高等数学 A II 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2023 年 2 月 18 日

目录

1 第 1 次习题课: 二重积分

1.1 问题

1. 累次积分变序: $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx, \int_0^a dx\int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$.
2. 求 $z=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 与 xoy 平面所围的体积.
3. 计算积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}dy$.
4. 区域 D 由 $y=x^3, y=0, x=1$ 围成, 计算积分 $I=\iint_D \sqrt{1-x^4}d\sigma$.
5. 区域 D 由 $y=0, x=1, y=x$ 围成, 计算积分 $I=\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}d\sigma$.
6. 区域 D 由 $x^2+y^2=4$ 和 $y=-x^2+1, y=x^2-1$ 两线在 $|x|\le 2$ 部分所围成, 计算积分 $I=\iint_D (x^2+y^3)d\sigma$.
7. $0\le p(x)\in R[a,b]$, $f(x), g(x)$ 于 $[a,b]$ 单调递增, 证明 $\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx \le \int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$.
8. 计算极限 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^a e^{-x^2}dx$.

1.2 解答

1. 这种题最好画图. 答案是 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x f(x,y)dy, \int_0^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f(x,y)dx$.
2. 区域 $D=\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}, D_0=\{(x,y):0\le x\le a, 0\le y\le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\}$. 则体积 $V=\iint_D zd\sigma = 4\iint_{D_0} zd\sigma = 4\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = 4\int_0^a \frac{2}{3}\frac{b}{a^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \cdots$(换元法)$\cdots = \frac{\pi}{2}ab$.
3. 区域 $D=\{(x,y):0\le x\le 1, x\le y\le\sqrt{x}\}$. 累次积分时先对 x 积分, 则原积分 $=\int_0^1 dy\int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y}dx = \int_0^1(\sin y - y\sin y)dy = 1-\sin 1$.
4. $I=\int_0^1 dx\int_0^{x^3}\sqrt{1-x^4}dy = \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}dx = -\frac{1}{6}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{1}{6}$.
5. $I=\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}dy = \int_0^1 dx\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x^2}{2}\arcsin\frac{y}{2x}\right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1(\frac{x}{2}\sqrt{3x^2}+2x^2\arcsin\frac{1}{2})dx = \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3})$.
6. 首先, 因为积分区域关于 $y=0$ 对称, 所以 $\iint_D y^3d\sigma=0$. 记 D_1 为 D 的第一象限部分, $D_2=\{(x,y):x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}, D_3=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le -x^2+1\}$. 因此 $I=4\iint_{D_1}x^2d\sigma = 4\iint_{D_2}x^2d\sigma - 4\iint_{D_3}x^2d\sigma = 4\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}x^2dy - 4\int_0^1 dx\int_0^{-x^2+1}x^2dy = 4\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx - 4\int_0^1 x^2(1-x^2) = 4\pi-\frac{8}{15}$.
7. 利用二重积分.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RHS}-\mathrm{LHS} &= \int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b p(y)dy\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(y)f(y)dy\int_a^b p(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b\int_a^b [p(x)p(y)f(x)g(x)-p(x)p(y)f(y)g(x)]d\sigma = \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)g(x)[f(x)-f(y)]d\sigma
\end{aligned}
$$

同理 $\mathrm{RHS}-\mathrm{LHS}=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y)-f(x)]d\sigma$. 两式相加得 $2(\mathrm{RHS}-\mathrm{LHS})=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[g(x)-g(y)][f(x)-f(y)]d\sigma\ge 0$.
8. 记 $I(a)=\int_{-a}^a e^{-x^2}dx$, 则 $I^2(a)=\int_{-a}^a e^{-x^2}dx\int_{-a}^a e^{-y^2}dy=\int_{-a}^a\int_{-a}^a e^{-x^2-y^2}d\sigma$. 记区域 $D(a)=\{(x,y):x^2+y^2\le a^2\}$, 积分 $J(a)=\iint_{D(a)}e^{-x^2-y^2}d\sigma$. 由简单的二维区域包含关系知 $J(a)\le I^2(a)\le J(\sqrt{2}a)$. 再利用二重积分极坐标换元知 $J(a)=\int_0^a dr\int_0^{2\pi} re^{-r^2}d\theta = -\pi e^{-r^2}|_{r=0}^{r=a} = \pi(1-e^{-a^2})$. 因此 $\lim\limits_{a\to+\infty}J(a)=\pi$. 由夹逼原理知 $\lim\limits_{a\to+\infty}I(a)=\sqrt{\pi}$.

1.3 补充 (不要求掌握!)

类似于累次极限和整体极限的关系, 累次积分和二重积分也不具有相互决定性, 即二重积分存在并不保证累次积分存在. 例如设 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 是区间 $[0,1]$ 上的所有有理数组成的序列, 定义矩形 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{k}, \text{ if } x=x_k, y\in\mathbb{Q}, k\in\mathbb{N} \\ 0, \text{ otherwise}\end{cases}$. 可以证明 $f(x,y)\in R(D)$ 且 $\iint_D f(x,y)d\sigma=0$. 但是, 由于 $f(x_k,y)=\frac{1}{k}\mathrm{Dirichlet}(y)$ 导致 $\int_0^1 f(x_k,y)dy\ \nexists$, 所以 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 不能使用累次积分 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ 计算. 但是若固定 y, $f(x,y)$ 要么是 Riemann 函数要么恒为 0, 积分值都是 0, 因此 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 可以使用累次积分 $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$ 计算.

2 第 2 次习题课: 三重积分

2.1 问题

1. 区域 Ω 由 $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$ 围成, 计算积分 $I=\iiint_\Omega xdv$.
2. 区域 $\Omega=\{(x,y,z): \sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega zdv$.
3. 区域 $\Omega=\{(x,y,z): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2dv$.
4. 区域 D 由 $(x-a)^2+y^2=a^2(y>0), (x-2a)^2+y^2=4a^2(y>0), y=x$ 围成, 计算积分 $I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$.
5. 计算椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 及抛物柱面 $z=2-x^2$ 所围成立体的体积.
6. 区域 $D=\{(x,y): 0\le x+y\le 1, 0\le x-y\le 1\}$, 计算积分 $I=\iint_D (x+y)^2e^{x^2-y^2}d\sigma_{xy}$.
7. 区域 Ω 由 $z=\frac{x^2+y^2}{m}, z=\frac{x^2+y^2}{n}, xy=a^2, xy=b^2, y=\alpha x, y=\beta x (0<m<n, 9<a<b, 0<\alpha<\beta)$ 围成且在第一卦限的部分, 计算积分 $I=\iiint_\Omega xyzdv$.
8. 设 $h=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, f(x)\in C[-h,h]$, 证明 $\iiint_\Omega f(\alpha x+\beta y+\gamma z)dv_{xyz}=\pi\int_{-1}^1(1-\zeta^2)f(h\zeta)d\zeta$, 其中区域 Ω 是单位球内部.
9. 区域 $\Omega=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 2z\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv$.
10. 区域 $\Omega=\{(x,y,z): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv$.
11. 区域 $D=\{(x,y): -1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, 计算积分 $I=\iint_D \max\{xy, x^3\}d\sigma$.

2.2 解答

1. 记区域 $D_{xy}=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0, x+2y\le 1\}$, 累次积分时依次对 z,y,x 积分, 有 $I=\iint_{D_{xy}}[\int_0^{1-x-2y}xdz]d\sigma_{xy}=\iint_{D_{xy}}x(1-x-2y)d\sigma_{xy}=\int_0^1dx\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}[x(1-x)-2xy]dy=\int_0^1[\frac{1}{2}x(1-x)^2-\frac{1}{4}x(1-x)^2]=\frac{1}{48}$.

2. 记区域 $D_{xy}=\{(x,y): x^2+y^2\le\frac{R^2}{2}\}$, 累次积分时先对 z 积分再极坐标换元, 有 $I=\iint_{D_{xy}}[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}zdz]d\sigma_{xy}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}[R^2-2(x^2+y^2)]d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2}(R^2-2r^2)rdr=\frac{\pi R^4}{8}$.

3. 由对称性, $I=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv+2\iiint_\Omega(xy+yz+zx)dv=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$. 先计算 $I_1=\iiint_\Omega z^2dv$. 记区域 $D_z=\{(x,y): \frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})}\le 1\}$, 累次积分时先对 σ_{xy} 积分再对 z 积分, 有 $I_1=\int_{-c}^c dz\iint_{D_z}z^2d\sigma_{xy}=\int_{-c}^c z^2\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4\pi abc^3}{15}$. 因此 $I=\frac{4\pi abc}{15}(a^2+b^2+c^2)$.

4. 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$, 有 $\begin{cases}(x-a)^2+y^2=a^2\Rightarrow r^2-2ar\cos\theta=0\Rightarrow r=2a\cos\theta\\ (x-2a)^2+y^2=4a^2\Rightarrow r=4a\cos\theta\\ y=x\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\end{cases}$, 从而 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta}r^2dr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{56}{3}a^3\cos^3\theta d\theta=\frac{112-70\sqrt{2}}{9}a^3$.

5. 联立方程 $\begin{cases}z=x^2+2y^2\\ z=2-x^2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=1$, 因此区域 $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$, 体积 $V=\iint_D[(2-x^2)-(x^2+2y^2)]d\sigma=2\iint_D(1-x^2-y^2)d\sigma$. 做极坐标换元知 $V=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)dr=\pi$.

6. 令 $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=x-y\end{cases}$, 即 $\begin{cases}x=\frac{\xi+\eta}{2}\\ y=\frac{\xi-\eta}{2}\end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J=\det\left(\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}\right)=-\frac{1}{2}$, 区域 $D_{xy}=\{(x,y): 0\le x+y\le 1, 0\le x-y\le 1\}\Rightarrow D_{\xi\eta}=\{(\xi,\eta): 0\le\xi\le 1, 0\le\eta\le 1\}$, 所以换元后 $I=\iint_{D_{\xi\eta}}\xi^2e^{\xi\eta}|J|d\sigma_{\xi\eta}=\frac{1}{2}\int_0^1d\xi\int_0^1\xi^2e^{\xi\eta}d\eta=\frac{1}{2}\int_0^1\xi(e^\xi-1)d\xi=\frac{1}{4}$.

7. 令 $\begin{cases}u=\frac{z}{x^2+y^2}\\ v=xy\\ w=\frac{y}{x}\end{cases}$, 即 $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{v}{w}}\\ y=\sqrt{wv}\\ z=uv(w+\frac{1}{w})\end{cases}$, Jacobi 行列式 $J=|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|=\frac{v}{2w}(w+\frac{1}{w})$, 区域 $\Omega\to\Omega_{uvw}=\{(u,v,w): \frac{1}{n}\le u\le\frac{1}{m}, a^2\le v\le b^2, \alpha\le w\le\beta\}$, 所以换元后 $I=\iiint_{\Omega_{uvw}}\sqrt{\frac{v}{w}}\sqrt{wv}uv(w+\frac{1}{w})\frac{v}{2w}(w+\frac{1}{w})dudvdw=\iiint_{\Omega_{uvw}}v^3u(w+\frac{1}{w})^2\frac{1}{w}dudvdw=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}udu\int_{a^2}^{b^2}v^3dv\int_\alpha^\beta(w+\frac{2}{w}+\frac{1}{w^3})dw=\frac{1}{32}(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2})(b^8-a^8)[(\beta^2-\alpha^2)(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2})+4\log\frac{\beta}{\alpha}]$.

8. 作正交变换 $\begin{cases} \xi = a_1x + b_1y + c_1z \\ \eta = a_2x + b_2y + c_2z \\ \zeta = \frac{1}{h}(\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{cases}$ (旋转), 则 $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}| = 1$, 所以换元后 LHS $= \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le 1} f(h\zeta)d\xi d\eta d\zeta = \int_{-1}^{1} d\zeta \iint_{\xi^2+\eta^2\le 1-\zeta^2} f(h\zeta)d\xi d\eta = \pi\int_{-1}^{1}(1-\zeta^2)f(h\zeta)d\zeta =$ RHS.

9. 作球坐标变换, 区域 $\Omega: 0 \le r \le 2\cos\phi$, 积分 $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^{2\cos\phi} r^2\, r^2\sin\phi dr = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi \int_0^{2\cos\phi} r^4 dr = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi \frac{32}{5}\cos^5\phi d\phi = -\frac{64}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\phi d\cos\phi = -\frac{64}{5}\frac{\cos^6\phi}{6}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15}\pi$.

10. 作广义球坐标系变换 $\begin{cases} x = ar\sin\phi\cos\theta \\ y = br\sin\phi\sin\theta \\ z = cr\cos\phi \end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J = abcr^2\sin\phi$, 所以换元后

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^1 dr\, r^2 abc\sin\phi(a^2r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\phi\sin^2\theta + c^2r^2\cos^2\phi) \\ &= \frac{abc}{5}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} -[(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)(1-\cos^2\phi) + c^2\cos^2\phi]d\cos\phi \\ &= \frac{abc}{5}\int_0^{2\pi}[\frac{4}{3}(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) + \frac{2}{3}c^2]d\theta = \frac{4abc\pi}{15}(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

11. 引入辅助积分 $J = \iint_D \min\{xy, x^3\}d\sigma$. $I + J = \iint_D (xy + x^3)d\sigma = \int_0^1 dy\int_{-1}^1 (xy+x^3)dx = 0$, $I - J = \iint_D |xy - x^3|d\sigma = \iint_D |x||y-x^2|d\sigma = 2\int_0^1 dy\int_0^1 x|y-x^2|dx \overset{u=x^2}{=} \int_0^1 dy\int_0^2 |y-u|du \overset{\text{几何意义}}{=} \frac{1}{2}\int_0^1[y^2+(1-y)^2]dy = \frac{1}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{6}$.

2.3 补充 (不要求掌握!)

n 维空间中的球坐标系: 一个向径 r, $n-1$ 个角度 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}$, 其中, 一个角度转一圈 (θ_{n-1}), $n-2$ 个角度转半圈 $(\theta_1, \cdots, \theta_{n-2})$. 与直角坐标系的关系为 $\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-2} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2} \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$, 利用归纳法可以证明 Jacobi 行列式为 $|J| = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$.

n 维空间中半径为 R 的球体 $\Omega: x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le R^2$ 的体积 V_n: 作求坐标变换知

$$\begin{aligned} V_n &= \int\cdots\int_\Omega dx_1\cdots dx_n = \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}\int_0^{\pi} d\theta_{n-2}\cdots\int_0^{\pi} d\theta_1\int_0^R r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}dr \\ &= \frac{R^n}{n}2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta_{n-3}d\theta_{n-3}\cdots\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1 \\ &= \frac{R^n}{n}2\pi\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},1)\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\cdots\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{n-2}{2})\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}) \end{aligned}$$

关于 Beta 函数, 参见后述的含参积分.

3 第 3 次习题课: 曲线积分

3.1 问题

1. 曲线 $\Gamma: x^2 + y^2 = x$, 计算积分 $I = \int_\Gamma \sqrt{1-x^2-y^2}ds$.
2. 曲线 C 是 $y = 0, y = x(x \ge 0), x^2 + y^2 = a^2$ 所围成图形的边界, 计算积分 $I = \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$.

3. 曲线 $L:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=at \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$, 计算积分 $I=\int_L \frac{z^2 ds}{x^2+y^2}$.
4. 曲线 $C:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$ $,0\le\theta\le 2\pi$, 计算积分 $I=\int_C (x^2+y^2)^n ds$.
5. 曲线 $C: x^2+y^2=a^2$, 计算积分 $I=\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 方向是逆时针.
6. 曲线 $\widehat{AB}$ 为单位圆周 $x^2+y^2=1$ 的上半部分, 计算积分 $I=\int_{\widehat{AB}} -ydx+xdy$, 方向为从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,0)$.
7. 曲线 Γ 是从 $(0,0)$ 沿函数 $y=x^\alpha$ 到 $(1,1)$ 的部分, 计算积分 $I=\int_\Gamma (x^2-y^2)dx-2xydy$.
8. 曲线 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 计算积分 $\int_\Gamma xdx+ydy+zdz$, 方向是从 z 轴正向看回来的逆时针方向.

3.2 解答

1. 曲线参数方程 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t, y=\frac{1}{2}\sin t, 0\le t\le 2\pi$, 则 $ds=\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 t+\frac{1}{4}\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}dt$, 原积分 $I=\int_\Gamma \sqrt{1-x}ds=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|\sin\frac{t}{2}|dt=\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=2$.
2. 记 C_1,C_2,C_3 分别为曲线 C 的下、右上、左上部分, 则原积分 $I=\int_{C_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{C_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{C_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\theta+\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx=(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a+e^{\sqrt{2}x}|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{4}ae^a+2(e^a-1)$.
3. 直接使用公式, $I=\int_0^{2\pi}\frac{a^2t^2}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+a^2}dt=\int_0^{2\pi} t^2\sqrt{2}adt=\frac{8\sqrt{2}}{3}a\pi^3$.
4. 直接使用公式, $I=\int_0^{2\pi} a^{2n} a d\theta=2\pi a^{2n+1}$.
5. 曲线参数方程 $x=a\cos t, y=a\sin t, t=0\to 2\pi$, 原积分 $I=\oint \frac{a^2(\cos t+\sin t)(-\sin t)-a^2(\cos t-\sin t)\cos t}{a^2}dt=\int_0^{2\pi}(-1)dt=-2\pi$. 事实上, $\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\frac{dr}{r}-d\theta$.
6. 由 $x^2+y^2=1$ 知 $xdx+ydy=0$ 得 $dy=-\frac{x}{y}dx$, 从而有 $\int_{\widehat{AB}} -ydx+xdy=\int_1^{-1} -ydx+x(-\frac{x}{y}dx)=\int_{-1}^1(\frac{x^2+y^2}{y})dx=\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$.
7. 直接计算得 $I=\int_0^1(x^2-x^{2\alpha})dx-2xx^\alpha(\alpha x^{\alpha-1})dx=\int_0^1(x^2-(2\alpha+1)x^{2\alpha})dx=-\frac{2}{3}$.
8. 球面的单位法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$, 平面的单位法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$. 所以曲线 Γ 的单位切向量为 $\overrightarrow{\tau}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$. 从而积分为 $\int_\Gamma xdx+ydy+zdz=\int_\Gamma (x,y,z)\cdot\overrightarrow{\tau}ds=\int_\Gamma (x,y,z)\cdot(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})ds=\int_\Gamma 0ds=0$.

3.3 补充 (不要求掌握!)

4 第 4 次习题课: 格林公式, 第 I 型曲面积分

4.1 问题

4.2 解答

4.3 补充 (不要求掌握!)

5 第 5 次习题课: 第 II 型曲面积分, 高斯公式, 斯托克斯公式

5.1 问题

5.2 解答

5.3 补充 (不要求掌握!)

6 第 6 次习题课: 初等积分法, 解的存在唯一性

6.1 问题

6.2 解答

6.3 补充 (不要求掌握!)

7 第 7 次习题课: 二阶线性微分方程

7.1 问题

7.2 解答

7.3 补充 (不要求掌握!)

8 第 8 次习题课: 常数变异法

8.1 问题

8.2 解答

8.3 补充 (不要求掌握!)

9 第 9 次习题课: 数项级数

9.1 问题

9.2 解答

9.3 补充 (不要求掌握!)

10 第 10 次习题课: 数项级数, 函数项级数

10.1 问题

10.2 解答

10.3 补充 (不要求掌握!)