高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 9 月 12 日

目录

1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 & = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 & = -3 \end{cases}$.

2. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-2, 1, 5), \alpha_3 = (a, 2, 10), \beta = (1, b, -1)$. 当 a, b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 表出任何向量–如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

4. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D. 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

5. (1) 求复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 rref(A); (2) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集合; (3) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1, y_2, y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解?

6. 已知向量 α, β 不共线, 并看成是由原点出发的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$. 设 $u, v \in \mathbb{R}$ 且 $u + v = 1$, 问向量 $\overrightarrow{OC} = u\alpha + v\beta$ 的终点 C 在什么位置, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的比值是多少, 何时比值为正数.

7. 求单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线.

8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体 $ABCD$ 每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.

9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异? $\begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .067 \end{cases}$, $\begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .066 \end{cases}$.

10. 考虑带截距的线性回归 $y \sim x_1 + \cdots + x_p$, 参考上一题, 你有什么想法和改进?

1.2 解答

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-=①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+=7*②]{③-=5*②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{④+=2*③}$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0)$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-=4*①]{②-=①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-=\frac{13}{3}*②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}$. 因此, 当 $a \neq -4$ 或 $a = -4, b = -\frac{13}{2}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

3. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s=0 \Rightarrow k_1=\cdots=k_s=0)$.

4. 注意 A,B,C,D 的比例和为 1, 因此 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\8&6&3&2&5\\5&25&10&15&12\\15&5&20&10&15\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{②}-=8*\text{①}\\ \text{③}-=5*\text{①}\\ \text{④}-=15*\text{①}}} \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&20&5&10&7\\0&-10&5&-5&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{③}+=10*\text{②}\\ \text{④}-=5*\text{②}}}$

$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&30&25&15\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{④}+=\frac{2}{3}*\text{③}} \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&0&-\frac{25}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, 因此解是 $(\frac{7}{25},\frac{16}{75},\frac{7}{15},\frac{1}{25})$.

5. (1) $\begin{bmatrix}1&-i&-1\\2&2&-2\\i&1+i&-i\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{②}-=2*\text{①}\\ \text{③}-=i*\text{①}}} \begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&i&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}-=\frac{i}{2+2i}*\text{②}} \begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}*=\frac{1}{2+2i}} \begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.
(2) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{R}\}$. (3) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{C}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1,\frac{y_2-2y_1}{2+2i},y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1=0$ 时才有解.
6. $\overrightarrow{AC}=(u-1)\alpha+v\beta,\overrightarrow{CB}=-u\alpha+(1-v)\beta,\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{1-u}{u}=\frac{v}{1-v}$, 因此 A,C,B 三点共线, 且当 $0<u,v<1$ 时比值为正数.

7. $(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases}x-z=k(1-y)\\x+z=\frac{1}{k}(1+y)\end{cases}$, 即是 $\begin{cases}x+ky-z=k\\kx-y+kz=1\end{cases}$. 特别地, 当 $y=\pm1$ 时, $z=\pm x$ 也是位于该曲面上的直线.
8. $A=(x_1,y_1,z_1),B=(x_2,y_2,z_2),C=(x_3,y_3,z_3)$, 设 BC,AC,AB 中点分别为 D,E,F, 设 $G=(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$
只需验证 $\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BG},\overrightarrow{CG}$ 分别与 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$ 共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.
9. 用 Gauss 消元法可求得解为 $(1,-1)$ 和 $(-666,834)$. 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.
10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如 L_2 正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着强相关变量, 干扰回归结果.

2 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.