

# 高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2024 年 9 月 12 日

## 目录

1	第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法	2
1.1	问题	2
1.2	解答	2
2	致谢	3

# 1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

## 1.1 问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$
2. 设  $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-2, 1, 5), \alpha_3 = (a, 2, 10), \beta = (1, b, -1)$ . 当  $a, b$  取何值时, 向量  $\beta$  能被  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出? 何时表示系数唯一?
3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表出某个向量  $\beta$  的方式唯一 (不唯一), 则  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  表出任何向量-如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).
4. 某食品厂有四种原料  $A, B, C, D$ . 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

5. (1) 求复矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$  的行简化阶梯型矩阵  $\text{rref}(A)$ ; (2) 求齐次方程组  $AX = 0$  在复数域上的解集合;
- (3) 求齐次方程组  $AX = 0$  在实数域上的解集合; (4) 当  $y_1, y_2, y_3$  满足什么关系时, 方程组  $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$  有解?
6. 已知向量  $\alpha, \beta$  不共线, 并看成是由原点出发的有向线段  $\vec{OA}$  与  $\vec{OB}$ . 设  $u, v \in \mathbb{R}$  且  $u+v=1$ , 问向量  $\vec{OC} = u\alpha + v\beta$  的终点  $C$  在什么位置,  $\vec{AC}$  与  $\vec{CB}$  的比值是多少, 何时比值为正数.
7. 求单叶双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  上的所有直线.
8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体  $ABCD$  每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.
9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异? 
$$\begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .067 \end{cases}, \begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .066 \end{cases}$$
10. 考虑带截距的线性回归  $y \sim x_1 + \dots + x_p$ , 参考上一题, 你有什么想法和改进?

## 1.2 解答

$$1. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=7*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=2*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=\textcircled{1}, \textcircled{3}-=4*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{13}{3}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}. \text{ 因此, 当 } a \neq -4 \text{ 或 } a = -4, b = -\frac{13}{2} \text{ 时, } \beta \text{ 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.}$$

3. 只需注意到表出某个向量  $\beta$  唯一  $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0)$ .

$$\textcircled{2} - = 8 * \textcircled{1}$$

4. 注意  $A, B, C, D$  的比例和为 1, 因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \textcircled{3} - = 5 * \textcircled{1} \\ \textcircled{4} - = 15 * \textcircled{1} \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \textcircled{3} + = 10 * \textcircled{2} \\ \textcircled{4} - = 5 * \textcircled{2} \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4} + = \frac{2}{3} * \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ 因此解是 } (\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25}).$$

5. (1)  $\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \textcircled{2} - = 2 * \textcircled{1} \\ \textcircled{3} - = i * \textcircled{1} \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} - = \frac{i}{2+2i} * \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} * = \frac{1}{2+2i}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(2)  $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ . (3)  $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}$ . (4) 将  $A$  变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是  $(y_1, \frac{y_2-2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$ , 因此只有当  $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$  时才有解.

6.  $\overrightarrow{AC} = (u-1)\alpha + v\beta, \overrightarrow{CB} = -u\alpha + (1-v)\beta, \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{1-u}{1-v} = \frac{v}{1-v}$ , 因此  $A, C, B$  三点共线, 且当  $0 < u, v < 1$  时比值为正数.

7.  $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$ , 因此直线可以表示形式为  $\begin{cases} x-z = k(1-y) \\ x+z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$ , 即是  $\begin{cases} x+ky-z = k \\ kx-y+kz = 1 \end{cases}$ . 特别

地, 当  $y = \pm 1$  时,  $z = \pm x$  也是位于该曲面上的直线.

8.  $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$ , 设  $BC, AC, AB$  中点分别为  $D, E, F$ , 设  $G = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$ , 只需验证  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$  分别与  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$  共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.

9. 用 Gauss 消元法可求得解为  $(1, -1)$  和  $(-666, 834)$ . 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.

10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如  $L_2$  正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着无关变量, 干扰回归结果.

## 2 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.