

# 高等数学 A I 习题课讲义

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2022 年 10 月 17 日

## 目录

<b>1 第 1 次习题课: 函数, 序列极限</b>	<b>3</b>
1.1 问题	3
1.2 解答	3
1.3 补充 (不要求掌握!)	4
<b>2 第 2 次习题课: 序列极限, 函数极限</b>	<b>4</b>
2.1 问题	4
2.2 解答	4
2.3 补充 (不要求掌握!)	5
<b>3 第 3 次习题课: 闭区间上的连续函数</b>	<b>5</b>
3.1 问题	5
3.2 解答	6
3.3 补充 (不要求掌握!)	7
<b>4 第 4 次习题课: 导数, 高阶导数</b>	<b>7</b>
4.1 问题	7
4.2 解答	8
4.3 补充 (不要求掌握!)	9
<b>5 第 5 次习题课: 隐函数求导, 微分, 不定积分</b>	<b>9</b>
5.1 问题	9
5.2 解答	10
5.3 补充 (不要求掌握!)	11
<b>6 第 6 次习题课: 不定积分, 变上限积分, 定积分</b>	<b>11</b>
6.1 问题	11
6.2 解答	12
6.3 补充 (不要求掌握!)	13
<b>7 第 7 次习题课: 定积分及其应用</b>	<b>14</b>
7.1 问题	14
7.2 解答	14
7.3 补充 (不要求掌握!)	15



# 第 1 次习题课: 函数, 序列极限

## 1.1 问题

1.  $f(x) = |x \sin^3 x| e^{\cos x}$ . 判断函数  $f(x)$  的有界性、单调性和奇偶性.
2. 证明  $f(x) = x - [x]$  是有界周期函数.
3.  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \cos x + \sin x & x > 0 \end{cases}$ . 计算  $f(-x)$ .
4.  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f \circ \phi = 1 - 3x$  并且  $\phi(x) \geq 0$ , 求解  $\phi(x)$  及其定义域.
5. 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2 - n} = 4$ .
6. 设  $q > 1, k \in \mathbb{N}_+$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$ .
7. 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n}$ .
8. 令  $x_1 > 0$  并且  $x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ . 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
9. 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ .
10. 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ .
11. 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty, \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0, a_n, b_n > 0$ , 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ .
13. (Stolz)  $0 < b_n \uparrow +\infty, a_n > 0$ , 如果  $(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1}) \rightarrow L$ , 则  $a_n/b_n \rightarrow L$ .

## 1.2 解答

1. 注意到  $f(2k\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(2k\pi + \frac{\pi}{4})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rightarrow \infty$ , 所以  $f(x)$  无界. 又因为  $f(k\pi) \equiv 0$  且对于  $x \neq k\pi$  成立  $f(x) \neq 0$ , 所以  $f(x)$  不单调. 由定义知  $f(x)$  是偶函数.
2. 容易看出  $f(x)$  有周期 1 且  $|f(x)| \leq 1$  对于所有  $x \in \mathbb{R}$  成立.
3. 代入验证即可.  $f(-x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ \cos x - \sin x & x < 0 \end{cases}$ .
4.  $f(\phi) = e^{\phi^2} = 1 - 3x \Rightarrow \phi = \sqrt{\log(1 - 3x)}$ .  $\phi(x)$  的定义域是  $\log(1 - 3x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ .
5.  $|\frac{4n^2}{n^2 - n} - 4| = \frac{4}{n-1}$ . 所以当  $n \geq \frac{4}{\epsilon} + 1$  时,  $\frac{4n^2}{n^2 - n}$  与 4 相差不超过  $\epsilon$ .
6. 注意到  $q^n = (1 + q - 1)^n \geq C_n^{k+1}(q - 1)^{k+1} = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \cdots + a_0$  是  $n^k$  的高阶无穷大量.
7. 使用夹逼定理.  $(*) \geq \frac{\sum_{i=1}^n i}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)^2} \rightarrow \frac{1}{2}, (*) \leq \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2 + n} = \frac{n(n+1)}{2(n^2 + n)} \rightarrow \frac{1}{2}$ .
8. 在这类问题中,  $\{x_n\}$  一定会是单调有界的. 首先凑答案, 假设极限存在, 令递推公式两边  $n \rightarrow \infty$ , 我们有  $a = \frac{3(1+a)}{3+a} \Rightarrow a = \sqrt{3}$ . 然后使用递推公式, 利用数学归纳法, 容易证明如果  $0 < x_1 < \sqrt{3}$  则  $0 < x_n < x_{n+1} < \sqrt{3}$ ; 如果  $x_1 > \sqrt{3}$  则  $x_n > x_{n+1} > \sqrt{3}$ . 这意味着极限  $\lim x_n$  存在.
9.  $n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)} \Leftrightarrow n > (1 + 1/n)^n$  对于  $n \geq 3$  成立, 这意味着  $n^{1/n}$  是单调递减的. 注意到我们作业中已经证明了对于任意  $\epsilon > 0$ , 成立  $n^{1/n} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow n < (1 + \epsilon)^n$  对于足够大的  $n$ . 然后使用极限定义的  $N - \epsilon$  语言.
10.  $3 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2 \times 3^n} \rightarrow 3$ .
11. 单调上升性显然. 由于  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ , 从而  $\sum_n \frac{1}{n^2} < \sum_n \frac{1}{(n-1)n}$ , 有上界 2.
12. 使用截断.  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n/b_n| < \epsilon/2$ . 从而  $\sum a_n / \sum b_n = \sum_{i=1}^N a_i / \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=N+1}^n a_i / \sum_{i=1}^n b_i := I_1 + I_2$ . 当  $n$  足够大时,  $I_1 < \epsilon/2$  (因为  $\sum b_n \rightarrow \infty$ ); 而  $I_2 < \epsilon/2$  对于所有的  $n \geq N$  成立. 因此当  $n$  足够大时, 可以让  $I_1 + I_2 < \epsilon$ .
13. 用定义.  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , 使得对于  $\forall n > N$ , 成立  $(L - \epsilon)(b_n - b_{n-1}) \leq (a_n - a_{n-1}) \leq (L + \epsilon)(b_n - b_{n-1})$ . 然后用累加  $\Rightarrow (L - \epsilon)(b_n - b_N) \leq a_n - a_N \leq (L + \epsilon)(b_n - b_N) \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} < L + \epsilon$ . 然后估计误差  $|\frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} - \frac{a_n}{b_n}| = |\frac{(a_n - a_N)b_n}{(b_n - b_N)b_n} + \frac{a_N b_n}{(b_n - b_N)b_n} + \frac{a_N}{b_n - b_N}| \leq (L + \epsilon)\frac{b_n}{b_n} + \frac{a_N b_n}{(b_n - b_N)b_n} + \frac{a_N}{b_n - b_N} < \epsilon$  (这三项都是趋于 0 的, 所以你总可以找一个足够大的  $n$  使得上式成立).

### 1.3 补充 (不要求掌握!)

作为一个已经学习数学这么多年的北京大学练习生, 我相信你一定关心过下面这个问题: 可导函数和连续函数之间差多少? 事实上, 我们有以下定义和结论:

- (1) 开集: 我们称集合  $A \subset \mathbb{R}$  是开的, 当且仅当  $\forall x \in A$ , 存在  $\delta_x > 0$ , 使得  $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset A$ .
- (2) 闭集: 我们称集合  $B \subset \mathbb{R}$  是闭的, 当且仅当它的补集是开的.
- (3) 定义  $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$ , 这里  $f$  是一个函数.
- (4) 你可以证明一个函数  $f$  是连续的当且仅当任意开集  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(A)$  是开集.
- (5) 内点: 我们称  $x \in A$  是集合  $A$  的内点当且仅当  $\exists \delta_x > 0$ , 使得  $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset A$ .
- (6) 可数/可列: 我们称集合  $A$  是可数的当且仅当存在一个从  $A$  到自然数集  $\mathbb{N}$  的一一映射或者  $|A| < \infty$ , 这里  $|A|$  是集合  $A$  中元素的个数.
- (7) 极限点: 我们称  $x$  是集合  $A$  的极限点, 当且仅当存在一个序列  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$  使得  $x_i \rightarrow x$ . 我们用记号  $A'$  来表示  $A$  所有极限点构成的集合.
- (8) 闭包: 我们称集合  $\bar{A} = A \cup A'$  是集合  $A$  的闭包.
- (9) 那么, 对于所有  $[a, b]$  上的连续函数, 至少存在一点可导的函数构成的集合是无处稠密集的可列并 (第一纲集). 这里, 无处稠密集是指其闭包不存在内点的集合, 并且连续函数之间的度量定义为  $\rho_{[a,b]}(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f - g|$ .
- (10) Baire 纲集定理: 闭集  $B_n$  无内点, 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  也无内点. 由此容易知道第一纲集是没有内点的.

## 2 第 2 次习题课: 序列极限, 函数极限

### 2.1 问题

1. 证明  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1$ .
2. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ .
3. 计算  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ .
4. 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ .
5. 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}$ .
6. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ .
7. 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ .
8. 设数列  $a_n \rightarrow 0$  并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = a$ . 证明  $a \leq 1$ .
9. 令  $a_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1)$ , 计算  $\lim a_n$ .
10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \exists$ , 证明  $a_n/n \rightarrow 0$ .
11. 证明  $(n!)^{1/n^2} = 1$ .
12.  $a_1 = b, a_2 = c, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
13. 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1}\right)^{1/x}$ . 其中  $a > 0$  且  $a \neq 1$ .
14.  $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$ , 且  $|f(x)| \leq \sin x$ . 证明  $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$ .
15. 设  $\delta > 0$ , 且  $f(x)$  在区间内  $(-\delta, \delta)$  有界.  $\exists a > 1, b > 1$  使得  $f(ax) = bf(x)$ . 证明当  $x \rightarrow 0$  时  $f(x) \rightarrow 0$ .
16.  $a_n$  收敛到  $a$  当且仅当  $a_n$  的任意子列都收敛到  $a$ .

### 2.2 解答

1. 注意到  $|\frac{1}{x-1} - 1| = |\frac{x-2}{x-1}|$ , 取  $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\epsilon)$ .
2. 注意到  $|x^2 \sin \frac{1}{x}| \leq |x^2| \rightarrow 0$ , 取  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ .
3.  $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \rightarrow 3x^2$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \rightarrow 2$ .

5.  $|\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}| = |2 \sin \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}| \leq |\sin \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}| \leq \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} \rightarrow 0$ .
6.  $\frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} \sim \frac{2 \times 2x \times x}{x^2} = 4$ .
7. 这种形如  $(1+0)^\infty$  的极限问题一定是去试图凑  $e$ . 原式  $= [(1 + \frac{3}{x^2-2})^{\frac{x^2-2}{3}}]^{\frac{3}{x^2-2}} \rightarrow e^3$ .
8. 如果  $a > 1$ , 那么  $\exists N$  使得  $\forall n > N, |a_{n+1}/a_n| > (1+a)/2$ , 则  $|a_n| > |a_N|(\frac{1+a}{2})^{n-N} \Rightarrow |a_n| \rightarrow \infty$ .
9.  $\sum_{k=1}^n (\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} (\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}})$ . (\*)  $\leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \times \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4}$ . (\*)  $\geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \times \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{4}$ .
10.  $a_n/n = \sum a_n/n - \frac{n-1}{n} \sum a_{n-1}/(n-1) \rightarrow 0 - 1 \times 0 \rightarrow 0$ .
11. 使用夹逼定理知  $1 \leq (n!)^{1/n^2} \leq n^{1/n} \rightarrow 1$ . (PLUS: Stirling:  $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$ ).
12.  $a_n - a_{n-1} = (-\frac{1}{2})(a_{n-1} - a_{n-2}) = (-\frac{1}{2})^2(a_{n-2} - a_{n-3}) = \cdots = (-\frac{1}{2})^{n-1}(a_1 - a_0)$ , 从而  $a_n - a_0 = (a_1 - a_0)[1 + (-\frac{1}{2}) + \cdots + (-\frac{1}{2})^{n-1}] \rightarrow \frac{2}{3}(a_1 - a_0) \Rightarrow a_n \rightarrow \frac{1}{3}a_0 + \frac{2}{3}a_1$ .
13. 我们已经证明了  $(a-1)^{1/x} \rightarrow 1, (1/x)^{1/x} \rightarrow 1$ , 所以原极限值等于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^x - 1)^{1/x}$ . 从而: 如果  $a > 1$ ,  $\lim = a$ ; 如果  $0 < a < 1$ ,  $\lim = 1$ .
14. 注意到  $|f(x)/\sin x| \leq 1$ . 令  $x \rightarrow 0$  即可.
15.  $x \in (-\delta, \delta), |f(x)| < M \Rightarrow x \in (-\delta/a, \delta/a), |f(x)| = \frac{1}{b}|f(ax)| \leq \frac{M}{b} \Rightarrow x \in (-\delta/a^n, \delta/a^n), |f(x)| \leq \frac{M}{b^n} \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$  当  $x \rightarrow 0$  时.
16.  $\Rightarrow$  是显然的.  $\Leftarrow$ . 反证法, 如果结论不对, 则  $\exists \epsilon_0 > 0, \forall N, \exists n_k > N$  使得  $|a_{n_k} - a| > \epsilon_0$ . 取子列  $\{a_{n_k}\}$  即可.

## 2.3 补充 (不要求掌握!)

**闭区间套定理:**  $a_n \uparrow, b_n \downarrow, 0 < b_n - a_n \rightarrow 0$ , 那么  $\exists$  唯一的一个点  $x \in \cap_n [a_n, b_n]$ .

证明: 令  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  即可.

**有限覆盖定理:**  $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  是一族开集 (可能不可数). 如果  $[a, b] \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ , 则  $\exists I_1, \cdots, I_m \in \{I_\lambda\}$  使得  $[a, b] \subset \cup_{i=1}^m I_i$ .

证明. 如果结论不对, 即不存在可数子覆盖, 那么对于区间  $[a, (a+b)/2]$  和  $[(a+b)/2, b]$ , 至少有一个区间不存在有限子覆盖, 这样一直切半, 由闭区间套, 必然夹出一个点  $x$ . 由于这是开覆盖, 因此存在开集  $O_x$  使得  $x \in O_x$ . 从而由极限知这个开区间迟早会覆盖前面的从某项开始的闭区间列, 这与假设 (不存在有限覆盖) 矛盾.

**聚点原理:**  $|a_n| < M$ , 那么  $\exists \{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ , 使得  $a_{n_k} \rightarrow a$  当  $k \rightarrow \infty$  时. (有界序列必有收敛子列)

我们给出几种证明方法:

(1) 取  $M$  使得  $\forall n, |x_n| \leq M$ , 取  $a_1 = -M, b_1 = M$ . 对  $[a_n, b_n]$  多次迭代, 每次找到  $\frac{a_n+b_n}{2}$ , 这个点将当前区间划分为两个子区间. 两个子区间中必然至少有一个含有无穷项. 任取其中一个含有无穷项的区间作为  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ . 由闭区间套定理, 最终  $a_n, b_n$  有相同的极限  $x$ , 同时  $x_n$  中有无穷项与  $x$  任意接近. 选取  $x_{n_k} \in [a_i, b_i]$ , 则  $x_{n_k} \rightarrow x$ .

(2) 如果不存在这样的子列, 那么  $\forall x \in [a, b], \exists \delta > 0$  使得  $(x-\delta, x+\delta) \cap \{x_i\}_{i=1}^n \leq 1$ . 这样构造出的开区间集合覆盖了  $[a, b]$ , 由有限覆盖定理, 必然存在有限个开区间覆盖整个区间. 而由假设, 对于取出的每个开区间中至多只有原序列中的一个点, 由于开区间的数量为有限个, 可以得出原序列长度也是有限的, 这显然不成立.

**柯西收敛:**  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \epsilon$ . 这与之前的极限定义是等价的, 但优点是不需要提前知道“无理数”.

证明.  $\Rightarrow$ : 取  $\epsilon = 1$  以及满足条件的  $N$ , 那么  $1 + \max_{i=1,2,\dots,N} |x_i|$  给出了整个序列  $\{x_n\}$  的界. 取它的一个收敛子列  $x_{n_k}$ , 并记这个极限为  $x$ . 从而  $|x_n - x| \leq |x_{n_k} - x| + |x_n - x_{n_k}| \rightarrow 0$ .  $\Leftarrow$ :  $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \rightarrow 0$ .

## 3 第 3 次习题课: 闭区间上的连续函数

### 3.1 问题

1. 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ .
2.  $\{x_n\}$  收敛且  $\{y_n\}$  收敛, 证明  $\{x_n + y_n\}$  收敛.  $\{x_n\}$  且  $\{y_n\}$  发散, 是否有  $\{x_n + y_n\}$  或者  $\{x_n y_n\}$  一定发散? 如果  $\{x_n y_n\}$  是无穷小量, 是否有  $\{x_n\}$  或者  $\{y_n\}$  一定是无穷小?
3. 求极限.  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$ .

- 4 (不要求掌握).  $0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \exists$ . (这个引理在大偏差理论中很有用).
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_{n+1-i}}{\sum_{i=1}^n p_i} = a$ . 其中  $p_k > 0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i} = 0$ .
6. 求极限.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$ .
7. 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \exists \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) \exists$ , 但是  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \exists \not\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ .
8. 举例说明存在  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上处处不连续, 但  $|f(x)|$  处处连续.
9.  $a_1, a_2, \dots, a_p > 0$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\frac{\sum_{i=1}^p a_i^x}{p})^{1/x}$ .
10. 求极限.  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x \log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x}$ .
- 11 (不要求掌握). 举例说明存在一个函数处处不连续, 其定义域是  $[0, 1]$  但是值域为区间.
12.  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $|f(x)|$  单调. 证明  $f(x)$  单调.
- 13 (不要求掌握).  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ .  $0 < k < 1$ . 证明  $kx - f(x)$  单调上升并且  $\exists c, f(c) = c$ .
14.  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $\forall x, \exists y$ , 使得  $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$ . 证明  $\exists \xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .
- 15 (不要求掌握).  $f(x)$  在  $[a, b]$  上只有第一类间断点, 证明  $f(x)$  有界.
16. 设  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $f(a)f(b) < 0$ . 证明  $\forall n = 1, 2, \dots, \exists \{\xi_i\}_{i=1}^n \subset [a, b], \xi_i \neq \xi_j$  使得  $\sum_{i=1}^n e^{f(\xi_i)} = n$ .
17. 非负函数  $f \in C[0, 1]$ ,  $f(0) = f(1) = 0$ . 证明  $\forall a \in (0, 1), \exists x_0 \in [0, 1]$  使得  $x_0 + a \in [0, 1]$  且  $f(x_0) = f(x_0 + a)$ . 如果去掉非负条件还对吗?
18.  $f_n(x) = x^n + x$ . (1) 证明:  $\forall n, f_n(x) = 1$  在  $[\frac{1}{2}, 1]$  中有且仅有一个根  $c_n$ ; (2) 计算  $\lim c_n$ .
19. 不等于常数的连续周期函数一定有最小正周期. 如果把连续性去掉结论如何?
- 20 (不要求掌握).  $f$  在  $[a, b]$  内处处有极限. 证明  $\forall \epsilon > 0$ , 在  $[a, b]$  中使得  $|\lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x)| > \epsilon$  的点至多有有限个. (2)  $f(x)$  至多有可列个间断点.

## 3.2 解答

1.  $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$  (使用不等式  $\frac{i}{i+1} < \frac{i+1}{i+2}$ ), 那么  $x_n^2 < \frac{1}{2n+1}$ , 这意味着  $x_n \rightarrow 0$ .
2. 如果  $\{x_n\}$  和  $\{x_n + y_n\}$  都收敛, 那么  $\{x_n + y_n - x_n = y_n\}$  也会收敛. 构造  $x_n = (-1)^{n-1}, y_n = (-1)^n$ , 那么  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  发散但是  $\{x_n + y_n\}, \{x_n y_n\}$  都收敛. 再构造  $x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}, x_{2n} = 1, y_{2n-1} = 1, y_{2n} = \frac{1}{2n}$ .  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  都不是无穷小量但是  $\{x_n y_n\}$  是无穷小量.
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .
4. 考虑  $\{\frac{x_n}{n}\}$  的下确界  $\alpha$ . 那么  $\exists n$  使得  $x_n/n < a + \epsilon$ . 设  $\max_{i=1,2,\dots,n} x_i = M$ . 那么  $\frac{x_m}{m} \leq \frac{x_n}{m} + \frac{x_{m-n}}{n} \leq \frac{2x_n}{m} + \frac{x_{m-2n}}{m}$  (假设  $m = kn + b$ )  $\leq \dots \leq \frac{kx_n}{m} + \frac{x_b}{m} \leq \frac{kx_n}{kn+b} + \frac{M}{m} \leq \frac{x_n}{n} + \frac{M}{m}$ . 选择足够大的  $m$  使得  $\frac{M}{m} < \epsilon$ . 从而  $a \leq \frac{x_m}{m} < a + 2\epsilon$ .
5. WLOG 令  $a = 0$ . 设  $\sup_n \{a_n\} = M$ .  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n \geq N_1$ , 使得  $|a_n| < \epsilon$ ;  $\exists N_2, \forall n \geq N_2$ , 使得  $p_n / \sum_{i=1}^n p_i < \epsilon / N_1$ . 令  $n > N_1 + N_2$ , 则  $|\sum_{i=1}^n a_i p_{n+1-i} / \sum_{i=1}^n p_i| \leq |\sum_{i=1}^{N_1} p_i a_{n+1-i} / \sum_{i=1}^n p_i| + |\sum_{i=n-N_1+1}^n p_i a_{n+1-i} / \sum_{i=1}^n p_i| < \epsilon + \frac{\epsilon}{N_1} \times N_1 \times M = (M+1)\epsilon$ .
6.  $(e^{ax} - e^{bx})/x = a \cdot \frac{e^{ax}-1}{ax} + b \cdot \frac{1-e^{bx}}{b} \rightarrow a - b, \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1/x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1/x}+\sqrt{1/x^3+1}}} \rightarrow \frac{1}{2}$   
 $(\sin 1/x + \cos 1/x)^x = [(1 + \cos 1/x + \sin 1/x - 1)^{\frac{1}{\cos 1/x + \sin 1/x - 1}}]^{x \cos 1/x + \sin 1/x - 1} = (1/x = t) = e^{(\cos t + \sin t - 1)/t} = e^1$ .
7. 显然.
8.  $f(x) = 1_{\mathbb{Q}} - 1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ .
9.  $(\frac{\sum_{i=1}^p a_i^x}{p})^{1/x} = [1 + \frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{p}]^{1/x} = \{[1 + \frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{p}]^{\frac{p}{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}}\}^{\frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{px}} \rightarrow e^{\frac{\sum_{i=1}^p \log a_i}{p}} = (a_1 a_2 \dots a_p)^{1/p}$ .
10.  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x \log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2} \sim \frac{x \cdot 3x}{(2x)^2} = \frac{3}{4}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x} = \frac{(2/3)^x - 1}{1 - (4/3)^x} \sim \frac{x \log(2/3)}{-x \log(4/3)} = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 4 - \log 3}$ .
11.  $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x + \frac{1}{2} & x \in [0, \frac{1}{2}] \& x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1] \& x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
12. 只需注意到如果  $f(x_0) = 0$ , 那么对于所有的  $x \in [a, x_0]$ ,  $f(x) = 0$ .
13. 第一问是定义, 第二问用柯西收敛准则, 重复利用已知不等式来证明  $x, f(x), f(f(x)), \dots$  是柯西列.

14. 如果不存在  $\xi$  使得  $f(\xi) = 0$ . 那么  $f(x)$  始终保号, 不妨设  $f(x) > 0$ . 设  $x_0 = \arg \min f(x)$ . 这样就不存在  $y$  使得  $|f(y)| \leq \frac{1}{2}f(x)$ , 矛盾.
15. 第一类间断点  $\Rightarrow$  每一点都有一个邻域有界  $\Rightarrow$  所有邻域构成开覆盖, 必有有限子覆盖, 有限个有界总能找到最大界.
16.  $\exists \eta > 0$ , 使得  $f([a, b]) \supset [-\eta, \eta]$ , 这意味着  $e^{f([a, b])} \supset [e^{-\eta}, e^{\eta}] \supset [1 - \epsilon, 1 + \epsilon] (\exists \text{ 一个足够小的 } \epsilon > 0)$ . 从而如果  $n$  是奇数, 选择  $e^{f(\xi_1)} = 1, e^{f(\xi_2)} = 1 - \epsilon/2, e^{f(\xi_3)} = 1 + \epsilon/2, e^{f(\xi_4)} = 1 - \epsilon/3, e^{f(\xi_5)} = 1 + \epsilon/3, \dots$ ; 如果  $n$  是偶数, 选择  $e^{f(\xi_1)} = 1 - \epsilon/2, e^{f(\xi_2)} = 1 + \epsilon/2, e^{f(\xi_3)} = 1 - \epsilon/3, e^{f(\xi_4)} = 1 + \epsilon/3, \dots$ .
17. 令  $g(x) = f(x+a) - f(x)$ .  $g(0) \geq 0, g(1-a) \leq 0$ , 用介值定理. 去掉非负条件不对, 比如说  $f(x) = \sin(2\pi x), a = 0.7$ .
18. (1) 注意到  $f_n \uparrow \in [\frac{1}{2}, 1]$  且  $f(\frac{1}{2}) < 1, f(1) > 1$ , 使用介值定理. (2) 由于  $\forall \epsilon, \exists N$ , 使得  $\forall n > N, (1 - \epsilon)^n + 1 - \epsilon < 1$ . 由于  $f(1 - \epsilon) < 1 = f(c_n)$  且  $f_n \uparrow \Rightarrow c_n > 1 - \epsilon$ . 由极限定义知  $c_n \rightarrow 1$ .
19. 反证法. 如果  $f(a) \neq f(b)$ , 考虑正周期序列  $T_n \rightarrow 0$ , 则由带余除法,  $(b-a) \div T_n = S_n \cdots m_n$ , 其中  $0 \leq m_n < T_n \rightarrow 0$ . 所以  $a + S_n T_n \rightarrow b, f(a) = f(a + S_n T_n) \rightarrow f(b)$  (连续性)  $\Rightarrow f(a) = f(b)$ , 矛盾. 把连续性去掉则结论不对, 比如说 Dirichlet 函数.
20. (1) 如果集合有无穷多个元素那一定有聚点 (有界序列必有收敛子列). 从而  $x_n \rightarrow x$ . 考虑  $y_n$  使得  $|y_n - x_n| < 1/n$ , 且  $|f(y_n) - f(x_n)| > \epsilon$  (这是集合的定义, 函数极限差  $> \epsilon$  那么必然存在一个比较近的点使得函数差  $> \epsilon$ ). 从而  $y_n \rightarrow x$ ,  $f$  在  $x$  的极限何在? (极限存在当且仅当任意趋于其的数列极限均相等, 而这里  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$  显然与  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  不同). (2) 记 (1) 中集合为  $A_\epsilon$ . 注意到间断点集合可以写成  $\cup_n A_{1/n}$ . 可列个有限元素集合的并元素一定是可列个的.

### 3.3 补充 (不要求掌握!)

**有界性定理:**  $f(x) \in C[a, b]$ , 则  $f(x)$  有界.

证明. 如果无界, 则选择  $x_n$  使得  $f(x_n) \rightarrow \infty$ , 那么存在一个子列  $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$  收敛到某个  $x$  (聚点原理). 由连续性知  $f(x) = \infty$ , 矛盾.

**最值定理:**  $f(x) \in C[a, b]$ , 那么  $\arg \max f(x) \exists$ .

证明. 找一个数列  $\{x_n\}$  使得  $f(x_n) \rightarrow \max f(x)$ . 利用有界数列必有收敛子列和  $f(x)$  的连续性.

**介值定理:**  $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0, f(x) \in C[x_1, x_2], \exists x_0$  使得  $f(x_0) = 0$ .

证明. 使用 Lebesgue 方法. 令  $x_0 = \sup\{x : f(x) > 0\}$ . 利用连续性知如果  $f(x_0) > 0$  则  $x_0$  不是上界 (因为根据连续性会有  $x_0$  的一个邻域都满足  $f(x) > 0$ ), 如果  $f(x_0) < 0$  则有更好的上确界 (同样根据连续性会有  $x_0$  的一个邻域满足  $f(x) < 0$ ).

## 4 第 4 次习题课: 导数, 高阶导数

### 4.1 问题

- $f(x) \in C(\mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . 证明  $\arg \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \exists$ .
- 证明  $\cos x = 1/x$  有无穷多个正实数根.
- $f(x) \in C[a, b], x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ . 证明  $\exists \xi \in [a, b]$  使得  $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ .
- $f(x) = |x|^{1/4} + |x|^{1/2} - \frac{1}{2} \cos x$ . 问  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  中有多少个根?
- $f(x) \in C[0, 2], f(0) = f(2)$ , 证明  $\exists x_1, x_2 \in [0, 2]$  使得  $|x_1 - x_2| = 1$  and  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n-1}}$ . 讨论连续性.
- $f(x) \in C(\mathbb{R}), f(x+y) = f(x) + f(y)$ . 求解  $f(x)$ .
- $f(x)$  连续, 问  $|f(x)|$  连续否?
- $f(x) \in C[0, 1], 0 \leq f(x) \leq 1$ , 证明  $\exists t \in [0, 1]$  使得  $f(t) = t$ .
- (不要求掌握).  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增,  $0 \leq f(x) \leq 1$ , 证明  $\exists t \in [0, 1]$  使得  $f(t) = t$ .
- $f(x)$  在  $x = 3$  连续,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2$ . 求  $f'(3)$ .
- $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+x) - f(x_0-x)}{x}$ .

13. 证明奇函数导数是偶函数, 偶函数导数是奇函数.
14. 求导数.  $y = \sqrt[3]{2+3x^3}, y = \arcsin \frac{1}{x^2}, y = \log(\arctan 5x) + \log(1-x), y = e^{\sin^2 x} + \sqrt{\cos x} 2^{\sqrt{\cos x}}$ .
15.  $f(x) = x|x(x-2)|$ , 求  $f'(x)$ .
16.  $f(x), x \in [-1, 1], x \leq f(x) \leq x^2 + x$ , 证明  $f'(0) = 1$ .
17. 求导数.  $e^{xy} = 3x^2y, \arctan y/x = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ .
18. 求导数.  $f(x)^{g(x)}, x^{x^x}$ .
19. 求  $\frac{x^n}{1-x}, \sin^4 x + \cos^4 x$  的  $n$  阶导数.
20. 求  $\arcsin^2 x$  在 0 处的  $n$  阶导数.
21. 求极限.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x, \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{n} - 1), \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}$ .
22.  $f([a, b]) \subset [a, b], |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ , 证明  $\forall x_1 \in [a, b]$ , 都有  $x_n$  收敛.

## 4.2 解答

1. 由极限定义知  $\exists X > 0, \forall |x| > X, f(x) > f(0)$ . 那么  $\arg \min_{x \in [-X, X]} f(x) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ , 由最值定理知存在性.
2. 设  $f(x) = \cos x - 1/x$ , 那么  $f(2k\pi) > 0, f(2k\pi + \frac{\pi}{2}) < 0$ , 由介值定理立得.
3. 注意到  $\min f(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \max f(x)$ . 使用介值定理.
4. 注意到  $f(x)$  是偶函数. 由于  $\forall x > 1, f(x) > 0$ , 且  $f(x)$  在  $[0, 1]$  区间上单调递增, 则  $f(0) < 0, f(1) > 0 \Rightarrow$  有且仅有一个正实数根. 从而在  $\mathbb{R}$  上有两个根.
5. 令  $g(x) = f(x+1) - f(x)$ . 那么  $g(0)g(1) \leq 0 \Rightarrow \exists x \in [0, 1]$  使得  $g(x) = 0$ .
6. 
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| > 1 \\ -x & 0 < |x| < 1 \end{cases}$$
7. 先证有理数点.  $f(n) = f(1) + f(n-1) = 2f(1) + f(n-2) = \cdots = nf(1), f(1) = f(1/n) + f((n-1)/n) = 2f(2/n) + f((n-2)/n) = \cdots = nf(1/n) \Rightarrow f(m/n) = mf(1/n) = m/n \times f(1)$ . 有理数点满足  $f(x) = xf(1)$ , 无理数点用有理数逼近用连续性就可以了.
8. 注意到  $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ . 因此连续.
9. 令  $g(t) = f(t) - t, g(0) \geq 0, g(1) \leq 1$ , 利用介值定理.
10. 使用 Lebesgue 方法. 令  $x_0 = \sup_x \{f(x) > x\}$ , 往证  $f(x_0) = x_0$ . 如果  $f(x_0) > x_0$ , 那么  $\forall x_1, x_0 < x_1 < f(x_0)$ , 都有  $f(x_1) \geq f(x_0) > x_1$ . 这意味着  $x_0$  不是上界. 如果  $f(x_0) < x_0$ , 那么  $\forall x_1, f(x_0) < x_1 < x_0$ , 都有  $f(x_1) \leq f(x_0) < x_1$ . 这意味着  $x_0$  不是上确界, 因为有更好的上界. 因此  $f(x_0) = x_0$ .
11. 当  $x \rightarrow 3$  时,  $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)/(x-3) \times (x-3) \sim 2 \times (x-3) = 0$ . 从而  $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 2$ .
12.  $\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x} = \frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x} + \frac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x} \rightarrow 2f'(x_0)$ .
13. 奇函数导数是偶函数:  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{-x \rightarrow -x_0} \frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)} = f'(-x_0)$ . 同理偶函数导数是奇函数.
14.  $y' = \frac{3x^2 \sqrt[3]{2+3x^3}}{2+3x^3}, y' = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}, y' = \frac{5}{\arctan 5x \times (1+25x^2)} + \frac{1}{x-1}, y' = e^{\sin^2 x} \sin 2x - \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} 2^{\sqrt{\cos x}} (1 + \sqrt{\cos x} \log 2)$ .
15. 直接计算即可, 注意验证分段点左右导数是否相等. 
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x & x < 0 \text{ or } x > 2 \\ 4x - 3x^2 & 0 \leq x < 2 \\ \text{不存在} & x = 2 \end{cases}$$
16. 注意到  $f(0) = 0$ . 从而当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 \leftarrow \frac{x}{x} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \frac{x^2+x}{x} \rightarrow 1$ .
17. 两边同时对  $x$  求导数, 计算可知  $y' = \frac{y(2-xy)}{x(xy-1)}, y' = \frac{x+y}{x-y}$ .
18. 方法都是写成指数函数,  $e^{g \log f}, e^{e^{x \log x} \log x}$ . 结果是  $f^g(g' \log f + \frac{f}{g} f'), x^{x^x} (x^x(1 + \log x) \log x + x^{x-1})$ .
19.  $\frac{x^n}{1-x} = \frac{x^n - x^{n-1} + x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots + x - 1 + 1}{1-x} = -(x^{n-1} + \cdots + x + 1) + \frac{1}{1-x}$ , 因此  $n$  阶导数是  $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ . 第二个用倍角公式写出来是  $1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x. y' = -\sin 4x$ . 由课上已知关于三角函数高阶导数的结论, 知  $y^{(n)} = -4^{n-1} \sin(4x + \frac{n-1}{2}\pi)$ .
20.  $f'(x) = 2 \arcsin x / \sqrt{1-x^2}$ , 从而  $(1-x^2)f'(x)^2 = 4f(x)$ . 两边求导  $-2xf'(x)^2 + 2(1-x^2)f'(x)f''(x) = 4f'(x) \Rightarrow -xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2$ . 两边求  $n-2$  次导数, 并代入  $x=0$ , 利用 Leibniz 公式知道  $f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$ .



然后再手动把  $f'(0), f''(0)$  算出来用递推就可以了.

21.  $\sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2+1}} \rightarrow \frac{1}{2}, n(\sqrt[n]{n}-1) = n(e^{\log n/n}-1) \sim n \log n/n^2 \rightarrow 0, (1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}} = [(1+2x)^{1/(2x)}]^{2(x+1)^2} \rightarrow e^2.$

22. 回忆: 这种题一定是单调数列. 容易验证数列是良定义的, 即不会跑出区间  $[a, b]$  外. 如果  $x_n \geq x_{n-1}$ , 有  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(f(x_n) + x_n)$  (利用  $f(x_n) - f(x_{n-1}) \geq x_{n-1} - x_n \geq \frac{1}{2}(f(x_{n-1}) + x_{n-1}) - x_n = x_n - x_{n-1}$ ). 从而如果  $x_2 \geq x_1$ , 则这成为单调上升有界数列, 必收敛. 同理若  $x_{n-1} \geq x_n$  也可以推出  $x_n \geq x_{n+1}$ .

### 4.3 补充 (不要求掌握!)

参考 <https://wqgcx.github.io/courses/analysis1.pdf>.

## 5 第 5 次习题课: 隐函数求导, 微分, 不定积分

### 5.1 问题

1. 求出闭区间  $[-1, 1]$  上的一元函数  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$  达到最小值的所有  $[-1, 1]$  上的点.
2. 考虑函数  $f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ , 其中  $m$  为正整数. 在  $x \neq 0$  处, 求  $f'(x)$  和  $f''(x)$ . 求  $m$  满足的条件, 使得  $f(x)$  有连续的二阶导函数.
3. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} + \frac{x}{2} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{\sin bx}{x} + cx & x < 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处可导, 确定常数  $a, b, c$  的值 (需要用洛必达法则).
4.  $y = e^{-x^2}$ , 求  $y^{(4)}|_{x=0}$ .
5.  $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \arccos \frac{x}{a}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .
6.  $y^2 \tan(x+y) - \sin(x-y) = 0$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .
7.  $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .
8. 求函数  $f(x) = x^{\arcsin x} (0 < x < 1)$  的导函数  $f'(x)$ .
9. 求函数  $f(x) = \arctan x$  在  $x = 0$  点的 3 阶导数  $f'''(0)$ .
10. 设  $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ , 求  $f^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}$ .
11. 求方程  $y^2 + 2 \log y = x^4$  所确定的函数  $y = f(x)$  的二阶导数.
12. 判断下列结论是否正确.
  - (1) 设  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且  $f'(x_0) > 0$ , 那么: (1.1)  $f(x)$  在  $x_0$  点一定连续. (1.2)  $f(x)$  在  $x_0$  点的某个邻域内一定连续. (1.3)  $f(x)$  在  $x_0$  点的某个邻域内一定单调上升.
  - (2)  $f(x)$  在  $x_0$  点二阶可导, 那么: (2.1)  $f(x)$  在  $x_0$  点一定连续. (2.2)  $f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域内一定连续.
13. 设  $f(x) = e^{x(x-1)\cdots(x-2021)}$ , 求  $f'(2021)$ .
14. 设  $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .
15. 设  $y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  并化简.
16. 求积分  $\int \frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)} dx$ .
17. 求积分  $\int \frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6} dx$ .
18. 求积分  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ .
19. 求积分  $\int \frac{3+5x}{\sqrt{4x^2-4x+5}} dx$  (提示:  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$ ).
20. 设  $y = f(x) = x^3, x = g(t) = t^2, y = f(g(t)) = t^6, \Delta t = 0.1, \Delta x = g(1+0.1) - g(1) = 0.21$ .
  - (1) 当把  $t$  作为自变量时, 函数  $y = f(g(t))$  的二阶微分记为  $d_t^2 y$ , 函数  $x = g(t)$  的一阶微分记为  $d_t x$ . 计算出: 当  $t = 1, \Delta t = 0.1$  时, 函数  $y = f(g(t))$  的二阶微分  $d_t^2 y|_{t=1, \Delta t=0.1}$  和函数  $x = g(t)$  的一阶微分  $d_t x|_{t=1, \Delta t=0.1}$ .

- (2) 当把  $x$  作为自变量时, 函数  $y = f(x)$  的二阶微分记为  $d_x^2 y$ ,  $x$  (看作  $x$  的函数) 的一阶微分记为  $d_x x$ . 计算出: 当  $x = 1, \Delta x = 0.21$  时, 函数  $y = f(x)$  的二阶微分  $d_x^2 y|_{x=1, \Delta x=0.21}$  和函数  $x$  (看作  $x$  的函数) 的一阶微分  $d_x x|_{x=1, \Delta x=0.21}$ .
- (3)  $\frac{d_t^2 y}{(d_t x)^2}|_{t=1, \Delta t=0.1}$  与  $\frac{d_x^2 y}{(d_x x)^2}|_{x=1, \Delta x=0.21}$  相等吗?
21. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$ .
22. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x+\tan x}$ .
23. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cdots \cos \frac{a}{2^n} \quad (a \in (0, 1))$ .
24. 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^{x^2}$ .
25. 求极限  $\sqrt[n]{n}(\sqrt[n]{n}-1)$ .
26. 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 0$ .
27. 设  $f(x) \in C[0, 1]$ , 如果极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(0)+f(1/n)+f(2/n)+\cdots+f(1)}{n} = M$ , 其中  $M = \max_{x \in [0, 1]} f(x)$ , 则  $f(x) \equiv M$ .
- 28 (Riemann-Lebesgue 引理).  $f \in R[a, b], g \in C[0, T], g(x+T) = g(x)$ , 则  $\int_a^b f(x)g(nx)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx \frac{1}{T} \cdot \int_0^T g(x)dx$ .

## 5.2 解答

1.  $f(1) = f(-1) = 1, f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2x}{3(x^2-1)^{2/3}} = \frac{2[(x^2-1)^{2/3}-x^{4/3}]}{3x^{1/3}(x^2-1)^{2/3}} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  或者  $-1 < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 注意到  $f(0) = 1$ . 从而达到最小值的点是  $-1, 0, 1$ .
2.  $f'(x) = -x^{m-2} \cos \frac{1}{x} + mx^{m-1} \sin \frac{1}{x}, f''(x) = -x^{m-4} \sin \frac{1}{x} - (m-2)x^{m-3} \cos \frac{1}{x} - mx^{m-3} \cos \frac{1}{x} - m(m-1)x^{m-2} \sin \frac{1}{x}$ . 要使得  $f''(0)$  存在需要  $f'(0) \exists, f'(x) \rightarrow f'(0)$  且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} \exists \Rightarrow m \geq 4$ , 二阶导函数连续性意味着  $f''(x) \rightarrow f''(0) \Rightarrow m \geq 5$ .
3. 连续性:  $f(0+0) = a \Rightarrow a = 1, b = 1. f'_+(0) = 0, f'_-(0) = 0 \Rightarrow c = 0$  (需要用洛必达).
4.  $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}, y''' = -2x(4x^2-2)e^{-x^2} + 8xe^{-x^2}, y'''' = (-24x^2+12)e^{-x^2} + (16x^4-24x^2)e^{-x^2}$ . 从而  $y''''(0) = 12$ .
5.  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ .
6. 两边求导,  $2yy' \tan(x+y) + \frac{y^2}{\cos^2(x+y)}(y'+1) + (y'-1) \cos(x-y) = 0 \Rightarrow y' = \frac{\cos^2(x+y) \cos(x-y) - y^2}{\cos^2(x+y) \cos(x-y) + y^2 + 2y \sin(x+y) \cos(x+y)}$ .
7.  $y' = a^a x^{a-1} + a^{x+1} x^{a-1} \log a + a^{a+x} (\log a)^2$ .
8.  $f(x) = e^{\arcsin x \log x}, f'(x) = x^{\arcsin x} \left( \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x} \right)$ .
9.  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2-8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow f'''(0) = -2$ .
10.  $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{4} \left( \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right)$ .
11. 两边求导,  $2yy' + 2\frac{y'}{y} = 4x^3 \Rightarrow y^2 y' + y' = 2x^3 y$ , 再求一次,  $2y(y')^2 + y^2 y'' + y'' = 6x^2 y + 2x^3 y'$ , 利用  $y' = \frac{2x^3 y}{y^2+1}$ , 得到  $y'' = \frac{6x^2 y}{y^2+1} + \frac{4x^6 y}{(y^2+1)^2} - \frac{8x^6 y^3}{(y^2+1)^3}$ .
12. (1.1) 可导一定连续. (1.2)(1.3) 不一定, 比如说  $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x+x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ . (2.1) (2.2) 都是对的.
13.  $f'(x) = e^{x(x-1)\cdots(x-2021)} [x(x-1)\cdots(x-2021)]'$ , 从而  $f'(2021) = 2021!$ .
14.  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \operatorname{sgn}(t)$ , 注意到  $t, x$  同号, 因此  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sgn}(x)$ .
15. 直接计算, 小心化简.  $y'(x) = \frac{1}{x^4+1}$ .
16.  $\frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{x}{(x^2+1)}$ , 因此积分后是  $2 \log|x+1| + \log|x| + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$ .
17.  $\frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6} = \frac{11}{10\sqrt{3}} \frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{11}{10\sqrt{3}} \frac{1}{x+\sqrt{3}} - \frac{1}{5\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{x^2+2} + \frac{1}{5} \frac{x}{x^2-3} - \frac{1}{5} \frac{x}{x^2+2}$ , 因此积分后是  $\frac{11}{10\sqrt{3}} \log|x-\sqrt{3}| - \frac{11}{10\sqrt{3}} \log|x+\sqrt{3}| - \frac{1}{5\sqrt{2}} \arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{10} \log|x^2-3| - \frac{1}{10} \log(x^2+2) + C$ .
18.  $\frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x (\tan x + 1) (\tan^2 x + 1)^2}$ , 后面用有理式展开积分. 结果是  $\frac{1}{4} \log|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin x \cos x + \frac{1}{4} \cos^4 x + C$ . (注: 本题也可以用对偶积分, 考虑  $\int \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ ).
19.  $\frac{3+5x}{\sqrt{(2x-1)^2+4}} = \frac{5(x-\frac{1}{2})}{2\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}} + \frac{11}{4\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}}$ , 因此积分后是  $\frac{5}{2} \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1} + \frac{11}{4} \log|x-\frac{1}{2} + \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}| + C$ .
20. (1)  $d_t^2 y|_{t=1, \Delta t=0.1} = 30t^4(\Delta t)^2|_{t=1, \Delta t=0.01} = 0.3, d_t x|_{t=1, \Delta t=0.1} = 2t\Delta t|_{t=1, \Delta t=0.1} = 0.2$ .
- (2)  $d_x^2 y|_{x=1, \Delta x=0.21} = 6x(\Delta x)^2 = 0.2646, d_x x|_{x=1, \Delta x=0.21} = 1\Delta x|_{x=1, \Delta x=0.21} = 0.21$ .

(3)  $(d_t x)^2|_{t=1, \Delta t=0.1} = 0.2^2 = 0.04$ ,  $(d_x x)^2|_{x=1, \Delta x=0.21} = 0.21^2 = 0.0441$ ,  $\frac{d_t^2 y}{(d_t x)^2}|_{t=1, \Delta t=0.1} = \frac{0.3}{0.04} = 7.5 \neq 6 = \frac{0.2646}{0.0441} = \frac{d_x^2 y}{(d_x x)^2}|_{x=1, \Delta x=0.21}$ , 因此不相等.

21.  $x^x = e^{x \log x} \rightarrow e^0 = 1$ .

22.  $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x$ ,  $x + \tan x \sim 2x$ , 因此极限值为  $\frac{1}{6}$ .

23.  $\cos \frac{a}{2} \cdots \cos \frac{a}{2^n} \sin \frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n}$  (不断利用  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ), 因此极限值为  $\frac{\sin a}{a}$ .

24.  $(1 + \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x})^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x}(\sqrt{1+x^2}-x)}$ , 由于  $x(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{1}{2}$ , 因此原极限为  $\sqrt{e}$ .

25.  $\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1) \sim \sqrt{n}(e^{(\log n)/n}-1) \sim \sqrt{n}(\log n)/n = \log n/\sqrt{n} \rightarrow 0$ .

26. 分奇偶讨论. 使用  $a_n \rightarrow a$  则  $\sum a_n/n \rightarrow a$  这个结论.

27. 如果结论不对, 则存在一个长度为  $\delta$  的区间, 在这个区间上  $f(x) \leq M - \epsilon$ , 则至少有  $[\delta/n] - 1$  个  $f(i/n)$  落在这个区间里, 这样一来极限值就会小于等于  $M(1-\delta) + (M-\epsilon)\delta$ , 矛盾.

28. WLOG 设  $\int_0^T g(x)dx = 0$ , 否则考虑  $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$ .

由 Riemann 积分定义,  $\forall \epsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $s_\epsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_{m-1} & x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq b \end{cases}$  使得  $\int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|dx < \epsilon$ . 设

$M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$ . 则  $|\int_a^b f(x)g(nx)dx| = |\int_a^b (f(x) - s_\epsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx| \leq \int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|g(nx)dx + |\sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx| < M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \leq M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT$ . 其中最后一个等式利用了  $\int_0^T g(x)dx = 0$ , 这意味着  $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \cdots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$  (设  $c+kT \leq d < c+(k+1)T$ )  $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \leq MT$ . 选择一个足够大的  $n$ , 使得  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \epsilon$ . 从而  $|\int_a^b f(x)g(nx)dx| \leq (M+1)\epsilon$ .

### 5.3 补充 (不要求掌握!)

参考 <https://wqgcx.github.io/courses/analysis2.pdf>, 初步了解可积性理论.

## 6 第 6 次习题课: 不定积分, 变上限积分, 定积分

### 6.1 问题

- 求极限.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}})$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}) \sin \frac{i\pi}{n^2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ .
- 求导数.  $\int_{x^3+1}^{2x} \frac{\sin t}{t^4+2} dt$ ,  $\int_e^{e^x} \frac{dt}{1+\log t} (x > 1)$ ,  $(\int_a^x f(t)dt)^2$ .
- 求积分.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ,  $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ ,  $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$ ,  $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$ ,  $\int_{-1}^1 \log(x+\sqrt{1+x^2})dx$ .
- 求积分.  $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ ,  $\int \sqrt{\tan x}dx$ ,  $\int \frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$ ,  $\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$ ,  $\int \frac{dx}{x(x^3+2)}$ ,  $\int x^2 \arctan x dx$ ,  $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$ ,  $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ .
- 函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的导函数. 证明: 对于任意  $x \in [0, 1]$ , 有  $|f(x)| \leq \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |f'(t)|dt$ , 并写出取等号条件.
- $x_1 > 0$ , 对于每个正整数  $n$ , 有  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在并求之.
- 设  $x > 0$ , 定义  $p(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}}$ , 证明方程  $p(x+1) = p(x) + \sin x$  有无穷个互不相等的正实数解.
- 设  $f(x) \in R[a, b]$ ,  $\int_a^b f(x)dx > 0$ , 证明  $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]$  使得  $f(x) > 0, x \in [\alpha, \beta]$ .
- (不要求掌握).  $f(x) \in R[a, b]$ , 是否有  $[f(x)]$  可积? 其中  $[ \cdot ]$  表示向下取整.
- 设  $f(x) \in C[0, \pi]$  满足  $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$ , 证明  $\exists \alpha, \beta \in (0, \pi), \alpha \neq \beta$ , 使得  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ .
- 证明柯西不等式  $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$ , 并说明取等号条件.
- (不要求掌握). 证明 Holder 不等式  $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq [\int_a^b f^p(x)dx]^{1/p} [\int_a^b g^q(x)dx]^{1/q}$ , 其中  $p, q > 1, 1/p + 1/q = 1, f, g \geq 0$ .

- 13 (不要求掌握). 证明 Minkowski 不等式  $[\int_a^b [f(x) + g(x)]^p dx]^{1/p} \leq [\int_a^b f^p(x)]^{1/p} + [\int_a^b g^p(x)]^{1/p}$ , 其中  $p \geq 1, f, g \geq 0$ .
14. 设  $f(x) \in C[a, b]$  满足  $\forall \phi(x) \in C[a, b]$ , 只要  $\int_a^b \phi(x) dx = 0$ , 就有  $\int_a^b f(x)\phi(x) dx = 0$ . 证明  $f(x) \equiv C$ .
15.  $a_n/n^\alpha \rightarrow 1, \alpha > 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ .
16.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f'(a) = m, f'(b) = n$ , 证明存在  $c \in [a, b]$  使得  $f'(c) = \xi$ , 其中  $\xi$  是  $[m, n]$  或  $[n, m]$  中的任意一个数. 本题说明导函数虽然不一定连续, 但具有介值性质.
17.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 证明存在  $c \in [a, b]$  使得  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .
18. 记  $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}, x \in [0, 1]$ , 求  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$  和  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ . 本题说明积分极限不一定可交换.
19. 记  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  和  $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$ . 本题说明求导极限不一定可交换.

## 6.2 解答

1. 利用定积分定义. (1)  $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{3}{2}(1+x)^{3/2}|_0^1 = 3\sqrt{2} - \frac{3}{2}$ .
- (2)  $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2} \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \pi/4$ .
- (3)  $\frac{i\pi}{n^2} - \epsilon \frac{i\pi}{n^2} \leq \sin \frac{i\pi}{n^2} \leq \frac{i\pi}{n^2}, \sum_{i=1}^n (1 + \frac{i}{n}) \frac{i\pi}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 + \frac{i}{n}) \frac{i\pi}{n} \rightarrow \int_0^1 (1+x)\pi x dx = \frac{5\pi}{6}$ , 同理左边  $\geq (1-\epsilon)\frac{5\pi}{6}$ , 由  $\epsilon-N$  语言定义.
- (4)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2$ .
2. 利用变上限积分导数结论.  $f' = \frac{\sin 2x}{16^x+2} 2^x \log 2 - \frac{\sin(x^3+1)}{(x^3+1)^4+2} 3x^2$ .  $f' = \frac{e^x}{1+x}$ .  $f' = 2f(x) \int_a^x f(t) dt$ .
3.  $\arcsin \frac{x}{a} + C, \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C, \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin(x/a)) + C, \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}|) + C, \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}|) + C, 0$  (注意是奇函数). 都是利用换元或者分部积分.
4. (1) 令  $u = x + \sqrt{x^2 + x + 1}, x = \frac{u^2-1}{2u+1} \Rightarrow 2 \int \frac{u^2+u+1}{u(2u+1)^2} du = 2 \int \frac{1}{u} - \frac{3(u+1)}{(2u+1)^2} du = 2 \log |u| - 3 \int \frac{du}{2u+1} - 3 \int \frac{du}{(2u+1)^2} + C = 2 \log u - \frac{3}{2} \log |2u+1| + \frac{3}{2} \frac{1}{2u+1} + C$ .
- (2) 令  $u = \sqrt{\tan x}, x = \arctan u^2 \Rightarrow$  原积分  $= 2 \int \frac{u^2}{1+u^4} du$ . 使用对偶积分. 记  $I = \int \frac{u^2}{1+u^4} du, J = \int \frac{1}{1+u^4} du, I+J = \int \frac{1+u^2}{1+u^4} du = \int \frac{1+1/u^2}{u^2+1/u^2} du = \int \frac{(u+1/u)^2}{(u+1/u)^2-2} d(u+1/u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}}) + C_1, I-J = \int \frac{u^2-1}{u^4+1} du = \int \frac{1-1/u^2}{u^2+1/u^2} du = \int \frac{1}{(u+1/u)^2-2} d(u+1/u) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log |\frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}}| + C_2$ . 从而  $I = \frac{I+J}{2} + \frac{I-J}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log |\frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}}| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2} \tan x}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log |\frac{\tan x - \sqrt{2} \tan x + 1}{\tan x + \sqrt{2} \tan x + 1}| + C$ .
- (3)  $= \int \frac{e^x(1-x^2)+e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} de^x + \int \frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \int e^x d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \int \frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx + C = e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$ .
- (4)  $= \frac{1}{2} \int \sqrt{x^4 + x^2} dx^2 = \frac{1}{2} \int \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} d(x^2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} (x^2 + \frac{1}{2}) \sqrt{x^4 + x^2} - \frac{1}{16} \log |x^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{x^4 + x^2}| + C$ .
- (5)  $= \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{x^3(x^3+2)} = \frac{1}{6} \int \frac{dx^3}{x^3} - \frac{dx^3}{x^3+2} = \frac{1}{6} \log |\frac{x^3}{x^3+2}| + C$ .
- (6)  $= \frac{1}{3} \int \arctan x dx^3 = \frac{1}{3} x^3 \arctan x + C - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} x^3 \arctan x + C - \frac{1}{6} \int \frac{x^2 dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{3} x^3 \arctan x + C - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \log |1+x^2|$ .
- (7)  $= \int \frac{1}{(1-\sin^2 x)^2} d \sin x = \frac{1}{4} \log |\frac{1+\sin x}{1-\sin x}| + \frac{\sin x}{2(1-\sin^2 x)} + C$ . 最后一个等号是积分  $\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt$ , 注意到  $\int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{t}{1-t^2} - \int t d \frac{1}{1-t^2} + C = \frac{t}{1-t^2} - \int \frac{2t^2}{(1-t^2)^2} dt + C = \frac{t}{1-t^2} + \int \frac{2}{1-t^2} dt - \int \frac{2}{(1-t^2)^2} dt + C \Rightarrow \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t^2} dt + \frac{t}{2(1-t^2)} + C = \frac{1}{4} \log |\frac{1+t}{1-t}| + \frac{t}{2(1-t^2)} + C$ .
- (8)  $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt, \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sin t} dt = - \int \frac{d \cos t}{\sin^2 t} = - \int \frac{d \cos t}{1-\cos^2 t} = \frac{1}{2} \log |\frac{1-\cos t}{1+\cos t}| + C = \frac{1}{2} \log |\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}| + C = \frac{1}{2} \log |\frac{(1-x)+(1+x)-2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{(1-x)+(1+x)+2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}| + C = \log |\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}| + C$ .
5. 由连续性和积分中值定理知  $\exists \xi \in [0, 1]$ , 使得  $|f(\xi)| = \int_0^1 |f(t)| dt$ . 从而  $\int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f'(t)| dt \geq |f(\xi)| + \int_\xi^x |f'(t)| dt \geq |f(\xi)| + |\int_\xi^x f'(t) dt| = |f(\xi)| + |f(x) - f(\xi)| \geq |f(x)|$ . 等号处处成立意味着  $f'(x) = 0$ , 这也意味着  $f(x) \equiv C$ .
6. 重复这种题很多次了. 首先  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 1/x_n) \geq 1$ . 其次如果  $x_n \geq 1$ , 则  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(1/x_n - x_n) \leq 0$ . 说明单调递减有下界, 两边求极限知答案是 1.
7.  $p(x+1) - p(x) = \int_x^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}} \in [\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3+2021}}, \frac{1}{\sqrt{x^3+2021}}]$ . 从而令  $g(x) = p(x+1) - p(x) - \sin x, g(2k\pi) > 0, g(2k\pi + \pi/2) < 0$ , 用介值定理.
8. 反证法, 如果任意区间都有点  $f(x) \leq 0$ , 那么 Riemann 和的极限怎么可能  $> 0$ ? (我就偏偏取那个  $\leq 0$  的点)
9. 负的 Riemann 函数可积, 但取整后变成不可积的 Dirichlet 函数.

10. 由于  $\int_0^1 f(x) \sin x dx = 0$ , 从而存在零点  $\alpha \in (0, \pi)$ . 再考虑  $\int f(x) \sin(x - \alpha) dx = 0$ , 知如果只有一个零点, 那么这个积分不可能为 0 (注意到  $f(x) \sin(x - \alpha)$  在只有一个零点  $x = \alpha$  时是始终同号的).
11.  $\int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx \geq 0$  对于  $\forall t \in \mathbb{R}$  恒成立. 注意到这是关于  $t$  的一元二次方程, 因此  $\Delta \leq 0 \Rightarrow 4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leq 0$ . 显然取等号条件是  $f(x) = Cg(x)$ .
12. 不妨设  $\int f^p(x)dx = \int g^q(x)dx = 1$ . 注意到  $\frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) \leq \log(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ . 从而  $\int f(x)g(x)dx \leq \int \frac{f^p(x)}{p} dx + \int \frac{g^q(x)}{q} dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .
13.  $\int_a^b (f+g)^p dx = \int_a^b (f+g)^{p-1} f dx + \int_a^b (f+g)^{p-1} g dx$  利用上一问结论  $\leq [\int_a^b (f+g)^p dx]^{(p-1)/p} [\int_a^b f^p dx]^{1/p} + [\int_a^b (f+g)^p dx]^{(p-1)/p} [\int_a^b g^p dx]^{1/p} \Rightarrow [\int_a^b (f+g)^p dx]^{1/p} \leq [\int_a^b f^p dx]^{1/p} + [\int_a^b g^p dx]^{1/p}$ .
14. 考虑  $\phi(x) = f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$ . 从而  $\int_a^b f^2(x)dx = \frac{1}{b-a} [\int_a^b f(t)dt]^2 \Rightarrow \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b 1dt = [\int_a^b f(t)dt]^2$ . 由 Cauchy 不等式取等条件知  $f(x) \equiv C$ .
15. 这个题提醒大家很多时候感觉虽然可靠, 但要严格说明依然应该使用  $N-\epsilon$  语言.  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\epsilon) < a_n < n^\alpha(1+\epsilon)$ . 从而存在足够大的  $n$ , 使得  $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \dots + N^\alpha) < \epsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \dots + a_N) < \epsilon, |\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \dots + (a_n - n^\alpha)]| \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[(N+1)^\alpha + \dots + n^\alpha] \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha] = \epsilon \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\frac{i}{n})^\alpha \rightarrow \epsilon \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{\epsilon}{\alpha+1}$ . 这意味着当  $n$  足够大时,  $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(\sum_{i=1}^n a_i)$  和  $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(\sum_{i=1}^n i^\alpha)$  差不多. 因此原极限是  $\frac{1}{\alpha+1}$ .
16. 通过平移只需证明  $f'(a) > 0, f'(b) < 0$ , 证明存在  $f'(c) = 0$ .  $f'(a) > 0$  说明一定有数  $x > a$  使得  $f(x) > f(a)$ ,  $f'(b) < 0$  说明一定有数  $x < b$  使得  $f(x) > f(b)$ . 闭区间上的连续函数必有最大值, 从而最大值点的导数一定为 0 (利用左导数  $\geq 0$ , 右导数  $\leq 0$ ). 这就是  $f'(c) = 0$ .
17. 构造  $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ .  $g(a) = g(b) = f(a)$ , 从而考虑  $[a, b]$  区间上  $g(x)$  的最大值点, 其必有  $g'(x_0) = 0$ , 此即  $f(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .
18. 这个题告诉我们求导和极限未必可交换.  $f_n(x) \rightarrow 0$  对于所有  $x \in [0, 1]$  从而  $\int_0^1 \lim f_n(x)dx = 0$ . 而  $\int_0^1 f_n(x)dx = 1 - e^{-n} - ne^{-n} \rightarrow 1$ .
19.  $f'_n(x) = \cos(nx), f'_n(0) \rightarrow 1$ , 而对于  $x \neq 0$  其极限不存在.  $f_n(x) \rightarrow 0$  对于所有  $x \in \mathbb{R}$ , 从而  $[\lim f_n(x)]' = 0$ .

### 6.3 补充 (不要求掌握!)

你也许认为生活中很多函数都是可积的, 但是实际上不对!

测度: 我们把满足以下性质的非负集函数 (定义域是集合, 且函数值非负) 叫做测度:  $m(\emptyset) = 0$ , 并且对于任意不交的集合  $A_1, A_2, \dots, \sum_i m(A_i) = m(\cup_i A_i)$ .

$\pi$  系: 一族集合构成的集合  $\mathcal{P}$ , 且满足  $\forall A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$ .

半环:  $\mathcal{P}$  是  $\pi$  系, 若  $A, B \in \mathcal{P}, A \supset B$ , 则存在有限个两两不交的集合  $C_1, C_2, \dots, C_k$  使得  $A \setminus B = \cup_k C_k$ .

外测度: 我们把满足以下性质的非负集函数 (定义域是集合, 且函数值非负) 叫做外测度:  $m(\emptyset) = 0$ , 并且对于任意集合  $A_1, A_2, \dots, \sum_i m(A_i) \geq m(\cup_i A_i)$ .

$\sigma$ -域: 如果  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{P}; A \in \mathcal{P} \Rightarrow A^c \in \mathcal{P}; A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \Rightarrow \cup_i A_i \in \mathcal{P}$ , 则称  $\mathcal{P}$  是  $\sigma$ -域.

容易验证所有形如  $(a, b], a, b \in \mathbb{R}$  的区间构成的集合是半环, 定义  $m((a, b]) = b - a$ , 这是半环上的外测度. 由测度扩张定理, 这个外测度可以扩张到  $\sigma(\{(a, b]\})$  上. 利用 Caratheodory 条件可以完备化. 这个测度成为 Lebesgue 测度.

更多关于 Lebesgue 测度的知识: Cantor 集, 胖 Cantor 集, Cantor-Lebesgue 函数, 等等.

Lebesgue 定理:  $f(x) \in R[a, b]$  当且仅当  $m(\{x : f(x) \text{ 在 } x \text{ 处间断}\}) = 0$ , 其中  $m$  是 Lebesgue 测度.

证明. “ $\Rightarrow$ ” 对于区域  $[a, b]$  的任何分割  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , 定义  $\omega_i = \sup\{|f(x) - f(y)|, x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}$ ,  $\Delta_i = |x_i - x_{i-1}|$ ,  $\Delta = \max\{\Delta_i\}$ . 因而  $f$  是 Riemann 可积等价于  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i \omega_i \Delta_i = 0$ . 再定义  $\omega_\epsilon(f) = \{x : \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y \in [x-\delta, x+\delta]} |f(y) - f(x)| \geq \epsilon\}$ . 先假设如果  $f$  的不连续点集测度为正, 那么存在  $\epsilon_0$  使得  $\omega_{\epsilon_0}(f) > 0$ . 对任意分割, 我们有  $\sum_i \omega_i \Delta_i \geq \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap \omega_{\epsilon_0}(f) \neq \emptyset} \omega_i \Delta_i \geq \epsilon_0 \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap \omega_{\epsilon_0}(f) \neq \emptyset} (x_i - x_{i-1}) \geq \epsilon_0 m(\omega_{\epsilon_0}(f))$ . 这表明  $f$  不是 Riemann 可积的. 因此如果  $f$  是 Riemann 可积的, 那么不连续点集必定是零测集.

“ $\Leftarrow$ ” 现在我们假设  $\omega_\epsilon(f)$  是零测集, 我们证明  $f$  是 Riemann 可积的. 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在闭集  $A_\epsilon \subset [a, b]$  使得  $f$  在  $A_\epsilon$  上连续. 对  $x_0 \in A_\epsilon$ , 存在  $\delta > 0$  使得  $|f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . 由于  $A_\epsilon$  是有界闭集, 因此存在

有限个开区间  $(x_l - \frac{1}{2}\delta_l, x_l + \frac{1}{2}\delta_l)$  覆盖住  $A_\epsilon$ . 取  $\delta = \min\{\frac{1}{3}\delta_l\}$ . 这表明对于任意  $x_0 \in A_\epsilon$ , 必定有某个  $x_l \in A_\epsilon$ , 使得  $x_0 \in (x_l - \frac{1}{2}\delta_l, x_l + \frac{1}{2}\delta_l)$ . 这表明  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (x_l - \delta_l, x_l + \delta_l)$ , 因而有  $|f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . 取  $[a, b]$  分割使得  $\Delta < \frac{1}{2}\delta$ . 现在我们来考虑  $\sum_i \omega_i \Delta_i$ . 如果区间  $[x_{i-1}, x_i]$  与  $A_\epsilon$  的交集非空, 含有某个点  $y_0 \in [x_{i-1}, x_i] \cap A_\epsilon$ , 那么对于任意  $x, y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$  都有  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ . 注意到  $[x_{i-1}, x_i] \subset [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ , 故而  $\omega_i < \epsilon$ . 这样我们可以估计  $\sum_i \omega_i \Delta_i = \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap A_\epsilon \neq \emptyset} \omega_i \Delta_i + \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap A_\epsilon = \emptyset} \omega_i \Delta_i \leq \epsilon(b-a) + 2Mm([a, b] \setminus A_\epsilon)$ . 这里  $M$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的上界. 这就表明如果  $f$  的不连续点零测且  $f$  有界, 则  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积.

极限和积分可交换的三大定理 (Lebesgue 可积意义下, 但是我们有定理保证 Riemann 可积一定是 Lebesgue 可积):

**Fatou 引理:** 如果  $f_n \geq 0$ , 那么  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx \geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dx$ .

**单调收敛定理:** 如果  $f_n \geq 0$  且  $f_n \uparrow f$ , 那么  $\int f_n dx \uparrow \int f dx$ .

**控制收敛定理:** 如果  $f_n \rightarrow f$  几乎处处成立,  $|f_n| \leq g$  对于所有  $n$  成立, 并且  $g$  可积, 那么  $\int f_n dx \rightarrow \int f dx$ .

## 7 第 7 次习题课: 定积分及其应用

### 7.1 问题

- 判断对错. 设  $f(x)$  和  $g(x)$  是两个给定的函数, 记  $f_1(x) = f(x) + g(x), f_2(x) = f(x)g(x), f_3(x) = |f(x)|, f_4(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ . (1) 假如  $f(x)$  和  $g(x)$  均在点  $x = x_0$  处可导. 问  $f_1, f_2, f_3, f_4$  中哪些函数在  $x_0$  处一定可导, 哪些不一定可导? (2) 假如  $f(x)$  和  $g(x)$  均在区间  $[a, b]$  可积, 问  $f_1, f_2, f_3, f_4$  中哪些函数在区间  $[a, b]$  一定可积, 哪些不一定可积?
- 判断对错.  $f_1, f_3 \in C[0, 1], f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x), \forall x \in [0, 1]$ , 且  $\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 f_3(x) dx$ . 则  $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f_3(x)$ .
- 是否存在  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $f$  在所有点上局部无界?
- 证明  $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内有且仅有一个根  $x_n$ , 并计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .
- 求积分.  $\int_{-1}^1 \frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2} dx, \int_0^2 |x^2 - 1|e^{-|x-1|} dx, \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx, \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^2 + 1) \sin^3 x dx, \int_0^1 \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx, \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx$ .
- 设函数  $f(x) \in C[0, 1]$ , 且  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = 0$ . 证明  $f(x)$  在  $[0, 1]$  中至少有两个零点.
- 设  $0 < \lambda < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{1-\lambda}$ .
- 求直角坐标  $(x, y)$  给出的抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  上从点  $(0, 0)$  到点  $(1, \frac{1}{2})$  的弧长.
- 设奇数  $n \geq 3$ , 求极坐标  $(r, \theta)$  给出的  $n$  叶玫瑰线  $r = \sin(n\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$  所围的有界图形的面积.
- 证明不等式. (1)  $\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . (2)  $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx < \frac{1}{10}$ .
- $f(x) \in C[-1, 1]$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \rightarrow f(0)$ .
- $f(x) \in C[-1, 1]$ , 证明  $\lim_{h \rightarrow 0+0} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x) dx \rightarrow \pi f(0)$ .

### 7.2 解答

- (1)  $f_1, f_2$  一定可导, 由导数四则运算立得.  $f_3$  不一定可导, 比如说  $f(x) = x$ .  $f_4$  不一定可导, 比如说  $f(x) = x, g(x) = -x$ . (2) 均可积.
- 正确. 用反证法, 如果  $f_3(x_0) > f_1(x_0)$ , 由连续性存在  $\epsilon > 0$  和  $x_0$  的某个邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  使得  $f_3(x) > f_1(x) + \epsilon$ .
- 存在. 考虑  $f(x) = \begin{cases} p, & x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ .
- 设  $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$ .  $f_n(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, f(1) = n > 1$ , 再由  $f_n(x)$  单调递增和连续性知有且仅有一个根. 由于  $f_n(\frac{1}{2} + \epsilon) = (\frac{1}{2} + \epsilon) \frac{1 - (\frac{1}{2} + \epsilon)^n}{\frac{1}{2} - \epsilon} \rightarrow \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon} > 1$ , 因此当  $n$  足够大时  $f_n(x_n) = 1 < f_n(\frac{1}{2} + \epsilon) \Rightarrow x_n < \frac{1}{2} + \epsilon$ , 再根据极限的  $N-\epsilon$  定义.
- (1) 注意到  $\frac{x^2 \arcsin x}{1+x^2}$  是奇函数, 因此  $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{1+x^2} dx = 0$ . 从而原积分  $= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 2 - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 2 - (\arctan x)|_{-1}^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$ .

- (2)  $= \int_0^1 (1-x^2)e^{x-1}dx + \int_1^2 (x^2-1)e^{1-x}dx = (-x^2+2x-1)e^{x-1}|_0^1 + (-x^2-2x-1)e^{1-x}|_1^2 = 4 - \frac{8}{e}$ .
- (3)  $= 2 \int_0^\pi \sqrt{1-\sin 2x}dx = 2 \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}dx = 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \sin x - \cos x dx) = 4\sqrt{2}$ .
- (4) 这是奇函数, 积分自然为 0.
- (5)  $= x \log(x + \sqrt{x^2+1})|_0^1 - \int_0^1 x d \log(x + \sqrt{x^2+1}) = \log(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{x^2+1})|_0^1 = \log(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$ .
- (6)  $= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}dx = (\arcsin x - \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2})|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ .
- (7) 令  $x = \sin t$ , 则原积分  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 t dt$ .  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t dt \cos t =$  分部积分  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin^4 t \cos^2 t dt = 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 t dt \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = \frac{5}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt$ . 从而原积分  $= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt =$  分部积分  $= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{32}$ .
- (8)  $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} d \sin x = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \log(1+t^2)|_0^1 = \frac{\log 2}{2}$ .
6.  $\int_0^1 f(x)dx = 0 \Rightarrow$  一个零点  $\alpha$ .  $\int_0^1 (x-\alpha)f(x)dx = 0 \Rightarrow$  另一个零点  $\beta$  (若不存在则  $(x-\alpha)f(x)$  保号).
7. WLOG 令  $a = 0$ . 由定义  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n| < \epsilon; \exists M, \forall n > M, |\lambda^n| < \epsilon$ . 设  $\max_n a_n = M$  (极限存在蕴含含有界). 选择  $n > N + M$ . 从而  $|a_n + \lambda a_{n-1} + \dots + a_N \lambda^{n-N}| < \epsilon |1 + \lambda + \dots + \lambda^{n-N}| < \frac{\epsilon}{1-\lambda}$ , 且  $|a_{N-1} \lambda^{n-N+1} + \dots + a_0 \lambda^n| < M \lambda^{n-N+1} \frac{1-\lambda^{N+1}}{1-\lambda} < \frac{M}{1-\lambda} \epsilon$ . 从而整个求和  $< \frac{M+1}{1-\lambda} \epsilon$ .
8.  $\int_0^1 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{1+x^2})|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$ .
9.  $S = n \times \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 n\theta d\theta = (t = n\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} (t - \frac{1}{2} \sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ .
10. (1) 在区间  $[0, 1]$  上成立  $\sqrt{2} \leq \sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} \leq \frac{3}{2}$ . (2) 注意到  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$ , 从而  $\frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx < \int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{10}$ .
11. 往证  $\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \rightarrow 0$ . 使用  $N$ - $\epsilon$  语言.  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x)-f(0)| < \epsilon$ . 设  $\max |f(x)| = M$ . 从而原式  $= \frac{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_\delta^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3$ .  $|I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^\delta (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \epsilon$ .  $|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} (\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2})^n$ . 注意到  $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$ , 从而可以取足够大的  $n$  使得  $|I_2| < \epsilon$ . 类似地放缩  $I_3$ , 从而  $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$ .
12. 只需证明  $\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} [f(x)-f(0)] dx \rightarrow 0$ .  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x)-f(0)| < \epsilon$ . 设  $\max |f(x)| = M$ . 从而原式  $= \int_{-\delta}^\delta \frac{h}{x^2+h^2} [f(x)-f(0)] dx + \int_{-1}^{-\delta} \frac{h}{x^2+h^2} [f(x)-f(0)] dx + \int_\delta^1 \frac{h}{x^2+h^2} [f(x)-f(0)] dx := I_1 + I_2 + I_3$ . 类似的有  $|I_1| \leq \epsilon \int_{-\delta}^\delta \frac{h}{x^2+h^2} dx < \epsilon \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} dx = \epsilon (\arctan \frac{x}{h})|_{-1}^1 < \pi \epsilon$ .  $|I_2| \leq 2M \int_{-1}^{-\delta} \frac{h}{x^2+h^2} dx \leq 2M(1-\delta) \frac{h}{\delta^2+h^2} < 2M \frac{1-\delta}{\delta^2} h < \epsilon$  只要  $h$  足够接近 0. 同理  $|I_3| < \epsilon$ . 从而  $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$ .

### 7.3 补充 (不要求掌握!)

如何计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x^2} dx$ ? (我们也会写成  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ ). 这个积分和正态分布的归一化因子有关.

证法 1: 使用二元积分.  $(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy =$  二元积分换元公式, 改写成极坐标  $= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \times (-\frac{1}{2} e^{-r^2})|_0^\infty = \pi$ . 从而  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ . 我们回顾标准正态分布  $\mathcal{N}(0, 1)$  的密度函数是  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , 这意味着  $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$  (概率的归一化!).

证法 2: 使用极限逼近. 我们来证明:  $\forall x \in [-A, A], (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \Rightarrow e^{-x^2}$ . 其中,  $\Rightarrow$  表示极限的一致性 (一致收敛). 我们都知  $(1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \rightarrow e^{-x^2}$ , 但是不同的  $x$  可能会有不同的收敛速度. 对于某个  $x_1$ , 可能从第  $N_1$  项开始有  $|f_n(x_1) - f(x_1)| < \epsilon$ , 而对于某个  $x_2$ , 可能从第  $N_2$  项开始有  $|f_n(x_2) - f(x_2)| < \epsilon, \dots$ . 在给出一致收敛的正式定义前, 我们先看几个例子.

例 1:  $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}, f(x) \equiv 0$ . 容易看出来  $f_n \rightarrow f$ , 且对于不同的  $x$ , 他们的收敛步调一致: 因为只要  $n > \frac{1}{\epsilon}$ , 不管  $x$  的值都有  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

例 2:  $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1], f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ . 容易看出来  $f_n \rightarrow f$ , 但对于不同的  $x$ , 他们的收敛步调并不一致: 距离 1 更近的  $x$  收敛速度更慢! 当  $x < \frac{1}{2}$  时, 只要  $n > \log_2(\frac{1}{\epsilon})$  就有  $x^n < \epsilon$ ; 但是当  $x = 1 - \frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})}$  时,

$x^n \approx (1 - \frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})})^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \approx \frac{1}{e}$  距离  $\epsilon$  还远着呢, 更有  $\lim_{x \rightarrow 1-0} x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \rightarrow 1 \Rightarrow \exists \delta, \forall x \in (1 - \delta, 1), x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} > 1 - \epsilon$ . 前面的  $f_n(x)$  已经很小于  $\epsilon$  了, 而后面的一些  $f_n(x)$  甚至还在原地打转 ( $> 1 - \epsilon$ )! 下面我们给出定义.

一致收敛: 我们说在区间  $[a, b]$  上  $f_n(x)$  一致收敛到  $f(x)$  (记作  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ), 意味着  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , 使得  $\forall n > N, \forall x \in [a, b], |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

如果在有限区间上收敛具有一致性, 那么积分和极限顺序可交换. 因为  $|\int_a^b f_n(x) - f(x)dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \epsilon(b-a) \rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b f_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx$ , 即是  $\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim f_n(x)dx$ .

回到原题, 往证  $\forall x \in [-A, A], (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \Rightarrow e^{-x^2}$ . 注意到  $(1 + \frac{x^2}{n})^n \geq 1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k$ . 由带 Lagrange 余项的泰勒展开知  $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!} t^{k+1} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!} t^{k+1}$ , 其中  $f(t) = e^t, \xi \in (0, t)$ . 令  $t = x^2$  知  $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!} x^{2k+2}$ . 从而对于  $\forall x \in [-A, A]$ , 成立估计  $e^{x^2} - 1 - x^2 - \dots - \frac{x^{2k}}{k!} = \frac{e^\xi}{(k+1)!} x^{2k+2} \leq \frac{e^{A^2} A^{2k+2}}{(k+1)!} \rightarrow 0$  当  $k \rightarrow \infty$  时 (利用  $n! > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$ ). 这里的估计有一致性! 从而存在  $K, \forall k > K, x \in [-A, A]$ , 成立  $|e^{x^2} - 1 - x^2 - \dots - \frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$ . 再回头来看  $1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k$  和  $1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}$ . 他们之间的差是一个  $2k$  阶关于  $x$  的多项式, 且  $< \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} x^{2i} < \frac{1}{n} (A^2 + A^4 + \dots + A^{2k})$ . 这里的估计又有一致性! 所以说, 当  $n$  足够大时,  $\forall x \in [-A, A]$ , 成立  $|[1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k] - [1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$ . 整理一下思路,  $\forall \epsilon > 0, \exists K$ , 使得  $\forall k > K, \forall x \in [-A, A]$ , 成立  $|e^{x^2} - 1 - x^2 - \dots - \frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$ .  $\exists N$ , 使得  $\forall n > N, \forall x \in [-A, A]$ , 成立  $|[1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k] - [1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$ . 这样的话就有  $e^{x^2} - (1 + \frac{x^2}{n})^n < e^{x^2} - [1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k] < \{e^{x^2} - [1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}]\} + \{[1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}] - [1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k]\} < 2\epsilon$ . 这样  $(1 + \frac{x^2}{n})^n \Rightarrow e^{x^2}$ . 取倒数后当然也成立, 这和极限的除法是一个道理, 留作练习. 又注意到当  $A \rightarrow \infty$  时,  $\int_A^\infty (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} dx \leq \int_A^\infty (1 + x^2)^{-1} dx = \arctan x|_A^\infty \rightarrow 0$  对  $n$  有一致性. 这说明我们可以取足够大的  $A$  使得  $\int_A^\infty e^{-x^2} dx < \epsilon$ , 且  $\forall n, \int_A^\infty (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} dx < \epsilon$ . 这样一来  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + \tan^2 t)^n} d\sqrt{n} \tan t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \alpha d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . 最后一步使用了 Wallis 公式, 其推导就是通过分部积分计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  和  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ . 从而  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

## 8 致谢

感谢元培学院 21 级本科生徐奕辰同学和另一位不愿意透露姓名的同学, 他们提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2022 秋高等数学 A I 习题课 12 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.