

高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 10 月 23 日

目录

1	第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法	2
1.1	问题	2
1.2	解答	2
2	第 2 次习题课: 线性方程组的解, 集合	3
2.1	问题	3
2.2	解答	4
3	第 3 次习题课: 行列式 (1)	5
3.1	问题	5
3.2	解答	6
4	第 4 次习题课: 行列式 (2)	8
4.1	问题	8
4.2	解答	9
5	第 5 次习题课: 线性空间, 行列式 (3)	11
5.1	问题	11
5.2	解答	12
6	第 6 次习题课: 秩	13
6.1	问题	13
6.2	解答	13
7	致谢	14

1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$
2. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-2, 1, 5), \alpha_3 = (a, 2, 10), \beta = (1, b, -1)$. 当 a, b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?
3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 表出任何向量-如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).
4. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D . 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

5. (1) 求复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\text{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集合;
- (3) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1, y_2, y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解?
6. 已知向量 α, β 不共线, 并看成是由原点出发的有向线段 \vec{OA} 与 \vec{OB} . 设 $u, v \in \mathbb{R}$ 且 $u+v=1$, 问向量 $\vec{OC} = u\alpha + v\beta$ 的终点 C 在什么位置, \vec{AC} 与 \vec{CB} 的比值是多少, 何时比值为正数.
7. 求单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线.
8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体 $ABCD$ 每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.
9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异?
$$\begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .067 \end{cases}, \begin{cases} .835x + .667y = .168 \\ .333x + .266y = .066 \end{cases}$$
10. 考虑带截距的线性回归 $y \sim x_1 + \dots + x_p$, 参考上一题, 你有什么想法和改进?

1.2 解答

$$1. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=7*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=2*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=\textcircled{1}, \textcircled{3}-=4*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{13}{3}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}. \text{ 因此, 当 } a \neq -4 \text{ 或 } a = -4, b = -\frac{13}{2} \text{ 时, } \beta \text{ 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.}$$

3. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0)$.

$$\textcircled{2} - = 8 * \textcircled{1}$$

4. 注意 A, B, C, D 的比例和为 1, 因此

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} - = 5 * \textcircled{1} \\ \textcircled{4} - = 15 * \textcircled{1} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} + = 10 * \textcircled{2} \\ \textcircled{4} - = 5 * \textcircled{2} \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{4} + = \frac{2}{3} * \textcircled{3} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ 因此解是 } (\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25}).$$

5. (1) $\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} - = 2 * \textcircled{1} \\ \textcircled{3} - = i * \textcircled{1} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} - = \frac{i}{2+2i} * \textcircled{2} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} * = \frac{1}{2+2i} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(2) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. (3) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1, \frac{y_2-2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$ 时才有解.

6. $\overrightarrow{AC} = (u-1)\alpha + v\beta, \overrightarrow{CB} = -u\alpha + (1-v)\beta, \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{1-u}{1-v} = \frac{v}{1-v}$, 因此 A, C, B 三点共线, 且当 $0 < u, v < 1$ 时比值为正数.

7. $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x-z = k(1-y) \\ x+z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x+ky-z = k \\ kx-y+kz = 1 \end{cases}$. 特别

地, 当 $y = \pm 1$ 时, $z = \pm x$ 也是位于该曲面上的直线.

8. $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3)$, 设 BC, AC, AB 中点分别为 D, E, F , 设 $G = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$. 只需验证 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$ 分别与 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ 共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.

9. 用 Gauss 消元法可求得解为 $(1, -1)$ 和 $(-666, 834)$. 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.

10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如 L_2 正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着强相关变量, 干扰回归结果.

2 第 2 次习题课: 线性方程组的解, 集合

2.1 问题

1. (1) 用向量表示平面 $x+2y+3z=1$; (2) 用向量表示直线 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$; (3) 求平面 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k, l \in \mathbb{R}$ 的平面方程.

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$. (1) 解齐次方程组 $AX=0$; (2) 已知 $X = (1, 1, 2, 3, 0)^T$ 是方程组 $AX = \beta$ 的一个

解, 写出 $AX = \beta$ 的所有解.

3. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域.

(1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$ 的方式唯一.

4. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

5. 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 能线性表出 β_1, \dots, β_s , 且 β_1, \dots, β_s 又能线性表出 $\gamma_1, \dots, \gamma_t$, 证明 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 能线性表出 $\gamma_1, \dots, \gamma_t$.
6. 考虑 n 个城市之间的航班问题: 记 $H = (a_{ij})$ 为邻接矩阵, 这里 a_{ij} 表示从城市 i 到 j 的航班数. (1) 解释 H^k 的 (i, j) 元的含义; (2) 设 $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?
7. 设 A 是有向图 G 的邻接矩阵, 证明 G 中的循环三角形的个数等于 $\text{tr}(A^3)/3$.
8. 由集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集, 记为 $P(A)$. 设集合 A 非空, 证明 $\text{card}(P(A)) > \text{card}(A)$.
9. X 为非空集合, 映射 $f: P(X) \rightarrow P(X)$ 满足 $f(A) \subset f(B), \forall A \subset B$. 那么存在 $T \subset X$ 使得 $f(T) = T$.
10. (1) 找到 $[0, 1]$ 到 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的双射; (2) 找到 $(0, 1)$ 到 \mathbb{R} 的双射.
11. 罗素悖论: 某班的同学在习题课上作游戏. 每个学生可以给班里任意多同学发一次短信 (可包括自己). 记 X 是全体没有给自己发短信的同学构成的集合. 若某同学猜中 X 并给且只给 X 中的每个同学发了短信, 则该同学获胜. 问: 此游戏有无获胜者?
12. 学习使用 numpy 包, 并实现矩阵的基本运算.

2.2 解答

1. (1) 先求得一个点坐标 $(1, 0, 0)$, 再去求 $x + 2y + 3z = 0$ 的一组基础解系: $(2, -1, 0)$ 和 $(3, 0, -1)$, 因此向量表示为 $(1, 0, 0) + k(2, -1, 0) + l(3, 0, -1), k, l \in \mathbb{R}$.
- (2) 先求得一个点坐标 $(0, -1, 1)$, 再去求方向向量 $(1, 2, 3) \times (3, 2, 1) = (-4, 8, 4)$, 因此向量表示为 $(0, -1, 1) + t(-1, 2, 1), t \in \mathbb{R}$.
- (3) 先求得一个点坐标 $(1, 1, 2)$, 再去求法向量 $(1, 2, 0) \times (2, 0, 1) = (2, -1, -4)$, 因此平面可表示为 $2x - y - 4z = -7$.

$$2. (1) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}-\frac{3}{2} * \text{①} \quad \text{③}-\frac{1}{2} * \text{①} \quad \text{④}-\text{①}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}-\frac{2}{3} * \text{③} \quad \text{②}+\frac{5}{3} * \text{③}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_5 \\ x_3 = -2x_5 \\ x_1 + 2x_2 = -3x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$X = (-3n - 2m, m, -2n, -n, n)^T, m, n \in \mathbb{R}$ 是自由变元.

(2) 解集是基础解系加上代表元, 即 $(1 - 3n - 2m, 1 + m, 2 - 2n, 3 - n, n)^T$.

3. (1) 只需证明 $\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \in \mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}, \text{gcd}(a, b) = 1$, 那么 $a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3|a \Rightarrow 9|a^2 \Rightarrow 3|b^2 \Rightarrow 3|b$, 矛盾.

4. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5}) = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2 + \sqrt{-5}$ 是不可约数: $2 + \sqrt{-5} = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) \Rightarrow 9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5}) = (a + b\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5}) = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$ 无解; 但是 $2 + \sqrt{-5} \nmid 3 \times 3$ 而 $2 + \sqrt{-5} \nmid 3$, 因此不是素数.

5. $(\beta_1, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)A, (\gamma_1, \dots, \gamma_t) = (\beta_1, \dots, \beta_s)B \Rightarrow (\gamma_1, \dots, \gamma_t) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)(AB)$, 因此可以线性表出.

6. (1) 从 $a_{ij}^2 = \sum_s a_{is}a_{sj}$ 可以看出 H^k 的 (i, j) 元表示从 i 到 j 乘坐恰 k 次航班有多少种乘坐方式. (2) $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3$, 分别有 1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 2 种航班选择; $2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$ 都要倒 3 次, 是最多的.

7. 由上题知 A^3 的 (i, i) 元表示从 i 到 i 有几条恰走 3 次的路径, 三角形会在结点上算 3 次, 因此要除以 3.

8. 本题的关键是处理集合 A 包含无穷元素的情形. 假设存在一一映射 $f: A \mapsto P(A)$, 则考虑集合 $A = \{x : x \notin f(x)\}$. 此时若 $f^{-1}(A) \notin A$, 则根据定义 $f^{-1}(A) \in A$; 反之亦矛盾.

9. 我们的思路应当去找满足条件 $A \subset f(A)$ 的最大集合, 即令 $T = \{\cup_{\alpha} A_{\alpha} : A_{\alpha} \subset f(A_{\alpha})\}$. 根据定义有 $T = \cup_{\alpha} A_{\alpha} \subset \cup_{\alpha} f(A_{\alpha}) = f(\cup_{\alpha} A_{\alpha}) = f(T)$, 再根据题给条件有 $f(T) \subset f(f(T)) \Rightarrow f(T) \subset T$.

10. (1) 全部写成无限小数, 然后作映射 $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots \rightarrow (0.a_1a_3a_5\cdots, 0.a_2a_4a_6\cdots)$; (2) $y = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$.
11. 因此在 ZF 公理体系中, 我们不考虑包含自身作为元素的集合.
12. 从 `pip install numpy` 开始. 学习使用 `np.zeros`, `np.random`, `np.mean`, `np.sum`, `np.dot`, `np.linalg.det`, `np.eye` 等函数, 并做切片和取值运算.

3 第 3 次习题课: 行列式 (1)

3.1 问题

- 用行列式求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$.
- 求以下向量在三维几何空间张成的平行六面体体积: $\alpha_1 = (3, 2, 1), \alpha_2 = (0, 3, 0), \alpha_3 = (7, 4, 2)$.
- 判断以下向量组的定向: $(1, 1), (3, -2); (2, 1, 0), (1, 0, 3), (1, 1, 1); (x, y, z), (z, x, y), (y, z, x); (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)$; 其中 $x + y + z > 0$ 且互不相等.

4. 计算行列式: (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

5. 对 n 阶矩阵 A 作如下操作: 第 1 行加上第 2 行的 k 倍, 第 2 行加上第 3 行的 k 倍, 以此类推; 最后, 第 n 行加上此时第 1 行的 k 倍. 问做这些变换相当于在 A 左边乘一个什么样的矩阵? A 的行列式值会如何变化? 如果第 n 行加上的是原来第 1 行的 k 倍呢?

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$.

8. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

9. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & & \\ \gamma & \alpha & \beta & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其中 $\alpha^2 - 4\beta\gamma > 0$.

10. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

11. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$

3.2 解答

1. $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = 2, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = -1.$

2. $V = \|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow \text{左手}; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow \text{左手}; \begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0 \Rightarrow \text{右手};$
 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 \leq 0 \Rightarrow \text{左手}.$

4. (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2 + 16 + 16 - 4(x+1) - 16(x-2) - 4(x+1) = x^3 - 27x + 54;$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

5. 相当于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k^2 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 其行列式无变化, 因为是初等变换. 后面一问相当于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$

其行列式有变化, 因为最后一步不是初等变换, 相较于原值乘上了 $1 + (-1)^{n-1}k^n$.

6. 用第一列减去第 i 列的 b_i 倍, $i = 2, 3, \dots, n$, 得到 $\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i.$

7. 法 1(加边法): $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$, 然后用第 $i+1$ 行减去第 1

行的 x_i 倍, $i = 1, 2, 3, 4$, 得到 $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$

$$\text{法 2(拆项法): } \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五}$$

$$\text{项: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4x_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3x_4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_4x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 原行列式是 } 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

$$8. \text{ 采用第 7 题的法 2(拆项法), 最后剩下 } n+1 \text{ 项: } \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \dots, \text{ 它们分别是 } (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} x_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} a_1 x_2 \cdots a_n, \dots, \text{ 整理得到原}$$

$$\text{行列式为 } (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \right) - 1 \right].$$

$$9. \text{ 若 } \beta\gamma = 0, \text{ 则行列式为 } \alpha^n. \text{ 对于一般情形, 按第一行展开得到 } D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}, \text{ 且有初值条件 } D_1 = \alpha, D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma, \text{ 然后用数列的特征值和特征公式设 } D_n = A \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n + B \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n, \text{ 代入 } n=1, 2 \text{ 解出 } A \text{ 和 } B, \text{ 得到 } D_n = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}.$$

$$10. n=1 \text{ 时, } D_1 = \cos \alpha; n=2 \text{ 时, } D_2 = \cos 2\alpha; \text{ 因此可以猜测 } D_n = \cos n\alpha. \text{ 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 } D_{n+1} = 2 \cos \alpha D_n - D_{n-1} = \cos(n+1)\alpha, \text{ 知该假设成立.}$$

$$11. \text{ 法 1: 将第 1 行至第 } n-1 \text{ 行减去第 } n \text{ 行, 并提出各行和各列公因子, 得}$$

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{再将第 1 列至第 } n-1 \text{ 列减去第 } n \text{ 列, 并提出各行和各列的公因子, 得}$$

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdot & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第 n 行展开得到递推式 $D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n(a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n)} D_{n-1}$, 并直接计算出 D_2 , 得

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

法 2: 若 $a_i = a_j$ 或 $b_i = b_j (i \neq j)$, 即两行 (或两列) 相同, 则 $D_n = 0$. 因此 D_n 含有因子 $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$. 将 D_n 的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得 $D_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)} D'_n$. 显然 D'_n 也含有上述因子. 另一方面, 由于 D'_n 的 (i, j) 元为 $\prod_{k \neq j} (a_i + b_k)$, 所以每一个 a_i 在 D'_n 的展开式中的次数均为 $n-1$, 因此设 $D_n = \lambda \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$. 为确定常数 λ 的值, 我们不妨令 $a_i = -b_i, i = 1, 2, \dots, n$. 此时 D'_n 为对角行列式, 且有 $D_n = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \Rightarrow \lambda = 1$. 因此可得一样的结果.

4 第 4 次习题课: 行列式 (2)

4.1 问题

1. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. 你能求出行列式 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$ 的通式吗?

2. (1) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$; (2) 计算行列式 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

3. A 是 n 阶矩阵, $\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$ 是 n 维列向量, 且 $|A| = a, |A - \alpha\alpha^T| = b$, 求 $|A + 2\alpha\alpha^T|$.

4. 考虑 3 线行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & & & \\ b_2 & a_2 & c_3 & & \\ & b_3 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_n \\ & & & b_n & a_n \end{vmatrix}$, 记其顺序主子式为 D_1, D_2, \dots, D_n , 并假设它们都不为 0. 证明递推

关系 $D_s = a_s D_{s-1} - b_s c_s D_{s-2}, s \geq 3$, 并将该矩阵 M_n 写成下三角矩阵和对角元都为 1 的上三角矩阵的乘积.

5. 试确定所有 3 阶 (0, 1) 行列式 (即所有元素只能是 0 或 1) 的最大值, 并给出证明和取到最大值的一个构造.

6. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}_+$, 证明 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 能被 $2!3!\cdots(n-1)!$ 整除.

7. 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 非平凡. 证明: 若矩阵 A 的每一个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = a_{ij}$, 则 $|A|^{n-2} = 1$.

8. 若方阵每一行每一列都恰有一个元素为 1, 其余的元素都是 0, 则称此方阵为置换矩阵. (1) 写出所有的 3 阶置换矩阵. 这些矩阵最少可由其中的几个通过反复作乘法得到? (2) 证明任意 n 阶置换矩阵都可由以下 $n-1$ 个矩阵反复作乘法得

到: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

进一步, 任意 n 阶置换矩阵都可由以下两个矩阵反复作乘法得到: $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$

9. 设 $n \geq 3, f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是次数 $\leq n-2$ 的多项式, 证明: 对 $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, 行列式 $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} \equiv 0$, 并举例说明条件“次数 $\leq n-2$ ”不可去.

10. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos 2\phi_1 & \cdots & \cos(n-1)\phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos 2\phi_2 & \cdots & \cos(n-1)\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos 2\phi_n & \cdots & \cos(n-1)\phi_n \end{vmatrix}.$

4.2 解答

1. 把后 $n-1$ 列加到第一列, 提出公因子 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 用第 $(1,1)$ 元消去同列其他元素, 再按第一列展开得到 $n-1$ 阶行列式:

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

用所得 $n-1$ 阶行列式的第 $(1,1)$ 元消去同行的其他元素, 再按第一行展开得到 $n-2$ 阶上三角行列式:

$$D_n = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -n & \cdots & -n & -n \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & -n & -n & \\ & & -n & \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.$$

2. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c-a & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a & a-b \end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知 $D_n = b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}$. 初始条件是 $D_1 = a$, 因此知 $D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

(2) 按第 n 列拆项, 得 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & a_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b+(a_n-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + (a_n-b)E_{n-1} = b(a_1-c)(a_2-c)\cdots(a_{n-1}-c) + (a_n-b)E_{n-1}$; 按第 n 列拆项 (或由对称性), 得 $E_n = c(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_{n-1}-b) + (a_n-c)E_{n-1}$. 两式联立得 $E_n = \frac{bf(c)-cf(b)}{b-c}$, 其中 $f(x) = (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$.

3. 考虑函数 $f(x) = |A + x\alpha\alpha^T| = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}$, 因此是线性函数. 由 $f(0) = a, f(-1) = b$ 知 $f(x) = a + (a-b)x$, 因此 $f(2) = 3a - 2b$.

4. 按最后一行展开立刻得到递推关系, $M_n = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & & & \\ b_2 & \frac{D_2}{D_1} & 0 & & \\ & b_3 & \frac{D_3}{D_2} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & b_{n-1} & \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}} & 0 \\ & & & & b_n & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2 \frac{1}{D_1} & & & \\ & 1 & c_3 \frac{D_1}{D_2} & & \\ & & 1 & c_4 \frac{D_2}{D_3} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & c_n \frac{D_{n-2}}{D_{n-1}} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$.

5. 按第 1 行展开, 得到 $D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \leq 3$. 下面证明 $D \neq 3$. 若不然, 则必有 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$, 且 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 1$. 前两个行列式为 1 可以得到 $a_{22} = a_{33} = 1, a_{23} = a_{31} = 1$,

而此时 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = a_{21}a_{32} - 1 \leq 0$, 矛盾. 因此 $D \leq 2$, 一个构造是 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

6. 注意到 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & \cdots & a_1(a_1-1)\cdots(a_1-n+2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & \cdots & a_2(a_2-1)\cdots(a_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n(a_n-1) & \cdots & a_n(a_n-1)\cdots(a_n-n+2) \end{vmatrix}$ (利用初等列变换, 用后面的列加减前面的列), 再将第 k 列提取公因子 $(k-1)!, k=3, 4, \dots, n$ 即可.

7. 首先容易看出 $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 > 0$. 其次 $|A|^2 = |AA^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n \Rightarrow |A|^{n-2} = 1$.

8. (1) 所有 3 阶置换矩阵: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 可由其中第 2 个和第 5 个做反复乘积生成 (答案不唯一). (2) n 元置换可以分解成至多 $n-1$ 个对换的乘积, 而每一个对换都可以分解成

相邻对换的乘积, 因此可被这 $n-1$ 个相邻对换生成; 进一步, 所有相邻对换都可被表示为 $S^{n-k}TS^k, k=0, 1, \dots, n-1$, 因此可被 S, T 生成.

9. 不妨设 a_1, a_2, \dots, a_n 互不相同. 考虑 $F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$, 这是一个至多 $n-2$ 次多项式, 有至少

a_2, a_3, \dots, a_n 这 $n-1$ 个不同的根, 因此必恒等于 0. 若删去条件“次数 $\leq n-2$ ”, 则可令 $f_k(x) = x^{k-1}$, 此时原行列式构成 Vandermonde 行列式, 只要 a_1, a_2, \dots, a_n 两两不同就不为 0.

10. 由高中三角函数知识知 $\cos k\theta = 2^{k-1} \cos^k \theta + P_{k-2}(\cos \theta)$, 其中 P_{k-2} 是 $k-2$ 次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos^2 \phi_1 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos^2 \phi_2 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos^2 \phi_n & \cdots & \cos^{n-1} \phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\cos \phi_i - \cos \phi_j).$$

5 第 5 次习题课: 线性空间, 行列式 (3)

5.1 问题

1. 在正实数集 \mathbb{R}^+ 上定义运算加法 $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}^+$ 和数乘 $ka = a^k, \forall k \in \mathbb{Q}$, 证明 \mathbb{R}^+ 在这两种运算下构成 \mathbb{Q} -线性空间; 并问 $110, \sqrt{105}$ 是否属于 $\text{span}\{1, 2, \dots, 10\}$.

2. 设 $W = \{f(x) | f(1) = 0, f(x) \in \mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 \mathbb{R} 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.

3. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

4. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$; (2) $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4$; (3) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$; (4) $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 8\alpha_4, \alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4, 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3$.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 为 $s+1$ 个 n 维向量, 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$. 证明向量组 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_s$ 线性无关的充要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

6. 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 且对于任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数. 证明或否定: (1) $f(x)$ 系数都是有理数; (2) $f(x)$ 系数都是整数.

7. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

8. 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ 和 $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 741 & 886 & 114 & 514 \\ -741 & 0 & 1919 & 810 & 2002 \\ -886 & -1919 & 0 & 520 & 1314 \\ -114 & -810 & -520 & 0 & 220 \\ -514 & -2002 & -1314 & -220 & 0 \end{vmatrix}$.

9. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, I 表示 n 阶单位矩阵. 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{vmatrix}$ 和 $D_2 = \begin{vmatrix} I & -B \\ 0 & AB \end{vmatrix}$, 并证明 $D_1 = D_2$.

10. 求 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式 A , 其中 $a_{ij} = \frac{\alpha_i^n - \beta_j^n}{\alpha_i - \beta_j}, i, j = 1, 2, \dots, n$.

5.2 解答

1. 交换律结合律显然; 零元存在: $1 \oplus a = a \oplus 1 = a$; 负元存在: $a \oplus \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \oplus a = 1$; 么元存在: $1a = a^1 = a$; 左分配律: $(k+l)a = a^{k+l} = a^k a^l = ka \oplus la$; 右分配律: $k(a \oplus b) = (ab)^k = a^k b^k = ka \oplus kb$. $\sqrt{105}$ 属于, 因为 $105 = \frac{1}{2}(3 \oplus 5 \oplus 7)$; 110 不属于, 因为整数只能生成整数, 而 $110 = 11 \times 10$ 其中 11 是素数无法生成.

2. (1) 容易证明对 $\forall f(x), g(x) \in W \Rightarrow af(x) + bg(x) \in W$, 因此是线性子空间. (2) 令 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, $f(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0$, 因此 $f(x) = a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + \cdots + a_{n-1}(x^{n-1}-1)$. 下面我们只需证明 $x-1, x^2-1, \cdots, x^{n-1}-1$ 确实是 W 的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以 $\dim W = n-1$.

3. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3$, $-5\alpha_1 - 4\alpha_2 = \alpha_4$;

(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\frac{3}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 = \beta_1$.

4. (1) 线性相关; $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$. (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这五个向量却只有四个自由度.

5. 用矩阵表示为 $(\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \cdots, \beta - \alpha_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} := (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)P$. 容易计算得

到 $\det P = (s-1)(-1)^{s-1} \neq 0$, 因此两者线性无关等价.

6. (1) 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ ($a_m \neq 0$). 取 $x_k = k$ 代入, 得到线性方程组
$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_mx_0^m = f(x_0), \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_1^m = f(x_1), \\ \cdots \\ a_0 + a_1x_m + \cdots + a_mx_m^m = f(x_m). \end{cases},$$

其系数行列式是 Vandermonde 行列式不为 0, 因此由 Cramer 法则其有唯一解 $a_i = \frac{D_i}{D}$, $i = 0, 1, \cdots, m$. 由于 D_i 的元素均为整数, 因此 a_i 是有理数. (2) 结论不对, 反例是 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

7. 按第 3、4 行展开: $D = (-1)^{3+4+1+6} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 6 \end{vmatrix}$. 再按第 2、3 行展开: $D = (-1)^{2+3+1+4} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} *$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -24.$$

8. 前者是偶数阶斜对称矩阵. 若 $a = 0$. 则按第 1、2 行展开, 得到 $D_1 = (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -b & -d \\ -c & -e \end{vmatrix} = (be - cd)^2$.

若 $a \neq 0$, 则将第 1 行的 $\frac{d}{a}$ 倍和第 2 行的 $\frac{b}{a}$ 倍加到第 3 行上, 将第 1 行的 $\frac{e}{a}$ 倍和第 2 行的 $\frac{c}{a}$ 倍加到第 4 行上, 得到

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f + \frac{cd}{a} - \frac{be}{a} \\ 0 & 0 & -f + \frac{be}{a} - \frac{cd}{a} & 0 \end{vmatrix}. \text{ 然后按第 1、2 行展开, 得到 } D_1 = (af - be + cd)^2.$$

后者是奇数阶斜对称矩阵, 因此行列式为 $D_2 = 0$ (因为 $|M_2| = |M_2^T| = |-M_2| = (-1)^{2k+1}|M_2| \Rightarrow |M_2| = 0$).

9. 按前 n 行展开, 得到 $D_1 = |A||B|$, $D_2 = |AB|$. 将后面 n 行减去前面 n 行的 A 倍 (按矩阵 $(I, -B)$ 左乘 A 理解), 可使 M_1 转化为 M_2 .

10. 利用 $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ 及行列式乘法规则 $|AB| = |A||B|$, 知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \\ \beta_1^{n-2} & \beta_2^{n-2} & \cdots & \beta_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j).$$

6 第 6 次习题课: 秩

6.1 问题

1. 作初等行变换将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求

A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a, b 取何值时, 向量 $(3, a, b, b, 3)$ 属于 A 的行空间?

2. 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 能线性表出 β_1, \dots, β_s , 并且有 $\beta_i = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r, \forall i = 1, 2, \dots, s$. 证明若矩阵 $B = (b_{ij})_{s \times r}$ 列向量线性无关, 则 β_1, \dots, β_s 也能线性表出 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

3. 证明: 若组 I 能线性表出组 II, 且 $\text{rank}(I) = \text{rank}(II)$, 则组 II 也能表出组 I.

4. 矩阵 A, B, C 满足 $A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$. 证明: (1) A 的列向量组能线性表出 C 的列向量组; (2) $\text{rank}(A) \geq \text{rank}(C)$; (3) 若矩阵 B 行满秩, 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$, 且 C 的列向量组也能线性表出 A 的列向量组.

5. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.

6. 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \leq i \leq n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明 $\det(A) \neq 0$. 进一步, 证明若 $a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i \leq n$, 则 $\det(A) > 0$.

7. 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 (1) $a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i \leq n$; (2) $a_{ij} < 0, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$; (3) $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j \leq n$. 求矩阵 A 的秩.

8. 设线性方程组 $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, 1 \leq i \leq n$ 的系数矩阵 A 的秩等于矩阵 $B = \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.

9. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \beta = (b_1, \dots, b_m)^T$. 证明下列命题相互等价: (1) $Ax = \beta$ 有解; (2) $A^T x = 0$ 的解均满足 $x^T \beta = 0$; (3) 方程组 $\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0_{1 \times n} \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解.

10. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 且 $|a_{ii}a_{jj}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$ 对任意 $1 \leq i \neq j \leq n$ 成立. 证明 $\det(A) \neq 0$.

11. 利用矩阵 $\begin{pmatrix} I_{s \times s} & 0_{s \times m} \\ 0_{n \times s} & A_{n \times s} B_{s \times m} \end{pmatrix}$ 的初等行列变换证明 $s + \text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

12. 设 A, B 是幂等矩阵 (即 $A^2 = A, B^2 = B$), 且 $I - A - B$ 满秩, 证明 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

6.2 解答

1. A 的简化阶梯型矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$, 且 $\beta_3 = 2\beta_1 - \beta_2, \beta_5 =$

$3\beta_1 + 5\beta_2 - \beta_4$. (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, 且 $\alpha_3 = -\frac{31}{9}\alpha_1 - \frac{55}{9}\alpha_2 + \frac{17}{9}\alpha_4, \alpha_5 = -\frac{20}{9}\alpha_1 - \frac{23}{9}\alpha_2 + \frac{22}{9}\alpha_4$. (3) 仔细计算即可. $a = 4, b = 2$.

2. 只需证明能表出 α_1 . 利用高斯消元法去解方程 $\beta_{i1} = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r$, 由于 B 列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成 $\begin{bmatrix} I_{r \times r} \\ 0_{(s-r) \times r} \end{bmatrix}$, 从而 α_1 能被 β_1, \dots, β_s 线性表出.

3. 设 β_1, \dots, β_s 是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量 α , 由于组 I 能表出 $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$, 从而 $\text{rank}(\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha) \leq s$, 即 $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$ 线性相关. 由于 β_1, \dots, β_s 线性无关, 因此它们能表出 α .

4. (1) 由矩阵乘法定义知 $c_i = b_{1i}a_1 + \cdots + b_{ni}a_n, \forall 1 \leq i \leq p$. (2) 由第 (1) 问结论立得. (3) 用第 2 题结论立得.
 5. 显然矩阵 A 的秩至少为 2 (第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2 , 因此 $\lambda = 0$, 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4 列线性表出. 综上, $\lambda = 0$ 时秩为 2, 否则为 3.

6. (1) 反证法. 假设 A 的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$. 我们不妨设在这 n 个系数里面 k_1 的绝对值最大, 那么就有 $k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n} = 0$. 但是 $|k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_2a_{12}| - \cdots - |k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_1|(|a_{12}| + \cdots + |a_{1n}|) > 0$, 矛盾. 因此 $\det(A) \neq 0$.

(2) 考虑函数 $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & a_{23}t & \cdots & a_{2n}t \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33} & \cdots & a_{3n}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. 那么任意 $t \in [0, 1]$, $A(t)$ 都是主对角阵占优矩阵, 因此 $\det(A(t)) \neq 0$.

0. 由于 $\det(A(0)) > 0$, 由函数连续性知 $\det(A(1)) > 0$, 此即原命题.

7. 首先由条件 (3) 知 $|A| = 0$, 因此 $\text{rank}(A) \leq n - 1$. 其次考虑 A 中元素 a_{11} 的余子式 M_{11} , 由条件 (1)(2) 知其严格主对角占优, 因此 $M_{11} > 0$. 这意味着 $\text{rank}(A) = n - 1$.

8. (1) $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A, b) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}(B) = \text{rank}(A)$, 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.

(2) 不成立, 考虑 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$, $\text{rank}(A) = 2$, 而 $\text{rank}(B) = 3$.

9. (1) \Rightarrow (2): 设 $A\xi = \beta$, 从而 $x^T\beta = x^TA\xi = (A^Tx)^T\xi = 0$.

(2) \Rightarrow (3): 显然.

(3) \Rightarrow (1): $\text{rank} \begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < \text{rank} \begin{pmatrix} A^T & \mathbf{0} \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$, 即是 $\text{rank}(A, \beta) < \text{rank} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \leq \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \text{rank} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + 1$, 因此 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, \beta)$, 从而方程组 $Ax = \beta$ 有解.

10. 反证法. 假设 $\det(A) = 0$, 则 $Ax = 0$ 有非零解 (c_1, \cdots, c_n) . 若仅有 $c_i \neq 0$, 则 A 的第 i 列全零, 与条件矛盾. 下设第 i, j 个分量不为 0, 且 $|c_i| \geq |c_j| \geq |c_k|, i \neq j$. 考察第 i 个和第 j 个等式, 有 $|a_{ii}c_i| \cdot |a_{jj}c_j| = |\sum_{k \neq i} a_{ik}c_k| \cdot |\sum_{l \neq j} a_{jl}c_l| \leq |c_j| \cdot |\sum_{k \neq i} a_{ik}| \cdot |c_i| \cdot |\sum_{l \neq j} a_{jl}| \Rightarrow |a_{ii}a_{jj}| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$, 矛盾.

11. $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}+ = A \times \text{①}} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}- = \text{①} \times B} \begin{pmatrix} I & -B \\ A & 0 \end{pmatrix}$, 最左边矩阵秩为 $s + \text{rank}(AB)$, 最右边矩阵秩大于等于 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

12. $A(I - A - B) = -AB$, 因此 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A(I - A - B)) = \text{rank}(A)$, 同理 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$.

7 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.