$ , 这意味着  $y_n \rightarrow x$ , 从而  $x$  也是极限点, 即  $x \in E'$ .
4. 开集的任意并: 设  $E = \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ , 其中  $I_\lambda$  是开集.  $\forall x \in E, \exists \lambda$  使得  $x \in I_\lambda$ . 从而  $\exists \delta > 0$  使得  $U(x, \delta) \subset I_\lambda \subset E$ , 即  $E$  是开集. 开集的有限交: 设  $E = \cap_{i=1}^n I_i$ , 其中  $I_i$  是开集.  $\forall x \in E, \exists \delta_i > 0$  使得  $U(x, \delta_i) \subset I_i$ . 取  $\delta = \min_{i=1, 2, \dots, n} \delta_i > 0$ . 则  $\forall i = 1, 2, \dots, n, U(x, \delta) \subset U(x, \delta_i) \subset I_i$ , 从而  $U(x, \delta) \subset \cap_{i=1}^n I_i = E$ . 开集的任意交: 反例是  $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , 从而  $\cap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{0\}$  是闭集, 即开集的任意交不一定是开集. 对于闭集的情形, 只需考察其补集 (闭集的补集是开集) 即可.
5. (1)  $|xy \log(x^2 + y^2)| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} |\log(x^2 + y^2)| \rightarrow 0 \Rightarrow (x^2 + y^2)^{xy} \rightarrow 1$ .
- (2)  $(\frac{xy}{x^2 + y^2})^x \leq (\frac{1}{2})^x \rightarrow 0$ .
- (3)  $|(x + \sin y) \cos \frac{1}{|x| + |y|}| \leq |x + \sin y| \leq |x| + |\sin y| \rightarrow 0$ .
- (4)  $|x^2 y^2 \log(x^2 + y^2)| \leq x^2 |\log(x^2 + y^2)| \leq x^2 |\log x^2| \rightarrow 0 \Rightarrow (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} \rightarrow 1$ . 利用  $|\log x|$  在  $(0, 1)$  上单调递减
- (5)  $x = y \rightarrow 0$  时,  $\frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3} \rightarrow 0$ ;  $x = -y + y^2 \rightarrow 0$  时,  $\frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3} \rightarrow \frac{1}{3}$ ; 从而极限不存在.
- (6)  $\frac{|\sin(xyz)|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \frac{|xyz|}{\sqrt{3} \sqrt{x^2 y^2 z^2}} \leq \frac{|xyz|}{\sqrt{3} \sqrt[3]{|xyz|}} \rightarrow 0$ .
- (7)  $|x \log(x^2 + y^2)| \leq |x \log x^2| \rightarrow 0$ .
- (8)  $x = y \rightarrow 0$  时,  $\frac{x^5 y^3}{x^8 + y^8} \rightarrow \frac{1}{2}$ ;  $x = -y \rightarrow 0$  时,  $\frac{x^5 y^3}{x^8 + y^8} \rightarrow -\frac{1}{2}$ ; 从而极限不存在.
- (9)  $(x, y, z) = (0, y, z) \rightarrow (0, 1, 0), \frac{\sin(xyz)}{x^2 + z^2} \rightarrow 0$ ;  $(x, y, z) \rightarrow (x, 1, x), \frac{\sin(xyz)}{x^2 + z^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ; 从而极限不存在.
- (10)  $(x^2 + y^2)e^{-(|x| + |y|)} \leq (x^2 + y^2)e^{-\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$ . 利用  $|x| + |y| \geq \sqrt{x^2 + y^2}$
- (11)  $x = (x, x, \dots, x) \rightarrow 0$  时,  $\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{|x|^2} \rightarrow n$ ;  $x = (x, 0, \dots, 0) \rightarrow 0$  时,  $\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{|x|^2} \rightarrow 1$ ; 从而极限不存在.

- (12)  $x = y \rightarrow +\infty$  时,  $(1 + \frac{1}{|x|+|y|})^{\frac{x^2}{|x|+|y|}} \rightarrow e^{\frac{1}{4}}$ ;  $x = 0, y \rightarrow +\infty$  时,  $(1 + \frac{1}{|x|+|y|})^{\frac{x^2}{|x|+|y|}} \rightarrow 1$ ; 从而极限不存在.
6. 两个极限都不存在. 第一问:  $x = y \rightarrow 0$  时,  $\frac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)} \rightarrow \frac{1}{2}$ ;  $\frac{f(y)}{f(x)} \leq \frac{1}{2}$ ,  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时,  $\frac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)} \leq \frac{2}{5}$ . 第二问:  $y = f(x) \rightarrow 0$  时,  $\frac{yf^2(x)}{f^4(x)+y^2} \rightarrow 0$ ;  $y = f^2(x) \rightarrow 0$  时,  $\frac{yf^2(x)}{f^4(x)+y^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ .
7. 结论不对. 定义  $f(x, y) = 1_{\{y=x^2\} \cap \{x \neq 0\}}$  即可. 这个题告诉我们线性条件太弱了, 高维空间还有很多曲线/流形呢.
8. 结论都不对, 构造  $\mathbf{x}_k = (0, \dots, 0, k, 0, \dots, 0)$ , 其中  $k$  的位置在  $1 + \text{mod}(k, n)$  上.
9. 构造  $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ . 除非  $x = \frac{1}{k\pi} (k \in \mathbb{Z})$ , 否则  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  根本不存在.
10.  $\Rightarrow$ : 考虑开集  $E \subset \mathbb{R}^m$  和它的原像  $\mathbf{f}^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^n$ . 对于  $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbf{f}^{-1}(E)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in E$ , 由于  $E$  是开集, 从而  $\exists \delta > 0$  使得  $U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \delta) \subset E$ . 由连续性知存在  $\epsilon$  使得  $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0, \epsilon)$ ,  $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| < \delta$ , 这意味着  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \delta) \subset E$ , 从而  $\mathbf{x} \in \mathbf{f}^{-1}(E)$ , 即  $U(\mathbf{x}_0, \epsilon) \subset \mathbf{f}^{-1}(E) \Rightarrow \mathbf{f}^{-1}(E)$  开.
- $\Leftarrow$ :  $\forall \delta > 0$ , 考虑开集  $E = U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \delta) \subset \mathbb{R}^m$ , 其原像  $\mathbf{f}^{-1}(E)$  也开, 且  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{f}^{-1}(E)$ , 从而  $\exists \epsilon > 0$  使得  $U(\mathbf{x}_0, \epsilon) \subset \mathbf{f}^{-1}(E) \Rightarrow \mathbf{f}(U(\mathbf{x}_0, \epsilon)) \subset U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \delta)$ , 即只要  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \epsilon$  就有  $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| < \delta$ . 这就是连续性的定义.
11.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$ . 这个函数在  $(0, 0)$  处不连续, 但固定一个变元后对另一个变元连续.
12. 引入函数  $g(\mathbf{x}) = |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}|$ . 这是有界闭集上的连续函数, 从而  $g(\mathbf{x})$  能在某个  $\mathbf{x}_0$  处取到最小值  $g(\mathbf{x}_0)$ . 注意到如果  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{x}_0$ , 则  $g(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) = |\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)| < |\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0| = g(\mathbf{x}_0)$ , 而这与  $\mathbf{x}_0$  是  $g(\mathbf{x})$  的最小值点矛盾. 从而  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ , 即  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  存在解. 唯一性由  $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  保证, 因为  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$  且  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  会与这一不等式矛盾.
13. 由有界闭集上的连续函数的性质, 可设  $f(x_1, y_1) = M, f(x_2, y_2) = m$ . 由于连接两点  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  的不交道路有无穷多条, 在每一条道路上使用介值定理都会出现一个  $\xi, \eta$  使得  $f(\xi, \eta) = c$ , 因此有无穷多组  $(\xi, \eta)$ .
14. 注意到同时放大缩小  $\mathbf{x}$  的若干倍不会影响不等式结果, 且  $|\mathbf{x}| = 0$  时不等式自然成立, 因此不妨设  $|\mathbf{x}| = 1$ . 注意到  $\{|\mathbf{x}| = 1\}$  是有界闭集, 且  $|\mathbf{A}\mathbf{x}|$  对  $\mathbf{x}$  连续恒取正值, 由最值定理知  $\exists \lambda > 0$  使得  $|\mathbf{A}\mathbf{x}| \geq \lambda > 0$ .
15. 注意到函数  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - M_0|$  是有界闭区域  $D$  上的连续函数, 因此必然能取到其最小最大值, 所以存在最近的点也存在最远的点.
16. 令  $(x_1, y_1) = (0, \frac{8\epsilon^2}{\delta})$  和  $(x_2, y_2) = (\frac{\delta}{2}, \frac{8\epsilon^2}{\delta})$ .  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{\delta}{2}, |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = 2\epsilon$ .

### 12.3 补充 (不要求掌握!)

参考 <https://wqgcx.github.io/courses/analysis3.pdf>. 有兴趣的同学也可以参考一些拓扑学讲义.

## 13 第 13 次习题课: 偏导数, 全微分, 梯度

### 13.1 问题

- 求偏导.  $f_1(x, y) = x + (y^2 - 1) \arcsin \sqrt{\frac{y}{x}}, f_2(x, y) = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}, f_3(x, y, z) = e^{\frac{xz}{y}} \log y, f_4(x, y) = \frac{\cos x^2}{y}, f_5(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, f_6(x, y) = (2x + y)^{2x+y}, f_7(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$ .
- 求梯度.  $f_1(x, y) = y^{\sin x}, f_2(x, y) = \arctan \frac{x+y}{x-y}, f_3(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|, f_4(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}, f_5(x, y) = \frac{x+y}{x-y}, \mathbf{f}_6(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$ .
- 求微分方程的解.  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = x \sin(x + y^2), \frac{\partial f_2}{\partial y} = x^2 + 2y, y \frac{\partial f_3}{\partial x} - x \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0, df_4 = (x + \frac{-y}{x^2+y^2})dx + (y + \frac{x}{x^2+y^2})dy$ .
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$  是否在  $\mathbb{R}^2$  上可微?
- 设  $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ . 求证: (1)  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ ; (2)  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$  在  $(0, 0)$  不连续;
- $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  可微.
- $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  在  $\mathbb{R}^2$  上存在, 证明  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  上可微.
- 证明曲面  $F(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}) = 1$  的全体切平面具有公共点, 其中  $F$  可微,  $a, b, c$  为常数.
- 设函数  $f(x, y)$  在圆  $D: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$  上满足  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ . 证明  $f(x, y)$  在圆  $D$  上恒等于常数.

9. 求指定的偏导数. (1)  $z = \frac{x-y}{x+y+1}$ , 求  $\frac{\partial^8 z}{\partial x^5 \partial y^3}$ . (2)  $z = \sin(xy)$ , 求  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ . (3)  $z = x^y$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .
10. 是否存在定义在  $\mathbb{R}^2$  上的函数  $f(x, y)$ , 使得  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处的各个偏导数存在、各个方向导数存在、但不可微?
11. 是否存在定义在  $\mathbb{R}^2$  上的函数  $f(x, y)$ , 给定两个不共线的方向  $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ , 在每一点处  $f(x, y)$  沿  $\vec{l}_1, \vec{l}_2$  的方向导数都存在且为 0, 但是  $f(x, y)$  不为常数函数?
12. 求  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  在  $(0, 0)$  处各个方向的方向导数.
13. 设  $k \geq 2$  为一正整数, 函数  $f(x, y)$  在极坐标  $(r, \theta)$  下有表达式  $f(x, y) = \begin{cases} r \sin k\theta, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . (1) 求在  $(0, 0)$  处各个方向的方向导数; (2)  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处是否连续? (3)  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处是否可微?
14. 设  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ . 若方向  $l$  与  $(1, 0)$  的夹角为  $\pi/3$ , 与  $(0, 1)$  的夹角为  $\pi/6$ , 求  $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0)$ .
15. 若函数  $f(x, y, z)$  满足  $\forall t > 0, f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$ , 证明  $xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = kf(x, y, z)$ .
16. 求下列方程所确定的函数  $z = z(x, y)$  的偏导数.  $f(x+2y+3z, x^2+y^2+z^2) = 0, z = f(xyz, z-y), x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1, x + y + z = e^{-(x+y+z)}$ .
17. 设由函数方程  $F(u^2 - x^2, u^2 - y^2, u^2 - z^2) = 0$  所确定的隐函数  $u = u(x, y, z)$ , 证明  $\frac{u}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 1$ .
18. 由方程式  $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}$  确定隐函数  $z = z(x, y)$ , 求  $z(x, y)$  的所有二阶偏导数.
19. 若  $f(\xi, \eta)$  满足方程  $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$ , 证明函数  $z = f(x^2 - y^2, 2xy)$  也满足方程  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ .

## 13.2 解答

1. (1)  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 - \frac{(y^2-1)\sqrt{y}}{2x\sqrt{x-y}}, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y \arcsin \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y^2-1}{2\sqrt{xy-y^2}}$ .
- (2)  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{(\cos y + y \sin x)(1 + \sin x + \sin y) - \cos x(x \cos y - y \cos x)}{(1 + \sin x + \sin y)^2}, \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{-(x \sin y + \cos x)(1 + \sin x + \sin y) - \cos y(x \cos y - y \cos x)}{(1 + \sin x + \sin y)^2}$ .
- (3)  $\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{z}{y} e^{\frac{xz}{y}} \log y, \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{1}{y} e^{\frac{xz}{y}} - \frac{xz}{y^2} e^{\frac{xz}{y}} \log y, \frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{x}{y} e^{\frac{xz}{y}} \log y$ .
- (4)  $\frac{\partial f_4}{\partial x} = -\frac{2x \sin x^2}{y}, \frac{\partial f_4}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2}$ .
- (5)  $\frac{\partial f_5}{\partial x} = -\frac{4x}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \frac{\partial f_5}{\partial y} = -\frac{4y}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \frac{\partial f_5}{\partial z} = -\frac{4z}{(x^2+y^2+z^2)^3}$ .
- (6)  $\frac{\partial f_6}{\partial x} = 2(2x+y)^{2x+y}(1+\log(2x+y)), \frac{\partial f_6}{\partial y} = (2x+y)^{2x+y}(1+\log(2x+y))$ .
- (7)  $\frac{\partial f_7}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, \frac{\partial f_7}{\partial y} = \frac{\log x}{z} x^{\frac{y}{z}}, \frac{\partial f_7}{\partial z} = -\frac{y \log x}{z^2} x^{\frac{y}{z}}$ .
2. (1)  $\nabla f_1 = (y^{\sin x} \cos x \log y, \sin x \cdot y^{\sin x-1})$ . (2)  $\nabla f_2 = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ . (3)  $\nabla f_3 = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ . (4)  $\nabla f_4 = \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}(y+\frac{1}{y}, x-\frac{x}{y^2})$ .
- (5)  $\nabla f_5 = \frac{2}{(x-y)^2}(-y, x)$ . (6)  $(\nabla f_6)_{ij} = \frac{|\mathbf{x}|^2 \delta_{ij} - 2x_i x_j}{|\mathbf{x}|^4}, i, j = 1, \dots, n$ .
3. (1) 两边对  $x$  积分知  $f_1 = -x \cos(x+y^2) + \sin(x+y^2) + C(y)$ . (2) 两边对  $y$  积分知  $f_2 = x^2 y + y^2 + C(x)$ .
- (3) 作极坐标换元, 则  $\frac{\partial f_3}{\partial \theta} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f_3}{\partial x} y + \frac{\partial f_3}{\partial y} x = 0 \Rightarrow f_3(x, y) = g(r) = g(x^2 + y^2)$ .
- (4) 可以写成  $df_4 = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + \frac{1}{1+\frac{y}{x^2}}d(\frac{y}{x}) \Rightarrow f_4 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \arctan(\frac{y}{x}) + C$ .
4. 我们只需关注在  $x = 0$  上的可微性, 对  $\sin(xy)$  进行泰勒展开即可.
5. (1) 注意到在坐标轴上  $f \equiv 0$ , 因此  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0)$ . (2)  $f'_x(x, y) = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, f'_y(x, y) = x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , 两者在  $x = y \rightarrow 0$  时没有极限, 因此在  $(0, 0)$  处不连续. (3) 注意到  $xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = o(\sqrt{x^2+y^2})$ , 从而  $f(x, y) = 0x + 0y + o(\sqrt{x^2+y^2})$ , 因此可微.
6.  $f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \stackrel{\text{微分中值定理}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1(x-x_0), y)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) + o(y-y_0) \stackrel{\frac{\partial f}{\partial x} \text{ 的连续性}}{=} [\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1)](x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) + o(y-y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) + o(x-x_0) + o(y-y_0)$ . 然后利用  $o(x-x_0) + o(y-y_0) = o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$ .
7. 两边做全微分得到  $F'_1 \cdot d(\frac{x-a}{z-c}) + F'_2 \cdot d(\frac{y-b}{z-c}) = 0 \Rightarrow F'_1 \cdot ((z-c)dx - (x-a)dz) + F'_2 \cdot ((z-c)dy - (y-b)dz) = 0 \Rightarrow [F'_1 \cdot (z-c)]dx + [F'_2 \cdot (z-c)]dy - [F'_1 \cdot (x-a) + F'_2 \cdot (y-b)]dz = 0$ . 从而法向量为  $(F'_1 \cdot (z-c), F'_2 \cdot (z-c), -F'_1 \cdot (x-a) - F'_2 \cdot (y-b))$ , 在  $(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面方程为  $F'_1 \cdot (z_0 - c)(x - x_0) + F'_2 \cdot (z_0 - c)(y - y_0) - [F'_1 \cdot (x_0 - a) + F'_2 \cdot (y_0 - b)](z - z_0) = 0$ , 其恒过点  $(a, b, c)$ .
8.  $f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \stackrel{\text{Lagrange 微分中值}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y)(y-y_0) = 0$ .
9. (1)  $z = \frac{x-y}{x+y+1} = 1 - \frac{2y+1}{x+y+1}$ . 因此  $\frac{\partial^5 z}{\partial x^5} = \frac{120(2y+1)}{(x+y+1)^6} = \frac{240}{(x+y+1)^5} - \frac{120(2x+1)}{(x+y+1)^6}$ , 从而  $\frac{\partial^8 z}{\partial x^5 \partial y^3} = -\frac{50400}{(x+y+1)^8} + \frac{40320(2x+1)}{(x+y+1)^9}$ .
- (2)  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -x^2 y \cos xy - 2x \sin xy$ . (3)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(y \log x + 1)$ .

10. 存在. 考虑  $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$ .

11. 存在. 考虑  $f(x, y) = 1_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}$ ,  $\vec{I}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{I}_2 = (0, 1)$ .

12. 设  $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ , 则  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(t \cos \theta, t \sin \theta)}{t} = 1$ .

13. (1) 对于方向  $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \sin k\theta$ . (2)  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x, y)| \leq |r| \rightarrow 0$ , 从而连续.

(3) 注意到方向  $(1, 0)$  和  $(0, 1)$  上的方向导数是 0 和  $\sin \frac{k\pi}{2}$ , 因此如果可微, 则在方向  $(\cos \theta, \sin \theta)$  上的方向导数应为  $0 \times \cos \theta + \sin \frac{k\pi}{2} \times \sin \theta = \sin \frac{k\pi}{2} \sin \theta$ . 利用第一问知方向导数应为  $\sin k\theta = \sin \frac{k\pi}{2} \sin \theta, \forall \theta \in [0, 2\pi]$ , 而这是不可能的.

14. 容易求出  $\mathbf{l} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , 从而  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \frac{t}{2}, y_0 + \frac{\sqrt{3}t}{2}) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ .

15. 已知等式两边对  $t$  求导再令  $t = 1$  立得结果.

16. 把  $z$  看成函数  $z(x, y)$ , 对  $x, y$  分别求导即可. (1)  $f'_1(1 + 3\frac{\partial z}{\partial x}) + f'_2(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-f'_1 - 2xf'_2}{3f'_1 + 2zf'_2}$ ;  $f'_1(2 + 3\frac{\partial z}{\partial y}) + f'_2(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2f'_1 + 2yf'_2}{3f'_1 + 2zf'_2}$ . (2)  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}) + f'_2\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yzf'_1}{1 - xyf'_1 - f'_2}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}) + f'_2(\frac{\partial z}{\partial y} - 1) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xzf'_1 - f'_2}{1 - xyf'_1 - f'_2}$ . (3)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos y - z \sin x}{y \sin z - \cos x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos z - x \sin y}{y \sin z - \cos x}$ . (4)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1$ .

17. 把  $u$  看成函数  $u(x, y, z)$ , 对  $x, y, z$  分别求导即可.  $\frac{u}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F'_1}{F'_1 + F'_2 + F'_3}$ ,  $\frac{u}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{F'_2}{F'_1 + F'_2 + F'_3}$ ,  $\frac{u}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{F'_3}{F'_1 + F'_2 + F'_3}$ , 加起来是 1.

18. 把  $z$  看成函数  $z(x, y)$ , 对  $x, y$  分别求导即可.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2}{(x+z)^3}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 z^2}{y^2(x+z)^3}$ .

19. 直接暴力计算.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[ 2\frac{\partial f}{\partial \xi} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + \left[ -2\frac{\partial f}{\partial \xi} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 8xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = 4(x^2 + y^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}) = 0$ .

### 13.3 补充 (不要求掌握!)

定义傅里叶变换为  $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i2\pi x \cdot \xi} dx$ , 则逆变换为  $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi x \cdot \xi} d\xi$ .

傅里叶变换的一些性质:

(1) 平移:  $x \rightarrow x + h$ .  $\widehat{f(x+h)}(\xi) = e^{i2\pi h \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$ . (2) 伸缩:  $x \rightarrow \lambda x$ .  $\widehat{f(\lambda x)}(\xi) = \lambda^{-d} \hat{f}(\xi/\lambda)$ . (3) 求导:  $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i2\pi \xi_j \hat{f}$ .

(4)  $f(x)$  是径向函数当且仅当  $\hat{f}(\xi)$  是径向函数. 径向函数是指  $f(x) = f_0(|x|)$  或者  $f(Qx) \equiv f(x)$ , 其中  $Q$  是任意旋转.

(5) 卷积:  $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ . 卷积是指  $f * g = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$ . (6) 高斯函数傅里叶变换不变性:  $\widehat{e^{-\pi|x|^2}} = e^{-\pi|\xi|^2}$ .

利用傅里叶变换求解三大偏微分方程: 拉普拉斯方程、热方程和波方程 (这里只考虑  $\mathbb{R}^3$  的情形).

拉普拉斯方程:  $-\Delta G = \delta(x)$ , 其中  $\Delta G = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})G$ . 两边做傅里叶变换得到  $4\pi^2|\xi|^2 \hat{G} = 1 \Rightarrow \hat{G} = \frac{1}{4\pi^2|\xi|^2}$ . 注

意到  $\hat{G}$  是径向函数, 从而  $G$  也是径向函数. 回顾傅里叶变换的伸缩性质, 当  $x \rightarrow \lambda x$  时,  $\widehat{G(\lambda x)}(\xi) = \lambda^{-1} \hat{G}(\xi)$ . 这表明  $G(x)$  是  $-1$  阶的径向函数, 即  $G(\lambda x) = \lambda^{-1} G(x)$ , 从而  $G(x) = G(\frac{x}{|x|}|x|) = |x|^{-1} G(\frac{x}{|x|}) = |x|^{-1} G_0(|\frac{x}{|x|}|) = |x|^{-1} G_0(1)$ .

另一方面,  $\int_{U(0, \epsilon)} -\Delta G dx = \int_{U(0, \epsilon)} \delta(x) dx = 1 \xrightarrow{\text{分部积分}} -\int_{\partial U(0, \epsilon)} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = 1 \Rightarrow -\int_{\partial U(0, \epsilon)} G'_0(\epsilon) d\sigma = -4\pi \epsilon^2 G'_0(\epsilon) = 1 \Rightarrow G'_0(\epsilon) = -\frac{1}{4\pi \epsilon^2} \Rightarrow G_0(1) = \frac{1}{4\pi}$ . 从而  $G(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$ .

热方程:  $\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta H, H|_{t=0} = \delta(x)$ . 两边做傅里叶变换得到  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = -4\pi^2|\xi|^2 \hat{H}, \hat{H}|_{t=0} = 1 \Rightarrow \hat{H} = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \Rightarrow H = (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ . 其中傅里叶逆变换的求解过程需要利用高斯函数傅里叶变换不变性和伸缩变换公式.

波方程:  $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \Delta W, W|_{t=0} = 0, \frac{\partial W}{\partial t}|_{t=0} = \delta(x)$ . 两边做傅里叶变换得到  $\hat{W} = \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \Rightarrow W = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} e^{i2\pi x \cdot \xi} d\xi = \int_0^\infty \frac{r \sin(2\pi r t)}{2\pi} \int_{S^2} e^{i2\pi x \cdot r\gamma} d\sigma(\gamma) dr = \frac{1}{2\pi|x|} \int_0^\infty \sin(2\pi r t) \sin(2\pi r|x|) dt = \frac{1}{4\pi|x|} \delta(t - |x|)$ . 其中第二个等号用到了球坐标变换

$$\bar{\mathbf{r}} \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{或者简写成 } \mathbf{x} = r\gamma.$$

## 14 第 14 次习题课: 多元函数的泰勒公式、极值问题和隐函数存在定理

### 14.1 问题

1. 设  $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ , 求二元函数  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$  在点  $(a, b)$  处的二阶泰勒多项式.

2. 设  $a < b, n \in \mathbb{N}_+$ , 函数  $f: (a, b) \in \mathbb{R}$  在  $(a, b)$  中每点都有  $(n+1)$  阶导数, 定义二元函数:  $T: (a, b) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  为  $T(x, y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k$ , 求出  $T(x, y)$  对  $y$  的一阶偏导数.

3. 设  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  点邻域有二阶连续偏导数且  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ . (1) 求  $f(0, 0)$  及  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  点的一、二阶偏导数值; (2)  $(0, 0)$  点是否是  $f(x, y)$  的极值点.
4. 设  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $f(x, y)$  在  $B$  上连续且处处存在偏导数,  $|f(x, y)| \leq 1$  恒成立. 证明存在  $(x_0, y_0) \in B$  使得  $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))^2 \leq 16$ .
5. 证明方程  $x + x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)z^2 + \sin z = 0$  在  $(0, 0, 0)$  的某个邻域内唯一确定隐函数  $z = f(x, y)$ , 并求  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处的所有二阶偏导数.
6. 证明:  $\forall p \in \mathbb{R}$ , 存在点 1 的开邻域  $U$ , 存在点 1 的开邻域  $W$ , 存在唯一的函数  $y = f(x), x \in U, f(x) \in W$  满足方程  $x^p + y^p - 2xy = 0$ .
7. 求由方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$  所确定的隐函数的极值.
8. 求函数  $z(x, y) = x^2y(4 - x - y)$  在由直线  $x + y = 6$ ,  $x$  轴和  $y$  轴所围成的区域  $D$  上的最大值与最小值.
9. 求函数  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 4xyz$  在  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  上的最大最小值.
10. 设平面  $K : x + 2y + 3z = 6$  与  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴分别交于三点  $A, B, C$ . 动点  $H$  与平面  $K$  保持恒定的距离 1,  $H$  在平面  $K$  上的垂直投影为  $M$ . 假设  $M$  是在以  $A, B, C$  为顶点的三角形  $\triangle ABC$  之中,  $M$  到三条边  $BC, CA, AB$  的距离分别记为  $p, q, r$ . (1) 求出三角形  $\triangle ABC$  的面积; (2) 用  $p, q, r$  表示以  $A, B, C, H$  为四个顶点的四面体的表面积  $S(p, q, r)$ ; (3) 写出变量  $p, q, r$  必须满足的约束条件; (4) 求以  $p, q, r$  为变量的函数  $S(p, q, r)$  的条件极值的稳定点.
11. 求椭圆  $18x^2 + 5y^2 = 45$  与直线  $4x + 3y = 16$  之间的最短距离.
12. 求椭圆  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  的长半轴和短半轴.
13. 求曲线  $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 35 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  在点  $(5, -3, -1)$  处的切线与法平面方程.
14. 证明螺旋线  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = b\theta$  的切线与  $z$  轴成定角.

## 14.2 解答

1.  $\arctan \frac{x}{y}$  在给定  $(a, b)$  的二阶泰勒多项式是  $\arctan \frac{a}{b} + \frac{1}{2}d^2f(a, b)$ .  $df(a, b) = \frac{1}{a^2 + b^2}(b(x - a) - a(y - b))$ .  $d^2f(a, b) = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}(-2ab(x - a)^2 + 2(a^2 - b^2)(x - a)(y - b) + 2ab(y - b)^2)$ . 因此二阶泰勒多项式是  $\arctan \frac{a}{b} + \frac{1}{a^2 + b^2}(b(x - a) - a(y - b)) + \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}(-ab(x - a)^2 + (a^2 - b^2)(x - a)(y - b) + ab(y - b)^2)$ .
2.  $\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x - y)^n$ .
3. (1) 由条件得  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (f(x, y) - xy) = 0 \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$ . 由极限与无穷小的关系  $\frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + o(1) \Rightarrow f(x, y) = xy + o(\rho^2)$ . 对比二阶泰勒公式, 由唯一性知  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ . (2) 由极值的充分判别法,  $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{bmatrix}$  是不定矩阵, 因此  $(0, 0)$  不是极值点.
4. 构造辅助函数  $F(x, y) = f(x, y) + 2(x^2 + y^2)$ . 则  $|F(0, 0)| \leq 1$ , 且对于  $\forall (x, y) \in \partial B$  成立  $F(x, y) \geq 1$ . 从而  $F(x, y)$  在  $B$  内部取到最小值, 记为  $(x_0, y_0)$ . 这意味着  $F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow f'_x(x_0, y_0) = -4x_0, f'_y(x_0, y_0) = -4y_0 \Rightarrow (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))^2 = 16(x_0^2 + y_0^2) \leq 16$ .
5.  $F(0, 0, 0) = 0, F_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$ , 然后用隐函数存在定理.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = -2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$ .
6.  $F(1, 1) = 0$ . 当  $p \neq 2$  时, 有  $F_y(1, 1) = py^{p-1} - 2x|_{(1, 1)} = p - 2 \neq 0$ , 然后用隐函数存在定理. 当  $p = 2$  时, 我们成立  $x^p + y^p - 2xy = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 = 0$  等价于  $y = x$ .
7. 由  $\begin{cases} z'_x = \frac{x-1}{3-z} = 0 \\ z'_y = \frac{y+2}{3-z} = 0 \end{cases}$  得到唯一驻点  $(1, -2)$ . 当  $x = 1, y = -2$  时,  $z = -2$  或 8. 代入每种取值后得到最大最小值是 8 和  $-2$ . 虽然严格意义上我们要验证它们的二阶导, 但我们知道在这个隐函数中极大极小值必然存在, 从而唯二的驻点自然分别对应了极大极小值.
8. 函数在闭区域  $D$  上的最大值与最小值, 或者在  $D$  驻点处达到, 或者在区域的边界上达到. 我们先求  $D$  内驻点. 在

$D$  内解方程组  $\begin{cases} z'_x = 2xy(4-x-y) - x^2y = xy(8-3x-2y) = 0 \\ z'_y = x^2(4-x-y) - x^2y = x^2(4-x-2y) = 0 \end{cases}$  得到唯一驻点  $(2, 1)$  并求得  $z(2, 1) = 4$ . 再考察

$z(x, y)$  在区域  $D$  的边界上情况. 在坐标轴上  $z(x, y) \equiv 0$ . 在边界  $x + y = 6$  上有  $z(x, y) = 2x^3 - 12x^2$ , 其最大最小值为 0 和 -64. 从而在区域  $D$  上最大值是 4, 最小值是 -64.

9. 注意到  $f(x, y, z) = -f(-x, -y, -z)$ , 且  $f(kx, ky, kz) = k^3 f(x, y, z)$ , 因此我们只需在  $\partial D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  上考虑函数最值问题. 由 Lagrange 乘子法, 定义辅助函数  $g(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ , 令各个偏导数为 0, 可以得到  $3x^2 - 4yz + 2\lambda x = 3y^2 - 4xz + 2\lambda y = 3z^2 - 4xy + 2\lambda z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (1, 0, 0), (-1, 0, 0), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}), (\frac{7}{\sqrt{114}}, \frac{7}{\sqrt{114}}, \frac{-4}{\sqrt{114}}), (\frac{-7}{\sqrt{114}}, \frac{-7}{\sqrt{114}}, \frac{4}{\sqrt{114}})$  (其余轮换对称情形已省略). 把每种取值代入原式得到最大最小值分别是  $\pm \frac{1813}{114\sqrt{114}}$ .

10. (1)  $A = (6, 0, 0), B = (0, 3, 0), C = (0, 0, 2)$ .  $(B - A) \times (C - A) = (-6, 3, 0) \times (-6, 0, 2) = (6, 12, 18)$ . 因此三角形  $\triangle ABC$  的面积是  $\frac{1}{2}|(B - A) \times (C - A)| = 3\sqrt{14}$ .

(2) 三角形  $ABC$  的三边长:  $|BC| = \sqrt{13}, |CA| = 2\sqrt{10}, |AB| = 3\sqrt{5}$ . 以  $A, B, C, H$  为四个顶点的四面体的表面积是  $3\sqrt{14} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}2\sqrt{10}\sqrt{1+q^2} + \frac{1}{2}3\sqrt{5}\sqrt{1+r^2} = 3\sqrt{14} + \frac{\sqrt{13}}{2}\sqrt{1+p^2} + \sqrt{10}\sqrt{1+q^2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{1+r^2}$ .

(3) 变量  $p, q, r$  必须满足的约束条件是  $\frac{1}{2}\sqrt{13}p + \frac{1}{2}2\sqrt{10}q + \frac{1}{2}3\sqrt{5}r = 3\sqrt{14}$ , 即  $\sqrt{13}p + 2\sqrt{10}q + 3\sqrt{5}r - 6\sqrt{14} = 0$ .

(4) 由 Lagrange 乘子法, 定义辅助函数  $V(p, q, r, \lambda) = S(p, q, r) + \lambda(\sqrt{13}p + 2\sqrt{10}q + 3\sqrt{5}r - 6\sqrt{14})$ .  $S(p, q, r)$  条件极值的稳定点  $(p_0, q_0, r_0)$  来自于辅助函数  $V(p, q, r, \lambda)$  的稳定点  $(p_0, q_0, r_0, \lambda_0)$ :  $\frac{\sqrt{13}}{2} \frac{p_0}{\sqrt{1+p_0^2}} + \lambda_0 \sqrt{13} = 0, \sqrt{10} \frac{q_0}{\sqrt{1+q_0^2}} + \lambda_0 2\sqrt{10} = 0, \frac{3\sqrt{5}}{2} \frac{r_0}{\sqrt{1+r_0^2}} + \lambda_0 3\sqrt{5} = 0, \sqrt{13}p_0 + 2\sqrt{10}q_0 + 3\sqrt{5}r_0 - 6\sqrt{14} = 0$ . 因此  $-2\lambda_0 = \frac{p_0}{\sqrt{1+p_0^2}} = \frac{q_0}{\sqrt{1+q_0^2}} = \frac{r_0}{\sqrt{1+r_0^2}}$ . 因为  $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$  是  $t$  的严格上升函数, 因此  $p_0 = q_0 = r_0$ . 代入  $\sqrt{13}p + 2\sqrt{10}q + 3\sqrt{5}r - 6\sqrt{14} = 0$  得  $p_0 = q_0 = r_0 = \frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{13}+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}}$ . 所以以  $p, q, r$  为变量的函数  $S(p, q, r)$  的条件极值的稳定点只有一个  $(\frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{13}+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}}, \frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{13}+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}}, \frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{13}+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}})$ .

11. 点  $(x, y)$  到直线的距离是  $\frac{|4x-3y+16|}{5} = \frac{4x-3y+16}{5}$ , 约束条件是  $18x^2 + 5y^2 = 45$ . 使用 Lagrange 乘子法得到驻点  $(x, y) = (\frac{10}{11}, \frac{-27}{11})$  和  $(\frac{-10}{11}, \frac{27}{11})$ . 从而距离是 1. 我们还可以使用 Cauchy 不等式:  $(18x^2 + 5y^2)(\frac{8}{9} + \frac{9}{5}) \geq (4x - 3y)^2 \Rightarrow (4x - 3y)^2 \leq 121 \Rightarrow 4x - 3y \geq -11 \Rightarrow \frac{4x-3y+16}{5} \geq 1$ .

12. 显然椭圆的中心在  $(0, 0, 1)$ , 只需求椭圆到该点的最大与最小距离, 即求  $d^2 = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$  在条件  $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1$  下的最大值和最小值. 然后利用 Lagrange 乘子法. 结果是长半轴长度为  $\sqrt{3}$ , 短半轴长度为 1. 感兴趣的同学也可以使用几何方法求解.

13. 对曲线方程两边微分得到  $xdx + ydy + zdz = dx + dy + dz = 0$ . 这说明  $(dx, dy, dz) \cdot (1, 1, 1) = (dx, dy, dz) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow (dx, dy, dz) = k(y - z, z - x, x - y)$ , 其中  $k \in \mathbb{R}$  是常数. 从而在点  $(5, -3, -1)$  处的切线方程为  $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{-4}$ , 法平面方程为  $x + 3y - 4z = 0$ .

14.  $(dx, dy, dz) = (-a \sin \theta, a \cos \theta, b)$ , 与向量  $(0, 0, 1)$  夹角的余弦值恒为  $\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

### 14.3 补充 (不要求掌握!)

课堂上我们已经知道, 偏导数处处存在的函数不一定可微、甚至不一定连续! 比如说  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$ .

又有, 偏导数处处存在的连续函数也不一定可微! 比如说  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$ .

那有的同学就会觉得, 多元函数可偏导的条件太弱了, 不仅不能保证连续, 也不能保证可微. 那有的同学也会问, 是否存在处处连续, 处处可偏导, 但处处不可微的函数? 在学期的最后, 我们用一些严重超纲的知识来回答一下同学们的这个疑惑, 也希望能够激发同学们学习数学的热情, 或者说在茶余饭后看看下面的过程, 放松放松 (手动狗头).

**定理:** 处处连续且处处可偏导的函数的可微点在  $\mathbb{R}^n$  中稠密, 即  $\mathbb{R}^n$  中任意点的任意邻域内都有该函数的可微点.

**引理 1:** 假设  $f_n(x)$  是  $\mathbb{R}^n$  上的连续函数, 收敛到函数  $f(x)$ , 那么  $f(x)$  的连续点集是可数个开集的交  $\cap_{m=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} E_k(\frac{1}{m})$ , 其中  $E_k(\epsilon) = \{x : |f_k(x) - f(x)| \leq \epsilon\}$ .

**引理 2:** 连续实值函数列的极限函数的不连续点集是第一纲集 (我们回顾第一纲集是指无处稠密集的可列并).

引理 1 的证明: (1) 设  $x_0$  是  $f(x)$  的连续点. 由题设知,  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $k_0$  使得  $|f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ , 且存在  $\delta > 0$

使得  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}, |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \forall x \in U(x_0, \delta)$ . 从而可知, 对  $\forall x \in U(x_0, \delta)$ , 成立  $|f_{k_0}(x) - f(x)| < \epsilon, U(x_0, \delta) \subset E_{k_0}^\circ(\epsilon)$ . 这说明  $x_0 \in \bigcup_{k=1}^\infty E_k^\circ(\epsilon)$ . 又由  $\epsilon$  的任意性, 可推知  $x_0 \in \bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty E_k^\circ(\frac{1}{m})$ .

(2) 设  $x_0 \in \bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty E_k^\circ(\frac{1}{m})$ , 则对  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $m > \frac{3}{\epsilon}$ . 由于  $x_0 \in \bigcup_{k=1}^\infty E_k^\circ(\frac{1}{m})$ , 故存在  $k_0$  使得  $x_0 \in E_{k_0}^\circ(\frac{1}{m})$ . 从而存在  $\delta_0$  使得  $U(x_0, \delta_0) \subset E_{k_0}^\circ(\frac{1}{m})$ , 即  $|f_{k_0}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{3}, \forall x \in U(x_0, \delta_0)$ . 注意到  $f_{k_0}(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 又有  $\delta_1 > 0$  使得  $|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \forall x \in U(x_0, \delta_1)$ . 记  $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$ , 则当  $x \in U(x_0, \delta)$  时有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , 这说明  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续.

引理 2 的证明: 使用之前的记号, 并定义  $G(\epsilon) = \bigcup_{k=1}^\infty E_k^\circ(\epsilon), F_k(\epsilon) = \bigcap_{i=1}^\infty \{x : |f_k(x) - f_{k+i}(x)| \leq \epsilon\}$ . 由  $F_k^\circ(\epsilon) \subset E_k^\circ(\epsilon) \subset G(\epsilon)$  知  $\bigcup_{k=1}^\infty F_k^\circ(\epsilon) \subset G(\epsilon)$ . 又因为  $\bigcup_{k=1}^\infty F_k(\epsilon) = \mathbb{R}^n$ , 从而  $G(\epsilon)^c \subset \bigcup_{k=1}^\infty F_k(\epsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^\infty F_k^\circ(\epsilon) \subset \bigcup_{k=1}^\infty \partial F_k(\epsilon)$ . 注意到  $f_k(x)$  连续, 因而  $F_k(\epsilon)$  是闭集, 边界集没有内点. 这就表明  $G(\epsilon)^c$  是第一纲集.

定理的证明: 考虑偏导数的割线逼近. 对于  $\forall k \in \mathbb{N}_+$ ,  $\frac{f(x_1 + \frac{1}{k}, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\frac{1}{k}}$  是连续函数, 且当  $k \rightarrow +\infty$  时极限函数为  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ , 从而  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  的不连续点是第一纲集. 同理  $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  的不连续点集都是第一纲集, 它们的并也是第一纲集. 从而  $n$  个偏导数都连续的点集是第一纲集的补集. 由于第一纲集没有内点, 因此其补集稠密. 由于  $n$  个偏导数都连续蕴含可微性, 因此我们总结为  $f(x)$  在  $\mathbb{R}^n$  中的可微点是稠密的.

## 15 综合复习

### 15.1 问题

- 求序列极限或函数极限. (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^4 x}{\sqrt{1 - \frac{x \sin x}{2}} - \sqrt{\cos x}}$ . (2)  $a_i > 0, i = 1, \dots, n, \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sum_{k=1}^n a_k^x}{n})^{\frac{1}{x}}$ . (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\frac{k}{n} - \frac{1}{2(n^k)})$ . (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \cos n}$ . (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ .
- 求导数. (1)  $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ . (2)  $g(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ . (3)  $x \neq \pm 1, h(x) = \frac{1}{x^2-1}$ , 求 4 阶导函数.
- 求不定积分  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}$ .
- 求定积分  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .
- 设  $K$  是由曲线弧  $y = e^x (0 \leq x \leq 1)$  及直线  $x = 0, x = 1, y = 0$  所围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体. 求  $K$  的侧面积.
- 证明: 对于  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists 0 < \theta(x) < 1$  使得  $\arctan x = \frac{x}{1 + (\theta(x))^2 x^2}$ .
- 设正整数  $n \geq 2$ . 求  $f(x) = \frac{1-2x+5x^2}{(1-2x)(1+x^2)}$  在点  $x = 0$  处的  $(2n+1)$  阶局部泰勒公式.
- 定义三元函数  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  为  $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & x^2+y^2+z^2 > 0 \\ 0, & x^2+y^2+z^2 = 0 \end{cases}$ . (1) 计算出  $f$  在点  $(0, 0, 0)$  处的三个偏导数. (2)  $f$  是否在点  $(0, 0, 0)$  处可微?
- 设  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  都有连续的二阶导函数, 定义  $h(x, y) = xf(\frac{y}{x}) + g(\frac{y}{x})$ , 计算  $x^2 h_{xx}(x, y) + 2xy h_{yx}(x, y) + y^2 h_{yy}(x, y)$ .
- 设  $F(x, y, z) = x^3 + (y^2 - 1)z^3 - xyz$ . (1) 证明存在  $\mathbb{R}^2$  中点  $(1, 1)$  的一个邻域  $D$  以及  $D$  上唯一的隐函数  $z = z(x, y)$  满足  $F(x, y, z(x, y)) = 0, z(1, 1) = 1$ . (2) 求出点  $(1, 1)$  处函数  $z(x, y)$  的值减少最快的方向上的单位向量  $E$ . (3) 设  $\mathbb{R}^3$  中平面  $x + 2y - 2z = 1$  的  $z$  分量为正的向量  $N$ . 向量  $(E, 0)$  是  $\mathbb{R}^3$  中的向量. 求  $N$  和  $(E, 0)$  的夹角余弦.
- 给定正整数  $n \geq 3$ . 求出半径为 1 的圆的内接  $n$  边形所能达到的最大面积.
- 设  $A(r) = \int_0^{2\pi} \log(1 - 2r \cos x + r^2) dx$ . 利用 (1) 对于  $\forall r \in (-1, 1), 2A(r) = A(r^2)$ ; (2)  $A(r)$  在  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  上有界; 来证明对于  $\forall r \in (-1, 1), A(r) \equiv 0$ .
- 单调可导函数的导函数是否一定连续?
- (不要求掌握). 是否存在处处可微, 但任何区间上都不单调的函数?
- (不要求掌握). 是否存在面积不为 0 的曲线?

### 15.2 解答

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 - \frac{x \sin x}{2} - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^4 x}{x^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 - \frac{x \sin x}{2}} + \sqrt{\cos x}) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{\frac{\sin x}{2} - \frac{x}{2} \cos x} = 16 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x \cos x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} 16 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\cos x - \cos x + x \sin x} = 48$ .



(2) 这个题之前讲过, 这里换用 L'Hospital. 原极限  $= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{\sum_{k=1}^n a_k^x}{n}}{x} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^x \log a_k}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^x} \right) =$

$$\exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^x} \left( \sum_{k=1}^n a_k^x \log a_k \right) \right) = \exp \left( \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^0} \left( \sum_{k=1}^n a_k^0 \log a_k \right) \right) = \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log a_k \right) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}.$$

(3) 注意到  $\frac{k}{n} - \frac{1}{2(n^k)} \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ ,  $k = 1, \dots, n$ . 把所求的极限表达式看作  $\sin x$  在分割小区间  $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$  中取点  $\xi_k = \frac{k}{n} - \frac{1}{2(n^k)}$  处的值, 作 Riemann 和. 因此得到原极限  $= \int_0^1 \sin x dx = -\cos x|_0^1 = 1 - \cos 1$ .

(4)  $1 \leq 2 + \cos n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{2 + \cos n} \leq \sqrt[n]{3}$ , 然后用夹逼定理.

$$(5) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{\tan^2 x}} \right]^{\frac{\tan^2 x}{\sin^2 x}} = e^1 = e.$$

$$2. (1) f'(x) = (e^{\sqrt{x} \log x})' = e^{\sqrt{x} \log x} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \sqrt{x} \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (\log x + 2).$$

$$(2) \text{用变上限积分的导数公式和链式法则计算得 } g'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^3 x}}.$$

$$(3) h^{(4)}(x) = \left( \frac{1}{x^2-1} \right)^{(4)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)^{(4)} = \frac{(-1)^4 4!}{2} \left( \frac{1}{(x-1)^5} - \frac{1}{(x+1)^5} \right) = 12 \left( \frac{1}{(x-1)^5} - \frac{1}{(x+1)^5} \right).$$

3. 由于  $\left[ \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{2}{3}} \right]' = -\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}$ , 从而原函数是  $-\frac{3}{4} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{2}{3}} + C$ . (请原谅菜狗助教, 因为助教确实是瞪出来的)

$$4. \text{记 } I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx. \text{ 做换元 } t = \pi - x, \text{ 则 } I = \int_\pi^0 \frac{(\pi-t) \sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)} d(\pi-t) = \int_0^\pi \frac{(\pi-t) \sin t}{1+\cos^2 t} dt = \int_0^\pi \frac{(\pi-x) \sin x}{1+\cos^2 x} dx. \text{ 因此有 } 2I = I + I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx + \int_0^\pi \frac{(\pi-x) \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\pi \arctan(\cos x)|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}.$$

5. 用旋转体的侧面积公式得到  $K$  的侧面积等于  $2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + ((e^x)')^2} dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx$ . 做变量代换  $t = e^x$ , 此积分等于  $2\pi \int_0^e \sqrt{1+t^2} dt$ . 注意到  $\sqrt{1+t^2}$  有原函数  $\frac{1}{2} t \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \log(t + \sqrt{1+t^2})$ , 因此  $K$  的侧面积为  $\pi e \sqrt{1+e^2} + \pi \log(e + \sqrt{1+e^2}) - \pi \sqrt{2} - \pi \log(1 + \sqrt{2})$ .

$$6. \text{由 Lagrange 微分中值定理, } \arctan x = \arctan x - \arctan 0 = \frac{x}{1+\xi(x)^2} = \frac{x}{1+(\frac{\xi(x)}{x})^2 x^2}. \text{ 取 } \theta(0) = 0, \theta(x) = \frac{\xi(x)}{x} (x \neq 0).$$

$$7. \text{分解因式 } f(x) = \frac{1+x^2-2x+4x^2}{(1-2x)(1+x^2)} = \frac{1+x^2}{(1-2x)(1+x^2)} + \frac{-2x+4x^2}{(1-2x)(1+x^2)} = \frac{1}{1-2x} + \frac{-2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2^2 x^2 + \dots + 2^{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}), \frac{-2x}{1+x^2} = -2x(1-x^2+x^4+\dots+(-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})) = -2x + 2x^3 - 2x^5 + \dots + 2(-1)^{n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}). \text{ 两部分相加得到 } f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{-2x}{1+x^2} = 1 + \sum_{k=1}^n (2^{2k} x^{2k} + (2^{2k+1} + 2(-1)^{k+1}) x^{2k+1}) + o(x^{2n+1}).$$

8. (1)  $f_x(0,0,0) = f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = 0$ . (2) 不可微. 采用反证法, 如果可微, 根据全微分的定义有  $f(x,y,z) = f(0,0,0) + f_x(0,0,0)x + f_y(0,0,0)y + f_z(0,0,0)z + o((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}) = o((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}})$ . 这意味着  $\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = o(1)$ . 而当  $x=y=z \rightarrow 0$  时,  $\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{1}{3\sqrt{3}}$ , 这是矛盾的.

$$9. h_x(x,y) = f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x} f'(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x^2} g(\frac{y}{x}), h_y(x,y) = f'(\frac{y}{x}) + \frac{1}{x} g'(\frac{y}{x}), h_{xx}(x,y) = -\frac{y}{x^2} f'(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x^2} f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^3} f''(\frac{y}{x}) + \frac{2y}{x^3} g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^4} g''(\frac{y}{x}) = \frac{y^2}{x^3} f''(\frac{y}{x}) + \frac{2y}{x^3} g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^4} g''(\frac{y}{x}), h_{yx}(x,y) = -\frac{y}{x^2} f''(\frac{y}{x}) - \frac{1}{x^2} g'(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x^3} g''(\frac{y}{x}), h_{yy}(x,y) = \frac{1}{x} f''(\frac{y}{x}) + \frac{1}{x^2} g''(\frac{y}{x}). \text{ 从而 } x^2 h_{xx}(x,y) + 2xy h_{yx}(x,y) + y^2 h_{yy}(x,y) = 0.$$

10. (1)  $F(x,y,z)$  在  $\mathbb{R}^3$  上有连续的所有偏导数.  $F(1,1,1) = 0, F_z|_{(1,1,1)} = -1 \neq 0$ , 然后用隐函数存在定理. (2)  $F_x|_{(1,1,1)} = 2, F_y|_{(1,1,1)} = 1, \frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1,1)} = -\frac{F_x}{F_z}|_{(1,1,1)} = -\frac{2}{-1} = 2, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1,1)} = -\frac{F_y}{F_z}|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{-1} = 1$ , 函数  $z(x,y)$  在点  $(1,1)$  处的函数值减少最快的方向上单位向量是  $E = -\frac{(2,1)}{|(2,1)|} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ . (3) 平面  $x+2y-2z=1$  的  $z$  分量为正的法向是  $N = (-1, -2, 2)$ .  $N$  和  $(E, 0)$  的夹角余弦等于  $\cos \langle N, (E, 0) \rangle = \frac{N \cdot (E, 0)}{|N|| (E, 0) |} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$ .

11. 答案是  $\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$ , 即正  $n$  边形. 设  $K$  是半径为 1 的圆的内接  $n$  边形,  $K$  的  $n$  条边所对应的圆心角为  $x_1, \dots, x_n$ , 它们满足约束条件:  $x_1 + \dots + x_n = 2\pi, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ . 下面用数学归纳法来证明命题  $P(n)$ : 在上述约束条件下,  $K$  的面积函数  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sin x_i$  达到最大值的点是  $x_1 = \dots = x_n = \frac{2\pi}{n}$ . 在此点处,  $K$  的面积函数达到了最大值  $\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$ . 先证明命题  $P(3)$  是对的. 注意到约束条件限制了  $(x_1, x_2, x_3)$  在一个有界闭集上, 因此面积函数必有最大值点. 容易看出在边界点上有  $\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 = \sin x_1 + \sin(2\pi - x_1) = 0$ , 不可能为最大值. 因此最大值必为内点, 使用拉格朗日乘子法可以推出  $\cos x_1 = \cos x_2 = \cos x_3, x_1 + x_2 + x_3 = 2\pi, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ , 有唯一解  $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2\pi}{3}$ , 此时面积函数值为  $\frac{3}{2} \sin \frac{2\pi}{3}$ , 因此  $P(3)$  是对的. 下面证明如果  $P(n)$  对则  $P(n+1)$  对. 约束条件依然限制了  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  在一个有界闭集上, 根据  $P(n)$  的结论, 边界点处面积函数的最大值为  $\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$ . 利用导数知识容易证明  $x \sin \frac{\pi}{x}$  在  $x \geq 2$  时是严格单调递增的, 因此  $\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} < \frac{n+1}{2} \sin \frac{2\pi}{n+1}$  ( $n=3$  时直接验证即可). 从而最大值必为内点, 使用拉格朗日乘子法可以推出  $\cos x_1 = \dots = \cos x_{n+1}, x_1 + \dots + x_{n+1} = 2\pi, x_1 \geq 0, \dots, x_{n+1} \geq 0$ , 有唯一解  $x_1 = \dots = x_{n+1} = \frac{2\pi}{n+1}$ , 此时面积函数值为  $\frac{n+1}{2} \sin \frac{2\pi}{n+1}$ , 因此  $P(n+1)$  是对的. 由数学归纳法,  $P(n)$  对于任意  $n \geq 3$  均成立.

上面是标准答案. 啰里啰唆了半天, 实际上我们可以直接利用  $\sin x$  在区间  $[0, \pi]$  上的凹性, 有  $\frac{1}{n} \sin x_1 + \dots + \frac{1}{n} \sin x_n \leq$

$\sin[\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)] = \sin \frac{2\pi}{n}$  得到  $P(n) = \frac{1}{2} \sin x_1 + \cdots + \frac{1}{2} \sin x_n \leq \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$ . 另一方面, 存在  $i$  使得  $x_i > \pi$  时显然不能取到面积  $P(n)$  的最大值.

12. 首先证明  $2A(r) = A(r^2)$ . 做变量替换  $x = \pi - t$  得到  $A(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 + 2r \cos t + r^2) dt = \int_{-\pi}^0 \log(1 + 2r \cos t + r^2) dt + \int_0^{\pi} \log(1 + 2r \cos t + r^2) dt$ . 第一部分做变量代换  $t = 2\pi + u$  得  $A(r) = \int_{-\pi}^0 \log(1 + 2r \cos(\pi + u) + r^2) du + \int_0^{\pi} \log(1 + 2r \cos t + r^2) dt = \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r \cos t + r^2) dt = A(-r)$ . 从而  $2A(r) = A(r) + A(-r) = \int_0^{2\pi} \log(1 - 2r \cos x + r^2) dx + \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r \cos x + r^2) dx = \int_0^{2\pi} \log[(1 - 2r \cos x + r^2)(1 + 2r \cos x + r^2)] dx = \int_0^{2\pi} \log[(1 + r^2)^2 - 4r^2 \cos^2 x] dx = \int_0^{2\pi} \log[1 + 2r^2(1 - 2 \cos^2 x) + r^4] dx = \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r^2 \cos(2x) + r^4) dx$ . 做变量代换  $y = 2x$ , 再对下面的第二个式子做变量代换  $z = y - 2\pi$ , 得  $2A(r) = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \log(1 + 2r^2 \cos y + r^4) dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r^2 \cos y + r^4) dy + \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{4\pi} \log(1 + 2r^2 \cos y + r^4) dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r^2 \cos x + r^4) dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r^2 \cos(z + 2\pi) + r^4) dz = \frac{1}{2} A(r^2) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log(1 + 2r^2 \cos z + r^4) dz = \frac{1}{2} A(r^2) + \frac{1}{2} A(r^2) = A(r^2)$ . 综上所述, 任意给定  $r \in (-1, 1)$ , 有  $2A(r) = A(r^2)$ . 再证明  $A(r)$  在  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  上为有界函数. 这是因为  $\log(1 - 2r \cos x + r^2) \leq \log(1 + 2|r| + r^2) \leq \log \frac{9}{4}$ , 且  $\log(1 - 2r \cos x + r^2) \geq \log(1 - 2|r| + r^2) \geq \log \frac{1}{4}$ . 从而  $2\pi \log \frac{1}{4} \leq A(r) = \int_0^{2\pi} \log(1 - 2r \cos x + r^2) dx \leq 2\pi \log \frac{9}{4}$ , 因此是有界函数. 最后, 我们有  $A(r) = \frac{1}{2} A(r^2) = \frac{1}{2^2} A(r^4) = \cdots = \frac{1}{2^n} A(r^{2^n})$ . 选取足够大的  $N$  使得  $\forall n > N$  成立  $|r^{2^n}| < \frac{1}{2}$ . 从而  $2\pi \log \frac{1}{4} \leq A(r^{2^n}) \leq 2\pi \log \frac{9}{4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} A(r^{2^n}) = 0$ . 所以, 对于任意给定的  $r \in (-1, 1)$ , 有  $A(r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} A(r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} A(r^{2^n}) = 0$ .

13. 不一定. 比如说  $f(x) = 10x + x^2 \sin \frac{1}{x}, x \in (-1, 1)$ . 则  $f'(x) = \begin{cases} 10 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 10 & x = 0 \end{cases}$ . 容易看出  $f'(x) > 0$

恒成立, 因此  $f(x)$  单调递增, 但  $f'(x)$  在  $x = 0$  处不连续.

14. 存在. 过程比较复杂, 感兴趣的同学可以在知网或者百度搜索“处处可微、任何区间上不单调的函数”, 或者查看论文原文 <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00029890.1974.11993558?journalCode=uamm20>. 但是对于后面这一渠道, 北京大学似乎没有访问权限, 可能需要付费购买. 这个例子只是告诉大家, 可导函数不单调递减, 不一定必有区间使其单调递增, 很多同学作业犯了这个错误.

15. 存在. 一个经典的例子是 Peano 曲线, 它构造了一个  $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  的一一映射. 过程比较复杂, 感兴趣的同学可以自行搜索. 这个例子告诉大家, 虽然曲线没有粗细, 但是有可能不可求长, 两者一结合, 曲线啥样还不知道呢.

## 16 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学元培学院 21 级本科生徐奕辰同学和另外两位不愿意透露姓名的同学, 他们提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2022 秋高等数学 A I 习题课 12 班和 2023 秋高等数学 A I 习题课 6 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.