

# 高等数学 A II 习题课讲义

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2023 年 2 月 23 日

## 目录

<b>1 第 1 次习题课: 二重积分</b>	<b>3</b>
1.1 问题	3
1.2 解答	3
1.3 补充 (不要求掌握!)	3
<b>2 第 2 次习题课: 三重积分</b>	<b>4</b>
2.1 问题	4
2.2 解答	4
2.3 补充 (不要求掌握!)	5
<b>3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式</b>	<b>5</b>
3.1 问题	5
3.2 解答	6
3.3 补充 (不要求掌握!)	7
<b>4 第 4 次习题课: 曲面积分</b>	<b>7</b>
4.1 问题	7
4.2 解答	7
4.3 补充 (不要求掌握!)	8
<b>5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式</b>	<b>8</b>
5.1 问题	8
5.2 解答	9
5.3 补充 (不要求掌握!)	10
<b>6 第 6 次习题课: 初等积分法</b>	<b>10</b>
6.1 问题	10
6.2 解答	11
6.3 补充 (不要求掌握!)	11
<b>7 第 7 次习题课: 解的存在唯一性, 高阶线性微分方程</b>	<b>11</b>
7.1 问题	11
7.2 解答	12
7.3 补充 (不要求掌握!)	13

<b>8 第 8 次习题课: 常数变易法, 常系数线性微分方程组</b>	<b>13</b>
8.1 问题	13
8.2 解答	13
8.3 补充 (不要求掌握!)	14
<b>9 第 9 次习题课: 数项级数</b>	<b>14</b>
9.1 问题	14
9.2 解答	14
9.3 补充 (不要求掌握!)	16
<b>10 第 10 次习题课: 函数项级数</b>	<b>16</b>
10.1 问题	16
10.2 解答	17
10.3 补充 (不要求掌握!)	17
<b>11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数</b>	<b>18</b>
11.1 问题	18
11.2 解答	18
11.3 补充 (不要求掌握!)	19
<b>12 第 12 次习题课: 广义积分</b>	<b>19</b>
12.1 问题	19
12.2 解答	20
12.3 补充 (不要求掌握!)	21
<b>13 第 13 次习题课: 含参积分</b>	<b>21</b>
13.1 问题	21
13.2 解答	21
13.3 补充 (不要求掌握!)	21
<b>14 第 14 次习题课: 傅里叶级数</b>	<b>21</b>
14.1 问题	21
14.2 解答	21
14.3 补充 (不要求掌握!)	21
<b>15 综合复习</b>	<b>21</b>
15.1 问题	21
15.2 解答	21
<b>16 致谢</b>	<b>21</b>

# 1 第 1 次习题课: 二重积分

## 1.1 问题

1. 累次积分变序:  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx, \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy$ .
2. 求  $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  与  $xoy$  平面所围的体积.
3. 计算积分  $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ .
4. 区域  $D$  由  $y = x^3, y = 0, x = 1$  围成, 计算积分  $I = \iint_D \sqrt{1-x^4} d\sigma$ .
5. 区域  $D$  由  $y = 0, x = 1, y = x$  围成, 计算积分  $I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} d\sigma$ .
6. 区域  $D$  由  $x^2 + y^2 = 4$  和  $y = -x^2 + 1, y = x^2 - 1$  两线在  $|x| \leq 2$  部分所围成, 计算积分  $I = \iint_D (x^2 + y^3) d\sigma$ .
7.  $0 \leq p(x) \in R[a, b], f(x), g(x)$  于  $[a, b]$  单调递增, 证明  $\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$ .
8. 计算极限  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$ .

## 1.2 解答

1. 这种题最好画图. 答案是  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy, \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f(x, y) dx$ .
2. 区域  $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, D_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\}$ . 则体积  $V = \iint_D z d\sigma = 4 \iint_{D_0} z d\sigma = 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 4 \int_0^a \frac{2}{3} \frac{b}{a^3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \dots$  (换元法)  $\dots = \frac{\pi}{2} ab$ .
3. 区域  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ . 累次积分时先对  $x$  积分, 则原积分  $= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy = 1 - \sin 1$ .
4.  $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{1-x^4} dy = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} dx = -\frac{1}{6} (1-x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$ .
5.  $I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{4x^2-y^2}} \sqrt{4x^2-y^2} dy = \int_0^1 dx \left[ \frac{y}{2} \sqrt{4x^2-y^2} + \frac{4x^2}{2} \arcsin \frac{y}{2x} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4x^2-y^2}} = \int_0^1 \left( \frac{x}{2} \sqrt{3x^2} + 2x^2 \arcsin \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$ .
6. 首先, 因为积分区域关于  $y = 0$  对称, 所以  $\iint_D y^3 d\sigma = 0$ . 记  $D_1$  为  $D$  的第一象限部分,  $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}, D_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x^2 + 1\}$ . 因此  $I = 4 \iint_{D_1} x^2 d\sigma = 4 \iint_{D_2} x^2 d\sigma - 4 \iint_{D_3} x^2 d\sigma = 4 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 dy - 4 \int_0^1 dx \int_0^{-x^2+1} x^2 dy = 4 \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx - 4 \int_0^1 x^2 (1-x^2) dx = 4\pi - \frac{8}{15}$ .
7. 利用二重积分.

$$\begin{aligned} \text{RHS} - \text{LHS} &= \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b p(y) dy \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(y) f(y) dy \int_a^b p(x) g(x) dx \\ &= \int_a^b \int_a^b [p(x)p(y)f(x)g(x) - p(x)p(y)f(y)g(x)] d\sigma = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(x)[f(x) - f(y)] d\sigma \end{aligned}$$

同理  $\text{RHS} - \text{LHS} = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y) - f(x)] d\sigma$ . 两式相加得  $2(\text{RHS} - \text{LHS}) = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)[g(x) - g(y)][f(x) - f(y)] d\sigma \geq 0$ .

8. 记  $I(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$ , 则  $I^2(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-a}^a e^{-y^2} dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} d\sigma$ . 记区域  $D(a) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , 积分  $J(a) = \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2} d\sigma$ . 由简单的二维区域包含关系知  $J(a) \leq I^2(a) \leq J(\sqrt{2}a)$ . 再利用二重积分极坐标换元知  $J(a) = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta = -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=a} = \pi(1 - e^{-a^2})$ . 因此  $\lim_{a \rightarrow +\infty} J(a) = \pi$ . 由夹逼原理知  $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = \sqrt{\pi}$ .

## 1.3 补充 (不要求掌握!)

类似于累次极限和整体极限的关系, 累次积分和二重积分也不具有相互决定性, 即二重积分存在并不保证累次积分存在. 例如设  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  是区间  $[0, 1]$  上的所有有理数组成的序列, 定义矩形  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  上的函数为  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{if } x = x_k, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ . 可以证明  $f(x, y) \in R(D)$  且  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ . 但是, 由于  $f(x_k, y) = \frac{1}{k} \text{Dirichlet}(y)$  导致  $\int_0^1 f(x_k, y) dy \not\equiv 0$ , 所以  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  不能使用累次积分  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$  计算. 但是若固定  $y$ ,  $f(x, y)$  要么是 Riemann 函数要么恒为 0, 积分值都是 0, 因此  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  可以使用累次积分  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$  计算.

## 2 第2次习题课: 三重积分

### 2.1 问题

1. 区域  $\Omega$  由  $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$  围成, 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} x dv$ .
2. 区域  $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}$ , 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} z dv$ .
3. 区域  $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ , 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv$ .
4. 区域  $D$  由  $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (y>0), (x-2a)^2 + y^2 = 4a^2 (y>0), y=x$  围成, 计算积分  $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$ .
5. 计算椭圆抛物面  $z = x^2 + 2y^2$  及抛物柱面  $z = 2 - x^2$  所围成立体的体积.
6. 区域  $D = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\}$ , 计算积分  $I = \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} d\sigma_{xy}$ .
7. 区域  $\Omega$  由  $z = \frac{x^2+y^2}{m}, z = \frac{x^2+y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y = \beta x (0 < m < n, 9 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$  围成且在第一卦限的部分, 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} xyz dv$ .
8. 设  $h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, f(x) \in C[-h, h]$ , 证明  $\iiint_{\Omega} f(\alpha x + \beta y + \gamma z) dv_{xyz} = \pi \int_{-1}^1 (1-\zeta^2) f(h\zeta) d\zeta$ , 其中区域  $\Omega$  是单位球内部.
9. 区域  $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$ , 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$ .
10. 区域  $\Omega = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ , 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$ .
11. 区域  $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 计算积分  $I = \iint_D \max\{xy, x^3\} d\sigma$ .

### 2.2 解答

1. 记区域  $D_{xy} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 1\}$ , 累次积分时依次对  $z, y, x$  积分, 有  $I = \iint_{D_{xy}} [\int_0^{1-x-2y} x dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) d\sigma_{xy} = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} [x(1-x)-2xy] dy = \int_0^1 [\frac{1}{2}x(1-x)^2 - \frac{1}{4}x(1-x)^2] = \frac{1}{48}$ .
2. 记区域  $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{2}\}$ , 累次积分时先对  $z$  积分再极坐标换元, 有  $I = \iint_{D_{xy}} [\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} z dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}[R^2 - 2(x^2+y^2)] d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}(R^2 - 2r^2) r dr = \frac{\pi R^4}{8}$ .
3. 由对称性,  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv + 2 \iiint_{\Omega} (xy + yz + zx) dv = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$ . 先计算  $I_1 = \iiint_{\Omega} z^2 dv$ . 记区域  $D_z = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} \leq 1\}$ , 累次积分时先对  $\sigma_{xy}$  积分再对  $z$  积分, 有  $I_1 = \int_{-c}^c dz \iint_{D_z} z^2 d\sigma_{xy} = \int_{-c}^c z^2 \pi ab(1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{4\pi abc^3}{15}$ . 因此  $I = \frac{4\pi abc}{15}(a^2 + b^2 + c^2)$ .
4. 令  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ , 有  $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 - 2ar \cos \theta = 0 \Rightarrow r = 2a \cos \theta \\ (x-2a)^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow r = 4a \cos \theta \\ y = x \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ , 从而  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a \cos \theta}^{4a \cos \theta} r^2 dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3} a^3 \cos^3 \theta d\theta = \frac{112-70\sqrt{2}}{9} a^3$ .
5. 联立方程  $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ , 因此区域  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 体积  $V = \iint_D [(2-x^2) - (x^2+2y^2)] d\sigma = 2 \iint_D (1-x^2-y^2) d\sigma$ . 做极坐标换元知  $V = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) dr = \pi$ .
6. 令  $\begin{cases} \xi = x+y \\ \eta = x-y \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ y = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$ , Jacobi 行列式为  $J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$ , 区域  $D_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1\} \Rightarrow D_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$ , 所以换元后  $I = \iint_{D_{\xi\eta}} \xi^2 e^{\xi\eta} |J| d\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^1 \xi^2 e^{\xi\eta} d\eta = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi(e^{\xi} - 1) d\xi = \frac{1}{4}$ .
7. 令  $\begin{cases} u = \frac{z}{x^2+y^2} \\ v = xy \\ w = \frac{y}{x} \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{w}} \\ y = \sqrt{vw} \\ z = uv(w + \frac{1}{w}) \end{cases}$ , Jacobi 行列式  $J = |\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}| = \frac{v}{2w}(w + \frac{1}{w})$ , 区域  $\Omega \rightarrow \Omega_{uvw} = \{(u, v, w) : \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, a^2 \leq v \leq b^2, \alpha \leq w \leq \beta\}$ , 所以换元后  $I = \iiint_{\Omega_{uvw}} \sqrt{\frac{v}{w}} \sqrt{vw} uv(w + \frac{1}{w}) \frac{v}{2w}(w + \frac{1}{w}) du dv dw = \iiint_{\Omega_{uvw}} v^3 u(w + \frac{1}{w})^2 \frac{1}{w} du dv dw = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} u du \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} (w + \frac{2}{w} + \frac{1}{w^3}) dw = \frac{1}{32} (\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) (b^8 - a^8) [(\beta^2 - \alpha^2)(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}) + 4 \log \frac{\beta}{\alpha}]$ .

$$8. \text{ 作正交变换 } \begin{cases} \xi = a_1x + b_1y + c_1z \\ \eta = a_2x + b_2y + c_2z \\ \zeta = \frac{1}{h}(\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{cases} \quad (\text{旋转}), \text{ 则 } \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} \right| = 1, \text{ 所以换元后 } \text{LHS} = \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leq 1} f(h\zeta) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$\int_{-1}^1 d\zeta \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq 1-\zeta^2} f(h\zeta) d\xi d\eta = \pi \int_{-1}^1 (1-\zeta^2) f(h\zeta) d\zeta = \text{RHS}.$$

$$9. \text{ 作球坐标变换, 区域 } \Omega: 0 \leq r \leq 2 \cos \phi, \text{ 积分 } I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^{2\cos\phi} r^2 r^2 \sin \phi dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^{2\cos\phi} r^4 dr =$$

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \frac{32}{5} \cos^5 \phi d\phi = -\frac{64}{5} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \phi d\cos \phi = -\frac{64}{5} \frac{\cos^6 \phi}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15} \pi.$$

$$10. \text{ 作广义球坐标系变换 } \begin{cases} x = ar \sin \phi \cos \theta \\ y = br \sin \phi \sin \theta \\ z = cr \cos \phi \end{cases}, \text{ Jacobi 行列式为 } J = abcr^2 \sin \phi, \text{ 所以换元后}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^1 dr r^2 abc \sin \phi (a^2 r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + c^2 r^2 \cos^2 \phi) \\ &= \frac{abc}{5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi -[(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)(1 - \cos^2 \phi) + c^2 \cos^2 \phi] d\cos \phi \\ &= \frac{abc}{5} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{4}{3} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) + \frac{2}{3} c^2 \right] d\theta = \frac{4abc\pi}{15} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$11. \text{ 引入辅助积分 } J = \iint_D \min\{xy, x^3\} d\sigma. \quad I+J = \iint_D (xy+x^3) d\sigma = \int_0^1 dy \int_{-1}^1 (xy+x^3) dx = 0, \quad I-J = \iint_D |xy-x^3| d\sigma =$$

$$\iint_D |x||y-x^2| d\sigma = 2 \int_0^1 dy \int_0^1 |x|y-x^2| dx \stackrel{u=x^2}{=} \int_0^1 dy \int_0^2 |y-u| du \stackrel{\text{几何意义}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 [y^2 + (1-y)^2] dy = \frac{1}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{6}.$$

## 2.3 补充 (不要求掌握!)

$n$  维空间中的球坐标系: 一个向径  $r$ ,  $n-1$  个角度  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ , 其中, 一个角度转一圈 ( $\theta_{n-1}$ ),  $n-2$  个角度转半圈

$$(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}). \text{ 与直角坐标系的关系为 } \begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-2} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \end{cases}, \text{ 利用归纳法可以证明 Jacobi 行列式为}$$

$$|J| = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}.$$

$n$  维空间中半径为  $R$  的球体  $\Omega: x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$  的体积  $V_n$ : 作球坐标变换知

$$\begin{aligned} V_n &= \int \dots \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_n = \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \int_0^\pi d\theta_{n-2} \dots \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^R r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} dr \\ &= \frac{R^n}{n} 2\pi \int_0^\pi \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^\pi \sin^2 \theta_{n-3} d\theta_{n-3} \dots \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \\ &= \frac{R^n}{n} 2\pi \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \dots \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2}\right) \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \end{aligned}$$

关于 Beta 函数, 参见后述的含参积分.

## 3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式

### 3.1 问题

1. 曲线  $\Gamma: x^2 + y^2 = x$ , 计算积分  $I = \int_{\Gamma} \sqrt{1-x^2-y^2} ds$ .

2. 曲线  $C$  是  $y=0, y=x(x \geq 0), x^2 + y^2 = a^2$  所围成图形的边界, 计算积分  $I = \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$ .

3. 曲线  $L: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = at \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ , 计算积分  $I = \int_L \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}$ .
4. 曲线  $C: \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 计算积分  $I = \int_C (x^2 + y^2)^n ds$ .
5. 曲线  $C: x^2 + y^2 = a^2$ , 计算积分  $I = \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ , 方向是逆时针.
6. 曲线  $\widehat{AB}$  为单位圆周  $x^2 + y^2 = 1$  的上半部分, 计算积分  $I = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy$ , 方向为从  $A(1, 0)$  到  $B(-1, 0)$ .
7. 曲线  $\Gamma$  是从  $(0, 0)$  沿函数  $y = x^\alpha$  到  $(1, 1)$  的部分, 计算积分  $I = \int_\Gamma (x^2 - y^2)dx - 2xydy$ .
8. 曲线  $\Gamma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线, 计算积分  $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz$ , 方向是从  $z$  轴正向看回来的逆时针方向.
9. 区域  $D$  是由点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$  围成的三角形, 计算积分  $I = \iint_D x^2 dxdy$ .
10. 曲线  $C: 741x^8 + 886e^x y^2 + \sin(x^9 \cos(y)) = 5$ , 计算积分  $I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ .
11. 证明或否定: 曲线积分  $I = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$  在  $\mathbb{R}^2$  内积分与路径无关.
12. (格林第二公式) 设闭区域  $D$  是由有限条逐段光滑曲线围成的,  $u = u(x, y), v = v(x, y) \in C^2(D)$ , 证明  $\iint_D (v\Delta u - u\Delta v)d\sigma = \oint_{\partial D} (v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}})ds$ , 其中  $\vec{n}$  为  $\partial D$  的单位外法向量.
13. 求函数  $u(x, y)$  使得  $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1+x^2}dy$ .

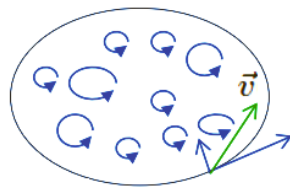
## 3.2 解答

1. 曲线参数方程  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ , 则  $ds = \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} dt = \frac{1}{2} dt$ , 原积分  $I = \int_\Gamma \sqrt{1-x} ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}| dt = \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 2$ .
2. 记  $C_1, C_2, C_3$  分别为曲线  $C$  的下、右上、左上部分, 则原积分  $I = \int_{C_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{C_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{C_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\theta + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx = (e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a + e^{\sqrt{2}x} \big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4} a e^a + 2(e^a - 1)$ .
3. 直接使用公式,  $I = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2} dt = \int_0^{2\pi} t^2 \sqrt{2} a dt = \frac{8\sqrt{2}}{3} a \pi^3$ .
4. 直接使用公式,  $I = \int_0^{2\pi} a^{2n} a d\theta = 2\pi a^{2n+1}$ .
5. 曲线参数方程  $x = a \cos t, y = a \sin t$ , 因此  $I = \oint \frac{a^2(\cos t + \sin t)(-\sin t) - a^2(\cos t - \sin t) \cos t}{a^2} dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi$ .
6. 由  $x^2 + y^2 = 1$  知  $xdx + ydy = 0$  得  $dy = -\frac{x}{y} dx$ , 从而有  $\int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy = \int_1^{-1} -ydx + x(-\frac{x}{y} dx) = \int_{-1}^1 (\frac{x^2+y^2}{y}) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$ .
7. 直接计算得  $I = \int_0^1 (x^2 - x^{2\alpha}) dx - 2xx^\alpha(\alpha x^{\alpha-1}) dx = \int_0^1 (x^2 - (2\alpha+1)x^{2\alpha}) dx = -\frac{2}{3}$ .
8. 球面的单位法向量为  $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ , 平面的单位法向量为  $\vec{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ . 所以曲线  $\Gamma$  的单位切向量为  $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ . 从而积分为  $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot \vec{\tau} ds = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) ds = \int_\Gamma 0 ds = 0$ .
9.  $AB$  的方程为  $y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ ,  $BC$  的方程为  $y = y_2 + \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$ ,  $CA$  的方程为  $y = y_3 + \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_3)$ . 由格林公式, 知原积分  $I = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{3}x^3) d\sigma = \oint_{\partial D} \frac{1}{3}x^3 dy = \int_{AB} \frac{1}{3}x^3 dy + \int_{BC} \frac{1}{3}x^3 dy + \int_{CA} \frac{1}{3}x^3 dy = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{3}x^3 \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{1}{3}x^3 \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} dx + \int_{x_3}^{x_1} \frac{1}{3}x^3 \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3} dx = \frac{1}{12}[(y_2-y_1)(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1) + (y_3-y_2)(x_3^2+x_2^2)(x_3+x_2) + (y_1-y_3)(x_1^2+x_3^2)(x_1+x_3)]$ .
10. 容易验证圆点  $O$  是闭曲线  $C$  所围成区域的内点. 记  $C_\epsilon: x^2 + y^2 = \epsilon^2$ , 取  $\epsilon$  足够小使  $C_\epsilon$  围成的区域完全在曲线  $C$  内侧. 在  $C$  与  $C_\epsilon$  围成的区域  $D$  上使用格林公式知  $\oint_{\partial D} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2})) d\sigma = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{C_\epsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \stackrel{x=\epsilon \cos \theta, y=\epsilon \sin \theta}{=} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ .
11. 上述积分为两个曲线积分之差, 即  $I = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2} = \int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \int_\Gamma \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$ . 令  $P_i = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q_i = \frac{(x-i)dy}{(x-i)^2+y^2}, i=0, 1$ , 容易验证  $\frac{\partial P_i}{\partial y} = \frac{\partial Q_i}{\partial x}$ . 但由于  $P_0, Q_0$  包含瑕点  $(0, 0)$ ,  $P_1, Q_1$  包含瑕点  $(1, 0)$ , 且在包含瑕点的区域内积分值可能为  $2\pi$  (第 10 题结论), 不包含瑕点的区域内积分值必为 0, 因此原积分与路径有关, 结论不对.
12. 由格林公式,  $\iint_D \nabla \cdot (P, Q) d\sigma = \iint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) d\sigma = \oint_{\partial D} P dy - Q dx = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot (dy, -dx) = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot \vec{n} ds$ . 因此  $\oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \oint_{\partial D} v \nabla u \cdot \vec{n} ds = \iint_D \nabla \cdot (v \nabla u) d\sigma = \iint_D (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) d\sigma$ , 类似有  $\oint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) d\sigma$ . 两式相减即得结果.
13. 令  $P(x, y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x, y) = \frac{e^y}{1+x^2}$ , 则有  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xe^y}{(x^2+1)^2}$ .  $\int P(x, y) dx = \frac{e^y-1}{x^2+1} + C'$ ,  $Q(x, y)$  删除掉含  $x$  的项后为 0, 因此  $u(x, y) = \frac{e^y-1}{1+x^2} + C$ .

### 3.3 补充 (不要求掌握!)

格林公式的物理意义: 平面定常流体 (各点流速只与位置有关, 与时间无关) 于  $(x, y)$  点的流速为  $\vec{v}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ . 对于固定的  $x$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  决定了  $x$  方向向  $y$  方向的旋转, 所以若以逆时针方向为正向, 则  $x$  方向向  $y$  方向的旋转度量为  $-\frac{\partial P}{\partial y}$ . 对于固定的  $y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  决定了  $y$  方向向  $x$  方向的旋转, 其度量为  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ . 从而,  $(x, y)$  点的流体的旋转度的度量为  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ , 命名为 (平面流场的旋度), 记为  $\text{rot } \vec{v}$ .

物理现象: 边界线  $\partial D$  上的环流量等于区域  $D$  上各点旋转量的迭加.



## 4 第 4 次习题课: 曲面积分

### 4.1 问题

1. 计算球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  被柱面  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  割下的部分的面积.
2. 求螺旋面  $\Sigma: \begin{cases} x = u \sin v \\ y = u \cos v \\ z = av \end{cases}$  在  $0 \leq u \leq R, 0 \leq v \leq 2\pi$  部分的面积, 其中  $a > 0$  是常数.
3. 求抛物面  $x^2 + y^2 = 2az$  包含在柱面  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy (a > 0)$  内的那部分面积.
4.  $\Sigma$  为上半球面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , 计算积分  $I = \iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS$ .
5.  $\Sigma$  是圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq H$ , 计算积分  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$ .
6. 求均匀物质曲面  $\Sigma: z = 2 - (x^2 + y^2), z \geq 0$  的质心坐标.
7.  $\Sigma$  是平面  $2x + 2y + z = 6$  于第一卦限部分上侧, 计算积分  $I = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ , 其中  $\vec{F} = (xy, -x^2, x + z)$ .
8.  $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,  $\Sigma$  是  $\partial\Omega$  的外侧, 计算积分  $I = \iint_{\Sigma} xyz dxdy$ .
9. 流  $\vec{v} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ , 求穿出  $\frac{1}{8}$  球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (第一卦限) 的流量.
10.  $\Sigma$  是  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq h)$  外侧, 计算积分  $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ .
11.  $\Sigma$  是由三个坐标平面及  $x + y + z = 1$  所围成四面体外侧, 计算积分  $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ .
12.  $S$  是曲面  $x^2 + y^2 = 1 (0 \leq z \leq 2)$  的外侧, 计算积分  $I = \iint_S x(y - z) dy dz + (x - y) dx dy$ .
13.  $S$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外表面, 计算积分  $I = \iint_S \frac{dxdy}{z}$ .

### 4.2 解答

1. 由对称性, 所求面积  $S$  为  $xy$  平面上方曲面的面积的两倍. 割下部分  $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D, D = \{(x, y) : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$ . 则面积  $S = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} d\sigma_{xy} = 2 \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} d\sigma_{xy}$ . 利用极坐标变换知  $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2} \Big|_0^{\cos \theta} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2\pi - 4$ .
2.  $\vec{\tau}_1 = (\sin v, \cos v, 0), \vec{\tau}_2 = (u \cos v, -u \sin v, a), |\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2| = \sqrt{u^2 + a^2} \Rightarrow S = \iint_{\Sigma} |\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2| d\sigma_{uv} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^R \sqrt{u^2 + a^2} du = 2\pi [\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(u + \sqrt{u^2 + a^2})]_0^R = \pi R \sqrt{R^2 + a^2} + \pi a^2 \log(\frac{R + \sqrt{R^2 + a^2}}{a})$ .
3. 由抛物面方程得  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{a}, dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}$ . 从曲线表达式  $\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy \\ z = 0 \end{cases}$  知  $(x, y)$  落在第一、四象限. 做极坐标变换, 知柱面方程为  $r^2 = a^2 \sin 2\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2})$ . 因此由对称性知  $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} \frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{a} r dr = \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + \sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1] d\theta = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} d\theta - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(\theta + \frac{\pi}{4}) d\theta - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3 u du - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{8\sqrt{2}a^2}{3} (-\frac{1}{3} \sin^2 u \cos u - \frac{2}{3} \cos u) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{20}{9} a^2 - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi)$ .
4.  $\Sigma$  在  $xoy$  平面的投影区域为  $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ . 又有  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$ , 所以  $\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ ,  $I = \iint_{\Sigma} x^2 y^2 dS = \iint_D x^2 y^2 \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = R \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^R \frac{r^5}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$ . 分开计算:  $\int_0^R \frac{r^5}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{r^4}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{(R^2 - t)^2}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^R (R^4 t^{-\frac{1}{2}} - 2R^2 t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}) dt = \frac{1}{2} [2R^4 t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} R^2 t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}}] \Big|_0^R = \frac{8}{15} R^5, \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{\pi}{4}$ . 所以  $I = R \frac{\pi}{4} \frac{8}{15} R^5 = \frac{2}{15} \pi R^6$ .

5.  $\Sigma$  可以表示为  $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$ , 其在  $yo z$  平面的投影区域为  $D_{yz} : -R \leq y \leq R, 0 \leq z \leq H$ . 又  $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}, \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}$ . 再考虑对称性,  $I = 2 \iint_{D_{yz}} (R^2 + z^2) \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} d\sigma_{yz} = 2R \int_{-R}^R \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} \int_0^H (R^2 + z^2) dz = 2R \arcsin \frac{y}{R} \Big|_{-R}^R (R^2 z + \frac{1}{3} z^3) \Big|_0^H = 2RH\pi(R^2 + \frac{H^2}{3})$ .
6. 设其质心坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 由对称性有  $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{\iint_{\Sigma} z dS}{\iint_{\Sigma} dS}$ . 易知  $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ , 因此  $\iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3}\pi$ ,  $\iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} (2 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(2 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{37}{10}\pi$ . 所以  $z_0 = \frac{111}{130}$ .
7.  $\vec{n} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), z = 6 - 2x - 2y, D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}, dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} d\sigma_{xy} = 3d\sigma_{xy}$ , 则  $I = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} [\frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}(x + z)] dS = \iint_D [\frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}(x + 6 - 2x - 2y)] \cdot 3d\sigma_{xy} = \iint_D [2xy - 2x^2 - x - 2y + 6] d\sigma_{xy} = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} [2xy - 2x^2 - x - 2y + 6] dy = \frac{27}{4}$ .
8. 记  $\Sigma_1, \Sigma_2$  分别为  $\Sigma$  在第一卦限和第五卦限的部分,  $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . 由对称性,  $I = 2 \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy = 2 \iint_D xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} d\sigma_{xy} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta \sqrt{1 - r^2} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 \sqrt{1 - r^2} dr^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 u \sqrt{1 - u} du \stackrel{t=\sqrt{1-u}}{=} \frac{1}{2} \int_1^0 (1 - t^2) t (-2t) dt = \frac{2}{15}$ .
9.  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), Q = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\Sigma} xy dy dz + yz dx dz + xz dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 3 \iint_{\Sigma} xz dx dy = 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} x \sqrt{1 - x^2 - y^2} d\sigma_{xy} = \frac{3\pi}{16}$ .
10.  $I = \iint_{\Sigma} (x, y, z) \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, -z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = \iint_{\Sigma} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 0$ .
11. 记  $\Sigma$  落在  $xy, yz, zx$  平面上的部分分别为  $\Sigma_z, \Sigma_x$  和  $\Sigma_y$ , 在平面  $x + y + z = 1$  的部分记为  $\Sigma_1$ . 则在  $\Sigma_z$  上,  $z = 0, dy dz = dz dx = 0$ , 从而  $\iint_{\Sigma_z} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 0$ . 同理在  $\Sigma_y$  与  $\Sigma_x$  上的积分都为零. 因此  $I = \iint_{\Sigma_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ . 记  $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ , 则由对称性  $I = 3 \iint_D (1 - x - y) d\sigma_{xy} = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \frac{1}{2}$ .
12. 注意到曲面  $S$  在  $O_{xy}$  平面上的投影为一曲线, 所以  $\iint_S (x - y) dx dy = 0$ . 为了计算另一个积分, 将曲面分成两部分  $\begin{cases} S_1 : x = \sqrt{1 - y^2} (0 \leq z \leq 2) \\ S_2 : x = -\sqrt{1 - y^2} (0 \leq z \leq 2) \end{cases}$ . 记  $D = \{(y, z) : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$ , 由对称性,  $I = 2 \iint_{S_1} x(y - z) dy dz = 2 \int_0^2 dz \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} (y - z) dy = -2\pi$ .
13. 记  $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ , 由对称性知  $I = 2 \iint_D \frac{dx dy}{c \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}} = \frac{2}{c} \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \frac{dy}{\sqrt{(1-x^2/a^2) - y^2/b^2}} = \frac{2}{c} \int_{-a}^a \frac{b\pi}{2} dx = \frac{2\pi ab}{c}$ .

### 4.3 补充 (不要求掌握!)

如何定义某条曲线是“可求长度”的? 如何定义某张曲面是“可求面积”的? 有兴趣的同学可以参考 [https://wqgcx.github.io/courses/Functions\\_of\\_Real\\_Variables.pdf](https://wqgcx.github.io/courses/Functions_of_Real_Variables.pdf).

事实上, 有些集合是不可求长的. 用  $m(A)$  表示集合  $A$  的“长度”, 在  $[0, 1]$  中根据规则“ $x_1 \sim x_2$  当且仅当  $x_1 - x_2 \in \mathbb{Q}$ ”划分等价类, 每个等价类选取一个元素  $x_\alpha$  (依赖于选择公理), 这样构成了集合  $A$ . 假设  $A$  可求长, 那么  $A_q = (A + q) \cap [0, 1], \forall q \in \mathbb{Q}$  也可求长, 且对于  $q \neq p$  有  $A_q \cap A_p = \emptyset$ . 这表明  $1 = m([0, 1]) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m(A_q)$ , 即  $A$  不是零长度的. 注意到对任意的  $q \in \mathbb{Q}$  成立  $m(A_q) \geq m(A) - q$ , 这样只需考虑所有在区间  $[0, \frac{1}{2}m(A)]$  中的有理数便知矛盾! 这说明集合  $A$  是不可求长的.

## 5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式

### 5.1 问题

- $\Sigma$  是锥面  $x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq 1)$  外侧, 计算积分  $I = \iint_{\Sigma} (y - z) dy dz + (z - x) dx dz + (x - y) dx dy$ .
- $S$  是单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上半部分上侧, 计算积分  $I = \iint_S (\sin yz + x) dy dz + (e^{xz} + y) dz dx + (xy + z) dx dy$ .
- 设  $S \subset \mathbb{R}^3$  为一封闭光滑曲面, 以它为边界的闭区域为  $D$ ,  $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3$  不在  $S$  上. 计算积分  $I = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}', \vec{n})}{r^2}$ , 其中  $\vec{r}' = (x - \xi, y - \eta, z - \zeta), r = |\vec{r}'|, |\vec{n}|$  是  $S$  的单位外法向量.
- 设  $f(x, y, z)$  表示从原点到椭球面  $\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上点  $P(x, y, z)$  的切平面的距离, 计算积分  $I = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{f(x, y, z)}$ .



5.  $L$  是平面  $x + y + z = 1$  被三个坐标面所截得三角形  $\Sigma$  的边界, 其正向与此三角形上侧成右手系, 计算积分  $I = \oint_L zdx + xdy + ydz$ .
6.  $L$  为椭圆  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \end{cases}$ , 方向与椭圆面上侧构成右手系, 计算积分  $I = \oint_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ .
7.  $\Gamma_h$  是平面  $x + y + z = h$  与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的交线, 从  $z$  轴正向看去逆时针方向, 计算积分  $I = \oint_{\Gamma_h} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$ .
8.  $C$  是平面  $x + y + z = \frac{3}{2}a$  切立方体  $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq a\}$  的表面所得的切痕, 方向是从  $x$  轴正向看去逆时针方向, 计算积分  $I = \oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$ .
9.  $S$  是柱面  $x^2 + y^2 = R^2, -R \leq z \leq R$  所围成的立体表面外侧, 计算积分  $I = \iint_S \frac{xdydz + z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$ .
10.  $S$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  及平面  $z = 1, z = 2$  所围立体的表面外侧, 计算积分  $\iint_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$ .
11. 函数  $P(x, y), Q(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , 且曲线积分  $\int_{\Gamma} Pdx - Qdy$  和  $\int_{\Gamma} Pdy + Qdx$  在  $\mathbb{R}^2$  中与路径无关, 求证  $P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x + \cos \theta, y + \sin \theta)d\theta, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

## 5.2 解答

1. 记  $\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}, \Sigma_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ , 则  $I = \oint_{\partial\Omega} (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy - \iint_{\Sigma_0} (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy := I_1 - I_2$ . 根据高斯公式,  $I_1 = \iiint_{\Omega} [0 + 0 + 0]dv = 0$ , 而  $I_2 = \iint_{\Sigma_0} (x - y)dxdy = \iint_{\Sigma_0} x d\sigma_{xy} - \iint_{\Sigma_0} y d\sigma_{xy} = 0 - 0 = 0$ . 因此  $I = 0$ .

2. 取  $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ , 方向向下, 则  $S \cup S_1$  构成了上半单位球体  $D$  的边界外侧. 由高斯公式得  $\iint_{S \cup S_1} (\sin yz + x)dydz + (e^{xz} + y)dzdx + (xy + z)dxdy = 3 \iiint_D dv = 2\pi$ . 而  $\iint_{S_1} (xy + z)dxdy = - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} xy d\sigma_{xy} = 0$ . 因此  $I = 2\pi$ .

3.  $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = \frac{1}{r} \vec{r} \cdot \vec{n} \Rightarrow I = \iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{x-\xi}{r^3} dydz + \frac{y-\eta}{r^3} dzdx + \frac{z-\zeta}{r^3} dxdy$ . 由  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3}) = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3}) = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-\eta)^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3}) = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$  知  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3}) = 0$ . 当  $(\xi, \eta, \zeta) \notin D$  时, 根据高斯公式成立  $I = \iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})]dv = 0$ . 当  $(\xi, \eta, \zeta) \in D$  时, 取  $\epsilon$  充分小使得球面  $S_{\epsilon} = \{(x, y, z) : (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \epsilon^2\}$  完全落在  $D$  的内部. 如果取  $S_{\epsilon}$  的内侧  $S_{\epsilon}^{-}$ , 设区域  $D_{\epsilon}$  以  $S$  与  $S_{\epsilon}^{-}$  为边界, 则  $\iint_{S \cup S_{\epsilon}^{-}} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \iint_{D_{\epsilon}} 0 dv = 0$ . 注意到在  $S_{\epsilon}$  上,  $\vec{r}$  与  $\vec{n}$  平行, 从而  $I = - \iint_{S_{\epsilon}^{-}} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \iint_{S_{\epsilon}} \frac{dS}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 = 4\pi$ .

4. 对  $\Sigma$  的方程两边微分得到  $\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2} = 0$ , 因此  $P$  处的外法向量为  $\vec{n} = (\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$ , 切平面方程为  $\frac{x}{a^2}(X - a) + \frac{y}{b^2}(Y - y) + \frac{z}{c^2}(Z - z) = 0$ , 原点到切平面距离  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2 + (\frac{y}{b^2})^2 + (\frac{z}{c^2})^2}}$ , 因此  $I = \iint_{\Sigma} \sqrt{(\frac{x}{a^2})^2 + (\frac{y}{b^2})^2 + (\frac{z}{c^2})^2} dS = \iint_{\Sigma} (\frac{x}{a^2} \cos \alpha + \frac{y}{b^2} \cos \beta + \frac{z}{c^2} \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma} \frac{x}{a^2} dydz + \frac{y}{b^2} dzdx + \frac{z}{c^2} dxdy$ . 记  $V = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ , 由高斯公式有  $I = \iiint_V (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) dv = \frac{4\pi abc}{3} (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$ .

5.  $\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = dydz + dzdx + dxdy$ , 因此由斯托克斯公式,  $I = \iint_{\Sigma} dydz + dxdz + dxdy = 3 \iint_{\Sigma} dxdy = \frac{3}{2}$ .

6. 记椭圆面上侧为  $\Sigma$ ,  $\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} = -2dydz - 2dzdx - 2dxdy$ , 因此由斯托克斯公式,  $I = \iint_{\Sigma} -2dydz - 2dzdx - 2dxdy = -2 \iint_{\Sigma} dydz + dxdy = -2[\iint_{D_{yz}} d\sigma_{yz} + \iint_{D_{xy}} d\sigma_{xy}] = -2(\pi ah + \pi a^2)$ .

7. 设平面  $x + y + z = h$  被圆周  $\Gamma_h$  所围成部分为  $S_h$ , 则  $S_h$  是一半径为  $\sqrt{1 - \frac{h^2}{3}}$  的圆盘. 由斯托克斯公式,  $I = \iint_{S_h} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{3}}(x + y + z)dS = -\frac{4h}{\sqrt{3}} \iint_{S_h} dS = -\frac{4h}{\sqrt{3}}\pi(1 - \frac{h^2}{3})$ .

8. 令  $\Sigma$  是  $C$  所围的区域, 方向为上侧, 由斯托克斯公式知  $I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z)dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \frac{3}{2}adS = -2\sqrt{3}a \iint_{\Sigma} dS$ . 最后, 因为  $\Sigma$  是边长为  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$  的正六边形, 面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ , 所以  $I = -\frac{9}{2}a^3$ .

9. 记  $S_1, S_2, S_3$  分别为  $S$  的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为  $I = \iint_S \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} + \iint_S \frac{z^2 dx dy}{x^2+y^2+z^2} := I_1 + I_2$ . 先看第一项, 显然  $\iint_{S_1} \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{S_2} \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} = 0$ . 记  $D_{yz} = \{(y, z) : -R \leq y, z \leq R\}$ , 从而  $\iint_{S_3} \frac{xydz}{x^2+y^2+z^2} = 2 \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2} dy dz}{R^2+z^2} = 2 \int_{-R}^R \frac{1}{R^2+z^2} dz \int_{-R}^R \sqrt{R^2-y^2} dy = 2 \times \frac{1}{2} \pi R^2 \times \frac{\pi}{2R} = \frac{1}{2} \pi^2 R$ . 再看第二项, 显然  $\iint_{S_1+S_2} \frac{z^2 dx dy}{x^2+y^2+z^2} = 0$ ,  $\iint_{S_3} \frac{z^2 dx dy}{x^2+y^2+z^2} = 0$  (前者是因为对称性, 后者是因为  $S_3$  在  $xoy$  平面上的投影是一曲线). 因此  $I = \frac{1}{2} \pi^2 R$ . 请读者注意, 本题由于区域内存在瑕点  $(0, 0, 0)$ , 不可直接使用高斯公式.

10. 记  $S_1, S_2, S_3$  分别为  $S$  的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为  $(\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}) \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ . 投影  $D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 从而  $\iint_{S_1} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = - \iint_{D_1} \frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e dr = -2\pi e$ . 投影  $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ , 从而  $\iint_{S_2} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \iint_{D_2} \frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^2 dr = 4\pi e^2$ . 投影  $D_3 = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ , 从而  $\iint_{S_3} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = - \iint_{D_3} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 e^r dr = -2\pi e(e-1)$ . 因此  $I = -2\pi e + 4\pi e^2 - 2\pi e(e-1) = 2\pi e^2$ .

11. 积分与路径无关意味着  $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ . 由格林公式知  $\forall$  区域  $D$ ,  $\oint_{\partial D} \frac{\partial P}{\partial n} ds = \iint_D \Delta P d\sigma = 0$ . 从而  $0 = \oint_{\partial B((x,y),r)} \frac{\partial P}{\partial n} ds = \oint_{\partial B((x,y),r)} \frac{\partial P}{\partial r} ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)}{\partial r} r d\theta = r \frac{\partial}{\partial r} (\int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) d\theta) \Rightarrow \int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) d\theta \equiv C$ . 令  $r \rightarrow 0$  知  $\int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) d\theta \rightarrow 2\pi P(x, y) \Rightarrow P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x+\cos\theta, y+\sin\theta) d\theta$  (令  $r=1$  即可).

### 5.3 补充 (不要求掌握!)

高斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流苏  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , 定义其散度为  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}$ .  $\operatorname{div} \vec{F} > 0$  表示点为“源”, 即能生流;  $\operatorname{div} \vec{F} < 0$  表示点为“汇”, 即能“吸流”;  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  表示点非源非汇. 因此高斯公式的向量形式为  $\iint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dv$ , 即: 流在某区域  $\Omega$  上的总散度等于流通过  $\Omega$  的边界的总流量.

斯托克斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流速  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , 定义其旋度为  $\operatorname{rot} \vec{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) \vec{i} +$

$$(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) \vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F}, \text{ 因此斯托克斯公式的向量形式为 } \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

即: 流在闭路  $L$  上的循环量 (环流量), 就是旋度在以  $L$  为边界的光滑曲面上的流量 (旋流量).

## 6 第 6 次习题课: 初等积分法

### 6.1 问题

1. 求解微分方程  $(2x \sin y + 3x^2 y) dx + (x^3 + x^2 \cos y + y^2) dy = 0$ .
2. 求解微分方程  $(x^2 + 1)(y^2 - 1) dx + xy dy = 0$ .
3. 质量为  $m$  的物体在空中下落, 初速度为  $v_0$ , 空气阻力与物体速度的平方成正比, 阻尼系数为  $k > 0$ . 沿垂直地面向下的方向取定坐标轴  $x$ , 计算  $t$  时刻的速度.
4. 求解微分方程  $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = x^3 (x \neq 0)$ .
5. 设微分方程  $\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$ , 其中  $a > 0$  为常数, 而  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数. 试求方程的  $2\pi$  周期解.
6. 求解微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ .
7. 考虑里卡蒂方程  $\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$ , 其中  $a \neq 0, b, m$  都是常数,  $x \neq 0, y \neq 0$ . 证明当  $m = 0, -2, \frac{-4k}{2k+1}, \frac{-4k}{2k-1} (k = 1, 2, \dots)$  时, 方程可通过适当的变换化为变量分离的方程.
8. 证明: 若  $\mu = \mu(x, y)$  是方程  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$  的一个积分因子使得  $\mu P(x, y) dx + \mu Q(x, y) dy = d\Phi(x, y)$ , 则  $\mu(x, y)g(\Phi(x, y))$  也是一个积分因子, 其中  $g(\cdot)$  是任一可微的非零函数.
9. 求解微分方程  $(x^3 y - 2y^2) dx + x^4 dy = 0$ .
10. 证明: 若  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$  是齐次方程, 则  $\mu(x, y) = \frac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}$  是一个积分因子.
11. 求解微分方程  $(3x^2 y + 2xy + y^3) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$ .
12. 假设微分方程  $\frac{dy}{dx} = H(x, y)$  在  $(x, y)$  平面上给出了一个以  $C$  为参数的曲线族  $\mathcal{C}$ . 试求另一个微分方程, 其给出了一个以  $K$  为参数的曲线族  $\mathcal{K}$ , 并且  $\mathcal{C}$  中的每一条曲线和  $\mathcal{K}$  中的每一条曲线相交成定角  $\alpha (-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , 以逆时针方向为正).

## 6.2 解答

1.  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos y + 3x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 因此是恰当方程. 注意到  $d(x^2 \sin y + x^3 y + \frac{1}{3}y^3) = (2x \sin y + 3x^2 y)dx + (x^3 + x^2 \cos y + y^2)dy$ , 因此通积分为  $x^2 \sin y + x^3 y + \frac{1}{3}y^3 = C$ .
2. 当因子  $x(y^2 - 1) \neq 0$  时, 用它除方程两端, 得到等价方程  $\frac{x^2+1}{x}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0$ . 积分得到  $x^2 + \log x^2 + \log |y^2 - 1| = C_1 \Rightarrow x^2 e^{x^2} |y^2 - 1| = e^{C_1} \Rightarrow y^2 = 1 + C \frac{e^{-x^2}}{x^2}$ , 其中  $C \neq 0$ . 当因子  $x(y^2 - 1) = 0$  时, 得到特解  $x = 0$  和  $y = \pm 1$ . 因此通积分为  $y^2 = 1 + C \frac{e^{-x^2}}{x^2}$  或  $x = 0$ .
3. 由牛顿第二运动定律知  $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 \Rightarrow \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{Ce^{2\sqrt{kg/m}t} + 1}{Ce^{2\sqrt{kg/m}t} - 1}$ . 代入初值条件知  $C = (v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}})^{-1}(v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}})$ .
4. 积分因子是  $e^{\int \frac{1}{x} dx} = |x|$ . 用它乘方程两侧得到  $\frac{d}{dx}(xy) = x^4 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{C}{x}$ .
5. 方程通解为  $y(x) = Ce^{-ax} + \int_0^x e^{-a(x-s)} f(s) ds$ , 现在选择常数  $C$ , 使  $y(x)$  成为  $2\pi$  周期函数. 代入  $y(2\pi) = y(0)$  得到  $y(x) = \frac{1}{e^{2a\pi} - 1} \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f(s) ds$ , 容易验证它确实是  $2\pi$  周期解.
6. 令  $y = ux$ , 则  $x \frac{du}{dx} + u = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \arctan u - \log \sqrt{1+u^2} = \log |x| - \log C$ . 从而  $|x| \sqrt{1+u^2} = Ce^{\arctan u}$ . 以  $u = y/x$  代回得到通积分  $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\arctan \frac{y}{x}}$ .
7. 不妨设  $a = 1$  (否则作变换  $\bar{x} = ax$ ). 因此考虑  $\frac{dy}{dx} + y^2 = bx^m$ .  $m = 0$  时显然是一个变量分离的方程. 当  $m = -2$  时, 作变换  $z = xy$ , 代入方程得到  $\frac{dz}{dx} = \frac{b+z-z^2}{x}$ , 这也是一个变量分离的方程. 当  $m = \frac{-4k}{2k+1}$ , 作变换  $x = \xi^{\frac{1}{m+1}}, y = \frac{b}{m+1} \eta^{-1}$ , 则方程变为  $\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \frac{b}{(m+1)^2} \xi^n$ , 其中  $n = \frac{-4k}{2k-1}$ . 再作变换  $\xi = \frac{1}{t}, \eta = t - zt^2$ , 方程变为  $\frac{dz}{dt} + z^2 = \frac{b}{(m+1)^2} t^l$ , 其中  $l = \frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$ . 比较  $m$  与  $l$  对  $k$  的依赖关系知只要将上述变换的过程重复  $k$  次, 就能把原方程化为  $m = 0$  的情形. 当  $m = \frac{-4k}{2k-1}$  时, 注意上述过程中  $n$  对  $k$  的依赖关系知可以化归到  $m = 0$  的情形.
8. 直接验证  $\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)g(\Phi(x, y))P(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)g(\Phi(x, y))Q(x, y)]$  即可.
9. 改写为  $(x^3 y dx + x^4 dy) - 2y^2 dx = 0$ . 前一组有积分因子  $x^{-3}$  和通积分  $xy = C$ , 后一组有积分因子  $y^{-2}$  和通积分  $x = C$ . 根据上一题结果, 只需找可微函数  $g_1, g_2$  使得  $\frac{1}{x^3} g_1(xy) = \frac{1}{y^2} g_2(x)$ . 只需取  $g_1(xy) = \frac{1}{(xy)^2}$  和  $g_2(x) = \frac{1}{x^5}$ , 得到原方程的积分因子  $\frac{1}{x^5 y^2}$ . 用它乘原方程得到全微分方程  $\frac{1}{(xy)^2} d(xy) - \frac{2}{x^5} dx = 0$ , 因此通积分为  $y = \frac{2x^3}{2Cx^4+1}$ . 注意到方程还有特解  $x = 0$  和  $y = 0$ , 它们实际上是在用积分因子乘方程时丢失的解.
10. 代入  $P(x, y) = x^m P_1(\frac{y}{x}), Q(x, y) = x^m Q_1(\frac{y}{x})$  直接验证即可.
11.  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2$ , 因此不是恰当方程, 但是  $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 3$  不依赖于  $y$ , 因此有积分因子  $e^{3x}$ , 用它乘原方程得到  $e^{3x}(3x^2 y + 2xy + y^3)dx + e^{3x}(x^2 + y^2)dy = d[e^{3x}(x^2 y + \frac{1}{3}y^3)] = 0$ , 因此通积分为  $e^{3x}(x^2 y + \frac{1}{3}y^3) = C$ .
12. 设曲线族  $\mathcal{C}$  中过点  $(x, y)$  的线素斜率为  $y'_1$ , 与它相交成  $\alpha$  角的线素斜率记为  $y'$ . 当  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  时, 有  $\tan \alpha = \frac{y' - y'_1}{1 + y'y'_1}$ , 即  $y'_1 = \frac{y' - \tan \alpha}{y' \tan \alpha + 1}$ . 因为  $y'_1 = H(x, y)$ , 所以等角轨线的微分方程为  $\frac{y' - \tan \alpha}{y' \tan \alpha + 1} = H(x, y)$ , 即  $\frac{dy}{dx} = \frac{H(x, y) + \tan \alpha}{1 - H(x, y) \tan \alpha}$ . 当  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  时有  $y' = -\frac{1}{y'_1}$ , 即微分方程为  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{H(x, y)}$ .

## 6.3 补充 (不要求掌握!)

皮亚诺存在定理: 设函数  $f(x, y)$  在矩形区域  $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$  内连续, 则初值问题  $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$  在区间  $|x - x_0| \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$  ( $M > \max_{(x, y) \in \mathbb{R}} |f(x, y)|$ ) 上至少有一个解  $y = y(x)$ .  
证明过程较为复杂, 有兴趣的同学可以参考《常微分方程教程》(丁同仁、李承治) 第二版 3.2 节.

## 7 第 7 次习题课: 解的存在唯一性, 高阶线性微分方程

### 7.1 问题

1. 设初值问题  $\frac{dy}{dx} = F(x, y), y(0) = 0$ , 其中函数  $F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0, -\infty < y < \infty \\ 2x, & \text{当 } 0 < x \leq 1, -\infty < y < 0 \\ 2x - \frac{4y}{x}, & \text{当 } 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x^2 \\ -2x, & \text{当 } 0 < x \leq 1, x^2 \leq y < \infty \end{cases}$ . 考虑区域  $S: 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty$ , 求其皮卡序列.
2. 设函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的某个邻域上关于  $y$  单调下降, 证明初值问题  $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$  至多有一个右行解.

3. 设函数  $f(x, y)$  在区域  $G$  内连续, 且满足不等式  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|)$ , 其中  $F(r) > 0$  是  $r > 0$  的连续函数, 且  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+0} \int_{\epsilon}^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = +\infty$  ( $r_1 > 0$  是常数). 证明微分方程  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  在  $G$  内经过每一点的解都是唯一的.

4. 设函数  $p(x), q(x), f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 证明初值问题 
$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = c, y'(x_0) = d \quad (x_0 \in (a, b)) \end{cases}$$
 在区间  $[a, b]$  内存在唯一的解.

5. 考虑线性齐次方程  $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y = 0$ , 其中  $p_i(x) \in C(\mathbb{R})$ , 证明其有且仅有  $n$  个线性无关的解.

6. 求解微分方程  $y''' - y'' - 2y' = 0$ .

7. 求解微分方程  $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 3y' - y = 0$ .

8. 求解微分方程  $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x - 5)$ .

9. 求解微分方程  $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$ .

10. 求解微分方程  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ .

## 7.2 解答

1.  $y_1(x) = \int_0^x F(t, 0)dt = x^2, y_2(x) = \int_0^x F(t, t^2)dt = -x^2$ , 由数学归纳法知  $y_n(x) = (-1)^{n+1}x^2$ . 本题的例子告诉我们没有 Lipschitz 条件, 皮卡序列可能不收敛.

2. 假设不然. 则设方程有两个右行解  $y_1(x), y_2(x)$ , 且至少存在一个值  $x_1 > x_0$  使得  $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$ . 不妨设  $y_1(x_1) > y_2(x_1)$ . 令  $\bar{x} = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{x : y_1(x) = y_2(x)\}$ , 显然有  $x_0 \leq \bar{x} < x_1$ , 而且  $r(x) := y_1(x) - y_2(x) > 0, \forall \bar{x} < x \leq x_1$  和  $r(\bar{x}) = 0$ . 因此, 我们有  $r'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) < 0$ , 进而  $r(x_1) = \int_{\bar{x}}^{x_1} r'(t)dt < 0$ , 矛盾.

3. 假设不然. 则在  $G$  内可以找到一点  $(x_0, y_0)$  使得方程有两个解  $y = y_1(x)$  和  $y = y_2(x)$  都经过  $(x_0, y_0)$ , 且至少存在一个值  $x_1 \neq x_0$  使得  $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$ . 不妨设  $x_1 > x_0$ , 且  $y_1(x_1) > y_2(x_1)$ . 令  $\bar{x} = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{x : y_1(x) = y_2(x)\}$ , 显然有  $x_0 \leq \bar{x} < x_1$ , 而且  $r(x) := y_1(x) - y_2(x) > 0, \forall \bar{x} < x \leq x_1$  和  $r(\bar{x}) = 0$ . 因此, 我们有  $r'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \leq F(|y_1(x) - y_2(x)|) = F(r(x))$ , 即  $\frac{dr(x)}{F(r(x))} \leq dx (\bar{x} < x \leq x_1)$ . 从  $\bar{x}$  到  $x_1$  积分上式, 得到  $\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leq x_1 - \bar{x}$ , 其中  $r_1 = r(x_1) > 0$ . 但这不等式左端是  $+\infty$ , 右端是一个有限的数, 矛盾.

4. 令  $y_1 = y, y_2 = y'$ , 则原微分方程可改写为  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} (y_1(x_0) = c, y_2(x_0) = d)$ , 即是  $\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x)(y(x_0) = (c, d)^T)$ . 固定  $x$ , 等式右边显然对  $y$  满足 Lipschitz 条件, 因此解存在唯一.

5. 令  $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ , 可以将原微分方程改写为  $\frac{dy}{dx} = A(x)y$ . 固定  $x_0$ , 由存在唯一性定理知对于任何常数向量  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , 存在唯一的元素  $y(x)$  使得  $y(x_0) = y_0$ . 这样得到一个映射  $H : y_0 \mapsto y(x), \mathbb{R}^n \rightarrow S$  (记解空间为  $S$ ). 显然对于任何  $y(x) \in S$ , 我们有  $y(x_0) \in \mathbb{R}^n, H(y(x_0)) = y(x)$ , 所以  $H$  是满的. 由唯一性又知  $H$  是单的. 容易验证  $H$  是线性的. 因此  $H$  是一个从  $\mathbb{R}^n$  到  $S$  的同构映射, 从而  $S$  是  $n$  维的, 即原微分方程有且仅有  $n$  个线性无关的解.

6. 特征方程  $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$ , 因此有通解  $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$ .

7. 特征方程  $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1) = 0$ , 因此有通解  $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + C_4 \cos x + C_5 \sin x$ .

8. 特征方程  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$ , 因此齐次方程通解为  $(C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-x}$ . 设有特解  $y^* = x^3(a + bx)e^{-x} = (ax^3 + bx^4)e^{-x}$ , 代入微分方程得  $a = -\frac{5}{6}, b = \frac{1}{24}$ . 因此原方程通解为  $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4)e^{-x}$ .

9. 特征方程  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$ , 因此齐次方程通解为  $(C_1 + C_2x)e^{-2x}$ . 设有特解  $y^* = a \cos 2x + b \sin 2x$ , 代入微分方程得  $a = 0, b = \frac{1}{8}$ . 因此原方程通解为  $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{8} \sin 2x$ .

10. 传统方法很容易, 但这里笔者希望使用另一种方法. 设  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , 原方程可写为  $y' = Ay$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . 回顾一元情形  $y' = ay$  的解为  $Ce^{ax}$ , 启发式地, 似乎我们也可以把现在这个方程的解写为  $e^{Ax}C$ . 运用一点线性代数知识可知  $A = P\Lambda P^{-1}$ , 其中  $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . 冥冥之中,  $e^{Ax} = Pe^{\Lambda x}P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-x} & \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} \\ \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} & \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-x} \end{pmatrix}$ .

因此, 通解可以写成  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(e^{3x} + e^{-x}) + C_2(e^{3x} - e^{-x}) \\ C_1(e^{3x} - e^{-x}) + C_2(e^{3x} + e^{-x}) \end{pmatrix}$ . 由此可见, 这是一个多么和谐的数学世界啊!

### 7.3 补充 (不要求掌握!)

皮卡存在唯一性定理的另一种证明方法: 考虑连续函数空间上的映射  $F: y \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx$ , 由于  $|F(y_1) - F(y_2)| = |\int_{x_0}^x [f(x, y_1) - f(x, y_2)]dx| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_1) - f(x, y_2)|dx \leq \int_{x_0}^x L|y_1 - y_2|dx = L|x - x_0||y_1 - y_2|$ . 回顾连续函数空间上的度量为  $\rho_{[a,b]}(y_1, y_2) = \max_{x \in [a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|$ , 因此当  $|x - x_0| < \frac{1}{L}$  时, 映射  $F$  是一个压缩映射. 由压缩映像原理,  $F$  的不动点存在且唯一, 这就意味着  $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx$  的解存在且唯一.

## 8 第 8 次习题课: 常数变易法, 常系数线性微分方程组

### 8.1 问题

1. 用常数变易法求解一阶线性微分方程  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ .
2. 求解微分方程  $x^2y'' + xy' + 4y = 10$ .
3. 求解微分方程组  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$ .
4. 求解微分方程组  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin t - 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = \cos t + 4x + 2y \end{cases}$ .
5. 求解微分方程组  $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x \end{cases}$ .
6. 设有一理想的柔软而不能伸缩的细线, 把它悬挂在两个定点  $P_1$  和  $P_2$  之间, 且只受重力作用, 试求悬链线的形状.
7. 利用牛顿第二定律和万有引力定律推导行星运动轨道方程.

### 8.2 解答

1. 对应齐次方程通解为  $Ce^{-\int p(x)dx}$ . 设原微分方程通解为  $C(x)e^{-\int p(x)dx}$ , 代入得  $C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ .
2. 作代换  $y = y - \frac{5}{2}$ , 仍记为  $y$ , 得到  $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ . 这是欧拉方程, 因此设  $x = e^t$ , 得到  $y'' + 4y = 0$ , 特征方程  $\lambda^2 + 4 = 0$ , 从而通解是  $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$ , 即  $y = C_1 \cos(2 \log |x|) + C_2 \sin(2 \log |x|)$ . 因此原方程通解为  $y = C_1 \cos(2 \log |x|) + C_2 \sin(2 \log |x|) + \frac{5}{2}$ .
3. 第二式可写为  $x = \frac{1}{2}(\frac{dy}{dt} + y)$ , 求得  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(\frac{d^2y}{dt^2} + y)$ . 代入第一式得  $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0$ , 特征方程  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ , 因此有通解  $y = (C_1 + C_2t)e^t$ . 反代入  $x = \frac{1}{2}(\frac{dy}{dt} + y)$ , 可求出  $x = \frac{1}{2}(2C_1 + C_2 + 2C_2t)e^t$ .
4. 对第一式两端求导得  $\frac{d^2x}{dt^2} = \cos t - 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$ . 由于  $y = \sin t - 2x - \frac{dx}{dt}$ , 代入第二式得  $\frac{dy}{dt} = \cos t + 4x + 2(\sin t - 2x - \frac{dx}{dt}) = \cos t + 2\sin t - 2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \cos t - 2\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -2\sin t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -2\sin t \Rightarrow x = 2\sin t + C_1t + C_2$ . 再代回原方程第一式知  $y = -3\sin t - 2\cos t - 2C_1t - C_1 - 2C_2$ .
5. 对第一式两端求二阶导再代入第二式, 得到  $\frac{d^4x}{dt^4} = x$ , 特征方程  $\lambda^4 - 1 = 0$ , 从而通解是  $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t, y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t$ .
6. 任取悬链线  $y = y(x)$  上的一小段  $\widehat{PQ}$ , 并设  $P$  和  $Q$  的坐标分别为  $(x, y(x))$  和  $(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$ ,  $\widehat{PQ}$  的长度为  $\Delta s$ , 其中  $s$  表示弧段  $\widehat{P_1P}$  的长度. 则小段  $\widehat{PQ}$  所受的重力为  $W = \gamma \cdot \Delta s$ , 方向垂直向下. 在  $\widehat{PQ}$  上的作用力除重力外还有张力  $F_1$  和  $F_2$ , 它们分别为  $P$  点和  $Q$  点沿着切线方向. 令  $F_1$  和  $F_2$  的水平分量分别为  $H_1 = H(x)$  和  $H_2 = H(x + \Delta x)$ , 而垂直分量分别为  $V_1 = V(x)$  和  $V_2 = V(x + \Delta x)$ . 利用平衡条件有  $H_2 - H_1 = 0, V_2 - V_1 - W = 0$ . 因此  $H(x) \equiv H_0, V(x + \Delta) - V(x) = \gamma \cdot \Delta s$ . 再利用拉格朗日微分中值定理得到  $V'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x = \gamma \cdot \Delta s (0 < \theta < 1)$ . 令  $\Delta x \rightarrow 0$  就有  $V'(x) = \gamma \frac{ds}{dx}$ . 由弧长公式知  $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$ . 由张力的方向知  $V(x) = H(x)y'(x) = H_0 \cdot y'(x)$ . 因此  $H_0 \cdot y''(x) = \gamma \sqrt{1 + (y'(x))^2}$ . 令  $z = y'$ , 则降为一阶方程  $z' = \frac{\gamma}{H_0} \sqrt{1 + z^2}$ , 通解为  $z = \sinh[\frac{\gamma}{H_0}(x + C_1)]$ . 再积分得到通解  $y = \frac{H_0}{\gamma} \cosh[\frac{\gamma}{H_0}(x + C_1)] + C_2$ .
7. 设太阳  $S$  位于惯性坐标系  $(x, y, z)$  的原点  $O$ , 地球  $E$  的坐标向量为  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . 由牛顿第二定律和万有引力定律知  $m_e \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{Gm_s m_e}{|\mathbf{r}(t)|^2} \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}$ , 即  $\ddot{x} = -\frac{Gm_s x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \ddot{y} = -\frac{Gm_s y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \ddot{z} = -\frac{Gm_s z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$ . 显然  $z\ddot{y} - y\ddot{z} = 0$ ,

即  $\frac{d}{dt}(z\dot{y}-y\dot{z})=0 \Rightarrow z\dot{y}-y\dot{z}=C_1$ . 类似地有  $x\dot{z}-z\dot{x}=C_2, y\dot{x}-x\dot{y}=C_3$ . 因此  $C_1x+C_2y+C_3z=0$ , 这证明了地球运动轨道永远在同一平面上. 不妨设永远在平面  $z=0$  上, 则方程改写为  $\ddot{x}+\mu x(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0, \ddot{y}+\mu y(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0$ , 其中常数  $\mu=Gm_s$ . 由此可得  $(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})+\mu(x\dot{x}+y\dot{y})(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0$ , 即  $\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-2\mu\frac{d}{dt}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})=0$ . 由此有  $\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_4$ . 利用极坐标变换, 改写为  $(\frac{dr}{dt})^2+(r\frac{d\theta}{dt})^2-\frac{2\mu}{r}=C_4$ . 注意到  $y\dot{x}-x\dot{y}=C_3$  也可类似改写为  $r^2\frac{d\theta}{dt}=C_3$ . 从而  $(\frac{dr}{dt})^2=C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}$ . 再利用  $r^2\frac{d\theta}{dt}=C_3$  可知  $\frac{dr}{d\theta}=\pm\frac{r^2}{C_3}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}$ , 即是  $\frac{d(\frac{C_3}{r})}{\pm\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}}=d\theta$ . 由此, 我们得到  $\arccos\frac{\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}}{\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}}=\theta-C_5$ . 从上式接出  $r$  关于  $\theta$  的函数, 得到  $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ , 其中常数  $e=\frac{C_3}{\mu}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}>0, p=\frac{C_3^2}{\mu}>0, \theta_0=C_5$ . 由平面解析几何知识知  $e<1$  时为椭圆,  $e=1$  时为抛物线,  $e>1$  时为双曲线.

### 8.3 补充 (不要求掌握!)

可适当了解一些常微分方程定性分析的内容, 可以理解为方程解对初值的敏感性. 由微分方程驱动的系统可能会由于初值的微扰引发极端变化. 一个正面的例子是  $\frac{dx}{dt}=x$ : 如果  $x(0)=0$ , 那它就一直为 0; 如果  $x(0)=1$ , 那对不起,  $x(t)=e^t$ , 越走越远. 一个反面的例子是  $\frac{dx}{dt}=-x$ : 如果  $x(0)=1$ , 那很幸运,  $x(t)=e^{-t}$ , 和  $x(0)=0$  的情形殊途同归. 一个好用的画相图的网站: <https://anvaka.github.io/fieldplay>.

## 9 第 9 次习题课: 数项级数

### 9.1 问题

1. 讨论级数  $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\cdots$  的收敛性.
2. 设  $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n\in\mathbb{N}, n\geq 3$ , 且  $F_1=1, F_2=2$ , 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{F_n}$  的收敛性.
3. 讨论级数  $\sum_{n=3}^{+\infty}\log\cos\frac{\pi}{n}$  的收敛性.
4. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\sqrt[k]{\frac{n-1}{n+1}})^p$  的收敛性, 其中  $k>0, p>0$  为常数.
5. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-2}}{e^{nn!}}$  的收敛性.
6. 设  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  是单调递减数列, 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$  收敛  $\Rightarrow \lim_{n\rightarrow+\infty}na_n=0$ .
7. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n n!}{n^n}$  的收敛性 ( $x\geq 0$ ).
8. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-\sin\frac{1}{n})^{n^2}$  的收敛性.
9. 设  $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$  为收敛的正项级数, 记余项  $r_n=\sum_{k=n}^{+\infty}a_k, n\in\mathbb{N}$ , 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n^p}$  的收敛性, 其中  $p>0$ .
10. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-\log n}$  的收敛性.
11. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}(\alpha>0)$  的收敛性.
12. 数列  $\{a_n\}$  单调趋于 0, 且  $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$  发散, 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx(x\neq k\pi)$  的绝对收敛性.
13. 设  $f(n)$  为  $\mathbb{N}$  的一个有界重排, 即是存在  $M>0$  使得  $|f(n)-n|\leq M$ , 则  $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$  收敛当且仅当  $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$  收敛, 且收敛值相等.
14. 讨论级数  $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\log^q n}$  的收敛性和绝对收敛性.

### 9.2 解答

1. 由于  $\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}}<\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\leq\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}<-\frac{1}{2n+1}$ , 由  $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}$  发散知原级数发散.

2. 易证  $F_n$  单调上升,  $\frac{1}{F_n} > 0$  单调下降. 由  $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3} < 2F_{n-2}$  知  $F_{n-2} > \frac{1}{2}F_{n-1}$ , 从而  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} > \frac{3}{2}F_{n-1}$ , 即  $\frac{1}{F_n} < \frac{2}{3}\frac{1}{F_{n-1}}$ . 故  $\frac{1}{F_n} < (\frac{2}{3})^{n-1}\frac{1}{F_1} = (\frac{2}{3})^{n-1}, \forall n \geq 2 \Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{F_n} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{F_n} < 1 + \sum_{n=2}^N (\frac{2}{3})^{n-1} < \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$ . 而  $S_N$  单调上升, 因此原级数收敛.

3. 因为  $0 \leq \cos \frac{\pi}{n} \leq 1, n \geq 3$ , 所以  $u_n = \log \cos \frac{\pi}{n} \leq 0$ , 即级数为定号级数. 由于  $\log \cos \frac{\pi}{n} = \log[1 + (\cos \frac{\pi}{n} - 1)] \sim \cos \frac{\pi}{n} - 1 \sim -\frac{\pi^2}{2n^2} (n \rightarrow +\infty)$ , 故  $\sum_{n=3}^{+\infty} \log \cos \frac{\pi}{n}$  与  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  同敛散, 因此原级数收敛.

4. 因为  $\sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}} = (1 - \frac{2}{n+1})^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{2}{n} \frac{1}{n+1} + o(\frac{1}{n+1}) + o(\frac{1}{n+1}) (n \rightarrow +\infty)$ , 所以  $1 - \sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}} \sim \frac{2}{n} \frac{1}{n+1} (n \rightarrow +\infty)$ , 因此有  $(1 - \sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}})^p \sim (\frac{2}{n} \frac{1}{n+1})^p = (\frac{2}{n})^p \frac{1}{(n+1)^p} (n \rightarrow +\infty)$ , 故原级数与  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$  同敛散, 即  $p > 1$  时收敛,  $p \leq 1$  时发散.

5. 记  $u_n = \frac{1}{n^2} \frac{n^n}{e^n n!} := \frac{1}{n^2} a_n$ , 则  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1} (n+1)!} \cdot \frac{e^n n!}{n^n} = \frac{1}{e} \cdot (\frac{n+1}{n})^n \leq 1$ . 因此  $a_n$  单调下降, 故  $a_n \leq a_1 = \frac{1}{e}$ . 从而成立  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$ . 由  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛知原级数收敛.

6. 显然  $a_n \downarrow 0$ . 因为  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 由 Cauchy 准则, 存在  $N_1$  使得  $\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k < \frac{\epsilon}{4}, \forall m > N_1, \forall p \in \mathbb{N}$ . 任取  $n > N_1, p = n$ , 成立  $\frac{1}{2}(2n)a_{2n} = na_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow (2n)a_{2n} < \frac{\epsilon}{2}$ . 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , 因此  $\exists N_2$ , 使得  $\forall n > N_2$  成立

$$a_n < \frac{\epsilon}{2}. \text{ 从而取 } N = 2 \max\{N_1, N_2\} + 1, \forall n > N \text{ 成立 } na_n = \begin{cases} (2k)a_{2k} < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, & n = 2k \\ (2k+1)a_{2k+1} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq (2k+1)a_{2k} \leq \epsilon & n = 2k+1 \end{cases}.$$

由极限的定义知结论成立.

7. 记  $a_n = \frac{x^n n!}{n^n}$ , 则  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = x(\frac{n+1}{n})^n \rightarrow \frac{x}{e} (n \rightarrow +\infty)$ . 因此  $x > e$  时级数发散,  $0 \leq x < e$  时级数收敛. 当  $x = e$  时, 由于  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1$ , 从而  $a_n \uparrow$ , 而  $a_1 = e$ , 故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ , 级数发散.

8. 记  $a_n = (\sqrt[n]{n} - \sin \frac{1}{n})^{n^2}, n \in \mathbb{N}$ , 则  $\sqrt[n]{a_n} = (\sqrt[n]{n} - \sin \frac{1}{n})^n$ . 利用 Taylor 展开有估计  $\sqrt[n]{n} - \sin \frac{1}{n} = e^{\frac{1}{n} \log n} - \sin \frac{1}{n} = \{1 + \frac{\log n}{n} + \frac{1}{2}(\frac{\log n}{n})^2 + o(\frac{\log^2 n}{n^2})\} - \{\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})\} = 1 + \frac{\log n - 1}{n} + o(\frac{1}{n}) := 1 + u_n$ , 其中  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = +\infty$ . 则  $\sqrt[n]{a_n} = (1 + u_n)^n = (1 + u_n)^{\frac{1}{u_n} nu_n} \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ , 从而原级数发散.

9. 因为  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  为收敛的正项级数, 所以  $r_n$  单调下降趋于 0. 注意到  $a_n = r_n - r_{n+1}$ , 所以  $0 < \frac{a_n}{r^p} \leq \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{dx}{x^p}, \forall n \in \mathbb{N}$ . 当  $0 < p < 1$  时,  $\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{r_n^p} \leq \sum_{n=1}^N \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{dx}{x^p} = \int_{r_{N+1}}^{r_1} \frac{dx}{x^p} \leq \int_0^S \frac{dx}{x^p} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$  收敛. 当  $p = 1$  时, 对于任意固定的  $n \in \mathbb{N}$ , 成立

$$\sum_{k=n}^{n+m} \frac{a_k}{r_k} \geq \frac{1}{r_n} \sum_{k=n}^{n+m} a_k = \frac{r_n - r_{n+m}}{r_n} = 1 - \frac{r_{n+m}}{r_n}, \forall m \in \mathbb{N}, \text{ 因此 } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{a_k}{r_k} \geq 1. \text{ 根据 Cauchy 收敛准则知 } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n} \text{ 发散.}$$

当  $p > 1$  时,  $\frac{a_n}{r_n^p} \geq \frac{a_n}{r_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ , 所以  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$  发散. 本题告诉我们, 若定义  $b_n = \frac{a_n}{r_n^p} (0 < p < 1)$ , 虽然  $\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{r_n^p} \rightarrow +\infty$ , 但

依然有  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  收敛. 即, 对任何一个收敛的正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , 总有另一个收敛的正项级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$ .

10. 显然是交错级数, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n - \log n} = 0$ . 用导数知识可以证明  $f(x) = x - \log x$  在  $x \geq 1$  时单调上升, 从而  $\frac{1}{f(x)}$  在  $x \geq 1$  时单调下降, 使用 Leibniz 判别法立得.

11. 令  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ , 则  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛,  $\{b_n\}$  单调有界 (使用  $y = x^{\frac{1}{x}}$  的单调性), 由 Abel 判别法知原级数收敛.

12. 书上例题已经证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$  收敛. 由于当  $x \neq k\pi$  时,  $|a_n \sin nx| \geq a_n \sin^2 nx = \frac{a_n}{2}(1 - \cos 2nx)$ .  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx)$  收敛,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n \sin nx|$  发散, 即  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$  条件收敛.

13. 记  $\sum_{n=1}^{+\infty}$  的部分和序列为  $S_n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)}$  的部分和序列为  $S'_n$ . 由有界重排性,  $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^n$  只能在  $\{a_k\}_{k=1}^{n+M}$  中,  $\{a_k\}_{k=1}^{n-M}$  必在  $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^n$  中, 从而  $|S'_n - S_n| \leq \sum_{j=-M}^M |a_{n+j}|, \forall n \in \mathbb{N}, n > M$ . 于是若  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=-M}^M |a_{n+j}| = 0. \text{ 而 } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \exists, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n. \text{ 反之, 若 } \sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)} \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{+\infty} \text{ 是 } \sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)} \text{ 的一个}$$

有界重排, 由上知  $\sum_{n=1}^{+\infty}$  收敛.

14. (i) 当  $p > 0$  时, 原级数收敛, 因为函数  $f(x) = x^p \log^q x$  在  $x$  充分大后单调递增且趋于  $+\infty$ , 从而  $\frac{1}{n^p \log^q n}$  单调下

降趋于 0. (ii)  $p = 0, q > 0$  时,  $\frac{1}{\log^q n}$  单调下降趋于 0, 原级数收敛. (iii) 当  $p = 0, q = 0$  时,  $a_n = (-1)^n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ , 从而原级数发散. (iv) 当  $p < 0$  或  $p = 0, q < 0$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^p \log^q n} = +\infty$ , 因此原级数发散. (v) 当  $p > 1$  时, 显然原级数绝对收敛. (vi) 当  $p = 1, q > 1$  时, 由积分判别法知原级数绝对收敛. (vii) 当  $p = 1, q \leq 1$  时, 由积分判别法知原级数条件收敛. (viii) 当  $0 < p < 1, q \in \mathbb{R}$  时,  $\frac{1}{n^p \log^q n} > \frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}$  且  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}$  发散, 所以原级数条件收敛. 综上所述, 我们

有以下结论:  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p \log^q n} \begin{cases} p < 0, & \text{发散} \\ p = 0, \begin{cases} q \leq 0, & \text{发散} \\ q > 0, & \text{条件收敛} \end{cases} \\ 0 < p < 1, & \text{条件收敛} \\ p = 1, \begin{cases} q > 1, & \text{绝对收敛} \\ q \leq 1, & \text{条件收敛} \end{cases} \\ p > 1, & \text{绝对收敛} \end{cases}.$

### 9.3 补充 (不要求掌握!)

Riemann 重排定理: 设  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  条件收敛, 则  $\forall S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , 存在重排  $\{f(n)\}$  使得  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)} = S$ .

证明思路: 记  $a_n^+ = \max\{0, a_n\}, a_n^- = \max\{0, -a_n\}$ , 则  $a_n^+ \geq 0, a_n^- \geq 0, a_n = a_n^+ - a_n^-$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^- = 0$ , 并且有  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = +\infty$ . 然后运用放多少拿多少的原则, 超过  $S$  就开始放另一项, 低于  $S$  又开始放另一项, 如此在  $S$  附近反复震荡 ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^- = 0$  保证了震荡越来越小), 以至无穷.

## 10 第 10 次习题课: 函数项级数

### 10.1 问题

1. 证明或否定:  $f_n(x) \Rightarrow f(x), g_n(x) \Rightarrow g(x)$ , 则  $f_n(x)g_n(x) \Rightarrow f(x)g(x)$ .
2.  $f(x) \in C[0, 1]$  且  $f(1) = 0$ , 证明  $x^n f(x) \Rightarrow 0, x \in [0, 1]$ .
3. 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)x}{[1+(n+1)^2 x][1+n^2 x]}$  在  $[a, +\infty) (a > 0)$  上一致收敛, 在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛.
4. 讨论  $\sum_{n=1}^{+\infty} x^k e^{-nx} (k > 1 \text{ 为常数})$  在  $[0, +\infty)$  上的一致收敛性.
5. 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$  在  $[1, +\infty)$  一致收敛  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$  收敛.
6. 设函数列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}, \{u_{1,n}(x)\}_{n=1}^{+\infty}, \{u_{2,n}(x)\}_{n=1}^{+\infty}, \dots, \{u_{2023,n}(x)\}_{n=1}^{+\infty}$  在区间  $I \in \mathbb{R}$  上有定义并且满足条件: (1) 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  在  $I$  上一致收敛; (2) 对每个  $x \in I, k \in \{1, 2, \dots, 2023\}$ ,  $\{u_{k,n}(x)\}$  关于  $n$  都是单调且一致有界的 (对于不同的  $k$ ,  $u_{k,n}(x)$  单调性可能不同). 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( f_n(x) \prod_{k=1}^{2023} u_{k,n}(x) \right)$  在区间  $I$  上的一致收敛性.
7. 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$  在任意区间  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  上一致收敛.
8. 讨论  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \frac{\cos nx}{n}} \arctan nx$  在  $\mathbb{R}$  上的一致收敛性.
9. 设数列  $\{a_n\}$  单调趋于 0, 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$  在  $(0, 2\pi)$  上连续.
10. 证明当  $x \in (-1, 1)$  时,  $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .
11. 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \in C^\infty(1, +\infty)$ .
12. 试构造一个函数, 它仅在  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$  处间断.
13. 证明  $f_n(x) = n^2(e^{\frac{1}{nx}} - 1) \sin \frac{1}{nx}$ , 证明  $f_n(x)$  对  $x \in (0, +\infty)$  不一致收敛, 但对  $x \in [\delta, +\infty)$  一致收敛, 其中  $\delta > 0$ .



## 10.2 解答

- 结论不对.  $f_n(x) = \frac{1}{1-x}, g_n(x) = (1-x)x^n, x \in (0, 1)$ , 则  $f_n(x) \Rightarrow \frac{1}{1-x}, g_n(x) \Rightarrow 0$ , 但是  $f_n(x)g_n(x) \not\Rightarrow 0$ .
- 显然  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, x \in [0, 1]$ . 记  $M = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . 由连续性,  $\exists \delta > 0$  使得  $|f(x)| < \epsilon, \forall x \in (1-\delta, 1)$ . 这样就有
 
$$\begin{cases} x \in [0, 1-\delta] \text{ 时, } |x^n f(x)| \leq M(1-\delta)^n \\ x \in (1-\delta, 1] \text{ 时, } |x^n f(x)| \leq |f(x)| < \epsilon \end{cases}$$
 . 取  $n$  足够大使  $M(1-\delta)^n < \epsilon$  即可.
- $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(2k+1)x}{[1+(k+1)^2x][1+k^2x]} = \sum_{k=1}^n [\frac{1}{1+k^2x} - \frac{1}{1+(k+1)^2x}] = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)^2x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{1+x} = S(x), x \in (0, +\infty)$ .  
 当  $x \in [a, +\infty)$  时,  $|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{1+(n+1)^2x} \leq \frac{1}{(n+1)^2a} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty) \Rightarrow S_n(x) \Rightarrow S(x), x \in [a, +\infty)$ . 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n = \frac{1}{(n+1)^2} \in (0, +\infty)$  使得  $|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{1}{2}$ , 从而  $S_n(x)$  在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛于  $S(x)$ .
- $u_n(0) = 0, u_n(x) > 0 (\forall x > 0), \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0, u_n(x) \in C^2[0, +\infty)$ , 令  $u'_n(x) = 0$  得到唯一驻点  $x = \frac{k}{n}$ . 容易验证此为最大值点,  $M_n = u_n(x_n) = (\frac{k}{e})^k \frac{1}{n^k}$ , 所以  $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$  收敛, 从而原级数在  $I$  上一致收敛.
- “ $\Rightarrow$ ”: 显然. “ $\Leftarrow$ ”: 已知  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$  收敛, 即  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$  在  $[1, +\infty)$  上一致收敛. 又有  $\frac{1}{n^{x-1}}$  关于  $n$  单调下降且  $|\frac{1}{n^{x-1}}| \leq 1, \forall x \in [1, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}$ . 由 Abel 判别法,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{n^{x-1}}$  在  $[1, +\infty)$  一致收敛.
- 由 Abel 判别法知  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)u_{1,n}(x)$  一致收敛,  $\sum_{n=1}^{+\infty} [f_n(x)u_{1,n}(x)]u_{2,n}(x)$  一致收敛, 依此类推知原级数一致收敛.
- 记  $u_n(x) = (-1)^n, v_n(x) = \frac{x^2+n}{n^2}$ , 则  $|\sum_{k=1}^n u_k(x)| \leq 1, \forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}, v_n(x) = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$  固定  $x$  后关于  $n$  单调下降, 且  $v_n(x) \leq \frac{\max\{|a|, |b|\} + n}{n^2} \downarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ , 即  $v_n(x) \Rightarrow 0, x \in [a, b]$ . 根据 Dirichlet 判别法, 原级数在  $[a, b]$  上一致收敛.
- 由于  $|\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}| \leq 1, \frac{1}{n + \frac{\cos nx}{n}}$  当  $n \geq 3$  时对  $n$  单调递减且一致收敛到 0, 由 Dirichlet 判别法知  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + \frac{\cos nx}{n}}$  一致收敛. 又由于  $\arctan nx$  对  $n$  单调且  $|\arctan nx| \leq \frac{\pi}{2}$  恒成立 (i.e. 一致有界), 由 Abel 判别法知原级数一致收敛.
- 往证级数在  $(0, 2\pi)$  上内闭一致收敛. 不妨设  $a_n$  非负单调下降. 记  $u_n(x) = a_n, v_n(x) = \cos nx$ . 则任意  $\delta > 0$ , 对于  $x \in [\delta, 2\pi - \delta], u_n(x) \Rightarrow 0$ , 且关于  $n$  单调. 另一方面,  $|\sum_{k=1}^n v_k(x)| = |\sum_{k=1}^n \cos kx| = \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}|}{2 \sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$ , 因此一致有界. 根据 Dirichlet 判别法, 原级数在  $[\delta, 2\pi - \delta]$  上一致收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \in C(0, 2\pi)$ .
- $\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$  在  $[-x, x]$  上一致收敛, 所以积分求和可交换, 即  $\int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ . 而  $\int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ . 从而当  $x \in (-1, 1)$  时, LHS = RHS.
- $\forall k \in \mathbb{N}, (\frac{1}{n^x})^{(k)} = \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x}$ , 因此只需证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x}$  在  $(1, +\infty)$  上内闭一致收敛即可, 而这是显然的.
- $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ .
- 容易证明  $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{x^2} = f(x) (n \rightarrow +\infty)$ . 对于  $x \in (0, +\infty)$ , 取  $x_n = \frac{1}{n}$ , 则  $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |n^2(e-1)\sin 1 - 1| \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ , 因此对于  $x \in (0, +\infty), f_n(x) \not\Rightarrow f(x)$ . 对于  $x \in [\delta, +\infty), |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x^2} |e^{\frac{1}{nx}} - 1 - \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}}| \stackrel{t=\frac{1}{nx}}{=} \frac{1}{x^2} |\frac{1}{t^2}(t + \frac{e^{\theta_1 t}}{2!}t^2)(t - \frac{\cos \theta_2 t}{3!}t^3) - 1| = \frac{1}{x^2} |\frac{e^{\theta_1 t}}{2!}t - \frac{\cos \theta_2 t}{3!}t^2 + \frac{e^{\theta_1 t}}{2!} \frac{\cos \theta_2 t}{3!}t^3|$ . 因此存在常数  $C$ , 当  $n$  充分大时, 成立如下估计  $\sup_{x \in [\delta, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\delta^2} C \frac{1}{n\delta} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ . 故对于  $x \in [\delta, +\infty)$  成立  $f_n(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

## 10.3 补充 (不要求掌握!)

等度连续: 设  $\{f_n(x)\}$  是定义在区间  $I$  上的函数列, 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得  $|f_n(x') - f_n(x'')| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x', x'' \in I$  满足  $|x' - x''| < \delta$ , 则称函数列  $\{f_n(x)\}$  在区间  $I$  上等度连续.

定理 1: 设  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致连续, 若  $f_n(x) \in C[a, b], n = 1, 2, \dots$ , 则  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上等度连续.

定理 2: 设  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上等度连续, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$ , 则  $f_n(x) \Rightarrow f(x), x \in [a, b]$ .

Ascoli 引理:  $X$  为紧致 Hausdorff 空间,  $Y$  为度量空间, 则  $F \subset C(X, Y)$  在紧开拓扑下是紧集的充要条件是  $F$  等度连续, 逐点列紧且为闭集.

证明留给读者思考. (数学书中常见话术, we leave the proofs to the readers)

## 11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数

### 11.1 问题

1. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)}{n^2} (x-3)^n$  的收敛半径和收敛域.
2. 设  $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . 已知  $n \rightarrow +\infty$  时, 有  $S_n \rightarrow +\infty$ , 且  $\frac{a_n}{S_n} \rightarrow 0$ . 求幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛半径.
3. 计算  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-2)(3n+1)}$ .
4. 计算  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+2)!}$ .
5. 求级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx}$  的收敛域与和函数.
6. 求  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$  的收敛半径、收敛域与和函数, 并求  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ .
7. 对  $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$  在  $x=0$  处做泰勒展开.
8. 对  $f(x) = \log^2(1+x)$  在  $x=0$  处做泰勒展开.
9. 证明  $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ .
10. 证明  $x = \sin x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 并由此计算  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .
11. 试构造  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), f_n(x) \not\equiv f(x), x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx$ .
12.  $a_n > 0, n = 1, 2, \dots, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , 且  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$  收敛, 证明  $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ .

### 11.2 解答

1. 记  $a_n = \frac{\log(n+1)}{n^2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} = 1$ , 所以收敛半径为  $r = 1$ . 当  $x-3 = -1$  即  $x = 2$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)}{n^2} (-1)^n$ , 绝对收敛. 当  $x-3 = 1$  即  $x = 4$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)}{n^2}$ , 绝对收敛. 所以收敛区域为  $[2, 4]$ .
2. 当  $x = 1$  时级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$  发散, 故收敛半径  $r \leq 1$ . 记幂级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n$  的收敛半径为  $R$ , 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$ , 因此  $r \geq R$ . 又有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - a_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{a_n}{S_n}) = 1$ , 从而  $R = 1$ . 综上  $r = 1$ .
3. 使用裂项求和.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} (3n+1) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{3n-2} - \frac{(-1)^n}{3n+1} \right] = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} - \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} + \frac{1}{3}$ . 为求  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$ , 考虑幂级数  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} x^{3n-2}, |x| \leq 1$ . 逐项求导, 得到  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{3n-3} = -\frac{1}{1+x^3}, |x| < 1$ . 于是  $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{-1}{1+t^3} dt, |x| \leq 1$ . 当  $x = 1$  时有  $f(1) = \int_0^1 \frac{-1}{1+t^3} dt = -\frac{1}{3} \log 2 - \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$ . 因此原级数求和为  $-\frac{1}{27} (6 \log 2 + 2\sqrt{3}\pi - 9)$ .
4. 引入幂级数  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n+2}}{(n+2)!}$ , 易知其收敛半径为  $+\infty$ . 从而逐项求导知  $f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x e^x \Rightarrow f(x) = (x-2)e^x + x + 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+2)!} = f(1) = 3 - e$ .
5.  $\sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx} = x \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = x \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n$ , 由于  $\sum_{n=1}^{+\infty} t^n$  的收敛域为  $(-1, 1)$ , 且  $x = 0$  时原级数为 0, 知  $x$  的收敛域为  $[0, \infty)$ . 和函数为  $S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x e^x}{e^x - 1}, & x > 0 \end{cases}$ .
6. 利用  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  可知收敛半径为 1, 收敛域为  $[-1, 1]$ . 记  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}, x \in [-1, 1]$ , 则  $f(0) = 0, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} (x \in (-1, 1)), f'(0) = 0, f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2x^{2n-1} = \frac{2x}{1-x^2}, x \in (-1, 1)$ . 从而成立  $f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x \frac{2t}{1-t^2} dt =$

$-\log(1-x^2), f(x) = f(x) - f(0) = -\int_0^x \log(1-t^2)dt = -t\log(1-t^2)|_0^x + \int_0^x t \frac{(-2t)}{1-t^2} dt = -x\log(1-x^2) + 2\int_0^x \frac{-t^2}{1-t^2} dt = -x\log(1-x^2) + 2x + \log \frac{1-x}{1+x} = (1-x)\log(1-x) - (1+x)\log(1+x) + 2x, x \in [-1, 1]$ . 从而  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = f(1) = 2(1-\log 2)$ .

7.  $\frac{1}{(1+t)^2}$  的展开式为  $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (n+1) t^n$ , 因此  $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n x^{2n}, |x| < 1$ .

8.  $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow \log^2(1+x) = \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right]^2 = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ , 其中  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}, n \in \mathbb{N}$ . 所以  $\log^2(1+x) = 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \right) x^n$ . 可以验证收敛域为  $x \in (-1, 1]$ .

9.  $x^{-x} = e^{-x \log x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \log x)^n}{n!}$ . 由于  $x \log x \in [-\frac{1}{e}, 0]$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \log x)^n}{n!}$  在此范围内一致收敛, 因此积分和顺序可交换. 再利用  $\int_0^1 x^n \log^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$  知  $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ .

10. 对  $\arcsin t$  做泰勒展开知  $\arcsin t = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ , 换元  $x = \arcsin t$  立得. 由一致收敛性, 两边从  $x=0$  积分到  $x = \frac{\pi}{2}$  得到  $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ . 由于  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ , 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

11. 取  $f_n(x) = nx(1-x)^n$ .

12. 一方面,  $\forall N \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \geq \int_0^{+\infty} e^{-x} \left( \sum_{n=0}^N a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^N a_n n!$ . 令  $N \rightarrow +\infty$  知  $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ .

另一方面,  $\forall M > 0, \int_0^M e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^M e^{-x} x^n dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ . 令  $M \rightarrow +\infty$  知  $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ . 综上所述  $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ . 请读者注意, 我们没有  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  在  $[0, +\infty)$  上的一致收敛性, 不能盲目交换积分和顺序.

### 11.3 补充 (不要求掌握!)

命题: 存在处处连续但处处不可导的函数. 一个构造是  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u(4^n x)}{4^n}$ , 其中  $u(x)$  是  $|x|(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2})$  的周期延拓.

证明: 显然  $S(x)$  一致收敛, 且每一项都是连续函数, 因此  $S(x)$  连续. 下面证明  $\forall x_0 \in \mathbb{R}, S'(x_0) \nexists$ . 不妨设  $x_0 \in (0, 1)$ . 注意到  $u_n(x) = \frac{u(4^n x)}{4^n}$  以  $\frac{1}{4^n}$  为周期, 在  $[\frac{m}{4^n}, \frac{m}{4^n} + \frac{1}{2} \frac{1}{4^n}]$  上斜率为 1, 在  $[\frac{m}{4^n} + \frac{1}{2} \frac{1}{4^n}, \frac{m+1}{4^n}]$  上斜率为 -1. 对于每个  $n \geq 1$ , 存在  $m_n$  使得  $\frac{m_n}{2 \cdot 4^{n-1}} \leq x_0 < \frac{m_n+1}{2 \cdot 4^{n-1}}$ . 因此在  $I_n = [\frac{m_n}{2 \cdot 4^{n-1}}, \frac{m_n+1}{2 \cdot 4^{n-1}})$  内, 存在  $x_n$  使得  $|x_n - x_0| = \frac{1}{2} |I_n| = \frac{1}{4^n}$ . 于是  $\frac{S(x_n) - S(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}$ . 对于  $k \geq n, T_k = \frac{1}{4^k}$  整除  $|x_n - x_0|$ , 因此相应项为 0. 当  $k \leq n-1$  时, 相应项为 1 或 -1, 故  $\frac{S(x_n) - S(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ , 其中  $a_k = 1$  或  $-1$ . 当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $x_n \rightarrow x_0$ , 但  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  不可能存在. 故  $S'(x_0)$  不存在.

## 12 第 12 次习题课: 广义积分

### 12.1 问题

- 计算积分  $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ .
- 计算积分  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx$ .
- 计算积分  $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bxdx, I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bxdx$ , 其中  $a > 0, b \in \mathbb{R}$ .
- 讨论积分  $\int_1^{+\infty} \left[ \frac{1}{x^p} - \log(1 + \frac{1}{x^p}) \right] dx (p > 0)$  的敛散性.
- 证明或否定:  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- 讨论积分  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx (\alpha > 0)$  的收敛性和绝对收敛性.
- 讨论积分  $I = \int_1^{+\infty} \log(1 + \frac{\sin x}{x^p}) dx (p > 0)$  的收敛性.
- 讨论积分  $I = \int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)^p} dx$  的收敛性.
- 讨论积分  $I = \int_0^1 (2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}) dx$  的收敛性.
- $f(x)$  于  $[a, +\infty)$  单调,  $g(x) \in C(\mathbb{R}), g(x) \not\equiv 0, g(x) = g(x+T)$ . 求证  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛  $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)|g(x)| dx$  收敛.

11. 计算积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .
12. 计算积分  $I = \int_0^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx$ .
13. 设  $f(x) \in C[0, +\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , 证明对  $0 < a < b$ , 成立  $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = (f(0) - L) \log \frac{b}{a}$ .

## 12.2 解答

1.  $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_0^1 \frac{\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \log(t + \sqrt{1+t^2})|_0^1 = \log(1 + \sqrt{2})$ .
2.  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \arctan x d\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x^2} \arctan x|_1^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}) dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} [-\frac{1}{x} - \arctan x]|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$ .
3. 由分部积分有  $aI_1 = -\int_0^{+\infty} \sin bx de^{-ax} = -\sin bx \cdot e^{-ax}|_0^{+\infty} + b \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bxdx = bI_2$ ,  $aI_2 = -\int_0^{+\infty} \cos bxd e^{-ax} = -\cos bx \cdot e^{-ax}|_0^{+\infty} - b \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bxdx = 1 - bI_1$ . 解出  $I_1 = \frac{b}{a^2+b^2}$ ,  $I_2 = \frac{a}{a^2+b^2}$ .
4.  $t \rightarrow 0$  时  $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ . 故  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{1}{x^p} - \log(1 + \frac{1}{x^p}) \sim \frac{1}{2x^{2p}}$ . 而  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx$  于  $p > \frac{1}{2}$  时收敛, 于  $p \leq \frac{1}{2}$  时发散. 所以原积分于  $p > \frac{1}{2}$  时收敛, 于  $p \leq \frac{1}{2}$  时发散.
5. 结论不对, 例如  $f(x) = \begin{cases} n, & x \in [n - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2n^3}], n \in \mathbb{N}, n > 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ .
6. 当  $\alpha > 0$  时, 由于  $\frac{1}{x^\alpha}$  在  $[1, +\infty)$  单调递减趋于 0, 而  $|\int_1^x \sin t dt| \leq 2$ , 所以由 Dirichlet 判别法, 此无穷积分收敛. 当  $\alpha > 1$  时,  $|\frac{\sin x}{x^\alpha}| < \frac{1}{x^\alpha}$ , 而  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$  收敛, 所以积分绝对收敛. 当  $0 < \alpha \leq 1$  时,  $\int_\pi^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \geq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2}{(n+1)^\pi}$ , 所以积分条件收敛.
7. 泰勒展开知  $I = \int_1^{+\infty} [\frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{2x^{2p}} + o(\frac{\sin^2 x}{x^{2p}})] dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p} - \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^{2p}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} o(1) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{4x^{2p}} - \int_1^{+\infty} \frac{1-4o(1)\sin^2 x}{4x^{2p}} dx := I_1 + I_2 + I_3$ . 当  $p > 1$  时, 三者都绝对收敛. 当  $\frac{1}{2} < p \leq 1$  时,  $I_1$  收敛,  $I_2$  和  $I_3$  绝对收敛, 故原积分收敛. 当  $0 < p \leq \frac{1}{2}$  时,  $I_1$  和  $I_2$  收敛. 又  $\exists A > 1$  使得  $\frac{1}{2} \leq 4o(1)\sin^2 x \leq 2, \forall x > A$ , 所以  $\frac{1-4o(1)\sin^2 x}{4x^{2p}} > \frac{1}{8x^{2p}}, \forall x > A$ . 而  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}} (p \leq \frac{1}{2})$  发散, 因此原积分发散.
8. 容易看出原积分与  $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p} dx$  同敛散, 因此  $p < 1$  时收敛,  $p \geq 1$  时发散.
9.  $I = \int_0^1 (2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}) dx \stackrel{t=\frac{1}{x^2}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ , 因此收敛.
10.  $f(x)$  于  $[a, +\infty)$  单调, 所以可认为其定号, 不妨设  $f(x) \geq 0$ .  $g(x)$  是连续周期函数, 因此存在  $M$  使得  $|g(x)| \leq M$ . “ $\Rightarrow$ ”: 因为  $0 \leq \int_{x'}^{x''} f(x)|g(x)|dx \leq M \int_{x'}^{x''} f(x)dx, \forall x', x''$ , 所以由 Cauchy 收敛原理立得.
- “ $\Leftarrow$ ”: 记  $m = \frac{1}{T} \int_0^T |g(x)|dx$ . 由于  $\int_a^x f(t)dt$  单调上升, 故只需证明存在  $x_n \uparrow, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  使得  $\int_a^{x_n} f(x)dx$  有界即可. 取合适的  $n_0$  使得  $a \leq n_0 T$  和  $x_n = (n_0 + n)T$ , 往证  $\int_{n_0 T}^{(n_0+n)T} f(x)dx$  有界 ( $\Leftrightarrow \int_a^{x_n} f(x)dx$  有界). 首先, 利用反证法知  $f(x)$  单调下降趋于 0. 其次,

$$\begin{aligned} \int_{(n_0+1)T}^{(n_0+n+1)T} f(x)dx &= \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n} \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx \leq \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n} f(kT)T = \frac{1}{m} \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n} f(kT) \cdot mT \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n} f(kT) \int_{(k-1)T}^{kT} |g(x)|dx \leq \frac{1}{m} \sum_{n_0+1}^{n_0+n} \int_{(k-1)T}^{kT} f(x)|g(x)|dx = \frac{1}{m} \int_{n_0 T}^{(n_0+n)T} f(x)|g(x)|dx \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 由  $\int_a^{+\infty} f(x)|g(x)|dx$  收敛知  $\frac{1}{m} \int_{n_0 T}^{(n_0+n)T} f(x)|g(x)|dx$  极限存在. 这意味着  $\int_{(n_0+1)T}^{(n_0+n+1)T} f(x)dx$  有界, 也就是  $\int_{n_0 T}^{+\infty} f(x)dx$  收敛  $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 结论成立.

11. 由  $2 \sin \frac{x}{2} (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx) = \sin(n + \frac{1}{2})x$  知  $\int_0^\pi (\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx) dx = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ . 定义  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$ , 容易计算出  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 0$ . 因此  $f(x) \in R[0, \pi]$ , 由 Riemann-Lebesgue 引理知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) \sin(n + \frac{1}{2})x dx = 0$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$12. I = \int_0^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin^2 x d(-\frac{1}{x}) = -\frac{\sin^2 x}{x}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$13. \text{ 对于 } \forall 0 < \delta < A, \text{ 我们有 } \int_\delta^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = \int_{a\delta}^{aA} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\delta}^{bA} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)-f(0)}{t} dt - \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)-L}{t} dt + (f(0) - L) \log \frac{b}{a}.$$

令  $\delta \rightarrow 0+0, A \rightarrow +\infty$  知前两项都趋于 0, 从而 LHS = RHS.

### 12.3 补充 (不要求掌握!)

定义 Beta 函数为  $\text{Beta}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ . 余元公式: 对于  $0 < p < 1$ ,  $\text{Beta}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ .

下面我们来计算积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx \stackrel{t=\frac{1}{1+x^\beta}}{=} \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} (1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} \text{Beta}(1 - \frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta}) = \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha+1}{\beta} \pi}$ .

## 13 第 13 次习题课: 含参积分

### 13.1 问题

### 13.2 解答

### 13.3 补充 (不要求掌握!)

## 14 第 14 次习题课: 傅里叶级数

### 14.1 问题

### 14.2 解答

### 14.3 补充 (不要求掌握!)

## 15 综合复习

### 15.1 问题

### 15.2 解答

## 16 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢一位不愿意透露姓名的同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2023 春高等数学 A II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.