# 高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 10 月 14 日

## 目录

# 1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

## 1.1 问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4 &= 4 \\ x_2-x_3+x_4 &= -3 \\ x_1+3x_2-4x_4 &= 1 \\ -7x_2+3x_3+x_4 &= -3 \end{cases}$.

2. 设 $\alpha_1=(1,1,4), \alpha_2=(-2,1,5), \alpha_3=(a,2,10), \beta=(1,b,-1)$. 当 $a,b$ 取何值时, 向量 $\beta$ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出某个向量 $\beta$ 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表出任何向量–如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

4. 某食品厂有四种原料 $A,B,C,D$. 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

| 单位: % | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 脂肪 | 8 | 6 | 3 | 2 |
| 碳水化合物 | 5 | 25 | 10 | 15 |
| 蛋白质 | 15 | 5 | 20 | 10 |

5. (1) 求复矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX=0$ 在复数域上的解集合; (3) 求齐次方程组 $AX=0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 $y_1,y_2,y_3$ 满足什么关系时, 方程组 $AX=(y_1,y_2,y_3)^T$ 有解?

6. 已知向量 $\alpha,\beta$ 不共线, 并看成是由原点出发的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$. 设 $u,v\in\mathbb{R}$ 且 $u+v=1$, 问向量 $\overrightarrow{OC}=u\alpha+v\beta$ 的终点 $C$ 在什么位置, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的比值是多少, 何时比值为正数.

7. 求单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上的所有直线.

8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体 $ABCD$ 每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.

9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异? $\begin{cases} .835x+.667y=.168 \\ .333x+.266y=.067 \end{cases}$, $\begin{cases} .835x+.667y=.168 \\ .333x+.266y=.066 \end{cases}$.

10. 考虑带截距的线性回归 $y\sim x_1+\cdots+x_p$, 参考上一题, 你有什么想法和改进?

## 1.2 解答

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-=①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+=7*②]{③-=5*②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{④+=2*③}$
$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(-8,3,6,0).$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-=4*①]{②-=①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-=\frac{13}{3}*②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}$. 因此, 当 $a\neq -4$ 或 $a=-4, b=-\frac{13}{2}$ 时, $\beta$ 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

3. 只需注意到表出某个向量 $\beta$ 唯一 $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s=0 \Rightarrow k_1=\cdots=k_s=0)$.

4. 注意 $A,B,C,D$ 的比例和为 1, 因此 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\8&6&3&2&5\\5&25&10&15&12\\15&5&20&10&15\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②-=8*①\\③-=5*①\\④-=15*①}} \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&20&5&10&7\\0&-10&5&-5&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{③+=10*②\\④-=5*②}}$
$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&30&25&15\end{bmatrix} \xrightarrow{④+=\frac{2}{3}*③} \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&0&-\frac{25}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, 因此解是 $(\frac{7}{25},\frac{16}{75},\frac{7}{15},\frac{1}{25})$.

5. (1) $\begin{bmatrix}1&-i&-1\\2&2&-2\\i&1+i&-i\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②-=2*①\\③-=i*①}} \begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&i&0\end{bmatrix} \xrightarrow{③-=\frac{i}{2+2i}*②} \begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{②*=\frac{1}{2+2i}} \begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.
(2) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{R}\}$. (3) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{C}\}$. (4) 将 $A$ 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1,\frac{y_2-2y_1}{2+2i},y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1=0$ 时才有解.

6. $\overrightarrow{AC}=(u-1)\alpha+v\beta, \overrightarrow{CB}=-u\alpha+(1-v)\beta, \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{1-u}{u}=\frac{v}{1-v}$, 因此 $A,C,B$ 三点共线, 且当 $0<u,v<1$ 时比值为正数.

7. $(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases}x-z=k(1-y)\\x+z=\frac{1}{k}(1+y)\end{cases}$, 即是 $\begin{cases}x+ky-z=k\\kx-y+kz=1\end{cases}$. 特别地, 当 $y=\pm1$ 时, $z=\pm x$ 也是位于该曲面上的直线.

8. $A=(x_1,y_1,z_1),B=(x_2,y_2,z_2),C=(x_3,y_3,z_3)$, 设 $BC,AC,AB$ 中点分别为 $D,E,F$, 设 $G=(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$
只需验证 $\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BG},\overrightarrow{CG}$ 分别与 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$ 共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.

9. 用 Gauss 消元法可求得解为 $(1,-1)$ 和 $(-666,834)$. 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.

10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如 $L_2$ 正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着强相关变量, 干扰回归结果.

# 2 第 2 次习题课: 线性方程组的解, 集合

## 2.1 问题

1. (1) 用向量表示平面 $x+2y+3z=1$; (2) 用向量表示直线 $\begin{cases}x+2y+3z=1\\3x+2y+z=-1\end{cases}$; (3) 求平面 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+l\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, k,l\in\mathbb{R}$ 的平面方程.

2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&4&1&0&8\\3&6&-1&0&7\\1&2&2&0&7\\2&4&1&1&9\end{bmatrix}$. (1) 解齐次方程组 $AX=0$; (2) 已知 $X=(1,1,2,3,0)^T$ 是方程组 $AX=\beta$ 的一个解, 写出 $AX=\beta$ 的所有解.

3. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a+b\sqrt{3},a,b\in\mathbb{Q}$ 的方式唯一.

4. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

5. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 且 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 又能线性表出 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$, 证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$.
6. 考虑 $n$ 个城市之间的航班问题: 记 $H=(a_{ij})$ 为邻接矩阵, 这里 $a_{ij}$ 表示从城市 $i$ 到 $j$ 的航班数. (1) 解释 $H^k$ 的 $(i,j)$ 元的含义; (2) 设 $H=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&3\\0&0&2&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$, 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?
7. 设 $A$ 是有向图 $G$ 的邻接矩阵, 证明 $G$ 中的循环三角形的个数等于 $\mathrm{tr}(A^3)/3$.
8. 由集合 $A$ 的所有子集组成的集合称为 $A$ 的幂集, 记为 $P(A)$. 设集合 $A$ 非空, 证明 $\mathrm{card}(P(A))>\mathrm{card}(A)$.
9. $X$ 为非空集合, 映射 $f:P(X)\to P(X)$ 满足 $f(A)\subset f(B),\forall A\subset B$. 那么存在 $T\subset X$ 使得 $f(T)=T$.
10. (1) 找到 $[0,1]$ 到 $[0,1]\times[0,1]$ 的双射; (2) 找到 $(0,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射.
11. 罗素悖论: 某班的同学在习题课上作游戏. 每个学生可以给班里任意多同学发一次短信 (可包括自己). 记 $X$ 是全体没有给自己发短信的同学构成的集合. 若某同学猜中 $X$ 并给且只给 $X$ 中的每个同学发了短信, 则该同学获胜. 问: 此游戏有无获胜者?
12. 学习使用 numpy 包, 并实现矩阵的基本运算.

## 2.2 解答

1. (1) 先求得一个点坐标 $(1,0,0)$, 再去求 $x+2y+3z=0$ 的一组基础解系:$(2,-1,0)$ 和 $(3,0,-1)$, 因此向量表示为 $(1,0,0)+k(2,-1,0)+l(3,0,-1),k,l\in\mathbb{R}$.
(2) 先求得一个点坐标 $(0,-1,1)$, 再去求方向向量 $(1,2,3)\times(3,2,1)=(-4,8,4)$, 因此向量表示为 $(0,-1,1)+t(-1,2,1),t\in\mathbb{R}$.
(3) 先求得一个点坐标 $(1,1,2)$, 再去求法向量 $(1,2,0)\times(2,0,1)=(2,-1,-4)$, 因此平面可表示为 $2x-y-4z=-7$.

2. (1) $\begin{bmatrix}2&4&1&0&8\\3&6&-1&0&7\\1&2&2&0&7\\2&4&1&1&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{②-=\frac{3}{2}*①\\ ③-=\frac{1}{2}*①\\ ④-=①}}\begin{bmatrix}2&4&1&0&8\\0&0&-\frac{5}{2}&0&-5\\0&0&\frac{3}{2}&0&3\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{①-=\frac{2}{3}*③\\ ②+=\frac{5}{3}*③}}\begin{bmatrix}2&4&0&0&6\\0&0&0&0&0\\0&0&\frac{3}{2}&0&3\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_4=-x_5\\x_3=-2x_5\\x_1+2x_2=-3x_5\end{cases}\Rightarrow$
$X=(-3n-2m,m,-2n,-n,n)^T,m,n\in\mathbb{R}$ 是自由变元.
(2) 解集是基础解系加上代表元, 即 $(1-3n-2m,1+m,2-2n,3-n,n)^T$.
3. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{a_1-a_2}{b_2-b_1}\in\mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, $\gcd(a,b)=1$, 那么 $a^2=3b^2\Rightarrow 3|a\Rightarrow 9|a^2\Rightarrow 3|b^2\Rightarrow 3|b$, 矛盾.
4. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})=\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})\Rightarrow 9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5}|3\times 3$ 而 $2+\sqrt{-5}\nmid 3$, 因此不是素数.
5. $(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)A,(\gamma_1,\cdots,\gamma_t)=(\beta_1,\cdots,\beta_s)B\Rightarrow(\gamma_1,\cdots,\gamma_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(AB)$, 因此可以线性表出.
6. (1) 从 $a_{ij}^2=\sum_s a_{is}a_{sj}$ 可以看出 $H^k$ 的 $(i,j)$ 元表示从 $i$ 到 $j$ 乘坐恰 $k$ 次航班有多少种乘坐方式. (2) $1\to3,1\to4,2\to1,2\to5,3\to2,3\to4,4\to1,5\to2,5\to3$, 分别有 $1,1,1,3,1,3,3,1,2$ 种航班选择; $2\to4,4\to2$ 都要倒 3 次, 是最多的.
7. 由上题知 $A^3$ 的 $(i,i)$ 元表示从 $i$ 到 $i$ 有几条恰走 3 次的路径, 三角形会在结点上算 3 次, 因此要除以 3.
8. 本题的关键是处理集合 $A$ 包含无穷元素的情形. 假设存在一一映射 $f:A\mapsto P(A)$, 则考虑集合 $A=\{x:x\notin f(x)\}$. 此时若 $f^{-1}(A)\notin A$, 则根据定义 $f^{-1}(A)\in A$; 反之亦矛盾.
9. 我们的思路应当去找满足条件 $A\subset f(A)$ 的最大集合, 即令 $T=\{\cup_\alpha A_\alpha:A_\alpha\subset f(A_\alpha)\}$. 根据定义有 $T=\cup_\alpha A_\alpha\subset\cup_\alpha f(A_\alpha)=f(\cup_\alpha A_\alpha)=f(T)$, 再根据题给条件有 $f(T)\subset f(f(T))\Rightarrow f(T)\subset T$.

10. (1) 全部写成无限小数, 然后作映射 $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots \to (0.a_1a_3a_5\cdots, 0.a_2a_4a_6\cdots)$; (2) $y=\tan(\pi x-\frac{\pi}{2})$.

11. 因此在 ZF 公理体系中, 我们不考虑包含自身作为元素的集合.

12. 从 pip install numpy 开始. 学习使用 np.zeros, np.random, np.mean, np.sum, np.dot, np.linalg.det, np.eye 等函数, 并做切片和取值运算.

# 3 第 3 次习题课: 行列式 (1)

## 3.1 问题

1. 用行列式求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-3x_2=7 \\ 5x_1+4x_2=6 \end{cases}$.

2. 求以下向量在三维几何空间张成的平行六面体体积: $\alpha_1=(3,2,1), \alpha_2=(0,3,0), \alpha_3=(7,4,2)$.

3. 判断以下向量组的定向: $(1,1),(3,-2)$; $(2,1,0),(1,0,3),(1,1,1)$; $(x,y,z),(z,x,y),(y,z,x)$; $(x,y,z),(y,z,x),(z,x,y)$; 其中 $x+y+z>0$ 且互不相等.

4. 计算行列式: (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

5. 对 $n$ 阶矩阵 $A$ 作如下操作: 第 1 行加上第 2 行的 $k$ 倍, 第 2 行加上第 3 行的 $k$ 倍, 以此类推; 最后, 第 $n$ 行加上此时第 1 行的 $k$ 倍. 问做这些变换相当于在 $A$ 左边乘一个什么样的矩阵? $A$ 的行列式值会如何变化? 如果第 $n$ 行加上的是原来第 1 行的 $k$ 倍呢?

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$.

8. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

9. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 其中 $\alpha^2-4\beta\gamma>0$.

10. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

11. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

## 3.2 解答

1. $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = 2, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = -1.$

2. $V = \|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\| = |\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = 3.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow$ 左手; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow$ 左手; $\begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0 \Rightarrow$ 右手; $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 \leq 0 \Rightarrow$ 左手.

4. (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2 + 16 + 16 - 4(x+1) - 16(x-2) - 4(x+1) = x^3 - 27x + 54;$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

5. 相当于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k^2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 其行列式无变化, 因为是初等变换. 后面一问相当于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 其行列式有变化, 因为最后一步不是初等变换, 相较于原值乘上了 $1 + (-1)^{n-1}k^n$.

6. 用第一列减去第 $i$ 列的 $b_i$ 倍, $i = 2, 3, \cdots, n$, 得到 $\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i.$

7. 法 1(加边法): $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$, 然后用第 $i+1$ 行减去第 1 行的 $x_i$ 倍, $i = 1, 2, 3, 4$, 得到 $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$

法 2(拆项法): $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} +$ $\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$, 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五项: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4x_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3x_4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_4x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{vmatrix}$, 原行列式是 $1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

8. 采用第 7 题的法 2(拆项法), 最后剩下 $n+1$ 项: $\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix},$ $\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$, $\cdots$, 它们分别是 $(-1)^n a_1a_2\cdots a_n, (-1)^{n-1}x_1a_2\cdots a_n, (-1)^{n-1}a_1x_2\cdots a_n, \cdots$, 整理得到原行列式为 $(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n\left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i}\right)-1\right]$.

9. 若 $\beta\gamma=0$, 则行列式为 $\alpha^n$. 对于一般情形, 按第一行展开得到 $D_n=\alpha D_{n-1}-\beta\gamma D_{n-2}$, 且有初值条件 $D_1=\alpha, D_2=\alpha^2-\beta\gamma$, 然后用数列的特征值和特征公式设 $D_n = A\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}\right)^n + B\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}\right)^n$, 代入 $n=1,2$ 解出 $A$ 和 $B$, 得到 $D_n=\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}$.

10. $n=1$ 时, $D_1=\cos\alpha$; $n=2$ 时, $D_2=\cos 2\alpha$; 因此可以猜测 $D_n=\cos n\alpha$. 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 $D_{n+1}=2\cos\alpha D_n - D_{n-1}=\cos(n+1)\alpha$, 知该假设成立.

11. 法 1: 将第 1 行至第 $n-1$ 行减去第 $n$ 行, 并提出各行和各列公因子, 得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

再将第 1 列至第 $n-1$ 列减去第 $n$ 列, 并提出各行和各列的公因子, 得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdot & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第 $n$ 行展开得到递推式 $D_n=\dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)}D_{n-1}$, 并直接计算出 $D_2$, 得

$$D_n=\frac{\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}.$$

法 2: 若 $a_i=a_j$ 或 $b_i=b_j(i\neq j)$, 即两行 (或两列) 相同, 则 $D_n=0$. 因此 $D_n$ 含有因子 $\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$. 将 $D_n$ 的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得 $D_n=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}D_n'$. 显然 $D_n'$ 也含有上述因子. 另一方面, 由于 $D_n'$ 的 $(i,j)$ 元为 $\prod_{k\neq j}(a_i+b_k)$, 所以每一个 $a_i$ 在 $D_n'$ 的展开式中的次数均为 $n-1$, 因此设 $D_n=\lambda\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$. 为确定常数 $\lambda$ 的值, 我们不妨令 $a_i=-b_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 此时 $D_n'$ 为对角行列式, 且有 $D_n=\prod_{i\neq j}(a_i-a_j)=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\Rightarrow\lambda=1$. 因此可得一样的结果.

# 4 第 4 次习题课: 行列式 (2)

## 4.1 问题

1. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\ n&1&2&\cdots&n-1\\ n-1&n&1&\cdots&n-2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 2&3&4&\cdots&1\end{vmatrix}$. 你能求出行列式 $E_n=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\ a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\ a_{n-1}&a_n&a_1&\cdots&a_{n-2}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{vmatrix}$ 的通式吗?

2. (1) 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\ c&a&b&\cdots&b\\ c&c&a&\cdots&b\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ c&c&c&\cdots&a\end{vmatrix}$; (2) 计算行列式 $E_n=\begin{vmatrix}a_1&b&b&\cdots&b\\ c&a_2&b&\cdots&b\\ c&c&a_3&\cdots&b\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ c&c&c&\cdots&a_n\end{vmatrix}$.

3. $A$ 是 $n$ 阶矩阵, $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$ 是 $n$ 维列向量, 且 $|A|=a,|A-\alpha\alpha^T|=b$, 求 $|A+2\alpha\alpha^T|$.

4. 考虑 3 线行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1&c_2&&&\\ b_2&a_2&c_3&&\\ &b_3&a_3&\ddots&\\ &&\ddots&\ddots&c_n\\ &&&b_n&a_n\end{vmatrix}$, 记其顺序主子式为 $D_1,D_2,\cdots,D_n$, 并假设它们都不为 0. 证明递推关系 $D_s=a_sD_{s-1}-b_sc_sD_{s-2},s\ge 3$, 并将该矩阵 $M_n$ 写成下三角矩阵和对角元都为 1 的上三角矩阵的乘积.

5. 试确定所有 3 阶 $(0,1)$ 行列式 (即所有元素只能是 0 或 1) 的最大值, 并给出证明和取到最大值的一个构造.

6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{N}_+$, 证明 $n$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\ 1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$ 能被 $2!3!\cdots(n-1)!$ 整除.

7. 设矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 非平凡. 证明: 若矩阵 $A$ 的每一个元素 $a_{ij}$ 的代数余子式 $A_{ij}=a_{ij}$, 则 $|A|^{n-2}=1$.

8. 若方阵每一行每一列都恰有一个元素为 1, 其余的元素都是 0, 则称此方阵为置换矩阵. (1) 写出所有的 3 阶置换矩阵. 这些矩阵最少可由其中的几个通过反复作乘法得到? (2) 证明任意 $n$ 阶置换矩阵都可由以下 $n-1$ 个矩阵反复作乘法得到: $\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 1&0&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&1&0&\cdots&0&0\\ 0&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&1&0\\ 0&0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&1&0&\cdots&0&0\\ 0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&1&0\\ 0&0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0\\ 0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&0&1&\cdots&0&0\\ 0&0&1&0&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&1&0\\ 0&0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0&0\\ 0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&1&0&\cdots&0&0\\ 0&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&0&1\\ 0&0&0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}$.

进一步, 任意 $n$ 阶置换矩阵都可由以下两个矩阵反复作乘法得到: $T=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\1&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$.

9. 设 $n\geq 3, f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是次数 $\leq n-2$ 的多项式, 证明: 对 $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, 行列式 $\begin{vmatrix}f_1(a_1)&f_2(a_2)&\cdots&f_n(a_1)\\f_1(a_2)&f_2(a_2)&\cdots&f_n(a_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_1(a_n)&f_2(a_n)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}\equiv 0$, 并举例说明条件 "次数 $\leq n-2$" 不可去.

10. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&\cos\phi_1&\cos 2\phi_1&\cdots&\cos(n-1)\phi_1\\1&\cos\phi_2&\cos 2\phi_2&\cdots&\cos(n-1)\phi_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cos\phi_n&\cos 2\phi_n&\cdots&\cos(n-1)\phi_n\end{vmatrix}$.

## 4.2 解答

1. 把后 $n-1$ 列加到第一列, 提出公因子 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 用第 $(1,1)$ 元消去同列其他元素, 再按第一列展开得到 $n-1$ 阶行列式:

$$D_n=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&4&5&\cdots&1&2\\1&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\0&-1&-1&\cdots&-1&-1\\0&n-2&-2&\cdots&-2&-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&2&2&\cdots&2-n&2-n\\0&1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-1&-1&\cdots&-1&-1\\n-2&-2&\cdots&-2&-2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&2-n&2-n\\1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}.$$

用所得 $n-1$ 阶行列式的第 $(1,1)$ 元消去同行的其他元素, 再按第一行展开得到 $n-2$ 阶上三角行列式:

$$D_n=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\n-2&-n&\cdots&-n&-n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\2&0&\cdots&-n&-n\\1&0&\cdots&0&-n\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-n&\cdots&-n&-n\\&\ddots&\vdots&\vdots\\&&-n&-n\\&&&-n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

2. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b&b\\c-a&a-b&0&\cdots&0&0\\0&c-a&a-b&\cdots&0&0\\0&0&c-a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&c-a&a-b\end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知 $D_n=b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1}+(a-b)D_{n-1}$. 初始条件是 $D_1=a$, 因此知 $D_n=\dfrac{b(a-c)^n-c(a-b)^n}{b-c}$.

(2) 按第 $n$ 列拆项, 得 $E_n=\begin{vmatrix}a_1&b&b&\cdots&b+0\\c&a_2&b&\cdots&b+0\\c&c&a_3&\cdots&b+0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c&c&c&\cdots&b+(a_n-b)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b&b&\cdots&b\\c&a_2&b&\cdots&b\\c&c&a_3&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c&c&c&\cdots&b\end{vmatrix}+(a_n-b)E_{n-1}=b(a_1-c)(a_2-c)\cdots(a_{n-1}-c)+(a_n-b)E_{n-1}$; 按第 $n$ 列拆项 (或由对称性), 得 $E_n=c(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_{n-1}-b)+(a_n-c)E_{n-1}$. 两式联立得 $E_n=\dfrac{bf(c)-cf(b)}{b-c}$, 其中 $f(x)=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$.

3. 考虑函数 $f(x)=|A+x\alpha\alpha^T|=\begin{vmatrix}a_{11}+x&a_{12}+x&\cdots&a_{1n}+x\\a_{21}+x&a_{22}+x&\cdots&a_{2n}+x\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}+x&a_{n2}+x&\cdots&a_{nn}+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}+x&a_{12}+x&\cdots&a_{1n}+x\\a_{21}-a_{11}&a_{22}-a_{12}&\cdots&a_{2n}-a_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}-a_{11}&a_{n2}-a_{12}&\cdots&a_{nn}-a_{1n}\end{vmatrix}$, 因此是线性函数. 由 $f(0)=a,f(-1)=b$ 知 $f(x)=a+(a-b)x$, 因此 $f(2)=3a-2b$.

4. 按最后一行展开立刻得到递推关系, $M_n=\begin{bmatrix}D_1&0&&&&\\b_2&\frac{D_2}{D_1}&0&&&\\&b_3&\frac{D_3}{D_2}&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&0&\\&&&b_{n-1}&\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}&0\\&&&&b_n&\frac{D_n}{D_{n-1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&c_2\frac{1}{D_1}&&&&\\&1&c_3\frac{D_1}{D_2}&&&\\&&1&c_4\frac{D_2}{D_3}&&\\&&&\ddots&\ddots&\\&&&&1&c_n\frac{D_{n-2}}{D_{n-1}}\\&&&&&1\end{bmatrix}$.

5. 按第 1 行展开, 得到 $D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix}a_{23}&a_{21}\\a_{33}&a_{31}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\le 3$. 下面证明 $D\neq 3$. 若不然, 则必有 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=1$, 且 $\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{23}&a_{21}\\a_{33}&a_{31}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=1$. 前两个行列式为 1 可以得到 $a_{22}=a_{33}=1,a_{23}=a_{31}=1$, 而此时 $\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}=a_{21}a_{32}-1\le 0$, 矛盾. 因此 $D\le 2$, 一个构造是 $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2$.

6. 注意到 $D_n=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1(a_1-1)&\cdots&a_1(a_1-1)\cdots(a_1-n+2)\\1&a_2&a_2(a_2-1)&\cdots&a_2(a_2-1)\cdots(a_2-n+2)\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&a_n&a_n1(a_n-1)&\cdots&a_n(a_n-1)\cdots(a_n-n+2)\end{vmatrix}$(利用初等列变换, 用后面的列加减前面的列), 再将第 $k$ 列提取公因子 $(k-1)!,k=3,4,\cdots,n$ 即可.

7. 首先容易看出 $|A|=\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^n a_{ij}^2>0$. 其次 $|A|^2=|AA^T|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}|A|&0&\cdots&0\\0&|A|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&|A|\end{vmatrix}=|A|^n\Rightarrow|A|^{n-2}=1$.

8. (1) 所有 3 阶置换矩阵: $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, 可由其中第 2 个和第 5 个做反复乘积生成 (答案不唯一). (2) $n$ 元置换可以分解成至多 $n-1$ 个对换的乘积, 而每一个对换都可以分解成

相邻对换的乘积, 因此可被这 $n-1$ 个相邻对换生成; 进一步, 所有相邻对换都可被表示为 $S^{n-k}TS^k, k=0,1,\cdots,n-1$, 因此可被 $S,T$ 生成.

9. 不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同. 考虑 $F(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & a_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$, 这是一个至多 $n-2$ 次多项式, 有至少 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 这 $n-1$ 个不同的根, 因此必恒等于 0. 若删去条件 "次数 $\leq n-2$", 则可令 $f_k(x)=x^{k-1}$, 此时原行列式构成 Vandermonde 行列式, 只要 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不同就不为 0.

10. 由高中三角函数知识知 $\cos k\theta = 2^{k-1}\cos^k\theta + P_{k-2}(\cos\theta)$, 其中 $P_{k-2}$ 是 $k-2$ 次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & \cos\phi_1 & \cos^2\phi_1 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_1 \\ 1 & \cos\phi_2 & \cos^2\phi_2 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\phi_n & \cos^2\phi_n & \cdots & \cos^{n-1}\phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod_{1\leq j<i\leq n}(\cos\phi_i-\cos\phi_j).$$

# 5 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.