高等数学 A II 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2023 年 2 月 21 日

目录

1 第 1 次习题课: 二重积分

1.1 问题

1. 累次积分变序: $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx, \int_0^a dx\int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$.
2. 求 $z=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 与 xoy 平面所围的体积.
3. 计算积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}dy$.
4. 区域 D 由 $y=x^3, y=0, x=1$ 围成, 计算积分 $I=\iint_D \sqrt{1-x^4}d\sigma$.
5. 区域 D 由 $y=0, x=1, y=x$ 围成, 计算积分 $I=\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}d\sigma$.
6. 区域 D 由 $x^2+y^2=4$ 和 $y=-x^2+1, y=x^2-1$ 两线在 $|x|\le 2$ 部分所围成, 计算积分 $I=\iint_D (x^2+y^3)d\sigma$.
7. $0\le p(x)\in R[a,b]$, $f(x), g(x)$ 于 $[a,b]$ 单调递增, 证明 $\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx \le \int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$.
8. 计算极限 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^a e^{-x^2}dx$.

1.2 解答

1. 这种题最好画图. 答案是 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x f(x,y)dy, \int_0^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f(x,y)dx$.
2. 区域 $D=\{(x,y): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}, D_0=\{(x,y): 0\le x\le a, 0\le y\le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\}$. 则体积 $V=\iint_D zd\sigma = 4\iint_{D_0} zd\sigma = 4\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = 4\int_0^a \frac{2}{3}\frac{b}{a^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \cdots$(换元法)$\cdots = \frac{\pi}{2}ab$.
3. 区域 $D=\{(x,y): 0\le x\le 1, x\le y\le\sqrt{x}\}$. 累次积分时先对 x 积分, 则原积分 $=\int_0^1 dy\int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y}dx = \int_0^1(\sin y - y\sin y)dy = 1-\sin 1$.
4. $I=\int_0^1 dx\int_0^{x^3}\sqrt{1-x^4}dy = \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}dx = -\frac{1}{6}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{1}{6}$.
5. $I=\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy = \int_0^1 dx\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x^2}{2}\arcsin\frac{y}{2x}\right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1(\frac{x}{2}\sqrt{3x^2}+2x^2\arcsin\frac{1}{2})dx = \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3})$.
6. 首先, 因为积分区域关于 $y=0$ 对称, 所以 $\iint_D y^3d\sigma=0$. 记 D_1 为 D 的第一象限部分, $D_2=\{(x,y): x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}, D_3=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le -x^2+1\}$. 因此 $I=4\iint_{D_1}x^2d\sigma = 4\iint_{D_2}x^2d\sigma - 4\iint_{D_3}x^2d\sigma = 4\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}x^2dy - 4\int_0^1 dx\int_0^{-x^2+1}x^2dy = 4\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx - 4\int_0^1 x^2(1-x^2) = 4\pi-\frac{8}{15}$.
7. 利用二重积分.

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS}-\mathrm{LHS} &= \int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b p(y)dy\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(y)f(y)dy\int_a^b p(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b\int_a^b [p(x)p(y)f(x)g(x)-p(x)p(y)f(y)g(x)]d\sigma = \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)g(x)[f(x)-f(y)]d\sigma
\end{aligned}$$

同理 $\mathrm{RHS}-\mathrm{LHS}=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y)-f(x)]d\sigma$. 两式相加得 $2(\mathrm{RHS}-\mathrm{LHS}) = \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[g(x)-g(y)][f(x)-f(y)]d\sigma \ge 0$.

8. 记 $I(a)=\int_{-a}^a e^{-x^2}dx$, 则 $I^2(a)=\int_{-a}^a e^{-x^2}dx\int_{-a}^a e^{-y^2}dy = \int_{-a}^a\int_{-a}^a e^{-x^2-y^2}d\sigma$. 记区域 $D(a)=\{(x,y): x^2+y^2\le a^2\}$, 积分 $J(a)=\iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}d\sigma$. 由简单的二维区域包含关系知 $J(a)\le I^2(a)\le J(\sqrt{2}a)$. 再利用二重积分极坐标换元知 $J(a)=\int_0^a dr\int_0^{2\pi} re^{-r^2}d\theta = -\pi e^{-r^2}|_{r=0}^{r=a} = \pi(1-e^{-a^2})$. 因此 $\lim\limits_{a\to+\infty}J(a)=\pi$. 由夹逼原理知 $\lim\limits_{a\to+\infty}I(a)=\sqrt{\pi}$.

1.3 补充 (不要求掌握!)

类似于累次极限和整体极限的关系, 累次积分和二重积分也不具有相互决定性, 即二重积分存在并不保证累次积分存在. 例如设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是区间 $[0,1]$ 上的所有有理数组成的序列, 定义矩形 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{k}, \text{ if } x=x_k, y\in\mathbb{Q}, k\in\mathbb{N} \\ 0, \text{ otherwise}\end{cases}$. 可以证明 $f(x,y)\in R(D)$ 且 $\iint_D f(x,y)d\sigma=0$. 但是, 由于 $f(x_k,y)=\frac{1}{k}\mathrm{Dirichlet}(y)$ 导致 $\int_0^1 f(x_k,y)dy$ $\nexists$, 所以 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 不能使用累次积分 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ 计算. 但是若固定 y, $f(x,y)$ 要么是 Riemann 函数要么恒为 0, 积分值都是 0, 因此 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 可以使用累次积分 $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$ 计算.

2 第 2 次习题课: 三重积分

2.1 问题

1. 区域 Ω 由 $x=0,y=0,z=0,x+2y+z=1$ 围成, 计算积分 $I=\iiint_\Omega xdv$.
2. 区域 $\Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega zdv$.
3. 区域 $\Omega=\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega(x+y+z)^2dv$.
4. 区域 D 由 $(x-a)^2+y^2=a^2(y>0),(x-2a)^2+y^2=4a^2(y>0),y=x$ 围成, 计算积分 $I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$.
5. 计算椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 及抛物柱面 $z=2-x^2$ 所围成立体的体积.
6. 区域 $D=\{(x,y):0\le x+y\le 1,0\le x-y\le 1\}$, 计算积分 $I=\iint_D(x+y)^2e^{x^2-y^2}d\sigma_{xy}$.
7. 区域 Ω 由 $z=\frac{x^2+y^2}{m},z=\frac{x^2+y^2}{n},xy=a^2,xy=b^2,y=\alpha x,y=\beta x(0<m<n,9<a<b,0<\alpha<\beta)$ 围成且在第一卦限的部分, 计算积分 $I=\iiint_\Omega xyzdv$.
8. 设 $h=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},f(x)\in C[-h,h]$, 证明 $\iiint_\Omega f(\alpha x+\beta y+\gamma z)dv_{xyz}=\pi\int_{-1}^1(1-\zeta^2)f(h\zeta)d\zeta$, 其中区域 Ω 是单位球内部.
9. 区域 $\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 2z\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$.
10. 区域 $\Omega=\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$.
11. 区域 $D=\{(x,y):-1\le x\le 1,0\le y\le 1\}$, 计算积分 $I=\iint_D\max\{xy,x^3\}d\sigma$.

2.2 解答

1. 记区域 $D_{xy}=\{(x,y):x\ge 0,y\ge 0,x+2y\le 1\}$, 累次积分时依次对 z,y,x 积分, 有 $I=\iint_{D_{xy}}[\int_0^{1-x-2y}xdz]d\sigma_{xy}=\iint_{D_{xy}}x(1-x-2y)d\sigma_{xy}=\int_0^1dx\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}[x(1-x)-2xy]dy=\int_0^1[\frac{1}{2}x(1-x)^2-\frac{1}{4}x(1-x)^2]=\frac{1}{48}$.
2. 记区域 $D_{xy}=\{(x,y):x^2+y^2\le\frac{R^2}{2}\}$, 累次积分时先对 z 积分再极坐标换元, 有 $I=\iint_{D_{xy}}[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}zdz]d\sigma_{xy}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}[R^2-2(x^2+y^2)]d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2}(R^2-2r^2)rdr=\frac{\pi R^4}{8}$.
3. 由对称性, $I=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv+2\iiint_\Omega(xy+yz+zx)dv=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$. 先计算 $I_1=\iiint_\Omega z^2dv$. 记区域 $D_z=\{(x,y):\frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})}\le 1\}$, 累次积分时先对 σ_{xy} 积分再对 z 积分, 有 $I_1=\int_{-c}^cdz\iint_{D_z}z^2d\sigma_{xy}=\int_{-c}^cz^2\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4\pi abc^3}{15}$. 因此 $I=\frac{4\pi abc}{15}(a^2+b^2+c^2)$.
4. 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$, 有 $\begin{cases}(x-a)^2+y^2=a^2\Rightarrow r^2-2ar\cos\theta=0\Rightarrow r=2a\cos\theta\\ (x-2a)^2+y^2=4a^2\Rightarrow r=4a\cos\theta\\ y=x\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\end{cases}$, 从而 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta}r^2dr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{56}{3}a^3\cos^3\theta d\theta=\frac{112-70\sqrt{2}}{9}a^3$.
5. 联立方程 $\begin{cases}z=x^2+2y^2\\ z=2-x^2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=1$, 因此区域 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$, 体积 $V=\iint_D[(2-x^2)-(x^2+2y^2)]d\sigma=2\iint_D(1-x^2-y^2)d\sigma$. 做极坐标换元知 $V=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)dr=\pi$.
6. 令 $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=x-y\end{cases}$, 即 $\begin{cases}x=\frac{\xi+\eta}{2}\\ y=\frac{\xi-\eta}{2}\end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J=\det\left(\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi}&\frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta}&\frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}\right)=-\frac{1}{2}$, 区域 $D_{xy}=\{(x,y):0\le x+y\le 1,0\le x-y\le 1\}\Rightarrow D_{\xi\eta}=\{(\xi,\eta):0\le\xi\le 1,0\le\eta\le 1\}$, 所以换元后 $I=\iint_{D_{\xi\eta}}\xi^2e^{\xi\eta}|J|d\sigma_{\xi\eta}=\frac{1}{2}\int_0^1d\xi\int_0^1\xi^2e^{\xi\eta}d\eta=\frac{1}{2}\int_0^1\xi(e^\xi-1)d\xi=\frac{1}{4}$.
7. 令 $\begin{cases}u=\frac{z}{x^2+y^2}\\ v=xy\\ w=\frac{y}{x}\end{cases}$, 即 $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{v}{w}}\\ y=\sqrt{wv}\\ z=uv(w+\frac{1}{w})\end{cases}$, Jacobi 行列式 $J=|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|=\frac{v}{2w}(w+\frac{1}{w})$, 区域 $\Omega\to\Omega_{uvw}=\{(u,v,w):\frac{1}{n}\le u\le\frac{1}{m},a^2\le v\le b^2,\alpha\le w\le\beta\}$, 所以换元后 $I=\iiint_{\Omega_{uvw}}\sqrt{\frac{v}{w}}\sqrt{wv}uv(w+\frac{1}{w})\frac{v}{2w}(w+\frac{1}{w})dudvdw=\iiint_{\Omega_{uvw}}v^3u(w+\frac{1}{w})^2\frac{1}{w}dudvdw=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}udu\int_{a^2}^{b^2}v^3dv\int_\alpha^\beta(w+\frac{2}{w}+\frac{1}{w^3})dw=\frac{1}{32}(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2})(b^8-a^8)[(\beta^2-\alpha^2)(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2})+4\log\frac{\beta}{\alpha}]$.

8. 作正交变换 $\begin{cases}\xi=a_1x+b_1y+c_1z\\ \eta=a_2x+b_2y+c_2z\\ \zeta=\frac{1}{h}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\end{cases}$ (旋转), 则 $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}|=1$, 所以换元后 LHS $=\iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le 1}f(h\zeta)d\xi d\eta d\zeta=\int_{-1}^1 d\zeta\iint_{\xi^2+\eta^2\le 1-\zeta^2}f(h\zeta)d\xi d\eta=\pi\int_{-1}^1(1-\zeta^2)f(h\zeta)d\zeta=$ RHS.

9. 作球坐标变换, 区域 $\Omega: 0\le r\le 2\cos\phi$, 积分 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=\int_0^{2\cos\phi}r^2\,r^2\sin\phi dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi\int_0^{2\cos\phi}r^4dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\frac{32}{5}\cos^5\phi d\phi=-\frac{64}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\phi d\cos\phi=-\frac{64}{5}\frac{\cos^6\phi}{6}|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{15}\pi$.

10. 作广义球坐标系变换 $\begin{cases}x=ar\sin\phi\cos\theta\\ y=br\sin\phi\sin\theta\\ z=cr\cos\phi\end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J=abcr^2\sin\phi$, 所以换元后

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\phi\int_0^1 dr\,r^2abc\sin\phi(a^2r^2\sin^2\phi\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\phi\sin^2\theta+c^2r^2\cos^2\phi)\\&=\frac{abc}{5}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}-[(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)(1-\cos^2\phi)+c^2\cos^2\phi]d\cos\phi\\&=\frac{abc}{5}\int_0^{2\pi}[\frac{4}{3}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)+\frac{2}{3}c^2]d\theta=\frac{4abc\pi}{15}(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

11. 引入辅助积分 $J=\iint_D\min\{xy,x^3\}d\sigma$. $I+J=\iint_D(xy+x^3)d\sigma=\int_0^1dy\int_{-1}^1(xy+x^3)dx=0$, $I-J=\iint_D|xy-x^3|d\sigma=\iint_D|x||y-x^2|d\sigma=2\int_0^1dy\int_0^1x|y-x^2|dx\overset{u=x^2}{=}\int_0^1dy\int_0^2|y-u|du\overset{几何意义}{=}\frac{1}{2}\int_0^1[y^2+(1-y)^2]dy=\frac{1}{3}\Rightarrow I=\frac{1}{6}$.

2.3 补充 (不要求掌握!)

n 维空间中的球坐标系: 一个向径 r, $n-1$ 个角度 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}$, 其中, 一个角度转一圈 (θ_{n-1}), $n-2$ 个角度转半圈 $(\theta_1,\cdots,\theta_{n-2})$. 与直角坐标系的关系为 $\begin{cases}x_1=r\cos\theta_1\\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2\\ x_3=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-2}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\\ x_{n-1}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\ x_n=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\end{cases}$, 利用归纳法可以证明 Jacobi 行列式为 $|J|=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$.

n 维空间中半径为 R 的球体 $\Omega: x_1^2+\cdots+x_n^2\le R^2$ 的体积 V_n: 作球坐标变换知

$$\begin{aligned}V_n&=\int\cdots\int_\Omega dx_1\cdots dx_n=\int_0^{2\pi}d\theta_{n-1}\int_0^{\pi}d\theta_{n-2}\cdots\int_0^{\pi}d\theta_1\int_0^R r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}dr\\&=\frac{R^n}{n}2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta_{n-3}d\theta_{n-3}\cdots\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_1d\theta_1\\&=\frac{R^n}{n}2\pi\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},1)\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\cdots\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{n-2}{2})\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2})\end{aligned}$$

关于 Beta 函数, 参见后述的含参积分.

3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式

3.1 问题

1. 曲线 $\Gamma: x^2+y^2=x$, 计算积分 $I=\int_\Gamma\sqrt{1-x^2-y^2}ds$.
2. 曲线 C 是 $y=0, y=x(x\ge 0), x^2+y^2=a^2$ 所围成图形的边界, 计算积分 $I=\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$.

3. 曲线 $L:\begin{cases} x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=at\end{cases}$ $,0\le t\le 2\pi$, 计算积分 $I=\int_L \frac{z^2ds}{x^2+y^2}$.

4. 曲线 $C:\begin{cases} x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}$ $,0\le\theta\le 2\pi$, 计算积分 $I=\int_C (x^2+y^2)^n ds$.

5. 曲线 $C: x^2+y^2=a^2$, 计算积分 $I=\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 方向是逆时针.

6. 曲线 $\widehat{AB}$ 为单位圆周 $x^2+y^2=1$ 的上半部分, 计算积分 $I=\int_{\widehat{AB}} -ydx+xdy$, 方向为从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,0)$.

7. 曲线 Γ 是从 $(0,0)$ 沿函数 $y=x^\alpha$ 到 $(1,1)$ 的部分, 计算积分 $I=\int_\Gamma (x^2-y^2)dx-2xydy$.

8. 曲线 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 计算积分 $\int_\Gamma xdx+ydy+zdz$, 方向是从 z 轴正向看回来的逆时针方向.

9. 区域 D 是由点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 围成的三角形, 计算积分 $I=\iint_D x^2dxdy$.

10. 曲线 $C: 741x^8+886e^xy^2+\sin(x^9\cos(y))=5$, 计算积分 $I=\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

11. 证明或否定: 曲线积分 $I=\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内积分与路径无关.

12. (格林第二公式) 设闭区域 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的, $u=u(x,y),v=v(x,y)\in C^2(D)$, 证明 $\iint_D (v\triangle u-u\triangle v)d\sigma=\oint_{\partial D}(v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}})ds$, 其中 $\vec{n}$ 为 ∂D 的单位外法向量.

13. 求函数 $u(x,y)$ 使得 $du=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{e^y}{1+x^2}dy$.

3.2 解答

1. 曲线参数方程 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t, y=\frac{1}{2}\sin t, 0\le t\le 2\pi$, 则 $ds=\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 t+\frac{1}{4}\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}dt$, 原积分 $I=\int_\Gamma \sqrt{1-x}ds=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|\sin\frac{t}{2}|dt=\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt=2$.

2. 记 C_1,C_2,C_3 分别为曲线 C 的下、右上、左上部分, 则原积分 $I=\int_{C_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{C_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{C_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a ad\theta+\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx=(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a+e^{\sqrt{2}x}|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{4}ae^a+2(e^a-1)$.

3. 直接使用公式, $I=\int_0^{2\pi}\frac{a^2t^2}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+a^2}dt=\int_0^{2\pi} t^2\sqrt{2}adt=\frac{8\sqrt{2}}{3}a\pi^3$.

4. 直接使用公式, $I=\int_0^{2\pi} a^{2n}ad\theta=2\pi a^{2n+1}$.

5. 曲线参数方程 $x=a\cos t, y=a\sin t$, 因此 $I=\oint \frac{a^2(\cos t+\sin t)(-\sin t)-a^2(\cos t-\sin t)\cos t}{a^2}dt=\int_0^{2\pi}(-1)dt=-2\pi$.

6. 由 $x^2+y^2=1$ 知 $xdx+ydy=0$ 得 $dy=-\frac{x}{y}dx$, 从而有 $\int_{\widehat{AB}} -ydx+xdy=\int_1^{-1} -ydx+x(-\frac{x}{y}dx)=\int_{-1}^1(\frac{x^2+y^2}{y})dx=\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$.

7. 直接计算得 $I=\int_0^1(x^2-x^{2\alpha})dx-2xx^\alpha(\alpha x^{\alpha-1})dx=\int_0^1(x^2-(2\alpha+1)x^{2\alpha})dx=-\frac{2}{3}$.

8. 球面的单位法向量为 $\vec{n_1}=(x,y,z)$, 平面的单位法向量为 $\vec{n_2}=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$. 所以曲线 Γ 的单位切向量为 $\vec{\tau}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$. 从而积分为 $\int_\Gamma xdx+ydy+zdz=\int_\Gamma (x,y,z)\cdot\vec{\tau}ds=\int_\Gamma (x,y,z)\cdot(\vec{n_1}\times\vec{n_2})ds=\int_\Gamma 0ds=0$.

9. AB 的方程为 $y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, BC 的方程为 $y=y_2+\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$, CA 的方程为 $y=y_3+\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_3)$. 由格林公式, 知原积分 $I=\iint_D\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{3}x^3)d\sigma=\oint_{\partial D}\frac{1}{3}x^3dy=\int_{\overline{AB}}\frac{1}{3}x^3dy+\int_{\overline{BC}}\frac{1}{3}x^3dy+\int_{\overline{CA}}\frac{1}{3}x^3dy=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{3}x^3\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}dx+\int_{x_2}^{x_3}\frac{1}{3}x^3\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}dx+\int_{x_3}^{x_1}\frac{1}{3}x^3\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}dx=\frac{1}{12}[(y_2-y_1)(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1)+(y_3-y_2)(x_3^2+x_2^2)(x_3+x_2)+(y_1-y_3)(x_1^2+x_3^2)(x_1+x_3)]$.

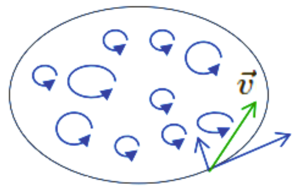
10. 容易验证圆点 O 是闭曲线 C 所围成区域的内点. 记 $C_\epsilon: x^2+y^2=\epsilon^2$, 取 ϵ 足够小使 C_ϵ 围成的区域完全在曲线 C 内侧. 在 C 与 C_ϵ 围成的区域 D 上使用格林公式知 $\oint_{\partial D}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+y^2}))d\sigma=0\Rightarrow\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{C_\epsilon}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\overset{x=\epsilon\cos\theta,y=\epsilon\sin\theta}{=}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$.

11. 上述积分为两个曲线积分之差, 即 $I=\int_\Gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=\int_\Gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_\Gamma\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}$. 令 $P_i=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q_i=\frac{(x-i)dy}{(x-i)^2+y^2}, i=0,1$, 容易验证 $\frac{\partial P_i}{\partial y}=\frac{\partial Q_i}{\partial x}$. 但由于 P_0,Q_0 包含瑕点 $(0,0)$, P_1,Q_1 包含瑕点 $(1,0)$, 且在包含瑕点的区域内积分值可能为 2π(第 10 题结论), 不包含瑕点的区域内积分值必为 0, 因此原积分与路径有关, 结论不对.

12. 由格林公式, $\iint_D\nabla\cdot(P,Q)d\sigma=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma=\oint_{\partial D}Pdy-Qdx=\oint_{\partial D}(P,Q)\cdot(dy,-dx)=\oint_{\partial D}(P,Q)\cdot\vec{n}ds$. 因此 $\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}ds=\oint_{\partial D}v\nabla u\cdot\vec{n}ds=\iint_D\nabla\cdot(v\nabla u)d\sigma=\iint_D(\nabla v\cdot\nabla u+v\triangle u)d\sigma$, 类似有 $\oint_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}ds=\iint_D(\nabla u\cdot\nabla v+u\triangle v)d\sigma$. 两式相减即得结果.

13. 令 $P(x,y)=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x,y)=\frac{e^y}{1+x^2}$, 则有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xe^y}{(x^2+1)^2}$. $\int P(x,y)dx=\frac{e^y-1}{x^2+1}+C'$, $Q(x,y)$ 删除掉含 x 的项后为 0, 因此 $u(x,y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}+C$.

3.3 补充 (不要求掌握!)



格林公式的物理意义: 平面定常流体 (各点流速只与位置有关, 与时间无关) 于 (x,y) 点的流速为 $\vec{v}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$. 对于固定的 x, $\frac{\partial P}{\partial y}$ 决定了 x 方向向 y 方向的旋转, 所以若以逆时针方向为正向, 则 x 方向向 y 方向的旋转度量为 $-\frac{\partial P}{\partial y}$. 对于固定的 y, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 决定了 y 方向向 x 方向的旋转, 其度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x}$. 从而, (x,y) 点的流体的旋转度的度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$, 命名为 (平面流场的旋度), 记为 $\mathrm{rot}\vec{v}$.
物理现象: 边界线 ∂D 上的环流量等于区域 D 上各点旋转量的迭加.

4 第 4 次习题课: 曲面积分

4.1 问题

1. 计算球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被柱面 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ 割下的部分的面积.
2. 求螺旋面 $\Sigma:\begin{cases}x=u\sin v\\ y=u\cos v\\ z=av\end{cases}$ 在 $0\le u\le R, 0\le v\le 2\pi$ 部分的面积, 其中 $a>0$ 是常数.
3. 求抛物面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy(a>0)$ 内的那部分面积.
4. Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 计算积分 $I=\iint_\Sigma x^2y^2dS$.
5. Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2, 0\le z\le H$, 计算积分 $I=\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)dS$.
6. 求均匀物质曲面 $\Sigma: z=2-(x^2+y^2), z\ge 0$ 的质心坐标.
7. Σ 是平面 $2x+2y+z=6$ 于第一卦限部分上侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}dS$, 其中 $\vec{F}=(xy,-x^2,x+z)$.
8. $\Omega=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$, Σ 是 $\partial\Omega$ 的外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma xyzdxdy$.
9. 流 $\vec{v}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$, 求穿出 $\frac{1}{8}$ 球面 $x^2+y^2+z^2=1$(第一卦限) 的流量.
10. Σ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\le z\le h)$ 外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma xdydz+ydxdz+zdxdy$.
11. Σ 是由三个坐标平面及 $x+y+z=1$ 所围成四面体外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$.
12. S 是曲面 $x^2+y^2=1(0\le z\le 2)$ 的外侧, 计算积分 $I=\iint_S x(y-z)dydz+(x-y)dxdy$.
13. S 是椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面, 计算积分 $I=\iint_S\frac{dxdy}{z}$.

4.2 解答

1. 由对称性, 所求面积 S 为 xy 平面上方曲面的面积的两倍. 割下部分 $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y)\in D, D=\{(x,y): (x-\frac{1}{2})^2+y^2\le\frac{1}{4}\}$. 则面积 $S=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}d\sigma_{xy}=2\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}d\sigma_{xy}$. 利用极坐标变换知 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-r^2}|_0^{\cos\theta}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=2\pi-4$.
2. $\vec{\tau_1}=(\sin v,\cos v,0), \vec{\tau_2}=(u\cos v,-u\sin v,a), |\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}|=\sqrt{u^2+a^2}\Rightarrow S=\iint_\Sigma|\vec{\tau_1}\times\vec{\tau_2}|d\sigma_{uv}=\int_0^{2\pi}dv\int_0^R\sqrt{u^2+a^2}du$ $=2\pi[\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log(u+\sqrt{u^2+a^2})]_0^T=\pi R\sqrt{R^2+a^2}+\pi a^2\log(\frac{R+\sqrt{R^2+a^2}}{a})$.
3. 由抛物面方程得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{a}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{a}, dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}$. 从曲线表达式 $\begin{cases}(x^2+y^2)^2=2a^2xy\\ z=0\end{cases}$ 知 (x,y) 落在第一、四象限. 做极坐标变换, 知柱面方程为 $r^2=a^2\sin 2\theta(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\text{或}\pi\le\theta\le\frac{3\pi}{2})$. 因此由对称性知 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}rdr=\frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}}-1]d\theta=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3(\theta+\frac{\pi}{4})d\theta-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 udu-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}(-\frac{1}{3}\sin^2 u\cos u-\frac{2}{3}\cos u)|_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{20}{9}a^2-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$.
4. Σ 在 xoy 平面的投影区域为 $D: x^2+y^2\le R^2$. 又有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$, 所以 $\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $I=\iint_\Sigma x^2y^2dS=\iint_D x^2y^2\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr=R\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\int_0^R\frac{r^5}{\sqrt{R^2-r^2}}dr$.
分开计算: $\int_0^R\frac{r^5}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=\frac{1}{2}\int_0^R\frac{r^4}{\sqrt{R^2-r^2}}dr^2\overset{R^2-r^2=t}{=}\frac{1}{2}\int_0^{R^2}\frac{(R^2-t)^2}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{R^2}(R^4t^{-\frac{1}{2}}-2R^2t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}})dt=\frac{1}{2}[2R^4t^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}r^2t^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}]|_0^{R^2}=\frac{8}{15}R^5, \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)d\theta=\frac{\pi}{4}$. 所以 $I=R\frac{\pi}{4}\frac{8}{15}R^5=\frac{2}{15}\pi R^6$.

5. Σ 可以表示为 $x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$, 其在 yoz 平面的投影区域为 $D_{yz}: -R\le y\le R, 0\le z\le H$. 又 $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}, \frac{\partial x}{\partial z}=0$, $\sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}$. 再考虑对称性, $I=2\iint_{D_{yz}}(R^2+z^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}d\sigma_{yz}=2R\int_{-R}^{R}\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H(R^2+z^2)dz=2R\arcsin\frac{y}{R}|_{-R}^{T}(R^2z+\frac{1}{3}z^3)|_0^H=2RH\pi(R^2+\frac{H^2}{3})$.

6. 设其质心坐标为 (x_0,y_0,z_0), 由对称性有 $x_0=y_0=0, z_0=\frac{\iint_\Sigma zdS}{\iint_\Sigma dS}$. 易知 $\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$, 因此 $\iint_\Sigma dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=2\pi\cdot\frac{1}{2}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi$, $\iint_\Sigma zdS=\iint_{D_{xy}}(2-x^2-y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}dr=\frac{37}{10}\pi$. 所以 $z_0=\frac{111}{130}$.

7. $\vec{n}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}), z=6-2x-2y, D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 3\}, dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}d\sigma_{xy}=3d\sigma_{xy}$, 则 $I=\iint_\Sigma\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_\Sigma[\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}(x+z)]dS=\iint_D[\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}(x+6-2x-2y)]\cdot 3d\sigma_{xy}=\iint_D[2xy-2x^2-x-2y+6]d\sigma_{xy}=\int_0^3dx\int_0^{3-x}[2xy-2x^2-x-2y+6]dy=\frac{27}{4}$.

8. 记 Σ_1,Σ_2 分别为 Σ 在第一卦限和第五卦限的部分, $D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1\}$. 由对称性, $I=2\iint_{\Sigma_1}xyzdxdy=2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma_{xy}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-r^2}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr^2=\frac{1}{2}\int_0^1 u\sqrt{1-u}du\overset{t=\sqrt{1-u}}{=}\frac{1}{2}\int_1^0(1-t^2)t(-2t)dt=\frac{2}{15}$.

9. $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma), Q=\iint_\Sigma\vec{v}\cdot\vec{n}dS=\iint_\Sigma Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint_\Sigma xydydz+yzdzdx+xzdxdy\overset{\text{对称性}}{=}3\iint_\Sigma xzdxdy=3\iint_{x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0}x\sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma_{xy}=\frac{3\pi}{16}$.

10. $I=\iint_\Sigma(x,y,z)\cdot\vec{n}dS=\iint_\Sigma(x,y,z)\cdot\frac{(x,y,-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=\iint_\Sigma\frac{x^2+y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=0$.

11. 记 Σ 落在 xy, yz, zx 平面上的部分分别为 Σ_z,Σ_x 和 Σ_y, 在平面 $x+y+z=1$ 的部分记为 Σ_1. 则在 Σ_z 上, $z=0, dydz=dzdx=0$, 从而 $\iint_{\Sigma_z}xdydz+ydzdx+zdxdy=0$. 同理在 Σ_y 与 Σ_z 上的积分都为零. 因此 $I=\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$. 记 $D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\}$, 则由对称性 $I=3\iint_D(1-x-y)d\sigma_{xy}=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{2}$.

12. 注意到曲面 S 在 O_{xy} 平面上的投影为一曲线, 所以 $\iint_S(x-y)dxdy=0$. 为了计算另一个积分, 将曲面分成两部分 $\begin{cases}S_1: x=\sqrt{1-y^2}(0\le z\le 2)\\ S_2: x=-\sqrt{1-y^2}(0\le z\le 2)\end{cases}$. 记 $D=\{(y,z): -1\le y\le 1, 0\le z\le 2\}$, 由对称性, $I=2\iint_{S_1}x(y-z)dydz=2\int_0^2dz\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}(y-z)dy=-2\pi$.

13. 记 $D=\{(x,y): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$, 由对称性知 $I=2\iint_D\frac{dxdy}{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}=\frac{2}{c}\int_{-a}^a dx\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\frac{dy}{\sqrt{(1-x^2/a^2)-y^2/b^2}}=\frac{2}{c}\int_{-a}^a\frac{b\pi}{2}dx=\frac{2\pi ab}{c}$.

4.3 补充 (不要求掌握!)

如何定义某条曲线是“可求长度”的? 如何定义某张曲面是“可求面积”的? 有兴趣的同学可以参考https://wqgcx.github.io/courses/Functions_of_Real_Variables.pdf.

事实上, 有些集合是不可求长的. 用 $m(A)$ 表示集合 A 的“长度”, 在 $[0,1]$ 中根据规则“$x_1\sim x_2$ 当且仅当 $x_1-x_2\in\mathbb{Q}$”划分等价类, 每个等价类选取一个元素 x_α(依赖于选择公理), 这样构成了集合 A. 假设 A 可求长, 那么 $A_q=(A+q)\cap[0,1], \forall q\in\mathbb{Q}$ 也可求长, 且对于 $q\ne p$ 有 $A_q\cap A_p=\emptyset$. 这表明 $1=m([0,1])=\sum_{q\in\mathbb{Q}}m(A_q)$, 即 A 不是零长度的. 注意到对任意的 $q\in\mathbb{Q}$ 成立 $m(A_q)\ge m(A)-q$, 这样只需考虑所有在区间 $[0,\frac{1}{2}m(A)]$ 中的有理数便知矛盾! 这说明集合 A 是不可求长的.

5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式

5.1 问题

1. Σ 是锥面 $x^2+y^2=z^2(0\le z\le 1)$ 外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$.

2. S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上半部分上侧, 计算积分 $I=\iint_S(\sin yz+x)dydz+(e^{xz}+y)dzdx+(xy+z)dxdy$.

3. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为一封闭光滑曲面, 以它为边界的闭区域为 D, $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3$ 不在 S 上. 计算积分 $I=\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}$, 其中 $\vec{r}=(x-\xi,y-\eta,z-\zeta), r=|\vec{r}|, |\vec{n}|$ 是 S 的单位外法向量.

4. 设 $f(x,y,z)$ 表示从原点到椭球面 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $P(x,y,z)$ 的切平面的距离, 计算积分 $I=\iint_\Sigma\frac{dS}{f(x,y,z)}$.

5. L 是平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截得三角形 Σ 的边界, 其正向与此三角形上侧成右手系, 计算积分 $I=\oint_L zdx+xdy+ydz$.

6. L 为椭圆 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1 \end{cases}$, 方向与椭圆面上侧构成右手系, 计算积分 $I=\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$.

7. Γ_h 是平面 $x+y+z=h$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线, 从 z 轴正向看去逆时针方向, 计算积分 $I=\oint_{\Gamma_h}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$.

8. C 是平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 切立方体 $\Omega=\{(x,y,z):0\le x,y,z\le a\}$ 的表面所得的切痕, 方向是从 x 轴正向看去逆时针方向, 计算积分 $I=\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$.

9. S 是柱面 $x^2+y^2=R^2, -R\le z\le R$ 所围成的立体表面外侧, 计算积分 $I=\iint_S \frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$.

10. S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1, z=2$ 所围立体的表面外侧, 计算积分 $\iint_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

11. 函数 $P(x,y),Q(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$, 且曲线积分 $\int_\Gamma Pdx-Qdy$ 和 $\int_\Gamma Pdy+Qdx$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中与路径无关, 求证 $P(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(x+\cos\theta,y+\sin\theta)d\theta, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

5.2 解答

1. 记 $\Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}, \Sigma_0=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1, z=1\}$, 则 $I=\oiint_{\partial\Omega}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy-\iint_{\Sigma_0}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy:=I_1-I_2$. 根据高斯公式, $I_1=\iiint_\Omega [0+0+0]dv=0$, 而 $I_2=\iint_{\Sigma_0}(x-y)dxdy=\iint_{\Sigma_0}xd\sigma_{xy}-\iint_{\Sigma_0}yd\sigma_{xy}=0-0=0$. 因此 $I=0$.

2. 取 $S_1=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1, z=0\}$, 方向向下, 则 $S\cup S_1$ 构成了上班单位球体 D 的边界外侧. 由高斯公式得 $\iint_{S\cup S_1}(\sin yz+x)dydz+(e^{xz}+y)dzdx+(xy+z)dxdy=3\iiint_D dv=2\pi$. 而 $\iint_{S_1}(xy+z)dxdy=-\iint_{x^2+y^2\le 1}xyd\sigma_{xy}=0$. 因此 $I=2\pi$.

3. $\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})=\frac{1}{r}\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n}\Rightarrow I=\iint_S\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{n}dS=\iint_S\frac{x-\xi}{r^3}dydz+\frac{y-\eta}{r^3}dzdx+\frac{z-\zeta}{r^3}dxdy$. 由 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3})=\frac{1}{r^3}-\frac{3(x-\xi)^2}{r^5}, \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3})=\frac{1}{r^3}-\frac{3(y-\eta)^2}{r^5}, \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})=\frac{1}{r^3}-\frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$ 知 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})=0$. 当 $(\xi,\eta,\zeta)\notin D$ 时, 根据高斯公式成立 $I=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})]dv=0$. 当 $(\xi,\eta,\zeta)\in D$ 时, 取 ϵ 充分小使得球面 $S_\epsilon=\{(x,y,z):(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\epsilon^2\}$ 完全落在 D 的内部. 如果取 S_ϵ 的内侧 S_ϵ^-, 设区域 D_ϵ 以 S 与 S_ϵ^- 为边界, 则 $\iint_{S\cup S_\epsilon^-}\frac{\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})}{r^2}dS=\iint_{D_\epsilon}0dv=0$. 注意到在 S_ϵ 上, $\overrightarrow{r}$ 与 $\overrightarrow{n}$ 平行, 从而 $I=-\iint_{S_\epsilon^-}\frac{\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})}{r^2}dS=\iint_{S_\epsilon}\frac{dS}{\epsilon^2}=\frac{1}{\epsilon^2}4\pi\epsilon^2=4\pi$.

4. 对 Σ 的方程两边微分得到 $\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0$, 因此 P 处的外法向量为 $\overrightarrow{n}=(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})$, 切平面方程为 $\frac{x}{a^2}(X-a)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0$, 原点到切平面距离 $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2+(\frac{y}{b^2})^2+(\frac{z}{c^2})^2}}$, 因此 $I=\iint_\Sigma\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2+(\frac{y}{b^2})^2+(\frac{z}{c^2})^2}dS=\iint_\Sigma(\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma)dS=\iint_\Sigma\frac{x}{a^2}dydz+\frac{y}{b^2}dzdx+\frac{z}{c^2}dxdy$. 记 $V=\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 由高斯公式有 $I=\iiint_V(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})dv=\frac{4\pi abc}{3}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$.

5. $\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}=dydz+dzdx+dxdy$, 因此由斯托克斯公式, $I=\iint_\Sigma dydz+dxdz+dxdy=3\iint_\Sigma dxdy=\frac{3}{2}$.

6. 记椭圆面上侧为 Σ, $\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}=-2dydz-2dzdx-2dxdy$, 因此由斯托克斯公式, $I=\iint_\Sigma -2dydz-2dzdx-2dxdy=-2\iint_\Sigma dydz+dxdy=-2[\iint_{D_{yz}}d\sigma_{yz}+\iint_{D_{xy}}d\sigma_{xy}]=-2(\pi ah+\pi a^2)$.

7. 设平面 $x+y+z=h$ 被圆周 Γ_h 所围成部分为 S_h, 则 S_h 是一半径为 $\sqrt{1-\frac{h^2}{3}}$ 的圆盘. 由斯托克斯公式, $I=\iint_{S_h}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=-\frac{4}{\sqrt{3}}(x+y+z)dS=-\frac{4h}{\sqrt{3}}\iint_{S_h}dS=-\frac{4h}{\sqrt{3}}\pi(1-\frac{h^2}{3})$.

8. 令 Σ 是 C 所围的区域, 方向为上侧, 由斯托克斯公式知 $I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(x+y+z)dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\frac{3}{2}adS=-2\sqrt{3}a\iint_\Sigma dS$. 最后, 因为 Σ 是边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的正六边形, 面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, 所以 $I=-\frac{9}{2}a^3$.

9. 记 S_1, S_2, S_3 分别为 S 的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为 $I = \iint_S \frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2} + \iint_S \frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2} := I_1 + I_2$. 先看第一项, 显然 $\iint_{S_1} \frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{S_2} \frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2} = 0$. 记 $D_{yz} = \{(y,z) : -R \leq y, z \leq R\}$, 从而 $\iint_{S_3} \frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2} = 2\iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2} = 2\int_{-R}^{R} \frac{1}{R^2+z^2} dz \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-y^2} dy = 2 \times \frac{1}{2}\pi R^2 \times \frac{\pi}{2R} = \frac{1}{2}\pi^2 R$. 再看第二项, 显然 $\iint_{S_1+S_2} \frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2} = 0, \iint_{S_3} \frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2} = 0$(前者是因为对称性, 后者是因为 S_3 在 xoy 平面上的投影是一曲线). 因此 $I = \frac{1}{2}\pi^2 R$. 请读者注意, 本题由于区域内存在瑕点 $(0,0,0)$, 不可直接使用高斯公式.

10. 记 S_1, S_2, S_3 分别为 S 的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为 $(\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}) \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$. 投影 $D_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$, 从而 $\iint_{S_1} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = -\iint_{D_1} \frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 edr = -2\pi e$. 投影 $D_2 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$, 从而 $\iint_{S_2} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \iint_{D_2} \frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^2 dr = 4\pi e^2$. 投影 $D_3 = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$, 从而 $\iint_{S_3} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = -\iint_{D_3} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 e^r dr = -2\pi e(e-1)$. 因此 $I = -2\pi e + 4\pi e^2 - 2\pi e(e-1) = 2\pi e^2$.

11. 积分与路径无关意味着 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$. 由格林公式知 $\forall$ 区域 D, $\oint_{\partial D} \frac{\partial P}{\partial \overrightarrow{n}} ds = \iint_D \triangle P d\sigma = 0$. 从而 $0 = \oint_{\partial B((x,y),r)} \frac{\partial P}{\partial \overrightarrow{n}} ds = \oint_{\partial B((x,y),r)} \frac{\partial P}{\partial r} ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)}{\partial r} r d\theta = r\frac{\partial}{\partial r}(\int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)d\theta) \Rightarrow \int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)d\theta \equiv C$. 令 $r \to 0$ 知 $\int_0^{2\pi} P(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) \to 2\pi P(x,y) \Rightarrow P(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x+\cos\theta, y+\sin\theta)d\theta$(令 $r=1$ 即可).

5.3 补充 (不要求掌握!)

高斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流苏 $\overrightarrow{F} = (P,Q,R)$, 定义其散度为 $\mathrm{div}\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$. $\mathrm{div}\overrightarrow{F} > 0$ 表示点为 "源", 即能生流; $\mathrm{div}\overrightarrow{F} < 0$ 表示点为 "汇", 即能 "吸流"; $\mathrm{div}\overrightarrow{F} = 0$ 表示点非源非汇. 因此高斯公式的向量形式为 $\oiint_{\Sigma^+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \iiint_\Omega \mathrm{div}\overrightarrow{F} dv$, 即: 流在某区域 Ω 上的总散度等于流通过 Ω 的边界的总流量.

斯托克斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流速 $\overrightarrow{F} = (P,Q,R)$, 定义其旋度为 $\mathrm{rot}\overrightarrow{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\overrightarrow{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\overrightarrow{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\overrightarrow{k} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \overrightarrow{F}$, 因此斯托克斯公式的向量形式为 $\iint_\Sigma \mathrm{rot}\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = \oint_L \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s}$, 即: 流在闭路 L 上的循环量 (环流量), 就是旋度在以 L 为边界的光滑曲面上的流量 (旋流量).

6 第 6 次习题课: 初等积分法

6.1 问题

1. 求解微分方程 $(2x\sin y + 3x^2y)dx + (x^3 + x^2\cos y + y^2)dy = 0$.
2. 求解微分方程 $(x^2+1)(y^2-1)dx + xydy = 0$.
3. 质量为 m 的物体在空中下落, 初速度为 v_0, 空气阻力与物体速度的平方成正比, 阻尼系数为 $k > 0$. 沿垂直地面向下的方向取定坐标轴 x, 计算 t 时刻的速度.
4. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3 (x \neq 0)$.
5. 设微分方程 $\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$, 其中 $a > 0$ 为常数, 而 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 试求方程的 2π 周期解.
6. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.
7. 考虑里卡蒂方程 $\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$, 其中 $a \neq 0, b, m$ 都是常数, $x \neq 0, y \neq 0$. 证明当 $m = 0, -2, \frac{-4k}{2k+1}, \frac{-4k}{2k-1} (k = 1, 2, \cdots)$ 时, 方程可通过适当的变换化为变量分离的方程.
8. 证明: 若 $\mu = \mu(x,y)$ 是方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 的一个积分因子使得 $\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = d\Phi(x,y)$, 则 $\mu(x,y)g(\Phi(x,y))$ 也是一个积分因子, 其中 $g(\cdot)$ 是任一可微的非零函数.
9. 求解微分方程 $(x^3y - 2y^2)dx + x^4dy = 0$.
10. 证明: 若 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 是齐次方程, 则 $\mu(x,y) = \frac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}$ 是一个积分因子.
11. 求解微分方程 $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$.
12. 假设微分方程 $\frac{dy}{dx} = H(x,y)$ 在 (x,y) 平面上给出了一个以 C 为参数的曲线族 $\mathscr{C}$. 试求另一个微分方程, 其给出了一个以 K 为参数的曲线族 $\mathscr{K}$, 并且 $\mathscr{C}$ 中的每一条曲线和 $\mathscr{K}$ 中的每一条曲线相交成定角 $\alpha(-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, 以逆时针方向为正).

6.2 解答

1. $\frac{\partial P}{\partial y}=2x\cos y+3x^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 因此是恰当方程. 注意到 $d(x^2\sin y+x^3y+\frac{1}{3}y^3)=(2x\sin y+3x^2y)dx+(x^3+x^2\cos y+y^2)dy$, 因此通积分为 $x^2\sin y+x^3y+\frac{1}{3}y^3=C$.
2. 当因子 $x(y^2-1)\neq 0$ 时, 用它除方程两端, 得到等价方程 $\frac{x^2+1}{x}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0$. 积分得到 $x^2+\log x^2+\log|y^2-1|=C_1\Rightarrow x^2e^{x^2}|y^2-1|=e^{C_1}\Rightarrow y^2=1+C\frac{e^{-x^2}}{x^2}$, 其中 $C\neq 0$. 当因子 $x(y^2-1)=0$ 时, 得到特解 $x=0$ 和 $y=\pm 1$. 因此通积分为 $y^2=1+C\frac{e^{-x^2}}{x^2}$ 或 $x=0$.
3. 由牛顿第二运动定律知 $m\ddot{x}=mg-k\dot{x}^2\Rightarrow\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v^2\Rightarrow\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=dt\Rightarrow v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{Ce^{2\sqrt{kg/m}t}+1}{Ce^{2\sqrt{kg/m}t}-1}$. 代入初值条件知 $C=(v_0-\sqrt{\frac{mg}{k}})^{-1}(v_0+\sqrt{\frac{mg}{k}})$.
4. 积分因子是 $e^{\int\frac{1}{x}dx}=|x|$. 用它乘方程两侧得到 $\frac{d}{dx}(xy)=x^4\Rightarrow y=\frac{1}{5}x^4+\frac{C}{x}$.
5. 方程通解为 $y(x)=Ce^{-ax}+\int_0^x e^{-a(x-s)}f(s)ds$, 现在选择常数 C, 使 $y(x)$ 成为 2π 周期函数. 代入 $y(2\pi)=y(0)$ 得到 $y(x)=\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi}e^{-a(x-s)}f(s)ds$, 容易验证它确实是 2π 周期解.
6. 令 $y=ux$, 则 $x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u}{1-u}\Rightarrow\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}\Rightarrow\arctan u-\log\sqrt{1+u^2}=\log|x|-\log C$. 从而 $|x|\sqrt{1+u^2}=Ce^{\arctan u}$. 以 $u=y/x$ 代回得到通积分 $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan\frac{y}{x}}$.
7. 不妨设 $a=1$(否则作变换 $\bar{x}=ax$). 因此考虑 $\frac{dy}{dx}+y^2=bx^m$. $m=0$ 时显然是一个变量分离的方程. 当 $m=-2$ 时, 作变换 $z=xy$, 代入方程得到 $\frac{dz}{dx}=\frac{b+z-z^2}{x}$, 这也是一个变量分离的方程. 当 $m=\frac{-4k}{2k+1}$, 作变换 $x=\xi^{\frac{1}{m+1}},y=\frac{b}{m+1}\eta^{-1}$, 则方程变为 $\frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=\frac{b}{(m+1)^2}\xi^n$, 其中 $n=\frac{-4k}{2k-1}$. 再作变换 $\xi=\frac{1}{t},\eta=t-zt^2$, 方程变为 $\frac{dz}{dt}+z^2=\frac{b}{(m+1)^2}t^l$, 其中 $l=\frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$. 比较 m 与 l 对 k 的依赖关系知只要将上述变换的过程重复 k 次, 就能把原方程化为 $m=0$ 的情形. 当 $m=\frac{-4k}{2k-1}$ 时, 注意上述过程中 n 对 k 的依赖关系知可以化归到 $m=0$ 的情形.
8. 直接验证 $\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)g(\Phi(x,y))P(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)g(\Phi(x,y))Q(x,y)]$ 即可.
9. 改写为 $(x^3ydx+x^4dy)-2y^2dx=0$. 前一组有积分因子 x^{-3} 和通积分 $xy=C$, 后一组有积分因子 y^{-2} 和通积分 $x=C$. 根据上一题结果, 只需找可微函数 g_1,g_2 使得 $\frac{1}{x^3}g_1(xy)=\frac{1}{y^2}g_2(x)$. 只需取 $g_1(xy)=\frac{1}{(xy)^2}$ 和 $g_2(x)=\frac{1}{x^5}$, 得到原方程的积分因子 $\frac{1}{x^5y^2}$. 用它乘原方程得到全微分方程 $\frac{1}{(xy)^2}d(xy)-\frac{2}{x^5}dx=0$, 因此通积分为 $y=\frac{2x^3}{2Cx^4+1}$. 注意到方程还有特解 $x=0$ 和 $y=0$, 它们实际上是在用积分因子乘方程时丢失的解.
10. 代入 $P(x,y)=x^mP_1(\frac{y}{x}),Q(x,y)=x^mQ_1(\frac{y}{x})$ 直接验证即可.
11. $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+3y^2$, 因此不是恰当方程, 但是 $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=3$ 不依赖于 y, 因此有积分因子 e^{3x}, 用它乘原方程得到 $e^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)dx+e^{3x}(x^2+y^2)dy=d[e^{3x}(x^2y+\frac{1}{3}y^3)]=0$, 因此通积分为 $e^{3x}(x^2y+\frac{1}{3}y^3)=C$.
12. 设曲线族 $\mathscr{C}$ 中过点 (x,y) 的线素斜率为 y_1', 与它相交成 α 角的线素斜率记为 y'. 当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\tan\alpha=\frac{y'-y_1'}{1+y'y_1'}$, 即 $y_1'=\frac{y'-\tan\alpha}{y'\tan\alpha+1}$. 因为 $y_1'=H(x,y)$, 所以等角轨线的微分方程为 $\frac{y'-\tan\alpha}{y'\tan\alpha+1}=H(x,y)$, 即 $\frac{dy}{dx}=\frac{H(x,y)+\tan\alpha}{1-H(x,y)\tan\alpha}$. 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时有 $y'=-\frac{1}{y_1'}$, 即微分方程为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{H(x,y)}$.

6.3 补充 (不要求掌握!)

皮亚诺存在定理: 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $|x-x_0|\leq a,|y-y_0|\leq b$ 内连续, 则初值问题 $\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$ 在区间 $|x-x_0|\leq\min\{a,\frac{b}{M}\}(M>\max_{(x,y)\in\mathbb{R}}|f(x,y)|)$ 上至少有一个解 $y=y(x)$.
证明过程较为复杂, 有兴趣的同学可以参考《常微分方程教程》(丁同仁、李承治) 第二版 3.2 节.

7 第 7 次习题课: 解的存在唯一性, 高阶线性微分方程

7.1 问题

1. 设初值问题 $\frac{dy}{dx}=F(x,y),y(0)=0$, 其中函数 $F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当}x=0,-\infty<y<\infty\\ 2x, & \text{当}0<x\leq 1,-\infty<y<0\\ 2x-\frac{4y}{x}, & \text{当}0<x\leq 1,0\leq y<x^2\\ -2x, & \text{当}0<x\leq 1,x^2\leq y<\infty\end{cases}$. 考虑区域 $S:0\leq x\leq 1,-\infty<y<\infty$, 求其皮卡序列.
2. 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上关于 y 单调下降, 证明初值问题 $\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$ 至多有一个右行解.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续, 且满足不等式 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le F(|y_1-y_2|)$, 其中 $F(r)>0$ 是 $r>0$ 的连续函数, 且 $\lim\limits_{\epsilon\to 0+0}\int_\epsilon^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=+\infty(r_1>0$ 是常数). 证明微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 在 G 内经过每一点的解都是唯一的.

4. 设函数 $p(x),q(x),f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明初值问题 $\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\\ y(x_0)=c,y'(x_0)=d \quad (x_0\in(a,b))\end{cases}$ 在区间 $[a,b]$ 内存在唯一的解.

5. 考虑线性齐次方程 $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'(x)+p_n(x)y=0$, 其中 $p_i(x)\in C(\mathbb{R})$, 证明其有且仅有 n 个线性无关的解.

6. 求解微分方程 $y'''-y''-2y'=0$.

7. 求解微分方程 $y^{(5)}-3y^{(4)}+4y'''-4y''+3y'-y=0$.

8. 求解微分方程 $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$.

9. 求解微分方程 $y''+4y'+4y=\cos 2x$.

10. 求解微分方程 $\begin{pmatrix} y_1'\\ y_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$.

7.2 解答

1. $y_1(x)=\int_0^x F(t,0)dt=x^2, y_2(x)=\int_0^x F(t,t^2)dt=-x^2$, 由数学归纳法知 $y_n(x)=(-1)^{n+1}x^2$. 本题的例子告诉我们没有 Lipschitz 条件, 皮卡序列可能不收敛.

2. 假设不然. 则设方程有两个右行解 $y_1(x),y_2(x)$, 且至少存在一个值 $x_1>x_0$ 使得 $y_1(x_1)\ne y_2(x_1)$. 不妨设 $y_1(x_1)>y_2(x_1)$. 令 $\bar{x}=\sup_{x\in[x_0,x_1]}\{x:y_1(x)=y_2(x)\}$, 显然有 $x_0\le\bar{x}<x_1$, 而且 $r(x):=y_1(x)-y_2(x)>0,\forall\bar{x}<x\le x_1$ 和 $r(\bar{x})=0$. 因此, 我们有 $r'(x)=y_1'(x)-y_2'(x)=f(x,y_1(x))-f(y_2(x))<0$, 进而 $r(x_1)=\int_{\bar{x}}^{x_1}r'(t)dt<0$, 矛盾.

3. 假设不然. 则在 G 内可以找到一点 (x_0,y_0) 使得方程有两个解 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ 都经过 (x_0,y_0), 且至少存在一个值 $x_1\ne x_0$ 使得 $y_1(x_1)\ne y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1>x_0$, 且 $y_1(x_1)>y_2(x_1)$. 令 $\bar{x}=\sup_{x\in[x_0,x_1]}\{x:y_1(x)=y_2(x)\}$, 显然有 $x_0\le\bar{x}<x_1$, 而且 $r(x):=y_1(x)-y_2(x)>0,\forall\bar{x}<x\le x_1$ 和 $r(\bar{x})=0$. 因此, 我们有 $r'(x)=y_1'(x)-y_2'(x)=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))\le F(|y_1(x)-y_2(x)|)=F(r(x))$, 即 $\frac{dr(x)}{F(r(x))}\le dx(\bar{x}<x\le x_1)$. 从 $\bar{x}$ 到 x_1 积分上式, 得到 $\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}\le x_1-\bar{x}$, 其中 $r_1=r(x_1)>0$. 但这不等式左端是 $+\infty$, 右端是一个有限的数, 矛盾.

4. 令 $y_1=y,y_2=y'$, 则原微分方程可改写为 $\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-q(x)&-p(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\f(x)\end{pmatrix}(y_1(x_0)=c,y_2(x_0)=d)$, 即是 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)(\boldsymbol{y}(x_0)=(c,d)^T)$. 固定 x, 等式右边显然对 $\boldsymbol{y}$ 满足 Lipschitz 条件, 因此解存在唯一.

5. 令 $y_1=y,y_2=y',\cdots,y_n=y^{(n-1)}$, 可以将原微分方程改写为 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$. 固定 x_0, 由存在唯一性定理知对于任何常数向量 $\boldsymbol{y_0}\in\mathbb{R}^n$, 存在唯一的元素 $\boldsymbol{y}(x)$ 使得 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y_0}$. 这样得到一个映射 $H:\boldsymbol{y_0}\mapsto\boldsymbol{y}(x),\mathbb{R}^n\to S$(记解空间为 S). 显然对于任何 $\boldsymbol{y}(x)\in S$, 我们有 $\boldsymbol{y}(x_0)\in\mathbb{R}^n,H(\boldsymbol{y}(x_0))=\boldsymbol{y}(x)$, 所以 H 是满的. 由唯一性又知 H 是单的. 容易验证 H 是线性的. 因此 H 是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 S 的同构映射, 从而 S 是 n 维的, 即原微分方程有且仅有 n 个线性无关的解.

6. 特征方程 $\lambda^3-\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)=0$, 因此有通解 $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$.

7. 特征方程 $\lambda^5-3\lambda^4+4\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)=0$, 因此有通解 $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x+C_4\cos x+C_5\sin x$.

8. 特征方程 $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3=0$, 因此齐次方程通解为 $(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}$. 设有特解 $y^*=x^3(a+bx)e^{-x}=(ax^3+bx^4)e^{-x}$, 代入微分方程得 $a=-\frac{5}{6},b=\frac{1}{24}$. 因此原方程通解为 $y=(C_1+C_2x+C_3x^2-\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4)e^{-x}$.

9. 特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$, 因此齐次方程通解为 $(C_1+C_2x)e^{-2x}$. 设有特解 $y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$, 代入微分方程得 $a=0,b=\frac{1}{8}$. 因此原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{8}\sin 2x$.

10. 传统方法很容易, 但这里笔者希望使用另一种方法. 设 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, 原方程可写为 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$. 回顾一元情形 $y'=ay$ 的解为 Ce^{ax}, 启发式地, 似乎我们也可以把现在这个方程的解写为 $e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{C}$. 运用一点线性代数知识可知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$. 冥冥之中, $e^{\boldsymbol{A}x}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}x}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{-x}&\frac{1}{2}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{-x}\\\frac{1}{2}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{-x}&\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{-x}\end{pmatrix}$. 因此, 通解可以写成 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1(e^{3x}+e^{-x})+C_2(e^{3x}-e^{-x})\\C_1(e^{3x}-e^{-x})+C_2(e^{3x}+e^{-x})\end{pmatrix}$. 由此可见, 这是一个多么和谐的数学世界啊!

7.3 补充 (不要求掌握!)

皮卡存在唯一性定理的另一种证明方法: 考虑连续函数空间上的映射 $F: y \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$, 由于 $|F(y_1) - F(y_2)| = |\int_{x_0}^{x}[f(x,y_1) - f(x,y_2)]dx| \leq \int_{x_0}^{x} |f(x,y_1) - f(x,y_2)|dx \leq \int_{x_0}^{x} L|y_1 - y_2|dx = L|x - x_0||y_1 - y_2|$. 回顾连续函数空间上的度量为 $\rho_{[a,b]}(y_1,y_2) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|$, 因此当 $|x - x_0| < \frac{1}{L}$ 时, 映射 F 是一个压缩映射. 由压缩映像原理, F 的不动点存在且唯一, 这就意味着 $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$ 的解存在且唯一.

8 第 8 次习题课: 常数变易法

8.1 问题

1.

8.2 解答

1.

8.3 补充 (不要求掌握!)

9 第 9 次习题课: 数项级数

9.1 问题

9.2 解答

9.3 补充 (不要求掌握!)

10 第 10 次习题课: 数项级数, 函数项级数

10.1 问题

10.2 解答

10.3 补充 (不要求掌握!)

11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数

11.1 问题

11.2 解答

11.3 补充 (不要求掌握!)

12 第 12 次习题课: 广义积分, 含参积分

12.1 问题

12.2 解答

12.3 补充 (不要求掌握!)

13 第 13 次习题课: 含参广义积分, 傅里叶级数

13.1 问题

13.2 解答

13.3 补充 (不要求掌握!)

14 第 14 次习题课: 傅里叶级数

14.1 问题

14.2 解答

14.3 补充 (不要求掌握!)

15 综合复习

15.1 问题

15.2 解答

16 致谢

题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.