

泛函分析

北京大学 龚诚欣

<https://wqgcx.github.io/>

0 简介

- 变分问题、泛函的极值或求值问题、微分方程、积分方程、物理问题
- 无穷维空间（一般是由函数构成的空间）上的极值理论：函数 \rightarrow 泛函，映射 \rightarrow 算子
- 无穷维空间的解析几何
- 有限 \rightarrow 无限

1 度量空间

1.1 压缩映像原理

定义： H ：非空集合， $\rho: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ，称 (H, ρ) 是度量空间（距离空间），若 ρ 满足：
1° $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$; 2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; 3° $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ 。

定义： $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in (H, \rho)$ ，如果存在 $x_0 \in H$ 使得 $\lim \rho(x_0, x_n) = 0$ ，则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 x_0 ，记为 $\lim x_n = x_0$ 或 $x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow +\infty$ 。

定义： $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N, \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ ，则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个基本列（Cauchy 列）。

定义： $E \subset (H, \rho)$ ，若 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ 且 $x_n \rightarrow x_0$ 有 $x_0 \in E$ ，则称 E 为闭集。若 (H, ρ) 的所有 Cauchy 列都是收敛列，则称完备。

定义：映射 $T: (H, \rho) \rightarrow (H, \rho)$ ，若 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in H, x_n \rightarrow x_0 \in H$ ，有 $\rho(T(x_n), T(x_0)) \rightarrow 0$ ，即 $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ ，则称 T 连续。

定义：映射 $T: (H, \rho) \rightarrow (H, \rho)$ ，若存在 $\alpha \in (0, 1)$ ，s.t. $\forall x, y \in H, \rho(T(x), T(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$ ，则称 T 为压缩映射。

定理：（Banach 不动点定理/压缩映像原理） (H, ρ) 完备， $T: (H, \rho) \rightarrow (H, \rho)$ 为压缩映射，则 T 在 H 上有唯一的不动点。

注记：条件可改为：

- 1° $\rho(Tx, Ty) \leq \rho(x, y)$ 且等号当且仅当 $x = y$ （次压缩映射）；
- 2° T 的像是紧集。

“紧集”条件不可去，如考虑 $Tx = \pi/2 + x - \arctan x$ 。

应用： $F(t, x)$ 关于 x 在 0 附近一致 Lipschitz 连续，即 $\exists \delta > 0, L > 0, \forall t, \forall x, y \in B(0, \delta)$ ，

$|F(t, x) - F(t, y)| \leq L|x - y|$ ，则存在 $h_0 > 0$ ，当 $h < h_0$ 时，方程 $\frac{dx}{dt} = F(t, x), x(0) = \xi$

（初值问题）在 $C[-h, h]$ 上有唯一解。

应用：（隐函数存在定理） $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足 1° $f(x_0, y_0) = 0, (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$;

2° $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(U \times V)$ ，其中 $(x_0, y_0) \in U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$; 3° $\det(\frac{\partial f}{\partial y})|_{(x_0, y_0)} \neq 0$ ；则存

在 (x_0, y_0) 的邻域 $U_0 \times V_0 \subset U \times V$ 以及唯一的连续函数 $u: U_0 \rightarrow V_0$ s.t.: $1^\circ f(x, u(x))=0, x \in U_0$; $2^\circ u(x_0)=y_0$ 。

Fredholm 第二类积分方程: $x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x(s)ds$, λ 充分小;

1° 当 $f(t) \in C[a, b]$, $k(t, s) \in C([a, b] \times [a, b])$ 时, x 在 $C[a, b]$ 中有唯一解;

2° 当 $f(t) \in L^2[a, b]$, $k(t, s) \in L^2([a, b] \times [a, b])$ 时, x 在 $L^2[a, b]$ 中有唯一解。

1.2 完备化

定义: $(H, \rho), (H_1, \rho_1)$ 是距离空间, 若存在满射 $f: H \rightarrow H_1$ 使得 $\rho(x, y) = \rho_1(fx, fy)$; 则称 f 为等距同构映射。若 $(H, \rho) \rightarrow (H_1, \rho_1) \subset (H_2, \rho_2)$, 则称 (H, ρ) 等距嵌入 (H_2, ρ_2) 。

定义: (H, ρ) 是距离空间, $E \subset H$ 。若 $\forall x \in H$, 存在 $\{x_n\} \subset E$ 使得 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$, 则称 E 是 H 的稠密子集。

定义: 在等距同构意义下含有 (H, ρ) 的最小的完备度量空间称为 (H, ρ) 的完备化。

命题: $(H, \rho) \subset (H_1, \rho_1)$, 其中 $\rho = \rho_1|_{H \times H}$, H 在 H_1 中稠密, (H_1, ρ_1) 完备, 则 (H_1, ρ_1) 是 (H, ρ) 的完备化空间。

定理: (完备化定理) 每一个度量空间都有在等距同构意义下唯一的完备化空间。

1.3 列紧集

定义: (H, ρ) 是距离空间, A 是 H 的一个子集, A 称为是有界的, 如果 $\exists x_0 \in H$ 及 $r > 0$, 使得 $A \subset B(x_0, r)$ 。

定义: (H, ρ) 是距离空间, $E \subset H$ 。若 E 中任意点列有收敛子列 (极限在 H 中), 称 E 列紧; 若 E 中任意点列有收敛子列 (极限在 E 中), 称 E 自列紧; 若 (H, ρ) 是列紧的, 称为列紧空间。

注记: 列紧空间的 (闭) 子集是 (自) 列紧的; (H, ρ) 列紧, 则完备。

定义: (H, ρ) 是距离空间, $M \subset H$ 。若 $N \subset M$ 满足 $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in M, \exists y \in N$ 使得 $\rho(x, y) < \varepsilon$, 则称 N 为 M 的一个 ε 网; 若 N 是有限集, 则称为有穷 ε 网; 若 $\forall \varepsilon > 0$ 存在 M 的有穷 ε 网, 则称 M 完全有界。

注记: \mathbb{R}^n 中有界 \Leftrightarrow 完全有界。

定理: (Hausdorff) (H, ρ) 是距离空间, $M \subset H$ 。则: $1^\circ M$ 列紧 \Rightarrow 完全有界; $2^\circ M$ 完全有界 + H 完备 / M 闭 $\Rightarrow M$ 列紧。

定理: (H, ρ) 是距离空间, $M \subset H$ 。则 M 紧 \Leftrightarrow 自列紧 (列紧 + 闭)。

定义: (H, ρ) 是距离空间, 若有可数的稠密子集, 则称可分。

注记: 完全有界 \Rightarrow 可分。

考虑 (M, ρ) 紧度量空间, $C(M) = \{u | M \rightarrow \mathbb{R} \text{ 连续}\}$, $d(u, v) = \max\{|u(x) - v(x)|, x \in M\}$, 则 $(C(M), d)$ 完备。

定义: 设 $F \subset C(M)$ 。

$1^\circ F$ 一致有界: $\exists M_0 > 0$, 使得 $\forall f \in F, \forall x \in M$, 成立 $|f(x)| \leq M_0$;

$2^\circ F$ 等度连续: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall f \in F, \forall x, x' \in M$ 满足 $\rho(x, x') < \delta$, 成立 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ 。

定理: (Arzela-Ascoli) (M, ρ) 紧度量空间, $F \subset C(M)$ 列紧 $\Leftrightarrow F$ 一致有界且等度连续。

1.4 线性赋范空间

引入: 考虑线性度量空间 (H, ρ) , K 是数域, 则希望有:

1° 加法对 ρ 连续, 即 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0, \rho(y_n, y) \rightarrow 0$, 则 $\rho(x_n + y_n, x + y) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho$ 有平移不变性, 即 $\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$;

2° 数乘对 ρ 连续, 即 i) $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, 则 $\forall a \in K, \rho(ax_n, ax) \rightarrow 0$; ii) $a_n \rightarrow a \in K$, 则 $\forall x$

$\in H, \rho(a_n x, ax) \rightarrow 0$ 。

设 $p: H \rightarrow \mathbb{R}, p(x) := \rho(x, 0)$, 则由距离公理可得函数 p 的条件。

定义: H 是线性空间, 函数 $\|\cdot\|$ 满足:

1° $\forall x \in H, \|x\| \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $x=0$; 2° $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

3° $\forall x \in H, \|-x\| = \|x\|$; 4° $\lim_{a_n \rightarrow 0} \|a_n x\| = 0, \lim_{\|x_n\| \rightarrow 0} \|ax_n\| = 0$;

则称 $\|\cdot\|$ 为 H 的一个准范数。以 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ 定义 $x_n \rightarrow x$, 则称 H 为 F^* 空间; 完备的 F^* 空间称为 F 空间。

注记: 准范数可诱导度量 $\rho(x, y) = \|x - y\|$, 满足平移不变性、加法连续性和数乘连续性。

定义: H 是线性空间, 函数 $\|\cdot\|$ 满足:

1° $\forall x \in H, \|x\| \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $x=0$; 2° $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

3° $\forall a \in \mathbb{K}, x \in H, \|ax\| = |a| \cdot \|x\|$;

则称 $\|\cdot\|$ 为 H 的一个范数。此时称 H 为 B^* 空间; 完备的 B^* 空间称为 B 空间。

定义: H 是线性空间, 映射 $p: H \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

1° $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (次可加性); 2° $p(ax) = a \cdot p(x) (a > 0)$ (正齐次性);

则称 p 为次线性泛函。若 p 还满足 $p(x) \geq 0$ 且 $p(ax) = |a| \cdot p(x)$, 则称 p 为半范数。

定义: 对于线性空间 H 上的范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$:

1° 若 $\|x_n\|_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\|_2 \rightarrow 0$, 则称 $\|\cdot\|_1$ 比 $\|\cdot\|_2$ 强;

2° 若 $\|x_n\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x_n\|_2 \rightarrow 0$, 则称 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价。

命题: 1° $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强 $\Leftrightarrow \exists C > 0, \forall x \in H, \|x\|_1 \leq C \|x\|_2$;

2° $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价 $\Leftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0, \forall x \in H, C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2$ 。

定理: H 是有限维线性空间, 则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 一定等价 (与欧式范数等价)。

推论: 有限维 B^* 空间一定是 B 空间; B^* 空间的有限维子空间一定为闭子空间。

推论: $(H, \|\cdot\|)$ 是有限维 B^* 空间, p 为次线性泛函。若 $p(x) \geq 0$ 且 $p(x) = 0$ 当且仅当 $x=0$, 则 $\exists C_1, C_2 > 0$, 使得 $C_1 \|x\| \leq p(x) \leq C_2 \|x\|$ 。

定义: $(H, \|\cdot\|)$ 是 B^* 空间, 若 $\forall x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \forall a, b > 0$ 且 $a+b=1$, 有 $\|ax+by\| < 1$ 成立, 则称 $(H, \|\cdot\|)$ 严格凸。

定理: (最佳逼近问题) $(H, \|\cdot\|)$ 是 B^* 空间, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 线性无关。 $\forall x \in H$, 存在 $x_0 \in \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\} := M$, s.t. $\|x - x_0\| = \min\{\|x - y\| \mid y \in M\}$, 且当 $(H, \|\cdot\|)$ 严格凸时唯一。

定理: B^* 空间 $(H, \|\cdot\|)$ 有限维 \Leftrightarrow 单位球面列紧。

引理: (F.Riesz 引理) 如果 H_0 是 B^* 空间 H 的一个真闭子空间, 那么 $\forall 0 < \varepsilon < 1$, $\exists y \in H$ s.t. $\|y\| = 1$ 且 $\|y - x\| \geq 1 - \varepsilon, \forall x \in H_0$ 。

1.5 凸集与不动点

回忆: (Brouwer 不动点定理) $B \subset \mathbb{R}^n$ 是闭单位球, $T: B \rightarrow B$ 连续, 则存在 $x \in B$ s.t. $Tx = x$ 。

定义: H 是线性空间, $E \subset H$,

1° $\forall x, y \in E, \lambda \in [0, 1]$, 有 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in E$, 则称 E 为凸集;

2° 若 $0 \in E$ 且 $\forall x \in H, \exists \lambda > 0$ s.t. $x/\lambda \in E$, 则称 E 为吸收凸集;

3° $\forall x \in E$, 有 $-x \in E$, 则称 E 为对称凸集;

4° 若 $K = \mathbb{C}, \forall x \in E, \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$, 有 $\alpha x \in E$, 则称 E 为均衡凸集。

定义: H 是线性空间, $E \subset H$, H 中包含 E 的最小凸集称为凸包, 记为 $\text{Co}(E)$ 。

$\text{Co}(E) = \{\sum \lambda_i x_i \mid \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in E\}$ 。

定义: H 是线性空间, 凸集 $E \subset H$, $0 \in E$, $p(x) = \inf\{\lambda > 0 | x/\lambda \in E\}$ 称为 Minkowski 泛函. $p(x) \in [0, +\infty]$, 满足正齐次性、次线性性. (H, R) : 若 E 吸收, 则 $p(x)$ 是实值函数; 若 E 对称, 则 $p(x)$ 满足齐次性; 若 E 吸收且对称, 则 $p(x)$ 为半模; 若 E 还是有界集, 则 $p(x)$ 为模. (H, C) : 若 E 吸收且均衡, 则 $p(x)$ 为半模.

命题: H 是 B^* 空间, 闭凸集 $E \subset H$, $0 \in E$, 则

1° $E = \{x \in H: p(x) \leq 1\}$; 2° $p(x)$ 下半连续; 3° 若 0 为内点, 则 E 吸收且 $p(x)$ Lipschitz 连续.

推论 1: $E \subset R^n$ 是紧凸子集, 则存在 $m \leq n$, 使得 E 同胚于 R^m 中的单位球.

推论 2: $E \subset R^n$ 是紧凸子集, $T: E \rightarrow E$ 连续, 则存在 x s.t. $Tx = x$.

推论 3: H 是 B^* 空间, 紧凸子集 $E \subset H$, $T: E \rightarrow E$ 连续, 则存在 x s.t. $Tx = x$.

定理: (Schauder 不动点定理) H 是 B^* 空间, 闭凸子集 $E \subset H$, $T: E \rightarrow E$ 连续且 $T(E)$ 列紧, 则存在 x s.t. $Tx = x$.

定义: H 是 B^* 空间, $E \subset H$, $T: E \rightarrow H$ 连续且将有界集映成列紧集, 则称 T 为紧映射.

推论: H 是 B^* 空间, 有界闭凸子集 $E \subset H$, 若 $T: E \rightarrow E$ 紧, 则存在 x s.t. $Tx = x$.

定理: (Caratheodory) $f(t, x) \in C[-h, h] \times [\xi - b, \xi + b]$, $M = \max|f(t, x)|$, 则当 $h < b/M$

时, 方程 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(0) = \xi \end{cases}$ 在 $[-h, h]$ 上有解.

1.6 内积空间

定义: H 是线性空间, $a(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow K$ 满足 1° $a(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 a(x_1, y) + \alpha_2 a(x_2, y)$; 2° $a(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 a(x, y_1) + \bar{\alpha}_2 a(x, y_2)$, 则称为共轭双线性函数. 特别地, $q(x) = a(x, x)$ 称为由 a 诱导的二次型.

命题: $q(x) \in R$, $\forall x \in H \Leftrightarrow a(x, y) = \overline{a(y, x)}$.

定义: H 上的共轭双线性函数 $a(\cdot, \cdot)$ 满足: 1° $(x, y) = \overline{(y, x)}$; 2° $(x, x) \geq 0$ 且等号当且仅当 $x = 0$ 成立; 则称 $(H, (\cdot, \cdot), K)$ 为内积空间. 特别地, 若 H 完备, 则称为 Hilbert 空间.

性质: 令 $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, 满足:

1° Cauchy-Schwarz 不等式: $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, 取等号当且仅当线性相关;

2° $(H, \|\cdot\|)$ 构成 B^* 空间;

3° (\cdot, \cdot) 关于 $\|\cdot\|$ 是一个二元连续函数;

4° 内积空间一定严格凸;

5° 平行四边形等式: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$;

6° 内积可以被平行四边形等式诱导.

定义: $(H, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间,

1° 若 $(x, y) = 0$, 称正交, 记为 $x \perp y$;

2° $\theta = \arccos[(x, y)/(\|x\| \cdot \|y\|)]$;

3° $M \subset H$, $M^\perp := \{x \in H | \forall y \in M, (x, y) = 0\}$;

4° $x = y + z$ 且 $y \perp z$, 则 $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$;

5° $\forall n, x_n \perp y, x_n \rightarrow x$, 则 $(x, y) = 0$;

6° M^\perp 是闭线性子空间.

定义: H 是内积空间, $S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$,

1° 若 $\forall \alpha\neq\beta, e_\alpha\perp e_\beta$, 称 S 为正交集;

2° 若正交集还满足 $\|e_\alpha\|=1$, 称 S 为规范正交集;

3° 若 $S^\perp=\{0\}$, 称 S 为完备正交集;

4° S 正交规范且 $\forall x\in H, x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$, 则称 S 为一个基。

引理: (Bessel 不等式) H 是内积空间, $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 规范正交集, 则 $\forall x\in H, \sum_{\alpha\in A} |(x,e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$ 。

推论: (收敛性) H 是 Hilbert 空间, $S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 规范正交集, 则 $\forall x, \sum_{\alpha\in A} (x,e_\alpha)e_\alpha \in H$, 且 $\|x - \sum_{\alpha\in A} (x,e_\alpha)e_\alpha\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in A} |(x,e_\alpha)|^2$ 。

注记: 若 A 是可数集, 称 $\sum_{\alpha=1}^{+\infty} (x,e_\alpha)e_\alpha$ 称为 Fourier 级数。

命题: 非零的内积空间 H 中有完备正交集。

定理: H 是 Hilbert 空间, S 是规范正交集, 则以下等价:

1° S 是完备的;

2° $\forall x\in H, \|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |(x,e_\alpha)|^2$;

3° S 是一个基;

4° $(x,y) = \sum_{\alpha\in A} (x,e_\alpha)\overline{(y,e_\alpha)}$ 。

定义: Hilbert 空间 $(H_1,(\cdot,\cdot)_1), (H_2,(\cdot,\cdot)_2)$, 线性同构 $T:H_1\rightarrow H_2$ 保持内积不变, 则称 $(H_1,(\cdot,\cdot)_1)$ 和 $(H_2,(\cdot,\cdot)_2)$ 同构。

定理: H 是 Hilbert 空间,

1° H 可分 $\Leftrightarrow H$ 有至多可数的规范正交基 S ;

2° 若 S 元素个数有限, 则 $H\sim K^n$;

3° 若 S 元素可数, 则 $H\sim l^2$ 。

定理: H 是 Hilbert 空间, $M\subset H$ 是闭凸集, 则 $\forall x\in H$, 在 M 中存在唯一的最佳逼近元。

定理: H 是 Hilbert 空间, $M\subset H$ 是闭凸集, $\forall y\in H, x_0$ 为最佳逼近元 $\Leftrightarrow \forall x\in H, \operatorname{Re}(y-x_0, x_0-x) \geq 0$ 。

定理: (投影定理) M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间, 则 $\forall x\in H$, 存在 M 中唯一的投影, 即 $\exists x_0\in M, y\in M^\perp$, 使得 $x=x_0+y$ 。即是 $M=H\oplus H^\perp$ 。

推论: M 为 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间, 则 $(M^\perp)^\perp=M$ 。

2 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子的概念

定义: X, Y 是线性空间, $T:D\subset X\rightarrow Y$, 满足 $\forall x,y\in D, \alpha,\beta\in K, T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$, 则称 T 为 X 到 Y 的线性算子。特别地, 若 $Y=\mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} , 则称为实或复线性泛函。

$D(T)=D$ 称为定义域, $R(T)=\{Tx|x\in D\}$ 称为值域, $N(T)=\{x\in X|Tx=0\}$ 称为核。

定义: X, Y 是 F^* 空间, $D(T)\subset X, T:D(T)\rightarrow Y$, 若 $\forall \{x_n\}\subset D(T), x_n\rightarrow x\in D(T)$,

有 $Tx_n \rightarrow Tx_0$, 则称 T 在 x_0 连续。

注记: 若 T 为线性算子, 则 T 在 $x_0 \in D(T)$ 连续 $\Leftrightarrow T$ 在 $D(T)$ 内任意点连续。

定义: X, Y 是 B^* 空间, 线性算子 $T: X \rightarrow Y$, 若存在 $M \geq 0$ 使得 $\forall x \in X, \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$, 则称 T 为有界线性算子 (把有界集映成有界集)。

定义: 记 $\|T\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y$, 称为 T 的范数。

定义: 记 $L(X, Y)$ 为所有 X 到 Y 的有界线性算子集合。特别地, 记 $L(X) = L(X, X)$, $X^* = L(X, K)$ 。

命题: X, Y 是 B^* 空间, $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, 则 T 有界 $\Leftrightarrow T$ 连续。

定理: X 是 B^* 空间, Y 是 B 空间, $\forall T_1, T_2 \in L(X, Y)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, 定义 $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(x) = \alpha_1 T_1 x + \alpha_2 T_2 x \in L(X, Y)$, 则 $L(X, Y)$ 按算子范数 $\|\cdot\|$ 构成 B 空间。

2.2 Riesz 定理及其应用

命题: X 是 Hilbert 空间, $y \in X$, 定义 $f_y: x \rightarrow (x, y)$, 则 $f_y \in X^*$ 且 $\|f_y\| = \|y\|$ 。

定理: (Riesz) X 是 Hilbert 空间, $\forall f \in X^*$, 存在唯一 $y_f \in X$, 使得 $f(x) = (x, y_f)$, 且 $\|f\| = \|y_f\|$ 。

推论: f 为 $L^2[a, b]$ 上的有界线性泛函, 则 $\exists v \in L^2[a, b]$, 对 $\forall u \in L^2$, $f(u) = \int_a^b u \bar{v} dt$ 。

应用: (Laplace 方程的 Dirichlet 问题) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} -\Delta u = f(x), x \in \Omega \\ u = g(x), x \in \partial\Omega \end{cases}$ 。不妨设 $g=0$,

否则 $\forall g$ 延拓为 Ω 上的一个函数 u_0 , 令 $v = u - u_0$, 则 $\begin{cases} -\Delta v = f(x) + \Delta u_0, x \in \Omega \\ v = 0, x \in \partial\Omega \end{cases}$ 。

定义: $H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0, |\nabla u| \in L^2(\Omega)\}$ 。

命题: $H_0^1(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 按内积 $\langle u, v \rangle_1 = \int \nabla u \cdot \nabla v dx$ 。

定理: (Poincare 不等式) $\sum_{|\alpha| < m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \leq C(\Omega, m) \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx$ 。特别地,

当 $m=1$ 时成立 $\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$ 。

定义: $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v (= \int_{\Omega} -\Delta u \cdot v)$, 则称 u 为 Dirichlet

问题的弱解。

定理: $f \in L^2(\Omega)$, 则 Dirichlet 问题有唯一的弱解。

定理: X 是 Hilbert 空间, $a(x, y)$ 为 H 上的共轭双线性函数, 且存在 $M > 0$, 使得 $a(x, y) \leq M\|x\| \cdot \|y\|$ 。则存在 $A \in L(X)$, 使得 $a(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ 。

2.3 纲与开映像定理

定义: $T: X \rightarrow Y$, 若存在 T' 使得 $\forall x \in D(T)$, $T'Tx = x$; $\forall y \in F(T)$, $TT'y = y$, 则称 T' 为 T 的逆算子。

注记: 1° 逆算子存在 $\Leftrightarrow T$ 为一一映射; 2° 逆算子存在, 则一定唯一; 3° T^{-1} 是线性算子; 4° $(T^{-1})^{-1} = T$ 。

定义: (X, ρ) 是度量空间, $E \subset X$, 若 \bar{E} 没有内点, 则称 E 为疏集。

命题: $E \subset X$ 是疏集 $\Leftrightarrow \forall B(x_0, r_0)$, 存在 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$ 使得 $\overline{E} \cap \overline{B}(x_1, r_1) = \emptyset$ 。

定义: (X, ρ) 是度量空间, $E \subset X$, 若 $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, E_n 是疏集, 则称 E 是第一纲集,

否则称为第二纲集。

定理: (Baire) 完备度量空间是第二纲集。

应用: $C[0,1]$ 中处处不可微函数的集合的余集为第一纲集。

定义: $T: X \rightarrow Y$, $\forall U \subset X$ 开, $T(U) \subset Y$ 开, 则称 T 为开映射。

定义: $T: X \rightarrow Y$, 若 $\{x_n\} \subset D(T)$ 满足 $x_n \rightarrow x$, $Tx_n \rightarrow y$, 则 $x \in D(T)$ 且 $y = Tx$, 则称 T 为闭算子。

注记: 1° 连续算子 T 并不一定有 $x_n \rightarrow x$, 则 $x \in D(T)$;

2° 若 $D(T)$ 闭且 T 连续, 则 T 为闭算子;

3° 定义 T 的图象 $G(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y | x \in D(T)\}$, $X \times Y$ 上模 $\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$ 称为图模, 则 T 为闭算子 $\Leftrightarrow G(T)$ 在 $(X \times Y, \|\cdot\|)$ 中为闭集;

4° 闭算子不一定连续。

定理: (开映像定理) X, Y 是 B 空间, $T: X \rightarrow Y$ 是闭线性算子且为满射/ $R(T)$ 是第二纲集, 则 T 为开映射。(重要中间结论: 映射有内点)

定理: (逆算子定理) X, Y 是 B 空间, $T \in L(X, Y)$ 既单又满, 则 $T^{-1} \in L(Y, X)$ 。

推论: (等价范数定理) 线性空间 X 上的两个模 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, X 关于他们分别都是 B 空间, 且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 则一定等价。

定理: (B.L.T.) X 是 B^* 空间, Y 是 B 空间, $T: X \rightarrow Y$ 连续, 则 T 一定可以唯一延拓到 $\overline{D(T)}$ 上作为 $\overline{D(T)}$ 上的连续线性算子。

定理: (闭图像定理) X, Y 是 B 空间, $T: X \rightarrow Y$ 闭线性算子, 且 $D(T)$ 闭, 则 T 连续。

定理: (共鸣定理) X 是 B 空间, Y 是 B^* 空间, W 为 $L(X, Y)$ 是一族算子, 满足 $\forall x \in X, \sup \|Ax\| < +\infty, A \in W$ 。则存在 $M > 0, \forall A \in W, \|A\| < M$ 。

定理: (Banach-Steinhaus 定理) X 是 B 空间, Y 是 B^* 空间, $M \subset X$ 稠密子集, $\{A_n\} \subset L(X, Y), A \in L(X, Y)$ 有 $\forall x \in X, A_n x \rightarrow Ax \Leftrightarrow 1^\circ \|A_n\|$ 一致有界; $2^\circ \forall x \in M, A_n x \rightarrow Ax$ 。

定理: (Lax-Milgram 定理) X 是 Hilbert 空间, $a(\cdot, \cdot)$ 共轭双线性, 满足: 1° 存在 $M > 0, |a(x, y)| \leq M \|x\| \cdot \|y\|$; 2° 存在 $\delta > 0, |a(x, x)| \geq \delta \|x\|^2$, 则存在唯一有连续逆的 $A \in L(X)$, 使得 $a(x, y) = (x, Ay)$, 且 $\|A\|^{-1} \leq 1/\delta$ 。

2.4 Hahn-Banach 定理

定理: (实 Hahn-Banach) X 是实线性空间, $X_0 \subset X$ 是线性子空间, p 是 X 上的次线性泛函, f_0 是 X_0 上的实线性泛函, 满足 $\forall x \in X_0, f_0(x) \leq p(x)$ 。则存在 X 上的线性泛函 f , 使得 $1^\circ \forall x \in X_0, f(x) = f_0(x)$; $2^\circ \forall x \in X, f(x) \leq p(x)$ 。

定理: (复 Hahn-Banach) X 是复线性空间, $X_0 \subset X$ 是线性子空间, p 是 X 上的半模, f_0 是 X_0 上的复线性泛函, 满足 $\forall x \in X_0, |f_0(x)| \leq p(x)$ 。则存在 X 上的线性泛函 f , 使得 $1^\circ \forall x \in X_0, f(x) = f_0(x)$; $2^\circ \forall x \in X, |f(x)| \leq p(x)$ 。

定理: X 是复线性空间, X 中含有均衡吸收凸集, 则 X 上存在非零线性泛函。

定理: X 是 B^* 空间, $X_0 \subset X$ 线性空间, $f_0 \in X_0^*$, 则存在 $f \in X^*, 1^\circ \forall x \in X^*, f_0(x) = f(x)$; $2^\circ \|f\| = \|f_0\|$ 。

推论：（点与点可分离） X 是 B^* 空间，则：

1° $\forall x_0 \in X \setminus \{0\}$ ，存在 $f \in X^*$ ，s.t. $f(x_0) = \|x_0\|$ ，且 $\|f\| = 1$ ；

2° $\forall x_1, x_2 \in X$ ，存在 $f \in X^*$ ，s.t. $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，且 $\|f\| = 1$ ；

3° $x_0 = 0 \Leftrightarrow \forall f \in X^*$ ， $f(x_0) = 0$ 。

定理：（点与子空间可分离） X 是 B^* 空间， $M \subset X$ 线性子空间， $x_0 \in X$ ， $d(x_0, M) = d > 0$ ，则存在 $f \in X^*$ ，使得 1° $\forall x \in M$ ， $f(x) = 0$ ；2° $f(x_0) = d$ ；3° $\|f\| = 1$ 。

推论： X 是 B^* 空间， $M \subset X$ 是子集， $x_0 \in X$ ， $x_0 \neq 0$ ，则 $x_0 \in \overline{\text{span}(M)} \Leftrightarrow \forall f \in X^*$ ， $f(M) = 0$ 都有 $f(x_0) = 0$ 。

定义： X 是 B^* 空间，

1° $X_0 \subset X$ 称为极大线性子空间 $\Leftrightarrow \forall X_1$ 满足 $X_0 \subset X_1 \subset X$ ，则 $X_1 = X \Leftrightarrow X = X_0 \oplus \{\lambda x_0\}$ ， $\lambda \in \mathbb{R}$ ， $\forall x_0 \notin X_0 \Leftrightarrow \dim(X/X_0) = 1$ ；

2° M 称为极大线性子流形/超平面 $\Leftrightarrow M = X_0 + x_0$ 是极大线性子空间。

定理： M 是超平面 $\Leftrightarrow M = X_f^{\perp}$ ，其中 $f \in X^*$ ， f 非零， $X_f^{\perp} := \{x \in X | f(x) = 0\}$ 。

定义： X 是 B^* 空间，凸集 $E, F \subset X$ ，

1° 若存在 $L = X_f^{\perp}$ ， $f \in X^*$ 使得 $f|_E \leq r$ ， $f|_F \geq r$ ，则称 L 分离 E, F ；

2° 若存在 $L = X_f^{\perp}$ ， $f \in X^*$ 使得 $f|_E < r$ ， $f|_F > r$ ，则称 L 严格分离 E, F 。

定理：（Hahn-Banach 几何形式） X 是 B^* 空间，以 0 为内点的真凸子集 $E \subset X$ ， $x_0 \notin E$ ，则存在超平面分离 x_0 和 E 。

注记：1° E 可以是一般的有内点的真凸子集；2° $L = H_f^{\perp}$ 是闭的（即由 f 连续）。

定理：（凸集与凸集分离） X 是 B^* 空间，凸集 $E_1, E_2 \subset X$ ， $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ， E_1 有内点，则存在 $f \in X^*$ ， $r \in \mathbb{R}$ ，使得 H_f^{\perp} 分离 E_1 和 E_2 。

定理：（点与凸集分离） X 是 B^* 空间，闭凸集 $E \subset X$ ， $x_0 \notin E$ ，则存在 $f \in X^*$ ， $s \in \mathbb{R}$ ，使得 $f|_E \leq s < f(x_0)$ 。

定理：（Mazur） X 是 B^* 空间， E 是有内点的凸集， F 是线性子空间， $E \cap F = \emptyset$ ，则存在超平面 L 满足 $F \subset L$ 且 E 在 L 的一侧。

定义：凸集 $E \subset X$ ， H_f^{\perp} 称为 E 在 x_0 处的支撑超平面 $\Leftrightarrow x_0 \in E$ 的闭包 $\cap H_f^{\perp}$ 且 E 在 H_f^{\perp} 的一侧 $\Leftrightarrow f|_E \geq r = f(x_0)$ 或 $f|_E \leq r = f(x_0)$ 。

定理： X 是 B^* 空间， $E \subset X$ 是有内点的闭凸集， x_0 是 E 的边界点，则存在 x_0 处的支撑超平面。

定义： $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ， $x_0 \in X$ ，若存在 $A \in X^*$ 使得 $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + o(\|\Delta x\|)$ ，称 f 在 x_0 处 Frechet 可导， $A = f'(x_0)$ 称 Frechet 导数。

定义： $f: (a, b) \rightarrow X$ ， X 是 B^* 空间， $t \in (a, b)$ ， $f'(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ 。

定理：若 $f(t)$ 处处存在，则 $\forall t_1, t_2 \in (a, b)$ ， $t_1 < t_2$ ， $\exists \theta \in (0, 1)$ ，使得 $\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq \|f'(\theta t_2 + (1 - \theta)t_1)\| \cdot |t_2 - t_1|$ 。

定义： $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸泛函， $x_0 \in X$ ， $\partial f(x_0) := \{x^* \in X^* | f(x) \geq f(x_0) + x^*(x - x_0)\}$ 称为 f 在 x_0 处的次微分。

定理： $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续，则 $\partial f(x_0)$ 不空。

2.5 共轭空间 · 弱收敛 · 自反空间

定义： X 是 B^* 空间， $X^*(B \text{ 空间}) := L(X, K)$ 称为 X 的共轭空间。

例子： $(l^p)^* = l^q$ ， $(L^p)^* = L^q (1 \leq p < \infty)$ ， $(l^\infty)^* \neq l^1$ ，。

定义： $T: X \rightarrow X^{**}$ ， $X \rightarrow Z$ 称为自然映射，其中 $Z: X^* \rightarrow K, f \mapsto f(x)$ ， $T \in L(X, X^{**})$ 。

定理： X 是 B^* 空间，则 $T: X \rightarrow X^{**}$ 为保范嵌入。

定义：若 T 为满射，则 X 和 X^{**} 保范同构，称 X 为自反空间。

注记：1° B^* 空间 X 自反，则 X 为 B 空间；2° X 自反 $\Leftrightarrow X^*$ 自反。

定义： X, Y 是 B^* 空间， $T \in L(X, Y)$ ，若 $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ s.t. $\forall y^* \in Y^*, (T^*y^*)(x) = y^*(Tx)$ ，称 T^* 为 T 的共轭算子。

定理： $T^* \in L(Y^*, X^*)$ 且映射 $\ast: L(X, Y) \rightarrow L(Y^*, X^*), T \rightarrow T^*$ 是保范映射。

性质：1° $T_1 \in L(X, Y), T_2 \in L(Y, Z)$ ，则 $(T_2 T_1)^* = T_1^* T_2^*$ ；

2° 若 $T \in L(X, Y)$ 且 $T^{-1} \in L(Y, X)$ ，则 $(T^*)^{-1}$ 存在且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ ；

3° $T \in L(X, Y)$ ，则 $T^{**} \in L(X^{**}, Y^{**})$ 是 T 的保范延拓。

定义： X 是 B^* 空间， $\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$ ，若 $\forall f \in X^*, f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ，则称 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x_0 。

注记：1° 强收敛 \Rightarrow 弱收敛；2° 有限维空间强收敛 \Leftrightarrow 弱收敛。

定理：(Mazur) X 是 B^* 空间， x_n 弱收敛到 $x_0 \in X$ ，则 $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 n 以及 $\lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1$ ，使得 $\|\sum \lambda_i x_i - x_0\| < \varepsilon$ 。

定理：(Banach) X 是 B^* 空间， X^* 可分 $\Rightarrow X$ 可分。

定义： X 是 B^* 空间， $\{f_n\} \subset X^*, f \in X^*$ ，若 $\forall x \in X, f_n(x) \rightarrow f(x)$ ，则称 f_n 弱收敛到 f 。

定理： X 是 B^* 空间， $\{x_n\} \subset X, x \in X$ ，则 x_n 弱收敛到 $x \Leftrightarrow$ 1° $\|x_n\|$ 一致有界；2° 对 X^* 的稠密子集 $M^*, f(x_n) \rightarrow f(x)$ 。

定理： X 是 B 空间， $\{f_n\} \subset X^*, f \in X^*$ ，则 f_n 弱收敛到 $f \Leftrightarrow$ 1° $\|f_n\|$ 一致有界；2° 对 X 的稠密子集 $M, f_n(x) \rightarrow f(x)$ 。

定义： X, Y 是 B^* 空间， $T_n \in L(X, Y), T \in L(X, Y)$ ，

1° 当 $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ ，称 T_n 一致收敛到 T ；

2° $\forall x \in X, T_n x \rightarrow T x$ ，称 T_n 强收敛到 T ；

3° 若 $\forall x \in X, f \in Y^*, f(T_n x) \rightarrow f(T x)$ ，称 T_n 弱收敛到 T 。

一致收敛 \Rightarrow 强收敛 \Rightarrow 弱收敛。

定义：1° $A \subset X$ 弱列紧 $\Leftrightarrow A$ 中任意点列有弱收敛子列；

2° $A \subset X^{**}$ 弱列紧 $\Leftrightarrow A$ 中任意点列有*弱收敛子列。

定理：可分 B^* 空间 X 的共轭空间 X^* 有界集一定*弱列紧。

定理：(范数可达) X 是自反空间，则 $\forall f \in X^*$ ，存在 $x \in X, \text{s.t. } \|x\| = 1, f(x) = \|f\|$ 。

定理：有限维 Banach 空间是自反空间。

定理：(James) $\forall f \in X^*$ ，存在 $x \in X, \text{s.t. } \|x\| = 1, f(x) = \|f\|$ ，则 X 自反。

定理：(Pettis) 自反空间 X 的闭子空间 X_0 自反。

定理：(Banach-Alaoglu 定理) X 是 B^* 空间，则 X^* 的单位球*弱列紧。

注记：1° X 的可分闭子空间都自反，则 X 自反；

2° X 自反 $\Leftrightarrow \forall$ 闭凸子集 E ，存在 $x_0 \in E$ ，使得 $\|x_0\| = \inf\{\|x\|, x \in E\} \Leftrightarrow \forall$ 闭凸子集 $E, \forall x \in X$ ，存在 $x_0 \in E$ ，使得 $\|x - x_0\| = \inf\{\|x - x_0\|, x \in E\}$ 。

定理：(Eberlein-Smulian) 自反空间的单位(闭)球/有界集是弱(自)列紧的。

注记：“ \Leftarrow ”也成立。

2.6 线性算子的谱

定义： X 是复 B 空间， $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ 是线性算子，

1° 若存在 $x_0 \in D(A) \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $Ax_0 = \lambda x_0$ ，称 λ 为本征值， x_0 为本征元；

2° 若 $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X)$ ，则称 λ 为正则值；记 $\rho(A)$ 为所有正则值全体，称为预解集。

3° (a) $\lambda I - A$ 既单又满，则 $\lambda \in \rho(A)$ ；(b) $\lambda I - A$ 不单，则 λ 为本征值，记 $\sigma_p(A)$ 为所有本征值全体，称为点谱；(c) $\lambda I - A$ 单但不满，且 $\overline{R(\lambda I - A)} = X$ ，所有 λ 的集合称连

续谱, 记为 $\sigma_c(A)$; (d) $\lambda I - A$ 单且不满, 且 $\overline{R(\lambda I - A)} \neq X$, 称剩余谱, 记为 $\sigma_r(A)$;

(e) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$, 称算子 A 的谱。

命题: $\rho(A)$ 不空, 则 A 为闭线性算子; A 不为闭线性算子, 则 $\rho(A)$ 空。

定义: 算子值函数 $R_\lambda(A): \rho(A) \rightarrow L(X), \lambda \rightarrow (\lambda I - A)^{-1}$, 称为 A 的预解式。 $\rho(A)$ 是开集, $R_\lambda(A)$ 解析, 且谱点存在。

定理: (Von-Neumann) X 是 B 空间, $T \in L(X)$, $\|T\| < 1$, 则 $(I - T)^{-1} \in L(X)$, 且 $(I - T)^{-1}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} T^n, \quad \|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

推论: A 为闭线性算子, 则 $\rho(A)$ 是开集。

定理: (谱点存在) $A \in L(X)$, 则 $\sigma(A)$ 不空。

引理: (第一预解公式) $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$, $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$ 。

定义: $A \in L(X)$, $r_\sigma(A) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ 称谱半径。

定理: (Gelfand) X 是 B 空间, $A \in L(X)$, 则 $r_\sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ 。

3 广义函数与 Sobolev 空间

(I) 广义函数

记号: 1° $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开, $u \in C(\overline{\Omega})$, 记 $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \neq 0\}}$, 称 u 的支集;

2° $k \in \mathbb{Z}_+$, $C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid \text{supp}(u) \subset\subset (\text{紧包含}) \Omega\}$;

3° 多重指标: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, 则 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha =$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_n}}.$$

定义: $C_0^\infty(\Omega)$ 上的收敛性: $\{f_j(x)\} \subset C_0^\infty(\Omega)$, $f_0(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, 若

1° 存在 $K \subset\subset \Omega$, 使得 $\text{supp } f_j \subset K$;

2° $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\sup_{x \in K} |\partial^\alpha f_j(x) - \partial^\alpha f_0(x)| \rightarrow 0$;

则称 f_j 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 上收敛到 f_0 。记 $D(\Omega)$ 为带有收敛性的空间 $C_0^\infty(\Omega)$, 称基本空间。

命题: $D(\Omega)$ 为序列完备空间。

定义: $f: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 称为一个广义函数, 如果 1° f 线性; 2° $\forall \{g_j\} \subset D(\Omega)$, $g_j \rightarrow g$, 有 $f(g_j) \rightarrow f(g)$ 。所有广义函数的集合记为 $D'(\Omega)$ 。

定义: $\{f_j\} \subset D'(\Omega)$, $f_0 \in D'(\Omega)$, 若 $\forall g \in D(\Omega)$, $f_j(g) \rightarrow f_0(g)$, 则称 f_j 收敛到 f_0 。

定义: $f \in D'(\Omega)$, 若存在 $g \in D'(\Omega)$, 使得 $\forall h \in D(\Omega)$, $f(\partial_{x_i} h) = -g(h)$, 称 g 为 f

关于 x_i 方向的广义偏导数, 记为 $\tilde{\partial}_{x_i} f$ 。若 $f \in C^1$, 则 $\tilde{\partial}_{x_i} f = \partial_{x_i} f$ 。

(II) Sobolev 空间

定义: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $1 < p < +\infty$, $W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \tilde{\partial}^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$, 模 $\|u\| =$

$(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\tilde{\partial}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p)^{1/p}$, 称 Sobolev 空间。

定理: 1° $W^{k,p}(\Omega)$ 为 Banach 空间;

2° $W^{k,2}(\Omega)$ 为 Hilbert 空间, 常记 $H^k(\Omega)$ 。

注记: $W_0^{k,p}(\Omega)$ 记为 $C_0^k(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包。

定理: (Sobolev 嵌入定理) $W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), & p < n \\ L^\varphi(\Omega), & p = n, \text{ 其中 } \varphi(t) = e^{t^{\frac{n}{n-1}}} - 1, \\ C^\alpha(\bar{\Omega}), & p > n, \text{ 其中 } \alpha < 1 - \frac{n}{p} \end{cases}$

$L^\varphi(\Omega) = \{u \mid \int_\Omega (e^{|u|^{\frac{n}{n-1}}} - 1) dx < +\infty\}$, $C^\alpha(\bar{\Omega}) = \{u \mid \sup_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty\}$ (Orlicz 空间)。

定理: 1° $p < n$ 时, $\exists C > 0$, s.t. $\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq C \|\tilde{\partial} u\|_{L^p(\Omega)}$;

2° $p = n$ 时, $\exists C_1, C_2 > 0$, s.t. $\int_\Omega e^{\left(C_1 \frac{\|u\|}{\|\tilde{\partial} u\|_{L^p(\Omega)}}\right)^{\frac{n}{n-1}}} dx \leq C_2 |\Omega|$;

3° $p > n$ 时, $\exists C > 0$, s.t. $\|u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leq C(1 + \text{diam}(\Omega)^\alpha) \|\tilde{\partial} u\|_{L^p(\Omega)}$ 。

4 紧算子与 Fredholm 算子

4.1 紧算子的定义和基本性质

定义: X, Y 是 B 空间, $A: X \rightarrow Y$ 线性, B_1 为 X 的单位球。若 $\overline{A(B_1)}$ 在 Y 中紧, 则称 A 为紧算子。全体紧算子记为 $C(X, Y)$ 。(等价定义: $A \in C(X, Y) \Leftrightarrow \forall X$ 的有界集 E , $\overline{A(E)}$ 在 Y 中紧 $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset X$ 有界点列, $\{Ax_n\}$ 有收敛子列。

性质: 1° $C(X, Y) \subset L(X, Y)$; 2° $a, b \in C$, $A, B \in L(X, Y)$, 则 $aA + bB \in C(X, Y)$; 3° $A \in C(X, Y)$, $X_0 \subset X$ 闭子空间, 则 $A|_{X_0} \in C(X_0, Y)$; 4° $A \in C(X, Y), B \in C(Y, Z)$, 则 $BA \in C(X, Z)$; 5° $A \in C(X, Y) \Rightarrow R(A)$ 可分; 6° $C(X, Y)$ 在 $L(X, Y)$ 中闭; 7° $T \in C(X, Y) \Leftrightarrow T^* \in C(Y^*, X^*)$; 8° $L(X)$ 是一个代数, $C(X)$ 是 $L(X)$ 的一个理想。

定义: $A \in L(X, Y)$, 若 x_n 弱收敛到 x , $Ax_n \rightarrow Ax$, 则称 A 全连续。

命题: 1° $A \in C(X, Y)$, 则 A 全连续; 2° A 全连续且 X 自反, 则 $A \in C(X, Y)$ 。

定义: $T \in L(X, Y)$, $\dim R(T) = N < \infty$, 称 T 为有穷秩算子。所有的有穷秩算子记为 $F(X, Y)$ 。

注记: 1° $F(X, Y) \subset C(X, Y)$; 2° $f \in X^*, y \in Y$, 定义 1 秩算子 $y \otimes f: x \rightarrow f(x)y$ 。

定理: $T \in F(X, Y) \Leftrightarrow$ 存在 $y_1, \dots, y_n \in Y$, $f_1, \dots, f_n \in X^*$, s.t. $T = \sum_i y_i \otimes f_i$ 。

定理: X 是 Hilbert 空间, 则 $\overline{F(X)} = C(X)$ 。

定义: X 是可分 B 空间, 若存在 $\{e_n\} \subset X$ s.t. $\forall x \in X$, 有唯一的 $\{c_n(x)\}$, $x = \sum_n c_n(x)e_n$, 称 $\{e_n\}$ 为 X 的 Schauder 基。

引理: $c_n(x) \in X^*$ 。

定理: 可分 B 空间 X 上有一组 Schauder 基, 则 $\overline{F(X)} = C(X)$ 。

4.2 Riesz-Fredholm 理论

考虑一般情形 $T=I-A \in L(X)$, 其中 A 是紧算子。

记号: 1° $R(T)$ 值域, $N(T)$ 核; 2° $\forall M \subset X, {}^\perp M = \{f \in X^* | f|_M = 0\}$; 3° $\forall N \subset X^*, N^\perp = \{x \in X | \forall f \in N, f(x) = 0\}$; 4° $f \in X^*, x \in X, f \perp x$ 代表 $f(x) = 0$ 。

定理: (Fredholm) $A \in C(X)$, $T=I-A$, 则:

1° $N(T)=0 \Leftrightarrow R(T)=X$;

2° $\sigma(A) = \sigma(A^*)$;

3° $\dim N(T) = \dim N(T^*) < \infty$;

4° $R(T) = N(T^*)^\perp, R(T^*) = {}^\perp N(T)$;

5° $\text{codim } R(T) := \dim(X/R(T)) = \dim N(T)$ 。

Fredholm 方程: $\lambda x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t)$ (*), $\lambda x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = 0$ (**)。

(L^2 空间)二择一定理: $\lambda \neq 0$ 时:

1° 若(**)只有零解, 则 $\forall f$, (*)有唯一解;

2° 若(**)有非零解, 则(*)有解 $\Leftrightarrow f$ 与共轭方程 $\lambda x(t) - \int_a^b K(s,t)x(s)ds = 0$ (**)解空间正交。

定义: $T \in L(X)$, 若满足 $R(T)$ 闭, 则称 T 为闭值域算子。

定理: $A \in C(X)$, 则 $T=I-A$ 为闭值域算子。

4.3 紧算子的谱理论

定理: X 是 B 空间, $A \in C(X)$, 则

1° $0 \in \sigma(A)$, 除非 $\dim X < \infty$;

2° $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$;

3° $\sigma_p(A)$ 至多以 0 为聚点。

定义: X 是 B 空间, $A \in L(X)$, $M \subset X$ 且 $A(M) \subset M$, 称 M 为 A 的不变子空间。

性质: 1° $\{0\}, X$ 都是不变子空间;

2° 若 M 是不变子空间, 则 \overline{M} 也是;

3° $\forall \lambda \in \sigma_p(A)$, $N(\lambda I - A)$ 是 A 的不变子空间;

4° $\forall y \in X, L_y: \{P(A)y | P \text{ 是多项式}\}$ 为 A 的不变子空间。

定理: $\dim X \geq 2, A \in C(X)$, 则必有非平凡闭不变子空间。

定理: $A \in C(X), T=I-A$, 则存在 $p \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $X = N(T^p) \oplus R(T^p)$, 且 $T|_{R(T^p)}$ 有线性有界逆算子。

记号: $p(T)$ 为满足 $N(T^k) = N(T^{k+1})$ 的最小数, 称零链长; $q(T)$ 为满足 $R(T^k) = R(T^{k+1})$ 的最小数, 称像链长。

性质: 1° 当 $N(T^k) = N(T^{k+1})$, 则 $\forall n \geq k, N(T^n) = N(T^{n+1})$;

2° 当 $R(T^k) = R(T^{k+1})$, 则 $\forall n \geq k, R(T^n) = R(T^{n+1})$;

3° $A \in C(X), T=I-A$, 则 $p=q < \infty$ 。

4.4 Hilbert-Schmidt 定理

定义: X 是 Hilbert 空间, $A \in L(X)$, 若 $(Ax, y) = (x, Ay) [= (x, A^*y)]$, 则称 A 为对称算子或自共轭算子[蕴含 $A=A^*$]。

性质: 1° A 对称 $\Leftrightarrow (Ax, x) \in \mathbb{R}$;

2° A 对称, 则 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, 且当 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $\text{Im} \lambda \neq 0$ 时, $\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \frac{1}{|\text{Im}(\lambda)|} \|x\|$;

3° $X_1 \subset X$ 是闭线性子空间, A 在 X 上对称 $\Rightarrow A|_{X_1}$ 上对称;

4° A 对称, 则 $\forall \lambda \neq \lambda' \in \sigma_p(A)$, $N(\lambda I - A) \perp N(\lambda' I - A)$;

5° 若 A 对称, 则 $\sigma_r(A)$ 空;

6° 若 A 对称, 则 $\|A\| = \sup\{|(Ax, x)| : \|x\|=1\}$ 。

定理: $A \in C(X)$ 且对称, 则存在 $x_0 \in X$, $\|x_0\|=1$ 满足 $Ax_0 = \lambda x_0$, 其中 $|\lambda| = |(Ax_0, x_0)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$ 。

引理: X 是复 Hilbert 空间, A 对称紧, 令 $M = \bigcup_{\lambda \in \sigma(A)} N(\lambda I - A)$, 则 $X = \overline{\text{span}(M)}$ 。

定理: (Hilbert-Schmidt) X 是复 Hilbert 空间, A 对称紧, 则存在可数 $\{\lambda_i\} \subset \mathbb{R}$ 以 0 为聚点以及对应的本征值 $\{e_n\}$ 构成规范正交基, s.t. $\forall x \in X$, $x = \sum (x, e_i) e_i + v$, $v \in N(A)$ 。

推论: (极值刻画) 将本征值排列 $|\lambda_1| \geq \dots$, 则 $|\lambda_n| = \sup\{|(Ax, x)| : x \perp \text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}, \|x\|=1\}$ 。

推论: (极大极小刻画) 排列 $\lambda_1^+ \geq \dots \geq 0$, $\lambda_1^- \leq \dots \leq 0$, 则 $\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{x \in E_{n-1}^\perp, x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$,

$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{x \in E_{n-1}^\perp, x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$, 其中 E_{n-1} 是 X 的任意 $n-1$ 维闭线性子空间。

推论: $A, B \in C(X)$ 且对称, $(Ax, x) \leq (Bx, x)$ 恒成立, 则 $\lambda_j^+(A) \leq \lambda_j^+(B)$ 。

4.6 Fredholm 算子

定义: X, Y 是 B 空间, $T \in L(X, Y)$ 称为 Fredholm 算子, 如果 1° $R(T)$ 闭; 2° $\dim N(T) < \infty$; 3° $\text{codim } R(T) < \infty$ 。

定义: 若 $T \in F(X, Y)$, 记 $\text{ind}(T) := \dim N(T) - \text{codim } R(T)$ 为 T 的指标。

定理: (Atkinson) 1° 若 $T \in F(X, Y)$, 则存在 $S \in F(Y, X)$ 以及 $A_1 \in C(X), A_2 \in C(Y)$ 使得 $ST = I_X - A_1, TS = I_Y - A_2$; 2° 若 $T \in L(X, Y)$ 且存在 $R_1, R_2 \in L(Y, X)$ 以及 $A_1 \in C(X), A_2 \in C(Y)$ 使得 $R_1 T = I_X - A_1, TR_2 = I_Y - A_2$, 则 $T \in F(X, Y)$ 。

定理: $T_1 \in F(X, Y), T_2 \in F(Y, Z)$, 则 $T_2 T_1 \in F(X, Z)$, 且 $\text{ind}(T_2 T_1) = \text{ind}(T_1) + \text{ind}(T_2)$ 。

定理: $T_1 \in L(X, Y), T \in L(Y, Z), T_1 T_2 \in F(X, Z)$, 则 $T_1 \in F(X, Z) \Leftrightarrow T_2 \in F(X, Z)$ 。

命题: $T \in F(X, Y), A \in C(X, Y)$, 则 $T + A \in F(X, Y)$, 且 $\text{ind}(T + A) = \text{ind}(T)$ 。

定理: $T \in F(X, Y)$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 当 $S \in L(X, Y)$ 满足 $\|S\| < \varepsilon$ 时, $T + S \in F(X, Y)$ 且 $\text{ind}(T + S) = \text{ind}(T)$ 。(F(X, Y) 在 $L(X, Y)$ 中开且 ind 局部等值)