# 数学分析 II 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 2 月 3 日

## 目录

# 1 第 1 次习题课: 定积分基本概念与可积性

## 1.1 问题

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x)\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx=0$.
2. $f(x)\in R[a,b],\int_a^b f(x)dx>0$. 证明 $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b],\text{s.t.}\forall x\in[\alpha,\beta],f(x)>0$.
3. $f(x)\in R[a,b]$, 问 $\lfloor f(x)\rfloor$ 是否一定 $\in R[a,b]$?
4. 设非负函数 $f(x)\in C[a,b]$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}$ 存在并求之.
5. $f(x)\geq 0,f''(x)\leq 0,x\in[a,b]$. 证明 $\max_{x\in[a,b]}f(x)\leq\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.
6. $n\in\mathbb{N}_+,f(x)\in C[a,b],\int_a^b x^kf(x)dx=0,k=0,1,\cdots,n$. 证明 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内至少有 $n+1$ 个零点.
7. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}=1,\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.
9. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x),g(x)\in R[a,b],p,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\left(\int_a^b f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}}$.
10. $f(x)\in R[a,b],A=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x),B=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x),g(y)\in C[A,B]$, 证明 $G(x):=g(f(x))\in R[a,b]$.

## 1.2 解答

1. 显然 $f(x)$ 有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次 $\forall\epsilon>0,\forall x\in[a,b],\exists\delta_x>0,\text{s.t.}\omega_{(x-\delta_x,x+\delta_x)}<\epsilon$. 由于 $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)\supset[a,b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\supset[a,b]$. 不妨设 $a\leq x_1<\cdots<x_n\leq b$. 可取分割点 $y_i\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap(x_{i+1}-\delta_{i+1},x_i+\delta_{i+1})$, 对于这个分割, $\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\epsilon(b-a)$, 因此有可积性. 由于 $|\int_a^b f(x)dx|\leq\int_a^b|f(x)|dx\leq\sum_{i=1}^n\int_{y_{i-1}}^{y_i}|f(x)|dx\leq\epsilon(b-a)$, $\epsilon$ 的任意性知 $\int_a^b f(x)dx=0$.
2. 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.
3. $f(x)=-\text{Riemann}(x)\in R[0,1],\lfloor f(x)\rfloor=-\text{Dirichlet}(x)\notin R[0,1]$.
4. 设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x),f(\xi)=M$. 由连续性, $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0\text{ s.t.}\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta),f(x)>M-\epsilon$. 因此当 $n$ 足够大时成立
$M+2\epsilon>((b-a)M^n)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}>(2\delta(M-\epsilon)^n)^{\frac{1}{n}}>M-2\epsilon\Rightarrow\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}\to M$.
5. 设 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. 由题意知 $f(x)$ 是凹函数, 因此成立 $f(x)\geq\begin{cases}\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}(x-a)+f(a), & x\in[a,\xi]\\ \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}(x-\xi)+f(\xi), & x\in[\xi,b]\end{cases}\Rightarrow\text{RHS}\geq$
$\frac{2}{b-a}\left(\int_a^\xi f(x)dx+\int_\xi^b f(x)dx\right)\geq\frac{2}{b-a}\left((\xi-a)\frac{f(\xi)+f(a)}{2}+(b-\xi)\frac{f(b)+f(\xi)}{2}\right)\geq\frac{2}{b-a}\frac{f(\xi)}{2}(\xi-a+b-\xi)=f(\xi)=\text{LHS}$.
6. $\int_a^b f(x)dx=0\Rightarrow\exists 1$ 零点, 记为 $x_1$. $\int_a^b(x-x_1)f(x)dx=0\Rightarrow\exists 2$ 零点, 记为 $x_2$. $\cdots\int_a^b\left[\prod_{i=1}^n(x-x_i)\right]f(x)dx=0\Rightarrow\exists n+1$ 零点.
7.

$$\text{原式}=2^{\alpha-\beta}\frac{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\frac{2}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}\xrightarrow{\text{定积分定义}}2^{\alpha-\beta}\frac{\left(\int_0^2 x^\alpha dx\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta dx\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

8. $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,n^\alpha(1-\epsilon)<a_n<n^\alpha(1+\epsilon)$. 从而当 $n$ 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\epsilon,\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\epsilon,\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]\right|\leq\frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\leq\frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha=\frac{\epsilon}{n}\sum\limits_{i=1}^n(\frac{i}{n})^\alpha\leq\epsilon\int_0^1 x^\alpha dx+\epsilon=\frac{\epsilon}{\alpha+1}+\epsilon\leq 2\epsilon$. 这意味着 $\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i-\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha\right)\right|\leq 4\epsilon\Rightarrow$ 原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$.
9. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}=1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x)dx\leq 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha\ln a+(1-\alpha)\ln b\leq\ln(\alpha a+(1-\alpha)b)\Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha}\leq\alpha a+(1-\alpha)b$. 令 $\alpha=\frac{1}{p},1-\alpha=\frac{1}{q},a=x^p,b=y^q\Rightarrow xy\leq\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\Rightarrow\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\int_a^b\frac{f(x)^p}{p}+\frac{g(x)^q}{q}dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
也可以将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式证明.
10. 证法 a: $G(x)$ 的间断点集合是 $f(x)$ 间断点集合的子集, 因此其 Lebesgue 测度为 0, 从而可积.

证法 b: 由于 $g(y)$ 一致连续, 因此 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 使得 $\forall|y_1-y_2|<\delta,|g(y_1)-g(y_2)|<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 由于 $f(x)\in R[a,b]$, 因此 $\exists[a,b]$ 的分割 $\Delta$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\delta\epsilon}{4M}$, 其中 $M=\sup\limits_{y\in[A,B]}|g(y)|$. 若 $\omega_i(f)<\delta$, 则 $\omega_i(G)<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 若 $\omega_i(f)\geq\delta$, 其区间长度 $\sum\limits_{i:\omega_i(f)\geq\delta}\Delta x_i$ 不会超过 $\frac{\epsilon}{4M}$. 因此 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(G)\Delta x_i=\sum\limits_{i:\omega_i(f)<\delta}\omega_i(G)\Delta x_i+\sum\limits_{i:\omega_i(f)\geq\delta}\omega_i(G)\Delta x_i<\frac{\epsilon}{2}+2M\frac{\epsilon}{4M}=\epsilon$. 这样对于任意 $\epsilon>0$ 我们都找到了一个分割 $\Delta$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(G)\Delta x_i<\epsilon$.

# 2 第 2 次习题课: 定积分的性质与计算

## 2.1 问题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 证明 $\forall a,b\in\mathbb{R},\lim\limits_{h\to0}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]dx=0$.
2. (Riemann-Lebesgue 引理). $f\in R[a,b],g\in R[0,T],g(x+T)=g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)dx\to\int_a^b f(x)dx\cdot\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.
3. 计算积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1},\alpha\in(0,\pi)$.
4. 计算积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}dx$.
5. 设 $f_n(x)=\begin{cases}\frac{\sin^2nx}{\sin x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases},x\in[0,\frac{\pi}{2}],I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx$, 求 $I_n$ 的表达式并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n}$.
6. $f(x)\in C[a,b]$, 且对于任意的 $[\alpha,\beta]\subset[a,b],\exists\delta>0,M>0,\text{s.t.}\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leq M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x)\equiv0$.
7. $f(x)\in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)\equiv0$.
8. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明 $f(x)=xf(1)$.
9. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x)\in R[0,x],\forall x\in(0,+\infty)$, 且 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ 也是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.
10. $f(x)\in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^nf(x)dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^ndx}=f(0)$.

## 2.2 解答

1. WLOG $h<1$. 由可积函数性质, 存在 $[a,b+1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|dx<\epsilon$, 且 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x,y\in[a,b+1],|x-y|<\delta$, 成立$|g(x)-g(y)|\leq\frac{\epsilon}{b-a}$. 从而 $\left|\int_a^b[f(x+h)-f(x)]dx\right|\leq\int_a^b|f(x+h)-g(x+h)|dx+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|dx+\int_a^b|g(x)-f(x)|dx\leq\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|dx+\int_a^b\frac{\epsilon}{b-a}dx+\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|dx\leq3\epsilon$.
2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)dx=0$, 否则考虑 $h(x)=g(x)-\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.

由 Riemann 积分定义, $\forall\epsilon>0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x)=\begin{cases}C_1 & a=x_0\leq x<x_1\\ C_2 & x_1\leq x<x_2\\ \cdots & \\ C_m & x_{m-1}\leq x\leq b\end{cases}$ 使得 $\int_a^b|f(x)-s_\epsilon(x)|dx<\epsilon$. 设 $M=\sup_{x\in[0,T]}|g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx|=|\int_a^b(f(x)-s_\epsilon(x))g(nx)dx+\int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx|\leq\int_a^b|f(x)-s_\epsilon(x)|g(nx)dx+|\sum\limits_{i=1}^{m}C_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)dx<M\epsilon+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}C_i\int_{nx_{i-1}}^{nx_i}g(x)dx\leq M\epsilon+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}C_iMT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)dx=0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)dx=\int_c^{c+T}g(x)dx+\int_{c+T}^{c+2T}g(x)dx+\cdots+\int_{c+kT}^{d}g(x)dx$ (设 $c+kT\leq d<c+(k+1)T$) $=\int_{c+kT}^{d}g(x)dx\leq MT$. 选择一个足够大的 $n$, 使得 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}C_iMT<\epsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx|\leq(M+1)\epsilon$.
3. $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+1}=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2\sin\alpha}$.
4. $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2(-x)}{1+e^{x}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2xdx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.
5. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(2nx)}{2\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x]\cos2x+\sin[(2n-2)x]\sin2x}{2\sin x}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos[(2n-2)x](1-2\sin^2x)+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos[(2n-2)x]}{2\sin x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x\cos[(2n-2)x] + 2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}dx \\
&= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x]\cos x dx = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx \\
&= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1}\cos[(2n-1)x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1}
\end{aligned}
$$

由于 $I_1 = 1$, 因此 $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}}{\ln n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}$.

6. 假设 $\exists f(x_0) > 0$. 由连续性, $\exists\delta > 0, \text{s.t.}\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$, 从而 $\forall[\alpha,\beta] \subset (x_0-\delta, x_0+\delta), \left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha) > M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$(最后一个大于号成立只需令 $\beta-\alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

7. 构造 $G(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2, G'(x) = g(x)$ 单调递减, $g(0) = 0$, 因此 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 且 $G(0) = 0, G(x) \ge 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

8. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^\alpha f(x)dx = \frac{\alpha^2}{2}f(1)$. 由集合 $\{q\alpha : q \in \mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha) = qf(\alpha)$, $\int_0^\alpha f(x)dx = f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha)\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$.

9. 凸函数开区间上连续 $\Rightarrow$ 闭区间上可积. 做变换 $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(\frac{t}{x}\cdot x)d\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux)du$, 从而 $F(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i) = \int_0^1 f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i(ux_i)\right)du \le \int_0^1 \sum\limits_{i=1}^{n} t_i f(ux_i)du = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i F(x_i) \Rightarrow F(x)$ 凸.

10. 往证 $\frac{\int_{-1}^1(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx} \to 0$, 用极限定义. $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{s.t.}\forall x \in (-\delta,\delta), |f(x)-f(0)| < \epsilon$. 设 $\max|f(x)| = M$. 从而原式 $= \frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3$. $|I_1| \le \frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\epsilon dx}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx} \le \epsilon$. $|I_2| \le 2M\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\epsilon dx}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx} \le 2M\frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n dx} \le 2M(1-\delta)\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M\frac{1-\delta}{\delta}(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2})^n$. 注意到 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$, 从而可以取足够大的 $n$ 使得 $|I_2| < \epsilon$. 类似地放缩 $I_3$, 从而 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$.

# 3 第 3 次习题课: 定积分中值定理与应用

## 3.1 问题

1.

## 3.2 解答

1.

# 4　第 4 次习题课: 广义积分

### 4.1　问题

### 4.2　解答

# 5　第 5 次习题课: 正项级数

### 5.1　问题

### 5.2　解答

# 6　第 6 次习题课: 任意项级数, 数项级数的性质

### 6.1　问题

### 6.2　解答

# 7　第 7 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (1)

### 7.1　问题

### 7.2　解答

# 8　第 8 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (2)

### 8.1　问题

### 8.2　解答

# 9　第 9 次习题课: 幂级数的基本性质

### 9.1　问题

### 9.2　解答

# 10　第 10 次习题课: 泰勒展开与多项式逼近

### 10.1　问题

### 10.2　解答

# 11　第 11 次习题课: 傅里叶级数的基本性质

### 11.1　问题

### 11.2　解答

# 12　第 12 次习题课: 傅里叶级数的收敛性

### 12.1　问题

### 12.2　解答

# 13　致谢