

高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 9 月 19 日

目录

1	第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法	2
1.1	问题	2
1.2	解答	2
2	第 2 次习题课: 线性方程组的解, 集合	3
2.1	问题	3
2.2	解答	4
3	致谢	5

1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$
2. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-2, 1, 5), \alpha_3 = (a, 2, 10), \beta = (1, b, -1)$. 当 a, b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?
3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 表出任何向量-如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).
4. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D . 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

5. (1) 求复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\text{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集合;
- (3) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1, y_2, y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解?
6. 已知向量 α, β 不共线, 并看成是由原点出发的有向线段 \vec{OA} 与 \vec{OB} . 设 $u, v \in \mathbb{R}$ 且 $u+v=1$, 问向量 $\vec{OC} = u\alpha + v\beta$ 的终点 C 在什么位置, \vec{AC} 与 \vec{CB} 的比值是多少, 何时比值为正数.
7. 求单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线.
8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体 $ABCD$ 每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.
9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异?
$$\begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .067 \end{cases}, \begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .066 \end{cases}$$
10. 考虑带截距的线性回归 $y \sim x_1 + \dots + x_p$, 参考上一题, 你有什么想法和改进?

1.2 解答

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=7*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=2*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$
2.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=\textcircled{1}, \textcircled{3}-=4*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{13}{3}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
. 因此, 当 $a \neq -4$ 或 $a = -4, b = -\frac{13}{2}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

3. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0)$.

$$\textcircled{2} - = 8 * \textcircled{1}$$

4. 注意 A, B, C, D 的比例和为 1, 因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} - = 5 * \textcircled{1} \\ \textcircled{4} - = 15 * \textcircled{1} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} + = 10 * \textcircled{2} \\ \textcircled{4} - = 5 * \textcircled{2} \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{4} + = \frac{2}{3} * \textcircled{3} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ 因此解是 } (\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25}).$$

5. (1) $\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} - = 2 * \textcircled{1} \\ \textcircled{3} - = i * \textcircled{1} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} - = \frac{i}{2+2i} * \textcircled{2} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} * = \frac{1}{2+2i} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(2) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. (3) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1, \frac{y_2-2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$ 时才有解.

6. $\overrightarrow{AC} = (u-1)\alpha + v\beta, \overrightarrow{CB} = -u\alpha + (1-v)\beta, \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{1-u}{1-v} = \frac{v}{1-v}$, 因此 A, C, B 三点共线, 且当 $0 < u, v < 1$ 时比值为正数.

7. $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x-z = k(1-y) \\ x+z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x+ky-z = k \\ kx-y+kz = 1 \end{cases}$. 特别

地, 当 $y = \pm 1$ 时, $z = \pm x$ 也是位于该曲面上的直线.

8. $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$, 设 BC, AC, AB 中点分别为 D, E, F , 设 $G = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$. 只需验证 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$ 分别与 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ 共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.

9. 用 Gauss 消元法可求得解为 $(1, -1)$ 和 $(-666, 834)$. 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.

10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如 L_2 正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着强相关变量, 干扰回归结果.

2 第 2 次习题课: 线性方程组的解, 集合

2.1 问题

1. (1) 用向量表示平面 $x+2y+3z=1$; (2) 用向量表示直线 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$; (3) 求平面 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k, l \in \mathbb{R}$ 的平面方程.

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$. (1) 解齐次方程组 $AX=0$; (2) 已知 $X = (1, 1, 2, 3, 0)^T$ 是方程组 $AX = \beta$ 的一个

解, 写出 $AX = \beta$ 的所有解.

3. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域.

(1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$ 的方式唯一.

4. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

5. 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 能线性表出 β_1, \dots, β_s , 且 β_1, \dots, β_s 又能线性表出 $\gamma_1, \dots, \gamma_t$, 证明 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 能线性表出 $\gamma_1, \dots, \gamma_t$.
6. 考虑 n 个城市之间的航班问题: 记 $H = (a_{ij})$ 为邻接矩阵, 这里 a_{ij} 表示从城市 i 到 j 的航班数. (1) 解释 H^k 的 (i, j) 元的含义; (2) 设 $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?
7. 设 A 是有向图 G 的邻接矩阵, 证明 G 中的循环三角形的个数等于 $\text{tr}(A^3)/3$.
8. 由集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集, 记为 $P(A)$. 设集合 A 非空, 证明 $\text{card}(P(A)) > \text{card}(A)$.
9. X 为非空集合, 映射 $f: P(X) \rightarrow P(X)$ 满足 $f(A) \subset f(B), \forall A \subset B$. 那么存在 $T \subset X$ 使得 $f(T) = T$.
10. (1) 找到 $[0, 1]$ 到 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的双射; (2) 找到 $(0, 1)$ 到 \mathbb{R} 的双射.
11. 罗素悖论: 某班的同学在习题课上作游戏. 每个学生可以给班里任意多同学发一次短信 (可包括自己). 记 X 是全体没有给自己发短信的同学构成的集合. 若某同学猜中 X 并给且只给 X 中的每个同学发了短信, 则该同学获胜. 问: 此游戏有无获胜者?
12. 学习使用 numpy 包, 并实现矩阵的基本运算.

2.2 解答

1. (1) 先求得一个点坐标 $(1, 0, 0)$, 再去求 $x + 2y + 3z = 0$ 的一组基础解系: $(2, -1, 0)$ 和 $(3, 0, -1)$, 因此向量表示为 $(1, 0, 0) + k(2, -1, 0) + l(3, 0, -1), k, l \in \mathbb{R}$.
- (2) 先求得一个点坐标 $(0, -1, 1)$, 再去求方向向量 $(1, 2, 3) \times (3, 2, 1) = (-4, 8, 4)$, 因此向量表示为 $(0, -1, 1) + t(-1, 2, 1), t \in \mathbb{R}$.
- (3) 先求得一个点坐标 $(1, 1, 2)$, 再去求法向量 $(1, 2, 0) \times (2, 0, 1) = (2, -1, -4)$, 因此平面可表示为 $2x - y - 4z = -7$.

$$2. (1) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}-\frac{3}{2} * \text{①} \quad \text{③}-\frac{1}{2} * \text{①} \quad \text{④}-\text{①}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}-\frac{2}{3} * \text{③} \quad \text{②}+\frac{5}{3} * \text{③}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_5 \\ x_3 = -2x_5 \\ x_1 + 2x_2 = -3x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$X = (-3n - 2m, m, -2n, -n, n)^T, m, n \in \mathbb{R}$ 是自由变元.

(2) 解集是基础解系加上代表元, 即 $(1 - 3n - 2m, 1 + m, 2 - 2n, 3 - n, n)^T$.

3. (1) 只需证明 $\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \in \mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}, \text{gcd}(a, b) = 1$, 那么 $a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3|a \Rightarrow 9|a^2 \Rightarrow 3|b^2 \Rightarrow 3|b$, 矛盾.

4. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5}) = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2 + \sqrt{-5}$ 是不可约数: $2 + \sqrt{-5} = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) \Rightarrow 9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5}) = (a + b\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$ 无解; 但是 $2 + \sqrt{-5} \nmid 3 \times 3$ 而 $2 + \sqrt{-5} \nmid 3$, 因此不是素数.

5. $(\beta_1, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)A, (\gamma_1, \dots, \gamma_t) = (\beta_1, \dots, \beta_s)B \Rightarrow (\gamma_1, \dots, \gamma_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(AB)$, 因此可以线性表出.

6. (1) 从 $a_{ij}^2 = \sum_s a_{is}a_{sj}$ 可以看出 H^k 的 (i, j) 元表示从 i 到 j 乘坐恰 k 次航班有多少种乘坐方式. (2) $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3$, 分别有 1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 2 种航班选择; $2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$ 都要倒 3 次, 是最多的.

7. 由上题知 A^3 的 (i, i) 元表示从 i 到 i 有几条恰走 3 次的路径, 三角形会在结点上算 3 次, 因此要除以 3.

8. 本题的关键是处理集合 A 包含无穷元素的情形. 假设存在一一映射 $f: A \mapsto P(A)$, 则考虑集合 $A = \{x : x \notin f(x)\}$. 此时若 $f^{-1}(A) \notin A$, 则根据定义 $f^{-1}(A) \in A$; 反之亦矛盾.

9. 我们的思路应当去找满足条件 $A \subset f(A)$ 的最大集合, 即令 $T = \{\cup_{\alpha} A_{\alpha} : A_{\alpha} \subset f(A_{\alpha})\}$. 根据定义有 $T = \cup_{\alpha} A_{\alpha} \subset \cup_{\alpha} f(A_{\alpha}) = f(\cup_{\alpha} A_{\alpha}) = f(T)$, 再根据题给条件有 $f(T) \subset f(f(T)) \Rightarrow f(T) \subset T$.

10. (1) 全部写成无限小数, 然后作映射 $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots \rightarrow (0.a_1a_3a_5\cdots, 0.a_2a_4a_6\cdots)$; (2) $y = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$.
11. 因此在 ZF 公理体系中, 我们不考虑包含自身作为元素的集合.
12. 从 `pip install numpy` 开始.

3 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.