

# 高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2024 年 9 月 25 日

## 目录

|          |                                       |          |
|----------|---------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法</b> | <b>2</b> |
| 1.1      | 问题 . . . . .                          | 2        |
| 1.2      | 解答 . . . . .                          | 2        |
| <b>2</b> | <b>第 2 次习题课: 线性方程组的解, 集合</b>          | <b>3</b> |
| 2.1      | 问题 . . . . .                          | 3        |
| 2.2      | 解答 . . . . .                          | 4        |
| <b>3</b> | <b>第 3 次习题课: 行列式</b>                  | <b>5</b> |
| 3.1      | 问题 . . . . .                          | 5        |
| 3.2      | 解答 . . . . .                          | 6        |
| <b>4</b> | <b>致谢</b>                             | <b>8</b> |

# 1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

## 1.1 问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$
2. 设  $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-2, 1, 5), \alpha_3 = (a, 2, 10), \beta = (1, b, -1)$ . 当  $a, b$  取何值时, 向量  $\beta$  能被  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出? 何时表示系数唯一?
3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表出某个向量  $\beta$  的方式唯一 (不唯一), 则  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  表出任何向量-如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).
4. 某食品厂有四种原料  $A, B, C, D$ . 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

| 单位: % | A  | B  | C  | D  |
|-------|----|----|----|----|
| 脂肪    | 8  | 6  | 3  | 2  |
| 碳水化合物 | 5  | 25 | 10 | 15 |
| 蛋白质   | 15 | 5  | 20 | 10 |

5. (1) 求复矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$  的行简化阶梯型矩阵  $\text{rref}(A)$ ; (2) 求齐次方程组  $AX = 0$  在复数域上的解集合;
- (3) 求齐次方程组  $AX = 0$  在实数域上的解集合; (4) 当  $y_1, y_2, y_3$  满足什么关系时, 方程组  $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$  有解?
6. 已知向量  $\alpha, \beta$  不共线, 并看成是由原点出发的有向线段  $\vec{OA}$  与  $\vec{OB}$ . 设  $u, v \in \mathbb{R}$  且  $u+v=1$ , 问向量  $\vec{OC} = u\alpha + v\beta$  的终点  $C$  在什么位置,  $\vec{AC}$  与  $\vec{CB}$  的比值是多少, 何时比值为正数.
7. 求单叶双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  上的所有直线.
8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体  $ABCD$  每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.
9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异? 
$$\begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .067 \end{cases}, \begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .066 \end{cases}$$
10. 考虑带截距的线性回归  $y \sim x_1 + \dots + x_p$ , 参考上一题, 你有什么想法和改进?

## 1.2 解答

$$1. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=7*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=2*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=\textcircled{1}, \textcircled{3}-=4*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{13}{3}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}. \text{ 因此, 当 } a \neq -4 \text{ 或 } a = -4, b = -\frac{13}{2} \text{ 时, } \beta \text{ 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.}$$

3. 只需注意到表出某个向量  $\beta$  唯一  $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0)$ .

$$\textcircled{2} - = 8 * \textcircled{1}$$

4. 注意  $A, B, C, D$  的比例和为 1, 因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \textcircled{3} - = 5 * \textcircled{1} \\ \textcircled{4} - = 15 * \textcircled{1} \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \textcircled{3} + = 10 * \textcircled{2} \\ \textcircled{4} - = 5 * \textcircled{2} \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4} + = \frac{2}{3} * \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ 因此解是 } (\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25}).$$

5. (1)  $\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \textcircled{2} - = 2 * \textcircled{1} \\ \textcircled{3} - = i * \textcircled{1} \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} - = \frac{i}{2+2i} * \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} * = \frac{1}{2+2i}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(2)  $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ . (3)  $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}$ . (4) 将  $A$  变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是  $(y_1, \frac{y_2-2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$ , 因此只有当  $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$  时才有解.

6.  $\overrightarrow{AC} = (u-1)\alpha + v\beta, \overrightarrow{CB} = -u\alpha + (1-v)\beta, \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{1-u}{1-v} = \frac{v}{1-v}$ , 因此  $A, C, B$  三点共线, 且当  $0 < u, v < 1$  时比值为正数.

7.  $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$ , 因此直线可以表示形式为  $\begin{cases} x-z = k(1-y) \\ x+z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$ , 即是  $\begin{cases} x+ky-z = k \\ kx-y+kz = 1 \end{cases}$ . 特别

地, 当  $y = \pm 1$  时,  $z = \pm x$  也是位于该曲面上的直线.

8.  $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$ , 设  $BC, AC, AB$  中点分别为  $D, E, F$ , 设  $G = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$ . 只需验证  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$  分别与  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$  共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.

9. 用 Gauss 消元法可求得解为  $(1, -1)$  和  $(-666, 834)$ . 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.

10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如  $L_2$  正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着强相关变量, 干扰回归结果.

## 2 第 2 次习题课: 线性方程组的解, 集合

### 2.1 问题

1. (1) 用向量表示平面  $x+2y+3z=1$ ; (2) 用向量表示直线  $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$ ; (3) 求平面  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $k, l \in \mathbb{R}$  的平面方程.

2. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ . (1) 解齐次方程组  $AX=0$ ; (2) 已知  $X = (1, 1, 2, 3, 0)^T$  是方程组  $AX = \beta$  的一个

解, 写出  $AX = \beta$  的所有解.

3. 用  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  表示从全体有理数及  $\sqrt{3}$  出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由  $\sqrt{3}$  生成的数域.

(1) 证明  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ; (2) 数域  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  中的每个数写成  $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$  的方式唯一.

4. 用  $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$  表示从全体整数及  $\sqrt{-5}$  出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由  $\sqrt{-5}$  生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

5. 若  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  能线性表出  $\beta_1, \dots, \beta_s$ , 且  $\beta_1, \dots, \beta_s$  又能线性表出  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ , 证明  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  能线性表出  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ .
6. 考虑  $n$  个城市之间的航班问题: 记  $H = (a_{ij})$  为邻接矩阵, 这里  $a_{ij}$  表示从城市  $i$  到  $j$  的航班数. (1) 解释  $H^k$  的  $(i, j)$  元的含义; (2) 设  $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?
7. 设  $A$  是有向图  $G$  的邻接矩阵, 证明  $G$  中的循环三角形的个数等于  $\text{tr}(A^3)/3$ .
8. 由集合  $A$  的所有子集组成的集合称为  $A$  的幂集, 记为  $P(A)$ . 设集合  $A$  非空, 证明  $\text{card}(P(A)) > \text{card}(A)$ .
9.  $X$  为非空集合, 映射  $f: P(X) \rightarrow P(X)$  满足  $f(A) \subset f(B), \forall A \subset B$ . 那么存在  $T \subset X$  使得  $f(T) = T$ .
10. (1) 找到  $[0, 1]$  到  $[0, 1] \times [0, 1]$  的双射; (2) 找到  $(0, 1)$  到  $\mathbb{R}$  的双射.
11. 罗素悖论: 某班的同学在习题课上作游戏. 每个学生可以给班里任意多同学发一次短信 (可包括自己). 记  $X$  是全体没有给自己发短信的同学构成的集合. 若某同学猜中  $X$  并给且只给  $X$  中的每个同学发了短信, 则该同学获胜. 问: 此游戏有无获胜者?
12. 学习使用 numpy 包, 并实现矩阵的基本运算.

## 2.2 解答

1. (1) 先求得一个点坐标  $(1, 0, 0)$ , 再去求  $x + 2y + 3z = 0$  的一组基础解系:  $(2, -1, 0)$  和  $(3, 0, -1)$ , 因此向量表示为  $(1, 0, 0) + k(2, -1, 0) + l(3, 0, -1), k, l \in \mathbb{R}$ .
- (2) 先求得一个点坐标  $(0, -1, 1)$ , 再去求方向向量  $(1, 2, 3) \times (3, 2, 1) = (-4, 8, 4)$ , 因此向量表示为  $(0, -1, 1) + t(-1, 2, 1), t \in \mathbb{R}$ .
- (3) 先求得一个点坐标  $(1, 1, 2)$ , 再去求法向量  $(1, 2, 0) \times (2, 0, 1) = (2, -1, -4)$ , 因此平面可表示为  $2x - y - 4z = -7$ .
2. (1) 
$$\begin{aligned} & \text{②} - = \frac{3}{2} * \text{①} \\ & \text{③} - = \frac{1}{2} * \text{①} \\ & \text{④} - = \text{①} \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①} - = \frac{2}{3} * \text{③}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②} + = \frac{5}{3} * \text{③}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_5 \\ x_3 = -2x_5 \\ x_1 + 2x_2 = -3x_5 \end{cases} \Rightarrow$$
- $X = (-3n - 2m, m, -2n, -n, n)^T, m, n \in \mathbb{R}$  是自由变元.
- (2) 解集是基础解系加上代表元, 即  $(1 - 3n - 2m, 1 + m, 2 - 2n, 3 - n, n)^T$ .
3. (1) 只需证明  $\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  对于加减乘除封闭. (2) 只需证明  $\sqrt{3}$  不是有理数 (因为  $a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \in \mathbb{Q}$ ). 用反证法,  $\sqrt{3} = \frac{a}{b}, \text{gcd}(a, b) = 1$ , 那么  $a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3|a \Rightarrow 9|a^2 \Rightarrow 3|b^2 \Rightarrow 3|b$ , 矛盾.
4. 类似可知  $\mathbb{Z}(\sqrt{-5}) = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ . 容易证明  $2 + \sqrt{-5}$  是不可约数:  $2 + \sqrt{-5} = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) \Rightarrow 9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5}) = (a + b\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$  无解; 但是  $2 + \sqrt{-5} \nmid 3 \times 3$  而  $2 + \sqrt{-5} \nmid 3$ , 因此不是素数.
5.  $(\beta_1, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)A, (\gamma_1, \dots, \gamma_t) = (\beta_1, \dots, \beta_s)B \Rightarrow (\gamma_1, \dots, \gamma_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(AB)$ , 因此可以线性表出.
6. (1) 从  $a_{ij}^2 = \sum_s a_{is}a_{sj}$  可以看出  $H^k$  的  $(i, j)$  元表示从  $i$  到  $j$  乘坐恰  $k$  次航班有多少种乘坐方式. (2)  $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3$ , 分别有 1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 2 种航班选择;  $2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$  都要倒 3 次, 是最多的.
7. 由上题知  $A^3$  的  $(i, i)$  元表示从  $i$  到  $i$  有几条恰走 3 次的路径, 三角形会在结点上算 3 次, 因此要除以 3.
8. 本题的关键是处理集合  $A$  包含无穷元素的情形. 假设存在一一映射  $f: A \mapsto P(A)$ , 则考虑集合  $A = \{x : x \notin f(x)\}$ . 此时若  $f^{-1}(A) \notin A$ , 则根据定义  $f^{-1}(A) \in A$ ; 反之亦矛盾.
9. 我们的思路应当去找满足条件  $A \subset f(A)$  的最大集合, 即令  $T = \{\cup_{\alpha} A_{\alpha} : A_{\alpha} \subset f(A_{\alpha})\}$ . 根据定义有  $T = \cup_{\alpha} A_{\alpha} \subset \cup_{\alpha} f(A_{\alpha}) = f(\cup_{\alpha} A_{\alpha}) = f(T)$ , 再根据题给条件有  $f(T) \subset f(f(T)) \Rightarrow f(T) \subset T$ .

10. (1) 全部写成无限小数, 然后作映射  $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots \rightarrow (0.a_1a_3a_5\cdots, 0.a_2a_4a_6\cdots)$ ; (2)  $y = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$ .
11. 因此在 ZF 公理体系中, 我们不考虑包含自身作为元素的集合.
12. 从 `pip install numpy` 开始. 学习使用 `np.zeros`, `np.random`, `np.mean`, `np.sum`, `np.dot`, `np.linalg.det`, `np.eye` 等函数, 并做切片和取值运算.

### 3 第 3 次习题课: 行列式

#### 3.1 问题

- 用行列式求解线性方程组  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$ .
- 求以下向量在三维几何空间张成的平行六面体体积:  $\alpha_1 = (3, 2, 1), \alpha_2 = (0, 3, 0), \alpha_3 = (7, 4, 2)$ .
- 判断以下向量组的定向:  $(1, 1), (3, -2); (2, 1, 0), (1, 0, 3), (1, 1, 1); (x, y, z), (z, x, y), (y, z, x); (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)$ ; 其中  $x + y + z > 0$  且互不相等.

4. 计算行列式: (1)  $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$ ; (2)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$ .

5. 对  $n$  阶矩阵  $A$  作如下操作: 第 1 行加上第 2 行的  $k$  倍, 第 2 行加上第 3 行的  $k$  倍, 以此类推; 最后, 第  $n$  行加上此时第 1 行的  $k$  倍. 问做这些变换相当于在  $A$  左边乘一个什么样的矩阵?  $A$  的行列式值会如何变化? 如果第  $n$  行加上的是原来第 1 行的  $k$  倍呢?

6. 计算行列式  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ .

7. 计算行列式  $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$ .

8. 计算行列式  $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$ , 其中  $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$ .

9. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & & \\ \gamma & \alpha & \beta & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

10. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

11. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$

### 3.2 解答

1.  $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = 2, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = -1.$

2.  $V = \|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

3.  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow \text{左手}; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow \text{左手}; \begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0 \Rightarrow \text{右手};$   
 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 \leq 0 \Rightarrow \text{左手}.$

4. (1)  $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2 + 16 + 16 - 4(x+1) - 16(x-2) - 4(x+1) = x^3 + 2x^2 - 27x + 54;$

(2)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

5. 相当于左乘  $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k^2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ , 其行列式无变化, 因为是初等变换. 后面一问相当于左乘  $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$

其行列式也无变化, 原因相同.

6. 用第一列减去第  $i$  列的  $b_i$  倍,  $i = 2, 3, \dots, n$ , 得到  $\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i.$

7. 法 1(加边法):  $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$ , 然后用第  $i+1$  行减去第 1

行的  $x_i$  倍,  $i = 1, 2, 3, 4$ , 得到  $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$

$$\text{法 2(拆项法): } \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五}$$

$$\text{项: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4x_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3x_4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_4x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 原行列式是 } 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

$$8. \text{ 采用第 7 题的法 2(拆项法), 最后剩下 } n+1 \text{ 项: } \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \dots, \text{ 它们分别是 } (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} x_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} a_1 x_2 \cdots a_n, \dots, \text{ 整理得到原}$$

$$\text{行列式为 } (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \right) - 1 \right].$$

$$9. \text{ 若 } \beta\gamma = 0, \text{ 则行列式为 } \alpha^n. \text{ 对于一般情形, 按第一行展开得到 } D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}, \text{ 且有初值条件 } D_1 = \alpha, D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma, \text{ 然后用数列的特征值和特征公式设 } D_n = A \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n + B \left( \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n, \text{ 代入 } n=1, 2 \text{ 解出 } A \text{ 和 } B, \text{ 得到 } D_n = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}.$$

$$10. n=1 \text{ 时, } D_1 = \cos \alpha; n=2 \text{ 时, } D_2 = \cos 2\alpha; \text{ 因此可以猜测 } D_n = \cos n\alpha. \text{ 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 } D_{n+1} = 2 \cos \alpha D_n - D_{n-1} = \cos(n+1)\alpha, \text{ 知该假设成立.}$$

$$11. \text{ 法 1: 将第 1 行至第 } n-1 \text{ 行减去第 } n \text{ 行, 并提出各行和各列公因子, 得}$$

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{再将第 1 列至第 } n-1 \text{ 列减去第 } n \text{ 列, 并提出各行和各列的公因子, 得}$$

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdot & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第  $n$  行展开得到递推式  $D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n(a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n)} D_{n-1}$ , 并直接计算出  $D_2$ , 得

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

法 2: 若  $a_i = a_j$  或  $b_i = b_j (i \neq j)$ , 即两行 (或两列) 相同, 则  $D_n = 0$ . 因此  $D_n$  含有因子  $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$ . 将  $D_n$  的每行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得  $D_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)} D'_n$ . 显然  $D'_n$  也含有上述因子. 另一方面, 由于  $D'_n$  的  $(i, j)$  元为  $\prod_{k \neq j} (a_i + b_k)$ , 所以每一个  $a_i$  在  $D'_n$  的展开式中的次数均为  $n-1$ , 因此设  $D_n = \lambda \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$ . 为确定常数  $\lambda$  的值, 我们不妨令  $a_i = -b_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 此时  $D'_n$  为对角行列式, 且有  $D_n = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \Rightarrow \lambda = 1$ . 因此可得一样的结果.

## 4 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.