

高等数学 A II 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2023 年 2 月 23 日

目录

1 第 1 次习题课: 二重积分	3
1.1 问题	3
1.2 解答	3
1.3 补充 (不要求掌握!)	3
2 第 2 次习题课: 三重积分	4
2.1 问题	4
2.2 解答	4
2.3 补充 (不要求掌握!)	5
3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式	5
3.1 问题	5
3.2 解答	6
3.3 补充 (不要求掌握!)	7
4 第 4 次习题课: 曲面积分	7
4.1 问题	7
4.2 解答	7
4.3 补充 (不要求掌握!)	8
5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式	8
5.1 问题	8
5.2 解答	9
5.3 补充 (不要求掌握!)	10
6 第 6 次习题课: 初等积分法	10
6.1 问题	10
6.2 解答	11
6.3 补充 (不要求掌握!)	11
7 第 7 次习题课: 解的存在唯一性, 高阶线性微分方程	11
7.1 问题	11
7.2 解答	12
7.3 补充 (不要求掌握!)	13

8 第 8 次习题课: 常数变易法, 常系数线性微分方程组	13
8.1 问题	13
8.2 解答	13
8.3 补充 (不要求掌握!)	14
9 第 9 次习题课: 数项级数	14
9.1 问题	14
9.2 解答	14
9.3 补充 (不要求掌握!)	16
10 第 10 次习题课: 函数项级数	16
10.1 问题	16
10.2 解答	17
10.3 补充 (不要求掌握!)	17
11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数	18
11.1 问题	18
11.2 解答	18
11.3 补充 (不要求掌握!)	19
12 第 12 次习题课: 广义积分	19
12.1 问题	19
12.2 解答	20
12.3 补充 (不要求掌握!)	21
13 第 13 次习题课: 含参积分	21
13.1 问题	21
13.2 解答	21
13.3 补充 (不要求掌握!)	22
14 第 14 次习题课: 傅里叶级数	22
14.1 问题	22
14.2 解答	22
14.3 补充 (不要求掌握!)	23
15 综合复习	23
15.1 问题	23
15.2 解答	24
16 致谢	24

1 第 1 次习题课: 二重积分

1.1 问题

1. 累次积分变序: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx, \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy$.
2. 求 $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 与 xoy 平面所围的体积.
3. 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$.
4. 区域 D 由 $y = x^3, y = 0, x = 1$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{1-x^4} d\sigma$.
5. 区域 D 由 $y = 0, x = 1, y = x$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} d\sigma$.
6. 区域 D 由 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $y = -x^2 + 1, y = x^2 - 1$ 两线在 $|x| \leq 2$ 部分所围成, 计算积分 $I = \iint_D (x^2 + y^3) d\sigma$.
7. $0 \leq p(x) \in R[a, b], f(x), g(x)$ 于 $[a, b]$ 单调递增, 证明 $\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$.
8. 计算极限 $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$.

1.2 解答

1. 这种题最好画图. 答案是 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy, \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f(x, y) dx$.
2. 区域 $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, D_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\}$. 则体积 $V = \iint_D z d\sigma = 4 \iint_{D_0} z d\sigma = 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 4 \int_0^a \frac{2}{3} \frac{b}{a^3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \dots$ (换元法) $\dots = \frac{\pi}{2} ab$.
3. 区域 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$. 累次积分时先对 x 积分, 则原积分 $= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy = 1 - \sin 1$.
4. $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{1-x^4} dy = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} dx = -\frac{1}{6} (1-x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.
5. $I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{4x^2-y^2}} \sqrt{4x^2-y^2} dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y}{2} \sqrt{4x^2-y^2} + \frac{4x^2}{2} \arcsin \frac{y}{2x} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4x^2-y^2}} = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} \sqrt{3x^2} + 2x^2 \arcsin \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$.
6. 首先, 因为积分区域关于 $y = 0$ 对称, 所以 $\iint_D y^3 d\sigma = 0$. 记 D_1 为 D 的第一象限部分, $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}, D_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x^2 + 1\}$. 因此 $I = 4 \iint_{D_1} x^2 d\sigma = 4 \iint_{D_2} x^2 d\sigma - 4 \iint_{D_3} x^2 d\sigma = 4 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 dy - 4 \int_0^1 dx \int_0^{-x^2+1} x^2 dy = 4 \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx - 4 \int_0^1 x^2 (1-x^2) dx = 4\pi - \frac{8}{15}$.
7. 利用二重积分.

$$\begin{aligned} \text{RHS} - \text{LHS} &= \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b p(y) dy \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(y) f(y) dy \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b \int_a^b [p(x)p(y)f(x)g(x) - p(x)p(y)f(y)g(x)] d\sigma = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(x)[f(x) - f(y)] d\sigma \end{aligned}$$

同理 $\text{RHS} - \text{LHS} = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y) - f(x)] d\sigma$. 两式相加得 $2(\text{RHS} - \text{LHS}) = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)[g(x) - g(y)][f(x) - f(y)] d\sigma \geq 0$.

8. 记 $I(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$, 则 $I^2(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-a}^a e^{-y^2} dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} d\sigma$. 记区域 $D(a) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 积分 $J(a) = \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2} d\sigma$. 由简单的二维区域包含关系知 $J(a) \leq I^2(a) \leq J(\sqrt{2}a)$. 再利用二重积分极坐标换元知 $J(a) = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=a} = \pi(1 - e^{-a^2})$. 因此 $\lim_{a \rightarrow +\infty} J(a) = \pi$. 由夹逼原理知 $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = \sqrt{\pi}$.

1.3 补充 (不要求掌握!)

类似于累次极限和整体极限的关系, 累次积分和二重积分也不具有相互决定性, 即二重积分存在并不保证累次积分存在. 例如设 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 是区间 $[0, 1]$ 上的所有有理数组成的序列, 定义矩形 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 上的函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{if } x = x_k, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$. 可以证明 $f(x, y) \in R(D)$ 且 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$. 但是, 由于 $f(x_k, y) = \frac{1}{k} \text{Dirichlet}(y)$ 导致 $\int_0^1 f(x_k, y) dy \not\equiv 0$, 所以 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 不能使用累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ 计算. 但是若固定 y , $f(x, y)$ 要么是 Riemann 函数要么恒为 0, 积分值都是 0, 因此 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 可以使用累次积分 $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ 计算.

2 第2次习题课: 三重积分

2.1 问题

1. 区域 Ω 由 $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$ 围成, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} x dv$.
2. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} z dv$.
3. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv$.
4. 区域 D 由 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (y > 0), (x-2a)^2 + y^2 = 4a^2 (y > 0), y = x$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$.
5. 计算椭圆抛物面 $z = x^2 + 2y^2$ 及抛物柱面 $z = 2 - x^2$ 所围成立体的体积.
6. 区域 $D = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} d\sigma_{xy}$.
7. 区域 Ω 由 $z = \frac{x^2+y^2}{m}, z = \frac{x^2+y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y = \beta x (0 < m < n, 9 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$ 围成且在第一卦限的部分, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} xyz dv$.
8. 设 $h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, f(x) \in C[-h, h]$, 证明 $\iiint_{\Omega} f(\alpha x + \beta y + \gamma z) dv_{xyz} = \pi \int_{-1}^1 (1-\zeta^2) f(h\zeta) d\zeta$, 其中区域 Ω 是单位球内部.
9. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$.
10. 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$.
11. 区域 $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算积分 $I = \iint_D \max\{xy, x^3\} d\sigma$.

2.2 解答

1. 记区域 $D_{xy} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 1\}$, 累次积分时依次对 z, y, x 积分, 有 $I = \iint_{D_{xy}} [\int_0^{1-x-2y} x dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) d\sigma_{xy} = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} [x(1-x)-2xy] dy = \int_0^1 [\frac{1}{2}x(1-x)^2 - \frac{1}{4}x(1-x)^2] = \frac{1}{48}$.
2. 记区域 $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{2}\}$, 累次积分时先对 z 积分再极坐标换元, 有 $I = \iint_{D_{xy}} [\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} z dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}[R^2 - 2(x^2+y^2)] d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}(R^2 - 2r^2) r dr = \frac{\pi R^4}{8}$.
3. 由对称性, $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv + 2 \iiint_{\Omega} (xy + yz + zx) dv = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$. 先计算 $I_1 = \iiint_{\Omega} z^2 dv$. 记区域 $D_z = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} \leq 1\}$, 累次积分时先对 σ_{xy} 积分再对 z 积分, 有 $I_1 = \int_{-c}^c dz \iint_{D_z} z^2 d\sigma_{xy} = \int_{-c}^c z^2 \pi ab(1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{4\pi abc^3}{15}$. 因此 $I = \frac{4\pi abc}{15}(a^2 + b^2 + c^2)$.
4. 令 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 有 $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 - 2ar \cos \theta = 0 \Rightarrow r = 2a \cos \theta \\ (x-2a)^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow r = 4a \cos \theta \\ y = x \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$, 从而 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a \cos \theta}^{4a \cos \theta} r^2 dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3} a^3 \cos^3 \theta d\theta = \frac{112-70\sqrt{2}}{9} a^3$.
5. 联立方程 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$, 因此区域 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, 体积 $V = \iint_D [(2-x^2) - (x^2+2y^2)] d\sigma = 2 \iint_D (1-x^2-y^2) d\sigma$. 做极坐标换元知 $V = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) dr = \pi$.
6. 令 $\begin{cases} \xi = x+y \\ \eta = x-y \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ y = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$, 区域 $D_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\} \Rightarrow D_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$, 所以换元后 $I = \iint_{D_{\xi\eta}} \xi^2 e^{\xi\eta} |J| d\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^1 \xi^2 e^{\xi\eta} d\eta = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi(e^{\xi} - 1) d\xi = \frac{1}{4}$.
7. 令 $\begin{cases} u = \frac{z}{x^2+y^2} \\ v = xy \\ w = \frac{y}{x} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{w}} \\ y = \sqrt{vw} \\ z = uv(w + \frac{1}{w}) \end{cases}$, Jacobi 行列式 $J = |\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}| = \frac{v}{2w}(w + \frac{1}{w})$, 区域 $\Omega \rightarrow \Omega_{uvw} = \{(u, v, w) : \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, a^2 \leq v \leq b^2, \alpha \leq w \leq \beta\}$, 所以换元后 $I = \iiint_{\Omega_{uvw}} \sqrt{\frac{v}{w}} \sqrt{vw} uv(w + \frac{1}{w}) \frac{v}{2w}(w + \frac{1}{w}) du dv dw = \iiint_{\Omega_{uvw}} v^3 u(w + \frac{1}{w})^2 \frac{1}{w} du dv dw = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} u du \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} (w + \frac{2}{w} + \frac{1}{w^3}) dw = \frac{1}{32} (\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) (b^8 - a^8) [(\beta^2 - \alpha^2)(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}) + 4 \log \frac{\beta}{\alpha}]$.

$$8. \text{ 作正交变换 } \begin{cases} \xi = a_1x + b_1y + c_1z \\ \eta = a_2x + b_2y + c_2z \\ \zeta = \frac{1}{h}(\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{cases} \quad (\text{旋转}), \text{ 则 } \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} \right| = 1, \text{ 所以换元后 } \text{LHS} = \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leq 1} f(h\zeta) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$\int_{-1}^1 d\zeta \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq 1-\zeta^2} f(h\zeta) d\xi d\eta = \pi \int_{-1}^1 (1-\zeta^2) f(h\zeta) d\zeta = \text{RHS}.$$

$$9. \text{ 作球坐标变换, 区域 } \Omega: 0 \leq r \leq 2 \cos \phi, \text{ 积分 } I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^{2\cos\phi} r^2 r^2 \sin \phi dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^{2\cos\phi} r^4 dr =$$

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \frac{32}{5} \cos^5 \phi d\phi = -\frac{64}{5} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \phi d\cos \phi = -\frac{64}{5} \frac{\cos^6 \phi}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15} \pi.$$

$$10. \text{ 作广义球坐标系变换 } \begin{cases} x = ar \sin \phi \cos \theta \\ y = br \sin \phi \sin \theta \\ z = cr \cos \phi \end{cases}, \text{ Jacobi 行列式为 } J = abcr^2 \sin \phi, \text{ 所以换元后}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^1 dr r^2 abc \sin \phi (a^2 r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + c^2 r^2 \cos^2 \phi) \\ &= \frac{abc}{5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi -[(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)(1 - \cos^2 \phi) + c^2 \cos^2 \phi] d\cos \phi \\ &= \frac{abc}{5} \int_0^{2\pi} \left[\frac{4}{3} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) + \frac{2}{3} c^2 \right] d\theta = \frac{4abc\pi}{15} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$11. \text{ 引入辅助积分 } J = \iint_D \min\{xy, x^3\} d\sigma. \quad I+J = \iint_D (xy+x^3) d\sigma = \int_0^1 dy \int_{-1}^1 (xy+x^3) dx = 0, \quad I-J = \iint_D |xy-x^3| d\sigma =$$

$$\iint_D |x||y-x^2| d\sigma = 2 \int_0^1 dy \int_0^1 |x|y-x^2| dx \stackrel{u=x^2}{=} \int_0^1 dy \int_0^2 |y-u| du \stackrel{\text{几何意义}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 [y^2 + (1-y)^2] dy = \frac{1}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{6}.$$

2.3 补充 (不要求掌握!)

n 维空间中的球坐标系: 一个向径 r , $n-1$ 个角度 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$, 其中, 一个角度转一圈 (θ_{n-1}), $n-2$ 个角度转半圈

$$(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}). \text{ 与直角坐标系的关系为 } \begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-2} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \end{cases}, \text{ 利用归纳法可以证明 Jacobi 行列式为}$$

$$|J| = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}.$$

n 维空间中半径为 R 的球体 $\Omega: x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$ 的体积 V_n : 作球坐标变换知

$$\begin{aligned} V_n &= \int \dots \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_n = \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \int_0^\pi d\theta_{n-2} \dots \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^R r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} dr \\ &= \frac{R^n}{n} 2\pi \int_0^\pi \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^\pi \sin^2 \theta_{n-3} d\theta_{n-3} \dots \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \\ &= \frac{R^n}{n} 2\pi \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \dots \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2}\right) \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \end{aligned}$$

关于 Beta 函数, 参见后述的含参积分.

3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式

3.1 问题

1. 曲线 $\Gamma: x^2 + y^2 = x$, 计算积分 $I = \int_{\Gamma} \sqrt{1-x^2-y^2} ds$.

2. 曲线 C 是 $y=0, y=x(x \geq 0), x^2 + y^2 = a^2$ 所围成图形的边界, 计算积分 $I = \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$.

3. 曲线 $L: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = at \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, 计算积分 $I = \int_L \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}$.
4. 曲线 $C: \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 计算积分 $I = \int_C (x^2 + y^2)^n ds$.
5. 曲线 $C: x^2 + y^2 = a^2$, 计算积分 $I = \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 方向是逆时针.
6. 曲线 \widehat{AB} 为单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半部分, 计算积分 $I = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy$, 方向为从 $A(1, 0)$ 到 $B(-1, 0)$.
7. 曲线 Γ 是从 $(0, 0)$ 沿函数 $y = x^\alpha$ 到 $(1, 1)$ 的部分, 计算积分 $I = \int_\Gamma (x^2 - y^2)dx - 2xydy$.
8. 曲线 Γ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 计算积分 $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz$, 方向是从 z 轴正向看回来的逆时针方向.
9. 区域 D 是由点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 围成的三角形, 计算积分 $I = \iint_D x^2 dx dy$.
10. 曲线 $C: 741x^8 + 886e^x y^2 + \sin(x^9 \cos(y)) = 5$, 计算积分 $I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.
11. 证明或否定: 曲线积分 $I = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$ 在 \mathbb{R}^2 内积分与路径无关.
12. (格林第二公式) 设闭区域 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的, $u = u(x, y), v = v(x, y) \in C^2(D)$, 证明 $\iint_D (v\Delta u - u\Delta v) d\sigma = \oint_{\partial D} (v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}) ds$, 其中 \vec{n} 为 ∂D 的单位外法向量.
13. 求函数 $u(x, y)$ 使得 $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy$.

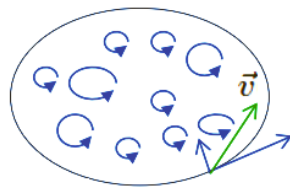
3.2 解答

1. 曲线参数方程 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, 则 $ds = \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} dt = \frac{1}{2} dt$, 原积分 $I = \int_\Gamma \sqrt{1-x} ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}| dt = \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 2$.
2. 记 C_1, C_2, C_3 分别为曲线 C 的下、右上、左上部分, 则原积分 $I = \int_{C_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{C_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{C_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\theta + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx = (e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a + e^{\sqrt{2}x} \big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4} a e^a + 2(e^a - 1)$.
3. 直接使用公式, $I = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2} dt = \int_0^{2\pi} t^2 \sqrt{2} a dt = \frac{8\sqrt{2}}{3} a \pi^3$.
4. 直接使用公式, $I = \int_0^{2\pi} a^{2n} a d\theta = 2\pi a^{2n+1}$.
5. 曲线参数方程 $x = a \cos t, y = a \sin t$, 因此 $I = \oint \frac{a^2 (\cos t + \sin t)(-\sin t) - a^2 (\cos t - \sin t) \cos t}{a^2} dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi$.
6. 由 $x^2 + y^2 = 1$ 知 $xdx + ydy = 0$ 得 $dy = -\frac{x}{y} dx$, 从而有 $\int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy = \int_1^{-1} -ydx + x(-\frac{x}{y} dx) = \int_{-1}^1 (\frac{x^2+y^2}{y}) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.
7. 直接计算得 $I = \int_0^1 (x^2 - x^{2\alpha}) dx - 2xx^\alpha (\alpha x^{\alpha-1}) dx = \int_0^1 (x^2 - (2\alpha+1)x^{2\alpha}) dx = -\frac{2}{3}$.
8. 球面的单位法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$, 平面的单位法向量为 $\vec{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$. 所以曲线 Γ 的单位切向量为 $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. 从而积分为 $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot \vec{\tau} ds = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) ds = \int_\Gamma 0 ds = 0$.
9. AB 的方程为 $y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, BC 的方程为 $y = y_2 + \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$, CA 的方程为 $y = y_3 + \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_3)$. 由格林公式, 知原积分 $I = \iint_D \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{3} x^3) d\sigma = \oint_{\partial D} \frac{1}{3} x^3 dy = \int_{AB} \frac{1}{3} x^3 dy + \int_{BC} \frac{1}{3} x^3 dy + \int_{CA} \frac{1}{3} x^3 dy = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} dx + \int_{x_3}^{x_1} \frac{1}{3} x^3 \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3} dx = \frac{1}{12} [(y_2-y_1)(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1) + (y_3-y_2)(x_3^2+x_2^2)(x_3+x_2) + (y_1-y_3)(x_1^2+x_3^2)(x_1+x_3)]$.
10. 容易验证圆点 O 是闭曲线 C 所围成区域的内点. 记 $C_\epsilon: x^2 + y^2 = \epsilon^2$, 取 ϵ 足够小使 C_ϵ 围成的区域完全在曲线 C 内侧. 在 C 与 C_ϵ 围成的区域 D 上使用格林公式知 $\oint_{\partial D} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x} (\frac{x}{x^2+y^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{-y}{x^2+y^2})) d\sigma = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{C_\epsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \stackrel{x=\epsilon \cos \theta, y=\epsilon \sin \theta}{=} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.
11. 上述积分为两个曲线积分之差, 即 $I = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2} = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \int_\Gamma \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$. 令 $P_i = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q_i = \frac{(x-i)dy}{(x-i)^2+y^2}, i=0, 1$, 容易验证 $\frac{\partial P_i}{\partial y} = \frac{\partial Q_i}{\partial x}$. 但由于 P_0, Q_0 包含瑕点 $(0, 0)$, P_1, Q_1 包含瑕点 $(1, 0)$, 且在包含瑕点的区域内积分值可能为 2π (第 10 题结论), 不包含瑕点的区域内积分值必为 0, 因此原积分与路径有关, 结论不对.
12. 由格林公式, $\iint_D \nabla \cdot (P, Q) d\sigma = \iint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) d\sigma = \oint_{\partial D} P dy - Q dx = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot (dy, -dx) = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot \vec{n} ds$. 因此 $\oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \oint_{\partial D} v \nabla u \cdot \vec{n} ds = \iint_D \nabla \cdot (v \nabla u) d\sigma = \iint_D (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) d\sigma$, 类似有 $\oint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) d\sigma$. 两式相减即得结果.
13. 令 $P(x, y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x, y) = \frac{e^y}{1+x^2}$, 则有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xe^y}{(x^2+1)^2}$. $\int P(x, y) dx = \frac{e^y-1}{x^2+1} + C'$, $Q(x, y)$ 删除掉含 x 的项后为 0, 因此 $u(x, y) = \frac{e^y-1}{1+x^2} + C$.

3.3 补充 (不要求掌握!)

格林公式的物理意义: 平面定常流体 (各点流速只与位置有关, 与时间无关) 于 (x, y) 点的流速为 $\vec{v}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. 对于固定的 x , $\frac{\partial P}{\partial y}$ 决定了 x 方向向 y 方向的旋转, 所以若以逆时针方向为正向, 则 x 方向向 y 方向的旋转度量为 $-\frac{\partial P}{\partial y}$. 对于固定的 y , $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 决定了 y 方向向 x 方向的旋转, 其度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x}$. 从而, (x, y) 点的流体的旋转度的度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, 命名为 (平面流场的旋度), 记为 $\text{rot } \vec{v}$.

物理现象: 边界线 ∂D 上的环流量等于区域 D 上各点旋转量的迭加.



4 第 4 次习题课: 曲面积分

4.1 问题

- 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 被柱面 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 割下的部分的面积.
- 求螺旋面 $\Sigma: \begin{cases} x = u \sin v \\ y = u \cos v \\ z = av \end{cases}$ 在 $0 \leq u \leq R, 0 \leq v \leq 2\pi$ 部分的面积, 其中 $a > 0$ 是常数.
- 求抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy (a > 0)$ 内的那部分面积.
- Σ 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS$.
- Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq H$, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$.
- 求均匀物质曲面 $\Sigma: z = 2 - (x^2 + y^2), z \geq 0$ 的质心坐标.
- Σ 是平面 $2x + 2y + z = 6$ 于第一卦限部分上侧, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, 其中 $\vec{F} = (xy, -x^2, x + z)$.
- $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, Σ 是 $\partial\Omega$ 的外侧, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} xyz dx dy$.
- 流 $\vec{v} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$, 求穿出 $\frac{1}{8}$ 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (第一卦限) 的流量.
- Σ 是 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq h)$ 外侧, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$.
- Σ 是由三个坐标平面及 $x + y + z = 1$ 所围成四面体外侧, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$.
- S 是曲面 $x^2 + y^2 = 1 (0 \leq z \leq 2)$ 的外侧, 计算积分 $I = \iint_S x(y - z) dy dz + (x - y) dx dy$.
- S 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外表面, 计算积分 $I = \iint_S \frac{dx dy}{z}$.

4.2 解答

- 由对称性, 所求面积 S 为 xy 平面上方曲面的面积的两倍. 割下部分 $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D, D = \{(x, y) : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$. 则面积 $S = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} d\sigma_{xy} = 2 \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} d\sigma_{xy}$. 利用极坐标变换知 $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2} \Big|_0^{\cos \theta} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2\pi - 4$.
- $\vec{\tau}_1 = (\sin v, \cos v, 0), \vec{\tau}_2 = (u \cos v, -u \sin v, a), |\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2| = \sqrt{u^2 + a^2} \Rightarrow S = \iint_{\Sigma} |\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2| d\sigma_{uv} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^R \sqrt{u^2 + a^2} du = 2\pi [\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(u + \sqrt{u^2 + a^2})]_0^R = \pi R \sqrt{R^2 + a^2} + \pi a^2 \log(\frac{R + \sqrt{R^2 + a^2}}{a})$.
- 由抛物面方程得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{a}, dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}$. 从曲线表达式 $\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy \\ z = 0 \end{cases}$ 知 (x, y) 落在第一、四象限. 做极坐标变换, 知柱面方程为 $r^2 = a^2 \sin 2\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2})$. 因此由对称性知 $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} \frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{a} r dr = \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + \sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1] d\theta = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} d\theta - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(\theta + \frac{\pi}{4}) d\theta - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3 u du - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} (-\frac{1}{3} \sin^2 u \cos u - \frac{2}{3} \cos u) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{20}{9} a^2 - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi)$.
- Σ 在 xoy 平面的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$. 又有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$, 所以 $\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $I = \iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS = \iint_D x^2 y^2 \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = R \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^R \frac{r^5}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$. 分开计算: $\int_0^R \frac{r^5}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{r^4}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{r^4 - R^2 + R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{(R^2 - t)^2}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^R (R^4 t^{-\frac{1}{2}} - 2R^2 t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}) dt = \frac{1}{2} [2R^4 t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} R^2 t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}}] \Big|_0^R = \frac{8}{15} R^5, \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{\pi}{4}$. 所以 $I = R \frac{\pi}{4} \frac{8}{15} R^5 = \frac{2}{15} \pi R^6$.

5. Σ 可以表示为 $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$, 其在 $yo z$ 平面的投影区域为 $D_{yz} : -R \leq y \leq R, 0 \leq z \leq H$. 又 $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}$. 再考虑对称性, $I = 2 \iint_{D_{yz}} (R^2 + z^2) \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} d\sigma_{yz} = 2R \int_{-R}^R \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \int_0^H (R^2 + z^2) dz = 2R \arcsin \frac{y}{R} \Big|_{-R}^R (R^2 z + \frac{1}{3} z^3) \Big|_0^H = 2RH\pi(R^2 + \frac{H^2}{3})$.
6. 设其质心坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 由对称性有 $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{\iint_{\Sigma} z dS}{\iint_{\Sigma} dS}$. 易知 $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$, 因此 $\iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3}\pi$, $\iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} (2 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(2 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{37}{10}\pi$. 所以 $z_0 = \frac{111}{130}$.
7. $\vec{n} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), z = 6 - 2x - 2y, D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}, dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} d\sigma_{xy} = 3d\sigma_{xy}$, 则 $I = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} [\frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}(x + z)] dS = \iint_D [\frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}(x + 6 - 2x - 2y)] \cdot 3d\sigma_{xy} = \iint_D [2xy - 2x^2 - x - 2y + 6] d\sigma_{xy} = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} [2xy - 2x^2 - x - 2y + 6] dy = \frac{27}{4}$.
8. 记 Σ_1, Σ_2 分别为 Σ 在第一卦限和第五卦限的部分, $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. 由对称性, $I = 2 \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy = 2 \iint_D xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} d\sigma_{xy} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta \sqrt{1 - r^2} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 \sqrt{1 - r^2} dr^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 u \sqrt{1 - u} du \stackrel{t=\sqrt{1-u}}{=} \frac{1}{2} \int_1^0 (1 - t^2) t (-2t) dt = \frac{2}{15}$.
9. $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), Q = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\Sigma} xy dy dz + yz dx dz + xz dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 3 \iint_{\Sigma} xz dx dy = 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} d\sigma_{xy} = \frac{3\pi}{16}$.
10. $I = \iint_{\Sigma} (x, y, z) \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, -z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = \iint_{\Sigma} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 0$.
11. 记 Σ 落在 xy, yz, zx 平面上的部分分别为 Σ_z, Σ_x 和 Σ_y , 在平面 $x + y + z = 1$ 的部分记为 Σ_1 . 则在 Σ_z 上, $z = 0, dy dz = dz dx = 0$, 从而 $\iint_{\Sigma_z} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 0$. 同理在 Σ_y 与 Σ_x 上的积分都为零. 因此 $I = \iint_{\Sigma_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy$. 记 $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, 则由对称性 $I = 3 \iint_D (1 - x - y) d\sigma_{xy} = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \frac{1}{2}$.
12. 注意到曲面 S 在 O_{xy} 平面上的投影为一曲线, 所以 $\iint_S (x - y) dx dy = 0$. 为了计算另一个积分, 将曲面分成两部分 $\begin{cases} S_1 : x = \sqrt{1 - y^2} (0 \leq z \leq 2) \\ S_2 : x = -\sqrt{1 - y^2} (0 \leq z \leq 2) \end{cases}$. 记 $D = \{(y, z) : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$, 由对称性, $I = 2 \iint_{S_1} x(y - z) dy dz = 2 \int_0^2 dz \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} (y - z) dy = -2\pi$.
13. 记 $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, 由对称性知 $I = 2 \iint_D \frac{dx dy}{c \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}} = \frac{2}{c} \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \frac{dy}{\sqrt{(1-x^2/a^2) - y^2/b^2}} = \frac{2}{c} \int_{-a}^a \frac{b\pi}{2} dx = \frac{2\pi ab}{c}$.

4.3 补充 (不要求掌握!)

如何定义某条曲线是“可求长度”的? 如何定义某张曲面是“可求面积”的? 有兴趣的同学可以参考https://wqgcx.github.io/courses/Functions_of_Real_Variables.pdf.

事实上, 有些集合是不可求长的. 用 $m(A)$ 表示集合 A 的“长度”, 在 $[0, 1]$ 中根据规则“ $x_1 \sim x_2$ 当且仅当 $x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}$ ”划分等价类, 每个等价类选取一个元素 x_α (依赖于选择公理), 这样构成了集合 A . 假设 A 可求长, 那么 $A_q = (A + q) \cap [0, 1], \forall q \in \mathbb{Q}$ 也可求长, 且对于 $q \neq p$ 有 $A_q \cap A_p = \emptyset$. 这表明 $1 = m([0, 1]) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m(A_q)$, 即 A 不是零长度的. 注意到对任意的 $q \in \mathbb{Q}$ 成立 $m(A_q) \geq m(A) - q$, 这样只需考虑所有在区间 $[0, \frac{1}{2}m(A)]$ 中的有理数便知矛盾! 这说明集合 A 是不可求长的.

5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式

5.1 问题

- Σ 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq 1)$ 外侧, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} (y - z) dy dz + (z - x) dx dz + (x - y) dx dy$.
- S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上半部分上侧, 计算积分 $I = \iint_S (\sin yz + x) dy dz + (e^{xz} + y) dz dx + (xy + z) dx dy$.
- 设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为一封闭光滑曲面, 以它为边界的闭区域为 D , $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3$ 不在 S 上. 计算积分 $I = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}', \vec{n})}{r^2}$, 其中 $\vec{r}' = (x - \xi, y - \eta, z - \zeta), r = |\vec{r}'|, |\vec{n}|$ 是 S 的单位外法向量.
- 设 $f(x, y, z)$ 表示从原点到椭球面 $\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上点 $P(x, y, z)$ 的切平面的距离, 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{f(x, y, z)}$.

5. L 是平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截得三角形 Σ 的边界, 其正向与此三角形上侧成右手系, 计算积分 $I = \oint_L zdx + xdy + ydz$.
6. L 为椭圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \end{cases}$, 方向与椭圆面上侧构成右手系, 计算积分 $I = \oint_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$.
7. Γ_h 是平面 $x + y + z = h$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看去逆时针方向, 计算积分 $I = \oint_{\Gamma_h} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$.
8. C 是平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 切立方体 $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq a\}$ 的表面所得的切痕, 方向是从 x 轴正向看去逆时针方向, 计算积分 $I = \oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$.
9. S 是柱面 $x^2 + y^2 = R^2, -R \leq z \leq R$ 所围成的立体表面外侧, 计算积分 $I = \iint_S \frac{xdydz + z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$.
10. S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1, z = 2$ 所围立体的表面外侧, 计算积分 $\iint_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$.
11. 函数 $P(x, y), Q(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$, 且曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx - Qdy$ 和 $\int_{\Gamma} Pdy + Qdx$ 在 \mathbb{R}^2 中与路径无关, 求证 $P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x + \cos \theta, y + \sin \theta)d\theta, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5.2 解答

1. 记 $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}, \Sigma_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$, 则 $I = \oint_{\partial\Omega} (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy - \iint_{\Sigma_0} (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy := I_1 - I_2$. 根据高斯公式, $I_1 = \iiint_{\Omega} [0 + 0 + 0]dv = 0$, 而 $I_2 = \iint_{\Sigma_0} (x - y)dxdy = \iint_{\Sigma_0} x d\sigma_{xy} - \iint_{\Sigma_0} y d\sigma_{xy} = 0 - 0 = 0$. 因此 $I = 0$.

2. 取 $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, 方向向下, 则 $S \cup S_1$ 构成了上半单位球体 D 的边界外侧. 由高斯公式得 $\iint_{S \cup S_1} (\sin yz + x)dydz + (e^{xz} + y)dzdx + (xy + z)dxdy = 3 \iiint_D dv = 2\pi$. 而 $\iint_{S_1} (xy + z)dxdy = - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} xy d\sigma_{xy} = 0$. 因此 $I = 2\pi$.

3. $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{1}{r} \vec{r} \cdot \vec{n} \Rightarrow I = \iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{x-\xi}{r^3} dydz + \frac{y-\eta}{r^3} dzdx + \frac{z-\zeta}{r^3} dxdy$. 由 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3}) = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}$, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3}) = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-\eta)^2}{r^5}$, $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3}) = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$ 知 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3}) = 0$. 当 $(\xi, \eta, \zeta) \notin D$ 时, 根据高斯公式成立 $I = \iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})]dv = 0$. 当 $(\xi, \eta, \zeta) \in D$ 时, 取 ϵ 充分小使得球面 $S_{\epsilon} = \{(x, y, z) : (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \epsilon^2\}$ 完全落在 D 的内部. 如果取 S_{ϵ} 的内侧 S_{ϵ}^{-} , 设区域 D_{ϵ} 以 S 与 S_{ϵ}^{-} 为边界, 则 $\iint_{S \cup S_{\epsilon}^{-}} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \iint_{D_{\epsilon}} 0 dv = 0$. 注意到在 S_{ϵ} 上, \vec{r} 与 \vec{n} 平行, 从而 $I = - \iint_{S_{\epsilon}^{-}} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \iint_{S_{\epsilon}} \frac{dS}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 = 4\pi$.

4. 对 Σ 的方程两边微分得到 $\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2} = 0$, 因此 P 处的外法向量为 $\vec{n} = (\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$, 切平面方程为 $\frac{x}{a^2}(X - a) + \frac{y}{b^2}(Y - y) + \frac{z}{c^2}(Z - z) = 0$, 原点到切平面距离 $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2 + (\frac{y}{b^2})^2 + (\frac{z}{c^2})^2}}$, 因此 $I = \iint_{\Sigma} \sqrt{(\frac{x}{a^2})^2 + (\frac{y}{b^2})^2 + (\frac{z}{c^2})^2} dS = \iint_{\Sigma} (\frac{x}{a^2} \cos \alpha + \frac{y}{b^2} \cos \beta + \frac{z}{c^2} \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma} \frac{x}{a^2} dydz + \frac{y}{b^2} dzdx + \frac{z}{c^2} dxdy$. 记 $V = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 由高斯公式有 $I = \iiint_V (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) dv = \frac{4\pi abc}{3} (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$.

5. $\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = dydz + dzdx + dxdy$, 因此由斯托克斯公式, $I = \iint_{\Sigma} dydz + dxdz + dxdy = 3 \iint_{\Sigma} dxdy = \frac{3}{2}$.

6. 记椭圆面上侧为 Σ , $\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} = -2dydz - 2dzdx - 2dxdy$, 因此由斯托克斯公式, $I = \iint_{\Sigma} -2dydz - 2dzdx - 2dxdy = -2 \iint_{\Sigma} dydz + dxdy = -2[\iint_{D_{yz}} d\sigma_{yz} + \iint_{D_{xy}} d\sigma_{xy}] = -2(\pi ah + \pi a^2)$.

7. 设平面 $x + y + z = h$ 被圆周 Γ_h 所围成部分为 S_h , 则 S_h 是一半径为 $\sqrt{1 - \frac{h^2}{3}}$ 的圆盘. 由斯托克斯公式, $I = \iint_{S_h} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{3}}(x + y + z)dS = -\frac{4h}{\sqrt{3}} \iint_{S_h} dS = -\frac{4h}{\sqrt{3}}\pi(1 - \frac{h^2}{3})$.

8. 令 Σ 是 C 所围的区域, 方向为上侧, 由斯托克斯公式知 $I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z)dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \frac{3}{2}adS = -2\sqrt{3}a \iint_{\Sigma} dS$. 最后, 因为 Σ 是边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的正六边形, 面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, 所以 $I = -\frac{9}{2}a^3$.

9. 记 S_1, S_2, S_3 分别为 S 的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为 $I = \iint_S \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} + \iint_S \frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2} := I_1 + I_2$. 先看第一项, 显然 $\iint_{S_1} \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{S_2} \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} = 0$. 记 $D_{yz} = \{(y, z) : -R \leq y, z \leq R\}$, 从而 $\iint_{S_3} \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} = 2 \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2} = 2 \int_{-R}^R \frac{1}{R^2+z^2} dz \int_{-R}^R \sqrt{R^2-y^2} dy = 2 \times \frac{1}{2} \pi R^2 \times \frac{\pi}{2R} = \frac{1}{2} \pi^2 R$. 再看第二项, 显然 $\iint_{S_1+S_2} \frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2} = 0$, $\iint_{S_3} \frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2} = 0$ (前者是因为对称性, 后者是因为 S_3 在 xoy 平面上的投影是一曲线). 因此 $I = \frac{1}{2} \pi^2 R$. 请读者注意, 本题由于区域内存在瑕点 $(0, 0, 0)$, 不可直接使用高斯公式.

10. 记 S_1, S_2, S_3 分别为 S 的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为 $(\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}) \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$. 投影 $D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, 从而 $\iint_{S_1} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = - \iint_{D_1} \frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e dr = -2\pi e$. 投影 $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, 从而 $\iint_{S_2} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \iint_{D_2} \frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^2 dr = 4\pi e^2$. 投影 $D_3 = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, 从而 $\iint_{S_3} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = - \iint_{D_3} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 e^r dr = -2\pi e(e-1)$. 因此 $I = -2\pi e + 4\pi e^2 - 2\pi e(e-1) = 2\pi e^2$.

11. 积分与路径无关意味着 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$. 由格林公式知 \forall 区域 D , $\oint_{\partial D} \frac{\partial P}{\partial n} ds = \iint_D \Delta P d\sigma = 0$. 从而 $0 = \oint_{\partial B((x,y),r)} \frac{\partial P}{\partial n} ds = \oint_{\partial B((x,y),r)} \frac{\partial P}{\partial r} ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)}{\partial r} r d\theta = r \frac{\partial}{\partial r} (\int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) d\theta) \Rightarrow \int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) d\theta \equiv C$. 令 $r \rightarrow 0$ 知 $\int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) d\theta \rightarrow 2\pi P(x, y) \Rightarrow P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x+\cos\theta, y+\sin\theta) d\theta$ (令 $r=1$ 即可).

5.3 补充 (不要求掌握!)

高斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流苏 $\vec{F} = (P, Q, R)$, 定义其散度为 $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}$. $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ 表示点为“源”, 即能生流; $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ 表示点为“汇”, 即能“吸流”; $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ 表示点非源非汇. 因此高斯公式的向量形式为 $\iint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dv$, 即: 流在某区域 Ω 上的总散度等于流通过 Ω 的边界的总流量.

斯托克斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流速 $\vec{F} = (P, Q, R)$, 定义其旋度为 $\operatorname{rot} \vec{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) \vec{i} +$

$$(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) \vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F}, \text{ 因此斯托克斯公式的向量形式为 } \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

即: 流在闭路 L 上的循环量 (环流量), 就是旋度在以 L 为边界的光滑曲面上的流量 (旋流量).

6 第 6 次习题课: 初等积分法

6.1 问题

1. 求解微分方程 $(2x \sin y + 3x^2 y) dx + (x^3 + x^2 \cos y + y^2) dy = 0$.
2. 求解微分方程 $(x^2 + 1)(y^2 - 1) dx + xy dy = 0$.
3. 质量为 m 的物体在空中下落, 初速度为 v_0 , 空气阻力与物体速度的平方成正比, 阻尼系数为 $k > 0$. 沿垂直地面向下的方向取定坐标轴 x , 计算 t 时刻的速度.
4. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = x^3 (x \neq 0)$.
5. 设微分方程 $\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$, 其中 $a > 0$ 为常数, 而 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 试求方程的 2π 周期解.
6. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.
7. 考虑里卡蒂方程 $\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$, 其中 $a \neq 0, b, m$ 都是常数, $x \neq 0, y \neq 0$. 证明当 $m = 0, -2, \frac{-4k}{2k+1}, \frac{-4k}{2k-1} (k = 1, 2, \dots)$ 时, 方程可通过适当的变换化为变量分离的方程.
8. 证明: 若 $\mu = \mu(x, y)$ 是方程 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 的一个积分因子使得 $\mu P(x, y) dx + \mu Q(x, y) dy = d\Phi(x, y)$, 则 $\mu(x, y)g(\Phi(x, y))$ 也是一个积分因子, 其中 $g(\cdot)$ 是任一可微的非零函数.
9. 求解微分方程 $(x^3 y - 2y^2) dx + x^4 dy = 0$.
10. 证明: 若 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 是齐次方程, 则 $\mu(x, y) = \frac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}$ 是一个积分因子.
11. 求解微分方程 $(3x^2 y + 2xy + y^3) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$.
12. 假设微分方程 $\frac{dy}{dx} = H(x, y)$ 在 (x, y) 平面上给出了一个以 C 为参数的曲线族 \mathcal{C} . 试求另一个微分方程, 其给出了一个以 K 为参数的曲线族 \mathcal{K} , 并且 \mathcal{C} 中的每一条曲线和 \mathcal{K} 中的每一条曲线相交成定角 $\alpha (-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, 以逆时针方向为正).

6.2 解答

1. $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos y + 3x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 因此是恰当方程. 注意到 $d(x^2 \sin y + x^3 y + \frac{1}{3}y^3) = (2x \sin y + 3x^2 y)dx + (x^3 + x^2 \cos y + y^2)dy$, 因此通积分为 $x^2 \sin y + x^3 y + \frac{1}{3}y^3 = C$.
2. 当因子 $x(y^2 - 1) \neq 0$ 时, 用它除方程两端, 得到等价方程 $\frac{x^2+1}{x}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0$. 积分得到 $x^2 + \log x^2 + \log |y^2 - 1| = C_1 \Rightarrow x^2 e^{x^2} |y^2 - 1| = e^{C_1} \Rightarrow y^2 = 1 + C \frac{e^{-x^2}}{x^2}$, 其中 $C \neq 0$. 当因子 $x(y^2 - 1) = 0$ 时, 得到特解 $x = 0$ 和 $y = \pm 1$. 因此通积分为 $y^2 = 1 + C \frac{e^{-x^2}}{x^2}$ 或 $x = 0$.
3. 由牛顿第二运动定律知 $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 \Rightarrow \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{Ce^{2\sqrt{kg/m}t} + 1}{Ce^{2\sqrt{kg/m}t} - 1}$. 代入初值条件知 $C = (v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}})^{-1}(v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}})$.
4. 积分因子是 $e^{\int \frac{1}{x} dx} = |x|$. 用它乘方程两侧得到 $\frac{d}{dx}(xy) = x^4 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{C}{x}$.
5. 方程通解为 $y(x) = Ce^{-ax} + \int_0^x e^{-a(x-s)} f(s) ds$, 现在选择常数 C , 使 $y(x)$ 成为 2π 周期函数. 代入 $y(2\pi) = y(0)$ 得到 $y(x) = \frac{1}{e^{2a\pi} - 1} \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f(s) ds$, 容易验证它确实是 2π 周期解.
6. 令 $y = ux$, 则 $x \frac{du}{dx} + u = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \arctan u - \log \sqrt{1+u^2} = \log |x| - \log C$. 从而 $|x| \sqrt{1+u^2} = Ce^{\arctan u}$. 以 $u = y/x$ 代回得到通积分 $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\arctan \frac{y}{x}}$.
7. 不妨设 $a = 1$ (否则作变换 $\bar{x} = ax$). 因此考虑 $\frac{dy}{dx} + y^2 = bx^m$. $m = 0$ 时显然是一个变量分离的方程. 当 $m = -2$ 时, 作变换 $z = xy$, 代入方程得到 $\frac{dz}{dx} = \frac{b+z-z^2}{x}$, 这也是一个变量分离的方程. 当 $m = \frac{-4k}{2k+1}$, 作变换 $x = \xi^{\frac{1}{m+1}}, y = \frac{b}{m+1} \eta^{-1}$, 则方程变为 $\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \frac{b}{(m+1)^2} \xi^n$, 其中 $n = \frac{-4k}{2k-1}$. 再作变换 $\xi = \frac{1}{t}, \eta = t - zt^2$, 方程变为 $\frac{dz}{dt} + z^2 = \frac{b}{(m+1)^2} t^l$, 其中 $l = \frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$. 比较 m 与 l 对 k 的依赖关系知只要将上述变换的过程重复 k 次, 就能把原方程化为 $m = 0$ 的情形. 当 $m = \frac{-4k}{2k-1}$ 时, 注意上述过程中 n 对 k 的依赖关系知可以化归到 $m = 0$ 的情形.
8. 直接验证 $\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)g(\Phi(x, y))P(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)g(\Phi(x, y))Q(x, y)]$ 即可.
9. 改写为 $(x^3 y dx + x^4 dy) - 2y^2 dx = 0$. 前一组有积分因子 x^{-3} 和通积分 $xy = C$, 后一组有积分因子 y^{-2} 和通积分 $x = C$. 根据上一题结果, 只需找可微函数 g_1, g_2 使得 $\frac{1}{x^3} g_1(xy) = \frac{1}{y^2} g_2(x)$. 只需取 $g_1(xy) = \frac{1}{(xy)^2}$ 和 $g_2(x) = \frac{1}{x^5}$, 得到原方程的积分因子 $\frac{1}{x^5 y^2}$. 用它乘原方程得到全微分方程 $\frac{1}{(xy)^2} d(xy) - \frac{2}{x^5} dx = 0$, 因此通积分为 $y = \frac{2x^3}{2Cx^4+1}$. 注意到方程还有特解 $x = 0$ 和 $y = 0$, 它们实际上是在用积分因子乘方程时丢失的解.
10. 代入 $P(x, y) = x^m P_1(\frac{y}{x}), Q(x, y) = x^m Q_1(\frac{y}{x})$ 直接验证即可.
11. $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2$, 因此不是恰当方程, 但是 $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 3$ 不依赖于 y , 因此有积分因子 e^{3x} , 用它乘原方程得到 $e^{3x}(3x^2 y + 2xy + y^3)dx + e^{3x}(x^2 + y^2)dy = d[e^{3x}(x^2 y + \frac{1}{3}y^3)] = 0$, 因此通积分为 $e^{3x}(x^2 y + \frac{1}{3}y^3) = C$.
12. 设曲线族 \mathcal{C} 中过点 (x, y) 的线素斜率为 y'_1 , 与它相交成 α 角的线素斜率记为 y' . 当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\tan \alpha = \frac{y' - y'_1}{1 + y' y'_1}$, 即 $y'_1 = \frac{y' - \tan \alpha}{y' \tan \alpha + 1}$. 因为 $y'_1 = H(x, y)$, 所以等角轨线的微分方程为 $\frac{y' - \tan \alpha}{y' \tan \alpha + 1} = H(x, y)$, 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{H(x, y) + \tan \alpha}{1 - H(x, y) \tan \alpha}$. 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时有 $y' = -\frac{1}{y'_1}$, 即微分方程为 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{H(x, y)}$.

6.3 补充 (不要求掌握!)

皮亚诺存在定理: 设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 内连续, 则初值问题 $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$ 在区间 $|x - x_0| \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ($M > \max_{(x, y) \in \mathbb{R}} |f(x, y)|$) 上至少有一个解 $y = y(x)$.
证明过程较为复杂, 有兴趣的同学可以参考《常微分方程教程》(丁同仁、李承治) 第二版 3.2 节.

7 第 7 次习题课: 解的存在唯一性, 高阶线性微分方程

7.1 问题

1. 设初值问题 $\frac{dy}{dx} = F(x, y), y(0) = 0$, 其中函数 $F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0, -\infty < y < \infty \\ 2x, & \text{当 } 0 < x \leq 1, -\infty < y < 0 \\ 2x - \frac{4y}{x}, & \text{当 } 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x^2 \\ -2x, & \text{当 } 0 < x \leq 1, x^2 \leq y < \infty \end{cases}$. 考虑区域 $S: 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty$, 求其皮卡序列.
2. 设函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某个邻域上关于 y 单调下降, 证明初值问题 $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$ 至多有一个右行解.

3. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续, 且满足不等式 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|)$, 其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数, 且 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+0} \int_{\epsilon}^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = +\infty$ ($r_1 > 0$ 是常数). 证明微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 在 G 内经过每一点的解都是唯一的.

4. 设函数 $p(x), q(x), f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 证明初值问题
$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = c, y'(x_0) = d \quad (x_0 \in (a, b)) \end{cases}$$
 在区间 $[a, b]$ 内存在唯一的解.

5. 考虑线性齐次方程 $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y = 0$, 其中 $p_i(x) \in C(\mathbb{R})$, 证明其有且仅有 n 个线性无关的解.

6. 求解微分方程 $y''' - y'' - 2y' = 0$.

7. 求解微分方程 $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 3y' - y = 0$.

8. 求解微分方程 $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x - 5)$.

9. 求解微分方程 $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$.

10. 求解微分方程 $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

7.2 解答

1. $y_1(x) = \int_0^x F(t, 0)dt = x^2, y_2(x) = \int_0^x F(t, t^2)dt = -x^2$, 由数学归纳法知 $y_n(x) = (-1)^{n+1}x^2$. 本题的例子告诉我们没有 Lipschitz 条件, 皮卡序列可能不收敛.

2. 假设不然. 则设方程有两个右行解 $y_1(x), y_2(x)$, 且至少存在一个值 $x_1 > x_0$ 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. 不妨设 $y_1(x_1) > y_2(x_1)$. 令 $\bar{x} = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{x : y_1(x) = y_2(x)\}$, 显然有 $x_0 \leq \bar{x} < x_1$, 而且 $r(x) := y_1(x) - y_2(x) > 0, \forall \bar{x} < x \leq x_1$ 和 $r(\bar{x}) = 0$. 因此, 我们有 $r'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) < 0$, 进而 $r(x_1) = \int_{\bar{x}}^{x_1} r'(t)dt < 0$, 矛盾.

3. 假设不然. 则在 G 内可以找到一点 (x_0, y_0) 使得方程有两个解 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$ 都经过 (x_0, y_0) , 且至少存在一个值 $x_1 \neq x_0$ 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1 > x_0$, 且 $y_1(x_1) > y_2(x_1)$. 令 $\bar{x} = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{x : y_1(x) = y_2(x)\}$, 显然有 $x_0 \leq \bar{x} < x_1$, 而且 $r(x) := y_1(x) - y_2(x) > 0, \forall \bar{x} < x \leq x_1$ 和 $r(\bar{x}) = 0$. 因此, 我们有 $r'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \leq F(|y_1(x) - y_2(x)|) = F(r(x))$, 即 $\frac{dr(x)}{F(r(x))} \leq dx (\bar{x} < x \leq x_1)$. 从 \bar{x} 到 x_1 积分上式, 得到 $\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leq x_1 - \bar{x}$, 其中 $r_1 = r(x_1) > 0$. 但这不等式左端是 $+\infty$, 右端是一个有限的数, 矛盾.

4. 令 $y_1 = y, y_2 = y'$, 则原微分方程可改写为 $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$ ($y_1(x_0) = c, y_2(x_0) = d$), 即是 $\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$ ($\mathbf{y}(x_0) = (c, d)^T$). 固定 x , 等式右边显然对 \mathbf{y} 满足 Lipschitz 条件, 因此解存在唯一.

5. 令 $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$, 可以将原微分方程改写为 $\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$. 固定 x_0 , 由存在唯一性定理知对于任何常数向量 $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, 存在唯一的元素 $\mathbf{y}(x)$ 使得 $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$. 这样得到一个映射 $H : \mathbf{y}_0 \mapsto \mathbf{y}(x), \mathbb{R}^n \rightarrow S$ (记解空间为 S). 显然对于任何 $\mathbf{y}(x) \in S$, 我们有 $\mathbf{y}(x_0) \in \mathbb{R}^n, H(\mathbf{y}(x_0)) = \mathbf{y}(x)$, 所以 H 是满的. 由唯一性又知 H 是单的. 容易验证 H 是线性的. 因此 H 是一个从 \mathbb{R}^n 到 S 的同构映射, 从而 S 是 n 维的, 即原微分方程有且仅有 n 个线性无关的解.

6. 特征方程 $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$, 因此有通解 $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.

7. 特征方程 $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1) = 0$, 因此有通解 $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + C_4 \cos x + C_5 \sin x$.

8. 特征方程 $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$, 因此齐次方程通解为 $(C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-x}$. 设有特解 $y^* = x^3(a + bx)e^{-x} = (ax^3 + bx^4)e^{-x}$, 代入微分方程得 $a = -\frac{5}{6}, b = \frac{1}{24}$. 因此原方程通解为 $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4)e^{-x}$.

9. 特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$, 因此齐次方程通解为 $(C_1 + C_2x)e^{-2x}$. 设有特解 $y^* = a \cos 2x + b \sin 2x$, 代入微分方程得 $a = 0, b = \frac{1}{8}$. 因此原方程通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{8} \sin 2x$.

10. 传统方法很容易, 但这里笔者希望使用另一种方法. 设 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, 原方程可写为 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. 回顾一元情形 $y' = ay$ 的解为 Ce^{ax} , 启发式地, 似乎我们也可以把现在这个方程的解写为 $e^{\mathbf{A}x}\mathbf{C}$. 运用一点线性代数知识可知 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$, 其中 $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 冥冥之中, $e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}x}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-x} & \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} \\ \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} & \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-x} \end{pmatrix}$. 因此, 通解可以写成 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(e^{3x} + e^{-x}) + C_2(e^{3x} - e^{-x}) \\ C_1(e^{3x} - e^{-x}) + C_2(e^{3x} + e^{-x}) \end{pmatrix}$. 由此可见, 这是一个多么和谐的数学世界啊!

7.3 补充 (不要求掌握!)

皮卡存在唯一性定理的另一种证明方法: 考虑连续函数空间上的映射 $F: y \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx$, 由于 $|F(y_1) - F(y_2)| = |\int_{x_0}^x [f(x, y_1) - f(x, y_2)]dx| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_1) - f(x, y_2)|dx \leq \int_{x_0}^x L|y_1 - y_2|dx = L|x - x_0||y_1 - y_2|$. 回顾连续函数空间上的度量为 $\rho_{[a,b]}(y_1, y_2) = \max_{x \in [a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|$, 因此当 $|x - x_0| < \frac{1}{L}$ 时, 映射 F 是一个压缩映射. 由压缩映像原理, F 的不动点存在且唯一, 这就意味着 $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx$ 的解存在且唯一.

8 第 8 次习题课: 常数变易法, 常系数线性微分方程组

8.1 问题

1. 用常数变易法求解一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$.
2. 求解微分方程 $x^2y'' + xy' + 4y = 10$.
3. 求解微分方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$.
4. 求解微分方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin t - 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = \cos t + 4x + 2y \end{cases}$.
5. 求解微分方程组 $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x \end{cases}$.
6. 设有一理想的柔软而不能伸缩的细线, 把它悬挂在两个定点 P_1 和 P_2 之间, 且只受重力作用, 试求悬链线的形状.
7. 利用牛顿第二定律和万有引力定律推导行星运动轨道方程.

8.2 解答

1. 对应齐次方程通解为 $Ce^{-\int p(x)dx}$. 设原微分方程通解为 $C(x)e^{-\int p(x)dx}$, 代入得 $C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$.
2. 作代换 $y = y - \frac{5}{2}$, 仍记为 y , 得到 $x^2y'' + xy' + 4y = 0$. 这是欧拉方程, 因此设 $x = e^t$, 得到 $y'' + 4y = 0$, 特征方程 $\lambda^2 + 4 = 0$, 从而通解是 $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$, 即 $y = C_1 \cos(2 \log |x|) + C_2 \sin(2 \log |x|)$. 因此原方程通解为 $y = C_1 \cos(2 \log |x|) + C_2 \sin(2 \log |x|) + \frac{5}{2}$.
3. 第二式可写为 $x = \frac{1}{2}(\frac{dy}{dt} + y)$, 求得 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(\frac{d^2y}{dt^2} + y)$. 代入第一式得 $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0$, 特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, 因此有通解 $y = (C_1 + C_2t)e^t$. 反代入 $x = \frac{1}{2}(\frac{dy}{dt} + y)$, 可求出 $x = \frac{1}{2}(2C_1 + C_2 + 2C_2t)e^t$.
4. 对第一式两端求导得 $\frac{d^2x}{dt^2} = \cos t - 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$. 由于 $y = \sin t - 2x - \frac{dx}{dt}$, 代入第二式得 $\frac{dy}{dt} = \cos t + 4x + 2(\sin t - 2x - \frac{dx}{dt}) = \cos t + 2\sin t - 2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \cos t - 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -2\sin t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -2\sin t \Rightarrow x = 2\sin t + C_1t + C_2$. 再代回原方程第一式知 $y = -3\sin t - 2\cos t - 2C_1t - C_1 - 2C_2$.
5. 对第一式两端求二阶导再代入第二式, 得到 $\frac{d^4x}{dt^4} = x$, 特征方程 $\lambda^4 - 1 = 0$, 从而通解是 $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t, y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t$.
6. 任取悬链线 $y = y(x)$ 上的一小段 \widehat{PQ} , 并设 P 和 Q 的坐标分别为 $(x, y(x))$ 和 $(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$, \widehat{PQ} 的长度为 Δs , 其中 s 表示弧段 $\widehat{P_1P}$ 的长度. 则小段 \widehat{PQ} 所受的重力为 $W = \gamma \cdot \Delta s$, 方向垂直向下. 在 \widehat{PQ} 上的作用力除重力外还有张力 F_1 和 F_2 , 它们分别为 P 点和 Q 点沿着切线方向. 令 F_1 和 F_2 的水平分量分别为 $H_1 = H(x)$ 和 $H_2 = H(x + \Delta x)$, 而垂直分量分别为 $V_1 = V(x)$ 和 $V_2 = V(x + \Delta x)$. 利用平衡条件有 $H_2 - H_1 = 0, V_2 - V_1 - W = 0$. 因此 $H(x) \equiv H_0, V(x + \Delta) - V(x) = \gamma \cdot \Delta s$. 再利用拉格朗日微分中值定理得到 $V'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x = \gamma \cdot \Delta s (0 < \theta < 1)$. 令 $\Delta x \rightarrow 0$ 就有 $V'(x) = \gamma \frac{ds}{dx}$. 由弧长公式知 $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$. 由张力的方向知 $V(x) = H(x)y'(x) = H_0 \cdot y'(x)$. 因此 $H_0 \cdot y''(x) = \gamma \sqrt{1 + (y'(x))^2}$. 令 $z = y'$, 则降为一阶方程 $z' = \frac{\gamma}{H_0} \sqrt{1 + z^2}$, 通解为 $z = \sinh[\frac{\gamma}{H_0}(x + C_1)]$. 再积分得到通解 $y = \frac{H_0}{\gamma} \cosh[\frac{\gamma}{H_0}(x + C_1)] + C_2$.
7. 设太阳 S 位于惯性坐标系 (x, y, z) 的原点 O , 地球 E 的坐标向量为 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. 由牛顿第二定律和万有引力定律知 $m_e \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{Gm_s m_e}{|\mathbf{r}(t)|^2} \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}$, 即 $\ddot{x} = -\frac{Gm_s x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \ddot{y} = -\frac{Gm_s y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \ddot{z} = -\frac{Gm_s z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$. 显然 $z\ddot{y} - y\ddot{z} = 0$,

即 $\frac{d}{dt}(z\dot{y}-y\dot{z})=0 \Rightarrow z\dot{y}-y\dot{z}=C_1$. 类似地有 $x\dot{z}-z\dot{x}=C_2, y\dot{x}-x\dot{y}=C_3$. 因此 $C_1x+C_2y+C_3z=0$, 这证明了地球运动轨道永远在同一平面上. 不妨设永远在平面 $z=0$ 上, 则方程改写为 $\ddot{x}+\mu x(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0, \ddot{y}+\mu y(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0$, 其中常数 $\mu=Gm_s$. 由此可得 $(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})+\mu(x\dot{x}+y\dot{y})(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0$, 即 $\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-2\mu\frac{d}{dt}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})=0$. 由此有 $\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_4$. 利用极坐标变换, 改写为 $(\frac{dr}{dt})^2+(r\frac{d\theta}{dt})^2-\frac{2\mu}{r}=C_4$. 注意到 $y\dot{x}-x\dot{y}=C_3$ 也可类似改写为 $r^2\frac{d\theta}{dt}=C_3$. 从而 $(\frac{dr}{dt})^2=C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}$. 再利用 $r^2\frac{d\theta}{dt}=C_3$ 可知 $\frac{dr}{d\theta}=\pm\frac{r^2}{C_3}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}$, 即是 $\frac{d(\frac{C_3}{r})}{\pm\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}}=d\theta$. 由此, 我们得到 $\arccos\frac{\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}}{\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}}=\theta-C_5$. 从上式接出 r 关于 θ 的函数, 得到 $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$, 其中常数 $e=\frac{C_3}{\mu}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}>0, p=\frac{C_3^2}{\mu}>0, \theta_0=C_5$. 由平面解析几何知识知 $e<1$ 时为椭圆, $e=1$ 时为抛物线, $e>1$ 时为双曲线.

8.3 补充 (不要求掌握!)

可适当了解一些常微分方程定性分析的内容, 可以理解为方程解对初值的敏感性. 由微分方程驱动的系统可能会由于初值的微扰引发极端变化. 一个正面的例子是 $\frac{dx}{dt}=x$: 如果 $x(0)=0$, 那它就一直为 0; 如果 $x(0)=1$, 那对不起, $x(t)=e^t$, 越走越远. 一个反面的例子是 $\frac{dx}{dt}=-x$: 如果 $x(0)=1$, 那很幸运, $x(t)=e^{-t}$, 和 $x(0)=0$ 的情形殊途同归. 一个好用的画相图的网站: <https://anvaka.github.io/fieldplay>.

9 第 9 次习题课: 数项级数

9.1 问题

1. 讨论级数 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\cdots$ 的收敛性.
2. 设 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, 且 $F_1=1, F_2=2$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{F_n}$ 的收敛性.
3. 讨论级数 $\sum_{n=3}^{+\infty}\log\cos\frac{\pi}{n}$ 的收敛性.
4. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\sqrt[k]{\frac{n-1}{n+1}})^p$ 的收敛性, 其中 $k>0, p>0$ 为常数.
5. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-2}}{e^{nn!}}$ 的收敛性.
6. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调递减数列, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\rightarrow+\infty}na_n=0$.
7. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n n!}{n^n}$ 的收敛性 ($x\geq 0$).
8. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-\sin\frac{1}{n})^{n^2}$ 的收敛性.
9. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为收敛的正项级数, 记余项 $r_n=\sum_{k=n}^{+\infty}a_k, n\in\mathbb{N}$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n^p}$ 的收敛性, 其中 $p>0$.
10. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-\log n}$ 的收敛性.
11. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}(\alpha>0)$ 的收敛性.
12. 数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx(x\neq k\pi)$ 的绝对收敛性.
13. 设 $f(n)$ 为 \mathbb{N} 的一个有界重排, 即是存在 $M>0$ 使得 $|f(n)-n|\leq M$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 收敛, 且收敛值相等.
14. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\log^q n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

9.2 解答

1. 由于 $\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}}<\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\leq\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}<-\frac{1}{2n+1}$, 由 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散知原级数发散.

2. 易证 F_n 单调上升, $\frac{1}{F_n} > 0$ 单调下降. 由 $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3} < 2F_{n-2}$ 知 $F_{n-2} > \frac{1}{2}F_{n-1}$, 从而 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} > \frac{3}{2}F_{n-1}$, 即 $\frac{1}{F_n} < \frac{2}{3}\frac{1}{F_{n-1}}$. 故 $\frac{1}{F_n} < (\frac{2}{3})^{n-1}\frac{1}{F_1} = (\frac{2}{3})^{n-1}, \forall n \geq 2 \Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{F_n} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{F_n} < 1 + \sum_{n=2}^N (\frac{2}{3})^{n-1} < \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$. 而 S_N 单调上升, 因此原级数收敛.

3. 因为 $0 \leq \cos \frac{\pi}{n} \leq 1, n \geq 3$, 所以 $u_n = \log \cos \frac{\pi}{n} \leq 0$, 即级数为定号级数. 由于 $\log \cos \frac{\pi}{n} = \log[1 + (\cos \frac{\pi}{n} - 1)] \sim \cos \frac{\pi}{n} - 1 \sim -\frac{\pi^2}{2n^2} (n \rightarrow +\infty)$, 故 $\sum_{n=3}^{+\infty} \log \cos \frac{\pi}{n}$ 与 $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 同敛散, 因此原级数收敛.

4. 因为 $\sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}} = (1 - \frac{2}{n+1})^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{2}{n} \frac{1}{n+1} + o(\frac{1}{n+1}) + o(\frac{1}{n+1}) (n \rightarrow +\infty)$, 所以 $1 - \sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}} \sim \frac{2}{n} \frac{1}{n+1} (n \rightarrow +\infty)$, 因此有 $(1 - \sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}})^p \sim (\frac{2}{n} \frac{1}{n+1})^p = (\frac{2}{n})^p \frac{1}{(n+1)^p} (n \rightarrow +\infty)$, 故原级数与 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$ 同敛散, 即 $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散.

5. 记 $u_n = \frac{1}{n^2} \frac{n^n}{e^n n!} := \frac{1}{n^2} a_n$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1} (n+1)!} \cdot \frac{e^n n!}{n^n} = \frac{1}{e} \cdot (\frac{n+1}{n})^n \leq 1$. 因此 a_n 单调下降, 故 $a_n \leq a_1 = \frac{1}{e}$. 从而成立 $0 \leq u_n \leq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$. 由 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛知原级数收敛.

6. 显然 $a_n \downarrow 0$. 因为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 由 Cauchy 准则, 存在 N_1 使得 $\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k < \frac{\epsilon}{4}, \forall m > N_1, \forall p \in \mathbb{N}$. 任取 $n > N_1, p = n$, 成立 $\frac{1}{2}(2n)a_{2n} = na_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow (2n)a_{2n} < \frac{\epsilon}{2}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 因此 $\exists N_2$, 使得 $\forall n > N_2$ 成立

$$a_n < \frac{\epsilon}{2}. \text{ 从而取 } N = 2 \max\{N_1, N_2\} + 1, \forall n > N \text{ 成立 } na_n = \begin{cases} (2k)a_{2k} < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, & n = 2k \\ (2k+1)a_{2k+1} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq (2k+1)a_{2k} \leq \epsilon & n = 2k+1 \end{cases}.$$

由极限的定义知结论成立.

7. 记 $a_n = \frac{x^n n!}{n^n}$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = x(\frac{n+1}{n})^n \rightarrow \frac{x}{e} (n \rightarrow +\infty)$. 因此 $x > e$ 时级数发散, $0 \leq x < e$ 时级数收敛. 当 $x = e$ 时, 由于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1$, 从而 $a_n \uparrow$, 而 $a_1 = e$, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$, 级数发散.

8. 记 $a_n = (\sqrt[n]{n} - \sin \frac{1}{n})^{n^2}, n \in \mathbb{N}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} = (\sqrt[n]{n} - \sin \frac{1}{n})^n$. 利用 Taylor 展开有估计 $\sqrt[n]{n} - \sin \frac{1}{n} = e^{\frac{1}{n} \log n} - \sin \frac{1}{n} = \{1 + \frac{\log n}{n} + \frac{1}{2}(\frac{\log n}{n})^2 + o(\frac{\log^2 n}{n^2})\} - \{\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})\} = 1 + \frac{\log n - 1}{n} + o(\frac{1}{n}) := 1 + u_n$, 其中 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = +\infty$. 则 $\sqrt[n]{a_n} = (1 + u_n)^n = (1 + u_n)^{\frac{1}{u_n} nu_n} \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 从而原级数发散.

9. 因为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, 所以 r_n 单调下降趋于 0. 注意到 $a_n = r_n - r_{n+1}$, 所以 $0 < \frac{a_n}{r^p} \leq \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{dx}{x^p}, \forall n \in \mathbb{N}$. 当 $0 < p < 1$ 时, $\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{r_n^p} \leq \sum_{n=1}^N \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{dx}{x^p} = \int_{r_{N+1}}^{r_1} \frac{dx}{x^p} \leq \int_0^S \frac{dx}{x^p} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$ 收敛. 当 $p = 1$ 时, 对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$, 成立

$$\sum_{k=n}^{n+m} \frac{a_k}{r_k} \geq \frac{1}{r_n} \sum_{k=n}^{n+m} a_k = \frac{r_n - r_{n+m}}{r_n} = 1 - \frac{r_{n+m}}{r_n}, \forall m \in \mathbb{N}, \text{ 因此 } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{a_k}{r_k} \geq 1. \text{ 根据 Cauchy 收敛准则知 } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n} \text{ 发散.}$$

当 $p > 1$ 时, $\frac{a_n}{r_n^p} \geq \frac{a_n}{r_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, 所以 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$ 发散. 本题告诉我们, 若定义 $b_n = \frac{a_n}{r_n^p} (0 < p < 1)$, 虽然 $\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{r_n^p} \rightarrow +\infty$, 但

依然有 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛. 即, 对任何一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, 总有另一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$.

10. 显然是交错级数, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n - \log n} = 0$. 用导数知识可以证明 $f(x) = x - \log x$ 在 $x \geq 1$ 时单调上升, 从而 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $x \geq 1$ 时单调下降, 使用 Leibniz 判别法立得.

11. 令 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $\{b_n\}$ 单调有界 (使用 $y = x^{\frac{1}{x}}$ 的单调性), 由 Abel 判别法知原级数收敛.

12. 书上例题已经证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ 收敛. 由于当 $x \neq k\pi$ 时, $|a_n \sin nx| \geq a_n \sin^2 nx = \frac{a_n}{2}(1 - \cos 2nx)$. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx)$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n \sin nx|$ 发散, 即 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ 条件收敛.

13. 记 $\sum_{n=1}^{+\infty}$ 的部分和序列为 S_n , $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)}$ 的部分和序列为 S'_n . 由有界重排性, $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^n$ 只能在 $\{a_k\}_{k=1}^{n+M}$ 中, $\{a_k\}_{k=1}^{n-M}$ 必在 $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^n$ 中, 从而 $|S'_n - S_n| \leq \sum_{j=-M}^M |a_{n+j}|, \forall n \in \mathbb{N}, n > M$. 于是若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=-M}^M |a_{n+j}| = 0. \text{ 而 } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \exists, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n. \text{ 反之, 若 } \sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)} \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{+\infty} \text{ 是 } \sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)} \text{ 的一个}$$

有界重排, 由上知 $\sum_{n=1}^{+\infty}$ 收敛.

14. (i) 当 $p > 0$ 时, 原级数收敛, 因为函数 $f(x) = x^p \log^q x$ 在 x 充分大后单调递增且趋于 $+\infty$, 从而 $\frac{1}{n^p \log^q n}$ 单调下

降趋于 0. (ii) $p = 0, q > 0$ 时, $\frac{1}{\log^q n}$ 单调下降趋于 0, 原级数收敛. (iii) 当 $p = 0, q = 0$ 时, $a_n = (-1)^n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$, 从而原级数发散. (iv) 当 $p < 0$ 或 $p = 0, q < 0$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^p \log^q n} = +\infty$, 因此原级数发散. (v) 当 $p > 1$ 时, 显然原级数绝对收敛. (vi) 当 $p = 1, q > 1$ 时, 由积分判别法知原级数绝对收敛. (vii) 当 $p = 1, q \leq 1$ 时, 由积分判别法知原级数条件收敛. (viii) 当 $0 < p < 1, q \in \mathbb{R}$ 时, $\frac{1}{n^p \log^q n} > \frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}$ 且 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}$ 发散, 所以原级数条件收敛. 综上所述, 我们

有以下结论: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p \log^q n} \begin{cases} p < 0, & \text{发散} \\ p = 0, \begin{cases} q \leq 0, & \text{发散} \\ q > 0, & \text{条件收敛} \end{cases} \\ 0 < p < 1, & \text{条件收敛} \\ p = 1, \begin{cases} q > 1, & \text{绝对收敛} \\ q \leq 1, & \text{条件收敛} \end{cases} \\ p > 1, & \text{绝对收敛} \end{cases}.$

9.3 补充 (不要求掌握!)

Riemann 重排定理: 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\forall S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 存在重排 $\{f(n)\}$ 使得 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)} = S$.

证明思路: 记 $a_n^+ = \max\{0, a_n\}, a_n^- = \max\{0, -a_n\}$, 则 $a_n^+ \geq 0, a_n^- \geq 0, a_n = a_n^+ - a_n^-$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^- = 0$, 并且有 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = +\infty$. 然后运用放多少拿多少的原则, 超过 S 就开始放另一项, 低于 S 又开始放另一项, 如此在 S 附近反复震荡 ($\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^- = 0$ 保证了震荡越来越小), 以至无穷.

10 第 10 次习题课: 函数项级数

10.1 问题

1. 证明或否定: $f_n(x) \Rightarrow f(x), g_n(x) \Rightarrow g(x)$, 则 $f_n(x)g_n(x) \Rightarrow f(x)g(x)$.
2. $f(x) \in C[0, 1]$ 且 $f(1) = 0$, 证明 $x^n f(x) \Rightarrow 0, x \in [0, 1]$.
3. 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)x}{[1+(n+1)^2 x][1+n^2 x]}$ 在 $[a, +\infty) (a > 0)$ 上一致收敛, 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.
4. 讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^k e^{-nx} (k > 1 \text{ 为常数})$ 在 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性.
5. 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[1, +\infty)$ 一致收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛.
6. 设函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}, \{u_{1,n}(x)\}_{n=1}^{+\infty}, \{u_{2,n}(x)\}_{n=1}^{+\infty}, \dots, \{u_{2023,n}(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在区间 $I \in \mathbb{R}$ 上有定义并且满足条件: (1) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 I 上一致收敛; (2) 对每个 $x \in I, k \in \{1, 2, \dots, 2023\}$, $\{u_{k,n}(x)\}$ 关于 n 都是单调且一致有界的 (对于不同的 k , $u_{k,n}(x)$ 单调性可能不同). 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(f_n(x) \prod_{k=1}^{2023} u_{k,n}(x) \right)$ 在区间 I 上的一致收敛性.
7. 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ 在任意区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛.
8. 讨论 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \frac{\cos nx}{n}} \arctan nx$ 在 \mathbb{R} 上的一致收敛性.
9. 设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ 在 $(0, 2\pi)$ 上连续.
10. 证明当 $x \in (-1, 1)$ 时, $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
11. 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \in C^\infty(1, +\infty)$.
12. 试构造一个函数, 它仅在 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ 处间断.
13. 证明 $f_n(x) = n^2(e^{\frac{1}{nx}} - 1) \sin \frac{1}{nx}$, 证明 $f_n(x)$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 不一致收敛, 但对 $x \in [\delta, +\infty)$ 一致收敛, 其中 $\delta > 0$.

10.2 解答

- 结论不对. $f_n(x) = \frac{1}{1-x}, g_n(x) = (1-x)x^n, x \in (0, 1)$, 则 $f_n(x) \Rightarrow \frac{1}{1-x}, g_n(x) \Rightarrow 0$, 但是 $f_n(x)g_n(x) \not\Rightarrow 0$.
- 显然 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, x \in [0, 1]$. 记 $M = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. 由连续性, $\exists \delta > 0$ 使得 $|f(x)| < \epsilon, \forall x \in (1-\delta, 1)$. 这样就有

$$\begin{cases} x \in [0, 1-\delta] \text{ 时}, |x^n f(x)| \leq M(1-\delta)^n \\ x \in (1-\delta, 1] \text{ 时}, |x^n f(x)| \leq |f(x)| < \epsilon \end{cases}$$
 . 取 n 足够大使 $M(1-\delta)^n < \epsilon$ 即可.
- $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(2k+1)x}{[1+(k+1)^2x][1+k^2x]} = \sum_{k=1}^n [\frac{1}{1+k^2x} - \frac{1}{1+(k+1)^2x}] = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)^2x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{1+x} = S(x), x \in (0, +\infty)$.
 当 $x \in [a, +\infty)$ 时, $|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{1+(n+1)^2x} \leq \frac{1}{(n+1)^2a} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty) \Rightarrow S_n(x) \Rightarrow S(x), x \in [a, +\infty)$. 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n = \frac{1}{(n+1)^2} \in (0, +\infty)$ 使得 $|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{1}{2}$, 从而 $S_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛于 $S(x)$.
- $u_n(0) = 0, u_n(x) > 0 (\forall x > 0), \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0, u_n(x) \in C^2[0, +\infty)$, 令 $u'_n(x) = 0$ 得到唯一驻点 $x = \frac{k}{n}$. 容易验证此为最大值点, $M_n = u_n(x_n) = (\frac{k}{e})^k \frac{1}{n^k}$, 所以 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 收敛, 从而原级数在 I 上一致收敛.
- “ \Rightarrow ”: 显然. “ \Leftarrow ”: 已知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致收敛. 又有 $\frac{1}{n^{x-1}}$ 关于 n 单调下降且 $|\frac{1}{n^{x-1}}| \leq 1, \forall x \in [1, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}$. 由 Abel 判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{n^{x-1}}$ 在 $[1, +\infty)$ 一致收敛.
- 由 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)u_{1,n}(x)$ 一致收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} [f_n(x)u_{1,n}(x)]u_{2,n}(x)$ 一致收敛, 依此类推知原级数一致收敛.
- 记 $u_n(x) = (-1)^n, v_n(x) = \frac{x^2+n}{n^2}$, 则 $|\sum_{k=1}^n u_k(x)| \leq 1, \forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}, v_n(x) = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$ 固定 x 后关于 n 单调下降, 且 $v_n(x) \leq \frac{\max\{|a|, |b|\} + n}{n^2} \downarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$, 即 $v_n(x) \Rightarrow 0, x \in [a, b]$. 根据 Dirichlet 判别法, 原级数在 $[a, b]$ 上一致收敛.
- 由于 $|\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}| \leq 1, \frac{1}{n + \frac{\cos nx}{n}}$ 当 $n \geq 3$ 时对 n 单调递减且一致收敛到 0, 由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \frac{\cos nx}{n}}$ 一致收敛. 又由于 $\arctan nx$ 对 n 单调且 $|\arctan nx| \leq \frac{\pi}{2}$ 恒成立 (i.e. 一致有界), 由 Abel 判别法知原级数一致收敛.
- 往证级数在 $(0, 2\pi)$ 上内闭一致收敛. 不妨设 a_n 非负单调下降. 记 $u_n(x) = a_n, v_n(x) = \cos nx$. 则任意 $\delta > 0$, 对于 $x \in [\delta, 2\pi - \delta], u_n(x) \Rightarrow 0$, 且关于 n 单调. 另一方面, $|\sum_{k=1}^n v_k(x)| = |\sum_{k=1}^n \cos kx| = \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}|}{2 \sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$, 因此一致有界. 根据 Dirichlet 判别法, 原级数在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \in C(0, 2\pi)$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$ 在 $[-x, x]$ 上一致收敛, 所以积分求和可交换, 即 $\int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. 而 $\int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$. 从而当 $x \in (-1, 1)$ 时, LHS = RHS.
- $\forall k \in \mathbb{N}, (\frac{1}{n^x})^{(k)} = \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x}$, 因此只需证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上内闭一致收敛即可, 而这是显然的.
- $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$.
- 容易证明 $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{x^2} = f(x) (n \rightarrow +\infty)$. 对于 $x \in (0, +\infty)$, 取 $x_n = \frac{1}{n}$, 则 $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |n^2(e-1)\sin 1 - 1| \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 因此对于 $x \in (0, +\infty), f_n(x) \not\Rightarrow f(x)$. 对于 $x \in [\delta, +\infty), |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x^2} |e^{\frac{1}{nx}} - 1 - \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}}| \stackrel{t=\frac{1}{nx}}{=} \frac{1}{x^2} |\frac{1}{t^2}(t + \frac{e^{\theta_1 t}}{2!}t^2)(t - \frac{\cos \theta_2 t}{3!}t^3) - 1| = \frac{1}{x^2} |\frac{e^{\theta_1 t}}{2!}t - \frac{\cos \theta_2 t}{3!}t^2 + \frac{e^{\theta_1 t}}{2!} \frac{\cos \theta_2 t}{3!}t^3|$. 因此存在常数 C , 当 n 充分大时, 成立如下估计 $\sup_{x \in [\delta, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\delta^2} C \frac{1}{n\delta} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$. 故对于 $x \in [\delta, +\infty)$ 成立 $f_n(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}$.

10.3 补充 (不要求掌握!)

等度连续: 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在区间 I 上的函数列, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $|f_n(x') - f_n(x'')| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x', x'' \in I$ 满足 $|x' - x''| < \delta$, 则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上等度连续.

定理 1: 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 若 $f_n(x) \in C[a, b], n = 1, 2, \dots$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续.

定理 2: 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$, 则 $f_n(x) \Rightarrow f(x), x \in [a, b]$.

Ascoli 引理: X 为紧致 Hausdorff 空间, Y 为度量空间, 则 $F \subset C(X, Y)$ 在紧开拓扑下是紧集的充要条件是 F 等度连续, 逐点列紧且为闭集.

证明留给读者思考. (数学书中常见话术, we leave the proofs to the readers)

11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数

11.1 问题

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)}{n^2} (x-3)^n$ 的收敛半径和收敛域.
2. 设 $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. 已知 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有 $S_n \rightarrow +\infty$, 且 $\frac{a_n}{S_n} \rightarrow 0$. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.
3. 计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-2)(3n+1)}$.
4. 计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+2)!}$.
5. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx}$ 的收敛域与和函数.
6. 求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ 的收敛半径、收敛域与和函数, 并求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.
7. 对 $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$ 在 $x=0$ 处做泰勒展开.
8. 对 $f(x) = \log^2(1+x)$ 在 $x=0$ 处做泰勒展开.
9. 证明 $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.
10. 证明 $x = \sin x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 并由此计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
11. 试构造 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), f_n(x) \not\equiv f(x), x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx$.
12. $a_n > 0, n = 1, 2, \dots, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, 且 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$.

11.2 解答

1. 记 $a_n = \frac{\log(n+1)}{n^2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} = 1$, 所以收敛半径为 $r = 1$. 当 $x-3 = -1$ 即 $x = 2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)}{n^2} (-1)^n$, 绝对收敛. 当 $x-3 = 1$ 即 $x = 4$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)}{n^2}$, 绝对收敛. 所以收敛区域为 $[2, 4]$.
2. 当 $x = 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 发散, 故收敛半径 $r \leq 1$. 记幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n$ 的收敛半径为 R , 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$, 因此 $r \geq R$. 又有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - a_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{a_n}{S_n}) = 1$, 从而 $R = 1$. 综上 $r = 1$.
3. 使用裂项求和. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} (3n+1) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{3n-2} - \frac{(-1)^n}{3n+1} \right] = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} - \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} + \frac{1}{3}$. 为求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$, 考虑幂级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} x^{3n-2}, |x| \leq 1$. 逐项求导, 得到 $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{3n-3} = -\frac{1}{1+x^3}, |x| < 1$. 于是 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{-1}{1+t^3} dt, |x| \leq 1$. 当 $x = 1$ 时有 $f(1) = \int_0^1 \frac{-1}{1+t^3} dt = -\frac{1}{3} \log 2 - \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$. 因此原级数求和为 $-\frac{1}{27} (6 \log 2 + 2\sqrt{3}\pi - 9)$.
4. 引入幂级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n+2}}{(n+2)!}$, 易知其收敛半径为 $+\infty$. 从而逐项求导知 $f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x e^x \Rightarrow f(x) = (x-2)e^x + x + 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+2)!} = f(1) = 3 - e$.
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx} = x \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = x \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n$, 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} t^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$, 且 $x = 0$ 时原级数为 0, 知 x 的收敛域为 $[0, \infty)$. 和函数为 $S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x e^x}{e^x - 1}, & x > 0 \end{cases}$.
6. 利用 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ 可知收敛半径为 1, 收敛域为 $[-1, 1]$. 记 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}, x \in [-1, 1]$, 则 $f(0) = 0, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} (x \in (-1, 1)), f'(0) = 0, f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2x^{2n-1} = \frac{2x}{1-x^2}, x \in (-1, 1)$. 从而成立 $f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x \frac{2t}{1-t^2} dt =$

$-\log(1-x^2), f(x) = f(x) - f(0) = -\int_0^x \log(1-t^2)dt = -t\log(1-t^2)|_0^x + \int_0^x t \frac{(-2t)}{1-t^2} dt = -x\log(1-x^2) + 2\int_0^x \frac{-t^2}{1-t^2} dt = -x\log(1-x^2) + 2x + \log \frac{1-x}{1+x} = (1-x)\log(1-x) - (1+x)\log(1+x) + 2x, x \in [-1, 1]$. 从而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = f(1) = 2(1-\log 2)$.

7. $\frac{1}{(1+t)^2}$ 的展开式为 $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (n+1) t^n$, 因此 $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n x^{2n}, |x| < 1$.

8. $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow \log^2(1+x) = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right]^2 = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, 其中 $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}, n \in \mathbb{N}$. 所以 $\log^2(1+x) = 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \right) x^n$. 可以验证收敛域为 $x \in (-1, 1]$.

9. $x^{-x} = e^{-x \log x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \log x)^n}{n!}$. 由于 $x \log x \in [-\frac{1}{e}, 0]$, 且级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \log x)^n}{n!}$ 在此范围内一致收敛, 因此积分和顺序可交换. 再利用 $\int_0^1 x^n \log^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ 知 $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

10. 对 $\arcsin t$ 做泰勒展开知 $\arcsin t = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, 换元 $x = \arcsin t$ 立得. 由一致收敛性, 两边从 $x=0$ 积分到 $x = \frac{\pi}{2}$ 得到 $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$. 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

11. 取 $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

12. 一方面, $\forall N \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \geq \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\sum_{n=0}^N a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^N a_n n!$. 令 $N \rightarrow +\infty$ 知 $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$.

另一方面, $\forall M > 0, \int_0^M e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^M e^{-x} x^n dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$. 令 $M \rightarrow +\infty$ 知 $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$. 综上所述 $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$. 请读者注意, 我们没有 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性, 不能盲目交换积分和顺序.

11.3 补充 (不要求掌握!)

命题: 存在处处连续但处处不可导的函数. 一个构造是 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u(4^n x)}{4^n}$, 其中 $u(x)$ 是 $|x|(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2})$ 的周期延拓.

证明: 显然 $S(x)$ 一致收敛, 且每一项都是连续函数, 因此 $S(x)$ 连续. 下面证明 $\forall x_0 \in \mathbb{R}, S'(x_0) \nexists$. 不妨设 $x_0 \in (0, 1)$. 注意到 $u_n(x) = \frac{u(4^n x)}{4^n}$ 以 $\frac{1}{4^n}$ 为周期, 在 $[\frac{m}{4^n}, \frac{m}{4^n} + \frac{1}{2} \frac{1}{4^n}]$ 上斜率为 1, 在 $[\frac{m}{4^n} + \frac{1}{2} \frac{1}{4^n}, \frac{m+1}{4^n}]$ 上斜率为 -1. 对于每个 $n \geq 1$, 存在 m_n 使得 $\frac{m_n}{2 \cdot 4^{n-1}} \leq x_0 < \frac{m_n+1}{2 \cdot 4^{n-1}}$. 因此在 $I_n = [\frac{m_n}{2 \cdot 4^{n-1}}, \frac{m_n+1}{2 \cdot 4^{n-1}})$ 内, 存在 x_n 使得 $|x_n - x_0| = \frac{1}{2} |I_n| = \frac{1}{4^n}$. 于是 $\frac{S(x_n) - S(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}$. 对于 $k \geq n, T_k = \frac{1}{4^k}$ 整除 $|x_n - x_0|$, 因此相应项为 0. 当 $k \leq n-1$ 时, 相应项为 1 或 -1, 故 $\frac{S(x_n) - S(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$, 其中 $a_k = 1$ 或 -1 . 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $x_n \rightarrow x_0$, 但 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 不可能存在. 故 $S'(x_0)$ 不存在.

12 第 12 次习题课: 广义积分

12.1 问题

- 计算积分 $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.
- 计算积分 $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx$.
- 计算积分 $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bxdx, I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bxdx$, 其中 $a > 0, b \in \mathbb{R}$.
- 讨论积分 $\int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x^p} - \log(1 + \frac{1}{x^p}) \right] dx (p > 0)$ 的敛散性.
- 证明或否定: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 讨论积分 $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx (\alpha > 0)$ 的收敛性和绝对收敛性.
- 讨论积分 $I = \int_1^{+\infty} \log(1 + \frac{\sin x}{x^p}) dx (p > 0)$ 的收敛性.
- 讨论积分 $I = \int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)^p} dx$ 的收敛性.
- 讨论积分 $I = \int_0^1 (2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}) dx$ 的收敛性.
- $f(x)$ 于 $[a, +\infty)$ 单调, $g(x) \in C(\mathbb{R}), g(x) \not\equiv 0, g(x) = g(x+T)$. 求证 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)|g(x)| dx$ 收敛.

11. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
12. 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx$.
13. 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, 证明对 $0 < a < b$, 成立 $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = (f(0) - L) \log \frac{b}{a}$.

12.2 解答

1. $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_0^1 \frac{\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \log(t + \sqrt{1+t^2})|_0^1 = \log(1 + \sqrt{2})$.
2. $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \arctan x d\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x^2} \arctan x|_1^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}) dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} [-\frac{1}{x} - \arctan x]|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$.
3. 由分部积分有 $aI_1 = -\int_0^{+\infty} \sin bx de^{-ax} = -\sin bx \cdot e^{-ax}|_0^{+\infty} + b \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bxdx = bI_2$, $aI_2 = -\int_0^{+\infty} \cos bxd e^{-ax} = -\cos bx \cdot e^{-ax}|_0^{+\infty} - b \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bxdx = 1 - bI_1$. 解出 $I_1 = \frac{b}{a^2+b^2}$, $I_2 = \frac{a}{a^2+b^2}$.
4. $t \rightarrow 0$ 时 $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$. 故 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x^p} - \log(1 + \frac{1}{x^p}) \sim \frac{1}{2x^{2p}}$. 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx$ 于 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, 于 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散. 所以原积分于 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, 于 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散.
5. 结论不对, 例如 $f(x) = \begin{cases} n, & x \in [n - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2n^3}], n \in \mathbb{N}, n > 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$.
6. 当 $\alpha > 0$ 时, 由于 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递减趋于 0, 而 $|\int_1^x \sin t dt| \leq 2$, 所以由 Dirichlet 判别法, 此无穷积分收敛. 当 $\alpha > 1$ 时, $|\frac{\sin x}{x^\alpha}| < \frac{1}{x^\alpha}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ 收敛, 所以积分绝对收敛. 当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, $\int_\pi^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \geq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2}{(n+1)^\pi}$, 所以积分条件收敛.
7. 泰勒展开知 $I = \int_1^{+\infty} [\frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{2x^{2p}} + o(\frac{\sin^2 x}{x^{2p}})] dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p} - \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^{2p}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} o(1) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{4x^{2p}} - \int_1^{+\infty} \frac{1-4o(1)\sin^2 x}{4x^{2p}} dx := I_1 + I_2 + I_3$. 当 $p > 1$ 时, 三者都绝对收敛. 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, I_1 收敛, I_2 和 I_3 绝对收敛, 故原积分收敛. 当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, I_1 和 I_2 收敛. 又 $\exists A > 1$ 使得 $\frac{1}{2} \leq 4o(1)\sin^2 x \leq 2, \forall x > A$, 所以 $\frac{1-4o(1)\sin^2 x}{4x^{2p}} > \frac{1}{8x^{2p}}, \forall x > A$. 而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}} (p \leq \frac{1}{2})$ 发散, 因此原积分发散.
8. 容易看出原积分与 $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p} dx$ 同敛散, 因此 $p < 1$ 时收敛, $p \geq 1$ 时发散.
9. $I = \int_0^1 (2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}) dx \stackrel{t=\frac{1}{x^2}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$, 因此收敛.
10. $f(x)$ 于 $[a, +\infty)$ 单调, 所以可认为其定号, 不妨设 $f(x) \geq 0$. $g(x)$ 是连续周期函数, 因此存在 M 使得 $|g(x)| \leq M$. “ \Rightarrow ”: 因为 $0 \leq \int_{x'}^{x''} f(x)|g(x)|dx \leq M \int_{x'}^{x''} f(x)dx, \forall x', x''$, 所以由 Cauchy 收敛原理立得.
- “ \Leftarrow ”: 记 $m = \frac{1}{T} \int_0^T |g(x)|dx$. 由于 $\int_a^x f(t)dt$ 单调上升, 故只需证明存在 $x_n \uparrow, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ 使得 $\int_a^{x_n} f(x)dx$ 有界即可. 取合适的 n_0 使得 $a \leq n_0 T$ 和 $x_n = (n_0 + n)T$, 往证 $\int_{n_0 T}^{(n_0+n)T} f(x)dx$ 有界 ($\Leftrightarrow \int_a^{x_n} f(x)dx$ 有界). 首先, 利用反证法知 $f(x)$ 单调下降趋于 0. 其次,

$$\begin{aligned} \int_{(n_0+1)T}^{(n_0+n+1)T} f(x)dx &= \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n} \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx \leq \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n} f(kT)T = \frac{1}{m} \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n} f(kT) \cdot mT \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n} f(kT) \int_{(k-1)T}^{kT} |g(x)|dx \leq \frac{1}{m} \sum_{n_0+1}^{n_0+n} \int_{(k-1)T}^{kT} f(x)|g(x)|dx = \frac{1}{m} \int_{n_0 T}^{(n_0+n)T} f(x)|g(x)|dx \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 由 $\int_a^{+\infty} f(x)|g(x)|dx$ 收敛知 $\frac{1}{m} \int_{n_0 T}^{(n_0+n)T} f(x)|g(x)|dx$ 极限存在. 这意味着 $\int_{(n_0+1)T}^{(n_0+n+1)T} f(x)dx$ 有界, 也就是 $\int_{n_0 T}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 结论成立.

11. 由 $2\sin \frac{x}{2}(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx) = \sin(n + \frac{1}{2})x$ 知 $\int_0^\pi (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx)dx = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. 定义 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}}$, 容易计算出 $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 0$. 因此 $f(x) \in R[0, \pi]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) \sin(n + \frac{1}{2})x dx = 0$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$12. I = \int_0^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin^2 x d(-\frac{1}{x}) = -\frac{\sin^2 x}{x}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$13. \text{对于 } \forall 0 < \delta < A, \text{ 我们有 } \int_\delta^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)-f(0)}{t} dt - \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)-L}{t} dt + (f(0) - L) \log \frac{b}{a}.$$

令 $\delta \rightarrow 0+0, A \rightarrow +\infty$ 知前两项都趋于 0, 从而 LHS = RHS.

12.3 补充 (不要求掌握!)

我们来了解一下 Lebesgue-Stieltjes 积分. 首先设 μ 是 σ 域 \mathcal{F} 上的非负可列可加函数, 满足 $\mu(\emptyset) = 0$.

X 的可测划分: $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset \mathcal{F}$ 满足 $\mu(A_i \cap A_j) = 0, \forall i \neq j$ 且 $\mu((\cup_i A_i)^c) = 0$.

非负简单函数的积分: $\{A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 为 X 的划分, $a_i \geq 0, \forall i, f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$, 则 $\int_X f d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$.

非负可测函数的积分: $\int_X f d\mu := \sup \{ \int_X g d\mu : g \text{ 非负简单且 } g \leq f \}$

可测函数的积分: 若 $\min \{ \int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu \} < \infty$, 则称 f 的积分存在; 若 $\max \{ \int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu \} < \infty$, 则称 f 可积; 上述两种情况下, 将 f 的积分定义为 $\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.

13 第 13 次习题课: 含参积分

13.1 问题

1. 设 $0 < a < b$, 计算积分 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx$.
2. 设 $f(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$, $F(x) = \int_x^{x^2} ds \int_s^x f(s, t) dt$, 计算 $F'(x)$.
3. 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$, 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx$ 对 $\alpha \in (0, +\infty)$ 一致收敛的充要条件是 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.
4. 讨论含参变量积分 $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{y} dy$ 在 $x \in [\alpha_0, +\infty) (\alpha_0 > 0)$ 和 $x \in (0, +\infty)$ 的一致收敛性.
5. 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx (b > a > 0)$.
6. 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$, 其中 $b > a > 0$.
7. 设 $f(t) \in C[0, 2\pi]$, 求函数 $F(x_0, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(t) - \frac{x_0}{2} - \sum_{k=1}^n (x_k \cos kt + y_k \sin kt)]^2 dt$ 最小值点.
8. 计算积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.
9. 求极限 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx$.

13.2 解答

1. $I = \int_0^1 (\int_a^b x^y dy) dx = \int_a^b (\int_0^1 x^y dx) dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \log \frac{1+b}{1+a}$.
2. 直接用公式, $F'(x) = \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x} [\int_s^x f(s, t) dt] ds + \int_{x^2}^x f(x^2, t) dt \cdot 2x - \int_x^{x^2} f(x, t) dt = \int_x^{x^2} f(s, x) ds + 2x \int_{x^2}^x f(x^2, t) dt$.
3. 充分性由 Abel 判别法立得. 必要性使用反证法. 如果 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx$ 对 $\alpha \in (0, +\infty)$ 一致收敛而 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 则 $\exists \epsilon_0 > 0$, 对于 $\forall A_0 > 0, \exists A_2 > A_1 > A_0$ 使得 $|\int_{A_1}^{A_2} f(x) dx| > 2\epsilon_0$. $F(\alpha, x) = e^{-\alpha x} f(x)$ 在 $(x, \alpha) \in [A_1, A_2] \times [0, 1]$ 上连续, 从而 $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{A_1}^{A_2} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx$. 因此 $\exists \alpha' > 0$ 使得 $|\int_{A_1}^{A_2} e^{-\alpha' x} f(x) dx| \geq \frac{1}{2} |\int_{A_1}^{A_2} f(x) dx| > \frac{1}{2} \cdot 2\epsilon_0 = \epsilon_0$. 此与一致收敛矛盾.
4. (1) 对于 $\forall x \in [\alpha_0, +\infty)$ 及 $A > 0$, 有 $|\int_0^A f(x, y) dy| = |\int_0^A \sin xy dy| = |\frac{1}{x}(1 - \cos xA)| \leq \frac{2}{\alpha_0}$. 而 $g(x, y) = \frac{1}{y}$ 关于 y 单调, 且对 $x \in [\alpha_0, +\infty)$ 一致趋于 0. 由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{y} dy$ 在 $[\alpha_0, +\infty)$ 一致收敛. (2) 取 $x = \frac{1}{2k} (k \in \mathbb{N})$, 则 $|\int_{2k\pi}^{3k\pi} \frac{\sin xy}{y} dy| = |\int_{2k\pi}^{3k\pi} \frac{\sin \frac{y}{2k}}{y} dy| \geq \frac{1}{3k\pi} |\int_{2k\pi}^{3k\pi} \sin \frac{y}{2k} dy| = \frac{2}{3\pi}$. 这与一致 Cauchy 准则矛盾, 所以不一致收敛.
5. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b \frac{dt}{1+t^2 x^2} \right) dx$. 由于 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+t^2 x^2}$ 对 $t \in [a, b]$ 一致收敛, 所以积分可交换顺序, 因此有 $I = \int_a^b dt \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+t^2 x^2} = \int_a^b \frac{\pi}{2t} dt = \frac{\pi}{2} \log \frac{b}{a}$.
6. $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \left[\int_a^b e^{-tx^2} dt \right] dx$. 由于 $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx$ 对 $t \in [a, b]$ 一致收敛, 所以积分可交换顺序, 因此有 $I = \int_a^b dt \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \sqrt{b} - \sqrt{a}$.
7. 直接求导即可, 最小值点是 $x_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, k = 0, 1, \dots, n$. $y_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, k = 1, 2, \dots, n$.
8. $I(\alpha) + I(-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{-\alpha})} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$. 作换元 $t = \frac{1}{x}$ 又知道 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{-\alpha})} = I(-\alpha)$. 从而 $I(\alpha) \equiv \frac{\pi}{4}$.
9. 在区间 $[0, 1 - \frac{\epsilon}{6}]$ 上 $e^{-x^\alpha} \Rightarrow 1 (\alpha \rightarrow +\infty)$, 因此 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{1-\frac{\epsilon}{6}} e^{-x^\alpha} dx = 1 - \frac{\epsilon}{6}$, 存在足够大的 α_1 使得 $\forall \alpha > \alpha_1, 1 - \frac{\epsilon}{3} < \int_0^{1-\frac{\epsilon}{6}} e^{-x^\alpha} dx < 1$. 在区间 $[1 + \frac{\epsilon}{6}, +\infty)$ 上 $e^{-x^\alpha} \Rightarrow 0 (\alpha \rightarrow +\infty)$, 因此 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{1+\frac{\epsilon}{6}}^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx = 0$, 存在足够大的 α_2 使得 $\forall \alpha > \alpha_2, 0 < \int_{1+\frac{\epsilon}{6}}^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx < \frac{\epsilon}{3}$. 在区间 $[1 - \frac{\epsilon}{6}, 1 + \frac{\epsilon}{6}]$ 上总有 $e^{-x^\alpha} < 1$, 因此 $0 < \int_{1-\frac{\epsilon}{6}}^{1+\frac{\epsilon}{6}} e^{-x^\alpha} dx < \frac{\epsilon}{3}$. 综上所述, 当 $\alpha > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 时, $1 - \epsilon < 1 - \frac{\epsilon}{3} < \int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx < 1 + \frac{2\epsilon}{3} < 1 + \epsilon$, 由极限定义知 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx = 1$.

13.3 补充 (不要求掌握!)

其实, 笔者已经不太记得积分求导可交换的条件了, 因为如果按照 12.3 节定义的积分, 这个自然成立的.

Fubini 定理: 给定 \mathbb{R}^d 上的可积函数 $f(x, y)$, 则: (1) 对几乎所有的 x , 作为 y 的函数 $f(x, y)$ 是 \mathbb{R}^{d_2} 上的可积函数; (2) 对 y 的积分 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x, y) dy$ 定义了 \mathbb{R}^{d_1} 上的可积函数; (3) 积分满足关系 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} (\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x, y) dy) dx$.

Tonelli 定理: 给定 \mathbb{R}^d 上的非负可测函数 $f(x, y)$, 则: (1) 对几乎所有的 x , 作为 y 的函数 $f(x, y)$ 是 \mathbb{R}^{d_2} 上的可测函数; (2) 对 y 的积分 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x, y) dy$ 定义了 \mathbb{R}^{d_1} 上的可测函数; (3) 积分满足关系 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} (\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x, y) dy) dx$ (可以是无穷).

14 第 14 次习题课: 傅里叶级数

14.1 问题

1. 求以 T 为周期的周期函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\frac{T}{2}, 0) \\ E \sin \frac{2\pi t}{T}, & t \in [0, \frac{T}{2}) \end{cases}$ 的傅里叶级数.
2. 求定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x) = x + 1$ 的余弦级数和正弦级数.
3. 求函数 $f(x) = \cos \alpha x, x \in [-\pi, \pi), \alpha \in (0, 1)$ 的傅里叶级数.
4. 求函数 $f(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}, x \in [-\pi, \pi], |q| < 1$ 的傅里叶级数.
5. 求函数 $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$ 的傅里叶级数, 并计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
6. 证明余元公式 $\text{Beta}(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, 并计算积分 $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ 和 $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
7. 设 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), g(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$, 证明 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$.
8. $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上周期为 2π 的可导函数, 且导函数连续, 证明其傅里叶级数系数 $a_n = o(\frac{1}{n}), b_n = o(\frac{1}{n})$.

14.2 解答

1. $f(t) \sim \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos \frac{4\pi nt}{T}$.
2. 余弦级数: $f(x) \sim \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$. 正弦级数: $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin n\pi x$.
3. $f(x) = f(-x) \Rightarrow b_n = 0$. $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x dx = \frac{2}{\pi\alpha} \sin \alpha\pi, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\alpha-n)x + \cos(\alpha+n)x] dx = \frac{1}{\pi} [\frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n} + \frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n}]_0^{\pi} = (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}, n \in \mathbb{N}_+$. 故 $\cos \alpha x \sim \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} [\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha}{\alpha^2-n^2} \cos nx]$.
4. $f(x) = \frac{1}{2i} (\frac{1}{1-qe^{ix}} - \frac{1}{1-qe^{-ix}}) = \frac{1}{2i} [\sum_{n=0}^{+\infty} (qe^{ix})^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (qe^{-ix})^n] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n(e^{inx} - e^{-inx})}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \sin nx$. 由于上述级数一致收敛到 $f(x)$, 故一定为 $f(x)$ 的傅里叶级数.
5. $f(x) = f(-x) \Rightarrow b_n = 0$. $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}, n \in \mathbb{N}_+$. x^2 可导 $\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4}{n^2} \cos nx$. 令 $x = \pi$ 得 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. 由帕塞瓦尔等式知 $\frac{1}{2}(\frac{2}{3}\pi^2)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{5}\pi^4$, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
6. $\text{Beta}(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$, 利用变量替换 $x = \frac{1}{t}$ 有 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{-p}}{1+x} dx$, 因此 $\text{Beta}(p, 1-p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x} dx$. 将 $\frac{1}{1+x}$ 展成幂级数有

$$\begin{aligned} \text{Beta}(p, 1-p) &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^r \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x} dx = \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^r \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k+p-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k-p} \right] dx \\ &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^r \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} r^{k+p} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k-p+1} r^{k-p+1} \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k-p+1} \\ &= \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+p} + \frac{1}{p-k} \right) = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2 - k^2} \end{aligned}$$

由于 $\cos px$ 的傅里叶级数 $\cos p\pi = \frac{\sin p\pi}{\pi} \left[\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2-k^2} \cos kx \right]$ 在 $|x| \leq \pi$ 处处收敛, 令 $x=0$ 得 $\text{Beta}(p, 1-p) = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2-k^2} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx \stackrel{t=\frac{1}{1+x^\beta}}{=} \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} (1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} \text{Beta}(1 - \frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta}) = \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha+1}{\beta} \pi}.$$

令 $p = \frac{x}{\pi}, 0 < x < \pi$, 得到 $\frac{\pi}{\sin x} = \frac{\pi}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x\pi}{x^2-n^2\pi^2}$, 即 $1 = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x \sin x}{x^2-n^2\pi^2}$. 两边积分有 $\pi = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{2x \sin x}{x^2-n^2\pi^2} dx$. 从而

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_0^\pi \frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} dt + \int_0^\pi \frac{\sin[t-(n+1)\pi]}{t-(n+1)\pi} dt \right] = \frac{1}{2} \left[\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{2t \sin t}{t^2 - n^2\pi^2} dt \right] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

这题稍微难了点!

7. 将 $f+g$ 和 $f-g$ 的帕塞瓦尔等式相减即得.

8. $a_n \simeq \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nxdx = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^\pi f(x) d \sin nx = \frac{1}{n} [f(x) \sin nx]_{-\pi}^\pi - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^\pi f'(x) \sin nxdx = 0 - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^\pi f'(x) \sin nxdx = o(\frac{1}{n})$. 类似过程可知 $b_n = o(\frac{1}{n})$.

14.3 补充 (不要求掌握!)

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\}_{n=1}^{+\infty}, \{\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\}_{n=1}^{+\infty}$ 本质上是 $L^2[-\pi, \pi]$ 空间上的一组单位正交基, 该空间有范数 $\|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^\pi f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$, 有内积 $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^\pi f(x)g(x)dx$, 是 Hilbert 空间. 计算傅里叶级数的过程其实是在利用内积来求各分量坐标. 所谓的帕塞瓦尔等式其实就是勾股定理.

顺便一提, 课本上似乎没有下面这几个定理, 但笔者感觉很重要, 故补充在这里.

傅里叶级数的逐项积分定理: 设函数 $f(x) \in R[0, 2\pi]$, 且以 2π 为周期, 设 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n(1-\cos nx)}{n} \right] \text{ 在 } [0, 2\pi] \text{ 成立.}$$

证明: 对于 $x \in [0, 2\pi]$, 构造函数 $g(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t=0, t=x \\ \pi, & t \in (0, x) \\ 0, & t \in (x, \pi) \end{cases}$. 然后用第 7 题结论立得.

傅里叶级数的一致收敛性: 设 2π 周期函数 $f(x) \in D[-\pi, \pi]$, 且导函数 $f'(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数一致收敛到 $f(x)$.

证明: 设 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, $f'(x)$ 的傅里叶级数为 $f'(x) \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx)$, 分部积分

可证 $a'_0 = 0, a'_n = nb_n, b'_n = -na_n, n=1, 2, \dots$. 因此 $\sum_{n=1}^N (|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=1}^N \frac{|a'_n| + |b'_n|}{n} \leq \left[\sum_{n=1}^N (a_n'^2 + b_n'^2) \right]^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \frac{2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} <$

$\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (f'(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$, 因此绝对一致收敛.

傅里叶级数逐项微分定理: 设 2π 周期函数 $f(x)$ 二阶可导, 且二阶导函数 $f''(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 并设 $f(x) \sim$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ 则 } f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx), x \in \mathbb{R}.$$

证明: 利用一致收敛性和函数项级数逐项微分定理.

15 综合复习

15.1 问题

- 1.
- 2.

15.2 解答

16 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢一位不愿意透露姓名的同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2023 春高等数学 A II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.