常微分方程

北京大学 龚诚欣
https://wqgcx.github.io/

1 基本概念

1.1 微分方程及其解的定义

【定义 1.1】凡是联系自变量 x，与这个自变量的未知函数 $y=y(x)$，和它的导数 $y'=y'(x)$ 以及直到 n 阶导数 $y^{(n)}=y^{(n)}(x)$ 在内的方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 叫做常微分方程，其中导数实际出现的最高阶数 n 叫作常微分方程的阶。

在常微分方程中，如果右端函数 F 对未知函数 y 和 $y',\cdots,y^{(n)}$ 的全体而言是一次的，则称它是线性常微分方程；否则称它为非线性常微分方程。

【定义 1.2】设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 J 上连续，且有直到 n 阶的导数。如果 $y=\varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$，得到关于 x 的恒等式，则称 $y=\varphi(x)$ 为微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 在区间 J 上的一个解。

【定义 1.3】设 n 阶微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 包含 n 个独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，则称它为通解。这里说 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是独立的，其含义是 Jacobi 行列式 $\dfrac{D[\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}]}{D[C_1,C_2,\cdots,C_n]}\neq 0$。

如果微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的解 $y=\varphi(x)$ 不包括任意常数，则称它为特解。

初值问题（Cauchy 问题）：$\begin{cases} F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \\ \cdots\quad\cdots \\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \end{cases}$。

边值问题（以 2 阶为例）：$\begin{cases} F(x,y,y',y'')=0 \\ y(x_1)=y_1 \\ y(x_2)=y_2 \end{cases}$，其解未必存在或唯一。

1.2 微分方程及其解的几何解释

考虑微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$，$(x,y)\in G\subset R^2$，$x\in I\subset R$。设 $y=\varphi(x)$，$x\in I$ 是方程的一个解。称 $\Gamma=\{(x,\varphi(x))\}$ 为积分曲线。由 $y=\varphi(x)$ 是方程的解，知 $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$。取 $P_0=(x_0,y_0)\in G$，则 $\varphi(x_0)=y_0$，易知 Γ 在 P_0 处切线方程为 $y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)$（与 $\varphi(x)$ 无关）。一般地，对于 $P=(x,y)\in G$，令 $l(P)$ 为以 $f(P)$ 为斜率的线段，得到微分方程在 P 点的线素。令 P 取遍 G，得到线素场或方向场。方程的任何积分曲线 Γ 与它的线素场吻合；反之，若 $\{\Lambda:y=\Psi(x),x\in I\}\subset G$ 并且与方程的线素场吻合，则 Λ 为积分曲线。定义 $L_k=\{f(x,y)=k\}$，称为微分方程的等斜线。

结论：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}\Leftrightarrow$ 求经过 (x_0,y_0) 并且与线素场 $f(x,y)$ 吻合的光滑曲线。

2 初等积分法

2.1 恰当方程

【定义 2.1】考虑微分方程 P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0，P,Q$\in$C(G)。若存在可微函数Φ(x,y)使得 dΦ(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy，则称该方程为恰当方程或全微分方程。

【定理 2.1】设 P(x,y),Q(x,y)在 R={(x,y)| a<x<b,c<y<d}上连续，且 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 也连续，则微分方程 P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 是恰当方程 $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$。此时成立

$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy=Const.$，($x_0$,$y_0$)$\in$R。

附注：求解恰当方程的关键是构造相应全微分的原函数Φ(x,y)。在单连通区域 R 上，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 保证了曲线积分 $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与积分路径无关。

2.2 变量分离的方程

【定义 2.2】考虑微分方程 P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0。如果函数 P(x,y)和 Q(x,y)均可分别表示为 x 的函数与 y 的函数的乘积，则称该方程为变量分离的方程。

考虑 X(x)Y_1(y)dx+X_1(x)Y(y)dy=0。当 X_1(x)Y_1(y)≠0 时，有 $\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy=0$，从而得到通解 $\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\int\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy=C$。当 X_1(a)=0 时，注意到 x=a 也是原方程的解，但可能不是新方程的解。于是有结论：

方程 X(x)Y_1(y)dx+X_1(x)Y(y)dy=0 的解为：$\begin{cases}方程\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy=0的解 \\ （特解:） \\ x=a_i，a_i是X_1(x)的根 \\ y=b_j，b_j是Y_1(y)的根\end{cases}$。

2.3 一阶线性方程

本节讨论形如 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 的微分方程的解，其中 $p(x),q(x)$$\in$C(a,b)。其中若 $q(x)=0$ 称该方程齐次，否则称为非齐次。

先讨论齐次线性方程的通解。$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}+p(x)dx=0\Rightarrow y=Ce^{-\int p(x)dx}$。

再讨论非齐次线性方程的通解。

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\Rightarrow e^{\int p(x)dx}dy+e^{\int p(x)dx}p(x)ydx=e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

$$\Rightarrow d\left(e^{\int p(x)dx}y\right)=d\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx\right)\Rightarrow e^{\int p(x)dx}y=\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C$$

$$\Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx\right)。$$

为确定起见，把不定积分写成变上限积分，即 $y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\left(C+\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{s}p(t)dt}q(s)ds\right)$。

考虑 Cauchy 问题，得到初值问题的解： $y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{s}p(t)dt}q(s)ds\right)$。

性质：1. 齐次线性方程的解或者恒等于 0，或者恒不等于 0；
2. 线性方程的解是整体存在的；
3. 齐次线性方程的任何解的线性组合仍是它的解，齐次线性方程的任一解和非齐次线性方程的任一解之和是非齐次线性方程的解，非齐次线性方程的任意两解之差必是齐次线性方程的解；
4. 非齐次线性方程的任一解与齐次线性方程的通解之和构成非齐次线性方程的通解；
5. 线性方程的初值问题的解（整体）存在且唯一。

2.4 初等变换法

2.4.1 齐次方程

如果微分方程 P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 中的函数 P(x,y)和 Q(x,y)都是 x 和 y 同次齐次函数，则称为齐次方程。对于齐次方程，标准的变量替换是 y = ux。从而 P(x,y) = P(x,ux) = x^mP(1,u)，Q(x,y) = Q(x,ux) = x^mQ(1,u)，代回原方程得变量分离方程。
注：齐次方程可以写为 dy/dx=Φ(y/x)；变换后 x = 0 是新方程的解，但不一定是原方程的解，因为此时 y = ux 的变换不可逆。

讨论形如 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l}\right)$ 的微分方程。当 $c=l=0$ 时，这是齐次方程；当 c,l 不全为 0 时，若 $an-bm\neq 0$，则选择 α,β 满足 $\begin{cases}a\alpha+b\beta+c=0\\ m\alpha+n\beta+l=0\end{cases}$，再做平移 $x=\xi+\alpha$ 和 $y=\eta+\beta$，得到齐次方程 $\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{m\xi+n\eta}\right)$；若 $an-bm=0$，则原方程化为 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+l}\right)$，取 $v=ax+by$，得到变量分离方程 $\frac{dv}{dx}=a+bf\left(\frac{v+c}{\lambda v+l}\right)$。

2.4.2 伯努利方程

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n\Rightarrow(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)p(x)y^{1-n}=(1-n)q(x)$，令 $z=y^{1-n}$，则

方程转化为一阶线性方程$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$。

2.4.3 里卡蒂方程

假如一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的右端函数$f(x,y)$是一个关于y的二次多项式，则称此方程为二次方程，即是$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$，其中$p(x),q(x),r(x)$在区间 I 上连续，且$p(x)$不恒为 0。方程又叫做里卡蒂方程。

【定理 2.2】设已知里卡蒂方程的一个特解$y=\varphi_1(x)$，则可用积分法求得它的通解。

【证明】对方程作变换$y=u+\varphi_1(x)$，化简得$\frac{du}{dx}=[2p(x)\varphi_1(x)+q(x)]u+p(x)u^2$，这是一个伯努利方程。

【定理 2.3】设里卡蒂方程$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m$，其中$a\neq 0,b,m$是常数，又设$x\neq 0$且$y\neq 0$，则当$m=\frac{-4k}{2k\pm 1},(k=0,1,2,\cdots,+\infty)$时，方程可通过适当的变换化为变量分离方程。

【证明】对$m=0$，其本身就是变量分离方程。

对$m=-2$，作变换$z=xy$，得到$\frac{dz}{dx}=\frac{b+z-z^2}{x}$。

对$m=\frac{-4k}{2k+1}$，作变换$x=\xi^{\frac{1}{m+1}},y=\frac{b}{m+1}\eta^{-1}$，得到$\frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=\frac{b}{(m+1)^2}\xi^n$，其中$n=\frac{-4k}{2k-1}$；再作变换$\xi=\frac{1}{t},\eta=t-zt^2$，得到$\frac{dz}{dt}+z^2=\frac{b}{(m+1)^2}t^l$，其中$l=\frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$。和$m$相比，这就完成了降次，因此可以重复$k$次变为$m=0$的情形。

2.5 积分因子法

考虑方程 P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0，我们尝试寻找一个可微的非零函数μ=μ(x,y)，使得方程μ(x,y)P(x,y)dx+μ(x,y)Q(x,y)dy=0 成为恰当方程。这是函数μ=μ(x,y)叫做方程的一个积分因子。这相当于求解$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}\Leftrightarrow P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu$。

虽然从理论上说偏微分方程的解是存在的，但对它的求解又要归结到对原来的方程求解，因此这通常是不可取的。但对于特殊情形，这却是可行的。

若积分因子μ=μ(x)，则可以推出$\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu(x)}{dx}=\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)$，这表明 RHS 只依赖于$x$，而与$y$无关。反过来，若 RHS=G($x$)，则可以推出$e^{\int G(x)dx}$是一个积分因子。

【定理 2.4】微分方程 P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 有一个只依赖于x的积分因子的充要

条件是表达式$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)$只依赖于 x，而不依赖于 y。此时的一个积分因子是$e^{\int G(x)dx}$。

【定理 2.5】微分方程 P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 有一个只依赖于 y 的积分因子的充要条件是表达式$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)$只依赖于 y，而不依赖于 x。此时的一个积分因子是$e^{\int H(y)dy}$。

【定理 2.6】若μ=μ(x,y)是方程 P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 的一个积分因子，使得μP(x,y)+μQ(x,y)dy=dΦ(x,y)，那么μ(x,y)g(Φ(x,y))也是一个积分因子，其中 g(·)是任一可微的(非零)函数。

分组积分因子法：设(P_1dx+Q_1dy)+(P_2dx+Q_2dy)=0，其中第一组和第二组各有积分因子μ_1和μ_2，使得$\mu_1P_1dx+\mu_1Q_1dy=d\Phi_1$,$\mu_2P_2dx+\mu_2Q_2dy=d\Phi_2$，那么对于任意可微函数 g_1 和 g_2，$\mu_1g(\Phi_1)$是第一组的积分因子，$\mu_2g(\Phi_2)$是第二组的积分因子。若能选取合适的 g_1,g_2 使得$\mu_1g(\Phi_1)=\mu_2g(\Phi_2)$，则$\mu=\mu_1g(\Phi_1)$就是原方程的积分因子。

若 P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 是齐次方程，则$\mu(x,y)=\frac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$是一个积分因子。

2.6 应用举例

【例 1】求已知曲线族的等角轨线。假设在(x,y)平面上由方程 f(x,y,C)=0 给出一个以 C 为参数的曲线族。我们设法求出另一个曲线族 g(x,y,K)=0，其中 K 为参数，使得其中任一条曲线与给定曲线族中的每一条曲线相交成定角α。称这样的曲线族为已知曲线族的等角轨线族。当α=π/2 时，称为正交轨线族。

假设 $f_C'\neq 0$，则$\begin{cases} f(x,y,C)=0 \\ f_x'(x,y,C)dx+f_y'(x,y,C)dy=0 \end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=H(x,y)$，其中$H(x,y)=-\frac{f_x'(x,y,C(x,y))}{f_y'(x,y,C(x,y))}$，$C(x,y)$是利用隐函数存在定理得到的结果。

当α≠π/2 时，tanα$=\frac{y'-y_1'}{1+y'y_1'}$，得到$\frac{y'-\tan\alpha}{y'\tan\alpha+1}=H(x,y)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{H(x,y)+\tan\alpha}{1-H(x,y)\tan\alpha}$。

当α=π/2 时，$y'=-\frac{1}{y_1'}$，得到$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{H(x,y)}$。

【例 2】对人口总数发展趋势的估计。设 N(t)表示某一个国家在时间 t 的人口总数，并视为光滑函数。记 r=r(t,N)为人口增长率。由于在Δt 时间内的平均增长率为$\frac{\Delta N}{\Delta t\cdot N}$，故得到微分方程$\frac{dN}{dt}=rN$，（若 r 为常数）解为$N=N_0e^{k(t-t_0)}$（不符合常识！）。模型改进为$r=a-bN$，其中 a,b 是生命系数。a≈0.029，而 b 取决

于经济条件。得到微分方程 $\frac{dN}{dt}=(a-bN)N$，解为 $N=\frac{aN_0e^{a(t-t_0)}}{a-bN_0+bN_0e^{a(t-t_0)}}$。

3 存在和唯一性定理

3.1 皮卡存在和唯一性定理

【定理 3.1】设方程(E) $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$， $f(x,y)$ 在 $R=\{|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$ 内连续，对 y 满足 Lipschitz 条件，则方程在 $I=[x_0-h,x_0+h]$上有且只有一个解，这里 $h=\min\{a,b/M\}$，$M>\max|f(x,y)|$。

注 1：$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 如果 $f(x,y)$在区域 $D\subset R^2$ 内连续并且对 y 有连续偏导数，则经过 D 内每一点有且仅有一个解。

注 2：若 $f(x,y)$在区域 G 内连续，则经过 G 内每一点有一个解，但唯一性未必成立。

寻找更弱条件：$f(x,y)$在区域 G 内连续，而且满足$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant F(|y_1-y_2|)$，其中 $F(r)>0$，是 $r>0$ 的连续函数，而且$\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\infty$，$r_1$ 为常数，则称 $f(x,y)$在 G 内对 y 满足 Osgood 条件。

【定理 3.2】若 $f(x,y)$在区域 G 内对 y 满足 Osgood 条件，则方程(E)在 G 内经过每一点的解都是唯一的。

3.2 佩亚诺存在定理

3.2.1 欧拉折线

用简单的折线来近似地描绘所要寻求的积分曲线。考虑微分方程(E)。将区间$|x-x_0|\leqslant h$ 分成 $2n$ 等份，则 $2n+1$ 个分点为 $x_k=x_0+kh_n(k=0,\pm1,\cdots,\pm n)$。从初值点 $P_0(x_0,y_0)$ 出发先向右作折线，延长在 P_0 的线束 $l(P_0)$交 $x=x_1$ 于 $P_1(x_1,y_1)$，则 $y_1=y_0+f(x_0,y_0)$。再在 P_1 点延长线束 $l(P_1)$交 $x=x_2$ 于 $P_2(x_2,y_2)$。如此类推，我们作出了一条折线$[P_0,P_1,\cdots,P_n]$。以同法向左作出一条折线$[P_{-n},P_{-n+1},\cdots,P_0]$。称$\gamma_n$ 为初值问题的欧拉折线。从线素场的几何意义可以看出，把欧拉折线作为初值问题的一个近似解是合理的，而且可以猜想，只要增大 n，就能提高近似的精度。这在理论上需要证明欧拉折线在区间$|x-x_0|\leqslant h$ 上是收敛的。

3.2.2 Ascoli 引理

设函数序列在有限闭区间 I 上是一致有界和等度连续的，则可以选取它的一个子序列，使它在区间 I 上是一致收敛的。

3.2.3 佩亚诺存在定理

【引理 3.1】欧拉序列在区间$|x-x_0|\leqslant h$ 上至少有一个一致收敛的子序列。

【引理 3.2】欧拉折线在区间$|x-x_0|\leqslant h$ 上满足 $\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_n(x))dx+\delta_n(x)$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n(x)\rightrightarrows 0$。

【定理 3.3】设函数 $f(x,y)$在矩形区域 R 内连续，则微分方程(E)在区间$|x-x_0|\leqslant h$

上至少有一个解 $y=y(x)$。

注 1：由佩亚诺定理的证明可知，初值问题的欧拉序列的任何一致收敛子序列都趋于微分方程的某个解。因此，如果微分方程解是唯一的，那么它的欧拉序列就一致收敛到那个唯一的解。

注 2：佩亚诺定理在相当广泛的条件下保证了初值问题解的存在性，而不保证唯一性。

注 3：一般来说，如果不要求 $f(x,y)$ 的连续性，那么初值问题可能是无解的。

3.3 解的延伸

【定理 3.4】区域 $G\subset R^2$，$P_0\in G$，Γ 为微分方程(E)经过 P_0 的任一积分曲线，则 Γ 可在 G 内延拓到边界，即对于任意有界闭区域 G_1，$P_0\in G_1\subset G$，Γ 可延拓到 G_1 之外。

推论：设 $f(x,y)$ 在 G 内连续，对 y 满足局部 Lipschitz 条件（对区域 G 内任一点 q，存在以 q 点为中心的一个矩形区域 $Q\subset G$，使得在 Q 内 $f(x,y)$ 对 y 满足 Lipschitz 条件），则(E)经过 G 内每一点 P_0，存在唯一积分曲线 Γ 并且 Γ 可在 G 内延拓到边界。

【例 1】微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 任一解的存在区间都是有界的。

不妨设最大存在区间是 $[x_0,\beta_0)$，且存在 x_1 使得 $[x_1,\beta_0)\subset[x_0,\beta_0)$，那么有 $\dfrac{y'}{x_1^2+y^2}\geq 1$，从 x_1 到 x 积分得到 $x-x_1\leqslant\pi/x_1$，从而解存在区间有界。

【例 2】微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=(x-y)e^{xy^2}$ 任一右行解的存在区间延伸到无穷。

利用线素场定性分析。

【定理 3.5】设微分方程(E)，其中函数 $f(x,y)$ 在条形区域 $S:\alpha<x<\beta$，$-\infty<y<\infty$ 内连续，而且满足不等式 $|f(x,y)|\leqslant A(x)|y|+B(x)$，其中 $A(x),B(x)\geqslant 0$ 且在区间 (α,β) 上连续。则微分方程每一个解都以 (α,β) 为最大存在区间。

3.4 比较定理及其应用

【定理 3.6】第一比较定理：设 $f(x,y),F(x,y)\in C(G)$，$G\subset R^2$，并且 $f(x,y)<F(x,y)$。又设函数 $y=g(x),y=G(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上分别是微分方程

$E_1=\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$,$E_2=\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=F(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的解，则 $\begin{cases}g(x)<G(x),x_0<x<b\\ g(x)>G(x),a<x<x_0\end{cases}$。

如果在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上 E 有两个解 $y=Z(x)$ 和 $y=W(x)$ 使得 E 的任一解 $y=y(x)$ 都满足 $W(x)\leqslant y(x)\leqslant Z(x)$，则称 $W(x)$ 是 E 的最小解，$Z(x)$ 是 E 的最大解。

【定理 3.7】存在正数 $\sigma<h$，使得在区间 $|x-x_0|\leqslant\sigma$ 上，初值问题 E 有最小解和最大解。

【定理 3.8】第二比较定理：设 $f(x,y),F(x,y)\in C(G)$，$G\subset R^2$，并且 $f(x,y)\leqslant F(x,y)$。又设函数 $y=g(x),y=G(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上分别是微分方程 E_1,E_2 的解，并且 $y=g(x)$ 是 E_1 的右行最小解和左行最大解（或者：$y=G(x)$ 是 E_2 的右行最大解和左行最小解），则 $\begin{cases}g(x)\leq G(x),x_0<x<b\\ g(x)\geq G(x),a<x<x_0\end{cases}$。

4 奇解

4.1 一阶隐式微分方程

讨论一阶隐式方程 $F(x,y,y')=0$ 的几个特殊解法。

4.1.1 微分法

假设可解出 $y=f(x,p), p=y'$并且 $f\in C^1$，则 $p=\dfrac{dy}{dx}=f_x'(x,p)+f_p'(x,p)\dfrac{dp}{dx}$，即是 $[f_x'(x,p)-p]dx+f_p'(x,p)dp=0$。设方程有解 $p=u(x,C)$，则 $y=f(x,u(x,C))$是原方程的解。若方程有特解 $p=u(x)$，则 $y=f(x,u(x))$是原方程的特解。若 $x=v(x,C)$是方程的解，则 $x=v(p,C),y=f(v(p,C),p)$是原方程的通解。

4.1.2 参数法

设微分方程不明显包含自变量，即 $F(y,p)=0$。作为变元 y 和 p 之间的联系，方程在(y,p)平面上一般表示若干条曲线。设 $y=g(t),p=h(t)$是其中一条，且 $h,g,g'\in C^1$，则 $\dfrac{dy}{dx}=p\Rightarrow dx=\dfrac{1}{p}dy=\dfrac{g'(t)dt}{h(t)}\Rightarrow x=\int\dfrac{g'(t)}{h(t)}dt+C$。通解为 $x=\int\dfrac{g'(t)}{h(t)}dt+C$,$y=g(t)$。上面的参数法也适用于方程 $F(x,p)=0$。

一般而言，$F(x,y,p)$在三维空间(x,y,p)中表示曲面。设 $x=f(u,v),y=g(u,v),z=h(u,v)$。由 $dy=pdx$，知 $g_u'du+g_v'dv=h(u,v)(f_u'du+f_v'dv)$，即 $M(u,v)du+N(u,v)dv=0$。设 $v=U(u,C)$是方程的解，则原方程的通解为 $x=f(u,U(v,C)),y=g(u,U(v,C))$。

4.2 奇解

【定义 4.1】设 $F(x,y,p)=0$ 有一个特解$\Gamma:y=g(x)$。若对$\forall Q\in\Gamma$，在 Q 的任意邻域中有一个解在 Q 与Γ相切，则称Γ为奇解。

【定理 4.1】设 $F(x,y,p)\in C(G)$，$F_y',F_p'\in C(G)$，若 $y=g(x)$是 $F(x,y,p)=0$ 的奇解，并且$(x,g(x),g'(x))\in G$，则奇解满足一个称之为 p-判别式的联立方程：$F(x,y,p)=0$，$F_p'(x,y,p)=0$。设从中消去 p 得到方程$\Delta(x,y)=0$，则称由此所决定的曲线为方程的 p-判别曲线。因此，微分方程的奇解是一条 p-判别曲线。

【定理 4.2】设 $F(x,y,p)\in C^2(G)$，且 $F(x,y,p)=0$ 的 p-判别式消去 p 后得到的函数 $y=g(x)$是方程的解，满足 $F_y'(x,g(x),g'(x))\neq0,F_{pp}''(x,g(x),g'(x))\neq0,F_p(x,g(x),g'(x))=0$。则 $y=g(x)$是奇解。

4.3 包络

【定义 4.2】设在平面上有一条连续可微的曲线Γ。如果对于任一点 $q\in\Gamma$，在曲线族 $K(C):V(x,y,C)=0$ 中都有一条曲线 $K(C^*)$通过 q 点并在该点与Γ相切，而且 $K(C^*)$在 q 点的某一邻域内不同于Γ，则称曲线Γ为曲线族的一支包络。

【定理 4.3】设 $F(x,y,p)=0$ 有通积分 $U(x,y,C)=0$，又设曲线族有包络$\Gamma:y=\varphi(x)$，则包络 $y=\varphi(x)$是微分方程的奇解。

【定理 4.4】设Γ是曲线族 $K(C):V(x,y,C)=0$ 的一支包络，则它满足如下的 C-判别式：$V(x,y,C)=0$，$V_C'(x,y,C)=0$。

【定理 4.5】设由曲线族 $K(C):V(x,y,C)=0$ 的 C-判别式确定一支连续可微且不含于族的曲线 $A:x=f(C),y=g(C)$，而且满足非退化性条件$(f'(C),g'(C))\neq(0,0)$，(V_x',V_y')

$\neq(0,0)$，其中 $V_x'=V_x'(f(\mathrm{C}),g(\mathrm{C}),\mathrm{C})$，$V_y'=V_y'(f(\mathrm{C}),g(\mathrm{C}),\mathrm{C})$。则 A 是曲线族的一支包络。

5 高阶微分方程

5.1 几个例子

设 n 阶自治微分方程 $F(y,y',\cdots,y^{(n)})=0$，令 $z=y'$，得到 $n-1$ 阶方程 $F_1(y,z,\cdots,z^{(n-1)})=0$，其中 z 是未知函数，y 是自变量。

平面(x,y)称为相平面，轨线分布图称为相图。

例：单摆方程、悬链线方程、二体问题。

5.2 *n* 维线性空间中的微分方程

设 n 阶微分方程式 $\dfrac{d^n y}{dx^n}=F(x,y,\dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$，令 $y_1=y,y_2=\dfrac{dy}{dx},\cdots,y_n=\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$，

则微分方程等价于下列 n 阶标准微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=y_2,\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx}=y_n,\\ \dfrac{dy_n}{dx}=F(x,y_1,\cdots,y_n).\end{cases}$。

这类微分方程可以写成如下标准形式：$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,\cdots,y_n),\\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,\cdots,y_n),\\ \quad\cdots\quad\quad\cdots\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,\cdots,y_n).\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$。

Lipschitz 条件：$|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{z})|\leqslant L|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|$。可以推广皮卡定理和佩亚诺定理。

如果方程中函数 $f_1,\cdots,f_n$ 是关于 $y_1,\cdots,y_n$ 的线性函数，$f_k(x,y_1,\cdots,y_n)=\Sigma a_{ik}(x)y_i+e_k(x)$，则称微分方程是线性的。线性微分方程组可以写成向量形式 $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{e}(x)$。

结论：若 $A(x),\boldsymbol{e}(x)\in\mathrm{C}(a,b)$，则微分方程 $\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{e}(x)\\ \boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0\end{cases}$ 解在(a,b)上存在唯一。

5.3 解对初值和参数的连续依赖性

考虑初值问题 $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$ 关于初值 $(x_0,\boldsymbol{y}_0)$ 和$\boldsymbol{\lambda}$的依赖性问题。

先考虑连续依赖性。作变换 $t=x-x_0$，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0$，则 $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{f}(t+x_0,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0$。

不失一般性，我们只讨论初值问题 $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{0}$ 对参量$\boldsymbol{\lambda}$的依赖性。

【定理 5.1】设 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$在区域 G:$|x|\leqslant a,|\boldsymbol{y}|\leqslant b,|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0|\leqslant c$ 上连续，而且对 $\boldsymbol{y}$ 满足李氏条件，令 M=$\max_G|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})|$，$h=\min(a,b/M)$，则初值问题解 $\boldsymbol{y}=\varphi(x,\boldsymbol{\lambda})$在区域 D:$|x|\leqslant h,|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0|\leqslant c$ 上是连续的。

推论：设 $f(x,\boldsymbol{y})\in C(R)$，R:$|x-x_0|\leqslant a,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|\leqslant b$，对 $\boldsymbol{y}$ 满足李氏条件，则微分方程初值问题 $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=f(x,\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{y}=\varphi(x,\boldsymbol{\eta})$在区域 Q:$|x-x_0|\leqslant \dfrac{h}{2},|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{y}_0|\leqslant \dfrac{b}{2}$ 上是连续的。

【定理 5.2】设 n 维向量函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$在$(x,\boldsymbol{y})$空间内某个开区域 G 上是连续的，而且对 $\boldsymbol{y}$ 满足局部李氏条件。假设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(x)$是微分方程 $d\boldsymbol{y}/dx=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$是微分方程的一个解，令它的存在区间为 J。在区间 J 内任取一个有界闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$，则存在$\delta>0$，使得$\forall(x_0,\boldsymbol{y}_0)$，$a\leqslant x_0\leqslant b$，$|\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{g}(x_0)|\leqslant\delta$，初值问题 $d\boldsymbol{y}/dx=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{g}(x_0)$的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x,x_0,\boldsymbol{y}_0)$也至少在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上存在，并且它在闭区域 $a\leqslant x,x_0\leqslant b,|\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{g}(x_0)|\leqslant\delta$上是连续的。

5.4 解对初值和参数的连续可微性

【定理 5.3】设 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$在区域 G:$|x|\leqslant a,|\boldsymbol{y}|\leqslant b,|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0|\leqslant c$ 上连续，而且对 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}$有连续的偏导数。则微分方程 $\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})\\ \boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{0}\end{cases}$ 的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x,\boldsymbol{\lambda})$在区域 D：$|x|\leqslant h,|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0|\leqslant c$ 上是连续可微的。

推论：设 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})\in C(R)$，R:$|x-x_0|\leqslant a,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|\leqslant b$，对 $\boldsymbol{y}$ 有连续的偏导数。则初值问题 $\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=f(x,\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{y}=\varphi(x,\boldsymbol{\eta})$在区域 Q:$|x-x_0|\leqslant \dfrac{h}{2},|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{y}_0|\leqslant \dfrac{b}{2}$ 上是连续可微的。

6 线性微分方程组

6.1 一般理论

考虑线性微分方程组$\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$。如果$\boldsymbol{f}(x)=0$，称为齐次线性微分方程组；否则称为不齐次的。

存在唯一性定理：线性微分方程组满足$\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$的解在区间$a<x<b$上存在唯一。

6.1.1 齐次线性微分方程组

【引理 6.1】设$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1(x)$和$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_2(x)$是齐次线性方程组的解$\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$，则$\boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{y}_1(x)+C_2\boldsymbol{y}_2(x)$也是解。从而齐次线性方程组的解所组成的集合 S 构成线性空间。

【引理 6.2】线性空间 S 是 n 维的，这里 n 是微分方程组的阶数。

【定理 6.1】其次线性微分方程组在区间 $a<x<b$ 上有 n 个线性无关的解$\boldsymbol{f}_1(x),\cdots,\boldsymbol{f}_n(x)$，称为基本解组，而且它的通解为$\boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{f}_1(x)+\cdots+C_n\boldsymbol{f}_n(x)$。

假设已知$\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$是微分方程组的 n 个解称行列式 $W(x)=|(\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x))|$为解组的朗斯基行列式。

【引理 6.3】朗斯基行列式满足刘维尔公式：$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}tr[A(x)]dx}$。

【定理 6.2】解组$\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$线性无关当且仅当$\exists\, W(x_0)\neq 0$，$a<x_0<b$。

【推论 6.1】解组$\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$线性相关当且仅当 $W(x)=0$ 在(a,b)上恒成立。

对于解组$\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$，令矩阵 $\mathrm{Y}=(y_{ij}(x))_{n\times n}$称为齐次线性方程组的解矩阵，从而$\dfrac{d\mathrm{Y}(x)}{dx}=A(x)\mathrm{Y}(x)$。若$\boldsymbol{y}_1(x),\cdots,\boldsymbol{y}_n(x)$是基本解组，称相应解矩阵是基本解矩阵，它的通解是$\boldsymbol{y}=\mathrm{Y}(x)\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{c}$ 是 n 为任意常数列向量。

【推论 6.2】任意两个基本解矩阵之间相差一个非奇异常数矩阵。

6.1.2 非齐次线性微分方程组

【引理 6.4】如果$\Phi(x)$是相应齐次线性微分方程组的一个基解矩阵，$f^*(x)$是一个特解，则任一解$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(x)$可以表示为$\boldsymbol{f}(x)=\Phi(x)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{f}^*(x)$。

【引理 6.5】设$\Phi(x)$是相应齐次线性微分方程组的一个基解矩阵，则$\boldsymbol{f}^*(x)=\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$给出非其次线性微分方程组的一个特解。

【定理 6.3】设$\Phi(x)$是相应齐次线性微分方程组的一个基解矩阵，则非其次线性微分方程组在区间 $a<x<b$ 上的通解可以表示为$\boldsymbol{y}=\Phi(x)\left(\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds\right)$，其中 $\boldsymbol{c}$ 是 n 维的任意常数列向量；而且非其次线性微分方程组满足初值条件$\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$的解为$\boldsymbol{y}=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$。

6.2 常系数线性微分方程组

考虑常系数线性微分方程组$\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$。

6.2.1 矩阵指数函数的定义和性质

令 M 表示由一切 n 阶实数矩阵组成的集合。对 M 中的任何元素，$\|A\|:=\Sigma_{i,j}|a_{ij}|$。$(M,\|\cdot\|)$是完备的度量空间，且$\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$，$\|A^k\|\leqslant\|A\|^k$。

【命题 1】矩阵 A 的幂级数 $e^A=E+A+A^2/2!+\cdots+A^k/k!+\cdots$是绝对收敛的。

【命题 2】1° AB=BA，则 $e^{A+B}=e^Ae^B$；2° $(e^A)^{-1}=e^{-A}$；3° P 非奇异，$e^{PAP^{-1}}=Pe^AP^{-1}$。

6.2.2 常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵

【定理 6.4】矩阵指数函数$\Phi(x)=e^{xA}$是常系数齐次线性微分方程组的一个标准基解矩阵（满足$\Phi(0)=I$）。

【推论 6.3】常系数非齐次线性微分方程组的通解为 $\boldsymbol{y}=e^{xA}\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)A}\boldsymbol{f}(s)ds$。

6.2.3 利用若尔当标准型求基解矩阵

对于每一个 n 阶矩阵 A，存在 n 阶非奇异矩阵 P，使得 $A=PJP^{-1}$，其中 J 是若尔当标准型。每一个若尔当标准型可以分解为 $J_i=\lambda_iI+B$，其中 B 是幂零矩阵。从而 $e^{xA}=e^{xPJP^{-1}}=Pe^{xJ}P^{-1}$ 提供了计算基解矩阵的一个方法。

6.2.4 待定指数函数法

一、A 只有单的特征根，则$\Phi(x)=e^{xA}P=P\mathrm{diag}(e^{\lambda_1x},\cdots,e^{\lambda_nx})$，$P=\Phi(0)$，$e^{xA}=\Phi(x)\Phi^{-1}(0)$。

设 $P=(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n)$，则基解矩阵$\Phi(x)=(e^{\lambda_1x}\boldsymbol{r}_1,\cdots,e^{\lambda_nx}\boldsymbol{r}_n)$。

【引理 6.6】齐次微分方程组有非零解 $\boldsymbol{y}=e^{\lambda x}\boldsymbol{r}$，当且仅当$\lambda$是矩阵 A 的特征根，而 $\boldsymbol{r}$ 是与λ相应的特征向量。

【定理 6.5】设 n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵函数$\Phi(x)=(e^{\lambda_1x}\boldsymbol{r}_1,\cdots,e^{\lambda_nx}\boldsymbol{r}_n)$是齐次微分方程组的一个基解矩阵，其中 $\boldsymbol{r}_i$ 是 A 的与λ_i相应的特征向量。

【定理 6.5'】设 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 是矩阵 A 的 n 个线性无关的特征向量，则矩阵函数$\Phi(x)=(e^{\lambda_1x}\boldsymbol{r}_1,\cdots,e^{\lambda_nx}\boldsymbol{r}_n)$是齐次微分方程组的一个基解矩阵，其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是矩阵 A 的与 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 相应的特征根。

设齐次微分方程组有一个复值解 $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{u}(x)+i\boldsymbol{v}(x)$，则 $\boldsymbol{y}_1$ 的共轭 $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{u}(x)-i\boldsymbol{v}(x)$也是一个复值解，从而它们的实部 $\boldsymbol{u}(x)$和虚部 $\boldsymbol{v}(x)$都是方程组的实值解。这样，我们从一对共轭的复值解可以得到两个实值解，最后得到 n 个线性无关的实值解。

二、A 有相重的特征根，A 的互不相同的特征根为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，相应的重数分别为 $n_1,\cdots,n_s$。可以推出，与λ_i相关的 n_i 列都具有形式：$\boldsymbol{y}=e^{\lambda_ix}\left(\sum_{k=0}^{n_i-1}\frac{x^k}{k!}\boldsymbol{r}_k\right)$。

【引理 6.7】设λ_i是矩阵 A 的 n_i 重特征根，则齐次微分方程组有形如上式的非零解的充要条件是：$\boldsymbol{r}_0$ 是齐次线性代数方程组$(A-\lambda_iE)^{n_i}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$的一个非零解，而 $\boldsymbol{r}_1,\cdots$是由下面的关系式逐次确定的：$\boldsymbol{r}_i=(A-\lambda_iE)\boldsymbol{r}_{i-1}$。

【定理 6.6】设 n 阶实值常数矩阵 A 在复数域中互不相同的特征根是$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，而且相应的重数分别为 $n_1,\cdots,n_s$。则常系数齐次线性微分方程组有基解矩阵$\Phi(x)=$

$$\left(e^{\lambda_1 x}P_1^{(1)}(x),\cdots,e^{\lambda_1 x}P_{n_1}^{(1)}(x),\cdots,e^{\lambda_s x}P_1^{(s)}(x),\cdots,e^{\lambda_s x}P_{n_s}^{(s)}(x)\right)$$

其中 $P_j^{(i)}(x)=\boldsymbol{r}_{j0}^{(i)}+\frac{x}{1!}\boldsymbol{r}_{j1}^{(i)}+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\boldsymbol{r}_{jn_i-1}^{(i)}$ 是与λ_i相应的第 j 个向量多项式，而

$\boldsymbol{r}_{10}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{r}_{n_i 0}^{(i)}$ 是齐次线性代数方程组 $(\mathrm{A}-\lambda_i\mathrm{E})^{n_i}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 的 n_i 个线性无关的解，且 $\boldsymbol{r}_{jk}^{(i)}$ 是

把 $\boldsymbol{r}_{j0}^{(i)}$ 代替迭代式中的 $\boldsymbol{r}_0$ 而依次得出的 $\boldsymbol{r}_k$。

6.3 高阶线性微分方程式

讨论形如 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$ 的微分方程式。可以引进新的未知函

数 $y_1=y,y_2=y',\cdots,y_n=y^{(n-1)}$，则方程等价于 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=A(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 。

6.3.1 高阶线性微分方程的一般理论

假设函数组 $m_1(x),\cdots,m_n(x)$分别是原齐次线性微分方程的 n 个解，则线性微分方程组的 n 个相应的解为$(m_1(x),m_1'(x),\cdots,m_1^{(n-1)}(x))^{\mathrm{T}},\cdots$。它们的朗斯基行列式为 $W(x)$。

【定理 6.1】齐次线性微分方程在区间 $a<x<b$ 上存在 n 个线性无关的解，通解是它们的线性组合。

【定理 6.2】齐次线性微分方程线性无关的充要条件是它们的朗斯基行列式在 $a<x<b$ 上恒不为零。

【定理 6.3】设 $m_1(x),\cdots,m_n(x)$是齐次线性微分方程的基本解组，则非齐次线性微分方程的通解为 $y=C_1m_1(x)+\cdots+C_nm_n(x)+m^*(x)$，而 $m^*(x)=\sum_{k=1}^{n}m_k(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{W}_k(s)}{\mathrm{W}(s)}f(s)ds$

是方程的一个特解。这里 $\mathrm{W}(x)$是朗斯基行列式，$\mathrm{W}_k(x)$是 $\mathrm{W}(x)$中第 n 行第 k 列元素的代数余子式。

6.3.2 常系数高阶线性微分方程

考虑线性微分方程 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$，写成 $d\boldsymbol{y}/dx=\mathrm{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$的形式。先求基解矩阵，$\det(\lambda\mathrm{E}-\mathrm{A})=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$，称为特征方程。

【定理 6.6】设特征方程在 C 中有 s 个根$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，重数为 $n_1,\cdots,n_s$，则函数组

$e^{\lambda_1 x},xe^{\lambda_1 x},\cdots,x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x},\cdots,e^{\lambda_s x},xe^{\lambda_s x},\cdots,x^{n_s-1}e^{\lambda_s x}$ 是基本解组。

待定系数法：设非齐次线性微分方程常数项是 $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}$,$P_m(x)$是 m 次多项式，则有$\varphi^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\mu x}$形式的特解，其中 $Q_m(x)$是 m 次多项式(系数待定)，μ是特征方程的 k 重特征根。又设 $f(x)=[A_m(x)\cos(\beta x)+B_l(x)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$，其中 $A_m(x)$和 $B_l(x)$分别是 m 次和 l 次多项式，则有$\varphi^*(x)=x^k[C_n(x)\cos(\beta x)+D_n(x)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$形式的特解，其中 $C_n(x)$和 $D_n(x)$是 n 次的多项式(系数待定)，$n=\max\{m,l\}$，k 是$\alpha\pm i\beta$作为特征方程的特征根的重数。

8 定性理论与分支理论初步

8.1 动力系统，相空间与轨线

假设运动质点 M 在时刻 t 的空间坐标为 $\boldsymbol{x}$，并且已知它在 $\boldsymbol{x}$ 点的运动速度为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$，则 M 的运动方程为 $d\boldsymbol{x}/dt=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$，这是一个自治微分方程。如果 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$满足解的存在和唯一性定理的条件，则对于任何初值 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，方程存在唯一的满足初值条件的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$.它描述了质点 M 在 t_0 时刻经过 $\boldsymbol{x}_0$ 点的运动。我们称 $\boldsymbol{x}$ 取值的空间为相空间，$(t,\boldsymbol{x})$取值的空间称为增广相空间。$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$在相空间中定义了一个速度场，而解的表达式在相空间中给出了一条与速度场吻合的光滑曲线(轨线)。满足 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0)$的点称为方程的平衡点。若存在 T，使得 $\boldsymbol{f}(t+T,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$，则称为闭轨。把满足存在与唯一性条件的微分方程成为一个动力系统。

基本性质：1°积分曲线的平移不变性：积分曲线在增广相空间中沿 t 轴任意平移后还是积分曲线；

2°过相空间每一点轨线的唯一性；

因此我们仅需考察初始时刻 $t_0=0$ 的解，并记 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}(t,0,\boldsymbol{x}_0)$。

3°群的性质：$\boldsymbol{f}(t_2,\boldsymbol{f}(t_1,\boldsymbol{x}_1))=\boldsymbol{f}(t_2+t_1,\boldsymbol{x}_0)$。

8.2 稳定性

8.2.1 李雅普诺夫稳定性的概念

考虑 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{x}\in G\subset R^n$ 和 $t\in R$ 连续，并对 $\boldsymbol{x}$ 满足 Lipschitz 条件。设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t)$在$[t_0,+\infty)$上有定义，如果对$\forall\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要$|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{g}(t_0)|<\delta$，则方程以 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 为初值的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$在$[t,+\infty)$上存在，并且$|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{g}(t)|<\varepsilon$，$\forall t\in[t_0,+\infty)$，则称解 $\boldsymbol{x}=g(t)$是李雅普诺夫稳定的。假设 $\boldsymbol{x}=g(t)$是李雅普诺夫稳定的，且存在δ_1，使得只要$|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{g}(t_0)|<\delta_1$，就有 $\lim\limits_{t\to\infty}(\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{g}(t))=0$，则称解 $\boldsymbol{x}=g(t)$是李雅普诺夫渐近稳定的。

下面只考虑零解 $\boldsymbol{x}=0$ 的稳定性，即假设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0})=0$。事实上，在变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{g}(t)$之下，我们总可以转换成这种情形。

8.2.2 按线性近似判断稳定性

$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}+N(t,\boldsymbol{x})$，$A(t)$是连续的 n 阶矩阵函数，$N(t,\boldsymbol{x})\in C(G)$，$G=\{t\geqslant t_0,|\boldsymbol{x}|\leqslant M\}$，$N(t,\boldsymbol{x})$对 $\boldsymbol{x}$ 满足 Lipschitz 条件，$N(t,\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，$\lim\limits_{|\boldsymbol{x}|\to 0}\dfrac{|N(t,\boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{x}|}=0$ 对 $t\geqslant t_0$ 一致成立。

我们讨论其线性化方程 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$。

【定理 8.1】线性方程中的矩阵 $A(t)$为常矩阵，则

1°零解是渐近稳定的，当且仅当 A 的全部特征根都有负的实部；

2°零解是稳定的，当且仅当 A 的全部特征根都有非负的实部，并且那些实部为

零的特征根所对应的若尔当块都是一阶的；
3° 零解是不稳定的，当且仅当 A 的特征根中至少有一个实部为正，或者至少有一个实部为零，且它所对应的若尔当块是高于一阶的。

【定理 8.2】设方程 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}+N(t,\boldsymbol{x})$ 中的 A(t)=A 是常矩阵，而且 A 的特征根都具有负的实部，则零解是渐近稳定的。

【定理 8.3】条件同定理 8.2，而且 A 的特征根中至少有一个具有正的实部，则零解不稳定。

8.2.3 李雅普诺夫第二方法

考虑自治系统 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，假设存在标量函数 $V(\boldsymbol{x})$在区域$|\boldsymbol{x}|\leqslant M$ 上有定义，并且有连续的偏导数。先对 V 提出如下几组条件：

条件 I $V(\mathbf{0})=0$；$V(\boldsymbol{x})>0$，当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时。（定正函数）

条件 II $\frac{dV}{dt}|_{方程}=\frac{\partial V}{\partial x_1}f_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}f_n<0$，当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时。（$\frac{dV}{dt}|_{方程}$是定负函数）

条件 II* $\frac{dV}{dt}|_{方程}\leqslant 0$。（$\frac{dV}{dt}|_{方程}$是常负函数）

条件 III $\frac{dV}{dt}|_{方程}>0$，当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时。（$\frac{dV}{dt}|_{方程}$是定正函数）

【定理 8.4】1° 条件 I+II 成立，则零解渐近稳定；
2° 条件 I+II*成立，则零解稳定；
3° 条件 I+III 成立，则零解不稳定。

编者注：常见解法：线性方程特征值；李雅普诺夫第二方法；相图分析（可以通过 $dx/dy=f(x,y)/g(x,y)$解出；高次方程降成线性方程组）

8.3 平面上的动力系统，奇点与极限环

8.3.1 初等奇点

考察 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，其中 A=($a$,$b$;$c$,$d$)是常矩阵。

当矩阵 A 非退化时，称(0,0)为系统的初等奇点；否则称它为高阶奇点。初等奇点都是孤立奇点，而线性高阶奇点都是非孤立的。

作线性变换$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$，T 是可逆矩阵，则系统变为$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=T^{-1}AT\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$。选取适当 T，可使 $T^{-1}AT$ 称为 A 的若尔当标准型。假设 A 已是实的若尔当标准型，具有下列形式之一：$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \mu\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\1 & \lambda\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\\beta & \alpha\end{pmatrix}$。

1° 解为 $y=C|x|^{\mu/\lambda}$和 $x=0$。

当$\lambda=\mu$时：若$\lambda<0$，则奇点(0,0)渐近稳定；若$\lambda>0$，则奇点(0,0)不稳定。这两种情况下，把(0,0)称为星形结点。

当$\lambda\neq\mu$且$\lambda\mu>0$ 时：若$\lambda,\mu<0$，则奇点(0,0)渐近稳定；若$\lambda,\mu>0$，则奇点(0,0)不稳定。这两种情况下，把(0,0)称为两向结点。

当$\lambda \neq \mu$且$\lambda\mu<0$时：奇点(0,0)不稳定，称为鞍点。

2° 解为$y = Cx + \frac{x}{\lambda}\ln|x|$和$x$=0。曲线族每一条曲线都在(0,0)点与$y$轴相切，称为单向结点。

当$\lambda<0$时，奇点(0,0)渐近稳定；当$\lambda>0$时，结点不稳定。

3° 解为$r = C\exp(\frac{\alpha}{\beta}\theta)$，其中常数$C \geqslant 0$，$\frac{dr}{dt} = \alpha r$，$\frac{d\theta}{dt} = \beta$。

当$\alpha<0$时，奇点(0,0)渐近稳定；当$\alpha>0$时，奇点(0,0)不稳定；这两种情况称(0,0)为焦点。当$\alpha=0$时，奇点(0,0)稳定，称中心点。

【定理 8.5】对于系统$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，记$p=-\mathrm{tr}[A]$，$q=\det[A]$，我们有

1° 当$q<0$时，(0,0)是鞍点；
2° 当$q>0$且$p^2>4q$时，(0,0)是两向结点；
3° 当$q>0$且$p^2=4q$时，(0,0)是单向结点或星形结点；
4° 当$q>0$且$0<p^2<4q$时，(0,0)是焦点；
5° 当$q>0$且p=0时，(0,0)是中心点。
在情形 2)~4)中，当$p>0$时奇点(0,0)稳定，当$p<0$时不稳定。

9 边值问题

9.1 施图姆比较定理

考虑二阶线性方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$。
【引理 9.1】齐次线性微分方程的任何非零解零点都是孤立的。
【定理 9.1】设$y=f_1(x)$和$y=f_2(x)$是齐次线性方程的两个非零解，则：
1° 它们是线性相关的，当且仅当它们有相同的零点；
2° 它们是线性无关的，当且仅当它们的零点是互相交错的。
【定理 9.2】设有两个齐次线性方程$y''+p(x)y'+Q(x)y=0$和$y''+p(x)y+R(x)y=0$，$R(x) \geqslant Q(x)$恒成立。设$y=f(x)$是方程 1 的一个非零解，而且x_1和x_2是两个相邻的零点。则方程 2 的任何非零解$y=g(x)$在$[x_1,x_2]$上至少有一个零点x_0。