# 高等数学 A I 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2022 年 10 月 21 日

## 目录

# 1　第 1 次习题课: 函数, 序列极限

## 1.1　问题

1. $f(x)=|x\sin^3 x|e^{\cos x}$. 判断函数 $f(x)$ 的有界性、单调性和奇偶性.
2. 证明 $f(x)=x-[x]$ 是有界周期函数.
3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ \cos x+\sin x & x>0 \end{cases}$. 计算 $f(-x)$.
4. $f(x)=e^{x^2}$, $f\circ\phi=1-3x$ 并且 $\phi(x)\ge 0$, 求解 $\phi(x)$ 及其定义域.
5. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{n^2-n}=4$.
6. 设 $q>1,k\in\mathbb{N}_+$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{q^n}=0$.
7. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$.
8. 令 $x_1>0$ 并且 $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.
9. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{1/n}=1$.
10. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$.
11. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\exists$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty, \frac{a_n}{b_n}\to 0, a_n,b_n>0$, 证明 $\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n}=0$.
13. (Stolz) $0<b_n\uparrow+\infty, a_n>0$, 如果 $(a_n-a_{n-1})/(b_n-b_{n-1})\to L$, 则 $a_n/b_n\to L$.

## 1.2　解答

1. 注意到 $f(2k\pi+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}(2k\pi+\frac{\pi}{4})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\to\infty$, 所以 $f(x)$ 无界. 又因为 $f(k\pi)\equiv 0$ 且对于 $x\ne k\pi$ 成立 $f(x)\ne 0$, 所以 $f(x)$ 不单调. 由定义知 $f(x)$ 是偶函数.
2. 容易看出 $f(x)$ 有周期 1 且 $|f(x)|\le 1$ 对于所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立.
3. 代入验证即可. $f(-x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ \cos x-\sin x & x<0 \end{cases}$.
4. $f(\phi)=e^{\phi^2}=1-3x\Rightarrow\phi=\sqrt{\log(1-3x)}$. $\phi(x)$ 的定义域是 $\log(1-3x)\ge 0\Leftrightarrow x\le 0$.
5. $|\frac{4n^2}{n^2-n}-4|=\frac{4}{n-1}$. 所以当 $n\ge\frac{4}{\epsilon}+1$ 时, $\frac{4n^2}{n^2-n}$ 与 4 相差不超过 $\epsilon$.
6. 注意到 $q^n=(1+q-1)^n\ge C_n^{k+1}(q-1)^{k+1}=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+\cdots+a_0$ 是 $n^k$ 的高阶无穷大量.
7. 使用夹逼定理. (*) $\ge\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}i}{(n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{2(n+1)^2}\to\frac{1}{2}$, (*) $\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}i}{n^2+n}=\frac{n(n+1)}{2(n^+n)}\to\frac{1}{2}$.
8. 在这类问题中, $\{x_n\}$ 一定会是单调有界的. 首先凑答案, 假设极限存在, 令递推公式两边 $n\to+\infty$, 我们有 $a=\frac{3(1+a)}{3+a}\Rightarrow a=\sqrt{3}$. 然后使用递推公式, 利用数学归纳法, 容易证明如果 $0<x_1<\sqrt{3}$ 则 $0<x_n<x_{n+1}<\sqrt{3}$; 如果 $x_1>\sqrt{3}$ 则 $x_n>x_{n+1}>\sqrt{3}$. 这意味着极限 $\lim x_n$ 存在.
9. $n^{1/n}>(n+1)^{1/(n+1)}\Leftrightarrow n>(1+1/n)^n$ 对于 $n\ge 3$ 成立, 这意味着 $n^{1/n}$ 是单调递减的. 注意到我们作业中已经证明了对于任意 $\epsilon>0$, 成立 $n^{1/n}<1+\epsilon\Leftrightarrow n<(1+\epsilon)^n$ 对于足够大的 $n$. 然后使用极限定义的 $N-\epsilon$ 语言.
10. $3\le\sqrt[n]{2^n+3^n}\le\sqrt[n]{2\times 3^n}\to 3$.
11. 单调上升性显然. 由于 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}$, 从而 $\sum\limits_n\frac{1}{n^2}<\sum\limits_n\frac{1}{(n-1)n}$, 有上界 2.
12. 使用截断. $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,|a_n/b_n|<\epsilon/2$. 从而 $\sum a_n/\sum b_n=\sum\limits_{i=1}^{N}a_i/\sum\limits_{i=1}^{n}b_i+\sum\limits_{i=N+1}^{n}a_i/\sum\limits_{i=1}^{n}b_i:=I_1+I_2$. 当 $n$ 足够大时, $I_1<\epsilon/2$(因为 $\sum b_n\to+\infty$); 而 $I_2<\epsilon/2$ 对于所有的 $n\ge N$ 成立. 因此当 $n$ 足够大时, 可以让 $I_1+I_2<\epsilon$.
13. 用定义. $\forall\epsilon>0,\exists N$, 使得对于 $\forall n>N$, 成立 $(L-\epsilon)(b_n-b_{n-1})\le(a_n-a_{n-1})\le(L+\epsilon)(b_n-b_{n-1})$. 然后用累加 $\Rightarrow(L-\epsilon)(b_n-b_N)\le a_n-a_N\le(L+\epsilon)(b_n-b_N)\Rightarrow L-\epsilon<\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}<L+\epsilon$. 然后估计误差 $|\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-\frac{a_n}{b_n}|=|\frac{(a_n-a_N)b_N}{(b_n-b_N)b_n}+\frac{a_Nb_N}{(b_n-b_N)b_n}+\frac{a_N}{b_n-b_N}|\le(L+\epsilon)\frac{b_N}{b_n}+\frac{a_Nb_N}{(b_n-b_N)b_n}+\frac{a_N}{b_n-b_N}<\epsilon$ (这三项都是趋于 0 的, 所以你总可以找一个足够大的 $n$ 使得上式成立).

### 1.3 补充 (不要求掌握!)

作为一个已经学习数学这么多年的北京大学练习生, 我相信你一定关心过下面这个问题: 可导函数和连续函数之间差多少? 事实上, 我们有以下定义和结论:

(1) 开集: 我们称集合 $A \subset \mathbb{R}$ 是开的, 当且仅当 $\forall x \in A$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset A$.

(2) 闭集: 我们称集合 $B \subset \mathbb{R}$ 是闭的, 当且仅当它的补集是开的.

(3) 定义 $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$, 这里 $f$ 是一个函数.

(4) 你可以证明一个函数 $f$ 是连续的当且仅当任意开集 $A \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(A)$ 是开集.

(5) 内点: 我们称 $x \in A$ 是集合 $A$ 的内点当且仅当 $\exists \delta_x > 0$, 使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset A$.

(6) 可数/可列: 我们称集合 $A$ 是可数的当且仅当存在一个从 $A$ 到自然数集 $\mathbb{N}$ 的一一映射或者 $|A| < \infty$, 这里 $|A|$ 是集合 $A$ 中元素的个数.

(7) 极限点: 我们称 $x$ 是集合 $A$ 的极限点, 当且仅当存在一个序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ 使得 $x_i \to x$. 我们用记号 $A'$ 来表示 $A$ 所有极限点构成的集合.

(8) 闭包: 我们称集合 $\bar{A} = A \cup A'$ 是集合 $A$ 的闭包.

(9) 那么, 对于所有 $[a,b]$ 上的连续函数, 至少存在一点可导的函数构成的集合是无处稠密集的可列并 (第一纲集). 这里, 无处稠密集是指其闭包不存在内点的集合, 并且连续函数之间的度量定义为 $\rho_{[a,b]}(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f-g|$.

(10) Baire 纲集定理: 闭集 $B_n$ 无内点, 则 $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ 也无内点. 由此容易知道第一纲集是没有内点的.

# 2 第 2 次习题课: 序列极限, 函数极限

### 2.1 问题

1. 证明 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1$.
2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$.
3. 计算 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.
4. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.
5. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}$.
6. 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.
7. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2}$.
8. 设数列 $a_n \to 0$ 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = a$. 证明 $a \le 1$.
9. 令 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)$, 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
10. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \exists$, 证明 $\frac{a_n}{n} \to 0$.
11. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} (n!)^{1/n^2} = 1$.
12. $a_1 = b, a_2 = c, a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$, 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
13. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1})^{\frac{1}{x}}$. 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.
14. $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, 且 $|f(x)| \le \sin x$. 证明 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \le 1$.
15. 设 $\delta > 0$, 且 $f(x)$ 在区间内 $(-\delta, \delta)$ 有界. $\exists a > 1, b > 1$ 使得 $f(ax) = bf(x)$. 证明当 $x \to 0$ 时 $f(x) \to 0$.
16. $a_n$ 收敛到 $a$ 当且仅当 $a_n$ 的任意子列都收敛到 $a$.

### 2.2 解答

1. 注意到 $|\frac{1}{x-1} - 1| = |\frac{x-2}{x-1}|$, 取 $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\epsilon)$.
2. 注意到 $|x^2 \sin\frac{1}{x}| \le |x^2| \to 0$, 取 $\delta = \sqrt{\epsilon}$.
3. $\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{3x^2h+3xh^3+h^3}{h} \to 3x^2$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to \frac{1}{2}$.
5. $|\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}| = |2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}| \le |\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}| \le \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} \to 0$.
6. $\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2} = \frac{2\sin 2x\sin x}{x^2} \sim \frac{2\times 2x\times x}{x^2} = 4$.
7. 这种形如 $(1+0)^\infty$ 的极限问题一定是去试图凑 $e$. 原式 $= [(1+\frac{3}{x^2-2})^{\frac{x^2-2}{3}}]^{\frac{3x^2}{x^2-2}} \to e^3$.
8. 如果 $a>1$, 那么 $\exists N$ 使得 $\forall n>N, |a_{n+1}/a_n| > (1+a)/2$, 则 $|a_n| > |a_N|(\frac{1+a}{2})^{n-N} \Rightarrow |a_n| \to \infty$.
9. $\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}(\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}})$. $(*) \le \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\times\frac{1}{2} \to \frac{1}{4}$. $(*) \ge \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\times\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{4}$.
10. $a_n/n = \sum a_n/n - \frac{n-1}{n}\sum a_{n-1}/(n-1) \to 0-1\times 0 \to 0$.
11. 使用夹逼定理知 $1 \le (n!)^{1/n^2} \le n^{1/n} \to 1$. (PLUS: Stirling: $n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$).
12. $a_n-a_{n-1} = (-\frac{1}{2})(a_{n-1}-a_{n-2}) = (-\frac{1}{2})^2(a_{n-2}-a_{n-3}) = \cdots = (-\frac{1}{2})^{n-1}(a_1-a_0)$, 从而 $a_n-a_0 = (a_1-a_0)[1+(-\frac{1}{2})+\cdots+(-\frac{1}{2})^{n-1}] \to \frac{2}{3}(a_1-a_0) \Rightarrow a_n \to \frac{1}{3}a_0+\frac{2}{3}a_1$.
13. 我们已经证明了 $(a-1)^{1/x}\to 1, (1/x)^{1/x}\to 1$, 所以原极限值等于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x-1)^{1/x}$. 从而: 如果 $a>1$, $\lim = a$; 如果 $0<a<1$, $\lim = 1$.
14. 注意到 $|f(x)/\sin x| \le 1$. 令 $x\to 0$ 即可.
15. $x\in(-\delta,\delta), |f(x)|<M \Rightarrow x\in(-\delta/a,\delta/a), |f(x)| = \frac{1}{b}|f(ax)| \le \frac{M}{b} \Rightarrow x\in(-\delta/a^n,\delta/a^n), |f(x)| \le \frac{M}{b^n} \Rightarrow f(x)\to 0$ 当 $x\to 0$ 时.
16. $\Rightarrow$ 是显然的. $\Leftarrow$. 反证法, 如果结论不对, 则 $\exists\epsilon_0>0, \forall N, \exists n_k>N$ 使得 $|a_{n_k}-a|>\epsilon_0$. 取子列 $\{a_{n_k}\}$ 即可.

### 2.3 补充 (不要求掌握!)

**闭区间套定理**: $a_n\uparrow, b_n\downarrow, 0<b_n-a_n\to 0$, 那么 $\exists$ 唯一一个点 $x\in\cap_n[a_n,b_n]$.
证明: 令 $x = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 即可.
**有限覆盖定理**: $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族开集 (可能不可数). 如果 $[a,b]\subset\cup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$, 则 $\exists I_1,\cdots,I_m\in\{I_\lambda\}$ 使得 $[a,b]\subset\cup_{i=1}^m I_i$.
证明. 如果结论不对, 即不存在可数子覆盖, 那么对于区间 $[a,(a+b)/2]$ 和 $[(a+b)/2,b]$, 至少有一个区间不存在有限子覆盖, 这样一直切半, 由闭区间套, 必然夹出一个点 $x$. 由于这是开覆盖, 因此存在开集 $O_x$ 使得 $x\in O_x$. 从而由极限知这个开区间迟早会覆盖前面的从某项开始的闭区间列, 这与假设 (不存在有限覆盖) 矛盾.
**聚点原理**: $|a_n|<M$, 那么 $\exists\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$, 使得 $a_{n_k}\to a$ 当 $k\to\infty$ 时. (有界序列必有收敛子列)
我们给出几种证明方法:
(1) 取 $M$ 使得 $\forall n, |x_n|\le M$, 取 $a_1=-M, b_1=M$. 对 $[a_n,b_n]$ 多次迭代, 每次找到 $\frac{a_n+b_n}{2}$, 这个点将当前区间划分为两个子区间. 两个子区间中必然至少有一个含有无穷项. 任取其中一个含有无穷项的区间作为 $[a_{n+1},b_{n+1}]$. 由闭区间套定理, 最终 $a_n,b_n$ 有相同的极限 $x$, 同时 $x_n$ 中有无穷项与 $x$ 任意接近. 选取 $x_{n_k}\in[a_i,b_i]$, 则 $x_{n_k}\to x$.
(2) 如果不存在这样的子列, 那么 $\forall x\in[a,b], \exists\delta>0$ 使得 $|(x-\delta,x+\delta)\cap\{x_i\}_{i=1}^n|\le 1$. 这样构造出的开区间集合覆盖了 $[a,b]$, 由有限覆盖定理, 必然存在有限个开区间覆盖整个区间. 而由假设, 对于取出的每个开区间中至多只有原序列中的一个点, 由于开区间的数量为有限个, 可以得出原序列长度也是有限的, 这显然不成立.
**柯西收敛**: $\forall\epsilon>0, \exists N, \forall n,m>N, |a_n-a_m|<\epsilon$. 这与之前的极限定义是等价的, 但优点是不需要提前知道 "无理数".
证明. $\Rightarrow$: 取 $\epsilon=1$ 以及满足条件的 $N$, 那么 $1+\max_{i=1,2,\cdots,N}|x_i|$ 给出了整个序列 $\{x_n\}$ 的界. 取它的一个收敛子列 $x_{n_k}$, 并记这个极限为 $x$. 从而 $|x_n-x|\le|x_{n_k}-x|+|x_n-x_{n_k}|\to 0$. $\Leftarrow$: $|a_n-a_m|\le|a_n-a|+|a_m-a|\to 0$.

# 3 第 3 次习题课: 闭区间上的连续函数

### 3.1 问题

1. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.
2. $\{x_n\}$ 收敛且 $\{y_n\}$ 收敛, 证明 $\{x_n+y_n\}$ 收敛. $\{x_n\}$ 且 $\{y_n\}$ 发散, 是否有 $\{x_n+y_n\}$ 或者 $\{x_ny_n\}$ 一定发散? 如果 $\{x_ny_n\}$ 是无穷小量, 是否有 $\{x_n\}$ 或者 $\{y_n\}$ 一定是无穷小?
3. 求极限. $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$.
4 (不要求掌握). $0\le x_{n+m}\le x_n+x_m$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}\exists$. (这个引理在大偏差理论中很有用).

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. 求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_{n+1-i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} = a$. 其中 $p_k > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} = 0$.
6. 求极限. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}, \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}, \lim\limits_{x\to\infty} (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})^x$.
7. 证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\exists \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)\exists$, 但是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\exists \not\Leftarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$.
8. 举例说明存在 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处不连续, 但 $|f(x)|$ 处处连续.
9. $a_1, a_2, \cdots, a_p > 0$, 计算 $\lim\limits_{x\to 0+0} (\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i^x}{p})^{\frac{1}{x}}$.
10. 求极限. $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x\log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2}, \lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}$.
11 (不要求掌握). 举例说明存在一个函数处处不连续, 其定义域是 $[0,1]$ 但是值域为区间.
12. $f(x) \in C[a,b]$, $|f(x)|$ 单调. 证明 $f(x)$ 单调.
13 (不要求掌握). $|f(x) - f(y)| \le k|x-y|$. $0 < k < 1$. 证明 $kx - f(x)$ 单调上升并且 $\exists c, f(c) = c$.
14. $f(x) \in C[a,b]$, $\forall x, \exists y$, 使得 $|f(y)| \le \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明 $\exists \xi$, 使得 $f(\xi) = 0$.
15 (不要求掌握). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有第一类间断点, 证明 $f(x)$ 有界.
16. 设 $f(x) \in C[a,b], f(a)f(b) < 0$. 证明 $\forall n = 1, 2, \cdots, \exists\{\xi_i\}_{i=1}^n \subset [a,b], \xi_i \ne \xi_j$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} e^{f(\xi_i)} = n$.
17. 非负函数 $f \in C[0,1], f(0) = f(1) = 0$. 证明 $\forall a \in (0,1), \exists x_0 \in [0,1]$ 使得 $x_0 + a \in [0,1]$ 且 $f(x_0) = f(x_0 + a)$. 如果去掉非负条件还对吗?
18. $f_n(x) = x^n + x$. (1) 证明: $\forall n$, $f_n(x) = 1$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 中有且仅有一个根 $c_n$; (2) 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.
19. 不等于常数的连续周期函数一定有最小正周期. 如果把连续性去掉结论如何?
20 (不要求掌握). $f$ 在 $[a,b]$ 内处处有极限. 证明: (1) $\forall\epsilon > 0$, 在 $[a,b]$ 中使得 $|\lim\limits_{t\to x} f(t) - f(x)| > \epsilon$ 的点至多有有限个. (2) $f(x)$ 至多有可列个间断点.

### 3.2 解答

1. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (使用不等式 $\frac{i}{i+1} < \frac{i+1}{i+2}$), 那么 $x_n^2 < \frac{1}{2n+1}$, 这意味着 $x_n \to 0$.
2. 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{x_n + y_n\}$ 都收敛, 那么 $\{x_n + y_n - x_n = y_n\}$ 也会收敛. 构造 $x_n = (-1)^{n-1}, y_n = (-1)^n$, 那么 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 发散但是 $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ 都收敛. 再构造 $x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}, x_{2n} = 1, y_{2n-1} = 1, y_{2n} = \frac{1}{2n}$. $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都不是无穷小量但是 $\{x_n y_n\}$ 是无穷小量.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{2\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n-1}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.
4. 考虑 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 的下确界 $\alpha$. 那么 $\exists n$ 使得 $x_n/n < a + \epsilon$. 设 $\max_{i=1,2,\cdots,n} x_i = M$. 那么 $\frac{x_m}{m} \le \frac{x_n}{m} + \frac{x_{m-n}}{n} \le \frac{2x_n}{m} + \frac{x_{m-2n}}{m}$ (假设 $m = kn + b$) $\le \cdots \le \frac{kx_n}{m} + \frac{x_b}{m} \le \frac{kx_n}{kn+b} + \frac{M}{m} \le \frac{x_n}{n} + \frac{M}{m}$. 选择足够大的 $m$ 使得 $\frac{M}{m} < \epsilon$. 从而 $a \le \frac{x_m}{m} < a + 2\epsilon$.
5. WLOG 令 $a = 0$. 设 $\sup_n\{a_n\} = M$. $\forall\epsilon > 0, \exists N_1, \forall n \ge N_1$, 使得 $|a_n| < \epsilon$; $\exists N_2, \forall n \ge N_2$, 使得 $p_n/\sum\limits_{n} p_n < \epsilon/N_1$. 令 $n > N_1 + N_2$, 则 $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i p_{n+1-i}/\sum\limits_{i=1}^{n} p_i| \le |\sum\limits_{i=1}^{n-N_1} p_i a_{n+1-i}/\sum\limits_{i=1}^{n} p_i| + |\sum\limits_{i=n-N_1+1}^{n} p_i a_{n+1-i}/\sum\limits_{i=1}^{n} p_i| < \epsilon + \frac{\epsilon}{N_1} \times N_1 \times M = (M+1)\epsilon$.
6. $(e^{ax} - e^{bx})/x = a \cdot \frac{e^{ax}-1}{ax} + b \cdot \frac{1-e^{bx}}{b} \to a - b, \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1/x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3}}}+1} \to \frac{1}{2}$
$(\sin 1/x + \cos 1/x)^x = [(1 + \cos 1/x + \sin 1/x - 1)^{\frac{1}{\cos 1/x + \sin 1/x - 1}}]^{x\cos 1/x + \sin 1/x - 1} = (1/x = t) = e^{(\cos t + \sin t - 1)/t} = e^1$.
7. 显然.
8. $f(x) = 1_{\mathbb{Q}} - 1_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$.
9. $(\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i^x}{p})^{1/x} = [1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x - 1)}{p}]^{1/x} = \{[1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}{p}]^{\frac{p}{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}}\}^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i^x-1)}{px}} \to e^{\frac{\sum\limits_{i=1}^{p}\log a_i}{p}} = (a_1 a_2 \cdots a_p)^{1/p}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x\log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2} \sim \frac{x\cdot 3x}{(2x)^2} = \frac{3}{4}, \lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{3^x-4^x} = \frac{(2/3)^x-1}{1-(4/3)^x} \sim \frac{x\log(2/3)}{-x\log(4/3)} = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 4 - \log 3}$.
11. $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x + \frac{1}{2} & x \in [0, \frac{1}{2}] \& x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1] \& x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.
12. 只需注意到如果 $f(x_0) = 0$, 那么对于所有的 $x \in [a, x_0]$, $f(x) = 0$.

13. 第一问是定义, 第二问用柯西收敛准则, 重复利用已知不等式来证明 $x, f(x), f(f(x)), \cdots$ 是柯西列.
14. 如果不存在 $\xi$ 使得 $f(\xi)=0$. 那么 $f(x)$ 始终保号, 不妨设 $f(x)>0$. 设 $x_0=\arg\min f(x)$. 这样就不存在 $y$ 使得 $|f(y)|\le\frac{1}{2}f(x)$, 矛盾.
15. 第一类间断点 $\Rightarrow$ 每一点都有一个邻域有界 $\Rightarrow$ 所有邻域构成开覆盖, 必有有限子覆盖, 有限个有界总能找到最大界.
16. $\exists\eta>0$, 使得 $f([a,b])\supset[-\eta,\eta]$, 这意味着 $e^{f([a,b])}\supset[e^{-\eta},e^{\eta}]\supset[1-\epsilon,1+\epsilon]$($\exists$ 一个足够小的 $\epsilon>0$). 从而如果 $n$ 是奇数, 选择 $e^{f(\xi_1)}=1, e^{f(\xi_2)}=1-\epsilon/2, e^{f(\xi_3)}=1+\epsilon/2, e^{f(\xi_4)}=1-\epsilon/3, e^{f(\xi_5)}=1+\epsilon/3,\cdots$; 如果 $n$ 是偶数, 选择 $e^{f(\xi_1)}=1-\epsilon/2, e^{f(\xi_2)}=1+\epsilon/2, e^{f(\xi_3)}=1-\epsilon/3, e^{f(\xi_4)}=1+\epsilon/3,\cdots$.
17. 令 $g(x)=f(x+a)-f(x)$. $g(0)\ge0, g(1-a)\le0$, 用介值定理. 去掉非负条件不对, 比如说 $f(x)=\sin(2\pi x), a=0.7$.
18. (1) 注意到 $f_n\uparrow\in[\frac{1}{2},1]$ 且 $f(\frac{1}{2})<1, f(1)>1$, 使用介值定理. (2) 由于 $\forall\epsilon,\exists N$, 使得 $\forall n>N, (1-\epsilon)^n+1-\epsilon<1$. 由于 $f(1-\epsilon)<1=f(c_n)$ 且 $f_n\uparrow\Rightarrow c_n>1-\epsilon$. 由极限定义知 $c_n\to1$.
19. 反证法. 如果 $f(a)\ne f(b)$, 考虑正周期序列 $T_n\to0$, 则由带余除法, $(b-a)\div T_n=S_n\cdots m_n$, 其中 $0\le m_n<T_n\to0$. 所以 $a+S_nT_n\to b$, $f(a)=f(a+S_nT_n)\to f(b)$ (连续性) $\Rightarrow f(a)=f(b)$, 矛盾. 把连续性去掉则结论不对, 比如说 Dirichlet 函数.
20. (1) 如果集合有无穷多个元素那一定有聚点 (有界序列必有收敛子列). 从而 $x_n\to x$. 考虑 $y_n$ 使得 $|y_n-x_n|<1/n$, 且 $|f(y_n)-f(x_n)|>\epsilon$(这是集合的定义, 函数极限差 $>\epsilon$ 那么必然存在一个比较近的点使得函数差 $>\epsilon$). 从而 $y_n\to x$, $f$ 在 $x$ 的极限何在?(极限存在当且仅当任意趋于其的数列极限均相等, 而这里 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)$ 显然与 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 不同). (2) 记 (1) 中集合为 $A_\epsilon$. 注意到间断点集合可以写成 $\cup_nA_{1/n}$. 可列个有限元素集合的并元素一定是可列个的.

### 3.3 补充 (不要求掌握!)

**有界性定理**: $f(x)\in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 有界.
证明. 如果无界, 则选择 $x_n$ 使得 $f(x_n)\to\infty$, 那么存在一个子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ 收敛到某个 $x$(聚点原理). 由连续性知 $f(x)=\infty$, 矛盾.
**最值定理**: $f(x)\in C[a,b]$, 那么 $\arg\max f(x)\exists$.
证明. 找一个数列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)\to\max f(x)$. 利用有界数列必有收敛子列和 $f(x)$ 的连续性.
**介值定理**: $f(x_1)>0, f(x_2)<0, f(x)\in C[x_1,x_2], \exists x_0$ 使得 $f(x_0)=0$.
证明. 使用 Lebesgue 方法. 令 $x_0=\sup\{x:f(x)>0\}$. 利用连续性知如果 $f(x_0)>0$ 则 $x_0$ 不是上界 (因为根据连续性会有 $x_0$ 的一个邻域都满足 $f(x)>0$), 如果 $f(x_0)<0$ 则有更好的上确界 (同样根据连续性会有 $x_0$ 的一个邻域满足 $f(x)<0$).

## 4 第 4 次习题课: 导数, 高阶导数

### 4.1 问题

1. $f(x)\in C(\mathbb{R}), \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 证明 $\arg\min_{x\in\mathbb{R}}f(x)\exists$.
2. 证明 $\cos x=\frac{1}{x}$ 有无穷多个正实数根.
3. $f(x)\in C[a,b], x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$. 证明 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$.
4. $f(x)=|x|^{1/4}+|x|^{1/2}-\frac{1}{2}\cos x$. 问 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中有多少个根?
5. $f(x)\in C[0,2], f(0)=f(2)$, 证明 $\exists x_1,x_2\in[0,2]$ 使得 $|x_1-x_2|=1$ and $f(x_1)=f(x_2)=$.
6. $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$. 讨论连续性.
7. $f(x)\in C(\mathbb{R}), f(x+y)=f(x)+f(y)$. 求解 $f(x)$.
8. $f(x)$ 连续, 问 $|f(x)|$ 连续否?
9. $f(x)\in C[0,1], 0\le f(x)\le1$, 证明 $\exists t\in[0,1]$ 使得 $f(t)=t$.
10 (不要求掌握). $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, $0\le f(x)\le1$, 证明 $\exists t\in[0,1]$ 使得 $f(t)=t$.
11. $f(x)$ 在 $x=3$ 连续, $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=2$. 求 $f'(3)$.
12. $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x}$.

13. 证明奇函数导数是偶函数, 偶函数导数是奇函数.
14. 求导数. $y=\sqrt[3]{2+3x^3}, y=\arcsin\frac{1}{x^2}, y=\log(\arctan 5x)+\log(1-x), y=e^{\sin^2 x}+\sqrt{\cos x}2^{\sqrt{\cos x}}$.
15. $f(x)=x|x(x-2)|$, 求 $f'(x)$.
16. $f(x), x\in[-1,1], x\le f(x)\le x^2+x$, 证明 $f'(0)=1$.
17. 求导数. $e^{xy}=3x^2y, \arctan y/x=\log\sqrt{x^2+y^2}$.
18. 求导数. $f(x)^{g(x)}, x^{x^x}$.
19. 求 $\frac{x^n}{1-x}, \sin^4 x+\cos^4 x$ 的 $n$ 阶导数.
20. 求 $\arcsin^2 x$ 在 0 处的 $n$ 阶导数.
21. 求极限. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x, \lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n^2]{n}-1), \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}$.
22. $f([a,b])\subset[a,b], |f(x)-f(y)|\le|x-y|$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$, 证明 $\forall x_1\in[a,b]$, 都有 $x_n$ 收敛.

## 4.2 解答

1. 由极限定义知 $\exists X>0, \forall|x|>X, f(x)>f(0)$. 那么 $\arg\min_{x\in[-X,X]}f(x)=\arg\min_{x\in\mathbb{R}}f(x)$, 由最值定理知存在性.
2. 设 $f(x)=\cos x-1/x$, 那么 $f(2k\pi)>0, f(2k\pi+\frac{\pi}{2})<0$, 由介质定理立得.
3. 注意到 $\min f(x)\le\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\le\max f(x)$. 使用介质定理.
4. 注意到 $f(x)$ 是偶函数. 由于 $\forall x>1$, $f(x)>0$, 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上单调递增, 则 $f(0)<0, f(1)>0\Rightarrow$ 有且仅有一个正实数根. 从而在 $\mathbb{R}$ 上有两个根.
5. 令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$. 那么 $g(0)g(1)\le 0\Rightarrow\exists x\in[0,1]$ 使得 $g(x)=0$.
6. $f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|>1\\ -x & 0<|x|<1\end{cases}$.
7. 先证有理数点. $f(n)=f(1)+f(n-1)=2f(1)+f(n-2)=\cdots=nf(1), f(1)=f(1/n)+f((n-1)/n)=2f(2/n)+f((n-2)/n)=\cdots=nf(1/n)\Rightarrow f(m/n)=mf(1/n)=m/n\times f(1)$. 有理数点满足 $f(x)=xf(1)$, 无理数点用有理数逼近用连续性就可以了.
8. 注意到 $||f(x)|-|f(y)||\le|f(x)-f(y)|$. 因此连续.
9. 令 $g(t)=f(t)-t$, $g(0)\ge 0, g(1)\le 1$, 利用介质定理.
10. 使用 Lebesgue 方法. 令 $x_0=\sup_x\{f(x)>x\}$, 往证 $f(x_0)=x_0$. 如果 $f(x_0)>x_0$, 那么 $\forall x_1, x_0<x_1<f(x_0)$, 都有 $f(x_1)\ge f(x_0)>x_1$. 这意味着 $x_0$ 不是上界. 如果 $f(x_0)<x_0$, 那么 $\forall x_1, f(x_0)<x_1<x_0$, 都有 $f(x_1)\le f(x_0)<x_1$. 这意味着 $x_0$ 不是上确界, 因为有更好的上界. 因此 $f(x_0)=x_0$.
11. 当 $x\to 3$ 时, $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)/(x-3)\times(x-3)\sim 2\times(x-3)=0$. 从而 $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$.
12. $\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x}=\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+\frac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x}\to 2f'(x_0)$.
13. 奇函数导数是偶函数: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{-x\to -x_0}\frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)}=f'(-x_0)$. 同理偶函数导数是奇函数.
14. $y'=\frac{3x^2\sqrt[3]{2+3x^3}}{2+3x^3}, y'=\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}, y'=\frac{5}{\arctan 5x\times(1+25x^2)}+\frac{1}{x-1}, y'=e^{\sin^2 x}\sin 2x-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}2^{\sqrt{\cos x}}(1+\sqrt{\cos x}\log 2)$.
15. 直接计算即可, 注意验证分段点左右导数是否相等. $f'(x)=\begin{cases}3x^2-4x & x<0 \text{ or } x>2\\ 4x-3x^2 & 0\le x<2\\ \nexists & x=2\end{cases}$.
16. 注意到 $f(0)=0$. 从而当 $x\to 0$ 时, $1\leftarrow\frac{x}{x}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x^2+x}{x}\to 1$.
17. 两边同时对 $x$ 求导数, 计算可知 $y'=\frac{y(2-xy)}{x(xy-1)}, y'=\frac{x+y}{x-y}$.
18. 方法都是写成指数函数, $e^{g\log f}, e^{e^{x\log x}\log x}$. 结果是 $f^g(g'\log f+\frac{f}{g}f'), x^{x^x}(x^x(1+\log x)\log x+x^{x-1})$.
19. $\frac{x^n}{1-x}=\frac{x^n-x^{n-1}+x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots+x-1+1}{1-x}=-(x^{n-1}+\cdots+x+1)+\frac{1}{1-x}$, 因此 $n$ 阶导数是 $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. 第二个用倍角公式写出来是 $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$. $y'=-\sin 4x$. 由课上已知关于三角函数高阶导数的结论, 知 $y^{(n)}=-4^{n-1}\sin(4x+\frac{n-1}{2}\pi)$.
20. $f'(x)=2\arcsin x/\sqrt{1-x^2}$, 从而 $(1-x^2)f'(x)^2=4f(x)$. 两边求导 $-2xf'(x)^2+2(1-x^2)f'(x)f''(x)=4f'(x)\Rightarrow -xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2$. 两边求 $n-2$ 次导数, 并代入 $x=0$, 利用 Leibniz 公式知道 $f^{(n)}(0)=(n-2)^2f^{(n-2)}(0)$. 然后再把 $f'(0), f''(0)$ 算出来用递推就可以了.

21. (1) $\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1}\to\frac{1}{2}$. (2) $n(\sqrt[n^2]{n}-1)=n(e^{\log n/n^2}-1)\sim n\log n/n^2\to 0$.
(3) $(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}=[(1+2x)^{1/(2x)}]^{2(x+1)^2}\to e^2$.
22. 回忆: 这种题一定是单调数列. 容易验证数列是良定义的, 即不会跑出区间 $[a,b]$ 外. 如果 $x_n\ge x_{n-1}$, 有 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(f(x_n)+x_n)$ (利用 $f(x_n)-f(x_{n-1})\ge x_{n-1}-x_n$) $\ge\frac{1}{2}(f(x_{n-1})+x_{n-1})=x_n$. 从而如果 $x_2\ge x_1$, 则这成为单调上升有界数列, 必收敛. 同理若 $x_{n-1}\ge x_n$ 也可以推出 $x_n\ge x_{n+1}$.

### 4.3 补充 (不要求掌握!)

参考 https://wqgcx.github.io/courses/analysis1.pdf.

# 5 第 5 次习题课: 隐函数求导, 微分, 不定积分

### 5.1 问题

1. 求出闭区间 $[-1,1]$ 上的一元函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 达到最小值的所有 $[-1,1]$ 上的点.
2. 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x^m\sin\frac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 其中 $m$ 为正整数. 在 $x\ne 0$ 处, 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$. 求 $m$ 满足的条件, 使得 $f(x)$ 有连续的二阶导函数.
3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\log(1+x)}{x}+\frac{x}{2} & x>0\\ a & x=0\\ \frac{\sin bx}{x}+cx & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 确定常数 $a,b,c$, 的值 (需要用洛必达法则).
4. $y=e^{-x^2}$, 求 $y^{(4)}|_{x=0}$.
5. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\arccos\frac{x}{a}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
6. $y^2\tan(x+y)-\sin(x-y)=0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
7. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
8. 求函数 $f(x)=x^{\arcsin x}(0<x<1)$ 的导函数 $f'(x)$.
9. 求函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 点的 3 阶导数 $f'''(0)$.
10. 设 $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$, 求 $f^{(n)}(x),n\in\mathbb{N}$.
11. 求方程 $y^2+2\log y=x^4$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的二阶导数.
12. 判断下列结论是否正确.
(1) 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 且 $f'(x_0)>0$, 那么: (1.1) $f(x)$ 在 $x_0$ 点一定连续. (1.2) $f(x)$ 在 $x_0$ 点的某个邻域内一定连续. (1.3) $f(x)$ 在 $x_0$ 点的某个邻域内一定单调上升.
(2) $f(x)$ 在 $x_0$ 点二阶可导, 那么: (2.1) $f(x)$ 在 $x_0$ 点一定连续. (2.2) $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个邻域内一定连续.
13. 设 $f(x)=e^{x(x-1)\cdots(x-2021)}$, 求 $f'(2021)$.
14. 设 $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
15. 设 $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 并化简.
16. 求积分. $\int\frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)}dx,\int\frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6}dx,\int\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx,\int\frac{3+5x}{\sqrt{4x^2-4x+5}}dx$.
17. 设 $y=f(x)=x^3,x=g(t)=t^2,y=f(g(t))=t^6,\Delta t=0.1,\Delta x=g(1+0.1)-g(1)=0.21$.
(1) 当把 $t$ 作为自变量时, 函数 $y=f(g(t))$ 的二阶微分记为 $d_t^2y$, 函数 $x=g(t)$ 的一阶微分记为 $d_tx$. 计算出: 当 $t=1,\Delta t=0.1$ 时, 函数 $y=f(g(t))$ 的二阶微分 $d_t^2y|_{t=1,\Delta t=0.1}$ 和函数 $x=g(t)$ 的一阶微分 $d_tx|_{t=1,\Delta t=0.1}$.
(2) 当把 $x$ 作为自变量时, 函数 $y=f(x)$ 的二阶微分记为 $d_x^2y$, $x$(看作 $x$ 的函数) 的一阶微分记为 $d_xx$. 计算出: 当 $x=1,\Delta x=0.21$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的二阶微分 $d_x^2y|_{x=1,\Delta x=0.21}$ 和函数 $x$(看作 $x$ 的函数) 的一阶微分 $d_xx|_{x=1,\Delta x=0.21}$.
(3) $\frac{d_t^2y}{(d_tx)^2}|_{t=1,\Delta t=0.1}$ 与 $\frac{d_x^2y}{(d_xx)^2}|_{x=1,\Delta x=0.21}$ 相等吗?
18. 求极限. $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x,\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x+\tan x},\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2^2}\cdots\cos\frac{a}{2^n}\ (a\in(0,1)),\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^{x^2},\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.
19. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=0$.

20. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 如果极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(0)+f(1/n)+f(2/n)+\cdots+f(1)}{n}=M$, 其中 $M=\max_{x\in[0,1]}f(x)$, 则 $f(x)\equiv M$.

21 (Riemann-Lebesgue 引理). $f\in R[a,b], g\in R[0,T], g(x+T)=g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)dx\to\int_a^b f(x)dx\cdot\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.

## 5.2 解答

1. $f(1)=f(-1)=1, f'(x)=\frac{2}{3x^{1/3}}-\frac{2x}{3(x^2-1)^{2/3}}=\frac{2[(x^2-1)^{2/3}-x^{4/3}]}{3x^{1/3}(x^2-1)^{2/3}}\geq 0\Rightarrow 0<x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $-1<x\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 注意到 $f(0)=1$. 从而达到最小值的点是 $-1,0,1$.

2. $f'(x)=-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}+mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}, f''(x)=-x^{m-4}\sin\frac{1}{x}-(m-2)x^{m-3}\cos\frac{1}{x}-mx^{m-3}\cos\frac{1}{x}-m(m-1)x^{m-2}\sin\frac{1}{x}$. 要使得 $f''(0)$ 存在需要 $f'(0)\exists, f'(x)\to f'(0)$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\exists\Rightarrow m\geq 4$, 二阶导函数连续性意味着 $f''(x)\to f''(0)\Rightarrow m\geq 5$.

3. 连续性: $f(0+0)=a\Rightarrow a=1, b=1$. $f'_+(0)=0, f'_-(0)=0\Rightarrow c=0$ (需要用洛必达).

4. $y'=-2xe^{-x^2}, y''=4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}, y'''=-2x(4x^2-2)e^{-x^2}+8xe^{-x^2}, y''''=(-24x^2+12)e^{-x^2}+(16x^4-24x^2)e^{-x^2}$. 从而 $y''''(0)=12$.

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

6. 两边求导, $2yy'\tan(x+y)+\frac{y^2}{\cos^2(x+y)}(y'+1)+(y'-1)\cos(x-y)=0\Rightarrow y'=\frac{\cos^2(x+y)\cos(x-y)-y^2}{\cos^2(x+y)\cos(x-y)+y^2+2y\sin(x+y)\cos(x+y)}$.

7. $y'=a^ax^{a^a-1}+a^{x^a+1}x^{a-1}\log a+a^{a^x+x}(\log a)^2$.

8. $f(x)=e^{\arcsin x\log x}, f'(x)=x^{\arcsin x}(\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{x})$.

9. $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f'''(x)=-\frac{2(1+x^2)^2-8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\Rightarrow f'''(0)=-2$.

10. $\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2})\Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^nn!}{4}(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}})$.

11. 两边求导, $2yy'+2\frac{y'}{y}=4x^3\Rightarrow y^2y'+y'=2x^3y$, 再求一次, $2y(y')^2+y^2y''+y''=6x^2y+2x^3y'$, 利用 $y'=\frac{2x^3y}{y^2+1}$, 得到 $y''=\frac{6x^2y}{y^2+1}+\frac{4x^6y}{(y^2+1)^2}-\frac{8x^6y^3}{(y^2+1)^3}$.

12. (1.1) 可导一定连续. (1.2)(1.3) 不一定, 比如说 $f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ x+x^2 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$. (2.1) (2.2) 都是对的.

13. $f'(x)=e^{x(x-1)\cdots(x-2021)}[x(x-1)\cdots(x-2021)]'$, 从而 $f'(2021)=2021!$.

14. $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}, \frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2}\mathrm{sgn}(t)$, 注意到 $t,x$ 同号, 因此 $\frac{dy}{dx}=\mathrm{sgn}(x)$.

15. 直接计算, 小心化简. $y'(x)=\frac{1}{x^4+1}$.

16. (1) $\frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x}+\frac{x}{(x^2+1)}$, 因此积分后是 $2\log|x+1|+\log|x|+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$.

(2) $\frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6}=\frac{11}{10\sqrt{3}}\frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{11}{10\sqrt{3}}\frac{1}{x+\sqrt{3}}-\frac{1}{5\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{x^2+2}+\frac{1}{5}\frac{x}{x^2-3}-\frac{1}{5}\frac{x}{x^2+2}$, 因此积分后是 $\frac{11}{10\sqrt{3}}\log|x-\sqrt{3}|-\frac{11}{10\sqrt{3}}\log|x+\sqrt{3}|-\frac{1}{5\sqrt{2}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}})+\frac{1}{10}\log|x^2-3|-\frac{1}{10}\log(x^2+2)+C$.

(3) $\frac{\cos^3 xdx}{\sin x+\cos x}=\frac{d\tan x}{(\tan x+1)(\tan^2 x+1)^2}$, 后面用有理式展开积分. 结果是 $\frac{1}{4}\log|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin x\cos x+\frac{1}{4}\cos^x+C$. (注: 本题也可以用对偶积分, 考虑 $\int\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$).

(4) $\frac{3+5x}{\sqrt{(2x-1)^2+4}}=\frac{5(x-\frac{1}{2})}{2\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}}+\frac{11}{4\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}}$, 因此积分后是 $\frac{5}{2}\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}+\frac{11}{4}\log|x-\frac{1}{2}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}|+C$.

17. (1) $d_t^2y|_{t=1,\Delta t=0.1}=30t^4(\Delta t)^2|_{t=1,\Delta t=0.01}=0.3, d_tx|_{t=1,\Delta t=0.1}=2t\Delta t|_{t=1,\Delta t=0.1}=0.2$.

(2) $d_x^2y|_{x=1,\Delta x=0.21}=6x(\Delta x)^2=0.2646, d_xx|_{x=1,\Delta x=0.21}=1\Delta_x|_{x=1,\Delta x=0.21}=0.21$.

(3) $(d_tx)^2|_{t=1,\Delta t=0.1}=0.2^2=0.04, (d_xx)^2|_{x=1,\Delta x=0.21}=0.21^2=0.0441, \frac{d_t^2y}{(d_tx)^2}|_{t=1,\Delta t=0.1}=\frac{0.3}{0.04}=7.5\neq 6=\frac{0.2646}{0.0441}=\frac{d_x^2y}{(d_xx)^2}|_{x=1,\Delta x=0.21}$, 因此不相等.

18. (1) $x^x=e^{x\log x}\to e^0=1$.

(2) $\sqrt[3]{1+x}-1\sim\frac{1}{3}x, x+\tan x\sim 2x$, 因此极限值为 $\frac{1}{6}$.

(3) $\cos\frac{a}{2}\cdots\cos\frac{a}{2^n}\sin\frac{a}{2^n}=\frac{\sin a}{2^n}$(不断利用 $\sin 2x=2\sin x\cos x$), 因此极限值为 $\frac{\sin a}{a}$.

(4) $(1+\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x})^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x}x(\sqrt{1+x^2}-x)}$, 由于 $x(\sqrt{1+x^2}-x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\to\frac{1}{2}$, 因此原极限为 $\sqrt{e}$.

(5) $\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)\sim\sqrt{n}(e^{(\log n)/n}-1)\sim\sqrt{n}(\log n)/n=\log n/\sqrt{n}\to 0$.

19. 分奇偶讨论. 使用 $a_n\to a$ 则 $\sum a_n/n\to a$ 这个结论.

20. 如果结论不对, 则存在一个长度为 $\delta$ 的区间, 在这个区间上 $f(x)\leq M-\epsilon$, 则至少有 $[\delta/n]-1$ 个 $f(i/n)$ 落在这个区间里, 这样一来极限值就会小于等于 $M(1-\delta)+(M-\epsilon)\delta$, 矛盾.

21. WLOG 设 $\int_0^T g(x)dx=0$, 否则考虑 $h(x)=g(x)-\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.

由 Riemann 积分定义, $\forall\epsilon>0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x)=\begin{cases}C_1 & a=x_0\le x<x_1\\ C_2 & x_1\le x<x_2\\ \cdots & \\ C_m & x_{m-1}\le x\le b\end{cases}$ 使得 $\int_a^b|f(x)-s_\epsilon(x)|dx<\epsilon$. 设 $M=\sup_{x\in[0,T]}|g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx|=|\int_a^b(f(x)-s_\epsilon(x))g(nx)dx+\int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx|\le\int_a^b|f(x)-s_\epsilon(x)|g(nx)dx+|\sum_{i=1}^m C_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)dx<M\epsilon+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_i\int_{nx_{i-1}}^{nx_i}g(x)dx\le M\epsilon+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_iMT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)dx=0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)dx=\int_c^{c+T}g(x)dx+\int_{c+T}^{c+2T}g(x)dx+\cdots+\int_{c+kT}^d g(x)dx$ (设 $c+kT\le d<c+(k+1)T$) $=\int_{c+kT}^d g(x)dx\le MT$. 选择一个足够大的 $n$, 使得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_iMT<\epsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx|\le(M+1)\epsilon$.

### 5.3 补充 (不要求掌握!)

参考 https://wqgcx.github.io/courses/analysis2.pdf, 初步了解可积性理论.

## 6 第 6 次习题课: 不定积分, 变上限积分, 定积分

### 6.1 问题

1. 求极限. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}})$, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2}$, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n(1+\frac{i}{n})\sin\frac{i\pi}{n^2}$, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}$.
2. 求导数. $\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}dt$, $\int_e^{e^x}\frac{dt}{1+\log t}(x>1)$, $(\int_a^x f(t)dt)^2$.
3. 求积分. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$, $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$, $\int_{-1}^1\log(x+\sqrt{1+x^2})dx$.
4. 求积分. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, $\int\sqrt{\tan x}dx$, $\int\frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$, $\int\frac{dx}{x(x^3+2)}$, $\int x^2\arctan xdx$, $\int\frac{1}{\cos^3x}dx$, $\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.
5. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数. 证明: 对于任意 $x\in[0,1]$, 有 $|f(x)|\le\int_0^1|f(t)|dt+\int_0^1|f'(t)|dt$, 并写出取等号条件.
6. $x_1>0$, 对于每个正整数 $n$, 有 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})$. 证明 $\lim_{n\to+\infty}x_n$ 存在并求之.
7. 设 $x>0$, 定义 $p(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}}$, 证明方程 $p(x+1)=p(x)+\sin x$ 有无穷个互不相等的正实数解.
8. 设 $f(x)\in R[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx>0$, 证明 $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 使得 $f(x)>0,x\in[\alpha,\beta]$.
9 (不要求掌握). $f(x)\in R[a,b]$, 是否有 $[f(x)]$ 可积? 其中 $[\cdot]$ 表示向下取整.
10. 设 $f(x)\in C[0,\pi]$ 满足 $\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi f(x)\sin xdx=0$, 证明 $\exists\alpha,\beta\in(0,\pi),\alpha\ne\beta$, 使得 $f(\alpha)=f(\beta)=0$.
11. 证明柯西不等式 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$, 并说明取等号条件.
12 (不要求掌握). 证明 Holder 不等式 $\int_a^b f(x)g(x)dx\le[\int_a^b f^p(x)dx]^{\frac{1}{p}}[\int_a^b g^q(x)dx]^{\frac{1}{q}}$, 其中 $p,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f,g\ge0$.
13 (不要求掌握). 证明 Minkowski 不等式 $[\int_a^b[f(x)+g(x)]^pdx]^{\frac{1}{p}}\le[\int_a^b f^p(x)dx]^{\frac{1}{p}}+[\int_a^b g^p(x)dx]^{\frac{1}{p}}$, 其中 $p\ge1$, $f,g\ge0$.
14. 设 $f(x)\in C[a,b]$ 满足 $\forall\phi(x)\in C[a,b]$, 只要 $\int_a^b\phi(x)dx=0$, 就有 $\int_a^b f(x)\phi(x)dx=0$. 证明 $f(x)\equiv C$.
15. $a_n/n^\alpha\to1,\alpha>0$, 求 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.
16. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'(a)=m,f'(b)=n$, 证明存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=\xi$, 其中 $\xi$ 是 $[m,n]$ 或 $[n,m]$ 中的任意一个数. 本题说明导函数虽然不一定连续, 但具有介值性质.
17. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 证明存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
18. 记 $f_n(x)=n^2xe^{-nx},x\in[0,1]$, 求 $\int_0^1\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx$ 和 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$. 本题说明积分极限不一定可交换.
19. 记 $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$, 求 $\lim_{n\to+\infty}f_n'(x)$ 和 $(\lim_{n\to+\infty}f_n(x))'$. 本题说明求导极限不一定可交换.

### 6.2 解答

1. 利用定积分定义. (1) $\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}|_0^1=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$.
(2) $\sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+(k/n)^2}\to\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$.
(3) $\frac{i\pi}{n^2}-\epsilon\frac{i\pi}{n^2}\le\sin\frac{i\pi}{n^2}\le\frac{i\pi}{n^2}$, $\sum_{i=1}^n(1+\frac{i}{n})\frac{i\pi}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(1+\frac{i}{n})\frac{i\pi}{n}\to\int_0^1(1+x)\pi xdx=\frac{5\pi}{6}$, 同理左边 $\ge(1-\epsilon)\frac{5\pi}{6}$, 由 $\epsilon$-$N$ 语言.

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\to\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\log 2$.

2. 利用变上限积分导数结论. $f'=\frac{\sin 2^x}{16^x+2}2^x\log 2-\frac{\sin(x^3+1)}{(x^3+1)^4+2}3x^2$. $f'=\frac{e^x}{1+x}$. $f'=2f(x)\int_a^x f(t)dt$.

3. $\arcsin\frac{x}{a}+C,\log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C,\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin(x/a))+C,\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log|x+\sqrt{x^2+a^2}|)+C,\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|)+C,0$(注意是奇函数). 都是利用换元或者分部积分.

4.(1) 令 $u=x+\sqrt{x^2+x+1},x=\frac{u^2-1}{2u+1}\Rightarrow 2\int\frac{u^2+u+1}{u(2u+1)^2}du=2\int\frac{1}{u}-\frac{3(u+1)}{(2u+1)^2}du=2\log|u|-3\int\frac{du}{2u+1}-3\int\frac{du}{(2u+1)^2}+C=2\log u-\frac{3}{2}\log|2u+1|+\frac{3}{2}\frac{1}{2u+1}+C$.

(2) 令 $u=\sqrt{\tan x},x=\arctan u^2\Rightarrow$ 原积分 $=2\int\frac{u^2}{1+u^4}du$. 使用对偶积分. 记 $I=\int\frac{u^2}{1+u^4}du,J=\int\frac{1}{1+u^4}du$, $I+J=\int\frac{1+u^2}{1+u^4}du=\int\frac{1+1/u^2}{u^2+1/u^2}du=\int\frac{1}{(u+1/u)^2-2}d(u+1/u)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}})+C_1$, $I-J=\int\frac{u^2-1}{u^4+1}du=\int\frac{1-1/u^2}{u^2+1/u^2}du=\int\frac{1}{(u+1/u)^2-2}d(u+1/u)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log|\frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}}|+C_2$. 从而 $I=\frac{I+J}{2}+\frac{I-J}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}})+\frac{1}{4\sqrt{2}}\log|\frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}}|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}})+\frac{1}{4\sqrt{2}}\log|\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}|+C$.

(3) $=\int\frac{e^x(1-x^2)+e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}de^x+\int\frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx\overset{\text{分部积分}}{=}e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\int e^x d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\int\frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx+C=e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$.

(4) $=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^4+x^2}dx^2=\frac{1}{2}\int\sqrt{(x^2+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}d(x^2+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(x^2+\frac{1}{2})\sqrt{x^4+x^2}-\frac{1}{16}\log|x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2}|+C$.

(5) $=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{x^3(x^3+2)}=\frac{1}{6}\int\frac{dx^3}{x^3}-\frac{dx^3}{x^3+2}=\frac{1}{6}\log|\frac{x^3}{x^3+2}|+C$.

(6) $=\frac{1}{3}\int\arctan x dx^3=\frac{1}{3}x^3\arctan x+C-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x+C-\frac{1}{6}\int\frac{x^2dx^2}{1+x^2}=\frac{1}{3}x^3\arctan x+C-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\log|1+x^2|$.

(7) $=\int\frac{1}{(1-\sin^2 x)^2}d\sin x=\frac{1}{4}\log|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}|+\frac{\sin x}{2(1-\sin^2 x)}+C$. 最后一个等号是积分 $\int\frac{1}{(1-t^2)^2}dt$, 注意到 $\int\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{t}{1-t^2}-\int td\frac{1}{1-t^2}+C=\frac{t}{1-t^2}-\int\frac{2t^2}{(1-t^2)^2}dt+C=\frac{t}{1-t^2}+\int\frac{2}{1-t^2}dt-\int\frac{2}{(1-t^2)^2}dt+C\Rightarrow\int\frac{1}{(1-t^2)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-t^2}dt+\frac{t}{2(1-t^2)}+C=\frac{1}{4}\log|\frac{1+t}{1-t}|+\frac{t}{2(1-t^2)}+C$.

(8) $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt,\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sin t}dt=-\int\frac{d\cos t}{\sin^2 t}=-\int\frac{d\cos t}{1-\cos^2 t}=\frac{1}{2}\log|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}|+C=\frac{1}{2}\log|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}|+C=\frac{1}{2}\log|\frac{(1-x)+(1+x)-2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{(1-x)+(1+x)+2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}|+C=\log|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}|+C$.

5. 由连续性和积分中值定理知 $\exists\xi\in[0,1]$, 使得 $|f(\xi)|=\int_0^1|f(t)|dt$. 从而 $\int_0^1|f(t)|dt+\int_0^1|f'(t)|dt\geq|f(\xi)|+\int_\xi^x|f'(t)|dt\geq|f(\xi)|+|\int_\xi^x f'(t)dt|=|f(\xi)|+|f(x)-f(\xi)|\geq|f(x)|$. 等号处处成立意味着 $f'(x)=0$, 这也意味着 $f(x)\equiv C$.

6. 重复这种题很多次了. 首先 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+1/x_n)\geq 1$. 其次如果 $x_n\geq 1$, 则 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(1/x_n-x_n)\leq 0$. 说明单调递减有下界, 两边求极限知答案是 1.

7. $p(x+1)-p(x)=\int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}}\in[\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3+2021}},\frac{1}{\sqrt{x^3+2021}}]$. 令 $g(x)=p(x+1)-p(x)-\sin x,g(2k\pi)>0,g(2k\pi+\pi/2)<0$, 用介值定理.

8. 反证法, 如果任意区间都有点 $f(x)\leq 0$, 那么 Riemann 和的极限怎么可能 $>0$?(我就偏偏取那个 $\leq 0$ 的点)

9. 负的 Riemann 函数可积, 但取整后变成不可积的 Dirichlet 函数.

10. 由于 $\int_0^1 f(x)\sin xdx=0$, 从而存在零点 $\alpha\in(0,\pi)$. 再考虑 $\int f(x)\sin(x-\alpha)dx=0$, 知如果只有一个零点, 那么这个积分不可能为 0 (注意到 $f(x)\sin(x-\alpha)$ 在只有一个零点 $x=\alpha$ 时是始终同号的).

11. $\int_a^b(f(x)-tg(x))^2dx\geq 0$ 对于 $\forall t\in\mathbb{R}$ 恒成立. 注意到这是关于 $t$ 的一元二次方程, 因此 $\Delta\leq 0\Rightarrow 4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2-4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\leq 0$. 显然取等号条件是 $f(x)=Cg(x)$.

12. 不妨设 $\int f^p(x)dx=\int g^q(x)dx=1$. 注意到 $\frac{1}{p}\log(a^p)+\frac{1}{q}\log(b^q)\leq\log(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q})\Leftrightarrow ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. 从而 $\int f(x)g(x)dx=\leq\int\frac{f^p(x)}{p}dx+\int\frac{g^q(x)}{q}dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

13. $\int_a^b(f+g)^pdx=\int_a^b(f+g)^{p-1}fdx+\int_a^b(f+g)^{p-1}gdx$ 利用上一问结论 $\leq[\int_a^b(f+g)^pdx]^{(p-1)/p}[\int_a^b f^pdx]^{1/p}+[\int_a^b(f+g)^pdx]^{(p-1)/p}[\int_a^b g^pdx]^{1/p}\Rightarrow[\int_a^b(f+g)^pdx]^{1/p}\leq[\int_a^b f^pdx]^{1/p}+[\int_a^b g^pdx]^{1/p}$.

14. 考虑 $\phi(x)=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. 从而 $\int_a^b f^2(x)dx=\frac{1}{b-a}[\int_a^b f(t)dt]^2\Rightarrow\int_a^b f^2(t)dt\int_a^b 1dt=[\int_a^b f(t)dt]^2$. 由 Cauchy 不等式取等条件知 $f(x)\equiv C$.

15. 这个题提醒大家很多时候感觉虽然可靠, 但要严格说明依然应该使用 $N$-$\epsilon$ 语言. $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,n^\alpha(1-\epsilon)<a_n<n^\alpha(1+\epsilon)$. 从而存在足够大的 $n$, 使得 $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\epsilon,\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\epsilon,|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]|\leq\frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\leq\frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha]=\epsilon\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^\alpha\to\epsilon\int_0^1 x^\alpha dx=\frac{\epsilon}{\alpha+1}$. 这意味着当 $n$ 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)$ 和 $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(\sum\limits_{i=1}^{n}i^\alpha)$ 差不多. 因此原极限是 $\frac{1}{\alpha+1}$.

16. 通过平移只需证明 $f'(a)>0, f'(b)<0$, 证明存在 $f'(c)=0$. $f'(a)>0$ 说明一定有数 $x>a$ 使得 $f(x)>f(a)$, $f'(b)<0$ 说明一定有数 $x<b$ 使得 $f(x)>f(b)$. 闭区间上的连续函数必有最大值, 从而最大值点的导数一定为 0 (利用左导数 $\geq 0$, 右导数 $\leq 0$). 这就是 $f'(c)=0$.
17. 构造 $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. $g(a)=g(b)=f(a)$, 从而考虑 $[a,b]$ 区间上 $g(x)$ 的最大值点, 其必有 $g'(x_0)=0$, 此即 $f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
18. 这个题告诉我们求导和极限未必可交换. $f_n(x)\to 0$ 对于所有 $x\in[0,1]$ 从而 $\int_0^1 \lim f_n(x)dx=0$. 而 $\int_0^1 f_n(x)dx=1-e^{-n}-ne^{-n}\to 1$.
19. $f_n'(x)=\cos(nx)$, $f_n'(0)\to 1$, 而对于 $x\neq 0$ 其极限不存在. $f_n(x)\to 0$ 对于所有 $x\in\mathbb{R}$, 从而 $[\lim f_n(x)]'=0$.

### 6.3 补充 (不要求掌握!)

测度: 我们把满足以下性质的非负集函数 (定义域是集合, 且函数值非负) 叫做测度: $m(\emptyset)=0$, 并且对于任意不交的集合 $A_1,A_2,\cdots$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)=m(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)$. 外测度: 把上述不交条件去掉, 并把 $=$ 改成 $\geq$.
$\pi$ 系: 一族集合构成的集合 $\mathscr{P}$, 且满足 $\forall A,B\in\mathscr{P}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{P}$.
半环: $\mathscr{P}$ 是 $\pi$ 系, 若 $A,B\in\mathscr{P}, A\supset B$, 则存在有限个两两不交的集合 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 使得 $A\backslash B=\cup_k C_k$.
$\sigma$-域: 如果 $\emptyset,\Omega\in\mathscr{P}; A\in\mathscr{P}\Rightarrow A^c\in\mathscr{P}; A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{P}\Rightarrow \cup_i A_i\in\mathscr{P}$, 则称 $\mathscr{P}$ 是 $\sigma$-域.
容易验证所有形如 $(a,b], a,b\in\mathbb{R}$ 的区间构成的集合是半环, 定义 $m((a,b])=b-a$, 这是半环上的外测度. 由测度扩张定理, 这个外测度可以扩张到 $\sigma(\{(a,b]\})$ 上. 利用 Caratheodory 条件可以完备化. 这个测度成为 Lebesgue 测度.
更多关于 Lebesgue 测度的知识: Cantor 集, 胖 Cantor 集, Cantor-Lebesgue 函数, 等等.
Lebesgue 定理: $f(x)\in R[a,b]$ 当且仅当 $m(\{x: f(x)\text{在}x\text{处间断}\})=0$, 其中 $m$ 是 Lebesgue 测度.
证明. "⇒" 对于区域 $[a,b]$ 的任何分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 定义 $\omega_i=\sup\{|f(x)-f(y)|, x,y\in[x_{i-1},x_i]\}, \Delta_i=|x_i-x_{i-1}|, \Delta=\max\{\Delta_i\}$. 因而 $f$ 是 Riemann 可积等价于 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_i \omega_i\Delta_i=0$. 再定义 $\omega_\epsilon(f)=\{x: \lim\limits_{\delta\to 0}\sup_{y\in[x-\delta,x+\delta]}|f(y)-f(x)|\geq\epsilon\}$. 先假设如果 $f$ 的不连续点集测度为正, 那么存在 $\epsilon_0$ 使得 $\omega_{\epsilon_0}(f)>0$. 对任意分割, 我们有 $\sum\limits_i \omega\Delta_i\geq\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap\omega_{\epsilon_0}(f)\neq\emptyset}\omega_i\Delta_i\geq\epsilon_0\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap\omega_{\epsilon_0}(f)\neq\emptyset}(x_i-x_{i-1})\geq\epsilon_0 m(\omega_\epsilon(f))$. 这表明 $f$ 不是 Riemann 可积的. 因此如果 $f$ 是 Riemann 可积的, 那么不连续点集必定是零测集.
"⇐" 现在我们假设 $\omega_\epsilon(f)$ 是零测集, 我们证明 $f$ 是 Riemann 可积的. 对任意 $\epsilon>0$, 存在闭集 $A_\epsilon\subset[a,b]$ 使得 $f$ 在 $A_\epsilon$ 上连续. 对 $x_0\in A_\epsilon$, 存在 $\delta>0$ 使得 $|f(x)-f(y)|<\epsilon, \forall x,y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 由于 $A_\epsilon$ 是有界闭集, 因此存在有限个开区间 $(x_l-\frac{1}{2}\delta_l, x_l+\frac{1}{2}\delta_l)$ 覆盖住 $A_\epsilon$. 取 $\delta=\min\{\frac{1}{3}\delta_l\}$. 这表明对于任意 $x_0\in A_\epsilon$, 必定有某个 $x_l\in A_\epsilon$, 使得 $x_0\in(x_l-\frac{1}{2}\delta_l, x_l+\frac{1}{2}\delta_l)$. 这表明 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(x_l-\delta_l,x_l+\delta_l)$, 因而有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon, \forall x,y\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$. 取 $[a,b]$ 分割使得 $\Delta<\frac{1}{2}\delta$. 现在我们来考虑 $\sum\limits_i\omega_i\Delta_i$. 如果区间 $[x_{i-1},x_i]$ 与 $A_\epsilon$ 的交集非空, 含有某个点 $y_0\in[x_{i-1},x_i]\cap A_\epsilon$, 那么对于任意 $x,y\in[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 都有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. 注意到 $[x_{i-1},x_i]\subset[y_0-\delta,y_0+\delta]$, 故而 $\omega_i<\epsilon$. 这样我们可以估计 $\sum\limits_i\omega_i\Delta_i=\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap A_\epsilon\neq\emptyset}\omega_i\Delta_i+\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\cap A_\epsilon=\emptyset}\omega_i\Delta_i\leq\epsilon(b-a)+2Mm([a,b]\backslash A_\epsilon)$. 这里 $M$ 为 $f$ 在 $[a,b]$ 上的上界. 这就表明如果 $f$ 的不连续点零测且 $f$ 有界, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.
极限和积分可交换的三大定理 (Lebesgue 可积意义下, 但是我们有定理保证 Riemann 可积一定是 Lebesgue 可积):
**Fatou 引理**: 如果 $f_n\geq 0$, 那么 $\liminf\limits_{n\to+\infty}\int f_n dx\geq\int\liminf\limits_{n\to+\infty}f_n dx$.
**单调收敛定理**: 如果 $f_n\geq 0$ 且 $f_n\uparrow f$, 那么 $\int f_n dx\uparrow\int f dx$.
**控制收敛定理**: 如果 $f_n\to f$ 几乎处处成立, $|f_n|\leq g$ 对于所有 $n$ 成立, 并且 $g$ 可积, 那么 $\int f_n dx\to\int f dx$.

# 7 第 7 次习题课: 定积分及其应用

### 7.1 问题

1. 判断对错. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个给定的函数, 记 $f_1(x)=f(x)+g(x), f_2(x)=f(x)g(x), f_3(x)=|f(x)|, f_4(x)=\max\{f(x),g(x)\}$. (1) 假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 $x=x_0$ 处可导. 问 $f_1,f_2,f_3,f_4$ 中哪些函数在 $x_0$ 处一定可导, 哪些不一定? (2) 假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 $[a,b]$ 可积, 问 $f_1,f_2,f_3,f_4$ 中哪些函数在区间 $[a,b]$ 一定可积, 哪些不一定?

2. 判断对错. $f_1, f_3 \in C[0,1]$, $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x), \forall x \in [0,1]$, 且 $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 f_3(x)$. 则 $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f_3(x)$.
3. 是否存在 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 $f$ 在所有点上局部无界?
4. 证明 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个根 $x_n$, 并计算 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.
5. 求积分. $\int_{-1}^1 \frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}dx, \int_0^2 |x^2-1|e^{-|x-1|}dx, \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin 2x}dx, \int_{-1}^1 (x^4+2x^2+1)\sin^3 x dx, \int_0^1 \log(x+\sqrt{x^2+1})dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}dx$.
6. 设函数 $f(x) \in C[0,1]$, 且 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x \cdot f(x)dx = 0$. 证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中至少有两个零点.
7. 设 $0 < \lambda < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, 证明 $\lim\limits_{n \to +\infty}(a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{1-\lambda}$.
8. 求直角坐标 $(x, y)$ 给出的抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(1, \frac{1}{2})$ 的弧长.
9. 设奇数 $n \ge 3$, 求极坐标 $(r, \theta)$ 给出的 $n$ 叶玫瑰线 $r = \sin(n\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$ 所围的有界图形的面积.
10. 证明不等式. (1) $\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. (2) $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \frac{1}{10}$.
11. $f(x) \in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x)dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \to f(0)$.
12. $f(x) \in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{h \to 0+0} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x)dx \to \pi f(0)$.
13. 推导重力场中粒子数量密度的分布率 $n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$, 其中 $T$ 是温度, $k_B$ 是玻尔兹曼常量.

## 7.2 解答

1. (1) $f_1, f_2$ 一定可导, 依据导数四则运算. $f_3$ 不一定可导, $f(x) = x$. $f_4$ 不一定可导, $f(x) = x, g(x) = -x$. (2) 均可积.
2. 正确. 用反证法, 如果 $f_3(x_0) > f_1(x_0)$, 由连续性存在 $\epsilon > 0$ 和 $x_0$ 的某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 使得 $f_3(x) > f_1(x) + \epsilon$.
3. 存在. 考虑 $f(x) = \begin{cases} p, & x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.
4. 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$. $f_n(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, f(1) = n > 1$, 再由 $f_n(x)$ 单调递增和连续性知有且仅有一个根. 由于 $f_n(\frac{1}{2}+\epsilon) = (\frac{1}{2}+\epsilon)\frac{1-(\frac{1}{2}+\epsilon)^n}{\frac{1}{2}-\epsilon} \to \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon} > 1$, 因此当 $n$ 足够大时 $f_n(x_n) = 1 < f_n(\frac{1}{2}+\epsilon) \Rightarrow x_n < \frac{1}{2}+\epsilon$, 再根据极限的 $N$-$\epsilon$ 定义.
5. (1) 注意到 $\frac{x^2 \arcsin x}{1+x^2} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{1+x^2}dx = 0$. 从而原积分 $= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = 2 - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 2 - (\arctan x)|_{-1}^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$.
(2) $= \int_0^1 (1-x^2)e^{x-1}dx + \int_1^2 (x^2-1)e^{1-x}dx = (-x^2+2x-1)e^{x-1}|_0^1 + (-x^2-2x-1)e^{1-x}|_1^2 = 4 - \frac{8}{e}$.
(3) $= 2\int_0^\pi \sqrt{1-\sin 2x}dx = 2\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}dx = 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \sin x - \cos x dx) = 4\sqrt{2}$.
(4) 这是奇函数, 积分自然为 0.
(5) $= x\log(x+\sqrt{x^2+1})|_0^1 - \int_0^1 x d\log(x+\sqrt{x^2+1}) = \log(1+\sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{x^2+1})|_0^1 = \log(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$.
(6) $= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}dx = (\arcsin x - \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2})|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.
(7) 令 $x = \sin t$, 则原积分 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t d\sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 t dt$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t d\cos t =$ 分部积分 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\sin^4 t\cos^2 t dt = 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 t dt \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = \frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt$. 从而原积分 $= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt =$ 分部积分 $= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{32}$.
(8) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} d\sin x = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\log(1+t^2)|_0^1 = \frac{\log 2}{2}$.
6. $\int_0^1 f(x)dx = 0 \Rightarrow$ 一个零点 $\alpha$. $\int_0^1 (x-\alpha)f(x)dx = 0 \Rightarrow$ 另一个零点 $\beta$(若不存在则 $(x-\alpha)f(x)$ 保号).
7. WLOG 令 $a = 0$. 由定义 $\forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n| < \epsilon$; $\exists M, \forall n > M, |\lambda^n| < \epsilon$. 设 $\max_n a_n = M$(极限存在蕴含有界). 选择 $n > N + M$. 从而 $|a_n + \lambda a_{n-1} + \cdots + a_N\lambda^{n-N}| < \epsilon|1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-N}| < \frac{\epsilon}{1-\lambda}$, 且 $|a_{N-1}\lambda^{n-N+1} + \cdots + a_0\lambda^n| < M\lambda^{n-N+1}\frac{1-\lambda^N}{1-\lambda} < \frac{M}{1-\lambda}\epsilon$. 从而整个求和 $< \frac{M+1}{1-\lambda}\epsilon$.
8. $\int_0^1 \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2})|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$.
9. $S = n \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 n\theta d\theta = (t = n\theta) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.
10. (1) 在区间 $[0,1]$ 上成立 $\sqrt{2} \le \sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} \le \frac{3}{2}$. (2) 注意到 $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}} \le 1$, 从而 $\frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9 dx < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{10}$.
11. 往证 $\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \to 0$. 使用 $N$-$\epsilon$ 语言. $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon$. 设 $\max|f(x)| = M$. 从而原式 $= \frac{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3$. $|I_1| \le \frac{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \le \epsilon$.

$|I_2| \le 2M\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\epsilon dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx} \le 2M\frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n dx} \le 2M(1-\delta)\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M\frac{1-\delta}{\delta}(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2})^n$. 注意到 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$, 从而可以取足够大的 $n$ 使得 $|I_2| < \epsilon$. 类似地放缩 $I_3$, 从而 $|I_1+I_2+I_3| < 3\epsilon$.

12. 只需证明 $\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}[f(x)-f(0)]dx \to 0$. $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in(-\delta,\delta), |f(x)-f(0)|<\epsilon$. 设 $\max|f(x)| = M$. 从而原式 $= \int_{-\delta}^{\delta}\frac{h}{x^2+h^2}[f(x)-f(0)]dx + \int_{-1}^{-\delta}\frac{h}{x^2+h^2}[f(x)-f(0)]dx + \int_{\delta}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}[f(x)-f(0)]dx := I_1+I_2+I_3$. 类似的有 $|I_1| \le \epsilon\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h}{x^2+h^2}dx < \epsilon\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}dx = \epsilon(\arctan\frac{x}{h})|_{-1}^{1} < \pi\epsilon$. $|I_2| \le 2M\int_{-1}^{-\delta}\frac{h}{x^2+h^2} \le 2M(1-\delta)\frac{h}{\delta^2+h^2} < 2M\frac{1-\delta}{\delta^2}h < \epsilon$ 只要 $h$ 足够接近 0. 同理 $|I_3| < \epsilon$. 从而 $|I_1+I_2+I_3| < 3\epsilon$.

13. 由基本力学知识, 重力场中的压力差 $dF$ 托起了单位体积内的粒子重力 $dG$. 从而 $dF+dG=0 \Rightarrow Sdp+\rho gSdz = 0 \Rightarrow dp+nmgdz=0$. 由 $p=nk_BT$ 知 $dp = k_BTdn \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_BT}dz$. 两边积分知 $\log n(z) - \log n(0) = \frac{-mgz}{k_BT} \Rightarrow n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_BT}}$.

### 7.3 补充 (不要求掌握!)

计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-x^2}dx$. (也写成 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx$). 这和正态分布的归一化因子有关.

证法 1: 使用二元积分. $(\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx)^2 = \int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx\int_{\mathbb{R}}e^{-y^2}dy = \int_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy =$ 二元积分换元公式, 改写成极坐标 $= \int_{\mathbb{R}^2}e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\infty re^{-r^2}dr = 2\pi\times(-\frac{1}{2}e^{-r^2})|_0^\infty = \pi$. 从而 $\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$. 我们回顾标准正态分布 $\mathcal{N}(0,1)$ 的密度函数是 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 这意味着 $\int_{\mathbb{R}}p(x)dx = 1$(概率的归一化!).

证法 2: 使用极限逼近. 我们来证明: $\forall x\in[-A,A], (1+\frac{x^2}{n})^{-n} \rightrightarrows e^{-x^2}$. 其中, $\rightrightarrows$ 表示极限的一致性 (一致收敛). 我们都知道 $(1+\frac{x^2}{n})^{-n} \to e^{-x^2}$, 但是不同的 $x$ 可能会有不同的收敛速度. 对于某个 $x_1$, 可能从第 $N_1$ 项开始有 $|f_n(x_1)-f(x_1)| < \epsilon$, 而对于某个 $x_2$, 可能从第 $N_2$ 项开始有 $|f_n(x_2)-f(x_2)| < \epsilon, \cdots$. 在给出一致收敛的正式定义前, 我们先看几个例子.

例 1: $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}, f(x)\equiv 0$. 容易看出来 $f_n \to f$, 且对于不同的 $x$, 他们的收敛步调一致: 因为只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$, 不管 $x$ 的值都有 $|f_n(x)-f(x)| < \epsilon$.

例 2: $f_n(x) = x^n, x\in[0,1], f(x) = \begin{cases} 0 & x\in[0,1) \\ 1 & x=1 \end{cases}$. 容易看出来 $f_n \to f$, 但对于不同的 $x$, 他们的收敛步调并不一致: 距离 1 更近的 $x$ 收敛速度更慢! 当 $x < \frac{1}{2}$ 时, 只要 $n > \log_2(\frac{1}{\epsilon})$ 就有 $x^n < \epsilon$; 但是当 $x = 1-\frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})}$ 时, $x^n \approx (1-\frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})})^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \approx \frac{1}{e}$ 距离 $\epsilon$ 还远着呢, 更有 $\lim\limits_{x\to1-0}x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \to 1 \Rightarrow \exists\delta, \forall x\in(1-\delta,1), x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} > 1-\epsilon$. 前面的 $f_n(x)$ 已经很小于 $\epsilon$ 了, 而后面的一些 $f_n(x)$ 甚至还在原地打转 $(>1-\epsilon)$! 下面我们给出定义.

一致收敛: 我们说在区间 $[a,b]$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$(记作 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$), 意味着 $\forall\epsilon>0, \exists N$, 使得 $\forall n>N, \forall x\in[a,b], |f_n(x)-f(x)| < \epsilon$.

如果在有限区间上收敛具有一致性, 那么积分和极限顺序可交换. 因为 $|\int_a^b f_n(x)-f(x)dx| \le \int_a^b|f_n(x)-f(x)|dx < \epsilon(b-a) \to 0 \Rightarrow \int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$, 即是 $\lim\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim f_n(x)dx$.

回到原题, 往证 $\forall x\in[-A,A], (1+\frac{x^2}{n})^{-n} \rightrightarrows e^{-x^2}$. 注意到 $(1+\frac{x^2}{n})^n \ge 1 + C_n^1\frac{x^2}{n} + \cdots + C_n^k(\frac{x^2}{n})^k$. 由带 Lagrange 余项的泰勒展开知 $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^k}{k!}+\frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!}t^{k+1} = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^k}{k!}+\frac{e^\xi}{(k+1)!}t^{k+1}$, 其中 $f(t)=e^t, \xi\in(0,t)$. 令 $t=x^2$ 知 $e^{x^2} = 1+x^2+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}+\frac{e^\xi}{(k+1)!}x^{2k+2}$. 从而对于 $\forall x\in[-A,A]$, 成立估计 $e^{x^2}-1-x^2-\cdots-\frac{x^{2k}}{k!} = \frac{e^\xi}{(k+1)!}x^{2k+2} \le \frac{e^{A^2}A^{2k+2}}{(k+1)!} \to 0$ 当 $k\to\infty$ 时 (利用 $n! > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$). 这里的估计有一致性! 从而存在 $K, \forall k>K, x\in[-A,A]$, 成立 $|e^{x^2}-1-x^2-\cdots-\frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$. 再回头来看 $1+C_n^1\frac{x^2}{n}+\cdots+C_n^k(\frac{x^2}{n})^k$ 和 $1+x^2+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}$. 他们之间的差是一个 $2k$ 阶关于 $x$ 的多项式, 且 $< \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{n}x^{2i} < \frac{1}{n}(A^2+A^4+\cdots+A^{2k})$. 这里的估计又有一致性! 所以说, 当 $n$ 足够大时, $\forall x\in[-A,A]$, 成立 $|[1+C_n^1\frac{x^2}{n}+\cdots+C_n^k(\frac{x^2}{n})^k]-[1+x^2+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$. 整理一下思路, $\forall\epsilon>0, \exists K$, 使得 $\forall k>K, \forall x\in[-A,A]$, 成立 $|e^{x^2}-1-x^2-\cdots-\frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$. $\exists N$, 使得 $\forall n>N, \forall x\in[-A,A]$, 成立 $|[1+C_n^1\frac{x^2}{n}+\cdots+C_n^k(\frac{x^2}{n})^k]-[1+x^2+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$. 这样的话就有 $e^{x^2}-(1+\frac{x^2}{n})^n < e^{x^2}-[1+C_n^1\frac{x^2}{n}+\cdots+C_n^k(\frac{x^2}{n})^k] < \{e^{x^2}-[1+x^2+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}]\}+\{[1+x^2+\cdots+\frac{x^{2k}}{k!}]-[1+C_n^1\frac{x^2}{n}+\cdots+C_n^k(\frac{x^2}{n})^k]\} < 2\epsilon$. 这样 $(1+\frac{x^2}{n}) \rightrightarrows e^{x^2}$. 取倒数后当然也成立, 这和极限的除法是一个道理, 留作练习. 又注意到当 $A\to\infty$ 时, $\int_A^\infty(1+\frac{x^2}{n})^{-n}dx \le \int_A^\infty(1+x^2)^{-1}dx = \arctan x|_A^{+\infty} \to 0$ 对 $n$ 有一致性. 这说明我们可以取足够大的 $A$ 使得 $\int_A^\infty e^{-x^2}dx < \epsilon$, 且 $\forall n, \int_A^\infty(1+\frac{x^2}{n})^{-n}dx < \epsilon$. 这样一来 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\infty(1+\frac{x^2}{n})^{-n}dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan^2 t)^n}d\sqrt{n}\tan t = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}\alpha d\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 最后一步使用了 Wallis 公式, 其推导就是通过分部积分计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$. 从而 $\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

# 8 致谢

感谢元培学院 21 级本科生徐奕辰同学和另一位不愿意透露姓名的同学, 他们提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2022 秋高等数学 A I 习题课 12 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.