高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 11 月 15 日

目录

1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4 & =4 \\ x_2-x_3+x_4 & =-3 \\ x_1+3x_2-4x_4 & =1 \\ -7x_2+3x_3+x_4 & =-3 \end{cases}$.

2. 设 $\alpha_1=(1,1,4),\alpha_2=(-2,1,5),\alpha_3=(a,2,10),\beta=(1,b,-1)$. 当 a,b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表出任何向量–如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

4. 某食品厂有四种原料 A,B,C,D. 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

5. (1) 求复矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX=0$ 在复数域上的解集合; (3) 求齐次方程组 $AX=0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1,y_2,y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX=(y_1,y_2,y_3)^T$ 有解?

6. 已知向量 α,β 不共线, 并看成是由原点出发的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$. 设 $u,v\in\mathbb{R}$ 且 $u+v=1$, 问向量 $\overrightarrow{OC}=u\alpha+v\beta$ 的终点 C 在什么位置, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的比值是多少, 何时比值为正数.

7. 求单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上的所有直线.

8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体 $ABCD$ 每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.

9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异? $\begin{cases} .835x+.667y=.168 \\ .333x+.266y=.067 \end{cases}$, $\begin{cases} .835x+.667y=.168 \\ .333x+.266y=.066 \end{cases}$.

10. 考虑带截距的线性回归 $y\sim x_1+\cdots+x_p$, 参考上一题, 你有什么想法和改进?

1.2 解答

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-=①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+=7*②]{③-=5*②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{④+=2*③}$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(-8,3,6,0).$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-=4*①]{②-=①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-=\frac{13}{3}*②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}$. 因此, 当 $a\neq-4$ 或 $a=-4,b=-\frac{13}{2}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

3. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \cdots k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0)$.

4. 注意 A, B, C, D 的比例和为 1, 因此 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②- = 8*① \\ ③- = 5*① \\ ④- = 15*①}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{③+ = 10*② \\ ④- = 5*②}}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{④+ = \frac{2}{3}*③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, 因此解是 $(\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25})$.

5. (1) $\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②- = 2*① \\ ③- = i*①}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{③- = \frac{i}{2+2i}*②} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②* = \frac{1}{2+2i}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
(2) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. (3) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1, \frac{y_2 - 2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$ 时才有解.

6. $\overrightarrow{AC} = (u-1)\alpha + v\beta, \overrightarrow{CB} = -u\alpha + (1-v)\beta, \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{1-u}{u} = \frac{v}{1-v}$, 因此 A, C, B 三点共线, 且当 $0 < u, v < 1$ 时比值为正数.

7. $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x - z = k(1-y) \\ x + z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x + ky - z = k \\ kx - y + kz = 1 \end{cases}$. 特别地, 当 $y = \pm 1$ 时, $z = \pm x$ 也是位于该曲面上的直线.

8. $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$, 设 BC, AC, AB 中点分别为 D, E, F, 设 $G = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$
只需验证 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$ 分别与 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ 共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.

9. 用 Gauss 消元法可求得解为 $(1, -1)$ 和 $(-666, 834)$. 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.

10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如 L_2 正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着强相关变量, 干扰回归结果.

2 第 2 次习题课: 矩阵的基本运算, 集合论

2.1 问题

1. (1) 用向量表示平面 $x + 2y + 3z = 1$; (2) 用向量表示直线 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases}$; (3) 求平面 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k, l \in \mathbb{R}$ 的平面方程.

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$. (1) 解齐次方程组 $AX = 0$; (2) 已知 $X = (1, 1, 2, 3, 0)^T$ 是方程组 $AX = \beta$ 的一个解, 写出 $AX = \beta$ 的所有解.

3. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$ 的方式唯一.

4. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

5. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 且 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 又能线性表出 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$, 证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$.

6. 考虑 n 个城市之间的航班问题: 记 $H=(a_{ij})$ 为邻接矩阵, 这里 a_{ij} 表示从城市 i 到 j 的航班数. (1) 解释 H^k 的 (i,j) 元的含义; (2) 设 $H=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&3\\0&0&2&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$, 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?

7. 设 A 是有向图 G 的邻接矩阵, 证明 G 中的循环三角形的个数等于 $\mathrm{tr}(A^3)/3$.

8. 由集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集, 记为 $P(A)$. 设集合 A 非空, 证明 $\mathrm{card}(P(A))>\mathrm{card}(A)$.

9. X 为非空集合, 映射 $f:P(X)\to P(X)$ 满足 $f(A)\subset f(B),\forall A\subset B$. 那么存在 $T\subset X$ 使得 $f(T)=T$.

10. (1) 找到 $[0,1]$ 到 $[0,1]\times[0,1]$ 的双射; (2) 找到 $(0,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射.

11. 罗素悖论: 某班的同学在习题课上作游戏. 每个学生可以给班里任意多同学发一次短信 (可包括自己). 记 X 是全体没有给自己发短信的同学构成的集合. 若某同学猜中 X 并给且只给 X 中的每个同学发了短信, 则该同学获胜. 问: 此游戏有无获胜者?

12. 学习使用 numpy 包, 并实现矩阵的基本运算.

2.2 解答

1. (1) 先求得一个点坐标 $(1,0,0)$, 再去求 $x+2y+3z=0$ 的一组基础解系: $(2,-1,0)$ 和 $(3,0,-1)$, 因此向量表示为 $(1,0,0)+k(2,-1,0)+l(3,0,-1),k,l\in\mathbb{R}$.
(2) 先求得一个点坐标 $(0,-1,1)$, 再去求方向向量 $(1,2,3)\times(3,2,1)=(-4,8,4)$, 因此向量表示为 $(0,-1,1)+t(-1,2,1),t\in\mathbb{R}$.
(3) 先求得一个点坐标 $(1,1,2)$, 再去求法向量 $(1,2,0)\times(2,0,1)=(2,-1,-4)$, 因此平面可表示为 $2x-y-4z=-7$.

2. (1) $\begin{bmatrix}2&4&1&0&8\\3&6&-1&0&7\\1&2&2&0&7\\2&4&1&1&9\end{bmatrix}\xrightarrow[④-=①]{②-=\frac{3}{2}*①\quad ③-=\frac{1}{2}*①}\begin{bmatrix}2&4&1&0&8\\0&0&-\frac{5}{2}&0&-5\\0&0&\frac{3}{2}&0&3\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[②+=\frac{5}{3}*③]{①-=\frac{2}{3}*③}\begin{bmatrix}2&4&0&0&6\\0&0&0&0&0\\0&0&\frac{3}{2}&0&3\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_4=-x_5\\x_3=-2x_5\\x_1+2x_2=-3x_5\end{cases}\Rightarrow$
$X=(-3n-2m,m,-2n,-n,n)^T,m,n\in\mathbb{R}$ 是自由变元.
(2) 解集是基础解系加上代表元, 即 $(1-3n-2m,1+m,2-2n,3-n,n)^T$.

3. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{a_1-a_2}{b_2-b_1}\in\mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, $\gcd(a,b)=1$, 那么 $a^2=3b^2\Rightarrow 3|a\Rightarrow 9|a^2\Rightarrow 3|b^2\Rightarrow 3|b$, 矛盾.

4. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})=\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})\Rightarrow 9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5}|3\times3$ 而 $2+\sqrt{-5}\nmid 3$, 因此不是素数.

5. $(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)A,(\gamma_1,\cdots,\gamma_t)=(\beta_1,\cdots,\beta_s)B\Rightarrow(\gamma_1,\cdots,\gamma_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(AB)$, 因此可以线性表出.

6. (1) 从 $a_{ij}^2=\sum_s a_{is}a_{sj}$ 可以看出 H^k 的 (i,j) 元表示从 i 到 j 乘坐恰 k 次航班有多少种乘坐方式. (2) $1\to3,1\to4,2\to1,2\to5,3\to2,3\to4,4\to1,5\to2,5\to3$, 分别有 $1,1,1,3,1,3,3,1,2$ 种航班选择; $2\to4,4\to2$ 都要倒 3 次, 是最多的.

7. 由上题知 A^3 的 (i,i) 元表示从 i 到 i 有几条恰走 3 次的路径, 三角形会在结点上算 3 次, 因此要除以 3.

8. 本题的关键是处理集合 A 包含无穷元素的情形. 假设存在一一映射 $f:A\mapsto P(A)$, 则考虑集合 $A=\{x:x\notin f(x)\}$. 此时若 $f^{-1}(A)\notin A$, 则根据定义 $f^{-1}(A)\in A$; 反之亦矛盾.

9. 我们的思路应当去找满足条件 $A\subset f(A)$ 的最大集合, 即令 $T=\{\cup_\alpha A_\alpha:A_\alpha\subset f(A_\alpha)\}$. 根据定义有 $T=\cup_\alpha A_\alpha\subset\cup_\alpha f(A_\alpha)=f(\cup_\alpha A_\alpha)=f(T)$, 再根据题给条件有 $f(T)\subset f(f(T))\Rightarrow f(T)\subset T$.

10. (1) 全部写成无限小数, 然后作映射 $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots \to (0.a_1a_3a_5\cdots, 0.a_2a_4a_6\cdots)$; (2) $y=\tan(\pi x-\frac{\pi}{2})$.

11. 因此在 ZF 公理体系中, 我们不考虑包含自身作为元素的集合.

12. 从 pip install numpy 开始. 学习使用 np.zeros, np.random, np.mean, np.sum, np.dot, np.linalg.det, np.eye 等函数, 并做切片和取值运算.

3 第 3 次习题课: 行列式 (1)

3.1 问题

1. 用行列式求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-3x_2=7 \\ 5x_1+4x_2=6 \end{cases}$.

2. 求以下向量在三维几何空间张成的平行六面体体积: $\alpha_1=(3,2,1), \alpha_2=(0,3,0), \alpha_3=(7,4,2)$.

3. 判断以下向量组的定向: $(1,1),(3,-2)$; $(2,1,0),(1,0,3),(1,1,1)$; $(x,y,z),(z,x,y),(y,z,x)$; $(x,y,z),(y,z,x),(z,x,y)$; 其中 $x+y+z>0$ 且互不相等.

4. 计算行列式: (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

5. 对 n 阶矩阵 A 作如下操作: 第 1 行加上第 2 行的 k 倍, 第 2 行加上第 3 行的 k 倍, 以此类推; 最后, 第 n 行加上此时第 1 行的 k 倍. 问做这些变换相当于在 A 左边乘一个什么样的矩阵? A 的行列式值会如何变化? 如果第 n 行加上的是原来第 1 行的 k 倍呢?

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$.

8. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

9. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 其中 $\alpha^2-4\beta\gamma>0$.

10. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

11. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

3.2 解答

1. $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = 2, x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = -1.$ 2. $V = ||(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|| = |\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = 3.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow$ 左手; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow$ 左手; $\begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0 \Rightarrow$ 右手; $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 \leq 0 \Rightarrow$ 左手.

4. (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2 + 16 + 16 - 4(x+1) - 16(x-2) - 4(x+1) = x^3 - 27x + 54;$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

5. 相当于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k^2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 其行列式无变化, 因为是初等变换. 后面一问相当于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 其行列式有变化, 因为最后一步不是初等变换, 相较于原值乘上了 $1 + (-1)^{n-1}k^n$.

6. 用第一列减去第 i 列的 b_i 倍, $i = 2,3,\cdots,n$, 得到 $\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_ib_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_ib_i.$

7. 法 1(加边法): $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$, 然后用第 $i+1$ 行减去第 1 行的 x_i 倍, $i = 1,2,3,4$, 得到 $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$

法 2(拆项法): $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} +$
$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$, 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五项: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4x_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3x_4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_4x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{vmatrix}$, 原行列式是 $1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

8. 采用第 7 题的法 2(拆项法), 最后剩下 $n+1$ 项: $\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix},$
$\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \cdots$, 它们分别是 $(-1)^n a_1a_2\cdots a_n, (-1)^{n-1}x_1a_2\cdots a_n, (-1)^{n-1}a_1x_2\cdots a_n, \cdots$, 整理得到原行列式为 $(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}\right)-1\right]$.

9. 若 $\beta\gamma=0$, 则行列式为 α^n. 对于一般情形, 按第一行展开得到 $D_n=\alpha D_{n-1}-\beta\gamma D_{n-2}$, 且有初值条件 $D_1=\alpha, D_2=\alpha^2-\beta\gamma$, 然后用数列的特征值和特征公式设 $D_n=A\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}\right)^n+B\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}\right)^n$, 代入 $n=1,2$ 解出 A 和 B, 得到 $D_n=\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}$.

10. $n=1$ 时, $D_1=\cos\alpha$; $n=2$ 时, $D_2=\cos2\alpha$; 因此可以猜测 $D_n=\cos n\alpha$. 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 $D_{n+1}=2\cos\alpha D_n-D_{n-1}=\cos(n+1)\alpha$, 知该假设成立.

11. 法 1: 将第 1 行至第 $n-1$ 行减去第 n 行, 并提出各行和各列公因子, 得

$$D_n=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)}\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

再将第 1 列至第 $n-1$ 列减去第 n 列, 并提出各行和各列的公因子, 得

$$D_n=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)}\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdot & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第 n 行展开得到递推式 $D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)}D_{n-1}$, 并直接计算出 D_2, 得

$$D_n = \frac{\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}.$$

法 2: 若 $a_i = a_j$ 或 $b_i = b_j (i \neq j)$, 即两行 (或两列) 相同, 则 $D_n = 0$. 因此 D_n 含有因子 $\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$. 将 D_n 的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得 $D_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}D_n'$. 显然 D_n' 也含有上述因子. 另一方面, 由于 D_n' 的 (i,j) 元为 $\prod_{k\neq j}(a_i+b_k)$, 所以每一个 a_i 在 D_n' 的展开式中的次数均为 $n-1$, 因此设 $D_n = \lambda\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$. 为确定常数 λ 的值, 我们不妨令 $a_i = -b_i$, $i = 1,2,\cdots,n$. 此时 D_n' 为对角行列式, 且有 $D_n = \prod_{i\neq j}(a_i-a_j) = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j) \Rightarrow \lambda = 1$. 因此可得一样的结果.

4 第 4 次习题课: 行列式 (2)

4.1 问题

1. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. 你能求出行列式 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$ 的通式吗?

2. (1) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$; (2) 计算行列式 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

3. A 是 n 阶矩阵, $\alpha = (1,1,\cdots,1)^T$ 是 n 维列向量, 且 $|A| = a, |A-\alpha\alpha^T| = b$, 求 $|A+2\alpha\alpha^T|$.

4. 考虑 3 线行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & & & \\ b_2 & a_2 & c_3 & & \\ & b_3 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_n \\ & & & b_n & a_n \end{vmatrix}$, 记其顺序主子式为 $D_1, D_2, \cdots, D_n$, 并假设它们都不为 0. 证明递推关系 $D_s = a_sD_{s-1} - b_sc_sD_{s-2}, s \ge 3$, 并将该矩阵 M_n 写成下三角矩阵和对角元都为 1 的上三角矩阵的乘积.

5. 试确定所有 3 阶 $(0,1)$ 行列式 (即所有元素只能是 0 或 1) 的最大值, 并给出证明和取到最大值的一个构造.

6. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}_+$, 证明 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 能被 $2!3!\cdots(n-1)!$ 整除.

7. 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 非平凡. 证明: 若矩阵 A 的每一个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = a_{ij}$, 则 $|A|^{n-2} = 1$.

8. 若方阵每一行每一列都恰有一个元素为 1, 其余的元素都是 0, 则称此方阵为置换矩阵. (1) 写出所有的 3 阶置换矩阵. 这些矩阵最少可由其中的几个通过反复作乘法得到? (2) 证明任意 n 阶置换矩阵都可由以下 $n-1$ 个矩阵反复作乘法得到: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

进一步, 任意 n 阶置换矩阵都可由以下两个矩阵反复作乘法得到: $T=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\1&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$.

9. 设 $n\geq 3, f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是次数 $\leq n-2$ 的多项式, 证明: 对 $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, 行列式 $\begin{vmatrix}f_1(a_1)&f_2(a_2)&\cdots&f_n(a_1)\\f_1(a_2)&f_2(a_2)&\cdots&f_n(a_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_1(a_n)&f_2(a_n)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}\equiv 0$, 并举例说明条件 "次数 $\leq n-2$" 不可去.

10. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&\cos\phi_1&\cos 2\phi_1&\cdots&\cos(n-1)\phi_1\\1&\cos\phi_2&\cos 2\phi_2&\cdots&\cos(n-1)\phi_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cos\phi_n&\cos 2\phi_n&\cdots&\cos(n-1)\phi_n\end{vmatrix}$.

4.2 解答

1. 把后 $n-1$ 列加到第一列, 提出公因子 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 用第 $(1,1)$ 元消去同列其他元素, 再按第一列展开得到 $n-1$ 阶行列式:

$$D_n=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&4&5&\cdots&1&2\\1&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\0&-1&-1&\cdots&-1&-1\\0&n-2&-2&\cdots&-2&-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&2&2&\cdots&2-n&2-n\\0&1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-1&-1&\cdots&-1&-1\\n-2&-2&\cdots&-2&-2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&2-n&2-n\\1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}.$$

用所得 $n-1$ 阶行列式的第 $(1,1)$ 元消去同行的其他元素, 再按第一行展开得到 $n-2$ 阶上三角行列式:

$$D_n=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\n-2&-n&\cdots&-n&-n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\2&0&\cdots&-n&-n\\1&0&\cdots&0&-n\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-n&\cdots&-n&-n\\&\ddots&\vdots&\vdots\\&&-n&-n\\&&&-n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

2. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b&b\\c-a&a-b&0&\cdots&0&0\\0&c-a&a-b&\cdots&0&0\\0&0&c-a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&c-a&a-b\end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知 $D_n = b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}$. 初始条件是 $D_1 = a$, 因此知 $D_n = \dfrac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

(2) 按第 n 列拆项, 得 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & a_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b+(a_n-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + (a_n-b)E_{n-1} = b(a_1-c)(a_2-c)\cdots(a_{n-1}-c) + (a_n-b)E_{n-1}$; 按第 n 列拆项 (或由对称性), 得 $E_n = c(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_{n-1}-b) + (a_n-c)E_{n-1}$. 两式联立得 $E_n = \dfrac{bf(c)-cf(b)}{b-c}$, 其中 $f(x) = (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$.

3. 考虑函数 $f(x) = |A + x\alpha\alpha^T| = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}$, 因此是线性函数. 由 $f(0) = a, f(-1) = b$ 知 $f(x) = a + (a-b)x$, 因此 $f(2) = 3a - 2b$.

4. 按最后一行展开立刻得到递推关系, $M_n = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & & & & \\ b_2 & \frac{D_2}{D_1} & 0 & & & \\ & b_3 & \frac{D_3}{D_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & b_{n-1} & \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} & 0 \\ & & & & b_n & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2\frac{1}{D_1} & & & & \\ & 1 & c_3\frac{D_1}{D_2} & & & \\ & & 1 & c_4\frac{D_2}{D_3} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & c_n\frac{D_{n-2}}{D_{n-1}} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$.

5. 按第 1 行展开, 得到 $D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \le 3$. 下面证明 $D \ne 3$. 若不然, 则必有 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$, 且 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 1$. 前两个行列式为 1 可以得到 $a_{22} = a_{33} = 1, a_{23} = a_{31} = 1$, 而此时 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = a_{21}a_{32} - 1 \le 0$, 矛盾. 因此 $D \le 2$, 一个构造是 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

6. 注意到 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & \cdots & a_1(a_1-1)\cdots(a_1-n+2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & \cdots & a_2(a_2-1)\cdots(a_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n1(a_n-1) & \cdots & a_n(a_n-1)\cdots(a_n-n+2) \end{vmatrix}$(利用初等列变换, 用后面的列加减前面的列), 再将第 k 列提取公因子 $(k-1)!, k = 3, 4, \cdots, n$ 即可.

7. 首先容易看出 $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 > 0$. 其次 $|A|^2 = |AA^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n \Rightarrow |A|^{n-2} = 1.$$

8. (1) 所有 3 阶置换矩阵: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 可由其中第 2 个和第 5 个做反复乘积生成 (答案不唯一). (2) n 元置换可以分解成至多 $n-1$ 个对换的乘积, 而每一个对换都可以分解成

相邻对换的乘积, 因此可被这 $n-1$ 个相邻对换生成; 进一步, 所有相邻对换都可被表示为 $S^{n-k}TS^k, k=0,1,\cdots,n-1$, 因此可被 S,T 生成.

9. 不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同. 考虑 $F(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & a_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$, 这是一个至多 $n-2$ 次多项式, 有至少 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 这 $n-1$ 个不同的根, 因此必恒等于 0. 若删去条件 "次数 $\le n-2$", 则可令 $f_k(x)=x^{k-1}$, 此时原行列式构成 Vandermonde 行列式, 只要 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不同就不为 0.

10. 由高中三角函数知识知 $\cos k\theta = 2^{k-1}\cos^k\theta + P_{k-2}(\cos\theta)$, 其中 P_{k-2} 是 $k-2$ 次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cos\phi_1 & \cos^2\phi_1 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_1 \\ 1 & \cos\phi_2 & \cos^2\phi_2 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\phi_n & \cos^2\phi_n & \cdots & \cos^{n-1}\phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1\le j<i\le n} (\cos\phi_i - \cos\phi_j).$$

5 第 5 次习题课: 线性空间, 行列式 (3)

5.1 问题

1. 在正实数集 $\mathbb{R}^+$ 上定义运算加法 $a\oplus b = ab, \forall a,b\in\mathbb{R}^+$ 和数乘 $ka=a^k, \forall k\in\mathbb{Q}$, 证明 $\mathbb{R}^+$ 在这两种运算下构成 $\mathbb{Q}$-线性空间; 并问 $110, \sqrt{105}$ 是否属于 $\mathrm{span}\{1,2,\cdots,10\}$.

2. 设 $W=\{f(x)|f(1)=0, f(x)\in\mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.

3. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

4. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$; (2) $\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3+\alpha_4$; (3) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$; (4) $\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+8\alpha_4,\alpha_2+5\alpha_3+\alpha_4,3\alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$.

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 为 $s+1$ 个 n 维向量, 且 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$. 证明向量组 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s$ 线性无关的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

6. 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 且对于任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数. 证明或否定: (1) $f(x)$ 系数都是有理数; (2) $f(x)$ 系数都是整数.

7. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

8. 计算行列式 $D_1=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ 和 $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 741 & 886 & 114 & 514 \\ -741 & 0 & 1919 & 810 & 2002 \\ -886 & -1919 & 0 & 520 & 1314 \\ -114 & -810 & -520 & 0 & 220 \\ -514 & -2002 & -1314 & -220 & 0 \end{vmatrix}$.

9. 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, I 表示 n 阶单位矩阵. 计算行列式 $D_1=\begin{vmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{vmatrix}$ 和 $D_2=\begin{vmatrix} I & -B \\ 0 & AB \end{vmatrix}$, 并证明 $D_1=D_2$.

10. 求 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 A, 其中 $a_{ij}=\frac{\alpha_i^n-\beta_j^n}{\alpha_i-\beta_j}, i,j=1,2,\cdots,n$.

5.2 解答

1. 交换律结合律显然; 零元存在: $1\oplus a=a\oplus 1=a$; 负元存在: $a\oplus\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\oplus a=1$; 幺元存在: $1a=a^1=a$; 左分配律: $(k+l)a=a^{k+l}=a^ka^l=ka\oplus la$; 右分配律: $k(a\oplus b)=(ab)^k=a^kb^k=ka\oplus kb$. $\sqrt{105}$ 属于, 因为 $105=\frac{1}{2}(3\oplus 5\oplus 7)$; 110 不属于, 因为整数只能生成它的倍数的某个次方, 而 $110=11\times 10$ 其中 11 是素数无法生成.
2. (1) 容易证明对 $\forall f(x),g(x)\in W\Rightarrow af(x)+bg(x)\in W$, 因此是线性子空间. (2) 令 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$, $f(1)=0\Rightarrow a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=0$, 因此 $f(x)=a_1(x-1)+a_2(x^2-1)+\cdots+a_{n-1}(x^{n-1}-1)$. 下面我们只需证明 $x-1,x^2-1,\cdots,x^{n-1}-1$ 确实是 W 的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以 $\dim W=n-1$.
3. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1+3\alpha_2=\alpha_3$, $-5\alpha_1-4\alpha_2=\alpha_4$;
(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\frac{3}{2}\beta_2-\frac{1}{2}\beta_3=\beta_1$.
4. (1) 线性相关; $(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$. (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这有五个向量却只有四个自由度.
5. 用矩阵表示为 $(\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}:=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)P$. 容易计算得到 $\det P=(s-1)(-1)^{s-1}\neq 0$, 因此两者线性无关等价.
6. (1) 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m(a_m\neq 0)$. 取 $x_k=k$ 代入, 得到线性方程组 $\begin{cases}a_0+a_1x_0+\cdots+a_mx_0^m=f(x_0),\\a_0+a_1x_1+\cdots+a_mx_1^m=f(x_1),\\\cdots\\a_0+a_1x_m+\cdots+a_mx_m^m=f(x_m).\end{cases}$, 其系数行列式是 Vandermonde 行列式不为 0, 因此由 Cramer 法则其有唯一解 $a_i=\frac{D_i}{D},i=0,1,\cdots,m$. 由于 D_i 的元素均为整数, 因此 a_i 是有理数. (2) 结论不对, 反例是 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.
7. 按第 3、4 行展开: $D=(-1)^{3+4+1+6}\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}*\begin{vmatrix}2&4&5&7\\3&0&0&2\\5&0&0&6\\5&7&8&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4&5&7\\3&0&0&2\\5&0&0&6\\5&7&8&6\end{vmatrix}$. 再按第 2、3 行展开: $D=(-1)^{2+3+1+4}\begin{vmatrix}3&2\\5&6\end{vmatrix}*\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=-24$.
8. 前者是偶数阶斜对称矩阵. 若 $a=0$. 则按第 1、2 行展开, 得到 $D_1=(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix}b&c\\d&e\end{vmatrix}*\begin{vmatrix}-b&-d\\-c&-e\end{vmatrix}=(be-cd)^2$. 若 $a\neq 0$, 则将第 1 行的 $\frac{d}{a}$ 倍和第 2 行的 $\frac{b}{a}$ 倍加到第 3 行上, 将第 1 行的 $\frac{e}{a}$ 倍和第 2 行的 $\frac{c}{a}$ 倍加到第 4 行上, 得到 $D_2=\begin{vmatrix}0&a&b&c\\-a&0&d&e\\0&0&0&f+\frac{cd}{a}-\frac{be}{a}\\0&0&-f+\frac{be}{a}-\frac{cd}{a}&0\end{vmatrix}$. 然后按第 1、2 行展开, 得到 $D_1=(af-be+cd)^2$.
后者是奇数阶斜对称矩阵, 因此行列式为 $D_2=0$ (因为 $|M_2|=|M_2^T|=|-M_2|=(-1)^{2k+1}|M_2|\Rightarrow|M_2|=0$).
9. 按前 n 行展开, 得到 $D_1=|A||B|$, $D_2=|AB|$. 将后面 n 行减去前面 n 行的 A 倍 (按矩阵 $(I,-B)$ 左乘 A 理解), 可使 M_1 转化为 M_2.
10. 利用 $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$ 及行列式乘法规则 $|AB|=|A||B|$, 知

$$|A|=\begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_1^2&\cdots&\alpha_1^{n-1}\\1&\alpha_2&\alpha_2^2&\cdots&\alpha_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\alpha_n&\alpha_n^2&\cdots&\alpha_n^{n-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_1^{n-1}&\beta_2^{n-1}&\cdots&\beta_n^{n-1}\\\beta_1^{n-2}&\beta_2^{n-2}&\cdots&\beta_n^{n-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\beta_1&\beta_2&\cdots&\beta_n\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}(\alpha_i-\alpha_j)(\beta_i-\beta_j).$$

6 第 6 次习题课: 秩 (1)

6.1 问题

1. 作初等行变换将矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4\\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4\\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6\end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求 A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a,b 取何值时, 向量 $(3,a,b,b,3)$ 属于 A 的行空间?

2. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 并且有 $\beta_i=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r,\forall i=1,2,\cdots,s$. 证明若矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times r}$ 列向量线性无关, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 也能线性表出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$.

3. 证明: 若组 I 能线性表出组 II, 且 $\operatorname{rank}(\mathrm{I})=\operatorname{rank}(\mathrm{II})$, 则组 II 也能表出组 I.

4. 矩阵 A,B,C 满足 $A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$. 证明: (1) A 的列向量组能线性表出 C 的列向量组; (2) $\operatorname{rank}(A)\geq\operatorname{rank}(C)$; (3) 若矩阵 B 行满秩, 则 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(C)$, 且 C 的列向量组也能线性表出 A 的列向量组.

5. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -2 & \lambda & 5\\ 1 & 2 & -3 & 1\end{bmatrix}$ 的秩.

6. 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\forall 1\leq i\leq n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明 $\det(A)\neq 0$. 进一步, 证明若 $a_{ii}>0,\forall 1\leq i\leq n$, 则 $\det(A)>0$.

7. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 (1) $a_{ii}>0,\forall 1\leq i\leq n$; (2) $a_{ij}<0,\forall 1\leq i\neq j\leq n$; (3) $\sum_{i=1}^n a_{ij}=0,\forall 1\leq j\leq n$. 求矩阵 A 的秩.

8. 设线性方程组 $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}=b_i, 1\leq i\leq n$ 的系数矩阵 A 的秩等于矩阵 $B=\begin{bmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{bmatrix}$ 的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.

9. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n},\beta=(b_1,\cdots,b_m)^T$. 证明下列命题相互等价: (1) $Ax=\beta$ 有解; (2) $A^Tx=0$ 的解均满足 $x^T\beta=0$; (3) 方程组 $\begin{pmatrix}A^T\\ \beta^T\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}0_{1\times n}\\ 1\end{pmatrix}$ 无解.

10. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 且 $|a_{ii}a_{jj}|>\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\sum_{l\neq j}|a_{jl}|$ 对任意 $1\leq i\neq j\leq n$ 成立. 证明 $\det(A)\neq 0$.

11. 利用矩阵 $\begin{pmatrix}I_{s\times s} & 0_{s\times m}\\ 0_{n\times s} & A_{n\times s}B_{s\times m}\end{pmatrix}$ 的初等行列变换证明 $s+\operatorname{rank}(AB)\geq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

12. 设 A,B 是幂等矩阵 (即 $A^2=A,B^2=B$), 且 $I-A-B$ 满秩, 证明 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

6.2 解答

1. A 的简化阶梯型矩阵是 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是 β_1,β_2,β_4, 且 $\beta_3=2\beta_1-\beta_2,\beta_5=3\beta_1+5\beta_2-\beta_4$. (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$, 且 $\alpha_3=-\frac{31}{9}\alpha_1-\frac{55}{9}\alpha_2+\frac{17}{9}\alpha_4,\alpha_5=-\frac{20}{9}\alpha_1-\frac{23}{9}\alpha_2+\frac{22}{9}\alpha_4$. (3) 仔细计算即可. $a=4,b=2$.

2. 只需证明能表出 α_1. 利用高斯消元法去解方程 $\beta_{i1}=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r$, 由于 B 列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成 $\begin{bmatrix}I_{r\times r}\\ 0_{(s-r)\times r}\end{bmatrix}$(可用递推法或归纳法证明之), 从而 α_1 能被 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表出.

3. 设 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量 α, 由于组 I 能表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$, 从而 $\operatorname{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha)\leq s$, 即 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$ 线性相关. 由于 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 因此它们能表出 α.

4. (1) 由矩阵乘法定义知 $c_i = b_{1i}a_1 + \cdots + b_{ni}a_n, \forall 1 \le i \le p$. (2) 由第 (1) 问结论立得. (3) 用第 2 题结论立得.
5. 显然矩阵 A 的秩至少为 2(第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2, 因此 $\lambda = 0$, 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4 列线性表出. 综上, $\lambda = 0$ 时秩为 2, 否则为 3.
6. (1) 反证法. 假设 A 的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$. 我们不妨设在这 n 个系数里面 k_1 的绝对值最大, 那么就有 $k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n} = 0$. 但是 $|k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n}| \ge |k_1a_{11}| - |k_2a_{12}| - \cdots - |k_na_{1n}| \ge |k_1a_{11}| - |k_1|(|a_{12}| + \cdots + |a_{1n}|) > 0$, 矛盾. 因此 $\det(A) \ne 0$.
(2) 考虑函数 $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & a_{23}t & \cdots & a_{2n}t \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33} & \cdots & a_{3n}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. 那么任意 $t \in [0,1]$, $A(t)$ 都是主对角阵占优矩阵, 因此 $\det(A(t)) \ne 0$. 由于 $\det(A(0)) > 0$, 由函数连续性知 $\det(A(1)) > 0$, 此即原命题.
7. 首先由条件 (3) 知 $|A| = 0$, 因此 $\operatorname{rank}(A) \le n-1$. 其次考虑 A 中元素 a_{11} 的余子式 M_{11}, 由条件 (1)(2) 知其严格主对角占优, 因此 $M_{11} > 0$. 这意味着 $\operatorname{rank}(A) = n-1$.
8. (1) $\operatorname{rank}(A) \le \operatorname{rank}(A,b) \le \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A)$, 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.
(2) 不成立, 考虑 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$, $\operatorname{rank}(A) = 2$, 而 $\operatorname{rank}(B) = 3$.
9. (1) $\Rightarrow$ (2): 设 $A\xi = \beta$, 从而 $x^T\beta = x^TA\xi = (A^Tx)^T\xi = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (3): 显然.
(3) $\Rightarrow$ (1): $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A^T & \mathbf{0} \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$, 即是 $\operatorname{rank}(A,\beta) < \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \le \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + 1$, 因此 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A,\beta)$, 从而方程组 $Ax = \beta$ 有解.
10. 反证法. 假设 $\det(A) = 0$, 则 $Ax = 0$ 有非零解 $(c_1, \cdots, c_n)$. 若仅有 $c_i \ne 0$, 则 A 的第 i 列全零, 与条件矛盾. 下设第 i, j 个分量不为 0, 且 $|c_i| \ge |c_j| \ge |c_k|, i \ne j$. 考察第 i 个和第 j 个等式, 有 $|a_{ii}c_i| \cdot |a_{jj}c_j| = |\sum_{k\ne i} a_{ik}c_k| \cdot |\sum_{l \ne j} a_{jl}c_l| \le |c_j||\sum_{k\ne i} a_{ik}| \cdot |c_i| \sum_{l\ne j} |a_{jl}| \Rightarrow |a_{ii}a_{jj}| \le \sum_{k \ne i} |a_{ik}| \sum_{l \ne j} a_{jl}$, 矛盾.
11. $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{②+=A\times①} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \xrightarrow[②-=①\times B]{} \begin{pmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{pmatrix}$, 最左边矩阵秩为 $s + \operatorname{rank}(AB)$, 最右边矩阵秩大于等于 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.
12. $A(I - A - B) = -AB$, 因此 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A(I-A-B)) = \operatorname{rank}(A)$, 同理 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(AB)$.

7 第 7 次习题课: 秩 (2), 线性方程组的解空间

7.1 问题

1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 证明 A 的列向量组线性无关当且仅当 A 至少有一个 n 阶非零子式.
2. 设矩阵 A 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4$. (1) 求 $AX = \beta$ 的通解. (2) 求 A 行空间的一组基. (3) 将 A 分解为一个列满秩与一个行满秩矩阵的乘积.
3. 计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩 r, 并计算其 r 阶非零子式的个数.
4. 设矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 列满秩, $B = (\beta_1, \cdots, \beta_s), C = (\gamma_1, \cdots, \gamma_s)$ 满足 $AB = C$. 证明: (1) B 的解空间和 C 的解空间相同; (2) 若 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$ 线性无关, 则 $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \cdots, \gamma_{i_r}$ 也线性无关; 特别地, 有 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C)$.
5. 设 W 是矩阵空间 $M_n(K)$ 的一个子空间. 证明: 若 $\dim(W) \ge n^2 - n + 1$, 则 W 中至少包含一个满秩的矩阵.

6. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{x-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{x-c_3}{c_1-c_2}$, $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.
7. 设 B 是 3×4 矩阵, $(2,0,1,3)^T$ 是齐次方程组 $BX=0$ 的一个解. 设 A 是将行向量 $(2,0,1,3)$ 添加到 B 的最下面得到的方阵. 已知 A 的 $(4,1)$ 元的余子式为 6, 求 $\det(A)$.
8. A 是 $m\times n$ 矩阵, b 是 $m\times 1$ 矩阵. 证明线性方程组 $A^TAx=A^Tb$ 总有解.
9. 设数域 K 上的 n 阶方阵 A 的第 (i,j) 元是 a_i-b_j. 求 $\det(A)$, 并计算当 $n\geq 2$ 且 $a_1\neq a_2, b_1\neq b_2$ 时 $AX=0$ 的解空间维数和一组基.
10. 设 A,B 是数域 K 上的 n 阶方阵, $AX=0, BX=0$ 分别有 l,m 个线性无关的解向量. 证明: (1) $(AB)X=0$ 至少有 $\max(l,m)$ 个线性无关的解向量; (2) 如果 $l+m>n$, 那么 $(A+B)X=0$ 必有非零解; (3) 如果 $AX=0$ 和 $BX=0$ 没有公共的非零解向量, 且 $l+m=n$, 那么 K^n 中的任一向量 α 都可以唯一的分解为 $\alpha=\beta+\gamma$, 其中 β,γ 分别是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的解向量.
11. A,B 都是 $m\times n$ 矩阵, 线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解. 问 A,B 的列向量组是否等价、行向量组是否等价.
12. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.
13. 证明: $AX=0$ 有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.
14. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha\neq 0, A^k\alpha=0$, 那么 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\mathrm{rank}(A^n)=\mathrm{rank}(A^{n+1})$.

7.2 解答

1. 充分性: 存在 n 阶非零子式 $\Rightarrow$ 在这 n 阶子式内的列向量组线性无关 $\Rightarrow$ 作为延长组的 A 列向量组线性无关.
必要性: A 列向量组线性无关 $\Rightarrow \mathrm{rank}(A)=n \Rightarrow$ 行向量组秩也为 $n\Rightarrow$ 存在 n 个线性无关的行向量 $\Rightarrow$ 这 n 个线性无关的行向量构成的子式行列式非零.
2. (1) 其实是去求解方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4(2\alpha_2-\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2 \Rightarrow x_1=1, x_2+2x_4=2, x_3-x_4=0 \Rightarrow$ 通解是 $(1,2-2t,t,t)$.
(2)(3) $\mathrm{rank}(A)=3$, 且有分解 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 因此行空间一组基为 $(1,0,0,0),(0,1,0,2),(0,0,1,-1)$.
3. 先求出其行简化阶梯矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 知其秩为 3, 且有 5 个列极大线性无关组 (第 5 列必选, 第 2 列、第 3 列至多选一个, 其余随意); 观察原矩阵易知有 2 个行极大无关组 (第 2 行、第 3 行至多选一个, 其余随意); 因此有 $2\times 5=10$ 个 3 阶非零子式.
4. (1) 由于 A 列满秩, 因此 $AX=0\Rightarrow X=0$, 即 $CX=ABX=0\Rightarrow BX=0$. 反过来则显然.
(2) 只需注意到 $k_1\gamma_{i_1}+\cdots+k_r\gamma_{i_r}=0 \Leftrightarrow (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_r\beta_{i_r})=0 \Leftrightarrow k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_r\beta_{i_r}=0$. 后一问取极大线性无关组知 $\mathrm{rank}(B)\leq\mathrm{rank}(C)$, 由矩阵乘法又知道 $\mathrm{rank}(C)=\mathrm{rank}(AB)\leq\mathrm{rank}(B)$.
5. 将 $M_n(K)$ 的矩阵平铺开看成是 n^2 维的行向量, 并取该子空间的一组基 $A_1,\cdots,A_r$. 把这 r 个行向量在 $\mathrm{axis}=0$ 方向拼成 $r\times n^2$ 的矩阵, 并可得到其简化阶梯型矩阵 J. 注意到 J 的行向量 $B_1,\cdots,B_r$ 也是该子空间的一组基, 这组基的线性组合能使得矩阵在某 r 个位置取到任意的值. 下面用归纳法证明: 任取 $n\times n$ 矩阵 A 中的 n^2-n+1 个位置, 我们总可以在这些位置填上 0 或 1, 使得不管矩阵 A 其余的 $n-1$ 个位置填什么数, A 的行列式总为 ± 1. 假设命题对 $n-1$ 级的方阵成立, 考察 n 阶方阵. 由抽屉原理, 总有一行 (不妨设是第 i 行), 该行的 n 个元素都可任意填选. 再选一列 (不妨设是第 j 列), 该列中存在某个位置不能任意填选. 取 (i,j) 元为 1, $(i,\neq j)$ 元为 0, 那么在 (i,j) 元的余子式中最多只有 $n-2$ 个元素不能任选, 由归纳假设知总可在子阵中能任意填选的地方填上 0 或 1, 使得 (i,j) 元的余子式取 ± 1. 在此填法下, n 阶方阵 A 的行列式是 (i,j) 元的代数余子式, 即 ± 1. 由数学归纳法知命题得证.
6. 由矩阵满秩知 $(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$ 和 $(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$ 线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三

列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证 $x_3+k(x_1-x_2)=x_1+t(x_2-x_3), x=a,b,c$ 对于 k,t 是否有解. 由于矩阵满秩, 该方程系数必须满足 $t+1=k-1=t+k=0$, 因此 $t=-1,k=1$. 从而两直线相交.
7. 即 $|(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)|=6$, 问 $\left|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{3}{2}\alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ 2 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\right|$. 按第四行展开得 $|A|=2*(-6)-1*|(-\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{3}{2}\alpha_4,\alpha_2,\alpha_4)|+3*|(-\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{3}{2}\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3)|=-42$.
8. 先证明 $\mathrm{rank}(A^TA)=\mathrm{rank}(A)$. 首先显然 $\mathrm{rank}(A^TA)\le\mathrm{rank}(A)$, 其次 $A^TAx=0\Rightarrow x^TA^TAx=0\Rightarrow\|Ax\|_2^2=0\Rightarrow Ax=0\Rightarrow\mathrm{Ker}(A^TA)\subset\mathrm{Ker}(A)\Rightarrow\mathrm{rank}(A^TA)\ge\mathrm{rank}(A)$. 接着, 由于 $\mathrm{rank}(A^TA)\le\mathrm{rank}(A^TA,A^Tb)\le\mathrm{rank}(A^T)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^TA)$ 知系数矩阵和增广矩阵秩相等, 因此方程有解.
9. (1) $n=1$ 时 $|A|=a_1-b_1$, $n=2$ 时 $|A|=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$. $n>2$ 时由于 $A=\begin{pmatrix}a_1 & -1\\ a_2 & -1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$, 因此 $\mathrm{rank}(A)\le 2$, 从而 $|A|=0$.
(2) $n=2$ 时 $|A|\ne 0$, 因此解空间只有零解, 维数为 0, 不存在基. $n>2$ 时, 由于 $\mathrm{rank}(A)\le 2$ 且显然 $A\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix}\ne 0$, 因此 $\mathrm{rank}(A)=2$, 解空间维数是 $n-2$. 因此只需解方程 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}X=0$ 即可 (这个分解后的系数矩阵秩也为 2, 因此同解). 直接计算得到一组基为 $\eta_i=\left(\frac{b_i-b_2}{b_2-b_1},\frac{b_1-b_i}{b_2-b_1},0,\cdots,0,\underbrace{1}_{\text{第}i\text{个}},0\cdots,0\right)^T, i=3,4,\cdots,n$.
10. (1) $n-\mathrm{rank}(AB)\ge\max(n-\mathrm{rank}(A),n-\mathrm{rank}(B))\ge\max(l,m)$.
(2) $\mathrm{rank}(A+B)\le\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le n-l+n-m<n$, 因此 $(A+B)X=0$ 必有非零解.
(3) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 分别是 $AX=0,BX=0$ 线性无关的解. 考虑方程 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_l\alpha_l+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_m\beta_m=0$, 则 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_l\alpha_l=-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_m\beta_m$ 是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解. 由题意知其必然为零向量, 又由 $\{\alpha_i\}_{i=1}^l,\{\beta_j\}_{j=1}^m$ 线性无关性知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_l=\mu_1=\cdots=\mu_m=0$. 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 整体线性无关. 又由于 $l+m=n$, 因此他们是 K^n 一组基, 从而任一向量都可唯一被它们线性表出, 相应的被表出的两部分也就对应了 β 和 γ. 唯一性可由 $\alpha=\beta_1+\gamma_1=\beta_2+\gamma_2\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\gamma_2-\gamma_1$ 是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解 $\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\gamma_2-\gamma_1=0$ 得到.
11. 第 1 个结论不对, 比如 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. 第 2 个结论对. 若解空间 0 维, 则 A,B 均列满秩, 也都可以通过初等行列变换得到其简化阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix}I_{n\times n}\\ 0_{(m-n)\times n}\end{pmatrix}$, 因此等价. 其余情况, 设解空间 $r\ge 1$ 维, 任取 $AX=0$ 的一个基础解系 $X_1,\cdots,X_r$ 构成 $n\times r$ 矩阵 C. 考虑线性方程组 $C^TX=0$, 其解空间维数为 $n-r=\mathrm{rank}(A)$. 由于 $C^TA^T=0$, 因此 A 的行空间是该解空间的一个子空间. 由于它们维数相等, 因此 A 的行空间就是该解空间. 同理 B 的行空间也是该解空间.
12. 注意到 $W_i=\{X\in K^n:(a_{i1},\cdots,a_{in})X=0\}, i=1,2,\cdots,n$ 都是 K^n 的 $n-1$ 维子空间, 由于有限个 $n-1$ 维子空间张不满 n 维全空间, 从而存在 $X_0\in K^n\backslash(W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_n)$, 此时 AX_0 的每个分量都不为零.
13. 必要性. 设 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 是强非零解, 则 $\alpha_i=\sum_{k\ne i}(-\frac{x_k}{x_i})\alpha_k, \forall i=1,\cdots,n$.
充分性. 不妨设 $\alpha_i=\sum_{k\ne i}t_{ki}\alpha_k, \forall i=1,\cdots,n$, 则记 $T=\begin{pmatrix}1 & -t_{12} & -t_{13} & \cdots & -t_{1,n-1} & -t_{1,n}\\ -t_{21} & 1 & -t_{23} & \cdots & -t_{2,n-1} & -t_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -t_{n-1,1} & -t_{n-1,2} & -t_{n-1,3} & \cdots & 1 & -t_{n-1,n}\\ -t_{n1} & -t_{n2} & -t_{n3} & \cdots & -t_{n,n-1} & 1\end{pmatrix}$, 从而 $AT=0$. 由于 T 的任一主对角元均不为零, 从而存在 X_0 使得 TX_0 每个分量都不为零, 此即该强非零解.
14. (1) 设 $\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1=0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2=0$, 以此类推知线性无关.
(2) 显然 $A^nX=0\Rightarrow A^{n+1}X=0$. 若存在 $A^{n+1}\alpha=0$ 但 $A^n\alpha\ne 0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^n\alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\mathrm{rank}(A^n)=\mathrm{rank}(A^{n+1})$.

8 期中考试

8.1 问题

1. 求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

2. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个线性无关组. 证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关当且仅当 $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\{0\}$.

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} b_n & x & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ b_2 & \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x+b_1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (1) 将 A 写成一个上三角矩阵与一个下三角矩阵的乘积; (2) 求 A 的行列式.

4. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量组, 其中 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关. 证明存在无穷多个实数 k, 使得向量组 $\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_r+k\beta_r$ 线性无关.

5. 已知矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5]$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ 的行向量组等价, 且 $\alpha_2=(2,1,2,1)^T,\alpha_5=(7,3,7,3)^T$. 又知方程组 $AX=\beta$ 的一个解为 $X=(1,1,-1,0,1)^T$, 这里 $\beta=(7,5,7,4)^T$. (1) 写出矩阵 A 及其行简化阶梯形矩阵 J; (2) 求 A 行空间的一组基, 并确定当 a,b 为何值时, $(5,3,6,a,b)$ 落在 A 的行空间里; (3) 求方程组 $AX=\beta$ 的所有解; (4) 求所有矩阵 B, 使得 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5]B$.

6. 设 A_{ij} 是行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中 (i,j) 元的代数余子式. 证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n & y \end{vmatrix}=Dy-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_ix_j$.

7. 已知矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等. 记 A 的解空间为 W, B 的列空间为 V. 证明 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(AB)$ 当且仅当 $V\cap W=\{0\}$.

8.2 解答

1. 利用拆项大法, 注意若有两列成比例则行列式为 0. 从而最后只会剩下 $n+1$ 个行列式: $\begin{vmatrix} x_1y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3y_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},\cdots,$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1y_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1}y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_ny_n \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 相加得到原行列式为 $1+\sum_{i=1}^n x_iy_i$.

2. "$\Rightarrow$": 若 $x=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=\mu_1\beta_1+\cdots+\beta_s\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle$, 则 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_s\beta_s=0\Rightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_r=\mu_1=\cdots=\mu_s=0\Rightarrow x=0$.

"$\Leftarrow$": 考虑 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots+\beta_s=0$, 这意味着 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_s\beta_s\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\{0\}\Rightarrow\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0,\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_s\beta_s=0$. 由两组向量 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r,\{\beta_j\}_{j=1}^s$ 各自内部的线性无关

性知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=\mu_1=\cdots=\mu_s=0$, 因此整体也线性无关.

3. (1) 通过行变换 (倒数第二行加上倒数第一行的 x 倍, 倒数第三行加上倒数第二行的 x 倍, $\cdots$) 得到 $A=LU$, 其中

$$L=\begin{bmatrix}1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix}x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ x^2+b_1x+b_2 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0\\ x+b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

(2) $|A|=|L||U|=(-1)^{n-1}(x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n)$.

4. 将 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$, 并任意选择 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$. 行列式 $|(\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_n+k\beta_n)|$ 是一个关于 k 的至多 n 次多项式, 其等于零至多只有 n 个解 (令 $k\to\infty$ 知此多项式不恒为零), 且在该行列式不等于零时 $\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_r+k\beta_r$ 线性无关, 因此存在无穷多个实数 k.

5. (1) 容易得到 $\alpha_1-\alpha_3=(-2,1,-2,0)^T$, 并求出题给定的矩阵行空间一组基是 $(1,0,0,1,0),(0,1,2,3,0),(0,0,0,0,1)$. 考虑其前三个分量, 由能被这组基表出知 $\alpha_3=2\alpha_2=(4,2,4,2)^T$, $\alpha_1=(2,3,2,2)^T$, 从而 $\alpha_4=(8,6,8,3)$. 因此

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 4 & 8 & 7\\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7\\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3\end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(2) 一组基为 $(1,0,0,1,0),(0,1,2,3,0),(0,0,0,0,1)$. 考察各系数, 知当 $a=14, b\in\mathbb{R}$ 时, 该向量落在 A 的行空间里.

(3) 先求出 $AX=0$ 的解, 即 $(\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5)X=0$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 线性无关. 通解为 $(t_1,3t_1-2t_2,t_2,-t_1,0)^T$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ 是自由变元. 因此 $AX=\beta$ 的通解是 $(t_1+1,3t_1-2t_2+1,t_2-1,-t_1,1)^T$.

(4) 容易求得 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

6. 按最后一行展开, 得到 $\text{LHS}=Dy+\sum_{i=1}^n(-1)^{n+i+1}x_iD_i$, 其中 D_i 是把 D 中第 i 列删去, 最后一列补上 $(x_1,\cdots,x_n)^T$ 得到的行列式. 再按最后一列对所有 D_i 展开, 得到 $D_i=\sum_{j=1}^n(-1)^{n+j}(-1)^{i+j}A_{ij}x_j$, 直接代入得到 RHS.

7. 注意到 $\text{rank}(B)=\text{rank}(AB)\Leftrightarrow \text{Ker}(B)=\text{Ker}(AB)$.

"$\Rightarrow$": 考虑 $x\in V\cap W$, 则可设 $x=By$. 由于 $ABy=Ax=0$, 因此 $y\in\text{Ker}(AB)=\text{Ker}(B)\Rightarrow By=0\Rightarrow x=0$.

"$\Leftarrow$": 显然 $\text{rank}(AB)\le\text{rank}(B)$. 若 $\text{rank}(AB)<\text{rank}(B)$, 则 $\text{Ker}(AB)\neq\text{Ker}(B)$, 即 $\exists x\in\text{Ker}(AB)$ 但 $x\notin\text{Ker}(B)$, 此时 $Bx\neq 0$, 但是 $Bx\in V\cap W$.

9 第 8 次习题课: 可逆矩阵

9.1 问题

1. n 阶方阵 $A,B,A+B$ 均可逆, 证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆并求其逆矩阵.
2. n 阶方阵 A,B 满足 $A+B=AB$, 证明 $AB=BA$.
3. 证明可逆的上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵.
4. 计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ & & 1 & \cdots & n-2\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & 1\end{bmatrix}$ 的逆.
5. A 是 n 阶方阵, 试根据 $\text{rank}(A)$ 的取值讨论 $\text{rank}(A^*)$, 其中 A^* 是它的伴随矩阵.
6. 已知 $I_{m\times m}-A_{m\times n}B_{n\times m}$ 可逆, 证明 $I_{n\times n}-B_{n\times m}A_{m\times n}$ 也可逆并求其逆矩阵.

7. A 是 n 阶可逆矩阵, α, β 是 n 维列向量, 且矩阵 $A+\alpha\beta^T$ 可逆, 证明 $(A+\alpha\beta^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha}$.

8. 计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix}$ 的逆, 其中 $a_i > 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$.

9. 设 A 是 n 阶方阵, 求 $(A^*)^*$.

10. 设 n 阶方阵 A 恰有 k 个 $n-1$ 阶子式等于 0, 其中 $1 \le k \le n-1$. 证明 A 可逆.

11. 设 A, B 是 n 阶方阵, A^*, B^* 为对应的伴随矩阵, 试求 $2n$ 阶方阵 $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵.

12. A 是 n 阶方阵 $(n \ge 3)$, $A^3 = O$, 证明矩阵 $M = \begin{bmatrix} I & A \\ A & I \end{bmatrix}$ 可逆, 并求其逆.

9.2 解答

1. 由于 $[(A+B)^{-1}B](I+B^{-1}A) = I$, 因此 $(I+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = I \Rightarrow (A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B = (I+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = I \Rightarrow (A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B$.

2. $A+B = AB \Rightarrow (A-I)(B-I) = I \Rightarrow (B-I)(A-I) = I \Rightarrow BA = A+B = AB$.

3. 将单位矩阵拼在原矩阵右边, 其行变换只需不断用上面的行加减下面的行, 此操作只会将单位矩阵变成上三角矩阵.

4. 记 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A = I + 2J + \cdots + nJ^{n-1}$. 由于 $A(I - 2J + J^2) = 0$, 因此 $A^{-1} = I - 2J + J^2$.

5. 当 $\operatorname{rank}(A) = n$ 时, 由于 $AA^* = |A|I$, 从而 A^* 可逆, 因此 $\operatorname{rank}(A^*) = n$. 当 $\operatorname{rank}(A) = n-1$ 时, 由于 $AA^* = 0$, 且 $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = n - \operatorname{rank}(A) = 1$, 又有 A 中存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 不全零, $\operatorname{rank}(A^*) = 1$. 当 $\operatorname{rank}(A) \le n-2$ 时, A 中不存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 全零, 从而 $\operatorname{rank}(A^*) = 0$.

6. $(I-BA)(I+B(I-AB)^{-1}A) = I - BA + B(I-AB)^{-1}A - BAB(I-AB)^{-1}A = I - BA + B(I-AB)(I-AB)^{-1}A = I$, 因此 $(I-BA)^{-1} = I + B(I-AB)^{-1}A$.

7. 注意到 $A + \alpha\beta^T = A(I + A^{-1}\alpha\beta^T)$, 因此 $(A+\alpha\beta^T)^{-1} = (I + A^{-1}\alpha\beta^T)^{-1}A^{-1} = (I - A^{-1}\alpha(1+\beta^T A^{-1}\alpha)^{-1}\beta^T)A^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^T A^{-1}}{1+\beta^T A^{-1}\alpha}$.

8. $A = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)(I_n + \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}) \Rightarrow A^{-1} = (I_n - (1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix})\operatorname{diag}(\frac{1}{a_1}, \cdots, \frac{1}{a_n})$.

9. 当 $n = 2$ 时, 由伴随矩阵定义知 $(A^*)^* = A$. 当 $n > 2$ 时, 若 A 可逆, 由 $A^* = |A|(A^*)^{-1}$ 知 $(A^*)^* = |A^*|A^{-1} = |A|^{n-1}|A|^{-1}A = |A|^{n-2}A$. 若 A 不可逆此结论也对, 因为 $\operatorname{rank}(A^*) = 1$, A^* 的伴随矩阵全零.

10. 反证法. 若 $\operatorname{rank}(A) \le n-1$, 则由第 5 题结论知 $\operatorname{rank}(A^*) = 1$. 任取某个 $A^*_{ij} = 0$, 由于其秩为 1, 因此其第 i 行全零, 这与恰有 k 个子式为 0 矛盾.

11. 只需简单计算即可, $M^* = \begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$.

12. 设 $P = \begin{bmatrix} I & O \\ -A & I \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix}$, 则 $PMQ = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I - A^2 \end{bmatrix}$. $A^3 = O \Rightarrow (PMQ)^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I + A^2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = Q \begin{bmatrix} I & O \\ O & I + A^2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} I + A^2 & -A \\ -A & I + A^2 \end{bmatrix}$.

10 第 9 次习题课: 矩阵的分块, 正交矩阵

10.1 问题

1. 证明对任意 n 阶可逆矩阵, 存在方阵 P, L, U 使得 $PA = LU$, 其中 P 是对换矩阵 (对换单位矩阵某两行所得矩阵) 的积, L 是对角元均为 1 的下三角矩阵, U 是上三角矩阵.
2. 求与任意可逆矩阵乘法可交换的矩阵构成的集合.
3. 证明行列式为 1 的 n 阶方阵可以写成若干个行列式为 1 的初等矩阵的乘积.
4. 已知 $P = \begin{bmatrix} A & I \\ I & I \end{bmatrix}$, 证明 P 可逆当且仅当 $I - A$ 可逆, 并利用 $(I-A)^{-1}$ 表出 P^{-1}.
5. A 是 n 阶方阵, 证明 $\operatorname{rank}(A - I) + \operatorname{rank}(A^2 + A + I) = n$ 当且仅当 $A^3 = I$.
6. A, B 是 n 阶方阵, 且满足 $\operatorname{rank}(I - AB) + \operatorname{rank}(I + BA) = n$, 证明或否定: A 是可逆矩阵.
7. A, B, C 分别是 $m \times n, n \times s, s \times t$ 矩阵, 证明 $\operatorname{rank}(ABC) \geq \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}(B)$.
8. A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 证明 $\operatorname{rank}(A + B) \geq \operatorname{rank}(A, B) + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \operatorname{rank}(A) - \operatorname{rank}(B)$.
9. A, B, C, D 都是 n 阶方阵, $AC = CA$, $AD = CB$, 且 A 可逆. 求矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的秩.

10.2 解答

1. 由于 A 可逆, 因此第一列必至少存在一个非零元 a_{i1}. 将第 1 行与第 i 行互换使得新矩阵 $(1,1)$ 元非零, 再把第一列的 $(i,1)$ 元都化成零, $i = 2, 3, \cdots, n$. 这意味着 $Q_1 P_{i1} A = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix}$, 其中 P_{i1} 是对换矩阵, $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}$. 利用归纳法, 假设存在 $P_{n-1} A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$, 因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} Q_1 P_{i1} A = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & P_{n-1} A_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

等式右边已经是一个对角元均为 1 的下三角矩阵乘一个上三角矩阵, 因此观察等式左边. 注意到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$ 是对换矩阵的积, 而 Q_1 是对角元均为 1 的下三角矩阵, 要是能把这俩矩阵换个位置就好了. 计算知

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1}\alpha & P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1}\alpha & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix},$$

这样就可以写出

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix} P_{i1} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1}\alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_{n-1}\alpha & L_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

于是令 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_{n-1}\alpha & L_{n-1} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} a'_{11} & \beta \\ 0 & U_{n-1} \end{bmatrix}$ 即可. 显然 $n = 1$ 是平凡的, 因此任意 n 都成立.
2. 先验证初等矩阵 $P(j, i(1))$, 即 $AP(j, i(1)) = P(j, i(1))A$, 两边同时减去矩阵 A 得到 $AE_{ij} = E_{ij}A \Rightarrow a_{ii} = a_{jj}, a_{ij} = 0, \forall i \neq j$, 因此只能是数量矩阵, 其与所有矩阵都可交换.
3. 只需验证 A 可经一系列消法变换 (即不经过第三类初等矩阵 $P(i(c))$) 化为单位矩阵. 利用归纳法, 由于 A 可逆, 总可通过消法变换化得到 $a_{11} = 1$, 从而再通过消法变换化为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$, $n-1$ 阶方阵 A_1 的行列式为 1, 从而可消法变换化为单位矩阵 I_{n-1}, 因此 A 也可通过消法变换化为单位矩阵 I_n. 显然 $n = 1$ 是平凡的.
4. 利用分块初等变换得 $\begin{bmatrix} A & I \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - I & I \\ O & I \end{bmatrix}$, 因此 $|P| = |A - I|$, 两者可逆性相互等价. 另一方面, 由上式两边求逆得 $P^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - I & I \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(I-A)^{-1} & (I-A)^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(I-A)^{-1} & (I-A)^{-1} \\ (I-A)^{-1} & I - (I-A)^{-1} \end{bmatrix}$.

5. 由裴蜀定理, 存在多项式 f,g 使得 $f(x)(x-1)+g(x)(x^2+x+1)=1$, 即 $f(A)(A-I)+g(A)(A^2+A+I)=I$. 从而利用分块初等行列变换,

$$\begin{bmatrix} A-I & O \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} A-I & f(A)(A-I) \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ I-A^3 & O \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} O & I \\ A^3-I & O \end{bmatrix}.$$

从而 $\operatorname{rank}(A-I)+\operatorname{rank}(A^2+A+I)=n+\operatorname{rank}(A^3-I)$, 因此原命题成立.

6. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & O \\ O & I+BA \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I+AB & O \\ O & I \end{bmatrix},$$

从而知 $\operatorname{rank}(I+BA)=\operatorname{rank}(I+AB)$. 因此原条件等价于 $\operatorname{rank}(I-AB)+\operatorname{rank}(I+AB)=n$, 由上一小题知 $(AB)^2=I$, 因此 A 可逆.

7. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix} ABC & O \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} O & AB \\ BC & B \end{bmatrix},$$

从而知 $\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)\geq \operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)$.

8. 令 $P=(I_m,I_m), M=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}$, 然后代入第 7 题的不等式.

9. 利用分块初等变换, 得 $\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$. 由于 $\operatorname{rank}(D-CA^{-1}B)=\operatorname{rank}(A(D-CA^{-1}B))=0$, 因此 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)=n$.

11 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.