

# 数学分析 II 习题课讲义

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2024 年 2 月 8 日

## 目录

1	第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性	3
1.1	问题	3
1.2	解答	3
2	第 2 次习题课: 定积分的性质与计算	4
2.1	问题	4
2.2	解答	4
3	第 3 次习题课: 定积分的应用与中值定理	5
3.1	问题	5
3.2	解答	6
4	第 4 次习题课: 广义积分的收敛性与计算	6
4.1	问题	6
4.2	解答	7
5	第 5 次习题课: 积分的综合运用	8
5.1	问题	8
5.2	解答	8
6	第 6 次习题课: 数项级数的基本概念与正项级数	10
6.1	问题	10
6.2	解答	10
7	第 7 次习题课: 任意项级数与数项级数的运算	11
7.1	问题	11
7.2	解答	11
8	第 8 次习题课: 无穷乘积与函数项级数的基本概念	12
8.1	问题	12
8.2	解答	13
9	第 9 次习题课: 函数项级数的一致收敛	14
9.1	问题	14
9.2	解答	15

<b>10 第 10 次习题课: 一致收敛函数项级数的性质</b>	<b>15</b>
10.1 问题 . . . . .	15
10.2 解答 . . . . .	16
<b>11 第 11 次习题课: 幂级数的基本概念与性质</b>	<b>17</b>
11.1 问题 . . . . .	17
11.2 解答 . . . . .	17
<b>12 第 12 次习题课: 幂级数展开与多项式逼近</b>	<b>18</b>
12.1 问题 . . . . .	18
12.2 解答 . . . . .	19
<b>13 第 13 次习题课: Fourier 级数的基本概念与性质</b>	<b>20</b>
13.1 问题 . . . . .	20
13.2 解答 . . . . .	20
<b>14 第 14 次习题课: Fourier 级数的收敛性</b>	<b>20</b>
14.1 问题 . . . . .	20
14.2 解答 . . . . .	20
<b>15 致谢</b>	<b>21</b>

# 第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性

## 1.1 问题

1.  $f(x)$  在  $[a, b]$  的每一点处的极限都是 0, 证明  $f(x) \in R[a, b]$  且  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .
2.  $f(x) \in R[a, b]$ ,  $\int_a^b f(x)dx > 0$ . 证明  $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , s.t.  $\forall x \in [\alpha, \beta], f(x) > 0$ .
3.  $f(x) \in R[a, b]$ , 问  $\lfloor f(x) \rfloor$  是否一定  $\in R[a, b]$ ?
4. 讨论区间  $[a, b]$  上  $f, |f|, f^2$  的可积性之间的关系.
5. 设非负函数  $f(x) \in C[a, b]$ , 证明极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}}$  存在并求之.
6.  $f(x) \geq 0, f''(x) \leq 0, x \in [a, b]$ . 证明  $\max_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ .
7.  $n \in \mathbb{N}_+, f(x) \in C[a, b], \int_a^b x^k f(x)dx = 0, k = 0, 1, \dots, n$ . 证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至少有  $n+1$  个零点.
8. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \dots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \dots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}}$ .
9.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1, \alpha > 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ .
10. (Hölder 不等式). 非负函数  $f(x), g(x) \in R[a, b], p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 证明  $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left( \int_a^b f^p(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b g^q(x) \right)^{\frac{1}{q}}$ .
11.  $f(x) \in R[a, b], A = \inf_{x \in [a, b]} f(x), B = \sup_{x \in [a, b]} f(x), g(y) \in C[A, B]$ , 证明  $G(x) := g(f(x)) \in R[a, b]$ .
12. 已知  $(0, 1)$  上的单调函数  $f(x)$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$  存在, 问是否有  $f(x) \in R[0, 1]$ ?

## 1.2 解答

1. 显然  $f(x)$  有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次  $\forall \epsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$ , s.t.  $\omega_{(x-\delta_x, x+\delta_x)} < \epsilon$ . 由于  $\cup_{x \in [a, b]} (x-\delta_x, x+\delta_x) \supset [a, b]$ , 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖  $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$ . 不妨设  $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ . 可取分割点  $y_i \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1})$ , 对于这个分割,  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon(b-a)$ , 因此有可积性. 由于  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)|dx \leq \epsilon(b-a)$ ,  $\epsilon$  的任意性知  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .
2. 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.
3.  $f(x) = -\text{Riemann}(x) \in R[0, 1], \lfloor f(x) \rfloor = -\text{Dirichlet}(x) \notin R[0, 1]$ .
4.  $f \in R[a, b] \Rightarrow |f|, f^2 \in R[a, b]$ , 因为  $f$  在  $x_0$  处连续  $\Rightarrow |f|, f^2$  在  $x_0$  处连续.  
 $|f| \in R[a, b] \Rightarrow f^2 \in R[a, b], \nRightarrow f \in R[a, b]$ .  $|f|$  在  $x_0$  处连续  $\Rightarrow f^2$  在  $x_0$  处连续, 而对于  $f$  有反例  $f(x) = 1_{\mathbb{Q}} - 1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ .  
 $f^2 \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b], \nRightarrow f \in R[a, b]$ . 理由与上一个相同.
5. 设  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x), f(\xi) = M$ . 由连续性,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  s.t.  $\forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), f(x) > M - \epsilon$ . 因此当  $n$  足够大时成立  
 $M + 2\epsilon > ((b-a)M^n)^{\frac{1}{n}} \geq \left( \int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left( \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} > (2\delta(M-\epsilon)^n)^{\frac{1}{n}} > M - 2\epsilon \Rightarrow \left( \int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow M$ .
6. 设  $f(\xi) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . 由题意知  $f(x)$  是凹函数, 因此成立  $f(x) \geq \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}(x-a) + f(a), & x \in [a, \xi] \\ \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}(x-\xi) + f(\xi), & x \in [\xi, b] \end{cases} \Rightarrow \text{RHS} \geq \frac{2}{b-a} \left( \int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx \right) \geq \frac{2}{b-a} \left( (\xi-a)\frac{f(\xi)+f(a)}{2} + (b-\xi)\frac{f(b)+f(\xi)}{2} \right) \geq \frac{2}{b-a} \frac{f(\xi)}{2} (\xi-a+b-\xi) = f(\xi) = \text{LHS}$ .
7.  $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists 1$  零点, 记为  $x_1$ .  $\int_a^b (x-x_1)f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists 2$  零点, 记为  $x_2$ .  $\dots \int_a^b [\prod_{i=1}^n (x-x_i)] f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists n+1$  零点.
- 8.

$$\text{原式} = 2^{\alpha-\beta} \frac{\left[ \frac{2}{n} \left( \frac{1}{n} \right)^\alpha + \frac{2}{n} \left( \frac{3}{n} \right)^\alpha + \dots + \frac{2}{n} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^\alpha \right]^{\beta+1}}{\left[ \frac{2}{n} \left( \frac{2}{n} \right)^\beta + \frac{2}{n} \left( \frac{4}{n} \right)^\beta + \dots + \frac{2}{n} \left( \frac{2n}{n} \right)^\beta \right]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{定积分定义}} 2^{\alpha-\beta} \frac{\left( \int_0^2 x^\alpha dx \right)^{\beta+1}}{\left( \int_0^2 x^\beta dx \right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

9.  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\epsilon) < a_n < n^\alpha(1+\epsilon)$ . 从而当  $n$  足够大时,  $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \dots + N^\alpha) < \epsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \dots + a_N) < \epsilon, \left| \frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \dots + (a_n - n^\alpha)] \right| \leq \frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha + \dots + n^\alpha] \leq \frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} \right)^\alpha \leq \epsilon \int_0^1 x^\alpha dx + \epsilon = \frac{\epsilon}{\alpha+1} + \epsilon \leq 2\epsilon$ . 这意味着  $\left| \frac{1}{n^{1+\alpha}} \left( \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i^\alpha \right) \right| \leq 4\epsilon \Rightarrow \text{原极限} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$ .

10. WLOG  $\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} = 1$ , 则原命题的结论可改写为  $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq 1$ . 由  $\ln x$  的凹性, 我们有  $\alpha \ln a + (1-\alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1-\alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$ . 令  $\alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

本题也可以将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.

11. 证法 a:  $G(x)$  的间断点集合是  $f(x)$  间断点集合的子集, 因此其 Lebesgue 测度为 0, 从而可积.

证法 b: 由于  $g(y)$  一致连续, 因此  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall |y_1 - y_2| < \delta, |g(y_1) - g(y_2)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ . 由于  $f(x) \in R[a, b]$ , 因此  $\exists [a, b]$  的分割  $\Delta$ , 使得  $\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\delta \epsilon}{4M}$ , 其中  $M = \sup_{y \in [a, b]} |g(y)|$ . 若  $\omega_i(f) < \delta$ , 则  $\omega_i(G) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ . 若  $\omega_i(f) \geq \delta$ ,

其区间长度  $\sum_{i: \omega_i(f) \geq \delta} \Delta x_i$  不会超过  $\frac{\epsilon}{4M}$ . 因此  $\sum_{i=1}^n \omega_i(G) \Delta x_i = \sum_{i: \omega_i(f) < \delta} \omega_i(G) \Delta x_i + \sum_{i: \omega_i(f) \geq \delta} \omega_i(G) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{\epsilon}{4M} = \epsilon$ .

这样对于任意  $\epsilon > 0$  我们都找到了一个分割  $\Delta$  使得  $\sum_{i=1}^n \omega_i(G) \Delta x_i < \epsilon$ .

12. 考虑  $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) = 0$ , 但是  $\int_0^1 f(x)dx$  不存在.

## 2 第 2 次习题课: 定积分的性质与计算

### 2.1 问题

1. 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义且内闭可积, 证明  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx = 0$ .
2. (Riemann-Lebesgue 引理).  $f \in R[a, b], g \in R[0, T], g(x+T) = g(x)$ , 则  $\int_a^b f(x)g(nx)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$ .
3. 求积分  $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}, \alpha \in (0, \pi)$ .
4. 求积分  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx$ .
5. 求积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x dx$ .
6. 求积分  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx$ , 并求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n}$ .
7.  $f(x) \in C[a, b]$ , 且对于任意的  $[\alpha, \beta] \subset [a, b], \exists \delta > 0, M > 0, \text{s.t. } \left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| \leq M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$ . 证明  $f(x) \equiv 0$ .
8.  $f(x) \in C(\mathbb{R})$ , 定义  $g(x) = f(x) \int_0^x f(t)dt$ . 证明若  $g(x)$  单调递减, 则  $f(x) \equiv 0$ .
9.  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义且内闭可积, 且  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . 证明  $f(x) = xf(1)$ .
10.  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是凸函数. 证明  $f(x) \in R[0, x], \forall x \in (0, +\infty)$ , 且  $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$  也是  $(0, +\infty)$  上的凸函数.
11.  $f(x) \in C[-1, 1]$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x)dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$ .
12.  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上非负连续, 且  $f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(s)ds$ . 证明  $f(t) \leq 1 + t$ .

### 2.2 解答

1. WLOG  $h < 1$ . 由可积函数性质, 存在  $[a, b+1]$  上的连续函数  $g(x)$  使得  $\int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|dx < \epsilon$ , 且  $\exists \delta > 0$  使得  $\forall x, y \in [a, b+1], |x - y| < \delta$ , 成立  $|g(x) - g(y)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$ . 从而  $\left| \int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx \right| \leq \int_a^b |f(x+h) - g(x+h)|dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)|dx + \int_a^b |g(x) - f(x)|dx \leq \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|dx + \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx + \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|dx \leq 3\epsilon$ .
2. WLOG 设  $\int_0^T g(x)dx = 0$ , 否则考虑  $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$ .

由 Riemann 积分定义,  $\forall \epsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $s_\epsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq x_m = b \end{cases}$  使得  $\int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|dx < \epsilon$ . 设

$M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$ . 则  $\left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - s_\epsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|g(nx)dx + \left| \sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx \right| < M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \leq M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT$ . 其中最后一个等式利用了  $\int_0^T g(x)dx = 0$ , 这意味着  $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \dots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$  (设  $c+kT \leq d < c+(k+1)T$ )  $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \leq MT$ . 选择一个足够大的  $n$ , 使得  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \epsilon$ . 从而  $\left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| \leq (M+1)\epsilon$ .

3.  $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sin\alpha} \arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2\sin\alpha}.$
4.  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$
5.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d(1-\cos x) = (1-\cos x) \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) d(\ln \sin x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin x + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) dx = [\cos x - \ln(1+\cos x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - 1.$
6. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x] \cos 2x + \sin[(2n-2)x] \sin 2x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x](1-2\sin^2 x) + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x]}{2 \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x \cos[(2n-2)x] + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x] \cos x dx = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

由于  $I_1 = 1$ , 因此  $I_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1}$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}.$

7. 假设  $\exists f(x_0) > 0$ . 由连续性,  $\exists \delta > 0$ , s.t.  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ , 从而  $\forall [\alpha, \beta] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$  (最后一个大于号成立只需令  $\beta - \alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ ), 矛盾.

8. 构造  $G(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2, G'(x) = g(x)$  单调递减,  $g(0) = 0$ , 因此  $G(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 且  $G(0) = 0, G(x) \geq 0$  恒成立  $\Rightarrow G(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ .

9. 只需证明对无理数点成立. 考察  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . 由有理数点的稠密性,  $\int_0^{\alpha} f(x) dx = \frac{\alpha^2}{2} f(1)$ . 由集合  $\{q\alpha : q \in \mathbb{Q}\}$  的稠密性且  $f(q\alpha) = qf(\alpha)$ ,  $\int_0^{\alpha} f(x) dx = f(\alpha) \frac{\alpha}{2}$ . 因此  $f(\alpha) \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2} f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$ .

10. 凸函数开区间上连续  $\Rightarrow$  闭区间上可积. 做变换  $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f\left(\frac{t}{x} \cdot x\right) d\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux) du$ , 从而  $F\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = \int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i (ux_i)\right) du \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n t_i f(ux_i) du = \sum_{i=1}^n t_i F(x_i) \Rightarrow F(x)$  凸.

11. 往证  $\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \rightarrow 0$ , 用极限定义.  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , s.t.  $\forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon$ . 设  $\max |f(x)| = M$ .

从而原式  $= \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-\delta}^{-1} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_1^{\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3. |I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \epsilon.$

$|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} \left(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}\right)^n$ . 注意到  $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$ , 从而可以取足

够大的  $n$  使得  $|I_2| < \epsilon$ . 类似地放缩  $I_3$ , 从而  $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$ .

12. 原命题条件  $\Rightarrow \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s) ds}} \leq 1 \Rightarrow \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s) ds}} dt \leq \int_0^x 1 dt \Rightarrow \sqrt{1+2\int_0^x f(s) ds} \Big|_0^x \leq x \Rightarrow \sqrt{1+2\int_0^x f(s) ds} \leq$

$1+x \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{1+2\int_0^x f(s) ds} \leq 1+x.$

### 3 第 3 次习题课: 定积分的应用与中值定理

#### 3.1 问题

- $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的递减正函数, 证明对于  $\forall 0 < \alpha < \beta \leq 1$  都有  $\beta \int_0^{\alpha} f(x) dx \geq \alpha \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ .
- $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义且内闭可积,  $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ , 求  $f(x)$ .
- 已知  $A > 0, AC - B^2 > 0$ , 求椭圆  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$  的面积.
- 证明极坐标下曲线  $r = r(\theta)$  与  $\theta = \alpha, \theta = \beta$  所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为  $V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin \theta d\theta$ .
- 求双扭线  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  绕轴  $\theta = \frac{\pi}{4}$  旋转一周所得的曲面的面积.
- $f(x) \in C^1[0, 1], f(x) \in [0, 1], f(0) = f(1) = 0, f'(x)$  单调递减. 证明曲线  $y = f(x)$  在  $[0, 1]$  上的弧长不大于 3.
- 半径为  $R$  的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?

8. 求质量分布均匀的对数螺旋线  $r = e^\theta$  在  $(r, \theta) = (1, 0)$  和  $(r, \theta) = (e^\phi, \phi)$  之间一段的重心坐标.
9. 求圆的渐伸线  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$  上  $A(a, 0), B(a, -2\pi a)$  之间部分与直线  $\overline{AB}$  围成图形的面积.
10. 试求由抛物线  $y^2 = 2x$  与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.
11.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增, 用定积分第二中值定理证明  $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$ .
12. (Dirichlet 判别法). 设  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上单调,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  $\forall A \geq a, g(x) \in R[a, A]$  且  $|\int_a^A g(x)dx| \leq M$  恒成立. 证明极限  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)g(x)dx$  存在.

### 3.2 解答

1.  $\text{LHS} = \beta \int_0^\alpha f(x)dx \geq \beta \alpha f(\alpha) \geq \alpha(\beta - \alpha)f(\alpha) \geq \alpha \int_\alpha^\beta f(x)dx = \text{RHS}$ .
2. 等式左右两边对  $x$  积分, 得到  $\int_y^{x+y} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + xf(y) + \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$ . 类似有  $\int_x^{x+y} f(t)dt + \int_0^y f(t)dt + yf(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$ . 两式相减得  $xf(y) + \frac{x^3y}{3} = yf(x) + \frac{xy^3}{3}$ , 即是  $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$ . 从而  $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$ . 经验证符合题意.
3. 设矩阵  $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$  有相似标准型  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2$  是方程  $\lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) = 0$  的两个根. 则原椭圆在新坐标系下的方程为  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$ , 面积  $S = \pi \sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}} = \pi \sqrt{\frac{1}{AC - B^2}}$ .
4. 对应  $[\theta, \theta + d\theta]$  的扇形面积  $dS = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$ , 其质心位于  $\frac{2}{3}r(\theta)$  处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为  $dV = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta 2\pi \frac{2}{3}r(\theta) \sin \theta = \frac{2\pi}{3}r^3(\theta) \sin \theta d\theta$ . 两边积分得到结果.
5. 原命题等价于  $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$  绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系  $\begin{cases} x = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \cos \theta \\ y = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \sin \theta \end{cases}$ , 则面积  $S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta) \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = 8\pi a^2$ .
6. 设  $f'(M) = 0$ . 则周长  $C = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \leq \int_0^1 (1 + |f'(x)|) dx = 1 + \int_0^M f'(x) dx - \int_M^1 f'(x) dx = 1 + 2f(M) \leq 3$ .
7. 球心向上移动距离  $h$  时, 球位于水外的体积为  $V(h) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_0^h \pi (\sqrt{R^2 - z^2})^2 dz = \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi (R^2 h - \frac{1}{3} h^3)$ . 对应位移  $[h, h + dh]$  所做的微功  $dW = gV(h)\rho dh$ . 从而  $W = g \int_0^R V(h) dh = g(\frac{2}{3} \pi R^4 + \frac{5}{12} \pi R^4) = \frac{13}{12} g \pi R^4$ .
8.  $\bar{x} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \cos \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(\sin \phi + 2 \cos \phi) - 2}{5(e^\phi - 1)}, \bar{y} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(2 \sin \phi - \cos \phi) + 1}{5(e^\phi - 1)}$ .
9. 直线  $AB$  的参数方程  $\begin{cases} x = \phi(t) = a \\ y = \psi(t) = t \end{cases}, t \in [-2\pi a, 0]$ . 于是  $S = - \int_0^{2\pi} y(t) dx(t) - \int_{-2\pi a}^0 \psi(t) d\phi(t) = - \int_0^{2\pi} a(\sin t - t \cos t) a(t \cos t) dt + 0 = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 + \pi a^2$ .
10. 焦点为  $(\frac{1}{2}, 0)$ , 设过焦点的直线为  $x - \frac{1}{2} = ky$ , 与抛物线交点为  $y_1, y_2$ , 则围成的面积为  $S = \int_{y_1}^{y_2} (ky + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}) dy = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2)$ . 联立直线与抛物线, 由韦达定理知  $y_1 + y_2 = 2k, y_1 y_2 = -1$ . 则  $S = \frac{2}{3}(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ . 因此  $k = 0$  时面积最小, 为  $\frac{2}{3}$ .
11.  $f(x)$  单调,  $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$ . 由定积分第二中值定理,  $\int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) f(x) dx = f(a) \int_a^\xi (x - \frac{a+b}{2}) dx + f(b) \int_\xi^b (x - \frac{a+b}{2}) dx = f(a) \int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) dx + (f(b) - f(a)) \int_\xi^b (x - \frac{a+b}{2}) dx = (f(b) - f(a)) \frac{1}{2}(b - \xi)(\xi - a) \geq 0$ .
12. 由极限定义,  $\forall \epsilon > 0, \exists X > a, \text{s.t. } \forall x \geq X, |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{4M}$ . 从而  $\forall A', A'' \geq X, |\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx| = |f(A') \int_{A'}^\xi g(x)dx + f(A'') \int_\xi^{A''} g(x)dx| \leq 2M(|f(A')| + |f(A'')|) \leq \epsilon$ . 由柯西收敛定理知极限存在.

## 4 第 4 次习题课: 广义积分的收敛性与计算

### 4.1 问题

1.  $f(x) > 0, x \in (1, +\infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = -\lambda, \lambda > 1$ , 试判断  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  的收敛性.
2. (Euler 积分). 求积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ .
3. (Dirichlet 积分). 求积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .
4. 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = 0$ .

5. 计算  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ .
6.  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上内闭可积,  $f(+\infty) = A, f(-\infty) = B$ . 证明  $\forall a \in \mathbb{R}$ , 广义积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a) - f(x)]dx$  收敛, 并求其值.
7. 讨论广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$  的收敛性.
8. 讨论广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{e^x \sin 2x}{x^p} dx$  的收敛性和绝对收敛性.
9. 讨论广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^p} dx, p \geq 0, a \in \mathbb{R}$  的收敛性.
10. 讨论广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q |\sin x|^r} dx, p, q, r > 0$  的收敛性.
11.  $f(x) \in C^1[0, 1]$  且  $f'(x) > 0$ , 证明广义积分  $\int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{x^p} dx$  在  $p < 2$  时收敛, 在  $p \geq 2$  时发散.
12.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 证明  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \frac{1}{x}) dx$  收敛.

## 4.2 解答

1. 由极限定义,  $\exists X > 1, \text{s.t.} \forall x > X, \frac{\ln f(x)}{\ln x} < -\frac{\lambda+1}{2} \Leftrightarrow f(x) < x^{-\frac{\lambda+1}{2}}$ . 由比较判别法知无穷积分收敛.
2. 由对称性,  $I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \sin x dx$ . 做两倍变换,  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ .
3. 注意到  $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$ , 从而  $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ . 定义  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$ . 由于  $x \rightarrow 0$  时  $f(x) = O(x)$ , 因此  $f(x) \in R[0, \pi]$ , 由 Riemann-Lebesgue 引理 (2.1.2) 知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) \sin(n+\frac{1}{2})x dx = 0$ , 即是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ . 再利用恒等式  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  立得结论.
4. 做变换  $t = \frac{1}{x}$ , 则  $\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt = \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt := I_1 + I_2$ . 对于  $I_1$ , 由定积分第二中值定理知  $\exists \xi_A \in [1, A]$  s.t.  $I_1 = \int_1^{\xi_A} \cos^n t dt$ . 因此对于任意固定的  $A, n \rightarrow +\infty$  时  $I_1 \rightarrow 0$ . 对于  $I_2$ , 成立  $|I_2| \leq \int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{A}$ . 因此  $\forall \epsilon > 0$ , 选择  $A = \frac{2}{\epsilon}$ , 则  $|I_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$ , 并选择充分大的  $n$  使得  $|I_1| < \frac{\epsilon}{2}$ , 此时  $|I| \leq \epsilon$ , 由极限定义知结论成立.
5. 做倒数变换, 知  $I(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{d\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x^2})(1+x^{-\alpha})} = I(-\alpha)$ . 又由于  $I(\alpha) + I(-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ , 因此  $I(\alpha) \equiv \frac{\pi}{4}$ .
6.  $\int_M^N [f(x+a) - f(x)]dx = \int_N^{N+a} f(x)dx - \int_M^{M+a} f(x)dx \rightarrow (A-B)a$ .
7. 函数恒正, 只需讨论有界性. 令  $u_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$ , 则  $u_k \leq k\pi \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = k\pi \int_0^\pi \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} \leq 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+4(k-1)^6 \pi^4 x^2} = \frac{k}{\pi(k-1)^3} \int_0^{(k-1)^3 \pi^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{2k^2}$ . 由于  $\int_0^{+\infty} = \sum_{k=1}^n u_k \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < +\infty$ , 因此原广义积分收敛.
8. 先考虑积分收敛性. 显然当  $p \leq 0$  时原积分发散. 当  $p > 0$  时, 由于  $|\int_a^A e^{\sin x} \sin 2x dx| = 2|\int_{\sin a}^{\sin A} e^{\sin x} \sin x d \sin x| = 2|e^{\sin A}(\sin A - 1) - e^{\sin a}(\sin a - 1)| < 8e, \frac{1}{x^p}$  单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法,  $\int_1^{+\infty} \frac{e^x \sin 2x}{x^p} dx$  收敛, 我们只需考察积分在 0 处的性质. 由于当  $x \rightarrow 0$  时  $\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \sim \frac{2}{x^{p-1}}$ , 因此  $p \geq 2$  时原积分发散,  $p < 2$  时原积分收敛. 再考虑绝对收敛性. 当  $1 < p < 2$  时,  $|\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p}| \leq \frac{e}{x^p}$ , 因此绝对收敛. 当  $0 < p \leq 1$  时,  $|\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p}| \geq \frac{2p}{e} |\frac{\sin 2x}{(2x)^p}| \geq \frac{1}{e} |\frac{\sin^2 2x}{(2x)^p}| = \frac{1}{2e} (\frac{1-\cos 4x}{(2x)^p})$ , 而  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{(2x)^p} dx$  收敛,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x)^p} dx$  发散, 因此原积分条件收敛.
9. 当  $a \neq 0, p > 0$  时,  $\frac{1}{1+x^p}$  单调递减趋于 0,  $\int_0^N \cos ax dx$  有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 当  $a \neq 0, p = 0$  时显然发散. 当  $a = 0, p > 1$  时显然收敛. 当  $a = 0, 0 \leq p \leq 1$  时显然发散.
10. 显然当  $q \leq p+1$  时原积分发散. 当  $q > p+1$  时, 一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q |\sin t|^r} dt \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^p \pi^p \int_0^\pi \frac{dt}{1+(k\pi)^q |\frac{2}{\pi} t|^r} \leq C_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^p}{k^{\frac{q}{r}}} \int_0^{2(k\pi)^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}$$

另一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q |\sin t|^r} dt \geq \sum_{k=0}^{+\infty} (k\pi)^p \int_0^\pi \frac{dt}{1+[(k+1)\pi]^q |t|^r} \geq C_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^p}{(k+1)^{\frac{q}{r}}} \int_0^{\pi[(k+1)\pi]^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}$$

$r > 1, \int_0^A \frac{dt}{1+t^r}$  一致有界.  $r = 1, \int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim \ln A$ .  $r < 1, \int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim A^{1-r}$ . 因此原积分收敛 iff  $q > (p+1) \max(r, 1)$ .

11. 由柯西微分中值定理,  $\exists \xi \in (0, x)$  s.t.  $\frac{f(x)-f(0)}{x^p} = \frac{f'(\xi)}{x^{p-1}}$ . 由于  $f'(x)$  连续且大于 0, 因此  $\exists 0 < m < M$  s.t.  $m < f'(x) < M$  对  $\forall x \in [0, 1]$  均成立, 即  $\frac{m}{x^{p-1}} < \frac{f(x)-f(0)}{x^p} < \frac{M}{x^{p-1}}$ . 从而  $p \geq 2$  时发散,  $p < 2$  时收敛.
12.  $\int_0^{+\infty} f(x - \frac{1}{x}) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} f(x - \frac{1}{x}) d(x - \frac{1}{x}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}} f(t) dt$ . 由于  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  收敛,  $\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}$  单调有界, 由 Abel 判别法知  $\int_0^{+\infty} f(x - \frac{1}{x}) dx$  收敛. 另一侧同理.

## 5 第 5 次习题课: 积分的综合运用

### 5.1 问题

1. 证明  $\pi$  是无理数. 你可以按照以下步骤: (1) 设  $\pi = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$ , 定义  $f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$ , 证明  $\forall i \in \mathbb{N}_+, f^{(i)}(0), f^{(i)}(\pi)$  都是整数. (2) 证明定积分  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$  也是整数. (3) 证明  $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 1$ , 得到矛盾.
2.  $f(x) \in C^2[0, 1], f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$ , 证明  $\int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 4$ , 取等号当且仅当  $f(x) = x^3 - x^2$ .
3. 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上恒正, 且满足 Lipschitz 条件  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ . 又已知对于  $a \leq c \leq d \leq b$  成立  $\int_c^d \frac{dx}{f(x)} = \alpha, \int_a^b \frac{dx}{f(x)} = \beta$ . 证明积分不等式  $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L\alpha} \int_c^d f(x) dx$ .
4.  $f(x) \in C[0, +\infty)$  且平方可积,  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ . 证明  $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ .
5. (Euler-Poisson 积分). 利用数列  $\left\{ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right\}$  的极限, 求积分  $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ . (你也许需要用到如下命题: 当  $a \geq 1$  时,  $0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^a \leq \frac{x^2}{a} e^{-x}$  在区间  $[0, a]$  上恒成立. 这由导数知识容易验证.)
6. 求积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ .
7.  $a, b > 0$ , 广义积分  $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x}) dx$  收敛, 证明  $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x}) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt$ .
8.  $f(x) \in C^2[a, b]$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $\int_a^b f(x) dx - (b-a)f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$ .
9.  $f'(x) \in R[0, 1]$ , 定义  $A_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n = \frac{1}{2}(f(0) - f(1))$ .
10. (等周问题). 长为  $L$  的曲线何时围成的区域面积最大? 你可以假设围成的区域是凸域且边界足够光滑, 以及其他正则性条件.
11. 广义积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $\forall k = 1, 2, \dots, n, u_k(x)$  均单调有界. 证明  $\int_0^{+\infty} f(x) \prod_{k=1}^n u_k(x) dx$  收敛.
12.  $f(x) \in C[0, +\infty), a > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + a \int_0^x f(t) dt) = A < \infty$ , 证明  $f(+\infty) = 0$ .

### 5.2 解答

1. (1)  $f(x)$  是一个次数从  $n$  到  $2n$  的多项式. 至于  $f^{(i)}(0)$  是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时  $i \geq n$ , 求导后得到的非零常数值是  $i!c$ , 且  $c$  是整数除以  $n!$  得到的有理数, 从而  $i!c$  是整数. 由于  $f(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f^{(i)}(\pi) = (-1)^i f^{(i)}(0)$ , 因此  $f^{(i)}(\pi)$  也是整数.
- (2) 由分部积分,  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(x)(-\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx = f(0) + f(\pi) + f'(x) \sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx$ .  $f(x)$  是  $2n$  此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - f''(0) - f''(\pi) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(0) + (-1)^n f^{(2n)}(\pi)$ , 因此是整数.
- (3) 在区间  $[0, \pi]$  上成立  $0 \leq a - bx = b(\pi - x) \leq a$ , 因此  $0 \leq f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$ , 从而  $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \int_0^\pi f(x) dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$ . 当  $n$  足够大时,  $\frac{\pi^{n+1} a^n}{n!} < 1$ .
2. 令  $p(x) = x^3 - x^2$ , 从而有  $\int_0^1 [(f''(x))^2 - (p''(x))^2] dx = \int_0^1 [f''(x) - p''(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 f''(x)p''(x) dx - 2 \int_0^1 [p''(x)]^2 dx \geq 0 + 2f'(x)p''(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 f'(x)p'''(x) dx - 8 = 2f'(1)p''(1) - 2f(x)p'''(x)|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x)p''''(x) dx - 8 = 0$ .
3. 设  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_0)$ , 从而  $m \leq f(x) \leq m + L|x - x_0|, \frac{1}{m+L|x-x_0|} \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}$ . 两边积分, 得到

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq m(b-a) + \frac{L}{2}[(x_0-a)^2 + (x_0-b)^2]$$

$$\frac{b-a}{m} \geq \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \beta \geq \frac{1}{L} \ln \frac{(x_0 + \frac{m}{L} - a)(-x_0 + \frac{m}{L} + b)}{(\frac{m}{L})^2}$$

因此

$$\int_a^b f(x) dx \leq \sup_{x_0 \in [a, b]} \left\{ m(b-a) + \frac{L}{2}[(x_0-a)^2 + (x_0-b)^2] \right\} = m(b-a) + \frac{L}{2}(b-a)^2$$

$$\beta \geq \inf_{x_0 \in [a, b]} \left\{ \frac{1}{L} \ln \frac{(x_0 + \frac{m}{L} - a)(-x_0 + \frac{m}{L} + b)}{(\frac{m}{L})^2} \right\} \Rightarrow b-a \leq \frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L}$$

从而

$$\int_a^b f(x) dx \leq m \left( \frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L} \right) + \frac{L}{2} \left( \frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L} \right)^2 = \frac{(e^{2L\beta} - 1)m^2}{2L}$$



对比欲证结论, 只需证明

$$\int_c^d f(x)dx \geq \alpha m^2 = m^2 \int_c^d \frac{dx}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{\int_c^d f(x)dx}{\int_c^d \frac{1}{f(x)}dx} \geq m^2$$

这由  $f(x) \geq m, \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}$  立得.

4. 由 L'Hospital,  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{g^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} 2g(x)f(x) = 0$ . 因此  $\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx = \int_0^A g^2(x)d(-\frac{1}{x}) = -\frac{g^2(A)}{A} + 2 \int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}dx$ . 再由 Cauchy 不等式,  $\left(\int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}dx\right)^2 \leq \int_0^A f^2(x)dx \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \Rightarrow \left(\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx + \frac{g^2(A)}{A}\right)^2 \leq 4 \int_0^A f^2(x)dx \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \Rightarrow \left(\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx\right)^2 \leq 4 \int_0^A f^2(x)dx \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \Rightarrow \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \leq 4 \int_0^A f^2(x)dx$ . 令  $A \rightarrow +\infty$  即可.

5. 记  $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ . 做变换  $t = \sqrt{n} \sin x$  知  $I_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . 由于  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$ , 因此只需求出极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right] dt$ . 在提示中令  $x = t^2, a = n$ , 得到估计式  $0 \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right] dt \leq \frac{\int_0^{\sqrt{n}} t^4 e^{-t^2} dt}{n}$ . 当  $n \rightarrow +\infty$  时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0, 由夹逼原理知欲求极限存在且为 0. 从而  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

6.  $I = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2x)}{(2x)^2+4} d(2x) = \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{\ln 2}{6} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \stackrel{x=e^t}{=} \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{e^{2t}+1} dt - \frac{\pi \ln 2}{12} = -\frac{\pi \ln 2}{12}$ .

7. 令  $t = ax - \frac{b}{x}$ , 则  $x = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a}, ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2+4ab}, dx = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}} dt$ , 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x}) dx &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^0 f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) dt \end{aligned}$$

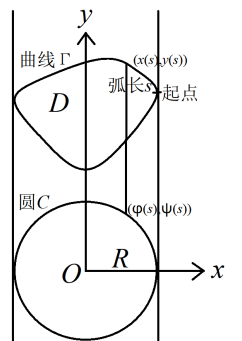
8.  $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)d(x-a) = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)d\frac{(x-a)^2}{2} = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} f''(x)dx = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} dx$ . 同理  $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} + f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2} dx$ . 两式相加得  $\int_a^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + (f''(\xi_1) + f''(\xi_2))\frac{(b-a)^3}{48} = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$ . 最后一步用了 Darboux 定理.

9. 注意到  $A_n = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2} + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1)) = \sum_{k=1}^n \left( \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n} \right) + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1))$ . 设  $|f'(x)| \leq M$ , 从而  $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)d(x-\frac{2k-1}{2n}) = f(x)(x-\frac{2k-1}{2n}) \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)dx = \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n} - B_n$ , 其中  $B_n := \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} (x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} (x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)dx = f'(\xi_{k,1}) \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} (x-\frac{2k-1}{2n})dx + f'(\xi_{k,2}) \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} (x-\frac{2k-1}{2n})dx = -\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2} + \frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}$ . 综上所述, 我们有  $nA_n = \sum_{k=1}^n \frac{f'(\xi_{k,2})-f'(\xi_{k,1})}{8n} + \frac{f(0)-f(1)}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n = \frac{1}{8}(\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f'(x)dx) + \frac{f(0)-f(1)}{2} = \frac{f(0)-f(1)}{2}$ .

10. 设曲线方程为  $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0, L]$ , 此处选择  $\Gamma$  的弧长为参数, 则  $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ ,

且  $D$  的面积为  $A = \int_0^L x dy = \int_0^L x(s)y'(s)ds$ . 又设  $C: \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$  是以  $O$  为中心,  $R$  为

半径的圆, 此处仍选择  $\Gamma$  的弧长为参数, 则  $C$  的面积为  $\pi R^2 = -\int_0^L y dx = -\int_0^L \psi(s)x'(s)ds$ . 从而由 Cauchy 不等式,  $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))ds \leq \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2}ds \leq \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)}ds = RL$ . 因此我们成立  $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq A + \pi R^2 \leq RL \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{4\pi}$ . 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是  $(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)$ . 用右边减去左边得到  $(x(s)x'(s) + \psi(s)y'(s))^2 = 0$ . 由于  $x(s)^2 + \psi(s)^2 = R^2$ , 两边求导得  $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = y'(s), \psi(s) = y(s) + y_0$ , 即  $\Gamma$  方程为  $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ , 圆也!



11. 由 Abel 判别法,  $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)dx$  收敛, 而  $u_2(x)$  单调有界, 因此  $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)u_2(x)dx$  收敛, 依此类推.
12. 记  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ . 由 L'Hospital 法则,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}F(x)}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}(aF(x)+f(x))}{ae^{ax}} = \frac{A}{a}$ , 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A - a \cdot \frac{A}{a} = 0$ .

## 6 第 6 次习题课: 数项级数的基本概念与正项级数

### 6.1 问题

- 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$  的收敛性.
- 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!})^p$  的收敛性.
- 判断级数  $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$  的收敛性.
- 计算  $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4k^2-4k+1}$ .
- 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}} \leq p, p \geq 1$ .
- $a_n > 0$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1) \geq 1$ .
- $a_n > 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$  收敛.
- $0 < a_1 < \frac{\pi}{2}, a_n = \sin a_{n-1}$ , 判断级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p$  的收敛性.
- (Bertrand 判别法). 对于正项级数, 证明: 
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n [n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1] > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n [n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1] < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散} \end{cases}$$
- 正项级数  $a_n$  单调递减, 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$  同敛散.
- 是否存在部分和序列有界但通项趋于 0 的发散级数?
- $a_n > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛,  $a_n - a_{n+1}$  单调下降. 证明  $a_n$  单调区域趋于 0, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}) = +\infty$ .

### 6.2 解答

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n} = 1$ , 因此原级数发散.
- 考虑 Rabbe 判别法.  $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = n[(\frac{2n+5}{2n+2})^p - 1] = n[(1+\frac{3}{2n+2})^p - 1] = n[1+\frac{3p}{2n+2}+o(\frac{1}{n})-1] \rightarrow \frac{3}{2}p$ , 因此  $p > \frac{2}{3}$  时收敛,  $p < \frac{2}{3}$  时发散.  $p = \frac{2}{3}$  时, 记  $f(x) = (1+x)^{\frac{2}{3}}$ , 则  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = (1+\frac{3}{2(n+1)})^{\frac{2}{3}} = 1+\frac{1}{n+1}+\frac{f''(\xi)}{2!}(\frac{3}{2(n+1)})^2 < 1+\frac{1}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} := \frac{b_n}{b_{n+1}}$ . 由  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$  知  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ , 即级数发散.
- $\sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4}, \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-2 \cos \frac{\pi}{4}} = 2 \sin \frac{\pi}{8}, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2+2 \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2-2 \cos \frac{\pi}{8}} = 2 \sin \frac{\pi}{16}$ , 依此类推, 再利用  $\sin x \sim x$  知原级数收敛.
- 注意到  $\arctan \frac{2}{4k^2-4k+1} = \arctan \frac{1}{2k-1} - \arctan \frac{1}{2k}$ , 从而  $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4k^2-4k+1} = \arctan \frac{1}{2}$ .
- $\frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}} = n^{\frac{p-1}{p}} [(\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^p - (\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}})^p] \stackrel{f(x)=x^p \text{ 的微分中值定理}}{=} n^{\frac{p-1}{p}} p(\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}})^{p-1} (\frac{1}{\sqrt[n]{n}} - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}) \leq p(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}})$ . 两边累加.
- 反证法. 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1) < 1$ . 则  $\exists N > 0, \text{s.t. } \forall n \geq N, n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}$ . 两边累加, 知  $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{N+i} < \frac{a_N}{N}$ , 这与调和级数的发散性矛盾.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛  $\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$ . 因此可按从小到大顺序将  $\{a_n\}$  重排为  $a_{\phi(1)} \leq a_{\phi(2)} \leq \cdots \leq a_{\phi(n)} \leq \cdots$ . 令  $b_n = \frac{n}{a_{\phi(1)}+a_{\phi(2)}+\cdots+a_{\phi(n)}}$ , 则  $\{b_n\}$  单调递减, 且  $b_{2n} = \frac{2n}{a_{\phi(1)}+\cdots+a_{\phi(2n)}} \leq \frac{2n}{a_{\phi(n)}+\cdots+a_{\phi(2n)}} \leq \frac{2n}{na_{\phi(n)}} = \frac{2}{a_{\phi(n)}}$ , 故  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$ . 又因为  $\frac{n}{a_1+\cdots+a_n} \leq b_n$ , 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$  收敛.

8. 上学期例题已证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n^2 = 3$ , 因此  $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}, a_n^p \sim (\frac{3}{n})^{\frac{p}{2}}$ , 从而当  $p \leq 2$  时级数发散,  $p > 2$  时级数收敛.
9. 先证明第一种情况. 由条件知  $\exists N_1 > 0, \text{s.t.} \forall n > N_1, \ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1] > r_1 > 1 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + r_1}$ . 可以验证当  $1 < p < r_1$  时,  $\frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + r_1} < \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \Leftrightarrow \frac{(n+1)[\ln^p(n+1) - \ln^p n]}{\ln^{p-1} n} < r_1$ . 利用  $f(x) = x^p$  的微分中值定理, 知 LHS  $= \frac{(n+1)p \ln^{p-1}(n+\theta)[\ln(n+1) - \ln n]}{\ln^{p-1} n} < p \underbrace{(n+1)[\ln(n+1) - \ln n]}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\ln^{p-1}(n+1)}{\ln^{p-1} n}}_{\rightarrow 1} < r_1 = \text{RHS}$  当  $n$  足够大时成立.
- 因此有  $\exists N_2 > N_1, \text{s.t.} \forall n > N_2, \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \Rightarrow a_n < \frac{C}{n \ln^p n}$ . 由于  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{n \ln^p n}$  收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛.
- 再证明第二种情况. 由条件知  $\exists N_3 > 0, \text{s.t.} \forall n > N_3, \ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1] < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + 1} > \frac{n \ln n}{(n+1) \ln(n+1)} \Rightarrow a_n > \frac{C}{n \ln n}$ . 由于  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{n \ln n}$  发散, 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散.
10.  $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{2^n+k} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} a_{2^n} \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_{2^{n-1}+k} = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ .
11. 存在. 一个例子为  $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$ .
12. 前者显然. 对于后者,  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} \geq \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{a_n - a_{n+1}}{\sum_{k=n}^{+\infty} (a_k^2 - a_{k+1}^2)} = \frac{a_n - a_{n+1}}{\sum_{k=n}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1})} \geq \frac{a_n - a_{n+1}}{\sum_{k=n}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})(a_k + a_{k+1})} \geq \frac{1}{2 \sum_{k=n}^{+\infty} a_n} \rightarrow +\infty$  当  $n \rightarrow +\infty$  时.

## 7 第 7 次习题课: 任意项级数与数项级数的运算

### 7.1 问题

- 讨论级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln n}$  的收敛性和绝对收敛性.
- 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$  的收敛性.
- $p, q > 0$ , 讨论级数  $1 - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q} + \dots$  的收敛性与绝对收敛性.
- 讨论级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}]$  的收敛性与绝对收敛性.
- 级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})$  绝对收敛,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  收敛.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 数列  $p_n > 0$  且单调递增趋于  $+\infty$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{p_n} = 0$ .
- 计算级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{5}n)}{n}$ .
- $p > 0$ , 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} > \frac{2^p}{2^p+1}$ .
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$  且绝对收敛,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$  且条件收敛, 证明 Cauchy 乘积收敛且  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = AB$ .
- 如果对任意以 0 为极限的数列  $\{x_n\}$  都有  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  也收敛. 绝对收敛性呢?
- 对于两个发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?
- (1) 对于收敛级数和发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?  
(2) 对于正项收敛级数和正项发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

### 7.2 解答

- $\frac{1}{\ln n}$  单调递减趋于 0,  $\sum_{n=2}^k \sin n$  对于  $\forall k \geq 1$  有一致上界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 由于  $|\frac{\sin n}{\ln n}| \geq \frac{\sin^2 n}{\ln n} = \frac{1 - \cos 2n}{2 \ln n} = \frac{1}{2 \ln n} - \frac{\cos 2n}{\ln n}$ , 而  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{\ln n}$  收敛,  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2 \ln n}$  发散, 因此不绝对收敛.
- 合并同号项, 级数改写为  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k b_k$ , 其中  $b_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \leq \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0$ . 另一方面,  $b_k \geq \int_0^1 \frac{1}{k^2+x} dx + \int_1^2 \frac{1}{k^2+x} dx + \dots + \int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{k^2+x} dx = \int_0^{2k+1} \frac{1}{k^2+x} dx = \ln \frac{(k+1)^2}{k^2}$ , 而  $b_{k+1} \leq \int_{-1}^0 \frac{1}{(k+1)^2+x} dx + \dots + \int_{2k+1}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2+x} dx =$

$\int_{-1}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2+x^2} dx = \ln \frac{(k+1)^2+2(k+1)}{k(k+2)} \Rightarrow b_k - b_{k+1} \geq \ln \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)} \geq 0$ . 由 Leibniz 判别法知收敛.

3. (a) 当  $p > 1, q > 1$  时,  $|a_n| \leq \frac{1}{n^{\min(p,q)}}$ , 因此绝对收敛. (b) 当  $0 < p = q \leq 1$  时, 由 Leibniz 判别法知条件收敛. (c) 当  $p > 1, 0 < q \leq 1$  或  $0 < p \leq 1, q > 1$  时, 级数正部 (或负部) 收敛, 负部 (或正部) 发散, 因此发散. (d) 当  $0 < p < q \leq 1$  时, 由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q})}{\frac{1}{(2n-1)^p}} = 1$  知级数发散. (e) 当  $0 < q < p \leq 1$  时, 由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{(2n)^q} + \frac{1}{(2n+1)^p}}{-\frac{1}{(2n)^q}} = 1$  知级数发散.

4. (a)  $p > 1$  时, 由  $\left| \ln[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}] \right| < \frac{1}{n^p}$  知绝对收敛.

(b) 由 Taylor 展开,  $\ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2(1+\xi_n)^2} \frac{1}{n^{2p}}$ , 因此  $\frac{1}{2} < p \leq 1$  时级数条件收敛,  $0 < p < \frac{1}{2}$  时级数发散.

5. 记  $S_{n,n+p} = \sum_{k=n}^{n+p} b_k, M = \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n - a_{n-1}|$ . 由收敛性,  $\exists N > 0, \text{s.t. } \forall n > N, |S_{n,n+p}| < \frac{\epsilon}{2M}$ . 从而有  $\forall n > N, |\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k| = |\sum_{k=n}^{n+p} a_k (S_{n,k} - S_{n,k-1})| = |a_{n+p} S_{n,n+p} + \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) S_{n,k}| \leq |a_{n+p}| |S_{n,n+p}| + \sup_{n \leq k \leq n+p-1} |S_{n,k}| \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \sup_{n \leq k \leq n+p} |S_{n,k}| \left[ |a_{n+p}| + \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k| \right] \leq \frac{\epsilon}{2M} 2M = \epsilon$ . 由 Cauchy 判别准则知  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  收敛.

6. 记  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 并设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ , 则  $\sum_{k=1}^n p_k a_k = p_1 S_1 + \sum_{k=2}^n p_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (p_k - p_{k+1}) + S_n p_n \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^n p_k S_k}{p_n} = S_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} = (S_n - S) - \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} + S \frac{p_1}{p_n}$ . 显然  $S_n - S \rightarrow 0, S \frac{p_1}{p_n} \rightarrow 0$ . 对于第二项, 设  $|S_n| \leq M$ , 由极

限定义,  $\exists N_1 > 1, \text{s.t. } \forall n \geq N_1, |S_n - S| < \frac{\epsilon}{2}$ . 从而有估计  $|\sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n}| \leq 2M \sum_{k=1}^{N_1} \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=N_1+1}^{n-1} \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \leq 2M \frac{p_{N_1+1} - p_1}{p_n} + \frac{\epsilon}{2}$ . 又由极限定义,  $\exists N_2 > N_1, \text{s.t. } \forall n \geq N_2, \frac{p_{N_1+1} - p_1}{p_n} \leq \frac{\epsilon}{4M}$ . 此时  $|\sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n}| < \epsilon$ , 即  $\sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \rightarrow 0$ .

7.  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \sqrt{5}k}{k} = -\int_{\sqrt{5}}^{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kt dt = -\int_{\sqrt{5}}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t - \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = -\int_{\sqrt{5}}^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t dt + \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{5}) \xrightarrow{R-L} \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{5})$ .

8. 利用函数  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  的凸性, 成立  $\frac{1}{(4k-1)^p} - \frac{1}{(4k)^p} + \frac{1}{(4k+1)^p} - \frac{1}{(4k+2)^p} > \frac{1}{(4k)^p} - \frac{1}{(4k+2)^p}$ , 从而  $S_{4n+2} > 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}(1 - S_{2n})$ , 两边取极限知  $S > 1 - \frac{S}{2^p}$ , 即  $S > \frac{2^p}{2^p+1}$ .

9. 记  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , 则  $\sum_{k=1}^n c_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \dots + a_n B_1 = A_n B + (a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_1)$  (这里  $\beta_k = B_k - B := \Delta_1(n) + \Delta_2(n)$ ). 显然  $\Delta_1(n) \rightarrow AB$ , 下证  $\Delta_2(n) \rightarrow 0$ . 设  $|\beta_n| \leq \beta, \forall n \geq 1$ . 由定义,  $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 3, \text{s.t. } \forall n > N, \forall p \geq 1, |\beta_n| < \frac{\epsilon}{2(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|)}$ ,  $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \frac{\epsilon}{2\beta}$ . 从而当  $n \geq 2N$  时,  $|\Delta_2(n)| \leq |\sum_{k=1}^N a_k \beta_{n+1-k}| + |\sum_{k=N+1}^n a_k \beta_{n+1-k}| \leq \epsilon$ .

10. 不妨设  $a_n > 0$ , 否则可将对应  $x_n$  反号, 题目条件与绝对收敛性结论不变. 采用反证法, 如果  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散, 则可以归

纳构造数列  $A_n$ , 满足  $A_0 = 0, A_n = \inf_{k \in \mathbb{N}_+, i=A_{n-1}+1}^k a_i \geq n$ . 从而可定义  $\{x_n\}$  为  $A_1 - A_0$  个 1,  $A_2 - A_1$  个  $\frac{1}{2}, \dots, A_n - A_{n-1}$  个  $\frac{1}{n}, \dots$  的依次排列, 满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ , 而  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n > 1 + 1 + \dots = +\infty$ . 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  绝对收敛.

11. 不一定, 反例是  $a_0 = 1, a_n = -(\frac{3}{2})^n$  和  $b_0 = 1, b_n = (\frac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}})$ . 显然  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  均发散, 但它们的 Cauchy 乘积  $c_n = (\frac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}) - (\frac{3}{2})^{n-1}(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}) - \dots - (\frac{3}{2})^{n-1}(2^1 + \frac{1}{2^2}) - (\frac{3}{2})^n = (\frac{3}{4})^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$  收敛.

12. (1) 不一定, 反例是  $a_n \equiv 0$  和  $b_n \equiv 1$ . 当然也不一定收敛, 如  $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = n$ .

(2) 一定. 设  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  发散, 则  $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \geq a_1 b_{n-1}$ , 由比较判别法知  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$  发散.

## 8 第 8 次习题课: 无穷乘积与函数项级数的基本概念

### 8.1 问题

1. 证明  $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$  当  $n \rightarrow +\infty$  时极限存在, 并求其值. (请不要用 Stirling 公式)

2. 设  $x \in (0, 1)$ , 证明  $\prod_{n=1}^{+\infty} (1+x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1-x^{2n-1})^{-1}$ .

3. (Euler 公式). 证明  $\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2})$ . 你可以将  $\sin[(2n+1)\phi]$  写成关于  $\sin \phi$  的多项式, 并利用零点求解之.

- 讨论无穷乘积  $\prod_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$  的收敛性.
- 讨论无穷乘积  $\prod_{n=n_0}^{+\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$  的收敛性, 其中取  $n_0$  足够大使得每一项都是正数.
- 计算无穷乘积  $2\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$ . 你可以先写出通项公式, 然后逐步化简.
- $f(x) \in D[1, +\infty)$ , 且  $\int_1^{+\infty} |f'(x)|dx$  收敛, 证明广义积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  与无穷级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  同敛散.
- 试构造两个单调递减且发散的正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ , 使得  $\sum_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n)$  收敛.
- 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$  收敛, 证明: (1)  $\forall k \in \mathbb{N}_+, \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k}$  收敛; (2)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k} = 0$ .
- $0 < p < 1, a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n^p}$ , 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛.
- 讨论函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$  的收敛域.
- 讨论函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$  的收敛域.

## 8.2 解答

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+n)^{n+\frac{1}{2}}} \Rightarrow \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1 - (n + \frac{1}{2})\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . 因此有  $a_n = \exp(\ln a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}) = \exp\{\ln a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} [-\frac{1}{12k^2} + o(\frac{1}{k^2})]\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  存在, 并记为  $a(a \neq 0)$ . 另一方面, 由 Wallis 公式,  $a = \frac{a^2}{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n+1}} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^n n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!!}{\sqrt{n}(2n-1)!!} = \sqrt{2\pi}$ .
- $\prod_{n=1}^{+\infty} (1+x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{+\infty} (1+x^{2^i(2n-1)}) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1-x^{2n-1})^{-1}$ .
- 注意到  $\sin[(2n+1)\phi]$  可展开为  $\sin \phi$  的  $2n+1$  次多项式, 且只含奇次幂项, 因此  $\sin[(2n+1)\phi] = \sin \phi P(\sin^2 \phi)$ , 其中  $P(\cdot)$  是  $n$  次多项式. 由极限关系知  $P(0) = 2n+1$ , 且 LHS 全部零点为  $x_k = \frac{k\pi}{2n+1}, k=1, \dots, n$ , 因此  $P(t) = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right) \Rightarrow \sin x = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$ . 现在, 问题变为求 RHS 在  $n \rightarrow +\infty$  时的极限. 记  $U_m = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right), V_m = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_m = x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right), 1 > V_m \geq \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{(\frac{x}{k})^2}{\pi^2} \frac{k^2 \pi^2}{(2n+1)^2}\right) = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) > \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$ . 因此由夹逼原理,  $\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$ .
- $\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 = \frac{1}{e} e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} - 1 \sim n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1 \sim -\frac{1}{2n}$ , 因此该无穷乘积发散.
- $\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} - 1 = \frac{\alpha\beta - \gamma + (\alpha + \beta - \gamma - 1)n}{(1+n)(\gamma+n)}$ . 因此该无穷乘积收敛当且仅当  $\alpha + \beta - \gamma - 1 = 0$ .
- 主要难点在于如何写成通式.

$$\begin{aligned}
 P_n &= 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{(2^{k-1}-1)!!(2^k)!!}{(2^{k-1})} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2k}} (2^n-1)!! = \frac{(2^n)!}{2^{2^{n-1}-1}(2^{n-1})!} 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2^{2^{k-1}-1}(2^{k-1})!}{2^{2^{k-2}}(2^{k-2})!} \cdot \frac{(2^k)!}{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!} \right]^{\frac{1}{2k-1}} \\
 &= 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[ 2^{2^{k-1}-\frac{1}{2}} \frac{((2^{k-1})!)^3}{((2^{k-2})!)^2(2^k)!} \right]^{\frac{1}{2k-1}} = 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[ 2^{1-\frac{1}{2k}} \frac{\left(\frac{(2^{k-1})!}{(2^k)!}\right)^{\frac{1}{2k-1}}}{\left(\frac{(2^{k-2})!}{(2^{k-1})!}\right)^{\frac{1}{2k-2}}} \right] = 2\sqrt{2} \cdot 2^{n-1-\sum_{k=2}^n \frac{1}{2k}} \frac{1}{\frac{1}{2} \left[ \frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^{\frac{1}{2n-1}}} \\
 &= 2 \cdot 2^{n+\frac{1}{2n}} \left[ \frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^{\frac{1}{2n-1}} = 2 \left\{ 2^{n2^{n+1}} \left[ \frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2^n}} \stackrel{\text{Stirling}}{\sim} 2 \left[ \frac{2\pi 2^{n-1} \left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^n \left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^{n+1}}} \right]^{\frac{1}{2^n}} = e
 \end{aligned}$$

- 只需注意到  $\left| \sum_{k=m}^{n-1} - \int_m^n f(x)dx \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} |f(k) - f(x)|dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \int_k^{k+1} |f'(t)|dtdx \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \int_k^{k+1} |f'(t)|dxdt \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} |f'(t)|dt = \int_m^n |f'(t)|dt$ , 因此由 Cauchy 收敛准则知广义积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  与无穷级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  同敛散.

8. 一个例子如下.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= \underbrace{\frac{1}{1^2}}_{1^2 \uparrow} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{5^2} + \underbrace{\frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{6^2}}_{6^2 \uparrow} + \frac{1}{42^2} + \cdots + \frac{1}{1805^2} + \cdots \\ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n &= \frac{1}{1^2} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^2}}_{2^2 \uparrow} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{41^2} + \underbrace{\frac{1}{42^2} + \cdots + \frac{1}{42^2}}_{42^2 \uparrow} + \cdots\end{aligned}$$

显然  $\sum_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛.

9. (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+k)a_{n+k}$  收敛,  $\frac{n}{n+k}$  随  $n$  单调有界, 由 Abel 判别法知收敛. (2) 记  $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} ka_k$ . 则

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=1}^m na_{n+k} \right| &= \left| \sum_{n=1}^m \frac{n}{n+k} (n+k)a_{n+k} \right| = \left| \sum_{n=1}^m \frac{n}{n+k} (R_{n+k-1} - R_{n+k}) \right| \\ &= \left| \frac{1}{k+1} R_k - \frac{m}{k+m} R_{k+m} + \sum_{n=1}^{m-1} R_{n+k} \left( \frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{k+1} |R_k| + \frac{m}{k+m} |R_{k+m}| + \sup_{k+1 \leq j \leq n+m-1} |R_j| \sum_{n=1}^{m-1} \left( \frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) \\ &\leq \frac{1}{k+1} |R_k| + \frac{m}{k+m} |R_{k+m}| + \sup_{j \geq k+1} |R_j| \left( \frac{m}{k+m} - \frac{1}{k+1} \right)\end{aligned}$$

$$\text{令 } m \rightarrow +\infty, \text{ 得到 } \left| \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k} \right| \leq \frac{1}{k+1} |R_k| + \sup_{j \geq k+1} |R_j| \leq 2 \sup_{j \geq k} |R_j| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

10. 容易看出  $a_n$  单调递减.  $a_{n+1} - a_n = -a_{n+1}a_n^p \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^p} < \frac{a_n - a_{n+1}}{\xi_n^p} \stackrel{\text{微分中值定理}}{=} \frac{1}{1-p} (a_n^{1-p} - a_{n+1}^{1-p})$ . 两边累加.

11. 显然收敛域为  $-1 < x < 1$ .

12. 原级数可改写为  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{e^x (1 + \frac{1}{n})^n} \right)^n$ , 而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ , 因此当  $x > -1$  时收敛, 当  $x < -1$  时发散. 而当  $x = -1$  时,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n - n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{\frac{1}{2}}$ , 因此原幂级数发散.

## 9 第 9 次习题课: 函数项级数的一致收敛

### 9.1 问题

1.  $f_0(x) \in R[0, a]$ ,  $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$ , 讨论  $\{f_n(x)\}$  在区间  $[0, a]$  上的一致收敛性.
2. 讨论函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$  在区间  $[0, 1]$  上的一致收敛性.
3. 讨论函数列  $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$  在  $[0, +\infty)$  上的一致收敛性.
4. 函数列  $\{f_n\}, \{g_n\}$  在区间  $I$  上一致收敛, 且对于  $\forall n, f_n, g_n$  在  $I$  上有界. 讨论函数列  $\{f_n g_n\}$  在  $I$  上的一致收敛性.
5. 讨论函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$  在  $\mathbb{R}$  上的绝对收敛性、一致收敛性和绝对一致收敛性.
6. 讨论函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}} \sin nx$  在区间  $(\frac{1}{2}, 1)$  上的一致连续性.
7.  $f(x) \in D[0, \frac{1}{2}]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) \geq 0$ , 讨论  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(x^n)$  在区间  $[0, \frac{1}{2}]$  上一致收敛性.
8.  $f(x) \in C^1(a, b)$ , 定义  $F_n(x) = \frac{n}{2} [f(x + \frac{1}{n}) - f(x - \frac{1}{n})]$ , 证明函数列  $\{F_n\}$  在  $(a, b)$  上内闭一致收敛.
9. 函数列  $f_n(x) = \cos nx$  是否存在  $\mathbb{R}$  上内闭一致收敛的子列?
10.  $f_n(x)$  在  $\mathbb{R}$  上可积一致收敛到  $f(x)$ , 且存在  $\mathbb{R}$  上的可积函数  $F(x)$  满足  $|f_n(x)| \leq F(x)$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .
11.  $a_n$  单调递减趋于 0, 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛的充要条件是  $a_n = o(\frac{1}{n})$ .
12.  $\forall n \in \mathbb{N}_+, \{u_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上均单调递增,  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a), \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(b)$  绝对收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

## 9.2 解答

- 不妨设  $|f_0(x)| \leq M$ , 则  $f_1(x) \leq Mx, \dots, f_n(x) \leq \frac{Mx^n}{n!}$ , 由最值判别法知一致收敛.
- $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(\frac{1}{2n}) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin \frac{k}{2n}}{k} \geq \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}$ , 因此不一致收敛.
- 显然  $f_n(x) \rightarrow \max(1, x)$ . 在  $[0, 1]$  上,  $|f_n(x) - 1| \leq \sqrt[n]{2} - 1$ ; 在  $[1, +\infty)$  上,  $|f_n(x) - x| \leq \sqrt[n]{2} - 1$  (因为  $(f_n(x) - x)' < 0$ ). 因此由最值判别法知一致收敛.
- 先证一致有界性. 由一致收敛性,  $\exists N \in \mathbb{N}_+$ , s.t.  $\forall m, n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$ . 从而对于  $\forall n \in \mathbb{N}_+, |f_n(x)| \leq \sup_{1 \leq k \leq N} |f_k(x)| + 1 := M_f$ , 因此一致有界. 同理  $\forall n \in \mathbb{N}_+, |g_n(x)| \leq M_g$ . 从而  $|f_m(x)g_m(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f_m(x)g_m(x) - f_m(x)g_n(x)| + |f_m(x)g_n(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq M_f|g_m(x) - g_n(x)| + M_g|f_m(x) - f_n(x)|$ .  $\forall \epsilon > 0, \exists N', \text{ s.t. } \forall m, n > N', |f_n - f_m| < \frac{\epsilon}{2M_g}, |g_n - g_m| < \frac{\epsilon}{2M_f}$ . 从而  $|f_m(x)g_m(x) - f_n(x)g_n(x)| < \epsilon$ .
- 绝对 (一致) 收敛性:  $\left| \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n} \right| \begin{cases} = 0, & x = 0 \\ \leq \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, & x \neq 0 \end{cases}$  知绝对收敛,  $\left[ \sum_{k=n}^{2n} \left| \frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k} \right| \right]_{x^2=\frac{1}{n}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}-1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}} > \frac{e-1}{e^2}$  知不一致收敛. 一致收敛性:  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$  有界,  $\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$  随  $n$  单调递减且一致趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知一致收敛.
- 记  $f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{1-x^{2n}}$ . 则  $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \Leftrightarrow (1-x)(1+x^{2n+1}) \geq 0$  恒成立, 且  $f_n(x) = \frac{x^n}{(1+x^n)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})} \leq \frac{1}{2n} \Rightarrow 0$ , 而  $\sum_{n=1}^N \sin nx$  关于  $x \in (\frac{1}{2}, 1)$  一致有界, 因此由 Dirichlet 判别法, 知原级数一致收敛.
- $\sum_{n=1}^N (-1)^n$  一致有界,  $f(x^n)$  随  $n$  单调递减且一致趋于 0, 有 Dirichlet 判别法知一致收敛.
- 由导数定义,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}} + \frac{f(x-\frac{1}{n})-f(x)}{-\frac{1}{n}} \right] = f'(x)$ . 另一方面, 考虑闭区间  $[c, d]$ , 则有  $|F_n(x) - f'(x)| = \frac{1}{2} \left[ \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}} + \frac{f(x-\frac{1}{n})-f(x)}{-\frac{1}{n}} - 2f'(x) \right] = \frac{1}{2} [(f'(\xi_1) - f'(x)) + (f'(\xi_2) - f'(x))] \leq \sup_{|x-y| < \frac{1}{n}} |f'(x) - f'(y)| \rightarrow 0$ , 其中最后一步利用了  $f'(x)$  在区间  $[\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}]$  上的一致连续性.
- 不存在. 假设  $f_{n_k} = \cos n_k x$  在  $\mathbb{R}$  上内闭一致收敛. 由收敛性,  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } \forall m > k > N, \forall x \in [-1, 1], |\cos n_k x - \cos n_m x| < \epsilon$ . 当  $n_m > 2n_k$  时, 考虑  $x = \frac{1}{n_m}$ , 则  $|\cos n_k x - \cos n_m x| = |\cos \frac{n_k}{n_m} - \cos 1| > \cos \frac{1}{2} - \cos 1$ . 矛盾.
- $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \exists N' > 0, \text{ s.t. } \forall n > N', |\int_N^{+\infty} f_n(x) dx| \leq \int_N^{+\infty} |f_n(x)| dx \leq \int_N^{+\infty} F(x) dx < \frac{\epsilon}{8}, |\int_{-\infty}^{-N} f_n(x) dx| < \frac{\epsilon}{8}$ , 且  $|\int_{-N}^N f_n(x) dx - \int_{-N}^N f(x) dx| \leq \int_{-N}^N |f_n(x) - f(x)| dx < 2N \cdot \frac{\epsilon}{4N} = \frac{\epsilon}{2}$ . 因此, 我们有估计  $|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx| \leq |\int_N^{+\infty} f_n(x) dx| + |\int_N^{+\infty} f(x) dx| + |\int_{-\infty}^{-N} f_n(x) dx| + |\int_{-\infty}^{-N} f(x) dx| + |\int_{-N}^N f_n(x) dx - \int_{-N}^N f(x) dx| < \frac{\epsilon}{8} \cdot 4 + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .
- 记  $S_{n,p}(x) = \sum_{k=n}^p a_k \sin kx$ . 先证必要性.  $o(1) = S_{n,2n}(\frac{\pi}{4n}) = \sum_{k=n}^{2n} a_k \sin \frac{k\pi}{4n} \geq \frac{n}{2} (a_{2n-1} + a_{2n}) \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow a_n = o(\frac{1}{n})$ . 再证充分性. 定义单调递减数列  $b_n = \sup_{m \geq n} \{ma_m\} = o(1)$ . (a) 当  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{p}$  时,  $|S_{n,p}(x)| \leq \sum_{k=n}^p ka_k x \leq pb_n x \leq b_n \pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . (b) 当  $x \geq \frac{\pi}{n}$  时, 由于  $\forall m > n, |\sum_{k=n}^m \sin kx| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \leq \frac{\pi}{x} \leq n$ , 利用 Abel 变换可知  $|S_{n,p}(x)| \leq na_n \leq b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . (c) 当  $\frac{\pi}{p} < x < \frac{\pi}{n}$  时, 取  $q = \lfloor \frac{\pi}{x} \rfloor$ , 则  $|S_{n,p}(x)| \leq |S_{n,q}(x)| + |S_{q+1,p}(x)| \leq b_n \pi + b_{q+1} \leq (\pi+1)b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . 从而由 Cauchy 准则知一致收敛.
- $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{ s.t. } \forall m \geq n \geq N, |\sum_{k=n}^m u_k(a)| < \epsilon, |\sum_{k=n}^m u_k(b)| < \epsilon$ . 从而对  $\forall x \in [a, b], -\epsilon \leq \sum_{k=n}^m u_k(a) \leq \sum_{k=n}^m u_k(x) \leq \sum_{k=n}^m u_k(b) \leq \epsilon$ , 然后用 Cauchy 收敛准则.

## 10 第 10 次习题课: 一致收敛函数项级数的性质

### 10.1 问题

- 设连续函数序列  $f_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$  且  $f(x)$  没有零点. 证明  $\frac{1}{f_n(x)}$  也一致收敛.
- 证明  $f_n(x) = nx(1-x)^n$  在区间  $[0, 1]$  上不一致收敛, 但是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$ .
- 可积函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于函数  $f$ , 且  $\forall n \in \mathbb{N}_+, f_n$  有原函数  $F_n$ , 证明  $f$  也有原函数  $F$ .
- 证明  $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ .

5. 证明  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .
6. 求级数  $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \cdots$  的和.
7.  $x \in (-1, 1)$ , 求函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$  的和.
8.  $x > 1$ , 求函数项级数和函数的导数  $\left[ \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \frac{x^8}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)} \cdots \right]'$ .
9. (Arzela-Ascoli 引理).  $E$  是紧集, 函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $E$  上逐点有界, 等度连续 ( $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t. } \forall n \in \mathbb{N}_+, \forall |x-x'| < \delta, |f_n(x) - f_n(x')| < \epsilon$ ). 证明  $\{f_n(x)\}$  存在  $E$  上的一致收敛子列.
10. 区间  $[a, b]$  上的连续函数列  $\{f_n(x)\}$  逐点有界, 证明: 存在  $[a, b]$  的一个子区间, 使得  $\{f_n(x)\}$  在此区间上一致有界.
11. 区间  $[a, b]$  上的连续函数列  $\{f_n(x)\}$  收敛到  $f(x)$ . 证明  $f(x)$  连续的充要条件是  $\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists N' > N, \text{s.t. } \forall x \in [a, b], \exists n_x \in [N, N'], \text{s.t. } |f_{n_x}(x) - f(x)| < \epsilon$ .
12. 试举一个函数列  $\{f_n(x)\}$ , 使得  $\{f'_n(x)\}$  在  $\mathbb{R}$  上一致收敛,  $\{f_n(x)\}$  在  $\mathbb{R}$  上处处收敛但不一致收敛.

## 10.2 解答

1.  $f(x) \in C[a, b]$  且没有零点, 因此不妨设  $f(x) > 2m > 0$ , 从而  $\exists N > 0, \text{s.t. } \forall n > N, \forall x \in [a, b], f_n(x) > m, |f_n(x) - f(x)| \leq m^2 \epsilon$ . 这样就有  $|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}| = \frac{1}{f_n(x)f(x)} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  恒成立  $\Rightarrow$  一致收敛.
2.  $f_n(\frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n})^n \geq \frac{1}{4}$  在  $n \geq 2$  时恒成立, 因此不一致收敛. 但是  $f_n(x) \rightarrow 0$ , 且  $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0$ .
3. 容易证明  $f \in R[a, b]$ . 设  $F_n = \int_a^x f(t) dt$ , 则  $\sup_{a \leq x \leq b} |F_n(x) - F_m(x)| \leq \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^x |f_n(t) - f_m(t)| dt \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f_m(x)| dx \rightarrow 0 \Rightarrow \{F_n\}$  一致收敛, 不妨设极限函数为  $F$ . 交换极限和求导顺序, 知  $F'(x) = f(x)$ .
4.  $x^{-x} = e^{-x \ln x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!}$ . 一致收敛可交换极限积分顺序, 因此  $\int_0^1 x^{-x} dx = \int_0^1 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!} dx = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!} dx = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ .
5. 考虑  $\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \ln t = \frac{t \ln t}{1-t}$ .  $\forall x \in (0, 1), t \in [0, x], |t^n \ln t| = |t^{n-1} t \ln t| \leq x^{n-1} e^{-1}$ , 因此一致收敛, 从而  $\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \ln t dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^n \ln t dt = \int_0^x \frac{t \ln t}{1-t} dt$ . 由于  $\forall y \in [0, 1], |\int_0^y t^n \ln t dt| = |\frac{y^{n+1} \ln y}{n+1} - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2}| \leq \frac{e+1}{(n+1)^2}$ , 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^y t^n \ln t dt$  对  $y \in [0, 1]$  一致收敛, 从而连续, 即是  $\int_0^1 \frac{t \ln t}{1-t} dt = \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \frac{t \ln t}{1-t} dt = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^n \ln t dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^n \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ . 两边同时加上  $\int_0^1 \ln t dt$  得到  $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .
6. 原式  $= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{8n-1} - \frac{1}{8n+1}) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 [x^{8n-2}(1-x^2)] dx$ . 记  $u_n(x) = \int_0^1 [t^{8n-2}(1-t^2)] dt$ . 显然  $u_n(x) \in C[0, 1]$  且  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  一致收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1-0} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \frac{t^6}{(1+t^2)(1+t^4)} dt = \int_0^1 \frac{t^6}{(1+t^2)(1+t^4)} dt = 1 - \frac{1}{8}(1 + \sqrt{2})\pi$ , 其中倒数第三个等号利用了  $\forall x \in (0, 1)$ , 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} t^{8n-2}(1-t^2)$  在区间  $[0, x]$  上的一致收敛性. 因此原式  $= \frac{1}{8}(1 + \sqrt{2})\pi$ .
7. 记  $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ , 并任取  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ . 在闭区间  $[-1 + \delta, 1 - \delta]$  上,  $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$  一致收敛, 且  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  收敛, 因此  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow S(x) = \ln(1+x) + C$ . 由  $S(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ .
8. 被导函数  $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\prod_{k=0}^n (1+x^{2^k})} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1-x^{2^{n+1}}} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}} \right) = 1$ , 因此其导数为 0.
9. 由  $E$  紧, 知存在可数稠密子集  $Q = \{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ .  $\{f_n(x_1)\}$  有界, 因此可抽取收敛子列  $\{f_{n_1}(x_1)\}$ . 同理  $\{f_{n_1}(x_2)\}$  有界, 因此可抽取收敛子列  $\{f_{n_2}(x_2)\}$ . 依此类推, 考虑对角线子列  $\{f_{n,n}(x)\}$ , 显然对于  $\forall x \in Q, f_{n,n}(x)$  都收敛. 由等度连续性知  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t. } \forall n \in \mathbb{N}_+, \forall |x-x'| < \delta, |f_n(x) - f_n(x')| < \frac{\epsilon}{3}$ . 由于  $\cup_{x \in Q} B(x, \delta)$  是  $E$  的一个开覆盖, 因此存在有限子覆盖  $\cup_{k=1}^K B(y_k, \delta)$ . 由  $f_{n,n}(x)$  在  $Q$  上的收敛性知  $\exists N \in \mathbb{N}_+, \text{s.t. } \forall n, m > N, \forall k = 1, 2, \dots, K, |f_{n,n}(y_k) - f_{m,m}(y_k)| < \frac{\epsilon}{3}$ . 从而  $\forall x \in E, \forall n, m > N, \exists y_k, \text{s.t. } |x - y_k| < \delta$ , 且  $|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \leq |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(y_k)| + |f_{n,n}(y_k) - f_{m,m}(y_k)| + |f_{m,m}(y_k) - f_{m,m}(x)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ . 这说明  $\{f_{n,n}(x)\}$  一致收敛.



10. 用反证法. 对  $M = 1, \exists n_1 \in \mathbb{N}_+, [a_1, b_1] \subset [a, b], \text{s.t.} \forall x \in [a_1, b_1], |f_{n_1}(x)| > 1$ .  $\{f_n(x)\}$  在  $[a_1, b_1]$  上不一致有界, 因此对  $M = 2, \exists n_2 > n_1, [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], \text{s.t.} \forall x \in [a_2, b_2], |f_{n_2}(x)| > 2$ . 依此类推. 这样取出来的  $f_{n_k}(x)$  和区间  $[a_k, b_k]$  满足  $\forall x \in [a_k, b_k], |f_{n_k}(x)| \geq k$  且  $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{+\infty}$  构成一个闭区间套. 因此  $\exists x_0 \in \cap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$ , 且  $|f_{n_k}(x_0)| \geq k$ . 这与  $\{f_n(x)\}$  在  $x_0$  处的有界性矛盾.

11. 先证必要性.  $\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \forall x \in [a, b], \exists N_x > N, \text{s.t.} |f_{N_x}(x) - f(x)| < \epsilon$ . 由连续性,  $\exists \delta_x > 0, \text{s.t.} \forall x \in (x - \delta_x, x + \delta_x), |f_{N_x}(x) - f(x)| < \epsilon$ .  $\cup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x)$  构成了  $[a, b]$  的开覆盖, 存在有限子覆盖  $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) \supset [a, b]$ . 因此可取  $N' = \max_{i=1, 2, \dots, n} N_{x_i}$ .

再证充分性. 考虑在  $x$  处并做分解  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$ . 由  $f_n(x)$  的收敛性,  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{s.t.} \forall n \geq N, |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ . 再由题给条件,  $\exists N' > N, \text{s.t.} \forall y, \exists n_y \in [N, N'], |f_{n_y}(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ . 最后由连续性,  $\exists \delta > 0, \text{s.t.} \forall |x - y| < \delta, \forall n \in [N, N'], |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ . 此时  $\forall |x - y| < \delta$ , 取  $n = n_y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ , 即连续性得证.

12.  $f_n(x) = \sin \frac{x}{n^2}$ .

## 11 第 11 次习题课: 幂级数的基本概念与性质

### 11.1 问题

1. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+2\cos \frac{n\pi}{4})^n}{n \ln n} x^n$  的收敛域.
2. 求级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^K k^n}{n^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$  的收敛域, 其中  $K \in \mathbb{N}_+$ .
3. 求级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{v} \sqrt{n}}} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$  的收敛域.
4. 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} C_n^k$ .
5. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$  的收敛域与和函数.
6. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n! 2^n} x^n$  的收敛域与和函数.
7. 求级数  $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m^2 n}{3^m (n 3^m + m 3^n)}$  的和.
8.  $a_n > 0, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$  收敛, 证明  $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ .
9. 证明  $x = \sin x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 并据此计算  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .
10. 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ . 证明当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$ .
11.  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$ . 证明若 Cauchy 乘积级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$  收敛, 则它必收敛于  $AB$ .
12. 设曲线  $x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}} = 1 (n > 1)$  在第一象限与坐标轴围成的面积为  $I(n)$ , 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} I(n) < 4$ .

### 11.2 解答

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(1+2\cos \frac{n\pi}{4})^n}{n \ln n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+2\cos \frac{n\pi}{4}) = 3$ , 因此收敛半径是  $\frac{1}{3}$ . 考察端点.  $x = \frac{1}{3}$  时, 原式  $= \sum_{n=1}^7 \frac{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{n\pi}{4})^n}{n \ln n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{(8n+k)\pi}{4})^{8n+k}}{(8n+k) \ln(8n+k)} = C + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{(8n+k)\pi}{4})^{8n+k}}{(8n+k) \ln(8n+k)} \geq C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(8n) \ln(8n)} + \frac{(\frac{1-\sqrt{2}}{3})^{8n+3}}{(8n+3) \ln(8n+3)} + \frac{(\frac{1-\sqrt{2}}{3})^{8n+5}}{(8n+5) \ln(8n+5)} \right] \geq C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(8n) \ln(8n)} + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{8n+1} \frac{2}{(8n) \ln(8n)} \right] \geq C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{(8n) \ln(8n)} \right] \Rightarrow$  原级数发散.  $x = -\frac{1}{3}$  时有类似讨论, 因此收敛域为  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

2. 由上学期知识,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{\sum_{k=1}^K k^n}{n^2}} = K$ , 讨论端点后知收敛域为  $|\frac{1-x}{1+x}| \leq \frac{1}{K} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{K-1}{K+1}, \frac{K+1}{K-1}\right]$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \sqrt[n]{n}}} = 1$ , 讨论端点后知收敛域为  $-1 < \frac{x}{2x+1} \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$ .
4. 构造  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} C_n^k x^k, S'_n(x) = \sum_{k=1}^n C_n^k x^{k-1} = \frac{(1+x)^{n-1}}{x}$ . 从而  $I_n = -S(-1) = \int_{-1}^0 \frac{(1+x)^{n-1}}{x} dx = \int_0^1 [1+x+\cdots+x^{n-1}] dx = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$ .
5. 显然收敛域为  $[-1, 1]$ . 原式  $= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \int_0^x t^{2n-1} dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x \int_0^t s^{2n-2} ds dt = 2 \int_0^x \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} (-s^2)^{n-1} ds dt = 2 \int_0^x \int_0^t \frac{1}{1+s^2} ds dt = 2 \int_0^x \arctan s ds = 2x \arctan x - \ln(1+x^2)$ .
6. 显然收敛域为  $\mathbb{R}$ . 考虑一致收敛级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n! 2^n} = x(e^{\frac{x}{2}} - 1)$ , 逐项求导得到  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n! 2^n} = (\frac{x}{2} + 1)e^{\frac{x}{2}} - 1$ .
7. 原式  $= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m^2 n^2}{3^m n (n 3^m + m 3^n)} \stackrel{\text{对称性}}{=} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{m^2 n^2}{3^m n (n 3^m + m 3^n)} + \frac{m^2 n^2}{3^n m (m 3^m + n 3^n)} \right] = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{mn}{3^m 3^n} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{9}{32}$ .
8. 一方面,  $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \geq \int_0^{+\infty} e^{-x} \left( \sum_{n=0}^N a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^N a_n n!$ , 从而  $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ .  
另一方面,  $\int_0^N e^{-x} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^N e^{-x} x^n dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ , 从而  $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ .
9. 由  $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ , 换元知  $x = \sin x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1}$ . 两边从 0 到  $\frac{\pi}{2}$  积分, 得到  $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .  
由于  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ , 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$ .
10.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$  在  $(-1, 1)$  上内闭一致收敛, 知  $f(x)$  可逐项求导. 令  $F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$ , 则  $F'(x) = f'(x) - f'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = 0$ . 从而  $F(x) \equiv \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .
11. 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ .  $f(1), g(1)$  收敛  $\Rightarrow \forall |x| < 1, \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n x^n|, \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n x^n|$  收敛  $\Rightarrow \forall |x| < 1, \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n \right)$ . 这三个级数都在  $x=1$  处收敛, 因此左连续, 令  $x \rightarrow 1-0$  得  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right)$ .
12.  $I(n) = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{n}})^n dx \stackrel{x=t^{\frac{1}{n}}}{=} 2n \int_0^1 (1-t^2)^n t^{2n-1} dt \leq 2n \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} t^{2n-2} (1-t^2) t dt \leq 2n \int_0^1 [(1-t^2)t^2]^{n-1} dt \leq \frac{2n}{4^{n-1}}$ .  
注意到  $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ , 逐项求导得  $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ , 因此代入  $n = \frac{1}{4}$  知  $\sum_{n=1}^{+\infty} I_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{4^{n-1}} = \frac{32}{9} < 4$ .

## 12 第 12 次习题课: 幂级数展开与多项式逼近

### 12.1 问题

1. (Airy 方程). 利用 Maclaurin 级数求解微分方程  $y''(x) - xy(x) = 0$ .
2. 写出函数  $f(x) = \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^2$  的 Maclaurin 级数并给出收敛域.
3. 写出函数  $f(x) = \ln(1+x+x^2)$  的 Maclaurin 级数并给出收敛域.
4. 写出函数  $f(x) = \arctan \frac{x \sin \theta}{1-x \cos \theta}$  的 Maclaurin 级数.
5. 证明  $[0, 1]$  上的连续函数可以被有理系数多项式逼近.
6. 证明  $[0, 1]$  上的连续函数可以被单调递升的多项式列 (即  $P_1 \leq P_2 \leq \cdots \leq P_n \leq \cdots$ ) 逼近.
7.  $[a, b]$  上的连续函数列  $\{f_n\}$  单调递升且收敛于  $f(x)$ . 证明  $f(x)$  一定能取到其最小值, 但未必能取到其最大值.
8.  $[a, b]$  上的连续函数项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$  满足  $|u_n(x)| \leq v_n(x), \forall n \in \mathbb{N}_+, \text{ 且和函数 } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$  连续. 证明和函数  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  也连续.
9. 证明对任意  $n \in \mathbb{N}_+$  和  $x \in [0, \pi]$  成立不等式  $\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq 2\sqrt{\pi}$ .
10. 证明对任意  $n \in \mathbb{N}_+$  和  $x \in \mathbb{R}$  成立不等式  $\left| e^x - \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| \leq e^{|x|} - \left( 1 + \frac{|x|}{n} \right)^n < \frac{x^2 e^{|x|}}{2n}$ .
11. 数列  $\{r_n\}$  是  $[0, 1]$  区间内所有有理数的一个排列, 证明函数  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n}$  在  $[0, 1]$  上处处连续、无理点处可微、有理点处不可微.
12. 试举在  $[0, 1]$  上一致收敛于连续函数的处处不连续函数列  $\{f_n(x)\}$ .

## 12.2 解答

1. 设  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . 在收敛域内,  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)'' - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0$ . 比较系数知  $a_2 = 0, a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ , 从而  $a_{3n} = \frac{(3n-2)!!!}{(3n)!} a_0, a_{3n+1} = \frac{(3n-1)!!!}{(3n+1)!} a_1, a_{3n+2} = 0$ .

2. 设  $g(x) = \arcsin^2 x$ , 则  $g'(x) = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)(g'(x))^2 = 4g(x)$ . 两边求导, 得  $2(1-x^2)g'(x)g''(x) - 2x(g'(x))^2 = 4g'(x) \Rightarrow (1-x^2)g''(x) - xg'(x) = 2$ . 两边求  $n-2$  次导数知  $(1-x^2)g^{(n)}(x) - (2n-3)xg^{(n-1)}(x) - (n-2)^2g^{(n-2)}(x) = 0$ . 令  $x=0$  知  $g^{(n)}(0) = (n-2)^2g^{(n-2)}(0)$ . 由于  $g^{(1)}(0) = 0, g^{(2)}(0) = 2$ , 从而  $g^{(2n-1)}(0) = 0, g^{(2n)}(0) = 2^{2n-1}((n-1)!)^2$ , 因此  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n}$ , 收敛域为  $[-1, 1]$ .

3.  $\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ .

4.  $f'(x) = \frac{\sin \theta}{1-2x \cos \theta + x^2} = \frac{1}{2i} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{(x-e^{i\theta})(x-e^{-i\theta})} = \frac{1}{2i} \left( \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x} - \frac{e^{-i\theta}}{1-e^{-i\theta}x} \right) = \frac{1}{2i} \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) x^{n-1} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta) x^{n-1}$ , 因此  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n$ .

5.  $\forall f(x) \in C[0, 1], \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{s.t.} \exists N$  次多项式  $P_N(x), \forall x \in [0, 1], |P_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ . 由于有理数在实数集中稠密, 因此  $\exists N$  次有理系数多项式  $Q_N(x), \text{s.t.} \forall x \in [0, 1], |P_N(x) - Q_N(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ . 此时  $|Q_N(x) - f(x)| < \epsilon$ .

6.  $f_n(x) := f(x) - \frac{1}{2^n}$  可被多项式逼近, 因此  $\exists P_n(x), \text{s.t.} |P_n(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^{n+2}}$ . 这样的  $\{P_n\}$  满足题意.

7. 记  $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = m \Rightarrow \forall k \geq 1, \exists x_k \in [a, b], \text{s.t.} m \leq f(x_k) < m + \frac{1}{k}$ . 由聚点原理,  $\exists$  子列  $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}, \text{s.t.} \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$ . 由收敛性,  $\exists N > 0, \text{s.t.} \forall n > N, f(x_0) - \epsilon < f_n(x_0) \leq f(x_0)$ . 从而  $m \leq f(x_0) < f_n(x_0) + \epsilon = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_n(x_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) + \epsilon \leq m + \epsilon$ . 令  $\epsilon \rightarrow 0$  知  $f(x_0) = m$ . 对于最大值, 反例是  $f_n(x) = x 1_{\{0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\}} + (n-1)(1-x) 1_{\{1 - \frac{1}{n} < x \leq 1\}}$ .

8. 任意固定  $x_0 \in [a, b]$ , 考察  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  在  $x = x_0$  处的连续性. 由收敛性,  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{s.t.} \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x_0) < \frac{\epsilon}{3}$ . 由连续性,  $\exists \delta > 0, \text{s.t.} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b], \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x) < \frac{\epsilon}{3}, \left| \sum_{n=1}^N [u_n(x) - u_n(x_0)] \right| < \frac{\epsilon}{3}$ . 从而  $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^N [u_n(x) - u_n(x_0)] \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x_0) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^N [u_n(x) - u_n(x_0)] \right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x_0) < \epsilon$ .

9. 当  $0 < x \leq \frac{\sqrt{\pi}}{n}$  时,  $\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|\sin kx|}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{kx}{k} \leq nx = \sqrt{\pi}$ .

当  $\frac{\sqrt{\pi}}{n} < x \leq \pi$  时, 记  $K = \lfloor \frac{\sqrt{\pi}}{x} \rfloor, S_n = \sum_{k=K+1}^n \sin kx$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^K \frac{\sin kx}{k} \right| + \left| \sum_{k=K+1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \sqrt{\pi} + \left| \sum_{k=K+1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| = \sqrt{\pi} + \left| \sum_{k=K+1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} \right| \\ &\leq \sqrt{\pi} + \left| \sum_{k=K+1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) S_k \right| + \left| \frac{S_n}{n} \right| \quad (\text{Abel 变换}) \end{aligned}$$

利用  $|S_n| = \left| \frac{\cos \frac{2K+1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{\pi}{x}$ , 知

$$\left| \sum_{k=K+1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) S_k \right| + \left| \frac{S_n}{n} \right| \leq \frac{\pi}{x} \left[ \sum_{k=K+1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{K+1} \frac{\pi}{x} \leq \sqrt{\pi}$$

因此  $\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{x} \right| \leq \sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$ .

10. 左边:

$$\begin{aligned} \left| e^x - \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n C_n^k \left( \frac{x}{n} \right)^k \right| = \left| \sum_{k=2}^n \left( 1 - \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{n^{k-1}} \right) \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=2}^n \left( 1 - \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{n^{k-1}} \right) \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|} - \left( 1 + \frac{|x|}{n} \right)^n \end{aligned}$$

右边:

$$\begin{aligned} e^{|x|} - \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n &= \sum_{k=2}^n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=2}^n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \cdots - \frac{k-1}{n}\right)\right] \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2n} \frac{|x|^k}{(k-2)!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \\ &< \frac{x^2}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{x^2}{2n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!} = \frac{x^2}{2n} e^{|x|} \end{aligned}$$

11. 原级数一致收敛, 因此连续. 考虑  $F_x(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^n h}$ ,  $\forall x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ . 由于  $|\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^n h}| \leq \frac{|(x+h-r_n)-(x-r_n)|}{3^n |h|} = \frac{1}{3^n}$ , 因此  $F_x(h)$  在  $h \in [-x, 1-x]$  上一致收敛, 从而  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} F_x(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^n h} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{3^n}$ . 若  $x = r_k \in \mathbb{Q}$ , 类似可知  $\left[\sum_{n=1, n \neq k}^{+\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n}\right]'$   $\Big|_{x=r_k} = \sum_{n=1, n \neq k}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{3^n}$ , 但是  $\frac{|x-r_k|}{3^k}$  在  $x = r_k$  处不可导, 因此  $f(x) = \sum_{n=1, n \neq k}^{+\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n} + \frac{|x-r_k|}{3^k}$  在  $x = r_k$  处不可导.
12.  $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{Dirichlet}(x)$ .

## 13 第 13 次习题课: Fourier 级数的基本概念与性质

### 13.1 问题

### 13.2 解答

## 14 第 14 次习题课: Fourier 级数的收敛性

### 14.1 问题

1. 证明余元公式  $\operatorname{Beta}(p, 1-p) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$  ( $0 < p < 1$ ), 并计算积分  $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$  和  $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ . (提示: 可参考教材习题十二第 12 题)

### 14.2 解答

1. 第一个等式:  $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p} dx \stackrel{x=\frac{t}{1+t}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}} (1+t)^p \frac{1}{(1+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt$ .

第二个等式: 利用变量替换  $x = \frac{1}{t}$  有  $\int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{-p}}{1+x} dx \Rightarrow \operatorname{Beta}(p, 1-p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x} dx$ . 将  $\frac{1}{1+x}$  展成幂级数,

$$\begin{aligned} \operatorname{Beta}(p, 1-p) &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^r \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x} dx = \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^r \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k+p-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k-p} \right] dx \\ &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} r^{k+p} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k-p+1} r^{k-p+1} \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k-p+1} \\ &= \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{k+p} + \frac{1}{p-k} \right) = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2 - k^2} \end{aligned}$$

由于  $\cos px$  的 Fourier 级数  $\cos px = \frac{\sin p\pi}{\pi} \left[ \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2 - k^2} \cos kx \right]$  在  $|x| \leq \pi$  处处收敛, 令  $x = 0$  得  $\operatorname{Beta}(p, 1-p) = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2 - k^2} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ .

先求  $I_1$ .  $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx \stackrel{t=\frac{1}{1+x^\beta}}{=} \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} (1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} \text{Beta}(1 - \frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta}) = \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha+1}{\beta} \pi}$ .

再求  $I_2$ . 令  $p = \frac{x}{\pi}, 0 < x < \pi$ , 得到  $\frac{\pi}{\sin x} = \frac{\pi}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x\pi}{x^2 - n^2\pi^2}$ , 即  $1 = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2}$ . 两边从 0 到  $\pi$

积分有  $\pi = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2} dx$ . 从而

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \int_0^\pi \frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} dt + \int_0^\pi \frac{\sin[t-(n+1)\pi]}{t-(n+1)\pi} dt \right] = \frac{1}{2} \left[ \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{2t \sin t}{t^2 - n^2\pi^2} dt \right] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

## 15 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 23 级本科生陈全同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 春数学分析 II 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.