数学分析 II 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 3 月 29 日

目录

1 第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性

1.1 问题

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x)\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.
2. $f(x)\in R[a,b],\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$. 证明 $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b],\text{s.t.}\forall x\in[\alpha,\beta],f(x)>0$.
3. $f(x)\in R[a,b]$, 问 $\lfloor f(x)\rfloor$ 是否一定 $\in R[a,b]$?
4. 讨论区间 $[a,b]$ 上 $f,|f|,f^2$ 的可积性之间的关系.
5. 设非负函数 $f(x)\in C[a,b]$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ 存在并求之.
6. $f(x)\geq 0,f''(x)\leq 0,x\in[a,b]$. 证明 $\max_{x\in[a,b]}f(x)\leq\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
7. $n\in\mathbb{N}_+,f(x)\in C[a,b],\int_a^b x^kf(x)\mathrm{d}x=0,k=0,1,\cdots,n$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个零点.
8. 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}=1,\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.
10. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x),g(x)\in R[a,b],p,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq\left(\int_a^b f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}}$.
11. $f(x)\in R[a,b],A=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x),B=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x),g(y)\in C[A,B]$, 证明 $G(x):=g(f(x))\in R[a,b]$.
12. 已知 $(0,1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ 存在, 问是否有 $f(x)\in R[0,1]$?

1.2 解答

1. 显然 $f(x)$ 有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次 $\forall\varepsilon>0,\forall x\in[a,b],\exists\delta_x>0,\text{s.t.}\omega_{(x-\delta_x,x+\delta_x)}<\varepsilon$. 由于 $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)\supset[a,b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\supset[a,b]$. 不妨设 $a\leq x_1<\cdots<x_n\leq b$. 可取分割点 $y_i\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap(x_{i+1}-\delta_{i+1},x_i+\delta_{i+1})$, 对于这个分割, $\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\varepsilon(b-a)$, 因此有可积性. 由于 $|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x|\leq\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leq\sum_{i=1}^n\int_{y_{i-1}}^{y_i}|f(x)|\mathrm{d}x\leq\varepsilon(b-a)$, ε 的任意性知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.
2. 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.
3. $f(x)=-\text{Riemann}(x)\in R[0,1],\lfloor f(x)\rfloor=-\text{Dirichlet}(x)\notin R[0,1]$.
4. $f\in R[a,b]\Rightarrow|f|,f^2\in R[a,b]$, 因为 f 在 x_0 处连续 $\Rightarrow|f|,f^2$ 在 x_0 处连续.
$|f|\in R[a,b]\Rightarrow f^2\in R[a,b],\not\Rightarrow f\in R[a,b]$. $|f|$ 在 x_0 处连续 $\Rightarrow f^2$ 在 x_0 处连续, 而对于 f 有反例 $f(x)=1_{\mathbb{Q}}-1_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$.
$f^2\in R[a,b]\Rightarrow|f|\in R[a,b],\not\Rightarrow f\in R[a,b]$. 理由与上一个相同.
5. 设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x),f(\xi)=M$. 由连续性, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\text{ s.t.}\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta),f(x)>M-\varepsilon$. 因此当 n 足够大时成立 $M+2\varepsilon>((b-a)M^n)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}>(2\delta(M-\varepsilon)^n)^{\frac{1}{n}}>M-2\varepsilon\Rightarrow\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\to M$.
6. 设 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. 由题意知 $f(x)$ 是凹函数, 因此成立 $f(x)\geq\begin{cases}\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}(x-a)+f(a), & x\in[a,\xi]\\ \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}(x-\xi)+f(\xi), & x\in[\xi,b]\end{cases}\Rightarrow\text{RHS}\geq$ $\frac{2}{b-a}\left(\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\right)\geq\frac{2}{b-a}\left((\xi-a)\frac{f(\xi)+f(a)}{2}+(b-\xi)\frac{f(b)+f(\xi)}{2}\right)\geq\frac{2}{b-a}\frac{f(\xi)}{2}(\xi-a+b-\xi)=f(\xi)=\text{LHS}$.
7. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\exists 1$ 零点, 记为 x_1. $\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\exists 2$ 零点, 记为 x_2. $\cdots\int_a^b\left[\prod_{i=1}^n(x-x_i)\right]f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ $\exists n+1$ 零点.
8.

$$\text{原式}=2^{\alpha-\beta}\frac{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\frac{2}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}\xrightarrow{\text{定积分定义}}2^{\alpha-\beta}\frac{\left(\int_0^2 x^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta\mathrm{d}x\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

9. $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,n^\alpha(1-\varepsilon)<a_n<n^\alpha(1+\varepsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\varepsilon,\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\varepsilon,\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]\right|\leq\frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\leq\frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha=\frac{\varepsilon}{n}\sum\limits_{i=1}^n(\frac{i}{n})^\alpha\leq$ $\varepsilon\int_0^1 x^\alpha\mathrm{d}x+\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\alpha+1}+\varepsilon\leq 2\varepsilon$. 这意味着 $\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i-\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha\right)\right|\leq 4\varepsilon\Rightarrow$ 原极限 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$.

10. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} = 1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha\ln a + (1-\alpha)\ln b \le \ln(\alpha a + (1-\alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \le \alpha a + (1-\alpha)b$. 令 $\alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}\mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.

11. 证法 a: $G(x)$ 的间断点集合是 $f(x)$ 间断点集合的子集, 因此其 Lebesgue 测度为 0, 从而可积.

证法 b: 由于 $g(y)$ 一致连续, 因此 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得 $\forall|y_1 - y_2| < \delta, |g(y_1) - g(y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 由于 $f(x) \in R[a,b]$, 因此 $\exists[a,b]$ 的分割 Δ, 使得 $\sum\limits_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\delta\varepsilon}{4M}$, 其中 $M = \sup\limits_{y\in[A,B]} |g(y)|$. 若 $\omega_i(f) < \delta$, 则 $\omega_i(G) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 若 $\omega_i(f) \ge \delta$, 其区间长度 $\sum\limits_{i:\omega_i(f)\ge\delta} \Delta x_i$ 不会超过 $\frac{\varepsilon}{4M}$. 因此 $\sum\limits_{i=1}^n \omega_i(G)\Delta x_i = \sum\limits_{i:\omega_i(f)<\delta} \omega_i(G)\Delta x_i + \sum\limits_{i:\omega_i(f)\ge\delta} \omega_i(G)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$. 这样对于任意 $\varepsilon > 0$ 我们都找到了一个分割 Δ 使得 $\sum\limits_{i=1}^n \omega_i(G)\Delta x_i < \varepsilon$.

12. 考虑 $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) = 0$, 但是 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

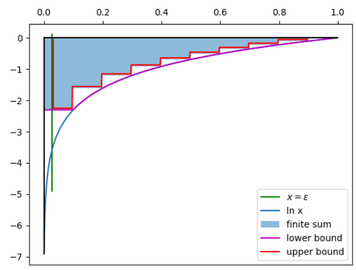
2 第 2 次习题课: 定积分的性质, 有界变差函数

2.1 问题

1. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续, 且 $f^2(t) \le 1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$. 证明 $f(t) \le 1 + t$.
2. 用定积分的方法求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
3. 设函数 $f(x), g(x) \in R[a,b]$, 记 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a,b]$ 的一个分割, $\lambda(\Delta) = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\}$. 任取 $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 证明 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
4. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 证明 $\forall a, b \in \mathbb{R}, \lim\limits_{h\to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$.
5. $f(x) \in C[a,b]$, 且 $\exists\delta > 0, M > 0, \text{s.t.}\forall[\alpha,\beta] \subset [a,b]$成立 $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right| \le M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x) \equiv 0$.
6. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明 $f(x) = xf(1)$.
7. $f(x) \in C[a,b]$, 且任意 $g(x) \in C[a,b]$ 满足 $g(a) = g(b) = 0$ 都有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$, 证明 $f(x) \equiv 0$.
8. $f(x) \in D[a,b]$ 且 $f'(x) \in R[a,b]$, 证明 $\bigvee\limits_a^b f(x) = \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$.
9. 证明 $\mathrm{BV}[a,b]$ 中的函数都是有界的, 且 $\mathrm{BV}[a,b]$ 构成线性空间.
10. 证明 $\mathrm{BV}[a,b]$ 中可定义范数 $\|f\|_{\mathrm{BV}} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| + \bigvee\limits_a^b f(x)$, 并在此范数意义下构成 Banach 空间.
11. 证明 $\mathrm{BV}[a,b]$ 是一个代数, 即 $f, g \in \mathrm{BV}[a,b] \Rightarrow fg \in \mathrm{BV}[a,b]$, 且满足 $\|fg\|_{\mathrm{BV}} \le \|f\|_{\mathrm{BV}}\|g\|_{\mathrm{BV}}$.
12. 证明 $\mathrm{BV}[a,b]$ 不是可分的, 即不存在可数稠密子集.

2.2 解答

1. 原条件 $\Rightarrow \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}} \le 1 \Rightarrow \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}}\mathrm{d}t \le \int_0^x 1\mathrm{d}t \Rightarrow \sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\Big|_0^x \le x \Rightarrow \sqrt{1+2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s} \le 1 + x \Rightarrow f(x) \le \sqrt{1+2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s} \le 1 + x$.



2. 取对数得 $\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{n}\ln\frac{i}{n}$. 由右图几何面积关系知 $\forall\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{n}\ln\frac{i}{n} \le \int_\varepsilon^1 \ln x\mathrm{d}x = [x\ln x - x]|_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon$, 且 $\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{n}\ln\frac{i}{n} \ge \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = -1 + \frac{2}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}$. 令 $n \to +\infty, \varepsilon \to 0$ 知 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{n}\ln\frac{i}{n} = -1$, 因此原极限为 e^{-1}.

3. $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)[g(\eta_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i := S_1 + S_2$. 显然 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} S_1 = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 记 $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = M_f$. 由 $g(x)$ 的可积性, 知 $|S_2| \le \sum\limits_{i=1}^n M_f\omega_g([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i = M_f[\overline{S}_g(\Delta) - \underline{S}_g(\Delta)] \overset{\lambda(\Delta)\to 0}{\to} 0$.

4. WLOG $h < 1$. 由可积函数性质, 存在 $[a, b+1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $\int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$, 且 $\exists\delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in [a, b+1], |x - y| < \delta$, 成立$|g(x) - g(y)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$. 从而有 $\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x+h) - g(x+h)|\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x+h) - g(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x) - f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}x + \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x \le 3\varepsilon$.

5. 假设 $f(x_0)>0$. 由连续性, $\exists\kappa>0,\text{s.t.}\forall x\in(x_0-\kappa,x_0+\kappa), f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$, 从而 $\forall[\alpha,\beta]\subset(x_0-\kappa,x_0+\kappa), \left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|>\frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha)>M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$(最后一个大于号成立只需令 $\beta-\alpha<\left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

6. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=\frac{\alpha^2}{2}f(1)$. 由集合 $\{q\alpha:q\in\mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha)=qf(\alpha)$, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x=f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha)\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^2}{2}f(1)\Rightarrow f(\alpha)=\alpha f(1)$.

7. 用反证法. 如果 $f(\xi)>0$ (WLOG “$>$”), 由连续性知 $\exists\delta>0$ s.t.$\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)\subset[a,b], f(x)>\frac{f(\xi)}{2}$. 从而定义 $g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[\xi-\frac{\delta}{2},\xi+\frac{\delta}{2}]\\ 0, & x\in[a,\xi-\delta]\cup[\xi+\delta,b]\\ \text{linear}, & \text{otherwise}\end{cases}$, 此时 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\ge\int_{\xi-\frac{\delta}{2}}^{\xi+\frac{\delta}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x>0$, 矛盾.

8. 考虑任一分割 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 则 $\sum\limits_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum\limits_{i=1}^n|f'(\xi)|(x_i-x_{i-1})\Rightarrow\underline{S}_{|f'|}(\Delta)\le\bigvee\limits_a^b\Delta_f\le\bigvee\limits_a^b f(x)$. 令 $\lambda(\Delta)\to0$ 和 $|f'(x)|$ 的可积性知 $\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\le\bigvee\limits_a^b f(x)$. 另一方面, 取分割 Δ' 使得 $\bigvee\limits_a^b\Delta'_f\ge\bigvee\limits_a^b f(x)-\varepsilon$, 则有 $\overline{S}_{|f'|}(\Delta)\ge\bigvee\limits_a^b\Delta'_f>\bigvee\limits_a^b f(x)-\varepsilon$. 在对 Δ' 细分的意义下令 $\lambda(\Delta')\to0$, 成立 $\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\ge\bigvee\limits_a^b f(x)-\varepsilon$, 再由 ε 的任意性知 $\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\ge\bigvee\limits_a^b f(x)$.

9. $f(x)\in\mathrm{BV}[a,b]\Rightarrow|f(x)-f(a)|\le\bigvee\limits_a^b f(x)\Rightarrow|f(x)|\le|f(a)|+\bigvee\limits_a^b f(x)$, 因此有界. 利用 $|f(x_i)+g(x_i)-f(x_{i-1})-g(x_{i-1})|\le|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|g(x_i)-g(x_{i-1})|\Rightarrow\bigvee\limits_a^b(f+g)(x)\le\bigvee\limits_a^b f(x)+\bigvee\limits_a^b g(x)\Rightarrow$ 如果$f(x),g(x)\in\mathrm{BV}[a,b]$,则$(f+g)(x)\in\mathrm{BV}[a,b]\Rightarrow\mathrm{BV}[a,b]$ 是线性空间.

10. 显然 $\|f\|_{\mathrm{BV}}<\infty\Leftrightarrow f(x)\in\mathrm{BV}[a,b]$, 且 $\forall k\in\mathbb{R},\|kf\|_{\mathrm{BV}}=|k|\|f\|_{\mathrm{BV}}$, $\|f+g\|_{\mathrm{BV}}=\sup\limits_{x\in[a,b]}|(f+g)(x)|+\bigvee\limits_a^b(f+g)(x)\le\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|+\bigvee\limits_a^b f(x)+\bigvee\limits_a^b g(x)\le\|f\|_{\mathrm{BV}}+\|g\|_{\mathrm{BV}}$, 因此确实是一个范数. 将范数不等式推广到可数形式: 若 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\|f_k\|_{\mathrm{BV}}<\infty$, 则 $f:=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}f_k$ 绝对收敛且 $\|f\|_{\mathrm{BV}}\le\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\|f_k\|_{\mathrm{BV}}$. 回到原题, 设有 Cauchy 列 $\{f_n(x)\}$, 则考虑 $n_k\in\mathbb{N}_+$ 使得 $\forall n>n_k,\|f_n-f_{n_k}\|_{\mathrm{BV}}<2^{-k-1}$. 从而有 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\|f_{n_k}-f_{n_{k-1}}\|_{\mathrm{BV}}<+\infty$, 因此 $f:=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(f_{n_k}-f_{n_{k-1}})$ 满足 $f_{n_k}\xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}}f$. 再利用 Cauchy 列的性质和三角不等式知 $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}}f$.

11. 显然 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)g(x)|\le\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|$, 且利用 $|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})|\le|f(x_i)-f(x_{i-1})||g(x_i)|+|g(x_i)-g(x_{i-1})||f(x_{i-1})|\Rightarrow\bigvee\limits_a^b fg\le\bigvee\limits_a^b f\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|+\bigvee\limits_a^b g\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 因此 $\|fg\|_{\mathrm{BV}}\le\|f\|_{\mathrm{BV}}\|g\|_{\mathrm{BV}}$.

12. 考虑 $f_t(x)=1_{\{x\in[a,t]\}},t\in[a,b]$. 这族函数不可数, 且 $\forall t_1\ne t_2,\|f_{t_2}-f_{t_1}\|_{\mathrm{BV}}\equiv3$. 若有可数稠密子集 $\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 则对于每一个 f_t, 都存在 $n\in\mathbb{N}_+$ 使得 $\|f_t-g_n\|_{\mathrm{BV}}<1$, 从而如果 $t_1\ne t_2$, 对应的 $n_1\ne n_2$, 这与 $\{g_n\}$ 的可数性矛盾.

3 第 3 次习题课: 定积分的计算, 定积分中值定理

3.1 问题

1. 求积分 $I=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1},\alpha\in(0,\pi)$.
2. 求积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.
3. 求积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\mathrm{d}x$.
4. 求积分 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
5. 求积分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2nx}{\sin x}\mathrm{d}x$, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n}{\ln n}$.
6. $f(x)\in R[0,1],0<m\le f(x)\le M$, 求证 $\int_0^1f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{(m+M)^2}{4mM}$.
7. $f(x)\in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_{-1}^1(1-x^2)^nf(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=f(0)$.
8. $f(x)\in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x)=f(x)\int_0^xf(t)\mathrm{d}t$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)\equiv0$.

9. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x)\in R[0,x],\forall x\in(0,+\infty)$, 且 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

10. (Riemann-Lebesgue 引理). f,g 有限区间内可积, $g(x+T)=g(x)$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$.

11. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 用定积分第二中值定理证明 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

12. (Dirichlet 判别法). 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. $\forall A\geq a,g(x)\in R[a,A]$ 且 $|\int_a^A g(x)\mathrm{d}x|\leq M$ 恒成立. 证明极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 存在.

3.2 解答

1. $I=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+1}=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\Big|_{-1}^1=\frac{\pi}{2\sin\alpha}$.

2. $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2(-x)}{1+e^x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}(1-\cos x)=(1-\cos x)\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\mathrm{d}(\ln\sin x)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin x+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x=[\cos x-\ln(1+\cos x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2-1$.

4. 作代换 $x=\tan t$ 得到 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$. 作代换 $t=\frac{\pi}{4}-t$ 得 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-t))\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln 2-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

5. 利用三角函数公式,

$$
\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(2nx)}{2\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x]\cos 2x+\sin[(2n-2)x]\sin 2x}{2\sin x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x](1-2\sin^2x)+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x]}{2\sin x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2x\cos[(2n-2)x]+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x\\
&=I_{n-1}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos[(2n-2)x]+\sin[(2n-2)x]\cos x\mathrm{d}x=I_{n-1}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\\
&=I_{n-1}-\frac{1}{2n-1}\cos[(2n-1)x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=I_{n-1}+\frac{1}{2n-1}
\end{aligned}
$$

由于 $I_1=1$, 因此 $I_n=\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}}{\ln n}-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{\ln n}=\frac{1}{2}$.

6. 注意到 $(M-f(x))(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{m})\leq 0$ 恒成立, 因此 $\int_0^1(M-f(x))(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{m})\mathrm{d}x\leq 0\Leftrightarrow M\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{m}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leq 1+\frac{M}{m}$. 利用均值不等式, LHS $\geq 2\sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leq\frac{(m+M)^2}{4mM}$.

7. 往证 $\frac{\int_{-1}^1(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\to 0$, 用极限定义. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}\forall x\in(-\delta,\delta),|f(x)-f(0)|<\varepsilon$. 设 $\max|f(x)|=M$. 从而原式 $=\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{\delta}^1(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}:=I_1+I_2+I_3$. $|I_1|\leq\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\varepsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq\varepsilon$. $|I_2|\leq 2M\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\varepsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M\frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M(1-\delta)\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n}=2M\frac{1-\delta}{\delta}(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2})^n$. 注意到 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}<1$, 从而可以取足够大的 n 使得 $|I_2|<\varepsilon$. 类似地放缩 I_3, 从而 $|I_1+I_2+I_3|<3\varepsilon$.

8. 构造 $G(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2,G'(x)=g(x)$ 单调递减, $g(0)=0$, 因此 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 且 $G(0)=0,G(x)\geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x)\equiv 0\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\equiv 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$.

9. 凸函数开区间上连续 $\Rightarrow$ 闭区间上可积. 做变换 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(\frac{t}{x}\cdot x)\mathrm{d}\frac{t}{x}=\int_0^1 f(ux)\mathrm{d}u\Rightarrow F(\sum\limits_{i=1}^n t_ix_i)=\int_0^1 f\left(\sum\limits_{i=1}^n t_i(ux_i)\right)\mathrm{d}u\leq\int_0^1\sum\limits_{i=1}^n t_if(ux_i)\mathrm{d}u=\sum\limits_{i=1}^n t_iF(x_i)\Rightarrow F(x)$ 凸.

10. WLOG 设 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x=0$, 否则考虑 $h(x)=g(x)-\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$.

由 Riemann 积分定义, $\forall\varepsilon>0$, 存在阶梯函数 $s_\varepsilon(x)=\begin{cases}C_1 & a=x_0\leq x<x_1\\ C_2 & x_1\leq x<x_2\\ \cdots & \\ C_m & x_{m-1}\leq x\leq x_m=b\end{cases}$ 使得 $\int_a^b|f(x)-s_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 设 $M=\sup_{x\in[0,T]}|g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x|=|\int_a^b(f(x)-s_\varepsilon(x))g(nx)\mathrm{d}x+\int_a^b s_\varepsilon(x)g(nx)\mathrm{d}x|\leq\int_a^b|f(x)-s_\varepsilon(x)|g(nx)\mathrm{d}x+$

$|\sum\limits_{i=1}^{m} C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)\mathrm{d}x < M\varepsilon + \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m} C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)\mathrm{d}x \le M\varepsilon + \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m} C_i MT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)\mathrm{d}x = \int_c^{c+T} g(x)\mathrm{d}x + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{c+kT}^{d} g(x)\mathrm{d}x$ (设 $c+kT \le d < c+(k+1)T$) $= \int_{c+kT}^{d} g(x)\mathrm{d}x \le MT$. 选择一个足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m} C_i MT < \varepsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x| \le (M+1)\varepsilon$.

11. $f(x)$ 单调, $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理, $\int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) f(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi (x - \frac{a+b}{2})\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b (x - \frac{a+b}{2})\mathrm{d}x = f(a)\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})\mathrm{d}x + (f(b) - f(a))\int_\xi^b (x - \frac{a+b}{2})\mathrm{d}x = (f(b) - f(a))\frac{1}{2}(b-\xi)(\xi - a) \ge 0$.

12. 由极限定义, $\forall\varepsilon > 0, \exists X > a, \text{s.t.} \forall x \ge X, |f(x)| \le \frac{\varepsilon}{4M}$. 从而 $\forall A', A'' \ge X, |\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x| = |f(A')\int_{A'}^{\xi} g(x)\mathrm{d}x + f(A'')\int_{\xi}^{A''} g(x)\mathrm{d}x| \le 2M(|f(A')| + |f(A'')|) \le \varepsilon$. 由柯西收敛定理知极限存在.

4 第 4 次习题课: 定积分的应用

4.1 问题

1. $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递减正函数, 证明对于 $\forall 0 < \alpha < \beta \le 1$ 都有 $\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \ge \alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.
2. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$, 求 $f(x)$.
3. 已知 $A > 0, AC - B^2 > 0$, 求椭圆 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 的面积.
4. 证明极坐标下曲线 $r = r(\theta)$ 与 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为 $V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$.
5. 求双扭线 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ 绕轴 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.
6. $f(x) \in C^1[0,1], f(x) \in [0,1], f(0) = f(1) = 0, f'(x)$ 单调递减. 证明曲线 $y = f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的弧长不大于 3.
7. 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?
8. 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r = e^\theta$ 在 $(r,\theta) = (1,0)$ 和 $(r,\theta) = (e^\phi, \phi)$ 之间一段的重心坐标.
9. 求圆的渐伸线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $, t \in [0, 2\pi]$ 上 $A(a,0), B(a,-2\pi a)$ 之间部分与直线 $\overline{AB}$ 围成图形的面积.
10. 试求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.
11. 证明对 $\forall x > 0, \exists 1\xi_x > 0$ 使得 $\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x = xe^{\xi_x^2}$ 成立, 并计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\xi_x}{x}$.
12. 计算 $I = \int_0^1 [\sqrt[7]{1-x^3} - \sqrt[3]{1-x^7}]\mathrm{d}x$.
13. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t|\sin t|\mathrm{d}t}{x^2}$.

4.2 解答

1. $\text{LHS} = \beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \ge \beta\alpha f(\alpha) \ge \alpha(\beta-\alpha)f(\alpha) \ge \alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \text{RHS}$.
2. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(y) + \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^y f(t)\mathrm{d}t + yf(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 两式相减得 $xf(y) + \frac{x^3y}{3} = yf(x) + \frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^3}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$. 经验证符合题意.
3. 设矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 有相似标准型 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 λ_1, λ_2 是方程 $\lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) = 0$ 的两个根. 则原椭圆在新坐标系下的方程为 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$, 面积 $S = \pi\sqrt{\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}} = \pi\sqrt{\frac{1}{AC-B^2}}$.
4. 对应 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$ 的扇形面积 $\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$, 其质心位于 $\frac{2}{3}r(\theta)$ 处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为 $\mathrm{d}V = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta 2\pi\frac{2}{3}r(\theta)\sin\theta = \frac{2\pi}{3}r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$. 两边积分得到结果.
5. 原命题等价于 $r^2 = 2a^2\sin 2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases} x = a\sqrt{2\sin 2\theta}\cos\theta \\ y = a\sqrt{2\sin 2\theta}\sin\theta \end{cases}$, 则面积 $S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta)\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta = 8\pi a^2$.
6. 设 $f'(M) = 0$. 则周长 $C = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x \le \int_0^1 (1 + |f'(x)|)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^M f'(x)\mathrm{d}x - \int_M^1 f'(x)\mathrm{d}x = 1 + 2f(M) \le 3$.
7. 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h) = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 + \int_0^h \pi(\sqrt{R^2 - z^2})^2\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi R^3 + \pi(R^2h - \frac{1}{3}h^3)$. 对应位移 $[h, h+\mathrm{d}h]$ 所做的微功 $\mathrm{d}W = gV(h)\rho\mathrm{d}h$. 从而 $W = g\int_0^R V(h)\mathrm{d}h = g(\frac{2}{3}\pi R^4 + \frac{5}{12}\pi R^4) = \frac{13}{12}g\pi R^4$.
8. $\bar{x} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^\phi e^\theta\mathrm{d}\theta} = \frac{e^{2\phi}(\sin\phi + 2\cos\phi) - 2}{5(e^\phi - 1)}, \bar{y} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^\phi e^\theta\mathrm{d}\theta} = \frac{e^{2\phi}(2\sin\phi - \cos\phi) + 1}{5(e^\phi - 1)}$.

9. 直线 AB 的参数方程 $\begin{cases} x=\phi(t)=a \\ y=\psi(t)=t \end{cases}, t\in[-2\pi a,0]$. 于是 $S=-\int_0^{2\pi} y(t)\mathrm{d}x(t)-\int_{-2\pi a}^0\psi(t)\mathrm{d}\phi(t)=-\int_0^{2\pi}a(\sin t-t\cos t)a(t\cos t)\mathrm{d}t+0=\frac{4}{3}\pi^3a^2+\pi a^2$.
10. 焦点为 $(\frac{1}{2},0)$, 设过焦点的直线为 $x-\frac{1}{2}=ky$, 与抛物线交点为 y_1,y_2, 则围成的面积为 $S=\int_{y_1}^{y_2}\left(ky+\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{k}{2}(y_2-y_1)(y_2+y_1)+\frac{1}{2}(y_2-y_1)-\frac{1}{6}(y_2-y_1)(y_2^2+y_1y_2+y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1+y_2=2k, y_1y_2=-1$. 则 $S=\frac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k=0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.
11. 由 e^{x^2} 单调递增知唯一性. $\forall\varepsilon>0, xe^{\xi_x^2}\ge\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x\int_{(1-\varepsilon)x}^x e^{x^2}\mathrm{d}x\ge\varepsilon xe^{(1-\varepsilon)x^2}=xe^{(1-2\varepsilon+\varepsilon^2)x^2}\varepsilon e^{(\varepsilon-\varepsilon^2)x^2}\ge xe^{(1-\varepsilon)^2x^2}$ 当 x 足够大时成立 $\Leftrightarrow \xi_x\ge(1-\varepsilon)x$, 显然又有 $\xi_x\le x$, 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\xi_x}{x}=1$.
12. $\int_0^1\sqrt[7]{1-x^3}\mathrm{d}x\overset{y=\sqrt[7]{1-x^3}}{=}\int_0^1 y\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt[3]{1-y^7}\mathrm{d}y\Rightarrow I=\int_0^1\sqrt[3]{1-y^7}\mathrm{d}y-\int_0^1\sqrt[3]{1-x^7}\mathrm{d}x=0$.
13. 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^1 xt|\sin(xt)|\mathrm{d}(xt)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1 t|\sin(xt)|\mathrm{d}t\overset{\text{R-L Lemma}}{=}\int_0^1 t\mathrm{d}t\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}$.

5 第 5 次习题课: 广义积分的收敛性与计算

5.1 问题

1. $f(x)>0, x\in(1,+\infty), \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda, \lambda>1$, 试判断 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性.
2. (Euler 积分). 求积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$.
3. (Dirichlet 积分). 求积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.
4. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$.
5. 计算 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.
6. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭可积, $f(+\infty)=A, f(-\infty)=B$. 证明 $\forall a\in\mathbb{R}$, 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+a)-f(x)]\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.
7. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2x}$ 的收敛性.
8. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性和绝对收敛性.
9. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^p}\mathrm{d}x, p\ge0, a\in\mathbb{R}$ 的收敛性.
10. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x, p,q,r>0$ 的收敛性.
11. $f(x)\in C^1[0,1]$ 且 $f'(x)>0$, 证明广义积分 $\int_0^1\frac{f(x)-f(0)}{x^p}\mathrm{d}x$ 在 $p<2$ 时收敛, 在 $p\ge2$ 时发散.
12. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$ 收敛.

5.2 解答

1. 由极限定义, $\exists X>1, \text{s.t.}\forall x>X, \frac{\ln f(x)}{\ln x}<-\frac{\lambda+1}{2}\Leftrightarrow f(x)<x^{-\frac{\lambda+1}{2}}$. 由比较判别法知无穷积分收敛.
2. 由对称性, $I=\frac{1}{2}\int_0^\pi\ln\sin x\mathrm{d}x$. 做两倍变换, $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln2+2I\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.
3. 注意到 $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^n\cos kx$, 从而 $\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. 定义 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$. 由于 $x\to0$ 时 $f(x)=O(x)$, 因此 $f(x)\in R[0,\pi]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理 (2.1.2) 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\mathrm{d}x=0$, 即是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\pi}{2}$. 再利用恒等式 $\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\overset{n\to+\infty}{\to}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 立得结论.
4. 做变换 $t=\frac{1}{x}$, 则 $\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\int_1^A\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t:=I_1+I_2$. 对于 I_1, 由定积分第二中值定理知 $\exists\xi_A\in[1,A]$ s.t.$I_1=\int_1^{\xi_A}\cos^n t\mathrm{d}t$. 因此对于任意固定的 A, $n\to+\infty$ 时 $I_1\to0$. 对于 I_2, 成立 $|I_2|\le\int_A^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{A}$. 因此 $\forall\varepsilon>0$, 选择 $A=\frac{2}{\varepsilon}$, 则 $|I_2|\le\frac{\varepsilon}{2}$, 并选择充分大的 n 使得 $|I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$, 此时 $|I|\le\varepsilon$, 由极限定义知结论成立.
5. 做倒数变换, 知 $I(\alpha)=\int_{+\infty}^0\frac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{(1+x^{-2})(1+x^{-\alpha})}=I(-\alpha)$. 又由于 $I(\alpha)+I(-\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, 因此 $I(\alpha)\equiv\frac{\pi}{4}$.
6. $\int_M^N[f(x+a)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_N^{N+a}f(x)\mathrm{d}x-\int_M^{M+a}f(x)\mathrm{d}x\to(A-B)a$.
7. 函数恒正, 只需讨论有界性. 令 $u_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2x}$, 则 $u_k\le k\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2x}=k\pi\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2x}=2k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2x}\le2k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+4(k-1)^6\pi^4x^2}=\frac{k}{\pi(k-1)^3}\int_0^{(k-1)^3\pi^3}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\sim\frac{1}{2k^2}$. 由于 $\int_0^{n\pi}=\sum\limits_{k=1}^n u_k\sim\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{k^2}<+\infty$, 因此原广义积分收敛.

8. 先考虑积分收敛性. 显然当 $p \le 0$ 时原积分发散. 当 $p > 0$ 时, 由于 $|\int_a^A e^{\sin x}\sin 2x\mathrm{d}x| = 2|\int_{\sin a}^{\sin A} e^{\sin x}\sin x\mathrm{d}\sin x| = 2|e^{\sin A}(\sin A - 1) - e^{\sin a}(\sin a - 1)| < 8e$, $\frac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{e^x \sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 我们只需考察积分在 0 处的性质. 由于当 $x \to 0$ 时 $\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p} \sim \frac{2}{x^{p-1}}$, 因此 $p \ge 2$ 时原积分发散, $p < 2$ 时原积分收敛. 再考虑绝对收敛性. 当 $1 < p < 2$ 时, $\left|\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right| \le \frac{e}{x^p}$, 因此绝对收敛. 当 $0 < p \le 1$ 时, $\left|\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right| \ge \frac{2^p}{e}\left|\frac{\sin 2x}{(2x)^p}\right| \ge \frac{1}{e}\left|\frac{\sin^2 2x}{(2x)^p}\right| = \frac{1}{2e}\left(\frac{1-\cos 4x}{(2x)^p}\right)$, 而 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4x}{(2x)^p}\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(2x)^p}\mathrm{d}x$ 发散, 因此原积分条件收敛.
9. 当 $a \ne 0, p > 0$ 时, $\frac{1}{1+x^p}$ 单调递减趋于 0, $\int_0^N \cos ax\mathrm{d}x$ 有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 当 $a \ne 0, p = 0$ 时显然发散. 当 $a = 0, p > 1$ 时显然收敛. 当 $a = 0, 0 \le p \le 1$ 时显然发散.
10. 显然当 $q \le p+1$ 时原积分发散. 当 $q > p+1$ 时, 一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}\mathrm{d}t \le 2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^p\pi^p\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+(k\pi)^q|\frac{2}{\pi}t|^r} \le C_1\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^p}{k^{\frac{q}{r}}}\int_0^{2(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}$$

另一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}\mathrm{d}t \ge \sum_{k=0}^{+\infty}(k\pi)^p\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+[(k+1)\pi]^q|t|^r} \ge C_2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^p}{(k+1)^{\frac{q}{r}}}\int_0^{\pi[(k+1)\pi]^{\frac{q}{r}}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}$$

$r > 1$, $\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}$ 一致有界. $r = 1$, $\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^r} \sim \ln A$. $r < 1$, $\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^r} \sim A^{1-r}$. 因此原积分收敛 iff $q > (p+1)\max(r, 1)$.
11. 由柯西微分中值定理, $\exists\xi \in (0, x)$ s.t.$\frac{f(x)-f(0)}{x^p} = \frac{f'(\xi)}{x^{p-1}}$. 由于 $f'(x)$ 连续且大于 0, 因此 $\exists 0 < m < M$ s.t.$m < f'(x) < M$ 对 $\forall x \in [0,1]$ 均成立, 即 $\frac{m}{x^{p-1}} < \frac{f(x)-f(0)}{x^p} < \frac{M}{x^{p-1}}$. 从而 $p \ge 2$ 时发散, $p < 2$ 时收敛.
12. $\int_0^{+\infty} f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}(x-\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}f(t)\mathrm{d}t$. 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ 收敛, $\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}$ 单调有界, 由 Abel 判别法知 $\int_0^{+\infty} f(x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$ 收敛. 另一侧同理.

6 第 6 次习题课: 积分的综合运用

6.1 问题

1. 证明 π 是无理数. 你可以按照以下步骤: (1) 设 $\pi = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$, 定义 $f(x) = \frac{b^n x^n(\pi-x)^n}{n!}$, 证明 $\forall i \in \mathbb{N}_+, f^{(i)}(0), f^{(i)}(\pi)$ 都是整数. (2) 证明定积分 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 也是整数. (3) 证明 $0 < \int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x < 1$, 得到矛盾.
2. $f(x) \in C^2[0,1], f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$, 证明 $\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x \ge 4$, 取等号当且仅当 $f(x) = x^3 - x^2$.
3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上恒正, 且满足 Lipschitz 条件 $|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$. 又已知对于 $a \le c \le d \le b$ 成立 $\int_c^d \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \alpha, \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \beta$. 证明积分不等式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \frac{e^{2L\beta}-1}{2L\alpha}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.
4. $f(x) \in C[0, +\infty)$ 且平方可积, $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \le 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$.
5. (Euler-Poisson 积分). 利用数列 $\left\{\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right\}$ 的极限, 求积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$. (你也许需要用到如下命题: 当 $a \ge 1$ 时, $0 \le e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^a \le \frac{x^2}{a}e^{-x}$ 在区间 $[0, a]$ 上恒成立. 这由导数知识容易验证.)
6. 求积分 $I = \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$.
7. $a, b > 0$, 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x})\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x})\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab})\mathrm{d}t$.
8. $f(x) \in C^2[a, b]$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$.
9. $f'(x) \in R[0, 1]$, 定义 $A_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$. 证明 $\lim_{n\to+\infty} nA_n = \frac{1}{2}(f(0) - f(1))$.
10. (等周问题). 长为 L 的曲线何时围成的区域面积最大? 你可以假设围成的区域是凸域且边界足够光滑, 以及其他正则性条件.
11. 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $\forall k = 1, 2, \cdots, n, u_k(x)$ 均单调有界. 证明 $\int_0^{+\infty} f(x)\prod_{k=1}^n u_k(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
12. $f(x) \in C[0, +\infty), a > 0$, $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) + a\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) = A < \infty$, 证明 $f(+\infty) = 0$.

6.2 解答

1. (1) $f(x)$ 是一个次数从 n 到 $2n$ 的多项式. 至于 $f^{(i)}(0)$ 是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时 $i \ge n$, 求导后得到的非零常数值是 $i!c$, 且 c 是整数除以 $n!$ 得到的有理数, 从而 $i!c$ 是整数. 由于 $f(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f^{(i)}(\pi) = (-1)^n f^{(i)}(0)$, 因此 $f^{(i)}(\pi)$ 也是整数.

(2) 由分部积分, $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = f(x)(-\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x = f(0)+f(\pi)+f'(x)\sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x = f(0)+f(\pi)-\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x$. $f(x)$ 是 $2n$ 此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = f(0)+f(\pi)-f''(0)-f''(\pi)+\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(0)+(-1)^n f^{(2n)}(\pi)$, 因此是整数.
(3) 在区间 $[0,\pi]$ 上成立 $0 \le a-bx = b(\pi-x) \le a$, 因此 $0 \le f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \le \frac{\pi^n a^n}{n!}$, 从而 $0 < \int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x \le \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x < \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$. 当 n 足够大时, $\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!} < 1$.
2. 令 $p(x) = x^3 - x^2$, 从而有 $\int_0^1[(f''(x))^2-(p''(x))^2]\mathrm{d}x = \int_0^1[f''(x)-p''(x)]^2\mathrm{d}x + 2\int_0^1 f''(x)p''(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1[p''(x)]^2\mathrm{d}x \ge 0 + 2f'(x)p''(x)|_0^1 - 2\int_0^1 f'(x)p'''(x)\mathrm{d}x - 8 = 2f'(1)p''(1) - 2f(x)p'''(x)|_0^1 + 2\int_0^1 f(x)p''''(x)\mathrm{d}x - 8 = 0$.
3. 设 $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_0)$, 从而 $m \le f(x) \le m + L|x-x_0|$, $\frac{1}{m+L|x-x_0|} \le \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{m}$. 两边积分, 得到

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le m(b-a) + \frac{L}{2}[(x_0-a)^2+(x_0-b)^2]$$
$$\frac{b-a}{m} \ge \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \beta \ge \frac{1}{L}\ln\frac{(x_0+\frac{m}{L}-a)(-x_0+\frac{m}{L}+b)}{(\frac{m}{L})^2}$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \sup_{x_0\in[a,b]}\left\{m(b-a)+\frac{L}{2}[(x_0-a)^2+(x_0-b)^2]\right\} = m(b-a)+\frac{L}{2}(b-a)^2$$
$$\beta \ge \inf_{x_0\in[a,b]}\left\{\frac{1}{L}\ln\frac{(x_0+\frac{m}{L}-a)(-x_0+\frac{m}{L}+b)}{(\frac{m}{L})^2}\right\} \Rightarrow b-a \le \frac{(e^{L\beta}-1)m}{L}$$

从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le m\left(\frac{(e^{L\beta}-1)m}{L}\right) + \frac{L}{2}\left(\frac{(e^{L\beta}-1)m}{L}\right)^2 = \frac{(e^{2L\beta}-1)m^2}{2L}$$

对比欲证结论, 只需证明

$$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x \ge \alpha m^2 = m^2\int_c^d \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{\int_c^d f(x)\mathrm{d}x}{\int_c^d \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x} \ge m^2$$

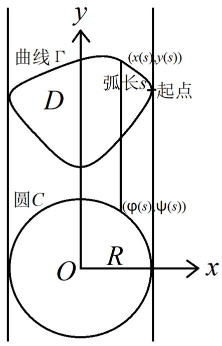
这由 $f(x) \ge m, \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{m}$ 立得.
4. 由 L'Hospital, $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{g^2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0+0} 2g(x)f(x) = 0$. 因此 $\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^A g^2(x)\mathrm{d}(-\frac{1}{x}) = -\frac{g^2(A)}{A} + 2\int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x$. 再由 Cauchy 不等式, $\left(\int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^A f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \left(\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \frac{g^2(A)}{A}\right)^2 \le 4\int_0^A f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \left(\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \le 4\int_0^A f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x \le 4\int_0^A f^2(x)\mathrm{d}x$. 令 $A\to+\infty$ 即可.
5. 记 $I_n = \int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t$. 做变换 $t=\sqrt{n}\sin x$ 知 $I_n = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x = \sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 由于 $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}\mathrm{d}t$, 因此只需求出极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left[e^{-t^2}-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right]\mathrm{d}t$. 在提示中令 $x=t^2, a=n$, 得到估计式 $0 \le \int_0^{\sqrt{n}}\left[e^{-t^2}-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right]\mathrm{d}t \le \frac{\int_0^{\sqrt{n}}t^4e^{-t^2}\mathrm{d}t}{n}$. 当 $n\to+\infty$ 时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0, 由夹逼原理知欲求极限存在且为 0. 从而 $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
6. $I = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(2x)}{(2x)^2+4}\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{6}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{\ln 2}{6}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \overset{x=e^t}{=} \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^t}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t - \frac{\pi\ln 2}{12} = -\frac{\pi\ln 2}{12}$.
7. 令 $t = ax - \frac{b}{x}$, 则 $x = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a}$, $ax+\frac{b}{x} = \sqrt{t^2+4ab}$, $\mathrm{d}x = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t$, 从而

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(ax+\frac{b}{x})\mathrm{d}x &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

8. $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}(x-a) = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)\mathrm{d}\frac{(x-a)^2}{2} = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} f''(x)\mathrm{d}x = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2}\mathrm{d}x$. 同理 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} + f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2}\mathrm{d}x$. 两式相加得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + (f''(\xi_1)+f''(\xi_2))\frac{(b-a)^3}{48} = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$. 最后一步用了 Darboux 定理.

9. 注意到 $A_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2} + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1)) = \sum\limits_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n}\right) + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1))$. 设 $|f'(x)| \le M$, 从而 $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}(x-\frac{2k-1}{2n}) = f(x)(x-\frac{2k-1}{2n})\Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)\mathrm{d}x = \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n} - B_n$, 其中 $B_n := \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}}(x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}}(x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)\mathrm{d}x = f'(\xi_{k,1})\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}}(x-\frac{2k-1}{2n})\mathrm{d}x + f'(\xi_{k,2})\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}}(x-\frac{2k-1}{2n})\mathrm{d}x = -\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2} + \frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}$. 综上所述, 我们有 $nA_n = \sum\limits_{k=1}^n \frac{f'(\xi_{k,2})-f'(\xi_{k,1})}{8n} + \frac{f(0)-f(1)}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} nA_n = \frac{1}{8}(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x) + \frac{f(0)-f(1)}{2} = \frac{f(0)-f(1)}{2}$.

10. 设曲线方程为 $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0,L]$, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, 且 D 的面积为 $A = \int_0^L x dy = \int_0^L x(s)y'(s)\mathrm{d}s$. 又设 $C: \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为半径的圆, 此处仍选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面积为 $\pi R^2 = -\int_0^L y\mathrm{d}x = -\int_0^L \psi(s)x'(s)\mathrm{d}s$. 从而由 Cauchy 不等式, $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))\mathrm{d}s \le \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))^2}\mathrm{d}s \le \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2+y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)}\mathrm{d}s = RL$. 因此我们成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \le A + \pi R^2 \le RL \Rightarrow A \le \frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s)+\psi(s)y'(s))^2 = 0$. 由于 $x(s)^2+\psi(s)^2 = R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = y'(s), \psi(s) = y(s) + y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2 + (y-y_0)^2 = R^2$, 圆也!



11. 由 Abel 判别法, $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $u_2(x)$ 单调有界, 因此 $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)u_2(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 依此类推.

12. 记 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 由 L'Hospital 法则, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}F(x)}{e^{ax}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}(aF(x)+f(x))}{ae^{ax}} = \frac{A}{a}$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A - a\cdot\frac{A}{a} = 0$.

7 第 7 次习题课: 数项级数的基本概念与正项级数

7.1 问题

1. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ 的收敛性.

2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!})^p$ 的收敛性.

3. 判断级数 $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$ 的收敛性.

4. 计算 $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1}$.

5. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{n}(n+1)} \le p, p \ge 1$.

6. $a_n > 0$, 证明 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1) \ge 1$.

7. $a_n > 0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.

8. $0 < a_1 < \frac{\pi}{2}, a_n = \sin a_{n-1}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^p$ 的收敛性.

9. (Bertrand 判别法). 对于正项级数, 证明: $\begin{cases} \varliminf\limits_{n\to+\infty} \ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1] > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\text{收敛} \\ \varlimsup\limits_{n\to+\infty} \ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1] < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\text{发散} \end{cases}$.

10. 正项级数 a_n 单调递减, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 同敛散.

11. 是否存在部分和序列有界但通项趋于 0 的发散级数?

12. $a_n > 0, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $a_n - a_{n+1}$ 单调下降. 证明 a_n 单调区域趋于 0, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty$.

7.2 解答

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n} = 1$, 因此原级数发散.

2. 考虑 Rabbe 判别法. $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) = n[(\frac{2n+5}{2n+2})^p-1] = n[(1+\frac{3}{2n+2})^p-1] = n[1+\frac{3p}{2n+2}+o(\frac{1}{n})-1] \to \frac{3}{2}p$, 因此 $p > \frac{2}{3}$ 时收敛, $p < \frac{2}{3}$ 时发散. $p = \frac{2}{3}$ 时, 记 $f(x) = (1+x)^{\frac{2}{3}}$, 则 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = (1+\frac{3}{2(n+1)})^{\frac{2}{3}} = 1+\frac{1}{n+1}+\frac{f''(\xi)}{2!}(\frac{3}{2(n+1)})^2 < 1+\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} := \frac{b_n}{b_{n+1}}$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, 即级数发散.

3. $\sqrt{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}, \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}} = 2\sin\frac{\pi}{8}, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}} = 2\sin\frac{\pi}{16}$, 依此类推, 再利用 $\sin x \sim x$ 知原级数收敛.

4. 注意到 $\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1} = \arctan\frac{1}{2k-1} - \arctan\frac{1}{2k}$, 从而 $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1} = \arctan\frac{1}{2}$.

5. $\frac{1}{\sqrt[p]{n}(n+1)} = n^{\frac{p-1}{p}}[(\frac{1}{\sqrt[p]{n}})^p - (\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}})^p] \overset{f(x)=x^p\text{的微分中值定理}}{=} n^{\frac{p-1}{p}}p(\frac{1}{\sqrt[p]{n+\theta}})^{p-1}(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}) \le p(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}})$. 两边累加.

6. 反证法. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1) < 1$. 则 $\exists N > 0, \text{s.t.}\forall n \ge N, n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}$. 两边累加, 知 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{N+i} < \frac{a_N}{N}$, 这与调和级数的发散性矛盾.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛 $\Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0 \Rightarrow a_n \to +\infty$. 因此可按从小到大顺序将 $\{a_n\}$ 重排为 $a_{\phi(1)} \le a_{\phi(2)} \le \cdots \le a_{\phi(n)} \le \cdots$. 令 $b_n = \frac{n}{a_{\phi(1)}+a_{\phi(2)}+\cdots+a_{\phi(n)}}$, 则 $\{b_n\}$ 单调递减, 且 $b_{2n} = \frac{2n}{a_{\phi(1)}+\cdots+a_{\phi(2n)}} \le \frac{2n}{a_{\phi(n)}+\cdots+a_{\phi(2n)}} \le \frac{2n}{na_{\phi(n)}} = \frac{2}{a_{\phi(n)}}$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$. 又因为 $\frac{n}{a_1+\cdots+a_n} \le b_n$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$ 收敛.

8. 上学期例题已证 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n^2 = 3$, 因此 $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}, a_n^p \sim (\frac{3}{n})^{\frac{p}{2}}$, 从而当 $p \le 2$ 时级数发散, $p > 2$ 时级数收敛.

9. 先证明第一种情况. 由条件知 $\exists N_1 > 0, \text{s.t.}\forall n > N_1, \ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1] > r_1 > 1 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n\ln n}{(n+1)\ln n + r_1}$. 可以验证当 $1 < p < r_1$ 时, $\frac{n\ln n}{(n+1)\ln n+r_1} < \frac{n\ln^p n}{(n+1)\ln^p(n+1)} \Leftrightarrow \frac{(n+1)[\ln^p(n+1)-\ln^p n]}{\ln^{p-1} n} < r_1$. 利用 $f(x) = x^p$ 的微分中值定理, 知 LHS $= \dfrac{(n+1)p\ln^{p-1}(n+\theta)[\ln(n+1)-\ln n]}{\ln^{p-1} n} < p\underbrace{(n+1)[\ln(n+1)-\ln n]}_{\to 1}\underbrace{\dfrac{\ln^{p-1}(n+1)}{\ln^{p-1} n}}_{\to 1} < r_1 =$ RHS 当 n 足够大时成立.

因此有 $\exists N_2 > N_1, \text{s.t.}\forall n > N_2, \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n\ln^p n}{(n+1)\ln^p(n+1)} \Rightarrow a_n < \frac{C}{n\ln^p n}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{C}{n\ln^p n}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

再证明第二种情况. 由条件知 $\exists N_3 > 0, \text{s.t.}\forall n > N_3, \ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1] < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n\ln n}{(n+1)\ln n+1} > \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)} \Rightarrow a_n > \frac{C}{n\ln n}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{C}{n\ln n}$ 发散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

10. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} a_{2^n+k} \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1}a_{2^n} \le 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_{2^{n-1}+k} = 2\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

11. 存在. 一个例子为 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \cdots$.

12. 前者显然. 对于后者, $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n-a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} \ge \frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{a_n-a_{n+1}}{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(a_k^2-a_{k+1}^2)} = \frac{a_n-a_{n+1}}{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(a_k-a_{k+1})(a_k+a_{k+1})} \ge \frac{a_n-a_{n+1}}{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(a_n-a_{n+1})(a_k+a_{k+1})} \ge \frac{1}{2\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_n} \to +\infty$ 当 $n \to +\infty$ 时.

8 第 8 次习题课: 任意项级数与数项级数的运算

8.1 问题

1. 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin n}{\ln n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$ 的收敛性.

3. $p, q > 0$, 讨论级数 $1 - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q} + \cdots$ 的收敛性与绝对收敛性.

4. 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]$ 的收敛性与绝对收敛性.

5. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 数列 $p_n>0$ 且单调递增趋于 $+\infty$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^n p_ka_k}{p_n}=0$.

7. 计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{5}n)}{n}$.

8. $p>0$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}>\frac{2^p}{2^p+1}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=A$ 且绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n=B$ 且条件收敛, 证明 Cauchy 乘积收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n=AB$.

10. 如果对任意以 0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 都有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 也收敛. 绝对收敛性呢?

11. 对于两个发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

12. (1) 对于收敛级数和发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

(2) 对于正项收敛级数和正项发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

8.2 解答

1. $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减趋于 0, $\sum\limits_{n=2}^{k}\sin n$ 对于 $\forall k\geq 1$ 有一致上界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 由于 $|\frac{\sin n}{\ln n}|\geq\frac{\sin^2 n}{\ln n}=\frac{1-\cos 2n}{2\ln n}=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos 2n}{\ln n}$, 而 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos 2n}{\ln n}$ 收敛, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2\ln n}$ 发散, 因此不绝对收敛.

2. 合并同号项, 级数改写为 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^kb_k$, 其中 $b_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\leq\frac{2k+1}{k^2}\to 0$. 另一方面, $b_k\geq\int_0^1\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{2k}^{2k+1}\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x=\int_0^{2k+1}\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x=\ln\frac{(k+1)^2}{k^2}$, 而 $b_{k+1}\leq\int_{-1}^0\frac{1}{(k+1)^2+x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{2k+1}^{2k+2}\frac{1}{(k+1)^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2k+2}\frac{1}{(k+1)^2+x^2}\mathrm{d}x=\ln\frac{(k+1)^2+2(k+1)}{k(k+2)}\Rightarrow b_k-b_{k+1}\geq\ln\frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)}\geq 0$. 由 Leibniz 判别法知收敛.

3. (a) 当 $p>1,q>1$ 时, $|a_n|\leq\frac{1}{n^{\min(p,q)}}$, 因此绝对收敛. (b) 当 $0<p=q\leq 1$ 时, 由 Leibniz 判别法知条件收敛. (c) 当 $p>1,0<q\leq 1$ 或 $0<p\leq 1,q>1$ 时, 级数正部 (或负部) 收敛, 负部 (或正部) 发散, 因此发散. (d) 当 $0<p<q\leq 1$ 时, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}}{\frac{1}{(2n-1)^p}}=1$ 知级数发散. (e) 当 $0<q<p\leq 1$ 时, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{(2n)^q}+\frac{1}{(2n+1)^p}}{-\frac{1}{(2n)^q}}=1$ 知级数发散.

4. (a) $p>1$ 时, 由 $\left|\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]\right|<\frac{1}{n^p}$ 知绝对收敛.

(b) 由 Taylor 展开, $\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2(1+\xi_n)^2}\frac{1}{n^{2p}}$, 因此 $\frac{1}{2}<p\leq 1$ 时级数条件收敛, $0<p<\frac{1}{2}$ 时级数发散.

5. 记 $S_{n,n+p}=\sum\limits_{k=n}^{n+p}b_k, M=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}|a_n-a_{n-1}|$. 由收敛性, $\exists N>0,\text{s.t.}\forall n>N,|S_{n,n+p}|<\frac{\varepsilon}{2M}$. 从而有 $\forall n>N,|\sum\limits_{k=n}^{n+p}a_kb_k|=|\sum\limits_{k=n}^{n+p}a_k(S_{n,k}-S_{n,k-1})|=|a_{n+p}S_{n,n+p}+\sum\limits_{k=n}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})S_{n,k}|\leq|a_{n+p}||S_{n,n+p}|+\sup\limits_{n\leq k\leq n+p-1}|S_{n,k}|\sum\limits_{k=n}^{n+p-1}|a_{k+1}-a_k|\leq\sup\limits_{n\leq k\leq n+p}|S_{n,k}|\left[|a_{n+p}|+\sum\limits_{k=n}^{n+p-1}|a_{k+1}-a_k|\right]\leq\frac{\varepsilon}{2M}2M=\varepsilon$. 由 Cauchy 判别准则知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛.

6. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 并设 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}p_ka_k=p_1S_1+\sum\limits_{k=2}^{n}p_k(S_k-S_{k-1})=\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k(p_k-p_{k+1})+S_np_n\Rightarrow\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_kS_k}{p_n}=S_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}=(S_n-S)-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}+S\frac{p_1}{p_n}$. 显然 $S_n-S\to 0,S\frac{p_1}{p_n}\to 0$. 对于第二项, 设 $|S_n|\leq M$, 由极限定义, $\exists N_1>1,\text{s.t.}\forall n\geq N_1,|S_n-S|<\frac{\varepsilon}{2}$. 从而有估计 $|\sum\limits_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}|\leq 2M\sum\limits_{k=1}^{N_1}\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}+\frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{k=N_1+1}^{n-1}\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}\leq 2M\frac{p_{N_1+1}-p_1}{p_n}+\frac{\varepsilon}{2}$. 又由极限定义, $\exists N_2>N_1,\text{s.t.}\forall n\geq N_2,\frac{p_{N_1+1}-p_1}{p_n}\leq\frac{\varepsilon}{4M}$. 此时 $|\sum\limits_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}|<\varepsilon$, 即 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}\to 0$.

7. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\sqrt{5}k}{k}=-\int_{\sqrt{5}}^{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt\mathrm{d}t=-\int_{\sqrt{5}}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t-\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=-\int_{\sqrt{5}}^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\mathrm{d}t+\frac{1}{2}(\pi-\sqrt{5})\xrightarrow{\text{R-L}}\frac{1}{2}(\pi-\sqrt{5})$.

8. 利用函数 $f(x)=\frac{1}{x^p}$ 的凸性, 成立 $\frac{1}{(4k-1)^p}-\frac{1}{(4k)^p}+\frac{1}{(4k+1)^p}-\frac{1}{(4k+2)^p}>\frac{1}{(4k)^p}-\frac{1}{(4k+2)^p}$, 从而 $S_{4n+2}>1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}(1-S_{2n})$, 两边取极限知 $S>1-\frac{S}{2^p}$, 即 $S>\frac{2^p}{2^p+1}$.

9. 记 $A_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k, B_n=\sum\limits_{k=1}^n b_k$, 则 $\sum\limits_{k=1}^n c_n=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1=A_nB+(a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1)$(这里 $\beta_k=B_k-B$)$:=\Delta_1(n)+\Delta_2(n)$. 显然 $\Delta_1(n)\to AB$, 下证 $\Delta_2(n)\to 0$. 设 $|\beta_n|\le\beta,\forall n\ge 1$. 由定义, $\forall\varepsilon>0,\exists N\ge 3,\text{s.t.}\forall n>N,\forall p\ge 1,|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|)}$, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\frac{\varepsilon}{2\beta}$. 从而当 $n\ge 2N$ 时, $|\Delta_2(n)|\le|\sum\limits_{k=1}^{N}a_k\beta_{n+1-k}|+|\sum\limits_{k=N+1}^{n}a_k\beta_{a+1-k}|\le\varepsilon$.

10. 不妨设 $a_n>0$, 否则可将对应 x_n 反号, 题目条件与绝对收敛性结论不变. 采用反证法, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散, 则可以归纳构造数列 A_n, 满足 $A_0=0, A_n=\inf\limits_{k\in\mathbb{N}_+}\sum\limits_{i=A_{n-1}+1}^{k}a_i\ge n$. 从而可定义 $\{x_n\}$ 为 A_1-A_0 个 $1, A_2-A_1$ 个 $\frac{1}{2},\cdots,A_n-A_{n-1}$ 个 $\frac{1}{n},\cdots$ 的依次排列, 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx_n>1+1+\cdots=+\infty$. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛.

11. 不一定, 反例是 $a_0=1,a_n=-(\frac{3}{2})^n$ 和 $b_0=1,b_n=(\frac{3}{2})^{n-1}(2^n+\frac{1}{2^{n+1}})$. 显然 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n,\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n$ 均发散, 但它们的 Cauchy 乘积 $c_n=(\frac{3}{2})^{n-1}(2^n+\frac{1}{2^{n+1}})-(\frac{3}{2})^{n-1}(2^{n-1}+\frac{1}{2^n})-\cdots-(\frac{3}{2})^{n-1}(2^1+\frac{1}{2^2})-(\frac{3}{2})^n=(\frac{3}{4})^n\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 收敛.

12. (1) 不一定, 反例是 $a_n\equiv 0$ 和 $b_n\equiv 1$. 当然也不一定收敛, 如 $a_n=\frac{1}{n^2},b_n=n$.

(2) 一定. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散, 则 $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\ge a_1b_{n-1}$, 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 发散.

9 第 9 次习题课: 无穷乘积与函数项级数的基本概念

9.1 问题

1. 证明 $a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 当 $n\to+\infty$ 时极限存在, 并求其值. (请不要用 Stirling 公式)

2. 设 $x\in(0,1)$, 证明 $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+x^n)=\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-x^{2n-1})^{-1}$.

3. (Euler 公式). 证明 $\sin x=x\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$. 你可以将 $\sin[(2n+1)\phi]$ 写成关于 $\sin\phi$ 的多项式, 并利用零点求解之.

4. 讨论无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ 的收敛性.

5. 讨论无穷乘积 $\prod\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$ 的收敛性, 其中取 n_0 足够大使得每一项都是正数.

6. 计算无穷乘积 $2(\frac{2}{1})^{\frac{1}{2}}(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7})^{\frac{1}{8}}\cdots$. 你可以先写出通项公式, 然后逐步化简.

7. $f(x)\in D[1,+\infty)$, 且 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 证明广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 同敛散.

8. 试构造两个单调递减且发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\min(a_n,b_n)$ 收敛.

9. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_n$ 收敛, 证明: (1) $\forall k\in\mathbb{N}_+,\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_{n+k}$ 收敛; (2) $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_{n+k}=0$.

10. $0<p<1,a_1>0,a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n^p}$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

11. 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ 的收敛域.

12. 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}e^{-nx}$ 的收敛域.

9.2 解答

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{(1+n)^{n+\frac{1}{2}}}\Rightarrow\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})=1-(n+\frac{1}{2})(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3}))=-\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})$. 因此有 $a_n=\exp(\ln a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\frac{a_{k+1}}{a_k})=\exp\{\ln a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}[-\frac{1}{12k^2}+o(\frac{1}{k^2})]\}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在, 并记为 $a(\neq 0)$. 另一方面, 由 Wallis 公式, $a=\frac{a^2}{a}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2}{n^{2n+1}}\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!}=\sqrt{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2^nn!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\sqrt{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n)!!}{\sqrt{n}(2n-1)!!}=\sqrt{2\pi}$.

2. $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+x^n)=\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\prod\limits_{i=0}^{+\infty}(1+x^{2^i(2n-1)})=\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-x^{2n-1})^{-1}$.

3. 注意到 $\sin[(2n+1)\phi]$ 可展开为 $\sin\phi$ 的 $2n+1$ 次多项式, 且只含奇次幂项, 因此 $\sin[(2n+1)\phi]=\sin\phi P(\sin^2\phi)$, 其中 $P(\cdot)$ 是 n 次多项式. 由极限关系知 $P(0)=2n+1$, 且 LHS 全部零点为 $x_k=\frac{k\pi}{2n+1}, k=1,\cdots,n$, 因此 $P(t)=(2n+1)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{t}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)\Rightarrow\sin[(2n+1)\phi]=(2n+1)\sin\phi\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\phi}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)\Rightarrow\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$. 现在, 问题变为求 RHS 在 $n\to+\infty$ 时的极限. 记 $U_m=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod\limits_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right), V_m=\prod\limits_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$. $\lim\limits_{n\to+\infty}U_m=x\prod\limits_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), 1>V_m\geq\prod\limits_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{(\frac{x}{2n+1})^2}{\frac{4}{\pi^2}\frac{k^2\pi^2}{(2n+1)^2}}\right)=\prod\limits_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)>\prod\limits_{k=m+1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)\overset{m\to+\infty}{\to}1$. 因此由夹逼原理, $\sin x=\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)=x\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

4. $\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1=\frac{1}{e}e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-1\sim n\ln(1+\frac{1}{n})-1\sim-\frac{1}{2n}$, 因此该无穷乘积发散.

5. $\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}-1=\frac{\alpha\beta-\gamma+(\alpha+\beta-\gamma-1)n}{(1+n)(\gamma+n)}$. 因此该无穷乘积收敛当且仅当 $\alpha+\beta-\gamma-1=0$.

6. 主要难点在于如何写成通式.

$$P_n=2\sqrt{2}\prod_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(2^{k-1}-1)!!(2^k)!!}{(2^{k-1})}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^k}}\overset{(2^n-1)!!=\frac{(2^n)!}{2^{2^{n-1}}(2^{n-1})!}}{=}2\sqrt{2}\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\frac{(2^{k-1})!}{2^{2^{k-2}}(2^{k-2})!}\cdot 2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!}{2^{2^{k-2}}(2^{k-2})!\cdot\frac{(2^k)!}{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!}}\right]^{\frac{1}{2^{k-1}}}$$

$$=2\sqrt{2}\prod_{k=2}^{n}\left[2^{2^{k-1}-\frac{1}{2}}\frac{((2^{k-1})!)^3}{((2^{k-2})!)^2(2^k)!}\right]^{\frac{1}{2^{k-1}}}=2\sqrt{2}\prod_{k=2}^{n}\left[2^{1-\frac{1}{2^k}}\frac{\left(\frac{(2^{k-1})!}{(2^k)!}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}}{\left(\frac{(2^{k-2})!}{(2^{k-1})!}\right)^{\frac{1}{2^{k-2}}}}\right]=2\sqrt{2}\cdot 2^{n-1-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$=2\cdot 2^{n+\frac{1}{2^n}}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^{\frac{1}{2^{n-1}}}=2\left\{2^{n2^n+1}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}}\overset{\text{Stirling}}{\sim}2\left[2^{n2^n+1}\frac{2\pi 2^{n-1}\left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^n\left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^{n+1}}}\right]^{\frac{1}{2^n}}=e$$

7. 只需注意到 $\left|\sum\limits_{k=m}^{n-1}-\int_m^n f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\sum\limits_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}|f(k)-f(x)|\mathrm{d}x\leq\sum\limits_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}\int_k^x|f'(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x\leq\sum\limits_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}\int_k^{k+1}|f'(t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq\sum\limits_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_m^n|f'(t)|\mathrm{d}t$, 因此由 Cauchy 收敛准则知广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 同敛散.

8. 一个例子如下.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n &= \underbrace{\frac{1}{1^2}}_{1^2\text{个}}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{5^2}+\underbrace{\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{6^2}}_{6^2\text{个}}+\frac{1}{42^2}+\cdots+\frac{1}{1805^2}+\cdots\\ \sum_{n=1}^{+\infty}b_n &= \frac{1}{1^2}+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^2}}_{2^2\text{个}}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{41^2}+\underbrace{\frac{1}{42^2}+\cdots+\frac{1}{42^2}}_{42^2\text{个}}+\cdots\end{aligned}$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\min(a_n,b_n)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

9. (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+k)a_{n+k}$ 收敛, $\frac{n}{n+k}$ 随 n 单调有界, 由 Abel 判别法知收敛. (2) 记 $R_n=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}ka_k$. 则

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{m}na_{n+k}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{n+k}(n+k)a_{n+k}\right|=\left|\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{n+k}(R_{n+k-1}-R_{n+k})\right|\\ &= \left|\frac{1}{k+1}R_k-\frac{m}{k+m}R_{k+m}+\sum_{n=1}^{m-1}R_{n+k}\left(\frac{n+1}{n+k+1}-\frac{n}{n+k}\right)\right|\\ &\leq \frac{1}{k+1}|R_k|+\frac{m}{k+m}|R_{k+m}|+\sup_{k+1\leq j\leq n+m-1}|R_j|\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{n+1}{n+k+1}-\frac{n}{n+k}\right)\\ &\leq \frac{1}{k+1}|R_k|+\frac{m}{k+m}|R_{k+m}|+\sup_{j\geq k+1}|R_j|\left(\frac{m}{k+m}-\frac{1}{k+1}\right)\end{aligned}$$

令$m\to+\infty$, 得到 $\left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_{n+k}\right|\leq\frac{1}{k+1}|R_k|+\sup\limits_{j\geq k+1}|R_j|\leq 2\sup\limits_{j\geq k}|R_j|\overset{k\to+\infty}{\to}0$

10. 容易看出 a_n 单调递减. $a_{n+1}-a_n=-a_{n+1}a_n^p\Rightarrow a_{n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^p}<\frac{a_n-a_{n+1}}{\xi_n^p}\overset{\text{微分中值定理}}{=}\frac{1}{1-p}(a_n^{1-p}-a_{n+1}^{1-p})$. 两边累加.

11. 显然收敛域为 $-1<x<1$.

12. 原级数可改写为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^n$, 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, 因此当 $x>-1$ 时收敛, 当 $x<-1$ 时发散. 而当 $x=-1$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n-n^2\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{\frac{1}{2}}$, 因此原幂级数发散.

10 第 10 次习题课: 函数项级数的一致收敛

10.1 问题

1. $f_0(x)\in R[0,a], f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$, 讨论 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,a]$ 上的一致收敛性.

2. 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在区间 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

3. 讨论函数列 $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

4. 函数列 $\{f_n\},\{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛, 且对于 $\forall n, f_n, g_n$ 在 I 上有界. 讨论函数列 $\{f_ng_n\}$ 在 I 上的一致收敛性.

5. 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的绝对收敛性、一致收敛性和绝对一致收敛性.

6. 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 上的一致连续性.

7. $f(x)\in D[0,\frac{1}{2}], f(0)=0, f'(x)\geq 0$, 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^nf(x^n)$ 在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上一致收敛性.

8. $f(x)\in C^1(a,b)$, 定义 $F_n(x)=\frac{n}{2}\left[f(x+\frac{1}{n})-f(x-\frac{1}{n})\right]$, 证明函数列 $\{F_n\}$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛.

9. 函数列 $f_n(x)=\cos nx$ 是否存在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛的子列?

10. $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积一致收敛到 $f(x)$, 且存在 $\mathbb{R}$ 上的可积函数 $F(x)$ 满足 $|f_n(x)|\leq F(x)$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$.

11. a_n 单调递减趋于 0, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛的充要条件是 $a_n=o(\frac{1}{n})$.

12. $\forall n\in\mathbb{N}_+, \{u_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上均单调递增, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(a), \sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(b)$ 绝对收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

10.2 解答

1. 不妨设 $|f_0(x)|\leq M$, 则 $f_1(x)\leq Mx,\cdots,f_n(x)\leq\frac{Mx^n}{n!}$, 由最值判别法知一致收敛.

2. $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k(\frac{1}{2n})=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin\frac{k}{2n}}{k}\geq\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$, 因此不一致收敛.

3. 显然 $f_n(x)\to\max(1,x)$. 在 $[0,1]$ 上, $|f_n(x)-1|\leq\sqrt[n]{2}-1$; 在 $[1,+\infty)$ 上, $|f_n(x)-x|\leq\sqrt[n]{2}-1$(因为 $(f_n(x)-x)'<0$). 因此由最值判别法知一致收敛.

4. 先证一致有界性. 由一致收敛性, $\exists N\in\mathbb{N}_+, \text{s.t.}\forall m,n\geq N,\forall x\in I,|f_n(x)-f_m(x)|\leq 1$. 从而对于 $\forall n\in\mathbb{N}_+,|f_n(x)|\leq\sup\limits_{1\leq k\leq N}|f_k(x)|+1:=M_f$, 因此一致有界. 同理 $\forall n\in\mathbb{N}_+,|g_n(x)|\leq M_g$. 从而 $|f_m(x)g_m(x)-f_n(x)g_n(x)|\leq|f_m(x)g_m(x)-f_m(x)g_n(x)|+|f_m(x)g_n(x)-f_n(x)g_n(x)|\leq M_f|g_m(x)-g_n(x)|+M_g|f_m(x)-f_n(x)|$. $\forall\varepsilon>0,\exists N',\text{s.t.}\forall m,n>N',|f_n-f_m|<\frac{\varepsilon}{2M_g},|g_n-g_m|<\frac{\varepsilon}{2M_f}$. 从而 $|f_m(x)g_m(x)-f_n(x)g_n(x)|<\varepsilon$.

5. 绝对 (一致) 收敛性: $\left|\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}\right|\begin{cases}=0, & x=0\\ \leq\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, & x\neq 0\end{cases}$ 知绝对收敛, $\left[\sum\limits_{k=n}^{2n}\left|\frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k}\right|\right]_{x^2=\frac{1}{n}}=\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}-1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}>\frac{e-1}{e^2}$ 知不绝对一致收敛. 一致收敛性: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ 有界, $\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 随 n 单调递减且一致趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知一致收敛.

6. 记 $f_n(x)=\frac{(1-x)^n}{1-x^{2n}}$. 则 $f_n(x)\geq f_{n+1}(x)\Leftrightarrow(1-x)(1+x^{2n+1})\geq 0$ 恒成立, 且 $f_n(x)=\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})}\leq\frac{1}{2n}\rightrightarrows 0$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{N}\sin nx$ 关于 $x\in(\frac{1}{2},1)$ 一致有界, 因此由 Dirichlet 判别法, 知原级数一致收敛.

7. $\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^n$ 一致有界, $f(x^n)$ 随 n 单调递减且一致趋于 0, 有 Dirichlet 判别法知一致收敛.

8. 由导数定义, $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}+\frac{f(x-\frac{1}{n})-f(x)}{-\frac{1}{n}}\right]=f'(x)$. 另一方面, 考虑闭区间 $[c,d]$, 则有 $|F_n(x)-f'(x)|=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}+\frac{f(x-\frac{1}{n})-f(x)}{-\frac{1}{n}}-2f'(x)\right]=\frac{1}{2}[(f'(\xi_1)-f'(x))+(f'(\xi_2)-f'(x))]\leq\sup\limits_{|x-y|<\frac{1}{n}}|f'(x)-f'(y)|\to 0$,

其中最后一步利用了 $f'(x)$ 在区间 $[\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}]$ 上的一致连续性.

9. 不存在. 假设 $f_{n_k}=\cos n_kx$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛. 由收敛性, $\forall\varepsilon>0,\exists N,\text{s.t.}\forall m>k>N,\forall x\in[-1,1],|\cos n_kx-\cos n_mx|<\varepsilon$. 当 $n_m>2n_k$ 时, 考虑 $x=\frac{1}{n_m}$, 则 $|\cos n_kx-\cos n_mx|=|\cos\frac{n_k}{n_m}-\cos 1|>\cos\frac{1}{2}-\cos 1$. 矛盾.

10. $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\exists N'>0,\text{s.t.}\forall n>N',|\int_N^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x|\le\int_N^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x\le\int_N^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8},|\int_{-\infty}^{-N}f_n(x)\mathrm{d}x|<\frac{\varepsilon}{8}$, 且 $|\int_{-N}^{N}f_n(x)\mathrm{d}x-\int_{-N}^{N}f(x)\mathrm{d}x|\le\int_{-N}^{N}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x<2N\cdot\frac{\varepsilon}{4N}=\frac{\varepsilon}{2}$. 因此, 我们有估计 $|\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x|\le|\int_N^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x|+|\int_N^{+\infty}|f(x)\mathrm{d}x|+|\int_{-\infty}^{-N}f_n(x)\mathrm{d}x|+|\int_{-\infty}^{-N}|f(x)\mathrm{d}x|+|\int_{-N}^{N}f_n(x)\mathrm{d}x-\int_{-N}^{N}f(x)\mathrm{d}x|<\frac{\varepsilon}{8}\cdot 4+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

11. 记 $S_{n,p}(x)=\sum\limits_{k=n}^{p}a_k\sin kx$. 先证必要性. $o(1)=S_{n,2n}(\frac{\pi}{4n})=\sum\limits_{k=n}^{2n}a_k\sin\frac{k\pi}{4n}\ge\frac{n}{2}(a_{2n-1}+a_{2n})\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow a_n=o(\frac{1}{n})$. 再证充分性. 定义单调递减数列 $b_n=\sup\limits_{m\ge n}\{ma_m\}=o(1)$. (a) 当 $0\le x\le\frac{\pi}{p}$ 时, $|S_{n,p}(x)|\le\sum\limits_{k=n}^{p}ka_kx\le pb_nx\le b_n\pi\overset{n\to+\infty}{\to}0$. (b) 当 $x\ge\frac{\pi}{n}$ 时, 由于 $\forall m>n,|\sum\limits_{k=n}^{m}\sin kx|\le\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\le\frac{\pi}{x}\le n$, 利用 Abel 变换可知 $|S_{n,p}(x)|\le na_n\le b_n\overset{n\to+\infty}{\to}0$. (c) 当 $\frac{\pi}{p}<x<\frac{\pi}{n}$ 时, 取 $q=\lfloor\frac{\pi}{x}\rfloor$, 则 $|S_{n,p}(x)|\le|S_{n,q}(x)|+|S_{q+1,p}(x)|\le b_n\pi+b_{q+1}\le(\pi+1)b_n\overset{n\to+\infty}{\to}0$. 从而由 Cauchy 准则知一致收敛.

12. $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\text{s.t.}\forall m\ge n\ge N,|\sum\limits_{k=n}^{m}u_k(a)|<\varepsilon,|\sum\limits_{k=n}^{m}u_k(b)|<\varepsilon$. 从而对 $\forall x\in[a,b],-\varepsilon\le\sum\limits_{k=n}^{m}u_k(a)\le\sum\limits_{k=n}^{m}u_k(x)\le\sum\limits_{k=n}^{m}u_k(b)\le\varepsilon$, 然后用 Cauchy 收敛准则.

11 第 11 次习题课: 一致收敛函数项级数的性质

11.1 问题

1. 设连续函数序列 $f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 且 $f(x)$ 没有零点. 证明 $\frac{1}{f_n(x)}$ 也一致收敛.
2. 证明 $f_n(x)=nx(1-x)^n$ 在区间 $[0,1]$ 上不一致收敛, 但是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$.
3. 可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 f, 且 $\forall n\in\mathbb{N}_+,f_n$ 有原函数 F_n, 证明 f 也有原函数 F.
4. 证明 $\int_0^1x^{-x}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.
5. 证明 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
6. 求级数 $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\cdots$ 的和.
7. $x\in(-1,1)$, 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ 的和.
8. $x>1$, 求函数项级数和函数的导数 $\left[\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\frac{x^8}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}\cdots\right]'$.
9. (Arzela-Ascoli 引理). E 是紧集, 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上逐点有界, 等度连续 ($\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{s.t.}\forall n\in\mathbb{N}_+,\forall|x-x'|<\delta,|f_n(x)-f_n(x')|<\varepsilon$). 证明 $\{f_n(x)\}$ 存在 E 上的一致收敛子列.
10. 区间 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 逐点有界, 证明: 存在 $[a,b]$ 的一个子区间, 使得 $\{f_n(x)\}$ 在此区间上一致有界.
11. 区间 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛到 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 连续的充要条件是 $\forall\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N}_+,\exists N'>N,\text{s.t.}\forall x\in[a,b],\exists n_x\in[N,N'],\text{s.t.}|f_{n_x}(x)-f(x)|<\varepsilon$.
12. 试举一个函数列 $\{f_n(x)\}$, 使得 $\{f_n'(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处收敛但不一致收敛.

11.2 解答

1. $f(x)\in C[a,b]$ 且没有零点, 因此不妨设 $f(x)>2m>0$, 从而 $\exists N>0,\text{s.t.}\forall n>N,\forall x\in[a,b],f_n(x)>m,|f_n(x)-f(x)|\le m^2\varepsilon$. 这样就有 $|\frac{1}{f_n(x)}-\frac{1}{f(x)}|=\frac{1}{f_n(x)f(x)}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 恒成立 $\Rightarrow$ 一致收敛.
2. $f_n(\frac{1}{n})=(1-\frac{1}{n})^n\ge\frac{1}{4}$ 在 $n\ge 2$ 时恒成立, 因此不一致收敛. 但是 $f_n(x)\to 0$, 且 $\int_0^1f_n(x)\mathrm{d}x=\frac{n}{(n+1)(n+2)}\to 0$.
3. 容易证明 $f\in R[a,b]$. 设 $F_n=\int_a^xf(t)\mathrm{d}t$, 则 $\sup\limits_{a\le x\le b}|F_n(x)-F_m(x)|\le\sup\limits_{a\le x\le b}\int_a^x|f_n(t)-f_m(t)|\mathrm{d}t\le(b-a)\sup\limits_{a\le x\le b}|f_n(x)-f_m(x)|\mathrm{d}x\to 0\Rightarrow\{F_n\}$ 一致收敛, 不妨设极限函数为 F. 交换极限和求导顺序, 知 $F'(x)=f(x)$.
4. $x^{-x}=e^{-x\ln x}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}$. 一致收敛可交换极限积分顺序, 因此 $\int_0^1x^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^11+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

5. 考虑 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}t^n\ln t=\frac{t\ln t}{1-t}$. $\forall x\in(0,1),t\in[0,x]$, $|t^n\ln t|=|t^{n-1}t\ln t|\le x^{n-1}e^{-1}$, 因此一致收敛, 从而 $\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}t^n\ln t\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^x t^n\ln t\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{t\ln t}{1-t}\mathrm{d}t$. 由于 $\forall y\in[0,1]$, $|\int_0^y t^n\ln t\mathrm{d}t|=|\frac{y^{n+1}\ln y}{n+1}-\frac{y^{n+1}}{(n+1)^2}|\le\frac{e+1}{(n+1)^2}$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^y t^n\ln t\mathrm{d}t$ 对 $y\in[0,1]$ 一致收敛, 从而连续, 即是 $\int_0^1\frac{t\ln t}{1-t}\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to1-0}\int_0^x\frac{t\ln t}{1-t}\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^x t^n\ln t\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$. 两边同时加上 $\int_0^1\ln t\mathrm{d}t$ 得到 $\int_0^1\frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

6. 原式 $=1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{8n-1}-\frac{1}{8n+1})=1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^1[x^{8n-2}(1-x^2)]\mathrm{d}x$. 记 $u_n(x)=\int_0^x[t^{8n-2}(1-t^2)]\mathrm{d}t$. 显然 $u_n(x)\in C[0,1]$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 一致收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(1)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to1-0}u_n(x)=\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\lim\limits_{x\to1-0}\int_0^x\frac{t^6}{(1+t^2)(1+t^4)}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^6}{(1+t^2)(1+t^4)}\mathrm{d}t=1-\frac{1}{8}(1+\sqrt{2})\pi$, 其中倒数第三个等号利用了 $\forall x\in(0,1)$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}t^{8n-2}(1-t^2)$ 在区间 $[0,x]$ 上的一致收敛性. 因此原式 $=\frac{1}{8}(1+\sqrt{2})\pi$.

7. 记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, 并任取 $0<\delta<\frac{1}{2}$. 在闭区间 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}$ 一致收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 收敛, 因此 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)=\frac{1}{1+x}\Rightarrow S(x)=\ln(1+x)+C$. 由 $S(0)=0\Rightarrow C=0$.

8. 被导函数 $=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^n}}{\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)}=(1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=(1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\right)=1$, 因此其导数为 0.

9. 由 E 紧, 知存在可数稠密子集 $Q=\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. $\{f_n(x_1)\}$ 有界, 因此可抽取收敛子列 $\{f_{n,1}(x_1)\}$. 同理 $\{f_{n,1}(x_2)\}$ 有界, 因此可抽取收敛子列 $\{f_{n,2}(x_2)\}$. 依此类推, 考虑对角线子列 $\{f_{n,n}(x)\}$, 显然对于 $\forall x\in Q,f_{n,n}(x)$ 都收敛. 由等度连续性知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\mathrm{s.t.}\forall n\in\mathbb{N}_+,\forall|x-x'|<\delta,|f_n(x)-f_n(x')|<\frac{\varepsilon}{3}$. 由于 $\cup_{x\in Q}B(x,\delta)$ 是 E 的一个开覆盖, 因此存在有限子覆盖 $\cup_{k=1}^{K}B(y_k,\delta)$. 由 $f_{n,n}(x)$ 在 Q 上的收敛性知 $\exists N\in\mathbb{N}_+,\mathrm{s.t.}\forall n,m>N,\forall k=1,2,\cdots,K,|f_{n,n}(y_k)-f_{m,m}(y_k)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 从而 $\forall x\in E,\forall n,m>N,\exists y_k,\mathrm{s.t.}|x-y_k|<\delta$, 且 $|f_{n,n}(x)-f_{m,m}(x)|\le|f_{n,n}(x)-f_{n,n}(y_k)|+|f_{n,n}(y_k)-f_{m,m}(y_k)|+|f_{m,m}(y_k)-f_{m,m}(x)|\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$. 这说明 $\{f_{n,n}(x)\}$ 一致收敛.

10. 用反证法. 对 $M=1$, $\exists n_1\in\mathbb{N}_+,[a_1,b_1]\subset[a,b],\mathrm{s.t.}\forall x\in[a_1,b_1],|f_{n_1}(x)|>1$. $\{f_n(x)\}$ 在 $[a_1,b_1]$ 上不一致有界, 因此对 $M=2$, $\exists n_2>n_1,[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1],\mathrm{s.t.}\forall x\in[a_2,b_2],|f_{n_2}(x)|>2$. 依此类推. 这样取出来的 $f_{n_k}(x)$ 和区间 $[a_k,b_k]$ 满足 $\forall x\in[a_k,b_k],|f_{n_k}(x)|\ge k$ 且 $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{+\infty}$ 构成一个闭区间套. 因此 $\exists x_0\in\cap_{k=1}^{+\infty}[a_k,b_k]$, 且 $|f_{n_k}(x_0)|\ge k$. 这与 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 处的有界性矛盾.

11. 先证必要性. $\forall\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N}_+,\forall x\in[a,b],\exists N_x>N,\mathrm{s.t.}|f_{N_x}(x)-f(x)|<\varepsilon$. 由连续性, $\exists\delta_x>0,\mathrm{s.t.}\forall x\in(x-\delta_x,x+\delta_x),|f_{N_x}(x)-f(x)|<\varepsilon$. $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 构成了 $[a,b]$ 的开覆盖, 存在有限子覆盖 $\cup_{i=1}^{n}(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})\supset[a,b]$. 因此可取 $N'=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}N_{x_i}$.

再证充分性. 考虑在 x 处并做分解 $|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|$. 由 $f_n(x)$ 的收敛性, $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\mathrm{s.t.}\forall n\ge N,|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 再由题给条件, $\exists N'>N,\mathrm{s.t.}\forall y,\exists n_y\in[N,N'],|f_{n_y}(y)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 最后由连续性, $\exists\delta>0,\mathrm{s.t.}\forall|x-y|<\delta,\forall n\in[N,N'],|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 此时 $\forall|x-y|<\delta$, 取 $n=n_y\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, 即连续性得证.

12. $f_n(x)=\sin\frac{x}{n^2}$.

12 第 12 次习题课: 幂级数的基本概念与性质

12.1 问题

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{n\ln n}x^n$ 的收敛域.

2. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{K}k^n}{n^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域, 其中 $K\in\mathbb{N}_+$.

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域.

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}C_n^k$.

5. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n!2^n}x^n$ 的收敛域与和函数.

7. 求级数 $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{m^2n}{3^m(n3^m+m3^n)}$ 的和.

8. $a_n>0, f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n, \sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$.

9. 证明 $x=\sin x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 并据此计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

10. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$. 证明当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=A, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n=B$. 证明若 Cauchy 乘积级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 收敛, 则它必收敛于 AB.

12. 设曲线 $x^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}}=1(n>1)$ 在第一象限与坐标轴围成的面积为 $I(n)$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}I(n)<4$.

12.2 解答

1. $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n}{n\ln n}}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(1+2\cos\frac{n\pi}{4})=3$, 因此收敛半径是 $\frac{1}{3}$. 考察端点. $x=\frac{1}{3}$ 时, 原式 $=\sum\limits_{n=1}^{7}\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{n\ln n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{7}\frac{(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{(8n+k)\pi}{4})^{8n+k}}{(8n+k)\ln(8n+k)}=C+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{7}\frac{(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{(8n+k)\pi}{4})^{8n+k}}{(8n+k)\ln(8n+k)}\geq C+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(8n)\ln(8n)}+\frac{\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{8n+3}}{(8n+3)\ln(8n+3)}+\frac{\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{8n+5}}{(8n+5)\ln(8n+5)}\right]\geq C+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(8n)\ln(8n)}+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{8n+1}\frac{2}{(8n)\ln(8n)}\right]\geq C+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(8n)\ln(8n)}\right]\Rightarrow$ 原级数发散. $x=-\frac{1}{3}$ 时有类似讨论, 因此收敛域为 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

2. 由上学期知识, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{\sum\limits_{k=1}^{K}k^n}{n^2}}=K$, 讨论端点后知收敛域为 $|\frac{1-x}{1+x}|\leq\frac{1}{K}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{K-1}{K+1},\frac{K+1}{K-1}\right]$.

3. $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}=1$, 讨论端点后知收敛域为 $-1<\frac{x}{2x+1}\leq1\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$.

4. 构造 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}C_n^kx^k, S_n'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^kx^{k-1}=\frac{(1+x)^n-1}{x}$. 从而 $I_n=-S(-1)=\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^n-1}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1[1+x+\cdots+x^{n-1}]\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to+\infty$.

5. 显然收敛域为 $[-1,1]$. 原式 $=2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\int_0^xt^{2n-1}\mathrm{d}t=2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x\int_0^ts^{2n-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=2\int_0^x\int_0^t\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-s^2)^{n-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=2\int_0^x\int_0^t\frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=2\int_0^x\arctan s\mathrm{d}s=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$.

6. 显然收敛域为 $\mathbb{R}$. 考虑一致收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n!2^n}=x(e^{\frac{x}{2}}-1)$, 逐项求导得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n!2^n}=(\frac{x}{2}+1)e^{\frac{x}{2}}-1$.

7. 原式 $=\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{m^2n^2}{3^mn(n3^m+m3^n)}\overset{\text{对称性}}{=}\frac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{m^2n^2}{3^mn(n3^m+m3^n)}+\frac{m^2n^2}{3^nm(n3^m+m3^n)}\right]=\frac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{mn}{3^m3^n}\right)\overset{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}}{=}\frac{9}{32}$.

8. 一方面, $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^{+\infty}e^{-x}\left(\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{N}a_nn!$, 从而 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x\geq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$.

另一方面, $\int_0^Ne^{-x}f(x)\mathrm{d}x\leq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\int_0^Ne^{-x}x^n\mathrm{d}x\leq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$, 从而 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x\leq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$.

9. 由 $\arcsin x=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 换元知 $x=\sin x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}$. 两边从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分, 得到 $\frac{\pi^2}{8}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$ 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛, 知 $f(x)$ 可逐项求导. 令 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$, 则 $F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}=0$. 从而 $F(x)\equiv\lim\limits_{x\to0}F(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

11. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^n, g(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_nx^n$. $f(1),g(1)$ 收敛 $\Rightarrow\forall|x|<1, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_nx^n|, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}|b_nx^n|$ 收敛 $\Rightarrow\forall|x|<1, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_nx^n=\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_nx^n\right)$. 这三个级数都在 $x=1$ 处收敛, 因此左连续, 令 $x\to1-0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n=\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\right)$.

12. $I(n)=\int_0^1(1-x^{\frac{1}{n}})^n\mathrm{d}x \overset{x=t^{2n}}{=} 2n\int_0^1(1-t^2)^n t^{2n-1}\mathrm{d}t \le 2n\int_0^1(1-t^2)^{n-1}t^{2n-2}(1-t^2)t\mathrm{d}t \le 2n\int_0^1[(1-t^2)t^2]^{n-1}\mathrm{d}t \le \frac{2n}{4^{n-1}}$. 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$, 逐项求导得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$, 因此代入 $n=\frac{1}{4}$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}I_n \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{4^{n-1}}=\frac{32}{9}<4$.

13 第 13 次习题课: 幂级数展开与多项式逼近

13.1 问题

1. (Airy 方程). 利用 Maclaurin 级数求解微分方程 $y''(x)-xy(x)=0$.
2. 写出函数 $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$ 的 Maclaurin 级数并给出收敛域.
3. 写出函数 $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ 的 Maclaurin 级数并给出收敛域.
4. 写出函数 $f(x)=\arctan\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}$ 的 Maclaurin 级数.
5. 证明 $[0,1]$ 上的连续函数可以被有理系数多项式逼近.
6. 证明 $[0,1]$ 上的连续函数可以被单调递升的多项式列 (即 $P_1\le P_2\le\cdots\le P_n\le\cdots$) 逼近.
7. $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 单调递升且收敛于 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 一定能取到其最小值, 但未必能取到其最大值.
8. $[a,b]$ 上的连续函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x), \sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n(x)$ 满足 $|u_n(x)|\le v_n(x), \forall n\in\mathbb{N}_+$, 且和函数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n(x)$ 连续. 证明和函数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 也连续.
9. 证明对任意 $n\in\mathbb{N}_+$ 和 $x\in[0,\pi]$ 成立不等式 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\le 2\sqrt{\pi}$.
10. 证明对任意 $n\in\mathbb{N}_+$ 和 $x\in\mathbb{R}$ 成立不等式 $\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|\le e^{|x|}-\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n<\frac{x^2e^{|x|}}{2n}$.
11. 数列 $\{r_n\}$ 是 $[0,1]$ 区间内所有有理数的一个排列, 证明函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$ 在 $[0,1]$ 上处处连续、无理点处可微、有理点处不可微.
12. 试举在 $[0,1]$ 上一致收敛于连续函数的处处不连续函数列 $\{f_n(x)\}$.

13.2 解答

1. 设 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. 在收敛域内, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)''-x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n=0$. 比较系数知 $a_2=0, a_{n+2}=\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$, 从而 $a_{3n}=\frac{(3n-2)!!!}{(3n)!}a_0, a_{3n+1}=\frac{(3n-1)!!!}{(3n+1)!}a_1, a_{3n+2}=0$.
2. 设 $g(x)=\arcsin^2 x$, 则 $g'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)(g'(x))^2=4g(x)$. 两边求导, 得 $2(1-x^2)g'(x)g''(x)-2x(g'(x))^2=4g'(x) \Rightarrow (1-x^2)g''(x)-xg'(x)=2$. 两边求 $n-2$ 次导数知 $(1-x^2)g^{(n)}(x)-(2n-3)xg^{(n-1)}(x)-(n-2)^2g^{(n-2)}(x)=0$. 令 $x=0$ 知 $g^{(n)}(0)=(n-2)^2g^{(n-2)}(0)$. 由于 $g^{(1)}(0)=0, g^{(2)}(0)=2$, 从而 $g^{(2n-1)}(0)=0, g^{(2n)}(0)=2^{2n-1}((n-1)!)^2$, 因此 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}x^{2n} \Rightarrow f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}$, 收敛域为 $[-1,1]$.
3. $\ln(1+x+x^2)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$.
4. $f'(x)=\frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{(x-e^{\mathrm{i}\theta})(x-e^{-\mathrm{i}\theta})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{1-e^{\mathrm{i}\theta}x}-\frac{e^{-\mathrm{i}\theta}}{1-e^{-\mathrm{i}\theta}x}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\mathrm{i}n\theta}-e^{-\mathrm{i}n\theta}\right)x^{n-1}\right]=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin(n\theta)x^{n-1}$, 因此 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}x^n$.
5. $\forall f(x)\in C[0,1], \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}_+, \text{s.t.}\exists N\text{次多项式}P_N(x), \forall x\in[0,1], |P_N(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于有理数在实数集中稠密, 因此 $\exists N\text{次有理系数多项式}Q_N(x), \text{s.t.}\forall x\in[0,1], |P_N(x)-Q_N(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 此时 $|Q_N(x)-f(x)|<\varepsilon$.
6. $f_n(x):=f(x)-\frac{1}{2^n}$ 可被多项式逼近, 因此 $\exists P_n(x), \text{s.t.}|P_n(x)-f_n(x)|<\frac{1}{2^{n+2}}$. 这样的 $\{P_n\}$ 满足题意.
7. 记 $\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)=m \Rightarrow \forall k\ge 1, \exists x_k\in[a,b], \text{s.t.} m\le f(x_k)<m+\frac{1}{k}$. 由聚点原理, $\exists$ 子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}, \text{s.t.}\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=x_0\in[a,b]$. 由收敛性, $\exists N>0, \text{s.t.}\forall n>N, f(x_0)-\varepsilon<f_n(x_0)\le f(x_0)$. 从而 $m\le f(x_0)<f_n(x_0)+\varepsilon=\lim\limits_{k\to+\infty}f_n(x_{n_k})\le\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_{n_k})+\varepsilon\le m+\varepsilon$. 令 $\varepsilon\to 0$ 知 $f(x_0)=m$. 对于最大值, 反例是 $f_n(x)=x1_{\{0\le x\le 1-\frac{1}{n}\}}+(n-1)(1-x)1_{\{1-\frac{1}{n}<x\le 1\}}$.
8. 任意固定 $x_0\in[a,b]$, 考察 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $x=x_0$ 处的连续性. 由收敛性, $\forall\varepsilon>0, \exists N>0, \text{s.t.}\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}v_n(x_0)<\frac{\varepsilon}{3}$. 由连续

性, $\exists\delta>0,\text{s.t.}\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$, $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}v_n(x)<\frac{\varepsilon}{3}$, $\left|\sum\limits_{n=1}^{N}[u_n(x)-u_n(x_0)]\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. 从而 $\left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)\right|\le \left|\sum\limits_{n=1}^{N}[u_n(x)-u_n(x_0)]\right|+\left|\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}u_n(x)\right|+\left|\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}u_n(x_0)\right|\le\left|\sum\limits_{n=1}^{N}[u_n(x)-u_n(x_0)]\right|+\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}v_n(x)+\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}v_n(x_0)<\varepsilon$.

9. 当 $0<x\le\dfrac{\sqrt{\pi}}{n}$ 时, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|\sin kx|}{k}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{kx}{k}\le nx=\sqrt{\pi}$.

当 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{n}<x\le\pi$ 时, 记 $K=\lfloor\dfrac{\sqrt{\pi}}{x}\rfloor, S_n=\sum\limits_{k=K+1}^{n}\sin kx$, 则

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|&\le\left|\sum_{k=1}^{K}\frac{\sin kx}{k}\right|+\left|\sum_{k=K+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\le\sqrt{\pi}+\left|\sum_{k=K+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|=\sqrt{\pi}+\left|\sum_{k=K+1}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{k}\right|\\&\le\sqrt{\pi}+\left|\sum_{k=K+1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)S_k\right|+\left|\frac{S_n}{n}\right|\qquad\text{(Abel 变换)}\end{aligned}$$

利用 $|S_n|=\left|\dfrac{\cos\frac{2K+1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\le\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}\le\dfrac{\pi}{x}$, 知

$$\left|\sum_{k=K+1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)S_k\right|+\left|\frac{S_n}{n}\right|\le\frac{\pi}{x}\left[\sum_{k=K+1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{n}\right]=\frac{1}{K+1}\frac{\pi}{x}\le\sqrt{\pi}$$

因此 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{x}\right|\le\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}$.

10. 左边:

$$\begin{aligned}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|&=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{n}\right)^k\right|=\left|\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}\right)\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right|\\&\le\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}\right)\frac{|x|^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!}=e^{|x|}-\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n\end{aligned}$$

右边:

$$\begin{aligned}e^{|x|}-\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n&=\sum_{k=2}^{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\frac{|x|^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!}\\&\le\sum_{k=2}^{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\cdots-\frac{k-1}{n}\right)\right]\frac{|x|^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2n}\frac{|x|^k}{(k-2)!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!}\\&<\frac{x^2}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{x^2}{2n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!}=\frac{x^2}{2n}e^{|x|}\end{aligned}$$

11. 原级数一致收敛, 因此连续. 考虑 $F_x(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^nh},\forall x\in[0,1]\backslash\mathbb{Q}$. 由于 $|\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^nh}|\le\frac{|(x+h-r_n)-(x-r_n)|}{3^n|h|}=\frac{1}{3^n}$, 因此 $F_x(h)$ 在 $h\in[-x,1-x]$ 上一致收敛, 从而 $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}F_x(h)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{h\to0}\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^nh}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{3^n}$. 若 $x=r_k\in\mathbb{Q}$, 类似可知 $\left[\sum\limits_{n=1,n\ne k}^{+\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}\right]'\Bigg|_{x=r_k}=\sum\limits_{n=1,n\ne k}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{3^n}$, 但是 $\frac{|x-r_k|}{3^k}$ 在 $x=r_k$ 处不可导, 因此 $f(x)=\sum\limits_{n=1,n\ne k}^{+\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}+\frac{|x-r_k|}{3^k}$ 在 $x=r_k$ 处不可导.

12. $f_n(x)=\frac{1}{n}\text{Dirichlet}(x)$.

14 第 14 次习题课: Fourier 级数的基本概念与性质

14.1 问题

1. 求函数 $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ 的 Fourier 级数.

2. 求函数 $f(x) = ax1_{x<0} + bx1_{x>0}, -\pi \le x \le \pi$ 的 Fourier 级数.

3. 利用 $f(x) = e^x, -\pi \le x \le \pi$ 的 Fourier 级数计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

4. 2π 周期函数 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, 且 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 定义 $F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$. 利用 $F(x)$ 的 Fourier 级数证明条件弱化版本的 Parseval 等式.

5. 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积, $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. 证明 $f(x)\sin x \sim \frac{a_0 \sin x}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + \sin nx)\sin x$.

6. 将定义在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的可积和绝对可积函数 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 上, 使得 $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_{2n-1} \sin(2n-1)x$.

7. $f(x) \in C^1[-\pi, \pi]$, 证明其 Fourier 系数满足 $a_n = o(\frac{1}{n}), b_n = O(\frac{1}{n})$.

8. 2π 周期函数 $f(x)$ 满足 $\exists \alpha \in (0, 1], \text{s.t.} |f(x) - f(y)| \le L|x-y|^\alpha$. 证明 $a_n = O(\frac{1}{n^\alpha}), b_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$.

9. 连续函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上分段可导, $f'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上可积且平方可积. 证明若条件 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0$ 或 $f(0) = f(\pi) = 0$ 之中有一个成立, 就有 $\int_0^\pi [f'(x)]^2 \mathrm{d}x \ge \int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x$.

10. 给定收敛于 0 的正数列 $\{\varepsilon_n\}$, 构造连续函数 $f(x)$ 使得其 Fourier 系数对于无穷多个 n 满足 $|a_n| + |b_n| > \varepsilon_n$.

11. $f(x)$ 是区间 $[0, 2\pi]$ 上的凸函数, 证明 $\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$.

12. 2π 周期函数 $f(x) \in R[-\pi, \pi]$ 且 $|f(x)| \le M$. 记 $S_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数前 n 阶和, 证明 $|S_n(x)| \lesssim M \ln n$.

14.2 解答

1. $T = 1$, 因此设 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2n\pi x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2n\pi x)$. $a_0 = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1, a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(2n\pi x)\mathrm{d}x = 0, b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(2n\pi x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}$, 因此 $f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n}$.

2. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\pi, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}(a-b), b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{n}$, 因此 $f(x) \sim \frac{b-a}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + (a+b)\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

3. 直接算. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \mathrm{d}x = \frac{2\sinh \pi}{\pi}, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \mathrm{d}\sin nx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\mathrm{d}x = -\frac{b_n}{n}, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \mathrm{d}\cos nx = \frac{(-1)^{n-1}(e^\pi - e^{-\pi})}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n-1}2\sinh\pi}{n\pi} + \frac{a_n}{n} \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n 2\sinh\pi}{(n^2+1)\pi}$, $b_n = \frac{(-1)^{n-1}2n\sinh\pi}{(n^2+1)\pi} \Rightarrow e^x \sim \frac{\sinh \pi}{\pi}\left\{1 + 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx - n\sin nx)\right\}$. 由于 Fourier 级数收敛到 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, 因此令 $x = \pi$, 得到 $\cosh\pi = \frac{\sinh \pi}{\pi}(1 + 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi\coth\pi - 1}{2}$.

4. 由逐点收敛性, 知

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos n(x+t) + b_n \sin n(x+t)]\right\}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n(\cos nx\cos nt - \sin nx\sin nt) + b_n(\sin nx\cos nt + \cos nx \sin nt)]\right\}\mathrm{d}t \\
&= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2\cos nx - a_nb_n\sin nx + b_na_n\sin nx + b_n^2\cos nx) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx
\end{aligned}
$$

其中积分求和可交换是因为对于二阶连续可导函数, $a_n = o(\frac{1}{n^2}), b_n = o(\frac{1}{n^2})$, 因此一致收敛. 令 $x = 0$, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$, 此即 Parseval 等式.

5. $\frac{a_0 \sin x}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)\sin x = \frac{a_0\sin x}{2} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\{a_n[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] + b_n[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x]\} = \frac{b_1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{b_{n+1} - b_{n-1}}{2}\cos nx + \frac{a_{n-1} - a_{n+1}}{2}\sin nx\right)$. $f(x)\sin x : a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x = b_1, a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]\mathrm{d}x = \frac{b_{n+1} - b_{n-1}}{2}, b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x \sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x]\mathrm{d}x = \frac{a_{n-1} - a_{n+1}}{2}$. 两者系数相等.

6. $a_n=0\Rightarrow$ 奇延拓. 另一方面, $0=b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\pi-x)(-\sin 2nt)(-\mathrm{d}t)\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)-f(\pi-x)]\sin 2nx\mathrm{d}x\Rightarrow f(x)=f(\pi-x)$. 因此所求延拓为 $F(x)=\begin{cases}f(x), & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ f(\pi-x), & \frac{\pi}{2}<x<\pi\\ 0, & x=0,\frac{\pi}{2}\\ -F(-x), -\pi<x<0 & \end{cases}$.

7. $|na_n|=|\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x|=|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\mathrm{d}\sin nx|=|-\int_{-\pi}^\pi f'(x)\sin nx\mathrm{d}x|=|b_n'|\to 0$.
$|nb_n|=|\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x|=|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\mathrm{d}\cos nx|=\frac{1}{\pi}|(-1)^n[f(\pi)-f(-\pi)]-\int_{-\pi}^\pi f'(x)\cos nx\mathrm{d}x|\le\frac{|f(\pi)-f(-\pi)|}{\pi}+|a_n'|$.

8. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}f(x+\frac{\pi}{n})\cos(nx+\pi)\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x+\frac{\pi}{n})\cos nx\mathrm{d}x$. 两式取平均得 $|a_n|=|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})]\cos nx\mathrm{d}x|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi|f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})|\cdot|\cos nx|\mathrm{d}x\le\frac{1}{2\pi}L(\frac{\pi}{n})^\alpha\int_{-\pi}^\pi|\cos nx|\mathrm{d}x\le L(\frac{\pi}{n})^\alpha\Rightarrow a_n=O(\frac{1}{n^\alpha})$. 同理 $b_n=O(\frac{1}{n^\alpha})$.

9. (1) 若 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$, 将 $f(x)$ 偶延拓, 则 $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx\Rightarrow f'(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-na_n)\sin nx$. 从而 $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(na_n)^2\ge\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x$. (2) 若 $f(0)=f(\pi)=0$, 类似可将 $f(x)$ 奇延拓, 则 $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx\Rightarrow f'(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(nb_n)\cos nx$. 从而 $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(nb_n)^2\ge\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x$.

10. 令 $n_0=0$, 则由收敛性, $\exists n_k>n_{k-1}\in\mathbb{N}_+,\text{s.t.}\varepsilon_{n_k}<\frac{1}{k^2}$. 从而定义 $f(x)=\frac{1}{k^2}\cos n_kx$, 则 $|a_{n_k}|+|b_{n_k}|=\frac{1}{k^2}>\varepsilon_{n_k},\forall k$.

11. 利用拆分积分区间的方法.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x&=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t+\int_{2k\pi+\frac{\pi}{2}}^{2k\pi+\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t+\int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t+\int_{2k\pi+\frac{3}{2}\pi}^{2k\pi+2\pi}f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t\right]\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t-\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{4k\pi+\pi-t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t-\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{t+\pi}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t+\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{4k\pi+2\pi-t}{n}\right)\cos t\mathrm{d}t\right]\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\left[f\left(\frac{t}{n}\right)-f\left(\frac{4k\pi+\pi-t}{n}\right)-f\left(\frac{t+\pi}{n}\right)+f\left(\frac{4k\pi+2\pi-t}{n}\right)\right]\cos t\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

当 $t\in[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}]$ 时, $\dfrac{t}{n}\le\dfrac{4k\pi+\pi-t}{n}\le\dfrac{t+\pi}{n}\le\dfrac{4k\pi+2\pi-t}{n}$ 且 $\dfrac{t}{n}+\dfrac{4k\pi+2\pi-t}{n}=\dfrac{4k\pi+\pi-t}{n}+\dfrac{t+\pi}{n}$, 由 $f(x)$ 凸性知 $f\left(\dfrac{t}{n}\right)-f\left(\dfrac{4k\pi+\pi-t}{n}\right)-f\left(\dfrac{t+\pi}{n}\right)+f\left(\dfrac{4k\pi+2\pi-t}{n}\right)\ge 0$, 因此 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\ge 0$.

12. 由课上所述结论,

$$\begin{aligned}
|S_n(x)|&=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|f(x+t)+f(x-t)|\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\
&\le\frac{M}{\pi}\int_0^\pi\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\le\frac{M}{\pi}\int_0^\pi\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\frac{t}{\pi}}\mathrm{d}t\le M\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\\
&=M\int_0^1\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t+M\int_1^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\le M\int_0^1 1\mathrm{d}t+M\int_1^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\
&=M\left[1+\ln\pi+\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow|S_n(x)|\lesssim M\ln n$$

15 第 15 次习题课: Fourier 级数的其他收敛性

15.1 问题

1. 2π 周期函数 $f(x)\in C^2(\mathbb{R})$, 满足 $f''(x)+\lambda f(x)=g(x)$, 其中 $g(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\lambda\ne n^2,n\in\mathbb{N}$. 试求 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

2. 利用 $f(x)=x^2, x\in[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

3. 利用 $f(x)=1_{|x|<a}, x\in[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}$.

4. $f(x)\in R[-\pi,\pi]$, 其 Fourier 系数全为 0, 证明 $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=0$.

5. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2e^{-n}\sin nx$, 证明 $\max\limits_{0\le x\le 2\pi}|f(x)|\ge\frac{2}{\pi e}$.

6. 数列 $\{b_n\}$ 单调递减收敛于 0, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛, 证明 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积.

7. 证明余元公式 $\mathrm{Beta}(p,1-p):=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}(0<p<1)$, 并计算积分 $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\mathrm{d}x$ 和 $I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$. (提示: 可参考教材习题十二第 12 题)

15.2 解答

1. 我们设 $f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$, 则 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n\beta_n\cos nx-n\alpha_n\sin nx)$, $f''(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-n^2\alpha_n\cos nx-n^2\beta_n\sin nx)$. 从而 $\alpha_0=a_0,(\lambda-n^2)\alpha_n=a_n,(\lambda-n^2)\beta_n=b_n\Rightarrow\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{\lambda-n^2}\cos nx+\frac{b_n}{\lambda-n^2}\sin nx\right)$.

2. $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n4}{n^2}\cos nx$. 由 Parseval 等式有 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\frac{2\pi^2}{3})^2+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

3. $f(x)\sim\frac{a}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin na}{n\pi}\cos nx$. 由 Parseval 等式有 $\frac{2a}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2a^2}{\pi^2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4\sin^2 na}{n^2\pi^2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{a(\pi-a)}{2}\Rightarrow$
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{a(\pi-a)}{2}$.

4. 由 Parseval 等式知 $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=0$.

5. 显然 $f(x)\in C(\mathbb{R})$. 由 Parseval 等式有 $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^4e^{-2n}$. 而 LHS $\le\frac{1}{\pi}2\pi\max\limits_{x\in[0,2\pi]}f^2(x)\le 2\left(\max\limits_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|\right)^2$, RHS $\ge\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-2n}=\frac{e^{-2}}{1-e^{-2}}\ge e^{-2}$, 因此 $\max\limits_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|\ge\frac{1}{\sqrt{2}e}\ge\frac{2}{\pi e}$.

6. 由 Dirichlet 判别法知 $f(x)$ 在 $x\ne 0$ 时连续, 因此只需讨论当 $x=0$ 为瑕点时 $|f|$ 在 $[0,\pi]$ 上的广义可积性. 注意到 $\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}}|f(x)|\mathrm{d}x$, 而当 $\frac{\pi}{k+1}\le x\le\frac{\pi}{k}$ 时, $|f(x)|\le\left|\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\sin ix\right|+\left|\sum\limits_{i=k+1}^{+\infty}b_i\sin ix\right|\overset{\text{Abel 变换}}{\le}S_k+\frac{b_{k+1}}{|\sin\frac{x}{2}|}\le S_k+\frac{b_{k+1}}{|\frac{x}{\pi}|}\le S_k+(k+1)b_{k+1}\le S_k+(k+1)b_k\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}}|f(x)|\mathrm{d}x\le\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k(k+1)}+\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}=\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\sum\limits_{i=1}^{k}b_i+\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}=\pi\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\sum\limits_{k=i}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}\le\pi\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i}+\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}\le 2\pi\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}<+\infty$. 因此积分 $\int_0^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.

7. 第一个等式: $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\mathrm{d}x\overset{x=\frac{t}{1+t}}{=}\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}}(1+t)^p\frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

第二个等式: 利用变量替换 $x=\dfrac{1}{t}$ 有 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{-p}}{1+x}\mathrm{d}x\Rightarrow\mathrm{Beta}(p,1-p)=\int_0^1\frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\mathrm{d}x$. 将 $\dfrac{1}{1+x}$ 展成幂级数,

$$\begin{aligned}\mathrm{Beta}(p,1-p)&=\lim_{r\to1-0}\int_0^r\frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\mathrm{d}x=\lim_{r\to1-0}\int_0^r\left[\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx^{k+p-1}+\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx^{k-p}\right]\mathrm{d}x\\&=\lim_{r\to1-0}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+p}r^{k+p}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k-p+1}r^{k-p+1}\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+p}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k-p+1}\\&=\frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k+p}+\frac{1}{p-k}\right)=\frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{2p}{p^2-k^2}\end{aligned}$$

由于 $\cos px$ 的 Fourier 级数 $\cos px=\dfrac{\sin p\pi}{\pi}\left[\dfrac{1}{p}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{2p}{p^2-k^2}\cos kx\right]$ 在 $|x|\le\pi$ 处处收敛, 令 $x=0$ 得 $\mathrm{Beta}(p,1-p)=\dfrac{1}{p}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{2p}{p^2-k^2}=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$.

先求 I_1. $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\mathrm{d}x \overset{t=\frac{1}{1+x^\beta}}{=} \frac{1}{\beta}\int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}(1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta}\mathrm{Beta}(1-\frac{\alpha+1}{\beta},\frac{\alpha+1}{\beta})=\frac{1}{\beta}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha+1}{\beta}\pi}$.

再求 I_2. 令 $p=\frac{x}{\pi},0<x<\pi$, 得到 $\frac{\pi}{\sin x}=\frac{\pi}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x\pi}{x^2-n^2\pi^2}$, 即 $1=\frac{\sin x}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}$. 两边从 0 到 π 积分有 $\pi=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^\pi\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}x$. 从而

$$
\begin{aligned}
I_2&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_0^\pi\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}\mathrm{d}t+\int_0^\pi\frac{\sin[t-(n+1)\pi]}{t-(n+1)\pi}\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^\pi\frac{2t\sin t}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t\right]=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

16 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 23 级本科生陈全同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 春数学分析 II 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.