高等数学 A I 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2022 年 11 月 8 日

目录

1 第 1 次习题课: 函数, 序列极限

1.1 问题

1. $f(x)=|x\sin^3 x|e^{\cos x}$. 判断函数 $f(x)$ 的有界性、单调性和奇偶性.
2. 证明 $f(x)=x-[x]$ 是有界周期函数.
3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ \cos x+\sin x & x>0 \end{cases}$. 计算 $f(-x)$.
4. $f(x)=e^{x^2}$, $f\circ\phi=1-3x$ 并且 $\phi(x)\ge 0$, 求解 $\phi(x)$ 及其定义域.
5. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{n^2-n}=4$.
6. 设 $q>1, k\in\mathbb{N}_+$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{q^n}=0$.
7. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$.
8. 令 $x_1>0$ 并且 $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.
9. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{1/n}=1$.
10. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$.
11. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\exists$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty, \frac{a_n}{b_n}\to 0, a_n, b_n>0$, 证明 $\frac{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}{\sum_{n=1}^{\infty}b_n}=0$.
13. (Stolz) $0<b_n\uparrow+\infty, a_n>0$, 如果 $(a_n-a_{n-1})/(b_n-b_{n-1})\to L$, 则 $a_n/b_n\to L$.

1.2 解答

1. 注意到 $f(2k\pi+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}(2k\pi+\frac{\pi}{4})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\to\infty$, 所以 $f(x)$ 无界. 又因为 $f(k\pi)\equiv 0$ 且对于 $x\ne k\pi$ 成立 $f(x)\ne 0$, 所以 $f(x)$ 不单调. 由定义知 $f(x)$ 是偶函数.
2. 容易看出 $f(x)$ 有周期 1 且 $|f(x)|\le 1$ 对于所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立.
3. 代入验证即可. $f(-x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ \cos x-\sin x & x<0 \end{cases}$.
4. $f(\phi)=e^{\phi^2}=1-3x\Rightarrow\phi=\sqrt{\log(1-3x)}$. $\phi(x)$ 的定义域是 $\log(1-3x)\ge 0\Leftrightarrow x\le 0$.
5. $|\frac{4n^2}{n^2-n}-4|=\frac{4}{n-1}$. 所以当 $n\ge\frac{4}{\epsilon}+1$ 时, $\frac{4n^2}{n^2-n}$ 与 4 相差不超过 ϵ.
6. 注意到 $q^n=(1+q-1)^n\ge C_n^{k+1}(q-1)^{k+1}=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+\cdots+a_0$ 是 n^k 的高阶无穷大量.
7. 使用夹逼定理. (*) $\ge\frac{\sum_{i=1}^{n}i}{(n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{2(n+1)^2}\to\frac{1}{2}$, (*) $\le\frac{\sum_{i=1}^{n}i}{n^2+n}=\frac{n(n+1)}{2(n^+n)}\to\frac{1}{2}$.
8. 在这类问题中, $\{x_n\}$ 一定会是单调有界的. 首先凑答案, 假设极限存在, 令递推公式两边 $n\to+\infty$, 我们有 $a=\frac{3(1+a)}{3+a}\Rightarrow a=\sqrt{3}$. 然后使用递推公式, 利用数学归纳法, 容易证明如果 $0<x_1<\sqrt{3}$ 则 $0<x_n<x_{n+1}<\sqrt{3}$; 如果 $x_1>\sqrt{3}$ 则 $x_n>x_{n+1}>\sqrt{3}$. 这意味着极限 $\lim x_n$ 存在.
9. $n^{1/n}>(n+1)^{1/(n+1)}\Leftrightarrow n>(1+1/n)^n$ 对于 $n\ge 3$ 成立, 这意味着 $n^{1/n}$ 是单调递减的. 注意到我们作业中已经证明了对于任意 $\epsilon>0$, 成立 $n^{1/n}<1+\epsilon\Leftrightarrow n<(1+\epsilon)^n$ 对于足够大的 n. 然后使用极限定义的 $N-\epsilon$ 语言.
10. $3\le\sqrt[n]{2^n+3^n}\le\sqrt[n]{2\times 3^n}\to 3$.
11. 单调上升性显然. 由于 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}$, 从而 $\sum\limits_n\frac{1}{n^2}<\sum\limits_n\frac{1}{(n-1)n}$, 有上界 2.
12. 使用截断. $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,|a_n/b_n|<\epsilon/2$. 从而 $\sum a_n/\sum b_n=\sum\limits_{i=1}^{N}a_i/\sum\limits_{i=1}^{n}b_i+\sum\limits_{i=N+1}^{n}a_i/\sum\limits_{i=1}^{n}b_i:=I_1+I_2$. 当 n 足够大时, $I_1<\epsilon/2$(因为 $\sum b_n\to+\infty$); 而 $I_2<\epsilon/2$ 对于所有的 $n\ge N$ 成立. 因此当 n 足够大时, 可以让 $I_1+I_2<\epsilon$.
13. 用定义. $\forall\epsilon>0,\exists N$, 使得对于 $\forall n>N$, 成立 $(L-\epsilon)(b_n-b_{n-1})\le(a_n-a_{n-1})\le(L+\epsilon)(b_n-b_{n-1})$. 然后用累加 $\Rightarrow(L-\epsilon)(b_n-b_N)\le a_n-a_N\le(L+\epsilon)(b_n-b_N)\Rightarrow L-\epsilon<\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}<L+\epsilon$. 然后估计误差 $|\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-\frac{a_n}{b_n}|=|\frac{(a_n-a_N)b_N}{(b_n-b_N)b_n}+\frac{a_Nb_N}{(b_n-b_N)b_n}+\frac{a_N}{b_n-b_N}|\le(L+\epsilon)\frac{b_N}{b_n}+\frac{a_Nb_N}{(b_n-b_N)b_n}+\frac{a_N}{b_n-b_N}<\epsilon$ (这三项都是趋于 0 的, 所以你总可以找一个足够大的 n 使得上式成立).

1.3 补充 (不要求掌握!)

作为一个已经学习数学这么多年的北京大学练习生, 我相信你一定关心过下面这个问题: 可导函数和连续函数之间差多少? 事实上, 我们有以下定义和结论:

(1) 开集: 我们称集合 $A \subset \mathbb{R}$ 是开的, 当且仅当 $\forall x \in A$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset A$.

(2) 闭集: 我们称集合 $B \subset \mathbb{R}$ 是闭的, 当且仅当它的补集是开的.

(3) 定义 $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$, 这里 f 是一个函数.

(4) 你可以证明一个函数 f 是连续的当且仅当任意开集 $A \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(A)$ 是开集.

(5) 内点: 我们称 $x \in A$ 是集合 A 的内点当且仅当 $\exists \delta_x > 0$, 使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset A$.

(6) 可数/可列: 我们称集合 A 是可数的当且仅当存在一个从 A 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一一映射或者 $|A| < \infty$, 这里 $|A|$ 是集合 A 中元素的个数.

(7) 极限点: 我们称 x 是集合 A 的极限点, 当且仅当存在一个序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ 使得 $x_i \to x$. 我们用记号 A' 来表示 A 所有极限点构成的集合.

(8) 闭包: 我们称集合 $\bar{A} = A \cup A'$ 是集合 A 的闭包.

(9) 那么, 对于所有 $[a,b]$ 上的连续函数, 至少存在一点可导的函数构成的集合是无处稠密集的可列并 (第一纲集). 这里, 无处稠密集是指其闭包不存在内点的集合, 并且连续函数之间的度量定义为 $\rho_{[a,b]}(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f-g|$.

(10) Baire 纲集定理: 闭集 B_n 无内点, 则 $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ 也无内点. 由此容易知道第一纲集是没有内点的.

2 第 2 次习题课: 序列极限, 函数极限

2.1 问题

1. 证明 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1$.
2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.
3. 计算 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$.
4. 计算 $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$.
5. 计算 $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}$.
6. 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.
7. 计算 $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2}$.
8. 设数列 $a_n \to 0$ 并且 $\lim\limits_{n\to +\infty} |a_{n+1}/a_n| = a$. 证明 $a \le 1$.
9. 令 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1)$, 计算 $\lim\limits_{n\to +\infty} a_n$.
10. $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \exists$, 证明 $\frac{a_n}{n} \to 0$.
11. 证明 $\lim\limits_{n\to +\infty} (n!)^{1/n^2} = 1$.
12. $a_1 = b, a_2 = c, a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$, 计算 $\lim\limits_{n\to +\infty} a_n$.
13. 计算 $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1})^{\frac{1}{x}}$. 其中 $a > 0$ 且 $a \ne 1$.
14. $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, 且 $|f(x)| \le \sin x$. 证明 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \le 1$.
15. 设 $\delta > 0$, 且 $f(x)$ 在区间内 $(-\delta, \delta)$ 有界. $\exists a > 1, b > 1$ 使得 $f(ax) = bf(x)$. 证明当 $x \to 0$ 时 $f(x) \to 0$.
16. a_n 收敛到 a 当且仅当 a_n 的任意子列都收敛到 a.

2.2 解答

1. 注意到 $|\frac{1}{x-1} - 1| = |\frac{x-2}{x-1}|$, 取 $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\epsilon)$.
2. 注意到 $|x^2 \sin\frac{1}{x}| \le |x^2| \to 0$, 取 $\delta = \sqrt{\epsilon}$.
3. $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^3 + h^3}{h} \to 3x^2$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to \frac{1}{2}$.

5. $|\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}|=|2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}|\le|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}|\le\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\to 0$.
6. $\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2}\sim\frac{2\times 2x\times x}{x^2}=4$.
7. 这种形如 $(1+0)^\infty$ 的极限问题一定是去试图凑 e. 原式 $=[(1+\frac{3}{x^2-2})^{\frac{x^2-2}{3}}]^{\frac{3x^2}{x^2-2}}\to e^3$.
8. 如果 $a>1$, 那么 $\exists N$ 使得 $\forall n>N, |a_{n+1}/a_n|>(1+a)/2$, 则 $|a_n|>|a_N|(\frac{1+a}{2})^{n-N}\Rightarrow |a_n|\to\infty$.
9. $\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}(\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}})$. $(*)\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\times\frac{1}{2}\to\frac{1}{4}$. $(*)\ge\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\times\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\to\frac{1}{4}$.
10. $a_n/n=\sum a_n/n-\frac{n-1}{n}\sum a_{n-1}/(n-1)\to 0-1\times 0\to 0$.
11. 使用夹逼定理知 $1\le(n!)^{1/n^2}\le n^{1/n}\to 1$. (PLUS: Stirling: $n!\sim(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$).
12. $a_n-a_{n-1}=(-\frac{1}{2})(a_{n-1}-a_{n-2})=(-\frac{1}{2})^2(a_{n-2}-a_{n-3})=\cdots=(-\frac{1}{2})^{n-1}(a_1-a_0)$, 从而 $a_n-a_0=(a_1-a_0)[1+(-\frac{1}{2})+\cdots+(-\frac{1}{2})^{n-1}]\to\frac{2}{3}(a_1-a_0)\Rightarrow a_n\to\frac{1}{3}a_0+\frac{2}{3}a_1$.
13. 我们已经证明了 $|a-1|^{1/x}\to 1,(1/x)^{1/x}\to 1$, 所以原极限值等于 $\lim\limits_{x\to+\infty}|a^x-1|^{1/x}$. 从而: 如果 $a>1, \lim=a$; 如果 $0<a<1, \lim=1$.
14. 注意到 $|f(x)/\sin x|\le 1$. 令 $x\to 0$ 即可.
15. $x\in(-\delta,\delta),|f(x)|<M\Rightarrow x\in(-\delta/a,\delta/a),|f(x)|=\frac{1}{b}|f(ax)|\le\frac{M}{b}\Rightarrow x\in(-\delta/a^n,\delta/a^n),|f(x)|\le\frac{M}{b^n}\Rightarrow f(x)\to 0$ 当 $x\to 0$ 时.
16. $\Rightarrow$ 是显然的. $\Leftarrow$. 反证法, 如果结论不对, 则 $\exists\epsilon_0>0,\forall N,\exists n_k>N$ 使得 $|a_{n_k}-a|>\epsilon_0$. 取子列 $\{a_{n_k}\}$ 即可.

2.3 补充 (不要求掌握!)

闭区间套定理: $a_n\uparrow,b_n\downarrow,0<b_n-a_n\to 0$, 那么 $\exists$ 唯一一个点 $x\in\cap_n[a_n,b_n]$.
证明: 令 $x=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$ 即可.
有限覆盖定理: $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族开集 (可能不可数). 如果 $[a,b]\subset\cup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$, 则 $\exists I_1,\cdots,I_m\in\{I_\lambda\}$ 使得 $[a,b]\subset\cup_{i=1}^m I_i$.
证明. 如果结论不对, 即不存在可数子覆盖, 那么对于区间 $[a,(a+b)/2]$ 和 $[(a+b)/2,b]$, 至少有一个区间不存在有限子覆盖, 这样一直切半, 由闭区间套, 必然夹出一个点 x. 由于这是开覆盖, 因此存在开集 O_x 使得 $x\in O_x$. 从而由极限知这个开区间迟早会覆盖前面的从某项开始的闭区间列, 这与假设 (不存在有限覆盖) 矛盾.
聚点原理: $|a_n|<M$, 那么 $\exists\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$, 使得 $a_{n_k}\to a$ 当 $k\to\infty$ 时. (有界序列必有收敛子列)
我们给出几种证明方法:
(1) 取 M 使得 $\forall n,|x_n|\le M$, 取 $a_1=-M,b_1=M$. 对 $[a_n,b_n]$ 多次迭代, 每次找到 $\frac{a_n+b_n}{2}$, 这个点将当前区间划分为两个子区间. 两个子区间中必然至少有一个含有无穷项. 任取其中一个含有无穷项的区间作为 $[a_{n+1},b_{n+1}]$. 由闭区间套定理, 最终 a_n,b_n 有相同的极限 x, 同时 x_n 中有无穷项与 x 任意接近. 选取 $x_{n_k}\in[a_i,b_i]$, 则 $x_{n_k}\to x$.
(2) 如果不存在这样的子列, 那么 $\forall x\in[a,b]$, $\exists\delta>0$ 使得 $|(x-\delta,x+\delta)\cap\{x_i\}_{i=1}^n|\le 1$. 这样构造出的开区间集合覆盖了 $[a,b]$, 由有限覆盖定理, 必然存在有限个开区间覆盖整个区间. 而由假设, 对于取出的每个开区间中至多只有原序列中的一个点, 由于开区间的数量为有限个, 可以得出原序列长度也是有限的, 这显然不成立.
柯西收敛: $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n,m>N,|a_n-a_m|<\epsilon$. 这与之前的极限定义是等价的, 但优点是不需要提前知道 “无理数”.
证明. $\Rightarrow$: 取 $\epsilon=1$ 以及满足条件的 N, 那么 $1+\max_{i=1,2,\cdots,N}|x_i|$ 给出了整个序列 $\{x_n\}$ 的界. 取它的一个收敛子列 x_{n_k}, 并记这个极限为 x. 从而 $|x_n-x|\le|x_{n_k}-x|+|x_n-x_{n_k}|\to 0$. $\Leftarrow$: $|a_n-a_m|\le|a_n-a|+|a_m-a|\to 0$.

3 第 3 次习题课: 闭区间上的连续函数

3.1 问题

1. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.
2. $\{x_n\}$ 收敛且 $\{y_n\}$ 收敛, 证明 $\{x_n+y_n\}$ 收敛. $\{x_n\}$ 且 $\{y_n\}$ 发散, 是否有 $\{x_n+y_n\}$ 或者 $\{x_ny_n\}$ 一定发散? 如果 $\{x_ny_n\}$ 是无穷小量, 是否有 $\{x_n\}$ 或者 $\{y_n\}$ 一定是无穷小?
3. 求极限. $\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\cdots$.
4 (不要求掌握). $0\le x_{n+m}\le x_n+x_m$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}\exists$. (这个引理在大偏差理论中很有用).

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. 求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_{n+1-i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} = a$. 其中 $p_k > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} = 0$.
6. 求极限. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})^x$.
7. 证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\exists \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)\exists$, 但是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\exists \not\Leftarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$.
8. 举例说明存在 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处不连续, 但 $|f(x)|$ 处处连续.
9. $a_1, a_2, \cdots, a_p > 0$, 计算 $\lim\limits_{x\to 0+0} (\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i^x}{p})^{\frac{1}{x}}$.
10. 求极限. $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x\log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}$.
11 (不要求掌握). 举例说明存在一个函数处处不连续, 其定义域是 $[0,1]$ 但是值域为区间.
12. $f(x) \in C[a,b]$, $|f(x)|$ 单调. 证明 $f(x)$ 单调.
13 (不要求掌握). $|f(x) - f(y)| \le k|x-y|$. $0 < k < 1$. 证明 $kx - f(x)$ 单调上升并且 $\exists c, f(c) = c$.
14. $f(x) \in C[a,b]$, $\forall x, \exists y$, 使得 $|f(y)| \le \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明 $\exists \xi$, 使得 $f(\xi) = 0$.
15 (不要求掌握). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有第一类间断点, 证明 $f(x)$ 有界.
16. 设 $f(x) \in C[a,b], f(a)f(b) < 0$. 证明 $\forall n = 1, 2, \cdots, \exists \{\xi_i\}_{i=1}^n \subset [a,b], \xi_i \ne \xi_j$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} e^{f(\xi_i)} = n$.
17. 非负函数 $f \in C[0,1], f(0) = f(1) = 0$. 证明 $\forall a \in (0,1), \exists x_0 \in [0,1]$ 使得 $x_0 + a \in [0,1]$ 且 $f(x_0) = f(x_0+a)$. 如果去掉非负条件还对吗?
18. $f_n(x) = x^n + x$. (1) 证明: $\forall n$, $f_n(x) = 1$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 中有且仅有一个根 c_n; (2) 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.
19. 不等于常数的连续周期函数一定有最小正周期. 如果把连续性去掉结论如何?
20 (不要求掌握). f 在 $[a,b]$ 内处处有极限. 证明: (1) $\forall\epsilon > 0$, 在 $[a,b]$ 中使得 $|\lim\limits_{t\to x} f(t) - f(x)| > \epsilon$ 的点至多有有限个. (2) $f(x)$ 至多有可列个间断点.

3.2 解答

1. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (使用不等式 $\frac{i}{i+1} < \frac{i+1}{i+2}$), 那么 $x_n^2 < \frac{1}{2n+1}$, 这意味着 $x_n \to 0$.
2. 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{x_n + y_n\}$ 都收敛, 那么 $\{x_n + y_n - x_n = y_n\}$ 也会收敛. 构造 $x_n = (-1)^{n-1}, y_n = (-1)^n$, 那么 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 发散但是 $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ 都收敛. 再构造 $x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}, x_{2n} = 1, y_{2n-1} = 1, y_{2n} = \frac{1}{2n}$. $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都不是无穷小量但是 $\{x_n y_n\}$ 是无穷小量.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{2\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n-1}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.
4. 考虑 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 的下确界 α. 那么 $\exists n$ 使得 $x_n/n < a + \epsilon$. 设 $\max_{i=1,2,\cdots,n} x_i = M$. 那么 $\frac{x_m}{m} \le \frac{x_n}{m} + \frac{x_{m-n}}{n} \le \frac{2x_n}{m} + \frac{x_{m-2n}}{m}$ (假设 $m = kn + b$) $\le \cdots \le \frac{kx_n}{m} + \frac{x_b}{m} \le \frac{kx_n}{kn+b} + \frac{M}{m} \le \frac{x_n}{n} + \frac{M}{m}$. 选择足够大的 m 使得 $\frac{M}{m} < \epsilon$. 从而 $a \le \frac{x_m}{m} < a + 2\epsilon$.
5. WLOG 令 $a = 0$. 设 $\sup_n\{a_n\} = M$. $\forall\epsilon > 0, \exists N_1, \forall n \ge N_1$, 使得 $|a_n| < \epsilon$; $\exists N_2, \forall n \ge N_2$, 使得 $p_n / \sum\limits_n p_n < \epsilon / N_1$. 令 $n > N_1 + N_2$, 则 $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i p_{n+1-i} / \sum\limits_{i=1}^{n} p_i| \le |\sum\limits_{i=1}^{n-N_1} p_i a_{n+1-i} / \sum\limits_{i=1}^{n} p_i| + |\sum\limits_{i=n-N_1+1}^{n} p_i a_{n+1-i} / \sum\limits_{i=1}^{n} p_i| < \epsilon + \frac{\epsilon}{N_1} \times N_1 \times M = (M+1)\epsilon$.
6. $(e^{ax} - e^{bx})/x = a \cdot \frac{e^{ax}-1}{ax} + b \cdot \frac{1-e^{bx}}{b} \to a - b, \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1/x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3}}}+1} \to \frac{1}{2}$
$(\sin 1/x + \cos 1/x)^x = [(1 + \cos 1/x + \sin 1/x - 1)^{\frac{1}{\cos 1/x + \sin 1/x - 1}}]^{x\cos 1/x + \sin 1/x - 1} = (1/x = t) = e^{(\cos t + \sin t - 1)/t} = e^1$.
7. $x \to 0 \Leftrightarrow x^3 \to 0$, 但是 $x^2 \to 0 \Leftrightarrow x \to 0 + 0$.
8. $f(x) = 1_{\mathbb{Q}} - 1_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$.
9. $(\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i^x}{p})^{1/x} = [1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x - 1)}{p}]^{1/x} = \{[1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x - 1)}{p}]^{\frac{p}{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}}\}^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}{px}} \to e^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}\log a_i}{p}} = (a_1 a_2 \cdots a_p)^{1/p}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x\log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2} \sim \frac{x \cdot 3x}{(2x)^2} = \frac{3}{4}, \lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{3^x-4^x} = \frac{(2/3)^x - 1}{1-(4/3)^x} \sim \frac{x\log(2/3)}{-x\log(4/3)} = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 4 - \log 3}$.
11. $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x + \frac{1}{2} & x \in [0, \frac{1}{2}] \& x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1] \& x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.
12. 不妨设 $|f(x)|$ 单调递增. 只需注意到如果 $f(x_0) = 0$, 那么对于所有的 $x \in [a, x_0]$, $f(x) = 0$.

13. 第一问是定义, 第二问用柯西收敛准则, 重复利用已知不等式来证明 $x, f(x), f(f(x)), \cdots$ 是柯西列.
14. 如果不存在 ξ 使得 $f(\xi)=0$. 那么 $f(x)$ 始终保号, 不妨设 $f(x)>0$. 设 $x_0=\arg\min f(x)$. 这样就不存在 y 使得 $|f(y)| \leq \frac{1}{2} f(x)$, 矛盾.
15. 第一类间断点 $\Rightarrow$ 每一点都有一个邻域有界 $\Rightarrow$ 所有邻域构成开覆盖, 必有有限子覆盖, 有限个有界总能找到最大界.
16. $\exists \eta>0$, 使得 $f([a, b]) \supset[-\eta, \eta]$, 这意味着 $e^{f([a, b])} \supset\left[e^{-\eta}, e^\eta\right] \supset[1-\epsilon, 1+\epsilon]$($\exists$ 一个足够小的 $\epsilon>0$). 从而如果 n 是奇数, 选择 $e^{f(\xi_1)}=1, e^{f(\xi_2)}=1-\epsilon/2, e^{f(\xi_3)}=1+\epsilon/2, e^{f(\xi_4)}=1-\epsilon/3, e^{f(\xi_5)}=1+\epsilon/3, \cdots$; 如果 n 是偶数, 选择 $e^{f(\xi_1)}=1-\epsilon/2, e^{f(\xi_2)}=1+\epsilon/2, e^{f(\xi_3)}=1-\epsilon/3, e^{f(\xi_4)}=1+\epsilon/3, \cdots$.
17. 令 $g(x)=f(x+a)-f(x)$. $g(0) \geq 0, g(1-a) \leq 0$, 用介值定理. 去掉非负条件不对, 比如说 $f(x)=\sin(2\pi x), a=0.7$.
18. (1) 注意到 $f_n \uparrow \in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 且 $f(\frac{1}{2})<1, f(1)>1$, 使用介值定理. (2) 由于 $\forall \epsilon, \exists N$, 使得 $\forall n>N,(1-\epsilon)^n+1-\epsilon<1$. 由于 $f(1-\epsilon)<1=f(c_n)$ 且 $f_n \uparrow \Rightarrow c_n>1-\epsilon$. 由极限定义知 $c_n \rightarrow 1$.
19. 反证法. 如果 $f(a) \neq f(b)$, 考虑正周期序列 $T_n \rightarrow 0$, 则由带余除法, $(b-a) \div T_n=S_n \cdots m_n$, 其中 $0 \leq m_n<T_n \rightarrow 0$. 所以 $a+S_n T_n \rightarrow b$, $f(a)=f(a+S_n T_n) \rightarrow f(b)$ (连续性) $\Rightarrow f(a)=f(b)$, 矛盾. 把连续性去掉则结论不对, 比如说 Dirichlet 函数.
20. (1) 如果集合有无穷多个元素那一定有聚点 (有界序列必有收敛子列). 从而 $x_n \rightarrow x$. 考虑 y_n 使得 $|y_n-x_n|<1/n$, 且 $|f(y_n)-f(x_n)|>\epsilon$(这是集合的定义, 函数极限差 $>\epsilon$ 那么必然存在一个比较近的点使得函数差 $>\epsilon$). 从而 $y_n \rightarrow x$, f 在 x 的极限何在?(极限存在当且仅当任意趋于其的数列极限均相等, 而这里 $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} f(y_n)$ 显然与 $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} f(x_n)$ 不同). (2) 记 (1) 中集合为 A_ϵ. 注意到间断点集合可以写成 $\cup_n A_{1/n}$. 可列个有限元素集合的并元素一定是可列个的.

3.3 补充 (不要求掌握!)

有界性定理: $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 有界.
证明. 如果无界, 则选择 x_n 使得 $f(x_n) \rightarrow \infty$, 那么存在一个子列 $\{x_{n_k}\} \subset\{x_n\}$ 收敛到某个 x(聚点原理). 由连续性知 $f(x)=\infty$, 矛盾.
最值定理: $f(x) \in C[a, b]$, 那么 $\arg\max f(x) \exists$.
证明. 找一个数列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n) \rightarrow \max f(x)$. 利用有界数列必有收敛子列和 $f(x)$ 的连续性.
介值定理: $f(x_1)>0, f(x_2)<0, f(x) \in C[x_1, x_2], \exists x_0$ 使得 $f(x_0)=0$.
证明. 使用 Lebesgue 方法. 令 $x_0=\sup\{x: f(x)>0\}$. 利用连续性知如果 $f(x_0)>0$ 则 x_0 不是上界 (因为根据连续性会有 x_0 的一个邻域都满足 $f(x)>0$), 如果 $f(x_0)<0$ 则有更好的上确界 (同样根据连续性会有 x_0 的一个邻域满足 $f(x)<0$).

4 第 4 次习题课: 导数, 高阶导数

4.1 问题

1. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x)=+\infty$. 证明 $\arg\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \exists$.
2. 证明 $\cos x=\frac{1}{x}$ 有无穷多个正实数根.
3. $f(x) \in C[a, b], x_1, x_2, \cdots, x_n \in[a, b]$. 证明 $\exists \xi \in[a, b]$ 使得 $f(\xi)=\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n f(x_i)$.
4. $f(x)=|x|^{1/4}+|x|^{1/2}-\frac{1}{2} \cos x$. 问 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中有多少个根?
5. $f(x) \in C[0,2], f(0)=f(2)$, 证明 $\exists x_1, x_2 \in[0,2]$ 使得 $|x_1-x_2|=1$ 并且 $f(x_1)=f(x_2)$.
6. $f(x)=\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} \frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$. 讨论连续性.
7. $f(x) \in C(\mathbb{R}), f(x+y)=f(x)+f(y)$. 求解 $f(x)$.
8. $f(x)$ 连续, 问 $|f(x)|$ 连续否?
9. $f(x) \in C[0,1], 0 \leq f(x) \leq 1$, 证明 $\exists t \in[0,1]$ 使得 $f(t)=t$.
10 (不要求掌握). $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, $0 \leq f(x) \leq 1$, 证明 $\exists t \in[0,1]$ 使得 $f(t)=t$.
11. $f(x)$ 在 $x=3$ 连续, $\lim\limits_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3}=2$. 求 $f'(3)$.
12. $f(x)$ 在 x_0 处可导, 计算 $\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x}$.

13. 证明奇函数导数是偶函数, 偶函数导数是奇函数.
14. 求导数. $y=\sqrt[3]{2+3x^3}, y=\arcsin\frac{1}{x^2}, y=\log(\arctan 5x)+\log(1-x), y=e^{\sin^2 x}+\sqrt{\cos x}2^{\sqrt{\cos x}}$.
15. $f(x)=x|x(x-2)|$, 求 $f'(x)$.
16. $f(x), x\in[-1,1], x\le f(x)\le x^2+x$, 证明 $f'(0)=1$.
17. 求导数. $e^{xy}=3x^2y, \arctan y/x=\log\sqrt{x^2+y^2}$.
18. 求导数. $f(x)^{g(x)}, x^{x^x}$.
19. 求 $\frac{x^n}{1-x}, \sin^4 x+\cos^4 x$ 的 n 阶导数.
20. 求 $\arcsin^2 x$ 在 0 处的 n 阶导数.
21. 求极限. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x, \lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n^2]{n}-1), \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}$.
22. $f([a,b])\subset[a,b], |f(x)-f(y)|\le|x-y|$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$, 证明 $\forall x_1\in[a,b]$, 都有 x_n 收敛.

4.2 解答

1. 由极限定义知 $\exists X>0, \forall|x|>X, f(x)>f(0)$. 那么 $\arg\min_{x\in[-X,X]}f(x)=\arg\min_{x\in\mathbb{R}}f(x)$, 由最值定理知存在性.
2. 设 $f(x)=\cos x-1/x$, 那么 $f(2k\pi)>0, f(2k\pi+\frac{\pi}{2})<0$, 由介值定理立得.
3. 注意到 $\min f(x)\le\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\le\max f(x)$. 使用介值定理.
4. 注意到 $f(x)$ 是偶函数. 由于 $\forall x>1$, $f(x)>0$, 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上单调递增, 则 $f(0)<0, f(1)>0\Rightarrow$ 有且仅有一个正实数根. 从而在 $\mathbb{R}$ 上有两个根.
5. 令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$. 那么 $g(0)g(1)\le 0\Rightarrow\exists x\in[0,1]$ 使得 $g(x)=0$.
6. $f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|>1\\ -x & 0<|x|<1\end{cases}$.
7. 先证有理数点. $f(n)=f(1)+f(n-1)=2f(1)+f(n-2)=\cdots=nf(1), f(1)=f(1/n)+f((n-1)/n)=2f(2/n)+f((n-2)/n)=\cdots=nf(1/n)\Rightarrow f(m/n)=mf(1/n)=m/n\times f(1)$. 有理数点满足 $f(x)=xf(1)$, 无理数点用有理数逼近用连续性就可以了.
8. 注意到 $||f(x)|-|f(y)||\le|f(x)-f(y)|$. 因此连续.
9. 令 $g(t)=f(t)-t$, $g(0)\ge 0, g(1)\le 1$, 利用介值定理.
10. 使用 Lebesgue 方法. 令 $x_0=\sup_x\{f(x)>x\}$, 往证 $f(x_0)=x_0$. 如果 $f(x_0)>x_0$, 那么 $\forall x_1, x_0<x_1<f(x_0)$, 都有 $f(x_1)\ge f(x_0)>x_1$. 这意味着 x_0 不是上界. 如果 $f(x_0)<x_0$, 那么 $\forall x_1, f(x_0)<x_1<x_0$, 都有 $f(x_1)\le f(x_0)<x_1$. 这意味着 x_0 不是上确界, 因为有更好的上界. 因此 $f(x_0)=x_0$.
11. 当 $x\to 3$ 时, $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)/(x-3)\times(x-3)\sim 2\times(x-3)=0$. 从而 $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$.
12. $\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x}=\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+\frac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x}\to 2f'(x_0)$.
13. 奇函数导数是偶函数: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{-x\to -x_0}\frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)}=f'(-x_0)$. 同理偶函数导数是奇函数.
14. $y'=\frac{3x^2\sqrt[3]{2+3x^3}}{2+3x^3}, y'=\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}, y'=\frac{5}{\arctan 5x\times(1+25x^2)}+\frac{1}{x-1}, y'=e^{\sin^2 x}\sin 2x-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}2^{\sqrt{\cos x}}(1+\sqrt{\cos x}\log 2)$.
15. 直接计算即可, 注意验证分段点左右导数是否相等. $f'(x)=\begin{cases}3x^2-4x & x<0 \text{ or } x>2\\ 4x-3x^2 & 0\le x<2\\ \nexists & x=2\end{cases}$.
16. 注意到 $f(0)=0$. 从而当 $x\to 0$ 时, $1\leftarrow\frac{x}{x}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x^2+x}{x}\to 1$.
17. 两边同时对 x 求导数, 计算可知 $y'=\frac{y(2-xy)}{x(xy-1)}, y'=\frac{x+y}{x-y}$.
18. 方法都是写成指数函数, $e^{g\log f}, e^{e^{x\log x}\log x}$. 结果是 $f^g(g'\log f+\frac{f}{g}f'), x^{x^x}(x^x(1+\log x)\log x+x^{x-1})$.
19. $\frac{x^n}{1-x}=\frac{x^n-x^{n-1}+x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+x-1+1}{1-x}=-(x^{n-1}+\cdots+x+1)+\frac{1}{1-x}$, 因此 n 阶导数是 $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. 第二个用倍角公式写出来是 $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$. $y'=-\sin 4x$. 由课上已知关于三角函数高阶导数的结论, 知 $y^{(n)}=-4^{n-1}\sin(4x+\frac{n-1}{2}\pi)$.
20. $f'(x)=2\arcsin x/\sqrt{1-x^2}$, 从而 $(1-x^2)f'(x)^2=4f(x)$. 两边求导 $-2xf'(x)^2+2(1-x^2)f'(x)f''(x)=4f'(x)\Rightarrow -xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2$. 两边求 $n-2$ 次导数, 并代入 $x=0$, 利用 Leibniz 公式知道 $f^{(n)}(0)=(n-2)^2f^{(n-2)}(0)$. 然后再把 $f'(0), f''(0)$ 算出来用递推就可以了.

21. (1) $\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1}\to\frac{1}{2}$. (2) $n(\sqrt[n^2]{n}-1)=n(e^{\log n/n^2}-1)\sim n\log n/n^2\to 0$.
(3) $(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}=[(1+2x)^{1/(2x)}]^{2(x+1)^2}\to e^2$.
22. 回忆: 这种题一定是单调数列. 容易验证数列是良定义的, 即不会跑出区间 $[a,b]$ 外. 如果 $x_n\ge x_{n-1}$, 有 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(f(x_n)+x_n)$ (利用 $f(x_n)-f(x_{n-1})\ge x_{n-1}-x_n$) $\ge\frac{1}{2}(f(x_{n-1})+x_{n-1})=x_n$. 从而如果 $x_2\ge x_1$, 则这成为单调上升有界数列, 必收敛. 同理若 $x_{n-1}\ge x_n$ 也可以推出 $x_n\ge x_{n+1}$.

4.3 补充 (不要求掌握!)

参考 https://wqgcx.github.io/courses/analysis1.pdf.

5 第 5 次习题课: 隐函数求导, 微分, 不定积分

5.1 问题

1. 求出闭区间 $[-1,1]$ 上的一元函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 达到最小值的所有 $[-1,1]$ 上的点.
2. 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x^m\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 其中 m 为正整数. 在 $x\ne 0$ 处, 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$. 求 m 满足的条件, 使得 $f(x)$ 有连续的二阶导函数.
3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\log(1+x)}{x}+\frac{x}{2} & x>0\\ a & x=0\\ \frac{\sin bx}{x}+cx & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 确定常数 a,b,c, 的值 (需要用洛必达法则).
4. $y=e^{-x^2}$, 求 $y^{(4)}|_{x=0}$.
5. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\arccos\frac{x}{a}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
6. $y^2\tan(x+y)-\sin(x-y)=0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
7. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
8. 求函数 $f(x)=x^{\arcsin x}(0<x<1)$ 的导函数 $f'(x)$.
9. 求函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 点的 3 阶导数 $f'''(0)$.
10. 设 $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$, 求 $f^{(n)}(x),n\in\mathbb{N}$.
11. 求方程 $y^2+2\log y=x^4$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的二阶导数.
12. 判断下列结论是否正确.
(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0)>0$, 那么: (1.1) $f(x)$ 在 x_0 点一定连续. (1.2) $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内一定连续. (1.3) $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内一定单调上升.
(2) $f(x)$ 在 x_0 点二阶可导, 那么: (2.1) $f(x)$ 在 x_0 点一定连续. (2.2) $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内一定连续.
13. 设 $f(x)=e^{x(x-1)\cdots(x-2021)}$, 求 $f'(2021)$.
14. 设 $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
15. 设 $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 并化简.
16. 求积分. $\int\frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)}dx,\int\frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6}dx,\int\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx,\int\frac{3+5x}{\sqrt{4x^2-4x+5}}dx$.
17. 设 $y=f(x)=x^3,x=g(t)=t^2,y=f(g(t))=t^6,\Delta t=0.1,\Delta x=g(1+0.1)-g(1)=0.21$.
(1) 当把 t 作为自变量时, 函数 $y=f(g(t))$ 的二阶微分记为 d_t^2y, 函数 $x=g(t)$ 的一阶微分记为 d_tx. 计算出: 当 $t=1,\Delta t=0.1$ 时, 函数 $y=f(g(t))$ 的二阶微分 $d_t^2y|_{t=1,\Delta t=0.1}$ 和函数 $x=g(t)$ 的一阶微分 $d_tx|_{t=1,\Delta t=0.1}$.
(2) 当把 x 作为自变量时, 函数 $y=f(x)$ 的二阶微分记为 d_x^2y, x(看作 x 的函数) 的一阶微分记为 d_xx. 计算出: 当 $x=1,\Delta x=0.21$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的二阶微分 $d_x^2y|_{x=1,\Delta x=0.21}$ 和函数 x(看作 x 的函数) 的一阶微分 $d_xx|_{x=1,\Delta x=0.21}$.
(3) $\frac{d_t^2y}{(d_tx)^2}|_{t=1,\Delta t=0.1}$ 与 $\frac{d_x^2y}{(d_xx)^2}|_{x=1,\Delta x=0.21}$ 相等吗?
18. 求极限. $\lim\limits_{x\to0+0}x^x,\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x+\tan x},\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}\cdots\cos\frac{a}{2^n}\ (a\in(0,1)),\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^{x^2},\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.
19. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=0$.

20. 设 $f(x) \in C[0,1]$, 如果极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(0)+f(1/n)+f(2/n)+\cdots+f(1)}{n} = M$, 其中 $M = \max_{x\in[0,1]} f(x)$, 则 $f(x) \equiv M$.

21 (Riemann-Lebesgue 引理). $f \in R[a,b], g \in R[0,T], g(x+T) = g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)dx \to \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.

5.2 解答

1. $f(1) = f(-1) = 1, f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2x}{3(x^2-1)^{2/3}} = \frac{2[(x^2-1)^{2/3}-x^{4/3}]}{3x^{1/3}(x^2-1)^{2/3}} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $-1 < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 注意到 $f(0) = 1$. 从而达到最小值的点是 $-1, 0, 1$.

2. $f'(x) = -x^{m-2}\cos\frac{1}{x} + mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}, f''(x) = -x^{m-4}\sin\frac{1}{x} - (m-2)x^{m-3}\cos\frac{1}{x} - mx^{m-3}\cos\frac{1}{x} - m(m-1)x^{m-2}\sin\frac{1}{x}$. 要使得 $f''(0)$ 存在需要 $f'(0)\exists, f'(x) \to f'(0)$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\exists \Rightarrow m \geq 4$, 二阶导函数连续性意味着 $f''(x) \to f''(0) \Rightarrow m \geq 5$.

3. 连续性: $f(0+0) = a \Rightarrow a = 1, b = 1$. $f'_+(0) = 0, f'_-(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (需要用洛必达).

4. $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}, y''' = -2x(4x^2-2)e^{-x^2} + 8xe^{-x^2}, y'''' = (-24x^2+12)e^{-x^2} + (16x^4-24x^2)e^{-x^2}$. 从而 $y''''(0) = 12$.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

6. 两边求导, $2yy'\tan(x+y) + \frac{y^2}{\cos^2(x+y)}(y'+1) + (y'-1)\cos(x-y) = 0 \Rightarrow y' = \frac{\cos^2(x+y)\cos(x-y)-y^2}{\cos^2(x+y)\cos(x-y)+y^2+2y\sin(x+y)\cos(x+y)}$.

7. $y' = a^a x^{a^a-1} + a^{x^a+1}x^{a-1}\log a + a^{a^x+x}(\log a)^2$.

8. $f(x) = e^{\arcsin x \log x}, f'(x) = x^{\arcsin x}(\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x})$.

9. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2-8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow f'''(0) = -2$.

10. $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{4}(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}})$.

11. 两边求导, $2yy' + 2\frac{y'}{y} = 4x^3 \Rightarrow y^2y' + y' = 2x^3y$, 再求一次, $2y(y')^2 + y^2y'' + y'' = 6x^2y + 2x^3y'$, 利用 $y' = \frac{2x^3y}{y^2+1}$, 得到 $y'' = \frac{6x^2y}{y^2+1} + \frac{4x^6y}{(y^2+1)^2} - \frac{8x^6y^3}{(y^2+1)^3}$.

12. (1.1) 可导一定连续. (1.2)(1.3) 不一定, 比如说 $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x + x^2 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$. (2.1) (2.2) 都是对的.

13. $f'(x) = e^{x(x-1)\cdots(x-2021)}[x(x-1)\cdots(x-2021)]'$, 从而 $f'(2021) = 2021!$.

14. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{sgn}(t)$, 注意到 t, x 同号, 因此 $\frac{dy}{dx} = \mathrm{sgn}(x)$.

15. 直接计算, 小心化简. $y'(x) = \frac{1}{x^4+1}$.

16. (1) $\frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{x}{(x^2+1)}$, 因此积分后是 $2\log|x+1| + \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$.

(2) $\frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6} = \frac{11}{10\sqrt{3}}\frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{11}{10\sqrt{3}}\frac{1}{x+\sqrt{3}} - \frac{1}{5\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{x^2+2} + \frac{1}{5}\frac{x}{x^2-3} - \frac{1}{5}\frac{x}{x^2+2}$, 因此积分后是 $\frac{11}{10\sqrt{3}}\log|x-\sqrt{3}| - \frac{11}{10\sqrt{3}}\log|x+\sqrt{3}| - \frac{1}{5\sqrt{2}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{10}\log|x^2-3| - \frac{1}{10}\log(x^2+2) + C$.

(3) $\frac{\cos^3 x dx}{\sin x+\cos x} = \frac{d\tan x}{(\tan x+1)(\tan^2 x+1)^2}$, 后面用有理式展开积分. 结果是 $\frac{1}{4}\log|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin x\cos x + \frac{1}{4}\cos^x + C$. (注: 本题也可以用对偶积分, 考虑 $\int \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$).

(4) $\frac{3+5x}{\sqrt{(2x-1)^2+4}} = \frac{5(x-\frac{1}{2})}{2\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}} + \frac{11}{4\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}}$, 因此积分后是 $\frac{5}{2}\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1} + \frac{11}{4}\log|x - \frac{1}{2} + \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}| + C$.

17. (1) $d_t^2y|_{t=1,\Delta t=0.1} = 30t^4(\Delta t)^2|_{t=1,\Delta t=0.01} = 0.3, d_tx|_{t=1,\Delta t=0.1} = 2t\Delta t|_{t=1,\Delta t=0.1} = 0.2$.

(2) $d_x^2y|_{x=1,\Delta x=0.21} = 6x(\Delta x)^2 = 0.2646, d_xx|_{x=1,\Delta x=0.21} = 1\Delta_x|_{x=1,\Delta x=0.21} = 0.21$.

(3) $(d_tx)^2|_{t=1,\Delta t=0.1} = 0.2^2 = 0.04, (d_xx)^2|_{x=1,\Delta x=0.21} = 0.21^2 = 0.0441, \frac{d_t^2y}{(d_tx)^2}|_{t=1,\Delta t=0.1} = \frac{0.3}{0.04} = 7.5 \neq 6 = \frac{0.2646}{0.0441} = \frac{d_x^2y}{(d_xx)^2}|_{x=1,\Delta x=0.21}$, 因此不相等.

18. (1) $x^x = e^{x\log x} \to e^0 = 1$.

(2) $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x, x + \tan x \sim 2x$, 因此极限值为 $\frac{1}{6}$.

(3) $\cos\frac{a}{2}\cdots\cos\frac{a}{2^n}\sin\frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n}$(不断利用 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$), 因此极限值为 $\frac{\sin a}{a}$.

(4) $(1 + \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x})^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x}x(\sqrt{1+x^2}-x)}$, 由于 $x(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to \frac{1}{2}$, 因此原极限为 $\sqrt{e}$.

(5) $\sqrt{n}(\sqrt[n]{n} - 1) \sim \sqrt{n}(e^{(\log n)/n} - 1) \sim \sqrt{n}(\log n)/n = \log n/\sqrt{n} \to 0$.

19. 分奇偶讨论. 使用 $a_n \to a$ 则 $\sum a_n/n \to a$ 这个结论.

20. 如果结论不对, 则存在一个长度为 δ 的区间, 在这个区间上 $f(x) \leq M - \epsilon$, 则至少有 $[\delta/n] - 1$ 个 $f(i/n)$ 落在这个区间里, 这样一来极限值就会小于等于 $M(1-\delta) + (M-\epsilon)\delta$, 矛盾.

21. WLOG 设 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.

由 Riemann 积分定义, $\forall\epsilon>0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x)=\begin{cases}C_1 & a=x_0\le x<x_1\\ C_2 & x_1\le x<x_2\\ \cdots & \\ C_m & x_{m-1}\le x\le b\end{cases}$ 使得 $\int_a^b|f(x)-s_\epsilon(x)|dx<\epsilon$. 设 $M=\sup_{x\in[0,T]}|g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx|=|\int_a^b(f(x)-s_\epsilon(x))g(nx)dx+\int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx|\le\int_a^b|f(x)-s_\epsilon(x)|g(nx)dx+|\sum\limits_{i=1}^m C_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)dx<M\epsilon+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^m C_i\int_{nx_{i-1}}^{nx_i}g(x)dx\le M\epsilon+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^m C_iMT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)dx=0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)dx=\int_c^{c+T}g(x)dx+\int_{c+T}^{c+2T}g(x)dx+\cdots+\int_{c+kT}^d g(x)dx$ (设 $c+kT\le d<c+(k+1)T$) $=\int_{c+kT}^d g(x)dx\le MT$. 选择一个足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^m C_iMT<\epsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx|\le(M+1)\epsilon$.

5.3 补充 (不要求掌握!)

参考 https://wqgcx.github.io/courses/analysis2.pdf, 初步了解可积性理论.

6 第 6 次习题课: 不定积分, 变上限积分, 定积分

6.1 问题

1. 求极限. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}})$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^n(1+\frac{i}{n})\sin\frac{i\pi}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{n+k}$.
2. 求导数. $\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}dt$, $\int_e^{e^x}\frac{dt}{1+\log t}(x>1)$, $(\int_a^x f(t)dt)^2$.
3. 求积分. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$, $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$, $\int_{-1}^1\log(x+\sqrt{1+x^2})dx$.
4. 求积分. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, $\int\sqrt{\tan x}dx$, $\int\frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$, $\int\frac{dx}{x(x^3+2)}$, $\int x^2\arctan xdx$, $\int\frac{1}{\cos^3x}dx$, $\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.
5. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数. 证明: 对于任意 $x\in[0,1]$, 有 $|f(x)|\le\int_0^1|f(t)|dt+\int_0^1|f'(t)|dt$, 并写出取等号条件.
6. $x_1>0$, 对于每个正整数 n, 有 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在并求之.
7. 设 $x>0$, 定义 $p(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}}$, 证明方程 $p(x+1)=p(x)+\sin x$ 有无穷个互不相等的正实数解.
8. 设 $f(x)\in R[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx>0$, 证明 $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 使得 $f(x)>0,x\in[\alpha,\beta]$.
9 (不要求掌握). $f(x)\in R[a,b]$, 是否有 $[f(x)]$ 可积? 其中 $[\cdot]$ 表示向下取整.
10. 设 $f(x)\in C[0,\pi]$ 满足 $\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi f(x)\sin xdx=0$, 证明 $\exists\alpha,\beta\in(0,\pi),\alpha\ne\beta$, 使得 $f(\alpha)=f(\beta)=0$.
11. 证明柯西不等式 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$, 并说明取等号条件.
12 (不要求掌握). 证明 Holder 不等式 $\int_a^b f(x)g(x)dx\le[\int_a^b f^p(x)dx]^{\frac{1}{p}}[\int_a^b g^q(x)dx]^{\frac{1}{q}}$, 其中 $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f,g\ge0$.
13 (不要求掌握). 证明 Minkowski 不等式 $[\int_a^b[f(x)+g(x)]^pdx]^{\frac{1}{p}}\le[\int_a^b f^p(x)dx]^{\frac{1}{p}}+[\int_a^b g^p(x)dx]^{\frac{1}{p}}$, 其中 $p\ge1,f,g\ge0$.
14. 设 $f(x)\in C[a,b]$ 满足 $\forall\phi(x)\in C[a,b]$, 只要 $\int_a^b\phi(x)dx=0$, 就有 $\int_a^b f(x)\phi(x)dx=0$. 证明 $f(x)\equiv C$.
15. $a_n/n^\alpha\to1,\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.
16. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'(a)=m,f'(b)=n$, 证明存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=\xi$, 其中 ξ 是 $[m,n]$ 或 $[n,m]$ 中的任意一个数. 本题说明导函数虽然不一定连续, 但具有介值性质.
17. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 证明存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
18. 记 $f_n(x)=n^2xe^{-nx},x\in[0,1]$, 求 $\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)dx$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$. 本题说明积分极限不一定可交换.
19. 记 $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'(x)$ 和 $(\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x))'$. 本题说明求导极限不一定可交换.

6.2 解答

1. 利用定积分定义. (1) $\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}|_0^1=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$.
(2) $\sum\limits_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{1+(k/n)^2}\to\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$.
(3) $\frac{i\pi}{n^2}-\epsilon\frac{i\pi}{n^2}\le\sin\frac{i\pi}{n^2}\le\frac{i\pi}{n^2}$, $\sum\limits_{i=1}^n(1+\frac{i}{n})\frac{i\pi}{n^2}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n(1+\frac{i}{n})\frac{i\pi}{n}\to\int_0^1(1+x)\pi xdx=\frac{5\pi}{6}$, 同理左边 $\ge(1-\epsilon)\frac{5\pi}{6}$, 由 ϵ-N 语言.

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\to\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\log 2$.

2. 利用变上限积分导数结论. $f'=\frac{\sin 2^x}{16^x+2}2^x\log 2-\frac{\sin(x^3+1)}{(x^3+1)^4+2}3x^2$. $f'=\frac{e^x}{1+x}$. $f'=2f(x)\int_a^x f(t)dt$.

3. $\arcsin\frac{x}{a}+C,\log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C,\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin(x/a))+C,\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log|x+\sqrt{x^2+a^2}|)+C,\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|)+C,0$(注意是奇函数). 都是利用换元或者分部积分.

4.(1) 令 $u=x+\sqrt{x^2+x+1},x=\frac{u^2-1}{2u+1}\Rightarrow 2\int\frac{u^2+u+1}{u(2u+1)^2}du=2\int\frac{1}{u}-\frac{3(u+1)}{(2u+1)^2}du=2\log|u|-3\int\frac{du}{2u+1}-3\int\frac{du}{(2u+1)^2}+C=2\log u-\frac{3}{2}\log|2u+1|+\frac{3}{2}\frac{1}{2u+1}+C$.

(2) 令 $u=\sqrt{\tan x},x=\arctan u^2\Rightarrow$ 原积分 $=2\int\frac{u^2}{1+u^4}du$. 使用对偶积分. 记 $I=\int\frac{u^2}{1+u^4}du,J=\int\frac{1}{1+u^4}du$, $I+J=\int\frac{1+u^2}{1+u^4}du=\int\frac{1+1/u^2}{u^2+1/u^2}du=\int\frac{1}{(u+1/u)^2-2}d(u+1/u)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}})+C_1$, $I-J=\int\frac{u^2-1}{u^4+1}du=\int\frac{1-1/u^2}{u^2+1/u^2}du=\int\frac{1}{(u+1/u)^2-2}d(u+1/u)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log|\frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}}|+C_2$. 从而 $I=\frac{I+J}{2}+\frac{I-J}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}})+\frac{1}{4\sqrt{2}}\log|\frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}}|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}})+\frac{1}{4\sqrt{2}}\log|\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}|+C$.

(3) $=\int\frac{e^x(1-x^2)+e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}de^x+\int\frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx\overset{\text{分部积分}}{=}e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\int e^x d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\int\frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx+C=e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$.

(4) $=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^4+x^2}dx^2=\frac{1}{2}\int\sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}d(x^2+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(x^2+\frac{1}{2})\sqrt{x^4+x^2}-\frac{1}{16}\log|x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2}|+C$.

(5) $=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{x^3(x^3+2)}=\frac{1}{6}\int\frac{dx^3}{x^3}-\frac{dx^3}{x^3+2}=\frac{1}{6}\log|\frac{x^3}{x^3+2}|+C$.

(6) $=\frac{1}{3}\int\arctan x dx^3=\frac{1}{3}x^3\arctan x+C-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x+C-\frac{1}{6}\int\frac{x^2dx^2}{1+x^2}=\frac{1}{3}x^3\arctan x+C-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\log|1+x^2|$.

(7) $=\int\frac{1}{(1-\sin^2 x)^2}d\sin x=\frac{1}{4}\log|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}|+\frac{\sin x}{2(1-\sin^2 x)}+C$. 最后一个等号是积分 $\int\frac{1}{(1-t^2)^2}dt$, 注意到 $\int\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{t}{1-t^2}-\int td\frac{1}{1-t^2}+C=\frac{t}{1-t^2}-\int\frac{2t^2}{(1-t^2)^2}dt+C=\frac{t}{1-t^2}+\int\frac{2}{1-t^2}dt-\int\frac{2}{(1-t^2)^2}dt+C\Rightarrow\int\frac{1}{(1-t^2)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-t^2}dt+\frac{t}{2(1-t^2)}+C=\frac{1}{4}\log|\frac{1+t}{1-t}|+\frac{t}{2(1-t^2)}+C$.

(8) $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos t dt,\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sin t}dt=-\int\frac{d\cos t}{\sin^2 t}=-\int\frac{d\cos t}{1-\cos^2 t}=\frac{1}{2}\log|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}|+C=\frac{1}{2}\log|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}|+C=\frac{1}{2}\log|\frac{(1-x)+(1+x)-2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{(1-x)+(1+x)+2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}|+C=\log|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}|+C$.

5. 由连续性和积分中值定理知 $\exists\xi\in[0,1]$, 使得 $|f(\xi)|=\int_0^1|f(t)|dt$. 从而 $\int_0^1|f(t)|dt+\int_0^1|f'(t)|dt\geq|f(\xi)|+\int_\xi^x|f'(t)|dt\geq|f(\xi)|+|\int_\xi^x f'(t)dt|=|f(\xi)|+|f(x)-f(\xi)|\geq|f(x)|$. 等号处处成立意味着 $f'(x)=0$, 这也意味着 $f(x)\equiv C$.

6. 重复这种题很多次了. 首先 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+1/x_n)\geq 1$. 其次如果 $x_n\geq 1$, 则 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(1/x_n-x_n)\leq 0$. 说明单调递减有下界, 两边求极限知答案是 1.

7. $p(x+1)-p(x)=\int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}}\in[\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3+2021}},\frac{1}{\sqrt{x^3+2021}}]$. 令 $g(x)=p(x+1)-p(x)-\sin x,g(2k\pi)>0,g(2k\pi+\pi/2)<0$, 用介值定理.

8. 反证法, 如果任意区间都有点 $f(x)\leq 0$, 那么 Riemann 和的极限怎么可能 >0?(我就偏偏取那个 ≤ 0 的点)

9. 负的 Riemann 函数可积, 但取整后变成不可积的 Dirichlet 函数.

10. 由于 $\int_0^\pi f(x)\sin xdx=0$, 从而存在零点 $\alpha\in(0,\pi)$. 再考虑 $\int f(x)\sin(x-\alpha)dx=0$, 知如果只有一个零点, 那么这个积分不可能为 0 (注意到 $f(x)\sin(x-\alpha)$ 在只有一个零点 $x=\alpha$ 时是始终同号的).

11. $\int_a^b(f(x)-tg(x))^2dx\geq 0$ 对于 $\forall t\in\mathbb{R}$ 恒成立. 若 $\int_a^b g^2(x)dx=0$ 则不等式左右两边都是 0. 对于其余情况, 这是关于 t 的一元二次不等式, 因此 $\Delta\leq 0\Rightarrow 4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2-4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\leq 0$. 取等号条件是 $f(x)=Cg(x)$.

12. 不妨设 $\int f^p(x)dx=\int g^q(x)dx=1$. 注意到 $\frac{1}{p}\log(a^p)+\frac{1}{q}\log(b^q)\leq\log(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q})\Leftrightarrow ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. 从而 $\int f(x)g(x)dx=\leq\int\frac{f^p(x)}{p}dx+\int\frac{g^q(x)}{q}dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

13. $\int_a^b(f+g)^pdx=\int_a^b(f+g)^{p-1}fdx+\int_a^b(f+g)^{p-1}gdx$ 利用上一问结论 $\leq[\int_a^b(f+g)^pdx]^{(p-1)/p}[\int_a^b f^pdx]^{1/p}+[\int_a^b(f+g)^pdx]^{(p-1)/p}[\int_a^b g^pdx]^{1/p}\Rightarrow[\int_a^b(f+g)^pdx]^{1/p}\leq[\int_a^b f^pdx]^{1/p}+[\int_a^b g^pdx]^{1/p}$.

14. 考虑 $\phi(x)=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. 从而 $\int_a^b f^2(x)dx=\frac{1}{b-a}[\int_a^b f(t)dt]^2\Rightarrow\int_a^b f^2(t)dt\int_a^b 1dt=[\int_a^b f(t)dt]^2$. 由 Cauchy 不等式取等条件知 $f(x)\equiv C$.

15. 这个题提醒大家很多时候感觉虽然可靠, 但要严格说明依然应该使用 N-ϵ 语言. $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,n^\alpha(1-\epsilon)<a_n<n^\alpha(1+\epsilon)$. 从而存在足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\epsilon,\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\epsilon,|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]|\leq\frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\leq\frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha]=\epsilon\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^\alpha\to\epsilon\int_0^1 x^\alpha dx=\frac{\epsilon}{\alpha+1}$. 这意味着当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)$ 和 $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(\sum\limits_{i=1}^{n}i^\alpha)$ 差不多. 因此原极限是 $\frac{1}{\alpha+1}$.

16. 通过平移只需证明 $f'(a)>0, f'(b)<0$, 证明存在 $f'(c)=0$. $f'(a)>0$ 说明一定有数 $x>a$ 使得 $f(x)>f(a)$, $f'(b)<0$ 说明一定有数 $x<b$ 使得 $f(x)>f(b)$. 闭区间上的连续函数必有最大值, 从而最大值点的导数一定为 0 (利用左导数 ≥ 0, 右导数 ≤ 0). 这就是 $f'(c)=0$.
17. 构造 $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. $g(a)=g(b)=f(a)$, 从而考虑 $[a,b]$ 区间上 $g(x)$ 的最大值点, 其必有 $g'(x_0)=0$, 此即 $f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
18. 这个题告诉我们求导和极限未必可交换. $f_n(x)\to 0$ 对于所有 $x\in[0,1]$ 从而 $\int_0^1 \lim f_n(x)dx=0$. 而 $\int_0^1 f_n(x)dx = 1-e^{-n}-ne^{-n}\to 1$.
19. $f_n'(x)=\cos(nx)$, $f_n'(0)\to 1$, 而对于 $x\neq 0$ 其极限不存在. $f_n(x)\to 0$ 对于所有 $x\in\mathbb{R}$, 从而 $[\lim f_n(x)]'=0$.

6.3 补充 (不要求掌握!)

测度: 我们把满足以下性质的非负集函数 (定义域是集合, 且函数值非负) 叫做测度: $m(\emptyset)=0$, 并且对于任意不交的集合 $A_1,A_2,\cdots$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)=m(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)$. 外测度: 把上述不交条件去掉, 并把 $=$ 改成 $\geq$.
π 系: 一族集合构成的集合 $\mathscr{P}$, 且满足 $\forall A,B\in\mathscr{P}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{P}$.
半环: $\mathscr{P}$ 是 π 系, 若 $A,B\in\mathscr{P}, A\supset B$, 则存在有限个两两不交的集合 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 使得 $A\backslash B=\cup_k C_k$.
σ-域: 如果 $\emptyset,\Omega\in\mathscr{P}; A\in\mathscr{P}\Rightarrow A^c\in\mathscr{P}; A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{P}\Rightarrow\cup_i A_i\in\mathscr{P}$, 则称 $\mathscr{P}$ 是 σ-域.
容易验证所有形如 $(a,b], a,b\in\mathbb{R}$ 的区间构成的集合是半环, 定义 $m((a,b])=b-a$, 这是半环上的外测度. 由测度扩张定理, 这个外测度可以扩张到 $\sigma(\{(a,b]\})$ 上. 利用 Caratheodory 条件可以完备化. 这个测度成为 Lebesgue 测度.
更多关于 Lebesgue 测度的知识: Cantor 集, 胖 Cantor 集, Cantor-Lebesgue 函数, 等等.
Lebesgue 定理: $f(x)\in R[a,b]$ 当且仅当 $m(\{x: f(x)\text{在}x\text{处间断}\})=0$, 其中 m 是 Lebesgue 测度.
证明. "$\Rightarrow$" 对于区域 $[a,b]$ 的任何分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 定义 $\omega_i=\sup\{|f(x)-f(y)|, x,y\in[x_{i-1},x_i]\}, \Delta_i=|x_i-x_{i-1}|, \Delta=\max\{\Delta_i\}$. 因而 f 是 Riemann 可积等价于 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_i\omega_i\Delta_i=0$. 再定义 $\omega_\epsilon(f)=\{x: \lim\limits_{\delta\to 0}\sup_{y\in[x-\delta,x+\delta]}|f(y)-f(x)|\geq\epsilon\}$. 先假设如果 f 的不连续点集测度为正, 那么存在 ϵ_0 使得 $\omega_{\epsilon_0}(f)>0$. 对任意分割, 我们有 $\sum\limits_i\omega\Delta_i\geq\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap\omega_{\epsilon_0}(f)\neq\emptyset}\omega_i\Delta_i\geq\epsilon_0\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap\omega_{\epsilon_0}(f)\neq\emptyset}(x_i-x_{i-1})\geq\epsilon_0 m(\omega_\epsilon(f))$. 这表明 f 不是 Riemann 可积的. 因此如果 f 是 Riemann 可积的, 那么不连续点集必定是零测集.
"$\Leftarrow$" 现在我们假设 $\omega_\epsilon(f)$ 是零测集, 我们证明 f 是 Riemann 可积的. 对任意 $\epsilon>0$, 存在闭集 $A_\epsilon\subset[a,b]$ 使得 f 在 A_ϵ 上连续. 对 $x_0\in A_\epsilon$, 存在 $\delta>0$ 使得 $|f(x)-f(y)|<\epsilon, \forall x,y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 由于 A_ϵ 是有界闭集, 因此存在有限个开区间 $(x_l-\frac{1}{2}\delta_l, x_l+\frac{1}{2}\delta_l)$ 覆盖住 A_ϵ. 取 $\delta=\min\{\frac{1}{3}\delta_l\}$. 这表明对于任意 $x_0\in A_\epsilon$, 必定有某个 $x_l\in A_\epsilon$, 使得 $x_0\in(x_l-\frac{1}{2}\delta_l, x_l+\frac{1}{2}\delta_l)$. 这表明 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(x_l-\delta_l,x_l+\delta_l)$, 因而有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon, \forall x,y\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$. 取 $[a,b]$ 分割使得 $\Delta<\frac{1}{2}\delta$. 现在我们来考虑 $\sum\limits_i\omega_i\Delta_i$. 如果区间 $[x_{i-1},x_i]$ 与 A_ϵ 的交集非空, 含有某个点 $y_0\in[x_{i-1},x_i]\cap A_\epsilon$, 那么对于任意 $x,y\in[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 都有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. 注意到 $[x_{i-1},x_i]\subset[y_0-\delta,y_0+\delta]$, 故而 $\omega_i<\epsilon$. 这样我们可以估计 $\sum\limits_i\omega_i\Delta_i=\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap A_\epsilon\neq\emptyset}\omega_i\Delta_i+\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap A_\epsilon=\emptyset}\omega_i\Delta_i\leq\epsilon(b-a)+2Mm([a,b]\backslash A_\epsilon)$. 这里 M 为 f 在 $[a,b]$ 上的上界. 这就表明如果 f 的不连续点零测且 f 有界, 则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.
极限和积分可交换的三大定理 (Lebesgue 可积意义下, 但是我们有定理保证 Riemann 可积一定是 Lebesgue 可积):
Fatou 引理: 如果 $f_n\geq 0$, 那么 $\liminf\limits_{n\to+\infty}\int f_n dx\geq\int\liminf\limits_{n\to+\infty}f_n dx$.
单调收敛定理: 如果 $f_n\geq 0$ 且 $f_n\uparrow f$, 那么 $\int f_n dx\uparrow\int f dx$.
控制收敛定理: 如果 $f_n\to f$ 几乎处处成立, $|f_n|\leq g$ 对于所有 n 成立, 并且 g 可积, 那么 $\int f_n dx\to\int f dx$.

7 第 7 次习题课: 定积分及其应用

7.1 问题

1. 判断对错. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个给定的函数, 记 $f_1(x)=f(x)+g(x), f_2(x)=f(x)g(x), f_3(x)=|f(x)|, f_4(x)=\max\{f(x),g(x)\}$. (1) 假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 $x=x_0$ 处可导. 问 f_1,f_2,f_3,f_4 中哪些函数在 x_0 处一定可导, 哪些不一定? (2) 假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 $[a,b]$ 可积, 问 f_1,f_2,f_3,f_4 中哪些函数在区间 $[a,b]$ 一定可积, 哪些不一定?

2. 判断对错. $f_1, f_3 \in C[0,1]$, $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x), \forall x \in [0,1]$, 且 $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 f_3(x)$. 则 $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f_3(x)$.
3. 是否存在 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 f 在所有点上局部无界?
4. 证明 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个根 x_n, 并计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
5. 求积分. $\int_{-1}^1 \frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}dx, \int_0^2 |x^2-1|e^{-|x-1|}dx, \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin 2x}dx, \int_{-1}^1 (x^4+2x^2+1)\sin^3 xdx, \int_0^1 \log(x+\sqrt{x^2+1})dx,$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.
6. 设函数 $f(x) \in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x \cdot f(x)dx = 0$. 证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中至少有两个零点.
7. 设 $0 < \lambda < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{1-\lambda}$.
8. 求直角坐标 (x, y) 给出的抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(1, \frac{1}{2})$ 的弧长.
9. 设奇数 $n \ge 3$, 求极坐标 (r, θ) 给出的 n 叶玫瑰线 $r = \sin(n\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$ 所围的有界图形的面积.
10. 证明不等式. (1) $\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. (2) $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \frac{1}{10}$.
11. $f(x) \in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x)dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \to f(0)$.
12. $f(x) \in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{h\to 0+0} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x)dx \to \pi f(0)$.
13. 推导重力场中粒子数量密度的分布率 $n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$, 其中 T 是温度, k_B 是玻尔兹曼常量.

7.2 解答

1. (1) f_1, f_2 一定可导, 依据导数四则运算. f_3 不一定可导, $f(x) = x$. f_4 不一定可导, $f(x) = x, g(x) = -x$. (2) 均可积.
2. 正确. 用反证法, 如果 $f_3(x_0) > f_1(x_0)$, 由连续性存在 $\epsilon > 0$ 和 x_0 的某个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 使得 $f_3(x) > f_1(x) + \epsilon$.
3. 存在. 考虑 $f(x) = \begin{cases} p, & x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.
4. 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$. $f_n(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, f(1) = n > 1$, 再由 $f_n(x)$ 单调递增和连续性知有且仅有一个根. 由于 $f_n(\frac{1}{2}+\epsilon) = (\frac{1}{2}+\epsilon)\frac{1-(\frac{1}{2}+\epsilon)^n}{\frac{1}{2}-\epsilon} \to \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon} > 1$, 因此当 n 足够大时 $f_n(x_n) = 1 < f_n(\frac{1}{2}+\epsilon) \Rightarrow x_n < \frac{1}{2}+\epsilon$, 再根据极限的 N-ϵ 定义.
5. (1) 注意到 $\frac{x^2\arcsin x}{1+x^2} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{x^2\arcsin x}{1+x^2}dx = 0$. 从而原积分 $= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = 2 - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 2 - (\arctan x)|_{-1}^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$.
(2) $= \int_0^1 (1-x^2)e^{x-1}dx + \int_1^2 (x^2-1)e^{1-x}dx = (-x^2+2x-1)e^{x-1}|_0^1 + (-x^2-2x-1)e^{1-x}|_1^2 = 4 - \frac{8}{e}$.
(3) $= 2\int_0^\pi \sqrt{1-\sin 2x}dx = 2\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}dx = 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin xdx + \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \sin x - \cos xdx) = 4\sqrt{2}$.
(4) 这是奇函数, 积分自然为 0.
(5) $= x\log(x+\sqrt{x^2+1})|_0^1 - \int_0^1 xd\log(x+\sqrt{x^2+1}) = \log(1+\sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{x^2+1})|_0^1 = \log(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$.
(6) $= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}dx = (\arcsin x - \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2})|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.
(7) 令 $x = \sin t$, 则原积分 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos td\sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 tdt$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 tdt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 td\cos t =$ 分部积分 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\sin^4 t\cos^2 tdt = 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 tdt \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 tdt = \frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 tdt$. 从而原积分 $= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 tdt =$ 分部积分 $= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = \frac{\pi}{32}$.
(8) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}d\sin x = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\log(1+t^2)|_0^1 = \frac{\log 2}{2}$.
6. $\int_0^1 f(x)dx = 0 \Rightarrow$ 一个零点 α. $\int_0^1 (x-\alpha)f(x)dx = 0 \Rightarrow$ 另一个零点 β(若不存在则 $(x-\alpha)f(x)$ 保号).
7. WLOG 令 $a = 0$. 由定义 $\forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n| < \epsilon$; $\exists M, \forall n > M, |\lambda^n| < \epsilon$. 设 $\max_n |a_n| = A$(极限存在蕴含有界). 选择 $n > N + M$. 从而 $|a_n + \lambda a_{n-1} + \cdots + a_N\lambda^{n-N}| < \epsilon|1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-N}| < \frac{\epsilon}{1-\lambda}$, 且 $|a_{N-1}\lambda^{n-N+1} + \cdots + a_0\lambda^n| < A\lambda^{n-N+1}\frac{1-\lambda^N}{1-\lambda} < \frac{A}{1-\lambda}\epsilon$. 从而整个求和 $< \frac{A+1}{1-\lambda}\epsilon$.
8. $\int_0^1 \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = [\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2})]|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$.
9. $S = n \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 n\theta d\theta = (t = n\theta) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.
10. (1) 在区间 $[0,1]$ 上成立 $\sqrt{2} \le \sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} \le \frac{3}{2}$. (2) 注意到 $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}} \le 1$, 从而 $\frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9dx < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \int_0^1 x^9dx = \frac{1}{10}$.
11. 往证 $\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \to 0$. 使用 N-ϵ 语言. $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon$. 设 $\max|f(x)| = M$. 从而原式 $= \frac{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3$. $|I_1| \le \frac{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n\epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \le \epsilon$.

$|I_2| \le 2M\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\epsilon dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx} \le 2M\frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n dx} \le 2M(1-\delta)\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M\frac{1-\delta}{\delta}(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2})^n$. 注意到 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$, 从而可以取足够大的 n 使得 $|I_2| < \epsilon$. 类似地放缩 I_3, 从而 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$.

12. 只需证明 $\int_{-1}^{1} \frac{h}{x^2+h^2}[f(x) - f(0)]dx \to 0$. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon$. 设 $\max|f(x)| = M$. 从而原式 $= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{h}{x^2+h^2}[f(x) - f(0)]dx + \int_{-1}^{-\delta} \frac{h}{x^2+h^2}[f(x) - f(0)]dx + \int_{\delta}^{1} \frac{h}{x^2+h^2}[f(x) - f(0)]dx := I_1 + I_2 + I_3$. 类似的有 $|I_1| \le \epsilon\int_{-\delta}^{\delta} \frac{h}{x^2+h^2}dx < \epsilon\int_{-1}^{1} \frac{h}{x^2+h^2}dx = \epsilon(\arctan\frac{x}{h})|_{-1}^{1} < \pi\epsilon$. $|I_2| \le 2M\int_{-1}^{-\delta} \frac{h}{x^2+h^2} \le 2M(1-\delta)\frac{h}{\delta^2+h^2} < 2M\frac{1-\delta}{\delta^2}h < \epsilon$ 只要 h 足够接近 0. 同理 $|I_3| < \epsilon$. 从而 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$.

13. 由基本力学知识, 重力场中的压力差 dF 托起了单位体积内的粒子重力 dG. 从而 $dF + dG = 0 \Rightarrow Sdp + \rho gSdz = 0 \Rightarrow dp + nmgdz = 0$. 由 $p = nk_BT$ 知 $dp = k_BTdn \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_BT}dz$. 两边积分知 $\log n(z) - \log n(0) = \frac{-mgz}{k_BT} \Rightarrow n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_BT}}$.

7.3 补充 (不要求掌握!)

计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-x^2}dx$. (也写成 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$). 这和正态分布的归一化因子有关.

证法 1: 使用二元积分. $(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy =$ 二元积分换元公式, 改写成极坐标 $= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^\infty re^{-r^2}dr = 2\pi \times (-\frac{1}{2}e^{-r^2})|_0^\infty = \pi$. 从而 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$. 我们回顾标准正态分布 $\mathcal{N}(0,1)$ 的密度函数是 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 这意味着 $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$(概率的归一化!).

证法 2: 使用极限逼近. 我们来证明: $\forall x \in [-A, A], (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \rightrightarrows e^{-x^2}$. 其中, $\rightrightarrows$ 表示极限的一致性 (一致收敛). 我们都知道 $(1+\frac{x^2}{n})^{-n} \to e^{-x^2}$, 但是不同的 x 可能会有不同的收敛速度. 对于某个 x_1, 可能从第 N_1 项开始有 $|f_n(x_1)-f(x_1)| < \epsilon$, 而对于某个 x_2, 可能从第 N_2 项开始有 $|f_n(x_2) - f(x_2)| < \epsilon, \cdots$. 在给出一致收敛的正式定义前, 我们先看几个例子.

例 1: $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}, f(x) \equiv 0$. 容易看出来 $f_n \to f$, 且对于不同的 x, 他们的收敛步调一致: 因为只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$, 不管 x 的值都有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

例 2: $f_n(x) = x^n, x \in [0,1], f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$. 容易看出来 $f_n \to f$, 但对于不同的 x, 他们的收敛步调并不一致: 距离 1 更近的 x 收敛速度更慢! 当 $x < \frac{1}{2}$ 时, 只要 $n > \log_2(\frac{1}{\epsilon})$ 就有 $x^n < \epsilon$; 但是当 $x = 1 - \frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})}$ 时, $x^n \approx (1 - \frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})})^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \approx \frac{1}{e}$ 距离 ϵ 还远着呢, 更有 $\lim\limits_{x\to1-0} x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \to 1 \Rightarrow \exists\delta, \forall x \in (1-\delta, 1), x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} > 1 - \epsilon$. 前面的 $f_n(x)$ 已经很小于 ϵ 了, 而后面的一些 $f_n(x)$ 甚至还在原地打转 $(> 1 - \epsilon)$! 下面我们给出定义.

一致收敛: 我们说在区间 $[a, b]$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$(记作 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$), 意味着 $\forall \epsilon > 0, \exists N$, 使得 $\forall n > N, \forall x \in [a, b], |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

如果在有限区间上收敛具有一致性, 那么积分和极限顺序可交换. 因为 $|\int_a^b f_n(x) - f(x)dx| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \epsilon(b - a) \to 0 \Rightarrow \int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$, 即是 $\lim\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim f_n(x)dx$.

回到原题, 往证 $\forall x \in [-A, A], (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \rightrightarrows e^{-x^2}$. 注意到 $(1 + \frac{x^2}{n})^n \ge 1 + C_n^1\frac{x^2}{n} + \cdots + C_n^k(\frac{x^2}{n})^k$. 由带 Lagrange 余项的泰勒展开知 $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!}t^{k+1} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!}t^{k+1}$, 其中 $f(t) = e^t, \xi \in (0, t)$. 令 $t = x^2$ 知 $e^{x^2} = 1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!}x^{2k+2}$. 从而对于 $\forall x \in [-A, A]$, 成立估计 $e^{x^2} - 1 - x^2 - \cdots - \frac{x^{2k}}{k!} = \frac{e^\xi}{(k+1)!}x^{2k+2} \le \frac{e^{A^2}A^{2k+2}}{(k+1)!} \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时 (利用 $n! > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$). 这里的估计有一致性! 从而存在 $K, \forall k > K, x \in [-A, A]$, 成立 $|e^{x^2}-1-x^2-\cdots-\frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$. 再回头来看 $1+C_n^1\frac{x^2}{n}+\cdots+C_n^k(\frac{x^2}{n})^k$ 和 $1+x^2+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}$. 他们之间的差是一个 $2k$ 阶关于 x 的多项式, 且 $< \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{n}x^{2i} < \frac{1}{n}(A^2 + A^4 + \cdots + A^{2k})$. 这里的估计又有一致性! 所以说, 当 n 足够大时, $\forall x \in [-A, A]$, 成立 $|[1+C_n^1\frac{x^2}{n}+\cdots+C_n^k(\frac{x^2}{n})^k]-[1+x^2+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$. 整理一下思路, $\forall \epsilon > 0, \exists K$, 使得 $\forall k > K, \forall x \in [-A, A]$, 成立 $|e^{x^2}-1-x^2-\cdots-\frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$. $\exists N$, 使得 $\forall n > N, \forall x \in [-A, A]$, 成立 $|[1+C_n^1\frac{x^2}{n}+\cdots+C_n^k(\frac{x^2}{n})^k]-[1+x^2+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$. 这样的话就有 $e^{x^2} - (1 + \frac{x^2}{n})^n < e^{x^2} - [1 + C_n^1\frac{x^2}{n} + \cdots + C_n^k(\frac{x^2}{n})^k] < \{e^{x^2} - [1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}]\} + \{[1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}] - [1 + C_n^1\frac{x^2}{n} + \cdots + C_n^k(\frac{x^2}{n})^k]\} < 2\epsilon$. 这样 $(1 + \frac{x^2}{n}) \rightrightarrows e^{x^2}$. 取倒数后当然也成立, 这和极限的除法是一个道理, 留作练习. 又注意到当 $A \to \infty$ 时, $\int_A^\infty(1 + \frac{x^2}{n})^{-n}dx \le \int_A^\infty(1 + x^2)^{-1}dx = \arctan x|_A^{+\infty} \to 0$ 对 n 有一致性. 这说明我们可以取足够大的 A 使得 $\int_A^\infty e^{-x^2}dx < \epsilon$, 且 $\forall n, \int_A^\infty(1 + \frac{x^2}{n})^{-n}dx < \epsilon$. 这样一来 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\infty(1 + \frac{x^2}{n})^{-n}dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^n}d\sqrt{n}\tan t = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\alpha d\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 最后一步使用了 Wallis 公式, 其推导就是通过分部积分计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx$. 从而 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

8 第 8 次习题课: 微分中值定理, 洛必达法则

8.1 问题

1. $f(x) \in D[a,b], f(a) = f(b) = 0$, 证明 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.
2. $f(x) \in D[0,1], f(1) = 0$, 证明 $\forall k > 0, \exists \xi \in (0,1)$ 使得 $kf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微, $f(a) = f(b) = 0$, 证明 $\forall x \in (a,b), \exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$.
4. 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上二阶可导, $f(0) = 0$, 证明 $\forall x > 0, \exists \xi \in (0,x)$ 使得 $f'(x) - \frac{f(x)}{x} = \xi f''(\xi)$.
5. 设 $P_n(x)$ 为 n 次多项式, 证明 $e^x = P_n(x)$ 至多有 $n+1$ 个解.
6. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导, 且 $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. 证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'''(\xi) = 0$.
7. $f(x) > 0, x \in [a,b], f''(x)\exists$, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi)f''(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$.
8. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的二阶可导函数, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在有限, 且 $f''(x)$ 有界. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
9. 非常值函数 $f(x) \in C[-1,1]$, 在 $(-1,1)$ 上二阶可导, $f'(0) = 0$. 证明存在 $\xi \in (-1,1)$ 使得 $|f''(\xi)| > |f(1) - f(-1)|$.
10. 证明等式 $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$.
11. 设 $0 < b < a$, 证明 $\frac{a-b}{a} < \log \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$.
12. 设 $0 < a < b$, 证明 $(1+a)\log(1+a) + (1+b)\log(1+b) < (1+a+b)\log(1+a+b)$.
13. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 3$, 证明存在 $c \in (0,2)$ 使得 $f''(c) = 4$.
14. 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 等式 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$ 中的 $\theta(x)$ 满足 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x) = \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x) = \frac{1}{2}$.
15. $f(x) \in D(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\exists$, 证明存在 c 使得 $f'(c) = 0$.
16. 计算极限 $\lim\limits_{x\to0+0} x^{x^x-1}, \lim\limits_{x\to0} \frac{x\tan x - \sin^2 x}{x^4}, \lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}), \lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin x^3})$.
17. $m,n,k \in \mathbb{N}_+$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left((1+\frac{m}{n})^k - (1+\frac{k}{n})^m\right)$.
18. 设 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上二阶可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) + 2f'(x) + f''(x)] = l$, 则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
19. 设 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上 n 阶可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = B$, 证明 $B = 0$.
20. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1, \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = 1$.
21. $x_0 \in (0,1), x_n = \sin(x_{n-1})$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}x_n = \sqrt{3}$.

8.2 解答

1. 令 $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$. 则 $g(a) = g(b) = 0$, 由 Rolle 微分中值定理, $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi) = 0 = e^{-\lambda\xi}(f'(\xi) - \lambda f(\xi)) \Rightarrow f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.
2. 令 $g(x) = x^k f(x)$, 则 $g(0) = g(1) = 0$, 由 Rolle 微分中值定理, $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $g'(\xi) = 0 = \xi^k f'(\xi) = k\xi^{k-1}f(\xi) \Rightarrow kf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.
3. 设 $m = \frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$, 并设 $g(t) = f(t) - \frac{m}{2}(t-a)(t-b)$. 往证存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $m = f''(\xi)$. 易知 $g(a) = 0, g(b) = 0, g(x) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ 使得 $g''(\xi) = 0 = f''(\xi) - m \Rightarrow f''(\xi) = m$.
4. 由 Lagrange 微分中值定理, $\exists \xi \in (0,x)$ 使得 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x} = \frac{[xf'(x)-f(x)]-[0f'(0)-f(0)]}{x-0} = \xi f''(\xi)$.
5. 令 $g(x) = e^x - P_n(x)$, 则 $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. 由于 $g^{(n+1)}(x) = e^x > 0$, 从而 $g^{(n)}(x)$ 至多有 1 个零点 (否则由 Rolle 微分中值矛盾), $g^{(n-1)}(x)$ 至多有 2 个零点, $\cdots$, $g(x)$ 至多有 $n+1$ 个零点.
6. $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (a,b)$ 使得 $f'(x_1) = 0$. 又因为 $f'(a) = f'(b) = 0$, 从而存在 $x_2 \in (a,x_1), x_3 \in (x_1,b)$ 使得 $f''(x_2) = f''(x_3) = 0$. 从而存在 $\xi \in (x_2,x_3) \subset (a,b)$ 使得 $f'''(\xi) = 0$.
7. 令 $g(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$. 则 $g(a) = 0, g(b) = 0$, 从而 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi) = 0 = \frac{f^2(\xi)f''(\xi)-2f(\xi)f'(\xi)^2}{f^4(\xi)} \Rightarrow f(\xi)f''(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$.
8. 反证法. 若结论不对, 则存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得 $\forall K \in (1,+\infty)$, 存在 $x > K$ 满足 $|f'(x)| > \epsilon_0$. 设 $|f''(x)| \leq M$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$. 取 $\delta_0 = \min\{1, \frac{\epsilon_0}{2M}\}$, 则对 $\epsilon_0\delta_0 > 0$, 存在 $K_0 \in (0,\infty)$, 使得 $\forall x > K_0$, 有 $|f(x) - a| < \frac{\epsilon_0\delta_0}{2}$. 从而 $\forall x_1, x_2 > K_0$, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon_0\delta_0$. 对 K_0, 存在 $x_0 > K_0$ 使得 $|f'(x_0)| > \epsilon$. 不妨设 $f'(x_0) > \epsilon$, 则对 $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$, 由微分中值定理, 存在介于 x 和 x_0 之间的 ξ_x 使得 $|f'(x) - f'(x_0)| = |f''(\xi_x)(x - x_0)| \leq M \cdot \frac{\epsilon}{2M} \leq \frac{\epsilon_0}{2}$. 从而 $f'(x) > \frac{\epsilon_0}{2}$. 再由微分中值定理, 存在 $\xi_2 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ 使得 $f(x_0 + \delta_0) - f(x_0 - \delta_0) = f'(\xi_2) \cdot 2\delta_0 > \frac{\epsilon_2}{2} \cdot 2\delta_0 = \epsilon_0\delta_0$, 矛盾.

9. 不妨设 $f(1)\ge f(-1)$. 采用反证法, 设 $k=f(1)-f(-1)$, 且 $|f''(x)|\le k,\forall x\in(-1,1)$. 从而根据微分中值定理, $\forall x\in(0,1), f'(x)\le kx$, 积分得到 $f(x)-f(0)\le\int_0^x f'(t)dt\le\int_0^x ktdt=\frac{kx^2}{2}$. 令 $x\to 1$, 则 $f(1)-f(0)\le\frac{k}{2}$. 类似有 $f(0)-f(-1)\le\frac{k}{2}$. 由于 $k=f(1)-f(-1)$, 从而 $f(1)-f(0)=f(0)-f(-1)=\frac{k}{2}$. 容易证明如果 $\exists x_0\in[0,1)$ 使得 $f'(x_0)<kx_0$, 那么 $f(1)-f(0)<\frac{k}{2}$, 矛盾. 从而 $f'(x)\equiv kx,\forall x\in[0,1)$. 同理 $f'(x)\equiv -kx,\forall x\in(-1,0]$. 从而 $f''(0)=k=-k$, 这意味着 $k=0, f(x)$ 是常值函数, 矛盾.

10. 首先两边求导验证导数相等, 然后 $\arctan 0=\arcsin 0$(意味着不相差常数).

11. 原命题转化证明 $\frac{1}{a}<\frac{\log a-\log b}{a-b}<\frac{1}{b}$, 令 $f(x)=\log x$, 利用 Lagrange 微分中值定理.

12. 设 $f(x)=(1+x)\log(1+x)$, 利用 Lagrange 微分中值定理知 $\frac{(1+a+b)\log(1+a+b)-(1+b)\log(1+b)}{(a+b)-b}=1+\log(1+c)$, 其中 $c\in(b,a+b)$. 注意到 $\log(1+c)>\log(1+a)$ 和 $a>\log(1+a)$, 从而 $(1+a+b)\log(1+a+b)-(1+b)\log(1+b)=a+a\log(1+c)>\log(1+a)+a\log(1+a)=(1+a)\log(1+a)$.

13. 构造 $\phi(x)=f(x)-2x^2+3x-1$. 则 $\phi(0)=\phi(1)=\phi(2)=0$, 由 Rolle 微分中值定理, 存在 $c\in(0,2)$ 使得 $\phi''(c)=0\Rightarrow f''(c)=4$.

14. 可以解出 $\theta(x)=\frac{1}{4}(1+2\sqrt{x(x+1)}-2x)$. 当 $x\ge 0$ 时 $\sqrt{x(x+1)}>x$ 从而 $\theta(x)\ge\frac{1}{4}$, 再利用均值不等式 $\sqrt{x(x+1)}\le\frac{x+(x+1)}{2}$ 知 $\theta(x)\le\frac{1}{2}$. 然后对 x 求极限.

15. 不妨设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$ 且 $f(x)$ 不为常数. 不妨设 $\exists x_0$ 使得 $f(x_0)>l$. 任取 $l<\eta<f(x_0)$. 由连续函数的介值性知 $\exists\xi_1\in(-\infty,x_0),\xi_2\in(x_0,+\infty)$ 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=\eta$. 然后利用 Rolle 微分中值定理.

16. (1) $\lim\limits_{x\to0+0}x^{x^x-1}=\exp(\lim\limits_{x\to0+0}(x^x-1)\log x)=\exp(\lim\limits_{x\to0+0}(e^{x\log x}-1)\log x)\overset{\text{等价无穷小:}e^x-1\sim x}{=}\exp(\lim\limits_{x\to0+0}x\log^2x)\overset{\text{倒数换元}}{=}\exp(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log^2x}{x})\overset{\text{L'Hospital}}{=}\exp(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\log x}{x}}{1})=\exp(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\log x}{x})\overset{\text{L'Hospital}}{=}\exp(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1})=\exp(0)=1$.

(2) $\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x+\frac{x}{\cos^2x}-2\sin x\cos x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cos x+x-2\sin x\cos^3x}{4x^3}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x-\sin^2x+1-2\cos^4x+6\sin^2x\cos^2x}{12x^2}=\frac{2}{3}$.

(3) $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{2x}=0$.

(4) $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^3-x^3}{x^3\sin x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x^3-x^3}{x^6}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\frac{3x^2\cos x^3-3x^2}{6x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x^3-1}{2x^3}\overset{\text{等价无穷小: }\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^6}{4x^3}=0$.

17. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left((1+\frac{m}{n})^k-(1+\frac{k}{n})^m\right)=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{(1+mx)^k-(1+kx)^m}{x^2}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to0+0}\frac{km(1+mx)^{k-1}-km(1+kx)^{m-1}}{2x}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\frac{km}{2}\lim\limits_{x\to0+0}\frac{m(k-1)(1+mx)^{k-2}-k(m-1)(1+kx)^{m-2}}{1}=\frac{km(k-m)}{2}$.

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x[f(x)+f'(x)]}{e^x}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x[f(x)+2f'(x)+f''(x)]}{e^x}=l$.

19. $0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}\overset{n\text{次 L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=\frac{B}{n!}$. 由极限的唯一性.

20. 这几个极限都是显然的, 只是用来告诉大家有时候会洛不出来或者洛错. 应用洛必达法则时必须验证条件, 比如说分子分母是否满足 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{*}{\infty}$, 求导后极限是否存在等等.

21. 我们来证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n^2=3$. 显然数列有下界 0, 且 $x_n=\sin x_{n-1}<x_{n-1}$ 意味着单调递减, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\exists$, 两边求极限知 $x_n\to0$. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n^2=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}\overset{\text{Stolz}}{=}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2x_n}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}}$. 因此我们来计算 $\lim\limits_{x\to0+0}(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to0+0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to0+0}\frac{2-2\cos^2x+2\sin^2x}{12x^2}=\frac{1}{3}$. 综上所述 $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n^2=3$.

8.3 补充 (不要求掌握!)

参考 https://wqgcx.github.io/courses/analysis1.pdf.

9 第 9 次习题课: 泰勒公式, 函数的凹凸性

9.1 问题

1. 在 $x=0$ 处做 n 阶带 Peano 余项的泰勒展开. $\frac{1}{1+x},\log(1+x),(1+x)^\alpha(\alpha\ne-1),\arctan x,\arcsin x,\sin^2(1+x^2),\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$. 我们有了这些函数在 0 点处的泰勒展开式后, 便可以计算该点的 n 阶导数值 (只能计算该点, 不能得到通式!).

2. 计算极限. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt{x^2-2x})$, $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(1-n\sin\frac{1}{n})$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}$, $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x})\frac{1}{x}$.

3. 确定下列无穷小量是 x 的几阶无穷小量. $e^x-1-x-\frac{1}{2}x\sin x, \cos x-e^{-x^2/2}, \cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$.
4. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有二阶导数, 且有 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}]=0$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.
5. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有三阶导数, 并且存在常数 $M_0, M_3>0$, 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立 $|f(x)|\le M_0, |f'''(x)|\le M_3$. 证明对任意 $x\in\mathbb{R}$ 成立 $|f'(x)|\le 4M_0^{\frac{2}{3}}M_3^{\frac{1}{3}}, |f''(x)|\le 4M_0^{\frac{1}{3}}M_3^{\frac{2}{3}}$.
6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导, $f(0)=f(1)=0, \max\limits_{0\le x\le 1}f(x)=2$, 证明 $\min\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\le -16$.
7. $P_n(x)$ 是一个 n 次多项式, $P_n(a)>0, P_n^{(k)}(a)\ge 0, k=1,2,\cdots,n$. 证明 $P_n(x)$ 的所有实根都不超过 a.
8. 设 $y=\log\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$. 试求出该函数的定义域、极值点、单调区间、凹凸区间、拐点以及渐近线.
9. 设 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$. 证明: 对于 $\forall t_1,\cdots,t_n>0$ 只要满足 $t_1+\cdots+t_n=1$, 就有 $f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)\le t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n)$.
10. 设 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \forall 0<\lambda<1$. 证明 $f(x)$ 在每个点处左右导数均存在 (但不一定相等), 从而连续.
11. 证明积分版本的 Jensen 不等式, 即: $f(x), g(x), p(x)$ 是连续函数, $f(x)$ 下凸, $\int_a^b p(x)dx=1$, 则 $\int_a^b p(x)f(g(x))dx\ge f(\int_a^b p(x)g(x)dx)$.
12. 证明 KL 散度非负, 即 $\int p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}dx\ge 0$, 其中 $p(x), q(x)$ 连续且 $\int p(x)dx=\int q(x)dx=1$.
13. 设 $f(x)\in D[0,1]$, 且 $f(1)=5\int_0^{\frac{1}{5}}e^{x-1}f(x)dx$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.
14. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导, 且 $f(0)=f'(0)=0, |f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|, x\in(-1,1)$. 证明: $\exists\delta>0$ 使得 $f(x)\equiv 0, \forall x\in(-\delta,\delta)$.
15. 设非线性函数 $f(x)\in C[a,b], D(a,b)$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
16. 设 $f(x)\in D(a,b)$, 且 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=+\infty$, 证明 $\forall M>0, \forall\delta>0, \exists\xi\in(b-\delta,b)$ 使得 $f'(\xi)>M$.
17. 设 $P(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的多项式, 证明: (1) 若 $P(x)+P'(x)\ge 0$ 恒成立, 则 $P(x)\ge 0$; (2) 若 $P(x)-P'(x)\ge 0$ 恒成立, 则 $P(x)\ge 0$; (3) 若 $P'''(x)-P''(x)-P'(x)+P(x)\ge 0$ 恒成立, 则 $P(x)\ge 0$.

9.2 解答

1. (1) $\frac{1}{x+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o(x^n)$. (2) $\log(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n)$. (3) $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{n}C_\alpha^kx^k+o(x^n)$.
(4) $\arctan x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$. (5) $\arcsin x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}C_{-\frac{1}{2}}^kx^{2k+1}+o(x^{2n+1})=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$.
(6) $\sin^2(1+x^2)=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2}{2}\cos(2x^2)+\frac{\sin 2}{2}\sin(2x^2)$. $\sin x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+1}), \cos x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n})\Rightarrow$ $\sin 2x^2=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{4k+2}+o(x^{4n+2}), \cos 2x^2=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k4^k}{(2k)!}x^{4k}+o(x^{4n})\Rightarrow\sin^2(1+x^2)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}4^k\cos 2}{2(2k)!}x^{4k}+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k4^k\sin 2}{(2k+1)!}x^{4k+2}+o(x^{4n})$.
(7) $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}=1-\frac{2x}{1+x+x^2}=1-\frac{2x(1-x)}{1-x^3}=1-(2x-2x^2)[\sum\limits_{k=0}^{n}x^{3k}+o(x^{3n})]=1-2\sum\limits_{k=0}^{n}x^{3k+1}+2\sum\limits_{k=0}^{n}x^{3k+2}+o(x^{3n+1})$.
2. (1) $\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin x+2x}{4x^3}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{12x^2}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{24x}=\frac{1}{12}$.
(2) $\overset{\text{倒数换元}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x^2)^{\frac{1}{3}}-(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{x}\overset{\text{泰勒展开}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{[1+\frac{1}{3}\cdot 3x^2+o(x^2)]-[1-\frac{1}{2}\cdot 2x+o(x)]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x}=1$.
(3) $\overset{\text{泰勒展开}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\{1-n[\frac{1}{n}+\frac{1}{6}(\frac{1}{n})^3+o(\frac{1}{n^3})]\}=\lim\limits_{n\to+\infty}n^3\{\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\}=\frac{1}{6}$.
(4) $\overset{\text{等价无穷小}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{8x^4}\overset{\text{泰勒展开}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2-[1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)]}{8x^4}=-\frac{1}{16}$.
(5) $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\overset{\text{等价无穷小}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\overset{\text{泰勒展开}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]-x[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]}{x^3}=\frac{1}{3}$.
3. (1) $e^x-1-x-\frac{1}{2}x\sin x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-1-x-\frac{1}{2}x(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$, 因此是 3 阶无穷小.
(2) $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4+o(x^4), e^{-x^2/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\Rightarrow\cos x-e^{-x^2/2}=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$, 因此是 4 阶无穷小.
(3) $=\cos x-1-\frac{(a-b)x^2}{1+bx^2}=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)+(b-a)x^2(1-bx^2+b^2x^4+o(x^4))$. 从而当 $b-a=\frac{1}{2}$ 且 $(b-a)b=\frac{1}{24}$(即 $a=-\frac{5}{12}, b=\frac{1}{12}$) 时, 是 6 阶无穷小; 当 $b-a=\frac{1}{2}$ 且 $(b-a)b\ne\frac{1}{24}$ 时, 是 4 阶无穷小; 当 $b-a\ne\frac{1}{2}$ 时, 是 2 阶无穷小.
4. $=\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}\overset{\text{泰勒展开}}{=}\frac{1}{x^3}\{3x-\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^3)+x[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)]\}=\frac{1}{x^3}\{[3+f(0)]x+f'(0)x^2+[\frac{f''(0)}{2}-\frac{9}{2}]x^3+o(x^3)\}=0$ 当 $x\to 0$ 时. 从而 $f(0)=-3, f'(0)=0, f''(0)=9$.

5. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开. $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3, f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2-\frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$. 从而 $f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{12}h^2 \Rightarrow |f'(x)|\le\frac{2M_0}{2h}+\frac{2M_3}{12}h^2=\frac{M_0}{h}+\frac{M_3h^2}{6}$. 注意到这对于任意的 $h>0$ 都成立, 从而考虑不等式右边取最小值的时候, 此时 $h=\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}$, 从而 $|f'(x)|\le\frac{\sqrt[3]{9}}{2}M_0^{\frac{2}{3}}M_3^{\frac{1}{3}}\le 4M_0^{\frac{2}{3}}M_3^{\frac{1}{3}}$. 同理 $f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}+\frac{-f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}h \Rightarrow |f''(x)|\le\frac{4M_0}{h^2}+\frac{2M_3}{6}h=\frac{4M_0}{h^2}+\frac{M_3}{3}h$. 类似地取 $h=\sqrt[3]{\frac{24M_0}{M_3}}$, 从而 $|f''(x)|\le\sqrt[3]{3}M_0^{\frac{1}{3}}M_3^{\frac{2}{3}}\le 4M_0^{\frac{1}{3}}M_3^{\frac{2}{3}}$.

6. 设 $x_0=\underset{0\le x\le 1}{\arg\max}f(x)$ (若有多个则随便取一个). 在 $x=x_0$ 处做带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 估计 $x=0$ 和 $x=1$ 处, 知 $f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2, f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 \Rightarrow 0=2+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2, 0=2+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2 \Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{-4}{x_0^2}, f''(\xi_2)=\frac{-4}{(1-x_0)^2}$. 由于 $\max\{\frac{1}{x_0^2},\frac{1}{(1-x_0)^2}\}\ge 4$, 从而 $\min\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}\le -16$.

7. 注意到 n 次多项式的 $n+1$ 阶导数恒为 0. 从而在 $x=a$ 处做带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 得到 $P_n(x)=P_n(a)+P_n'(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)(x-a)^n$. 从而对于任意 $x>a$, 成立 $P_n(x)\ge P_n(a)>0$, 从而 x 不可能是 $P_n(x)=0$ 的根.

8. (1) 定义域. 应成立 $1+x\ge 0, 1-x\ge 0, \sqrt{1+x}>\sqrt{1-x}\Rightarrow 0<x\le 1$.

(2) 极值点. $f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. 由于对于 $x\in(0,1)$ 总有 $f'(x)>0$, 这意味着 $f(x)$ 没有极值点.

(3) 单调区间. 由于 $f'(x)>0$, 这意味着 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.

(4) 凹凸区间与拐点. $f''(x)=\frac{2x^2-1}{x^2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. 从而当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $f''(x)<0\Rightarrow f''(x)$ 凹; 当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$ 时 $f''(x)>0\Rightarrow f''(x)$ 凸. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是拐点.

(5) 渐近线. $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=-\infty$, 从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的垂直渐近线.

9. 首先利用向前-向后数学归纳法来证明 $f(\frac{x_1+\cdots+x_m}{m})\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_m)}{m}$. 向前: 利用数学归纳法证明 $f(\frac{x_1}{2^k}+\cdots+\frac{x_{2^k}}{2^k})\le\frac{1}{2^k}f(x_1)+\cdots+\frac{1}{2^k}f(x_{2^k})$ 对于 $k=1,2,\cdots$ 成立. 假设对于 $k=1,2,\cdots,n-1$ 成立. 则 $f(\frac{x_1}{2^n}+\cdots+\frac{x_{2^n}}{2^n})=f(\frac{1}{2^{n-1}}\frac{x_1+x_2}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\frac{x_{2^n-1}+x_{2^n}}{2})\le\frac{1}{2^{n-1}}f(\frac{x_1+x_2}{2})+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}f(\frac{x_{2^n-1}+x_{2^n}}{2})\le\frac{1}{2^n}f(x_1)+\frac{1}{2^n}f(x_2)+\cdots+\frac{1}{2^n}f(x_{2^n-1})+\frac{1}{2^n}f(x_{2^n})$, 这说明对于 $k=n$ 也成立, 由数学归纳法知原命题对于 $m=2,4,8,16,\cdots$ 都成立. 向后: 如果 $f(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n})\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$, 则 $f(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1})=f(\frac{x_1}{n}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{n}+\frac{1}{n}\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1})\le\frac{1}{n}f(x_1)+\cdots+\frac{1}{n}f(x_{n-1})+\frac{1}{n}f(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1})\Rightarrow f(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1})\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})}{n-1}$. 从而原命题成立. 那么对于 $t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{Q}$ 的情况也成立, 因为这些有理数总可以通分写成一个个同分母的分数求和. 最后再由连续性知对于无理数也成立.

10. 只需注意到对于 $x<y<z$, 成立 $\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\ge\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Leftrightarrow\frac{z-y}{z-x}f(x)+\frac{y-x}{z-x}f(z)\ge f(y)=f(\frac{z-y}{z-x}x+\frac{y-x}{z-x}z)$(这是已知条件). 同理 $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\ge\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. 从而固定 y, 关于 z 的函数 $g(z)=\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ 随着 $z\to y+0$ 单调递减有下界 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Rightarrow$ 极限 (右导数) 存在. 同理左导数存在. 左右导数可能不相等的例子: $f(x)=|x|$.

11. 写成 Riemann 和, 然后利用离散版本的 Jensen 不等式.

12. $\int p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}dx=-\int p(x)\log\frac{q(x)}{p(x)}dx\overset{\text{Jensen 不等式}}{\ge}-\log\int p(x)\cdot\frac{q(x)}{p(x)}dx=0$.

13. 由积分中值定理知存在 $t\in(0,\frac{1}{5})$ 使得 $f(1)=5\times\frac{1}{5}e^{t-1}f(t)\Rightarrow e^1f(1)=e^tf(t)$. 从而对函数 $g(x)=e^xf(x)$ 应用 Rolle 微分中值定理即可.

14. 在闭区间 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上 $f'(x),f(x)$ 都是有界函数, 从而 $f''(x)$ 也有界, 可设 $|f''(x)|\le M$. 从而对于任意 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, 成立 $|f'(x)|=|\int_0^x f''(t)dt|\le\int_0^x|f'(t)|dt\le M|x|\le\frac{M}{2}$, 同理 $|f(x)|\le\frac{Mx^2}{2}\le\frac{M}{8}\Rightarrow|f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|\le\frac{5}{8}M$. 如此迭代下去, 反复上述过程, 可得 $|f''(x)|\le(\frac{5}{8})^nM\to 0$. 从而对于 $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], f''(x)=0\Rightarrow f'(x)=C\Rightarrow f(x)=Cx+D$. 由 $f(0)=0, f'(0)=0$ 知 $C=0, D=0$, 即 $f(x)\equiv 0$.

15. 显然 $\exists x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)\ne\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a)+f(a)$, 否则 $f(x)$ 是线性函数. 若 $f(x_0)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a)+f(a)$, 则由 Lagrange 微分中值定理, $\exists\xi\in(a,x_0)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 若 $f(x_0)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a)+f(a)$, 则由 Lagrange 微分中值定理, $\exists\xi\in(x_0,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

16. 反证法, 如果存在 δ,M 使得 $\forall x\in(b-\delta,b), f'(x)<M$, 则由 Lagrange 微分中值定理, $\forall x\in(b-\delta,b), f(x)=f(b-\delta)+f'(\xi)(x-(b-\delta))\le f(b-\delta)+M\delta$, 这与 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=+\infty$ 矛盾.

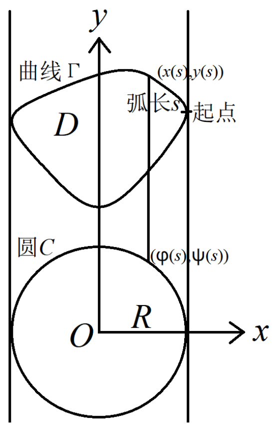
17. (1) 记 $f(x)=e^xP(x)$. 则 $f'(x)=e^x(P(x)+P'(x))\ge 0$, 且 $f(-\infty)=0\Rightarrow f(x)\ge f(-\infty)=0$ 恒成立 $\Rightarrow P(x)\ge 0$.

(2) 记 $f(x)=e^{-x}P(x)$. 则 $f'(x)=e^{-x}(P'(x)-P(x))\le 0$, 且 $f(+\infty)=0\Rightarrow f(x)\ge f(+\infty)=0$ 恒成立 $\Rightarrow P(x)\ge 0$.

(3) 记 $P_1(x)=P(x)-P''(x)$, 从而 $P_1(x)-P_1'(x)\ge 0\Rightarrow P_1(x)\ge 0$. 记 $P_2(x)=P(x)-P'(x)$, 从而 $P_2(x)+P_2'(x)=P_1(x)\ge 0\Rightarrow P_2(x)\ge 0\Rightarrow P(x)-P'(x)\ge 0\Rightarrow P(x)\ge 0$.

9.3 补充 (不要求掌握!)

等周问题: 长为 L 的曲线何时围成区域面积最大? 答案: 圆 (一年级小学生皆可猜出).



证明: 不妨设 D 为凸区域 (D 内任意两点连线位于 D 内). 设 $\Gamma:\begin{cases}x=x(s)\\ y=y(s)\end{cases}\in C^1[0,L]$, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2+y'(s)^2=1$, 且 D 的面积为 $A=\int_0^L xdy=\int_0^L x(s)y'(s)ds$. 设 $C:\begin{cases}x=\varphi(s)=x(s)\\ y=\psi(s)\end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为半径的圆, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面积为 $\pi R^2=-\int_0^L ydx=-\int_0^L\psi(s)x'(s)ds$. 从而 $A+\pi R^2=\int_0^L(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))ds\le\int_0^L\sqrt{(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))^2}ds\le\int_0^L\sqrt{(x'(s)^2+y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)}ds=RL$. 因此我们成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2}\le A+\pi R^2\le RL\Rightarrow A\le\frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))^2=(x'(s)^2+y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s)+\psi(s)y'(s))^2=0$. 由于 $x(s)^2+\psi(s)^2=R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s)+\psi(s)\psi'(s)=0\Rightarrow\psi'(s)=y'(s),\psi(s)=y(s)+y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2+(y-y_0)^2=R^2$, 圆也!

泰勒公式在物理中的一些应用可参考 https://www.zhihu.com/question/302968510/answer/577451859.

10 第 10 次习题课: 向量代数

10.1 问题

1. 对于任意两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 证明: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$.
2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个向量, 若存在三个不全为零的常数 k,l,m 使 $k\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+l\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+m\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$, 证明三个向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 共线.
3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 是欧氏空间中任给的四个起点为 O 的向量. 证明它们的终点共面的充分必要条件是它们中任意取三个得到的混合积满足恒等式 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]+[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}]-[\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0$.
4. 求空间 3 点 A,B,C 满足下列关系的充要条件: $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}=0$.
5. 如果一个四面体有两对对棱互相垂直，则第三对对棱也互相垂直，并且三对对棱的长度平方和相等.
6. 设正方体的棱长为 a, 则该正方体的棱在任意平面上的射影长的平方和等于 $8a^2$.
7. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 是正四面体中心指向其顶点的单位向量, 证明 $\forall\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{d}=\frac{4}{3}\boldsymbol{u}$.
8. 在直角坐标系中, 已知点 $A=(-1,3,-7),B=(2,-1,5),C=(0,1,-5)$. 计算: (1) $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})\cdot(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$; (2) $|\overrightarrow{AB}|$; (3) $|\overrightarrow{AC}|$; (4) $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC},(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC})\overrightarrow{AB}$.
9. 证明任意四面体 $ABCD$ 三对对棱的中点的连线交于同一点.
10. 设已知 $|\overrightarrow{OA}|=2,|\overrightarrow{OB}|=3,|\overrightarrow{OC}|=4,|\overrightarrow{AB}|=2,|\overrightarrow{BC}|=3,|\overrightarrow{AC}|=4$, 求混合积的绝对值 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|$.
11. 设 O,A,B,C 是不共面的四点, 记三个二面角分别为 $\alpha=\langle AOB,AOC\rangle,\beta=\langle AOB,BOC\rangle,\gamma=\langle AOC,BOC\rangle$. 证明 $|\frac{\sin\alpha}{\sin\angle BOC}|=|\frac{\sin\beta}{\sin\angle AOC}|=|\frac{\sin\gamma}{\sin\angle AOB}|$.
12. 证明三角形三条高线一定交于一点.
13. 证明对于任意三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.
14. 证明对于任意三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$.
15. 对于任意四个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$, 证明拉格朗日恒等式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}$.
16. 设函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)\in C[a,b]$, 且对每一点 $x\in[a,b]$, $f''(x)$ 与 $f(x)$ 同号. 证明: 若有两点 $c,d\in[a,b]$ 使得 $f(c)=f(d)=0$, 则 $f(x)\equiv0,x\in[c,d]$.
17. 证明 Legendre 多项式 $P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$ 在 $(-1,1)$ 内有 n 个根.
18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.
19. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 且 $f(x)\ge0,f''(x)\le0$. 证明在 $x\ge a$ 时 $f'(x)\ge0$.
20. 证明当 $|x|\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $2\arcsin x\equiv\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

21. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内 $n+1$ 阶可微, $f^{(n+1)}(0)\neq 0$, 在 $0<|x|<1$ 上有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta(x)x)}{n!}x^n$. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{n+1}$.

22. 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内 n 阶可微, 且 $f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$. 证明当 $0<|h|<\delta$ 时, 成立 $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta(h)h), 0<\theta<h$ 且成立 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$.

23 (不要求掌握, 蹭一下黎曼猜想的热点). 已知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ 于 $s>1$ 时收敛, 记 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}(s>1)$. 记所有素数从小到大依次构成的数列为 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $p_1=2,p_2=3,\cdots,\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=+\infty$. 证明 $\left[\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)\right]\zeta(s)=1$.

10.2 解答

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2, (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$, 将上两式相加即得欲证之不等式.

2. 不妨设 $k\neq 0$. 用向量 $\boldsymbol{c}$ 点乘上述等式两端, 得到 $k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$. 这说明三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 设它们都与平面 π 平行, 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 这三个向量都与平面 π 垂直, 故这三向量共线.

3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 终点共面 $\Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}$ 共面 $\Leftrightarrow [\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}]=0\Leftrightarrow[\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}]=[\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]\Leftrightarrow [\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]-[\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}]=[\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]-[\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]\Leftrightarrow[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]\Leftrightarrow [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0\Leftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]+[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}]-[\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0$.

4. 答案是 A,B,C 三点共线. 注意到 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$, 从而 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow A,B,C$ 三点共线.

5. 原命题转化为: 如果 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, 且 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2$. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$. $\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2$. 同理 $\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2$.

6. 不妨设正方形 3 种棱所对应向量坐标分别为 $(0,0,a),(0,a,0),(a,0,0)$. 我们只需计算这 3 种棱对应的射影长的平方和等于 $2a^2$ 即可. 设某一平面的单位法向量为 (x,y,z)(注意 $x^2+y^2+z^2=1$), 则这 3 种棱在平面上的射影分别为 $(-axz,-ayz,a-az^2),(-axy,a-ay^2,-ayz),(a-ax^2,-axy,-axz)$, 其长度平方和为 $a^2(x^4+y^4+z^4+2x^2z^2+2y^2z^2+2x^2y^2-2x^2-2y^2-2z^2+3)=a^2[(x^2+y^2+z^2)^2-2+3]=2a^2$.

7. 不妨设 $\boldsymbol{a}=(0,0,1),\boldsymbol{b}=(-\frac{2\sqrt{2}}{3},0,-\frac{1}{3}),\boldsymbol{c}=(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{1}{3}),\boldsymbol{d}=(\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{1}{3}),\boldsymbol{u}=(x,y,z)$. 从而 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{d}=(0,0,z)+(\frac{8}{9}x+\frac{2\sqrt{2}}{9}z,0,\frac{2\sqrt{2}}{9}x+\frac{1}{9}z)+(\frac{2}{9}x+\frac{2\sqrt{3}}{9}y-\frac{\sqrt{2}}{9}z,\frac{2\sqrt{3}}{9}x+\frac{2}{3}y-\frac{\sqrt{6}}{9}z,-\frac{\sqrt{2}}{9}x-\frac{\sqrt{6}}{3}y+\frac{1}{9}z)+(\frac{2}{9}x-\frac{2\sqrt{3}}{9}y-\frac{\sqrt{2}}{9}z,-\frac{2\sqrt{3}}{9}x+\frac{2}{3}y+\frac{\sqrt{6}}{9}z,-\frac{\sqrt{2}}{9}x+\frac{\sqrt{6}}{3}y+\frac{1}{9}z)=\frac{4}{3}(x,y,z)$.

8. 纯计算. (1) -524; (2) 13; (3) 3; (4) $(-70,70,-350),(-78,104,-312)$.

9. 设顶点坐标分别为 $(x_i,y_i,z_i), i=1,2,3,4$. 则三对对棱的中点坐标分别为 $[(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}),(\frac{x_3+x_4}{2},\frac{y_3+y_4}{2},\frac{z_3+z_4}{2})]$, $[(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2},\frac{z_1+z_3}{2}),(\frac{x_2+x_4}{2},\frac{y_2+y_4}{2},\frac{z_2+z_4}{2})]$, $[(\frac{x_1+x_4}{2},\frac{y_1+y_4}{2},\frac{z_1+z_4}{2}),(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2},\frac{z_2+z_3}{2})]$. 注意到他们的中点共点, 即连线都经过 $(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4})$.

10. $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|=\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}^T\\\overrightarrow{OB}^T\\\overrightarrow{OC}^T\end{vmatrix}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}^T\\\overrightarrow{OB}^T\\\overrightarrow{OC}^T\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}&\overrightarrow{OB}&\overrightarrow{OC}\end{vmatrix}}=\sqrt{\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OA}&\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OB}&\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OC}\\\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OA}&\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OB}&\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OC}\\\overrightarrow{OC}^T\overrightarrow{OA}&\overrightarrow{OC}^T\overrightarrow{OB}&\overrightarrow{OC}^T\overrightarrow{OC}\end{vmatrix}}$. 由题意 $\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OA}=4,\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OB}=9,\overrightarrow{OC}\overrightarrow{OC}=16,\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}[\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^T(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{AB}^2)=\frac{9}{2},\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{AC}^2)=2,\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{BC}^2)=8$, 从而 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$.

11. 过 C 作 $CD\perp OA$ 交 OA 于点 D, 过 C 作 $CE\perp$ 平面 OAB 交平面 OAB 于点 E. 从而 $\sin\alpha=\frac{|CE|}{|CD|}=\frac{\frac{3V}{S_{\triangle AOB}}}{\frac{2S_{\triangle AOC}}{|AO|}}=\frac{3V|AO|}{2|OA||OC|\sin\angle AOC\cdot|OA||OB|\sin\angle AOB}=\frac{3V}{2|OA||OB||OC|\sin\angle AOC\sin\angle AOB}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin\angle BOC}=\frac{3V}{2|OA||OB||OC|\sin\angle AOC\sin\angle AOB\sin\angle BOC}$. 同理对于 $\frac{\sin\beta}{\sin\angle AOC},\frac{\sin\gamma}{\sin\angle AOB}$ 有类似结论.

12. 不妨设 3 个顶点的坐标是 $A=(0,0),B=(1,0),C=(a,b)$. 过 A 作 BC 边上的高: $l_A:y=\frac{1-a}{b}x$; 过 B 作 AC 边上的高: $l_B:y=-\frac{a}{b}x+\frac{a}{b}$. 两条直线交于 $D=(a,\frac{a(1-a)}{b})$. 显然 $CD\perp AB$.

13. 设坐标 $\boldsymbol{a}=(a,0,0),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,0),\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$, 然后暴力计算.

14. 利用 13 题结论显然.
15. LHS $= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}] = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} = [(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}) =$ RHS.
16. 只需证明函数在 $[c,d]$ 中没有正的最大值, 没有负的最小值. 若 $\max\limits_{x\in[c,d]} f(x) = M > 0$, 则在该点处 $f''(x) > 0$, 意味着这是极小值, 矛盾. 同理没有负的极小值.
17. 只需注意到对于 $k = 1,2,\cdots,n-1$, $x = \pm 1$ 始终是函数 $f(x) = (x^2-1)^n$ 的 k 阶导数的零点. 从而不断应用 Rolle 微分中值定理, 1 阶导有 $\pm1,\xi_{1,1}$ 这三个零点, 2 阶导有 $\pm1,\xi_{2,1},\xi_{2,2}$ 这四个零点, $\cdots$, $n-1$ 阶导有 $\pm1,\xi_{n-1,1},\cdots,\xi_{n-1,n-1}$ 这 $n+1$ 个零点, 从而 n 阶导至少有 n 个零点. 又由于 $f(x)$ 是 $2n$ 阶多项式, 从而 $f^{(n)}(x)$ 是 n 阶多项式, 至多有 n 个零点. 从而 Legendre 多项式在 $(-1,1)$ 内恰有 n 个根.
18. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 成立 $f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(\frac{b-a}{2})^2, f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(\frac{b-a}{2})^2$, 其中 $\xi_1 \in (a,\frac{a+b}{2}), \xi_2 \in (\frac{a+b}{2},b)$. 两式相减, 然后取绝对值得到 $\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)| = \frac{1}{2}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)| \le \frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2} \le \max(|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|)$.
19. 假设 $\exists x_0$ 使得 $f'(x_0) < 0$. 由 $f''(x) \le 0$ 知 $\forall x > x_0, f'(x) \le f'(x_0) < 0$. 从而 $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) \le f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$. 令 $x \to +\infty$ 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, 这与 $f(x) \ge 0$ 矛盾.
20. 令 $f(x) = 2\arcsin x - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$, 则 $f'(x) = 0$, 又因为 $f(0) = 0$, 从而 $f(x) \equiv 0$.
21. 这是个固定套路. 首先由导数定义知 $\lim\limits_{x\to0} \frac{f^{(n)}(\theta(x)x)-f^{(n)}(0)}{\theta(x)x} = f^{(n+1)}(0)$. 再利用 Taylor 展式, $\lim\limits_{x\to0} \frac{f^{(n)}(\theta(x)x)-f^{(n)}(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{n!}{x^n}[f(x)-f(0)-f'(0)x-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}]-f^{(n)}(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{n![f(x)-f(0)-f'(0)x-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}]-f^{(n)}(0)x^n}{x^{n+1}} \overset{n+1\text{次 L'Hospital}}{=} \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$. 上下相除, 由极限的四则运算知 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x) = \frac{1}{n+1}$.
22. 由带 Lagrange 余项的泰勒展开知 $f'(x_0+\theta(h)h) = f'(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(\theta(h)h)^{n-1} + o(h^{n-1}) \Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}\theta(h)^{n-1}h^n + o(h^n)$. 由带 Peano 余项的泰勒展开知 $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$. 从而 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n(n\theta(h)^{n-1}-1) = o(h^n) \Rightarrow n\theta(h)^{n-1}-1 = o(1) \Rightarrow \lim\limits_{h\to0}\theta(h) = \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$.
23. 对于某个确定的 p_k, $\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(np_k)^s}\right] = \sum\limits_{m\ne np_k,\forall n\in\mathbb{N}}\frac{1}{m^s}$, 即除去 p_k 的整倍数之外的所有自然数的 s 次幂的倒数之和. 从而 $\left[\prod\limits_{k=1}^{l}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\right]\zeta(s) = \sum\limits_{m\nmid p_k,k=1,2,\cdots,l}\frac{1}{m^s}$, 即除去前 l 个素数的整数倍之外的所有自然数的 s 次幂的倒数之和. 由于除去所有素数的整数倍之外的所有自然数的 s 次幂的倒数之和为 1, 从而 $\left[\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\right]\zeta(s) = 1$.

10.3 补充 (不要求掌握!)

实际上, 不是所有的空间都有内积. 为引入内积, 我们先定义范数.
设 $\mathscr{H}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 若函数 $||\cdot||$ 满足: (1) $\forall x\in\mathscr{H}, ||x|| \ge 0$, 且等号成立当且仅当 $x = 0$; (2) $\forall x,y\in\mathscr{H}, ||x+y|| \le ||x||+||y||$; (3) $\forall a\in\mathbb{K}, x\in\mathscr{H}, ||ax|| = |a|\cdot||x||$; 则称 $||\cdot||$ 为范数. 范数可以诱导距离: $\rho(x,y) = ||x-y||$.
内积可以诱导范数: 可定义 $||x|| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示内积. 读者可自行验证.
范数不一定可以诱导内积: 如果能引入内积满足 $||x|| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$, 当且仅当范数满足平行四边形等式: $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2+||y||^2), \forall x,y\in\mathscr{H}$.
证明: 必要性显然. 充分性可令 $(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2) \text{ if } \mathbb{K}=\mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2+i||x+iy||^2-i||x-iy||^2) \text{ if } \mathbb{K}=\mathbb{C} \end{cases}$.
若指定了范数的线性空间完备, 则称为 Banach 空间; 若指定了内积的线性空间完备, 则称为 Hilbert 空间. Hilbert 空间一定是 Banach 空间, 但 Banach 空间不一定是 Hilbert 空间.
一些例子: 定义 L_p 空间为满足 $\left[\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$ 的全体可测函数 $f(x)$ 构成的集合. 容易验证在范数 $||f||_p = \left[\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$ 的意义下, L_p 空间是 Banach 空间, 但只有当 $p = 2$ 时才构成 Hilbert 空间.
定义 l_p 空间为满足 $\left[\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$ 的全体数列 $a = (a_1,a_2,\cdots)$, 其中 $a_i\in\mathbb{R}$. 容易验证在范数 $||a||_p = \left[\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ 的意义下, l_p 空间是 Banach 空间, 但只有当 $p = 2$ 时才构成 Hilbert 空间.
我们常见的欧氏空间, 比如说 $\mathbb{R}^n$, 都是 Banach 空间和 Hilbert 空间.
更多内积、外积的知识可参考 https://disk.pku.edu.cn:443/link/E26DE7ABE80D793F9281DCDFB5A740AA 第一章.

11 第 11 次习题课: 空间解析几何

11.1 问题

11.2 解答

11.3 补充 (不要求掌握!)

12 第 12 次习题课: 多元函数的极限与连续性

12.1 问题

12.2 解答

12.3 补充 (不要求掌握!)

13 第 13 次习题课: 偏导数, 全微分, 梯度

13.1 问题

13.2 解答

13.3 补充 (不要求掌握!)

14 第 14 次习题课: 多元函数的微分中值定理、泰勒公式和极值问题, 隐函数

14.1 问题

14.2 解答

14.3 补充 (不要求掌握!)

15 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识. 感谢北京大学元培学院 21 级本科生徐奕辰同学和另一位不愿意透露姓名的同学, 他们提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2022 秋高等数学 A I 习题课 12 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.