实变函数

北京大学 龚诚欣
wqgcx.github.io

第一章 集合与点集

*关于基数/势的理解：可数集中也有可数个可数集，可数个可数集的并也是可数集。我们可以认为可数集和可数个可数集对等。在双射意义下，可数集就是自然数集。

【例 1.1】f(x)在(a,b)上可微，除可数集外 f '(x)=0，证明 f(x)是常值函数。

【解】注意到导函数的介值性质即可。

*Cantor-Bernstein 定理：X≤Y，Y≥X，则 X~Y。

【例 1.2】若 A⊂B 且 A~(A∪C)，证明 B~(B∪C)。

【解】B≤B∪C 显然。由于 B\A≥B∪C\A∪C，A~A∪C，从而 B≥B∪C。

*有理数集 Q 可列=$\{r_n\}_{n=1,2,\dots}$，并且在 R 上稠密，从而具有非常好的性质。可以构造在有理数集上不连续的函数。

*开集上的实值函数的连续点集是 G_δ集。

【证】$\bigcap_{m=1}^{+\infty}\{x\in G\,|\,\omega_f(x)<\frac{1}{m}\}$。思路：连续点集就是$\omega_f(x)=0$，=0 可以被$<\varepsilon_n$逼近。

*不存在有理数点连续，无理数点不连续的实值函数。

【证】记 $Q=\{r_n\}$，对于 r_1，存在 $y_1\in Q\backslash\{r_1\}$和一个邻域 $B(y_1,\delta_1)$使得 $r_1\notin B(y_1,\delta_1)$且$\omega_f(B(y_1,\delta_1))<\varepsilon$。对于 r_2，存在 $y_2\in Q\backslash\{r_1,r_2\}$和一个邻域 $B(y_2,\delta_2\le\delta_1/2)$使得 $B(y_2,\delta_2)\subset B(y_1,\delta_1), r_2\notin B(y_2,\delta_2), \omega_f(B(y_1,\delta_1))<\varepsilon/2$。

依次类推，考虑闭球的闭集套，套中的点必然是使函数连续的无理数。

*常见连续基数集合：R^n、区间、01 列、N 的全体无穷子集（01 列\可数子集）、N 的全体子集、全体实数列。

*some simple tips：

1. 凡是涉及到 a>/</=b 的，都可以用 a>/<b+ε_n(ε_n=1/n→0 with n→+∞)来拟合；
2. 凡是涉及到→+∞，都可以用[n,n+1](n→+∞)来拟合；
3. 凡是涉及到函数不连续的，都可以用$\omega_f>\varepsilon_n$(ε_n=1/n→0 with n→+∞)来拟合；
4. 对于满足一列性质的集合，我们可以取并来研究整体性质并证明/证否；
5. 如何将欲证集合一一映射到可数集，是解题常见思路；
6. 判断一个集合的基数，如果集合某个分量能用某个序列表示，可以考虑将分量依次排开写成序列的无穷矩阵。

【例 1.3】实值函数 f(x)满足 f(x)=+∞(y→x)的点是可数集。

【解】对满足的点的函数值做区分，规定 $E_n=\{x|f(x)\in[n,n+1)\cup(-n-1,-n]\}$，从而对于 $x_0\in E_n$，存在邻域 $B(x_0,\delta_0)$使得 $x\in B_0(x_0,\delta_0)$必有 f(x)>n+2，从而整个区间再也没有 x_0 的点。特别地，存在一个(Q,Q)⊂$B(x_0,\delta_0)$，从而 E_n 可数，进而有 $E=\cup E_n$(n=1,2,…)可数。

【例 1.4】证明[0,1]区间上连续函数构成的集合基数是连续基数。

【解】∀r∈R，f(x)=x+r 是连续函数，从而基数≥card(R)=c。

∀f∈C[0,1]，构造集合 E={(x,y) | x,y∈Q,y≤f(x)}。E 里面的点能够唯一确定 f 在有理数处的值，由有理数的稠密性又能确定其在无理数处的取值，从而 f→{E}是一个双射，基数≤card(Q 的全体子集)=c。

【例 1.5】证明[0,1]区间上的单调函数构成的集合基数是连续基数。

【解】$\forall r \in R$，$f(x)=x+r$ 是单调函数，从而基数≥card(R)=c。

对于某个单调函数，我们考察其 I 间断点。闭区间上单调函数间断点一定是第一类间断点，又由单调性，于是可以被唯一对应的区间$[f(x-0),f(x+0)]$锁定，选取某个 $Q\in[f(x-0),f(x+0)]$知其可数性，即间断点对应的函数值是可数个 R（R 中的数列），对应基数是 c。再考察其 II 非间断点，直接利用例 1.4 构造即可。

*无最大基数定理：A 与 A 的全体子集不对等。

*可数覆盖定理：任意集合的一个开覆盖都有可数子覆盖。【可数拓扑基的应用】

【证】可数拓扑基：记 $Q=\{r_n\}_{n=1,2,\ldots}$，有 $B_{k,n}=B(q_n,\frac{1}{k})$，$k\in N_+$。则 $R^n=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_{k,n}$（记为 B）。

对于集合 E 的一个开覆盖$\{U_\alpha\}$，$\forall x\in E$，$\exists U_x$ 使得 $x\in U_x$。从而存在 $B_x\in B$ 使得 $B_x\subset U_x$ 且 $x\in B_x$。对于 all x in E，B_x 构成的集合$\{B_x\}$是可数集，改记为$\{B_i\}_{i=1,2,\ldots}$。从而存在可数子覆盖$\{U_i\}_{i=1,2,\ldots}$。

【例 1.6】$E\subset R^n$ 是不可数集，证明存在 $x_0\in E$ 使得任意内含 x_0 的圆邻域 $B(x_0)$，点集 $E\cap B(x_0)$ 都是不可数集。

【解】假设 $x_0\in E$ 都有 $B(x_0)\cap E$ 是可数集，则对于 all $x_0\in E$，$\cup[B(x_0)\cap E]$构成了一个开覆盖，有可数子覆盖。则 $B_i(x_0)\cap E$ 都是可数集，从而$[\cup B_i(x_0)]\cap E(i=1,2,\ldots)$也是可数集，矛盾。

【例 1.7】设 $F\subset R^n$ 是无限闭集，试证明存在 F 中的可数子集 E 使得 $\overline{E}=F$。

【解】取可数拓扑基 $B_k(Q_i,1/k)\cap F$(若不为空)，任取其中一点 $A_{k,i}$，取 $E=\cup_{k,i}A_{k,i}$ 为 F 的可数子集。显然 $\overline{E}=F$。(正过去显然，反过来是因为随着 $k\to+\infty$而无限接近)

【例 1.8】设 E 是 R^2 中的可数集，证明存在 $E=A\cup B$，A、B 不交，任一平行于 x 轴的直线交 A 至多是有限点，任一平行与 y 轴的直线交 B 至多是有限点。

【解】如果 $E=N^2$，我们沿对角线切开即可。类似地，我们设 $E_x=\{x_1,x_2,\ldots\}$，$E_y=\{y_1,y_2,\ldots\}$，按右下角标理解，沿对角线切开即可。

*有限覆盖定理：有界闭集的任意开覆盖都是有限子覆盖。【如何化归有界闭和开覆盖？】

【例 1.9】设$\{F_\alpha\}$是 R^n 中的一族有界闭集，若任取其中有限个 $F_1,\ldots,F_m$ 都有$\cap F_i(i=1,2,\ldots,m)$不空，则$\cap F_\alpha$不空。

【解】化归开覆盖：任取有限个 F_i 都有$\cup F_i^c$(开)不满。如果$\cap F_\alpha$空，则$\cup F_\alpha^c$满，从而对于任意 F_a(有界闭)$\subset\cup F_\alpha^c$，存在有限覆盖 $F_1^c,\ldots,F_m^c$ 使得 $F_a\subset\cup F_i^c(i=1,2,\ldots,m)$，从而 $F_a^c\supset\cap F_i$。约定 $F_a=F_{m+1}$，由 $F_{m+1}^c\cap F_{m+1}$ 空知$(\cap F_i)(i=1,2,\ldots,m)\cap F_{m+1}$ 空，即$\cap F_i(i=1,2,\ldots,m+1)$空，矛盾。

*完全集：$E=E'$，一定是闭集，基数必是连续基数 c。

*σ-代数：包括空集，且对取补、可数并、（可数交）封闭。

*Baire 纲集定理：无内点的闭集的并也无内点。（明确不考）

【例 1.10】求证：可数个稠密开集的交仍是稠密的。

【解】不妨设开集列为$\{E_k\}$，考虑$\{E_k^c\}$。这是无处稠密的闭集列，从而由 Baire 纲集定理，$\cup E_k^c$ 也无内点。从而$(\cup E_k^c)^c=\cap E_k$ 仍是稠密的。

*Cantor 集与类 Cantor 集：都是完全集，基数是 c；完全不连通/无内点（从而无处稠密）；在测度上有区别（下一章内容）。构造 Cantor 集时去掉的一系列开区间里仍可以构造 Cantor 集。

*闭包内部为空是无处稠密集，可数无处稠密集的并是第一纲集，否则是第二纲集。无处稠密集的补集一定是稠密集。稠密集的基数有可能小于无处稠密集的基数(Q、类 Cantor)。第一纲集没有内点，从而 A 与 A^c 至多只有一个第一纲集。

*连续实值函数列的极限函数的不连续点集是第一纲集（结论更强），从而连续点集是处处稠密的 G_δ 集。

【证】连续点集为 $\bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{|f_k(x)-f(x)|\le\frac{1}{m}\}^\circ$。记 $E_k(\varepsilon)=\{x:|f_k(x)-f(x)|\le\varepsilon\}$，$G_k(\varepsilon)=\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k^\circ(\varepsilon)$，$F_k(\varepsilon)=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\{x:|f_k(x)-f_{k+i}(x)|\le\varepsilon\}$。$F_k^\circ(\varepsilon)\subset E_k^\circ(\varepsilon)\subset G(\varepsilon)$，即 $\bigcup_{k=1}^{+\infty}F_k^\circ(\varepsilon)\subset G(\varepsilon)$。

又因为 $\bigcup_{k=1}^{+\infty}F_k(\varepsilon)=R^n$，由以上知 $G(\varepsilon)^c\subset\bigcup_{k=1}^{+\infty}F_k(\varepsilon)(=R^n)\setminus\bigcup_{k=1}^{+\infty}F_k^\circ(\varepsilon)\subset\bigcup_{k=1}^{+\infty}\partial F_k(\varepsilon)$ 第一纲。

且有推论连续函数列的极限函数连续点集必稠密。

【例 1.11】试证明不存在满足下列条件的函数：

1°f(x,y)在 R^2 上连续；2°两个偏导数处处存在；3°f(x,y)每一点都不可微。

【解】考虑偏导数的割线逼近。对于∀n∈N，$\frac{f(x+1/n,y)-f(x,y)}{1/n}$ 都连续，且极限函数为 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$。从而 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 的不连续点集是第一纲集，同理 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 的不连续点集也是第一纲集，两者的并也是第一纲集；从而两个偏导数都连续的点是稠密集，不可能在任一点上都不可微。

第二章 Lebesgue 测度

*外测度的一些性质：空集映 0，区间映长，单调非负，可数次可加，平移不变，数乘线性。

*若 $d(E_1,E_2)>0$，则 $m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$。

*Caratheodory 条件：我们称集合 E 可测，如果∀$T\subset R^n$，都有 $m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$。很多时候，我们只需证明 $m^*(T)+\varepsilon\ge m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$即可。

*可测集是一个σ-代数，对取补、可数交、可数并都封闭。零测集必可测。

*外测度限制在可测集上时对不相交的集合满足可数可加性。

*如果两个集合能被可测集分离，即若存在可测集 F，使得 $E_1\subset F$，$E_2\subset F^c$，则 $m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$。

【证】$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cup E_2\cap F)+m^*(E_1\cup E_2\cap F^c)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$。

【例 2.1】设$\{A_n\}$是互不相交的可测集列，$B_n\subset A_n$，证明 $m^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}m^*(B_n)$。

【解】$m^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n)=m^*(\bigcup_{n=1}^{k}B_n\cup\bigcup_{n=k+1}^{+\infty}B_n)=\sum_{n=1}^{k}m^*(B_n)+m^*(\bigcup_{n=k+1}^{+\infty}B_n)\ge\sum_{n=1}^{k}m^*(B_n)$，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty}m^*(B_n)\le m^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n))\le\sum_{n=1}^{+\infty}m^*(B_n)$，原命题成立。

【例 2.2】设 $X=\{E_\alpha\}$是由 R 中某些互不相交的正测集形成的集族，证明 X 是可数的。

【解】对于 $E\in\{E_\alpha\}$，其必在某个区间[n,n+1](n∈Z)上正测。我们考察在[n,n+1]上正测的集合，知这些集合是可数个的，从而可数个可数集的并也可数。

*集合列极限的运算：$\{E_k\}$【递增】或【递减且测度有限】，有 $\lim\limits_{k\to\infty} m(E_k)=m(\lim\limits_{k\to\infty} E_k)$；

对于任意集合列$\{E_k\}$，有 $m(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k)\le \underline{\lim}_{k\to\infty} m(E_k)\le \overline{\lim}_{k\to\infty} m(E_k)\le m(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k)$。

*对于可测集 A,B，有 $m(A)+m(B)=m(A\cup B)+m(A\cap B)$。

【证】$m(A)+m(B)=m(A\cap B)+m(A\backslash B)+m(A\cap B)+m(B\backslash A)=m(A\cap B)+m(A\cup B)$。

*Borel 集是可测集，但不是全部可测集。

*存在第二纲的零测集。

【证】记 $Q\cap[0,1]=\{r_n\}_{n=1,2,\ldots}$，$I_{n,k}=B(r_n,2^{-n-k})$，记 $E_k=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} I_{n,k}$，$E=\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} I_{n,k}$。易知 $m(E_k)\le 2^{-k+1}$，$m(E)=0$。容易证明 E 是第二纲集。

*等测包：对于任意集合 E，存在开集 $G_n\supset E$ 使得 $m(G_n)\le m^*(E)+1/n$。记 $G=\cap G_n$ $(n=1,2,\ldots)$，称 G 是 E 的等测包。G 是 G_δ集，且 $m(G)=m^*(E)$。对于可测集，有 $m^*(G\backslash E)=0$；对于不可测集，有 $m^*(G\backslash E)>0$；

【例 2.3】设 $E_1,E_2\subset R^n$，则 $m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$的充要条件是存在可测集 $M_1\supset E_1$，$M_2\supset E_2$ 使得 $m(M_1\cap M_2)=0$。

【解】充分性。作开集 $G\supset E_1\cup E_2$ 使得 $m(G)<m^*(E_1\cup E_2)+\varepsilon$。因为 $E_1\subset M_1\cap G$，$E_2\subset M_2\cap G$，从而 $m^*(E_1)+m^*(E_2)\le m(M_1\cap G)+m(M_2\cap G)=m((M_1\cap G)\cup(M_2\cap G))\le m(G)+m^*(E_1\cup E_2)+\varepsilon$，由ε的任意性知 $m^*(E_1)+m^*(E_2)=m^*(E_1\cup E_2)$。

必要性。作 E_1,E_2 的等测包 M_1,M_2，如果 $m(M_1\cap M_2)>0$，则 $m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)=m(M_1)+m(M_2)=m(M_1\cup M_2)+m(M_1\cap M_2)>m(M_1\cup M_2)\ge m^*(E_1\cup E_2)$，矛盾。

【例 2.4】设 $E_1,E_2\subset R^n$，$E_1\cup E_2$ 可测且 $m(E_1\cup E_2)<+\infty$。若有 $m(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$，证明 E_1 和 E_2 都是可测集。

【解】做 E_1,E_2 的等测包 H_1,H_2，则 $m(H_1\cup H_2)\ge m(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)=m(H_1)+m(H_2)$，从而 $m(H_1\cap H_2)=0$。因为 $H_1\backslash E_1\subset(H_1\cup H_2\backslash E_1\cup E_2)\cup(H_1\cup H_2)$，从而 $m^*(H_1\backslash E_1)=0$，$E_1=H_1\backslash(H_1\backslash E_1)$ 可测，同理 E_2 可测。

【例 2.5】设 $E\subset R^n$，可测集 $H\supset E$。若 $H\backslash E$ 中任一可测子集为零测集，证明 H 是 E 的等测包。

【解】作 E 的等测包 G，因为 $H\backslash G\subset H\backslash E$ 且 $H\backslash G$ 可测，从而 $H\backslash G$ 零测。从而 $m(H)=m^*(E)$，即 H 是 E 的等测包。

*等测核：对于可测集 E，存在闭集 $F_n\subset E$ 使得 $m(E)\le m(F_n)+1/n$。记 $F=\cup F_n(n=1,2,\ldots)$，称 F 是 E 的等测核。F 是 F_σ集，且 $m(F)=m(E)$。

【例 2.6】设 E 是 R 中的正测集。则对于任意 $a\in(0,m(E))$，存在有界闭集 $F\subset E$ 使得 $m(F)=a$。

【解】不妨设 $E\subset[-n,n]$。作$[-n,n]$中闭集 $K\subset E$ 使得 $m(K)>a$(等测核保证 K 的存在性)，考虑 $f(x)=m(K\cap[-n,x])$。显然 $f(x)$连续，且 $f(-n)=0$，$f(n)>a$。从而存在 x_0 使得 $f(x_0)=a$，此时取 $K\cap[-n,x_0]$ 即可。

*Borel-Cantelli 定理：$\Sigma_{k=1,2,\ldots} m(E_k)<\infty$，则 $m(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k)=m(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k)=0$。（考试重点）

*some simple tips:

1. 涉及到开闭转换时，可以取补进行同样操作，因为原集和补集可测性相同；且如果原开(闭)集难以构造，可以去补构造闭(开)集；

2. R 上的等价类 x~y if $d(x,y)\in Q$ 是常见的等价类；

3. 一个包括所有有理数的有限正测集是$\bigcup_{n=1}^{+\infty}B(r_1,\frac{1}{2^{n+1+k}})$ ($k\in N_+$)，其闭包的测度为$+\infty$，自身也可以从 $k=1,2,\dots,+\infty$取交；

4. 对于可测集 E，$m(E)=m(E+\{x_0\})$【虽显然，但真正写题不易察觉！】；

5. 对于正测集 E，可作紧集 $K\subset E$ 使得 $m(K)>m(E)-\varepsilon$；即对于 $0<t<m(E)$，存在紧集 $K\subset E$ 使得 $m(K)>t$【关键是有界！】；

6. 利用连续函数 $f(x)=m(E\cap[0,x]^n)$构造 $F\subset E$ 且 $m(F)<m(E)$；

7. 注意到 $x_1\pm x_2$ 时，要联想到 $X_1\pm X_2(x_1\in X_1,x_2\in X_2)$；

8. 无处稠密集有可能零测(Cantor 集)也有可能正测(类 Cantor 集)；稠密集有可能零测(Q)也有可能正测(R)；开集、闭集的边界都有可能正测(类 Cantor 集)。

【例 2.7】试在 R 中作由某些无理数构成的闭集 F，使得 $m(F)>0$。

【解】记有理数 $Q=\{r_n\}_{n=1,2,\dots}$，我们记 $A=\bigcup_{n=1}^{+\infty}B(r_n,\frac{1}{2^{n+1}})$，显然 A 是开集。令 $S=R\backslash A$ 为闭集，显然 $m(S)=+\infty$且由无理数构成。

【例 2.8】设$\{B_\alpha\}$是 R^n 中的一族开球，记 $G=\cup B_\alpha$。若有 $0<t<m(G)$，试证明存在有限个互不相交的开球 $B_1,\dots B_n$，使得$\Sigma_{i=1,\dots,n}m(B_i)>t/3^n$。

【解】作紧集 K 使得 $m(K)>t$，从而对于 K 存在一个有限子覆盖 $B_{i1},B_{i2},\dots,B_{ik}$。从这里面选择半径最大的球记为 B_1，半径放大三倍，从而一定覆盖了与 B_1 相交的所有球；再在$\{B_i\}$中选择与 B_1 不交的半径最大的球记为 B_2,半径放大三倍,从而一定覆盖了与 B_2 相交的所有球；以此类推，我们得到一个有限开球列 $3B_1,3B_2,\dots,3B_n$ 完全覆盖了 K，从而$\Sigma_{i=1,\dots,n}m(3B_i)\geq m(\cup_{i=1,\dots,n}3B_i)\geq m(K)=t$，从而$\Sigma_{i=1,\dots,n}m(B_i)>t/3^n$。

*设 E 是正测集，对于 $0<t<1$，存在矩体 I，使得 $t|I|<m(I\cap E)$。

【证】不妨设 $m(E)<+\infty$。对于 $0<\varepsilon<(1/t-1)m(E)$，存在开矩体覆盖 $I_k\supset E$，使得$\Sigma|I_k|<m(E)+\varepsilon$。采用反证法，若 $t|I_k|\geq m(I_k\cap E)$对于所有 k 成立，则 $t(m(E)+\varepsilon)>t\Sigma|I_k|\geq\Sigma m(I_k\cap E)\geq m(\cup(I_k\cap E))\geq m(I\cap E)=m(E)$，即$\varepsilon>(1/t-1)m(E)$，矛盾。

【例 2.9】设 $E\subset[0,1]$是可测集，且 $m(E)\geq t>0$，$x_i\in[0,1](i=1,2,\dots,n)$，其中 $n>2/t$。证明 E 中存在两个点其距离等于$\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$两点间的距离。

【解】考察集合 $E+\{x_i\}$，$i=1,2,\dots,n$。如果 $E+\{x_i\}$两两不交，则 $n*m(E)=m(\cup_{i=1,\dots,n}(E+\{x_i\}))\leq m([0,2])=2$，从而 $t\leq m(E)\leq 2/n$，即 $n\leq 2/t$，矛盾。

*Steinhaus 定理：设 $E\subset R^n$ 是正测集，则 0 是集合 $E-E(=\{x-y|x,y\in E\})$的内点。

【证】对于 $1-2^{-(n+1)}<t<1$，存在矩体 I 使得 $t|I|<m(I\cap E)$。设 I 中最短的边长为δ，我们去证明$(-\delta/2,\delta/2)\times\dots\times(-\delta/2,\delta/2)=B\subset E-E$。对于 $x_0\in B$, $I_k\in I$, $I_k+\{x_0\}$必然包含 I_k 的中心，从而 $m(I\cap(I+\{x_0\}))>2^{-n}|I|$，从而 $m((E\cap I)\cup(E\cap I+\{x_0\}))\leq m(I\cup(I+\{x_0\}))=m(I)+m(I+\{x_0\})-m(I\cap(I+x_0))<2m(I)-2^{-n}|I|=(2-2^{-n})|I|$。如果 $E\cap I$ 与 $E\cap I+\{x_0\}$不交，则 $m((E\cap I)\cup(E\cap I+\{x_0\}))=m(E\cap I)+m(E\cap I+\{x_0\})=2m(E\cap I)>2t|I|$，即 $2t<2-2^{-n}$，$t<1-2^{-(n+1)}$，矛盾。从而存在 $x,y\in E$ 使得 $x-y=x_0$，进而 0 是内点。

【例 2.10】设 $E\subset R$ 且 $m(E)>0$，证明存在 $x_1,x_2\in E$ 使得 $x_1-x_2\in Q$。

【解】注意到 0 是 E-E 的内点，后面显然。

【例 2.11】$E\subset R$ 是可测集，$a\in R$，$\delta>0$。若对满足$|x|<\delta$的一切 x 都有 $a+x\in E$ 或 $a-x\in E$，试证明 $m(E)\geq\delta$。

【解】考虑$(E+\{a\})\cup(E-\{a\})$。即$\forall|x|<\delta$, 都有 $x\in(E+\{a\})\cup(E-\{a\})$，即$(-\delta,\delta)\subset(E+\{a\})\cup(E-\{a\})$，$2m(E)=m((E+\{a\})\cup(E-\{a\}))>2\delta$，从而 $m(E)>\delta$。

*不可测集：在[0,1]上定义等价类 x~y if $x-y\in Q$。For each class，we choose one representative from it，then all representatives form a set. This set is unmeasured. 事实上，任何正测集都有不可测子集。

【证】记 A 为这个集合，$A_n=A+\{r_n\},r_n\in Q$。由于$\cup(A_n+\{r_n\})\supset[0,1]$，$m^*(A_n)=m^*(A)$对所有 n 成立，从而 $1=m^*([0,1])\le\Sigma_{n=1,2,\ldots}m^*(A_n+\{r_n\})=\Sigma_{+\infty}m^*(A)$，从而 $m^*(A)>0$。

另一方面，若 $m^*(A)>0$ 且 A 可测，则 0 是 A-A 的内点，从而存在有理数 $q\in A-A$，即存在 $x,y\in A$，$x-y=q$。这与集合 A 的选取方法矛盾。

【例 2.12】作出互不相交的点集列$\{E_k\}$，使得$m^*(\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k)<\sum_{k=1}^{+\infty}m^*(E_k)$。

【解】记 $Q|_{[0,1]}=\{r_n\}_{n=1,2,\ldots}$，上述不可测集为 W。则$\cup(W+\{r_n\})\subset[0,2]$，从而 $m^*(\cup(W+\{r_n\}))\le m([0,2])=2<\Sigma_{+\infty}m^*(W)$。

【例 2.13】设 W 不可测，E 可测，证明 E△W 不可测。

【解】反证法，充分利用可测集是一个σ-代数。如果 E△W 是可测集，则 E∩(E△W)可测，即 E\W 可测，从而 E\(E\W)=E∩W 可测，E△W\(E\W)=W\E 可测，所以 W=(W\E)∪(E∩W)可测，矛盾。

【例 2.14】一族可测集的交集必是可测集吗？

【解】不是。设 W 是 R 中不可测集，则 W^c 也是不可测集。则 $\bigcap_{a\in W}\{a\}^c=W^c$ 不可测。

*对集合部分性质的总结：（可数集、不可数集；稠密集、无处稠密集；第一纲集、第二纲集；零测集、正测集）

1. 可数集有可能是稠密集(Q)，也有可能是无处稠密集(单点集)；可数集一定是第一纲集(单点集的并)；可数集一定是零测集；
2. 不可数集有可能是稠密集，也有可能是无处稠密集(Cantor)；不可数集有可能是第一纲集(Cantor)，也有可能是第二纲集；不可数集有可能是零测集(Cantor)，也有可能是正测集；
3. 稠密集有可能是可数集，也有可能是不可数集；稠密集有可能是第一纲集(Q)，也有可能是第二纲集；稠密集有可能是零测集(Q)，也有可能是正测集；
4. 无处稠密集有可能是可数集，也有可能是不可数集(Cantor)；无处稠密集一定是第一纲集(定义)；无处稠密集有可能是零测集，也有可能是正测集(类 Cantor)；
5. 第一纲集有可能是可数集，也有可能是不可数集(Cantor)；第一纲集有可能是稠密集(Q)，也有可能是无处稠密集；第一纲集有可能是零测集，也有可能是正测集(类 Cantor)；
6. 第二纲集一定是不可数集；第二纲集有可能是稠密集，但一定不是无处稠密集；第二纲集有可能是零测集(较繁)，也有可能是正测集；
7. 零测集有可能是可数集(Q)，也有可能是不可数集(Cantor)；零测集有可能是稠密集(Q)，也有可能是无处稠密集；零测集有可能是第一纲集，也有可能是第二纲集；
8. 正测集一定是不可数集；正测集有可能是稠密集，也有可能是无处稠密集(类 Cantor)；正测集有可能是第一纲集(类 Cantor)，也有可能是第二纲集。

第三章 可测函数

*定义可测函数时，可以使用 Borel 集的任意一组生成基，要求其原象可测即可。比如要求$\{x:f(x)>t\}$;$\{x:f(x)\le t\}$;$\{x:f(x)<t\}$;$\{x:f(x)=+\infty\}$,$\{x:f(x)=-\infty\}$,$\{x:f(x)$开/闭$\}$;$\{x:f(x)=+\infty\}$,$\{x:f(x)=-\infty\}$,$\{x:a\le f(x)<b\}$可测均可。

*可测函数对于 Borel 集的原象是可测集。
*可测函数类：
1. 连续函数都可测；
2. 如果 f(x)有限值可测，g(x)连续，则 g(f(x))可测，但 f(g(x))不一定可测；
【证】考察 A={x:g(x)>t}。由于(t,+∞)开，g 连续，从而 A 开，是 Borel 集；从而{x:f(x)∈A}可测。
3. 如果 $f_n(x)$可测，那么 $\sup_{n\geq 1}\{f_n(x)\},\inf_{n\geq 1}\{f_n(x)\},\overline{\lim_{n\to+\infty}}f_n(x),\underline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x)$ 可测；
4. 如果 f(x)可测，那么 $f^k(x)$可测；如果 f(x),g(x)有限值可测，那么 f(x)+g(x),f(x)g(x)可测。
【例 3.1】证明：若$\{f_n(x)\}$是 $E\subset R^n$ 上的可测函数列，则 $f_n(x)$在 E 上收敛的点集是可测集。
【解】收敛点的结构为 $\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{m=n}^{+\infty}\{x:|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{1}{k}\}$，从而是可测集。
【例 3.2】证明：记 F 为(0,1)上的一个连续函数族，则函数 $g(x)=\sup\{f_F(x)\},h(x)=\inf\{f_F(x)\}$是(0,1)上的可测函数。
【解】$\{x:g(x)>t\}=\cup_F\{x:f_F(x)>t\}$是开集，从而可测。（请读者注意，条件中的连续是必要的）
*不同的收敛模式：
1. 几乎处处收敛(a.e.,almost everywhere)：
$\forall\varepsilon>0,m(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=0$；
2. 近一致收敛(a.u.,almost uniformly)：$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to+\infty}m(\bigcup_{k=n}^{+\infty}\{x:|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=0$；
3. 依测度收敛($f_k\xrightarrow{m}f$)：$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\to+\infty}m(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=0$。
*收敛模式的性质：
1. 近一致收敛⇒几乎处处收敛、依测度收敛；
2. 几乎处处收敛+m(E)<∞⇒近一致收敛(Egorov)⇒依测度收敛；(定理在后面)
3. 依测度收敛通常不能⇒几乎处处收敛或近一致收敛，但可以找到子列 f_{k_n} 是近一致收敛(∀n>0，∃k_n，s.t. $m(\{x:|f_t(x)-f(x)|>1/n\})<2^{-n}$，∀$t>k_n$)。
【注】依测度收敛的条件是弱的。考虑 $f_k=\chi_{[\frac{k-2^j}{2^j},\frac{k+1-2^j}{2^j}]}$，其中 $2^j\leq k<2^{j+1}$。容易看出 f_k 依概率收敛到 0，但 f_k 处处不收敛到 0，也不可能是近一致收敛。
【例 3.3】设在可测集 $E\subset R$ 上，$f_n(x)\to f(x)$a.e.，且 $f_n(x)\xrightarrow{m}g(x)$。求证：g(x)=f(x)a.e.x∈E。
【解】由于 $f_n(x)\xrightarrow{m}g(x)$，从而存在子列 $f_{k_n}(x)\to g(x)$a.e.，从而 f(x)=g(x)a.e.。
【例 3.4】设在可测集 $E\subset R$ 上 $f_n(x)\xrightarrow{m}0$，是否有 $\lim_{n\to+\infty}m(\{x\in E:|f_n(x)|>0\})=0$？
【解】不一定，取 $f_n(x)=1/n$ 即可。
【注】本例是深刻的。这表明“$\forall\varepsilon>0$”条件不能被替换成“$\varepsilon=0$”，这是因为随着 $\varepsilon\to0$，n 的位置可能越来越远，直至+∞。
【例 3.5】设$\{f_k(x)\}$在[a,b]上依测度收敛于 f(x)，g(x)∈C(R)，试证明 $g(f_k(x))$在[a,b]上依测度

收敛于 g(f(x))。若将[a,b]改为[0,+∞)，结论还成立吗？

【解】即去证明 $\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists N,\forall n>N$,m({x∈[a,b]:|g(f_n(x))-g(f(x))|≥ε})<δ。由于 g(x)在[a,b]上一致连续，从而 $\forall\varepsilon>0,\exists\theta,\forall|x_1-x_2|<\theta,|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$。因此{x∈[a,b]:|g($f_n$(x))-g(f(x))|≥ε}⊂{x∈[a,b]:|f_n(x)-f(x)|≥θ}。根据 f_n(x)的依概率收敛性知命题成立。

改为[0,+∞)后，结论不对。设 $f_n(x)$= x (x∈[0,n]) or x+1/x (x∈[n,+∞))，f(x)=x，g(x)=x^2，从而 f_n(x)依概率收敛到 f(x)，但 g(f_n(x))不依概率收敛到 g(f(x))。

*简单函数与阶梯函数：f(x)=$\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}(x)$，$E_k$ 是 R^n 中有紧支集的可测集。如果要求 E_k 是矩体，则称 f(x)为阶梯函数。

*可测函数的逼近：

1. f(x)非负可测，则存在简单函数 $e_n(x)\to f(x)$，其中 $e_n(x)$随 n 递增；
2. f(x)可测，则存在简单函数 $e_n(x)\to f(x)$，其中$|e_n(x)|$随 n 递增；
3. f(x)可测，则存在阶梯函数 $s_n(x)\to f(x)$ a.e.。

【注】简单函数、阶梯函数是联系 Riemann 可积与 Lebesgue 可积的桥梁。

*Egorov 定理：m(E)<∞，可测函数列 $f_k(x)\to f$ a.e.，那么∀ε>0，∃闭集 $F_\varepsilon\subset E$，使得 $m(E\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$，且 f_k 在 F_ε上一致收敛到 f。

【注】这里的 m(E)<∞是关键的。否则，有 $f_k=\chi_{[k,k+1]}$，$f_k\to0$，但 f_k 不依测度收敛到 0，更不是近一致收敛。

【例 3.6】设 f(x)是 R 上的实值可测函数，试问：是否存在 g∈C(R)，使得 m({x∈R: |f(x)-g(x)|>0})=0？

【解】不存在。设 f(x)=sgn(x)，g(x)无法完全拟合 x=0 处的函数值。

*Lusin 定理：m(E)<∞，f 在 E 上可测，那么∀ε>0，∃闭集 $F_\varepsilon\subset E$，使得 $m(E\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$，且 $f|_{F_\varepsilon}$在 F_ε上连续。

*Littlewood 三原则：

1. 可测集几乎是有限个方体的并；
2. 可测函数几乎是连续的；
3. 收敛可测函数几乎是一致收敛的。

*Some simple tips:

1. 利用前 2 章的知识解决部分点集的可数性、测度问题；
2. 几乎处处与处处并没有什么差别，可以等同看待；
3. 可以构造函数列的极限来证明可测性。

【例 3.7】设 f_n(x)是[0,1]上的递增函数，且{f_n(x)}在[0,1]上依测度收敛到 f(x)。试证明在 f(x)的连续点 x_0 上有 $f_n(x_0)\to f(x_0)$。

【解】x_0 为连续点，从而存在δ>0，∀x∈B(x_0,δ)，|f(x)-f(x_0)|<ε/18。从而存在 N，∀n≥N，m({x∈[0,1]:|f_n(x)-f(x)|>ε/9})<δ/2。从而存在 $x_1\in(x_0-\delta,x_0)$,$x_2\in(x_0,x_0+\delta)$，使得$|f_n(x_1)-f(x_1)|\le\varepsilon/9$，$|f_n(x_2)-f(x_2)|\le\varepsilon/9$。从而$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\le|f_n(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f_n(x_2)|<\varepsilon/3$。由于 f_n 单增，从而$|f_n(x_1)-f_n(x_0)|<\varepsilon/3$，$|f_n(x_0)-f(x_0)|\le|f_n(x_0)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon$，即 $f_n(x_0)\to f(x_0)$。

【例 3.8】设{f_n(x)}是[a,b]上的可测函数列，f(x)是[a,b]上的实值函数。如果 $\forall\varepsilon>0$，都有 $\lim_{n\to+\infty}m^*(\{x\in[a,b]:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})$=0，求证 f(x)在[a,b]上可测。

【解】对于 $\forall k\in N_+,\exists n_k,s.t.m^*(\{x\in[a,b]:|f_{n_k}(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\})<\frac{1}{2^k}$。

令$E_k=\{x\in[a,b]:|f_{n_k}(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\}$，并记$E=\overline{\lim_{k\to+\infty}}E_k$。

易知 m(E)=0，[a,b]\E=$\bigcup_{i=1}^{+\infty}\bigcap_{k=i}^{+\infty}\{x\in[a,b]:|f_{n_k}(x)-f(x)|\le\frac{1}{k}\}$)，即$f_{n_k}(x)\to f(x)a.e.$[a,b]，从而 f(x)在[a,b]上可测。

【例 3.9】设 f(x)在[a,b)上存在右导数，试证明右导函数 $f_+'(x)$是[a,b)上的可测函数。

【解】容易证明，f(x)不连续点集是可数集，即 f(x)几乎处处连续。

考虑$F_n(x)=\dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$，知 $F_n(x)$几乎处处连续且收敛于 $f_+'(x)$，从而 $f_+'(x)$可测。

第四章 Lebesgue 积分

*简单函数的 Lebesgue 积分：记$f=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$，定义$\int f=\sum_{i=1}^{n}a_i m(E_i)$。满足线性性、不交区域可叠加性、单调性、三角不等式。

*有限测度集上的有界可测函数的 Lebesgue 积分：$\int f=\lim_{k\to+\infty}\int\varphi_k$，$\varphi_k$是简单函数且$\varphi_k\to f$ a.e.。满足线性性、不交区域可叠加性、单调性、三角不等式。

*一般非负可测函数的 Lebesgue 积分：$\int f=\sup\{\int g\,|\,0\le g\le f\}$，g 是有限测度集上的有界可测函数。满足线性性、不交区域可叠加性、单调性、三角不等式。

*对于可测函数 f，我们称 f 可积当且仅当$\int|f|<+\infty$。集合 E 上所有 Lebesgue 可积函数组成的空间记作 $L^1(E)$。

*一般可测函数的 Lebesgue 积分：$\int f=\int f_+-\int f_-$。满足线性性、不交区域可叠加性、单调性、三角不等式。

【例 4.1】设$\{E_n\}\subset[0,1]$是可测集列，若$m(\overline{\lim_{n\to+\infty}}E_n)=0$，则对任给的ε>0，存在[0,1]的可测子集 A，使得 m([0,1]\A)<ε，且有$\sum_{n=1}^{+\infty}m(A\bigcap E_n)<+\infty$。

【解】存在零测集 Z，使得∀x∈[0,1]\Z，x 只属于有限多个 E_n，从而$\sum_{n=1}^{+\infty}\chi_{E_n}(x)$<+∞, a.e. x∈[0,1]。由于[0,1]测度有限，从而存在 A 使得 m([0,1]\A)<ε且$\sum_{n=1}^{+\infty}\chi_{E_n}(x)$≤M, ∀x∈A（一致收敛性）。从而$\sum_{n=1}^{+\infty}m(A\bigcap E_n)=\int_A\sum_{i=1}^{+\infty}\chi_{E_n}(x)<+\infty$。

*Riemann 可积⇔不连续点零测【利用振幅证明】；Riemann 可积⇒Lebesgue 可积且积分值相同【利用阶梯函数逼近证明】。

*有限测度一致有界收敛定理：有限测度集合 E 上的可测函数列 f_n 几乎处处一致有界，几乎处处收敛到 f，则 $\int |f_n - f| \to 0$。

*设 f 为非负可测函数且 $\int f=0$，则 f = 0 a.e.。

【证】若 f 不是几乎处处为 0，考虑集合 $E=\{x:f(x)>0\}$，并记 $E_n=\{x:f(x)\geq 1/n\}$。则 $E=\cup E_n$，且 $0<m(E)\leq\Sigma m(E_n)$，从而存在 N 使得 $m(E_N)>0$，从而 $\int f \geq m(E_N)/N$，矛盾。

*设 f 为可测且对于任意开集 A，成立 $\int_A f=0$。则 f = 0 a.e.。

*Fatou 引理：$f_n \geq 0$，则 $\int \varliminf_{n\to+\infty} f_n \leq \varliminf_{n\to+\infty} \int f_n$。

【例 4.2】$\{f_k(x)\},\{g_k(x)\}$ 是 $E\subset R^n$ 上的两个可测函数列，且有 $|f_k(x)|\leq g_k(x), x\in E$。若 $\lim f_k=f$，$\lim g_k=g$，$\lim \int g_k=\int g<+\infty$，试证明 $\int f_k=\int f$。

【解】对 g_k+f_k 和 g_k-f_k 利用 Fatou 引理立得。

【例 4.3】设 f(x) 是 $E\subset R^n$ 上的非负可测函数，若存在 $E_k\subset E$，$m(E\backslash E_k)<1/k$ 使得极限 $\lim\int_{E_k}f$ 存在，试证明 f(x) 在 E 上可积。

【解】设 $f_k(x)=f(x)\chi_{E_k}(x)$，从而 $f_k(x)$ 依测度收敛到 f(x)，进而存在子列 $f_{k,i}(x)\to f(x)$a.e.。根据 Fatou 引理，有 $\int_{\cup E_k}f=\int\lim f_{k,i}\leq\varliminf\int f_{k,i}=\varliminf\int_{E_{k,i}}f<+\infty$。由于 $E\backslash\cup E_k$ 是零测集，从而 f 在 E 上可积。

*Some simple tips:

1. 抽子列大法，尤见于依测度收敛中，其任意子列都有子列收敛【到同一极限】;
2. 用于非负函数列，构造 Fatou 引理，利用线性性与负数取下极限变成上极限；当题目出现 $|f|\leq g, f_n\to f$ 时，可以对 $g\pm f, 2g-|f-f_n|, |f|+|f_n|-|f-f_n|$ 使用 Fatou 引理；
3. 对函数积分可以表征一些几乎处处的性质，比如积分为 0→几乎处处为 0，可积→几乎处处不为+∞（对应函数项级数即积分收敛）；
4. 升维，化累次积分，测度变为示性函数积分，交换顺序（数学分析技巧）；
5. 证明可积函数性质时，很多时候只要找可积函数空间的稠密子集即可。

【例 4.4】设非负函数 $f(x)\in L(R)$，记 $F(x)=\int_{(-\infty,x]}f(t)dt$，如果 $F(x)\in L(R)$，则 $\int_R f=0$。

【解】$\forall\varepsilon>0$，$\exists n\in N^+$，使得 $\int_{\{x:|x|\geq n\}}F(x)<\varepsilon$。从而 $\forall y>n$，有 $F(y)\leq\int_{[y,y+1]}F(y)\leq\int_{\{x:|x|\geq n\}}F(x)<\varepsilon$，从而 $\lim F(x)=0$，即 $\int_R f=0$。

*依测度收敛型的 Fatou 引理：$f_n \geq 0$，且 $f_n \xrightarrow{m} f$，则 $\int f \leq \varliminf_{n\to+\infty} \int f_n$。

【证 1】考虑使 $\int f_n$ 收敛到下极限的 f_n 子列 $f_{n,k}$，知 $f_{n,k}$ 依测度收敛到 f。从而存在 $f_{n,k,i}\to f$ a.e.，从而 $\int f = \int \varliminf_{i\to+\infty} f_{n,k,i} \leq \varliminf_{i\to+\infty}\int f_{n,k,i} = \varliminf_{k\to+\infty}\int f_{n,k} = \varliminf_{n\to+\infty}\int f_n$。

【证 2】$\exists B\subset E$ 使得 $\int_E f \leq \int_B f+\varepsilon$，且 $m(B)<+\infty$；$\int_C |f|<\varepsilon$，$\forall C\ if\ m(C)<\delta$。

记 $D_n \triangleq \{|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{m(B)}\}$，从而 $\exists N, \forall n>N, m(D_n)<\delta$。存在如下估计：

$$\int_B f_n - f = \int_{B\backslash D_n} f_n - f + \int_{D_n} f_n - f \geq -\varepsilon - \int_{D_n} f > -2\varepsilon,$$

进而 $\int_E f_n \geq \int_B f_n \geq \int_B f - 2\varepsilon \geq \int_E f - 3\varepsilon$，取下极限立得结果。

*Beppo-Levi 定理：$f_n \geq 0 \uparrow_n \to f$，则 $\lim_{n\to+\infty}\int f_n = \int f$。级数形式 $\int \sum f_n = \sum \int f_n$。

【例 4.5】设 f∈L(R)，f_n∈L(R)，且有$\int_R|f_n-f|\leq 1/n^2$，证明：$f_n \to f$ a.e.。

【解】我们注意到 $\int \sum_{i=1}^{+\infty}|f_n - f| = \sum_{n=1}^{+\infty}\int |f_n - f| < +\infty$，从而 $\sum_{i=1}^{+\infty}|f_n - f|$ 几乎处处收敛。

【例 4.6】设非负函数 f(x)是 E 上的非负可测函数，且 $E_k\uparrow\to E$，则 $\lim\int_{E_k}f=\lim\int_E f$。
【解】考虑函数列 $f\chi_{E_k}$ 非负单调递增趋于 $f\chi_E$，从而利用 Beppo-Levi 定理，$\lim\int_{E_k}f=\lim\int_E f\chi_{E_k}=\int_E\lim f\chi_{E_k}=\int_E f$。
【例 4.7】设 f∈L^1(R)，a>0，试证明级数$\Sigma_{n=-\infty,\ldots,+\infty}f(x/a+n)$几乎处处绝对收敛。
【解】只需要证明和函数 Lebesgue 可积即可，而这由三角不等式和变量代换知其显然性。

*f 可积，则 1°$\forall\varepsilon>0,\exists$B,m(B)<+∞,且 $\int_{B^c}|f|<\varepsilon$；2°$\forall\varepsilon>0,\exists\delta,\forall m(B)<\delta$，有 $\int_B|f|<\varepsilon$。【可积函数大部分集中在有限区间；积分区间小，积分值也小】

*Lebesgue 控制收敛定理：$f_n\to f$ a.e.且∃g∈L^1s.t.$|f_n|\leq g$ a.e.，则 $\lim_{n\to+\infty}\int|f_n - f| = 0$。

对应级数：$|\sum f_n|\leq g$，则 $\int\sum f_n = \sum\int f_n$。

【例 4.8】设 $x^sf(x),x^tf(x)$在(0,+∞)上可积，其中 s<t，试证明积分$\int_{[0,+\infty)}x^uf(x)$,u∈(s,t)存在且关于 u 连续。
【解】$\int_{[0,+\infty)}|x^uf(x)|=\int_{[0,1]}|x^uf(x)|+\int_{[1,+\infty)}|x^uf(x)|\leq\int_{[0,1]}|x^sf(x)|+\int_{[1,+\infty)}|x^tf(x)|<+\infty$从而可积，连续性利用 Lebesgue 控制收敛定理将 lim 提进去即可。

【例 4.9】$f_n \xrightarrow{m} f$，且存在可积函数 F 使得$|f_n|\leq F$。证明：f 可积，且 $\lim\int f_n=\int f$。

【解 1】$\exists f_{n_i}\to f$ a.e.，从而根据 Lebesgue 控制收敛定理知 $\lim_{i\to+\infty}\int f_{n_i} = \int f$。由于 f_n 的任意子列都是依测度收敛的，从而任意子列都有子列使得积分极限顺序可交换。从而整体积分极限顺序可交换，即 $\lim\int f_n=\int\lim f_n=\int f$。(对$|f_n-f|$依测度收敛性讨论还可以证明 $\lim\int|f_n-f|=0$)
【解 2】对 $2F-|f_n - f|\xrightarrow{m}2F$ 使用 Fatou 引理，知 $2\int F\leq 2\int F - \overline{\lim_{n\to+\infty}}\int|f_n - f|$，从而有 $\lim\int|f_n-f|=0$，即原命题成立。

*定义可测集 E 上 Lebesgue 可积函数空间为 L^1(E)，定义范数$\|f\|=\int|f|$，则 L^1 是完备的赋范线性空间。如果$\|f_n - f\|\to 0$，则称 f_n 在 L_1 意义下收敛到 f，记为 $f_n\xrightarrow{L_1}f$。

【例 4.10】如果 f_n 几乎处处或者依测度收敛到 f，且$\|f_n\|\to\|f\|$，证明 $f_n\xrightarrow{L_1}f$。

【解】对$|f|+|f_n|-|f-f_n|$利用 Fatou 引理，知$2\int|f|\leq 2\int|f| - \overline{\lim_{n\to+\infty}}\int|f-f_n|$，从而知 $\lim\int|f_n-f|=0$，从而原命题成立。
*可积函数空间的稠密子集：简单函数、阶梯函数、有紧支集的连续函数、有紧

支集的光滑函数。
*积分在变换下的不变性：平移不变性、伸缩不变性、反射不变性。
*伸缩变换的连续性：(平移) $\lim\limits_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|=0$，(伸缩) $\lim\limits_{\delta\to 1}\|D_\delta f-f\|=0$。
*Fubini 定理：给定 $R^d=R^{d_1}\times R^{d_2}$ 上的可积函数 f(x,y)，则：1°对几乎所有的 x，作为 y 的函数 f(x,y)是 R^{d_2} 上的可积函数；2°可定义 x 的函数 $\int_{R^{d_2}} f(x,y)dy$ 是 R^{d_1} 上的可积函数，且 $\int_{R^d} f(x,y)=\int_{R^{d_1}}\left(\int_{R^{d_2}} f(x,y)\right)$。
*Tonelli 定理：给定 $R^d=R^{d_1}\times R^{d_2}$ 上的非负可测函数 f(x,y)，则：1°对几乎所有的 x，作为 y 的函数 f(x,y)在 R^{d_2} 上可测；2°可定义 x 的函数 $\int_{R^{d_2}} f(x,y)dy$ 是 R^{d_1} 上的可测函数，且 $\int_{R^d} f(x,y)=\int_{R^{d_1}}\left(\int_{R^{d_2}} f(x,y)\right)$。
*如果 E 为 R^d 上的可测集，定义 $E^X=\{y\in R^{d_2},(x,y)\in E\}$，那么对几乎所有的 x，$E^X$ 是 R^{d_2} 上的可测集，且 m(E)=$\int_{R^{d_1}} m(E^X)dx$。但逆命题不成立。

【例 4.11】设 f∈L(R^n)，对于 a>0，定义 $E_a=\{x:f(x)>a\}$。证明：$\int_{R^n} f=\int_0^{+\infty} m(E_a)da$。

【解】$\int_0^{+\infty} m(E_a)da=\int_0^{+\infty}\int_{R^n}\chi_{\{x:f(x)>a\}}(x)dxda=\int_{R^n}\int_0^{+\infty}\chi_{\{x:f(x)>a\}}(x)dadx=\int_{R^n} f(x)dx$。

【例 4.12】设 f∈L(R)，且 xf(x)在 R 上可积，令 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$。若有 $\int_R f(x)dx=0$，试证明 F∈L(R)。

【解】$\int_0^{+\infty}|xf(x)|dx=\int_0^{+\infty}|f(x)|\int_0^x dtdx=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f(x)|\chi_{[0,x]}(t)dtdx$ --交换次序--

$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f(x)|\chi_{[0,x]}(t)dxdt=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}|f(x)|\chi_{[0,x]}(t)dx=\int_0^{+\infty}dt\int_t^{+\infty}|f(x)|dx$

$\geq\int_0^{+\infty}dt\left|\int_t^{+\infty}f(x)dx\right|=\int_0^{+\infty}|F(t)|dt$，从而 F∈L([0,+∞))，同理 F∈L((-∞,0])，即 F∈L(R)。

【例 4.13】设 f(x)是 E⊂R^n 上的非负实值函数，记 $G_f=\{(x,y)\in R^{n+1}|0\le y\le f(x)\}$，证明 f 可测的充要条件是 G_f 可测，且有 $m(G_f)=\int f$。
【解】必要性。f 可测，从而存在递增简单函数列 $g_k\to f$。易证 $\lim G_{g_k}\cup\{(x,f(x))\}=G_f$。由于{(x,f(x))}是零测集，从而 G_f 可测，且 $m(G_f)=\lim m(G_{g_k})=\lim\int g_k=\int\lim g_k=\int f$。
充分性。G_f 可测，从而对几乎所有的 y，f(x)≥y 可测。这表明 f 可测，且 $\int f=m(G_f)$。
*对于 $E_1\subset R^{d_1},E_2\subset R^{d_2},E=E_1\times E_2\subset R^d$，成立：1°如果 E_1,E_2 可测，则 E 可测，且 $m(E)=m(E_1)m(E_2)$；2°如果 E 可测，则 E_1,E_2 均可测并且 $m(E)=m(E_1)m(E_2)$或 E_1,E_2 有一个零测集，此时 E 也是零测集；3°f(x)是 R^{d_1} 上的可测函数，则 g(x,y)=f(x)作为 R^d 上的函数可测。
*可测集在线性变换下测度的变化：L:$R^d\to R^d$ 是线性变换，且 det L≠0，则对于可测集 E，有 m(L(E))=|det L|m(E)；从而对于可积函数 f，若 L 非退化，有$\int f(L(x))=|\det L|^{-1}\int f$。
*卷积：定义 $f*g=\int f(x-y)g(y)dy$，且 $\int_{R^{2d}}|f(x-y)|\cdot|g(y)|dxdy=\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$，

从而$\|f*g\|_{L^1}\le\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$。如果 f 和 g 都是非负函数，则等号成立。卷积还满足交换律、结合律、分配律。

---期中考试部分---
---期末考试部分---

第五章 微分与不定积分

*Lebesgue 微分定理：$f\in L^1(R^d)$，则 $\lim\limits_{x_0\in B,m(B)\to0}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(x)-f(x_0)|dx=0$ a.e.。满足等式的点 x_0 称为 f(x)的 Lebesgue 点。

*Hardy-Littlewood 极大函数：如果 $f\in L^1(R^d)$，定义 $Mf(x)=\sup\limits_{x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B|f|$。满足 1°Mf 可测；2°$|f|\le Mf<+\infty$ a.e.；3°存在常数 C 使得$\alpha\cdot m(\{x:Mf(x)>\alpha\})\le C\|f\|_{L^1},\forall\alpha$。

*对于可测集 E，称满足 $\lim\limits_{x\in B,m(B)\to0}\frac{m(E\cap B)}{m(B)}=1$的点为 E 的密度点。几乎所有 E 中的点都是 E 的密度点，几乎所有不在 E 中的点都不是 E 的密度点。（考虑$\chi_E(x)$的 Lebesgue 点）

【注】本结论具有非常强的几何性质。这表明对于 $x\in E$ a.e.，E 在 x 附近近乎稠密。

*联系卷积：$\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)}f=c_d^{-1}\varepsilon^{-d}\int_{B(0,\varepsilon)}f(x-y)dy=\int f(x-y)c_d^{-1}\varepsilon^{-d}\chi_{B(0,\varepsilon)}dy$。特别地，记$K_\varepsilon=c_d^{-1}\varepsilon^{-d}\chi_{B(0,\varepsilon)}$。由 Lebesgue 微分定理，$\lim_{\varepsilon\to0}(f*K_\varepsilon)(x)=f(x)$a.e.。

*上述（但不限于）与 f(x)作卷积的函数 $K_\varepsilon(x)$称为卷积核。如果$\int K_\varepsilon=1$ 且$|K_\varepsilon|\le A\min\{\varepsilon^{-d},\varepsilon|x|^{-d-1}\}$，则称 K_ε为恒同逼近。【希望推广上述卷积核的概念；希望卷积函数与原函数积分值相等；希望卷积核在近处有界且在远处衰减较快】

*如果 K_ε是恒同逼近，则 $\lim_{\varepsilon\to0}\|K_\varepsilon*f(x)-f(x)\|_{L^1}=0$，$\forall f(x)\in L^1(R^d)$。

【证】$\int|\int K_\varepsilon(y)[f(x-y)-f(x)]dy|dx\le\int|K_\varepsilon(y)|\|\tau_{-y}f(x)-f(x)\|_{L_x^1}dy$

$\le\int_{|y|<\delta}|K_\varepsilon(y)|\varepsilon_0dy+2\int_{|y|\ge\delta}|K_\varepsilon(y)|\|f\|_{L^1}dy\le\varepsilon_0Ac_d\varepsilon^{-d}\delta^d+2A\|f\|_{L^1}\varepsilon c_d\delta^{-1}$

$=C(\varepsilon_0\varepsilon^{-d}\delta^d+\varepsilon\delta^{-1})\xrightarrow{\varepsilon_0=\varepsilon^{d+1}\delta^{-d-1}}C\sqrt[d+1]{\varepsilon_0}\to0$。

*如果 K_ε是恒同逼近，则 $\lim_{\varepsilon\to0}(K_\varepsilon*f)(x)=f(x)$ a.e.，$\forall x$ 为 f(x)的 lebesgue 点。

【证】定义$\omega(r)=\frac{c_d}{m(B(0,r))}\int_{B(0,r)}|f(x-y)-f(x)|dy$，从而成立下述估计：

$\int|(\tau_{-y}f-f)K_\varepsilon(y)|dy\le A\int_{B(0,\varepsilon)}|\tau_{-y}f-f|\varepsilon^{-d}dy+A\int_{|y|\ge\varepsilon}|\tau_{-y}f-f|\cdot\varepsilon\cdot|y|^{-d-1}dy$

$$\le A\omega(\varepsilon)+A\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2^k\varepsilon\le|y|<2^{k+1}\varepsilon}|\tau_{-y}f-f|\frac{\varepsilon}{(2^k\varepsilon)^{d+1}}dy\le A\omega(\varepsilon)+A\sum_{k=0}^{+\infty}\omega(2^{k+1}\varepsilon)\frac{\varepsilon(2^{k+1}\varepsilon)^d}{(2^k\varepsilon)^{d+1}}$$

$=A\omega(\varepsilon)+A2^d\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\omega(2^{k+1}\varepsilon)}{2^k}$。$\lim\limits_{r\to 0}\omega(r)=0$ a.e.，从而 $A\omega(\varepsilon)+A2^d\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\omega(2^{k+1}\varepsilon)}{2^k}\to 0$。

【注】这种估计方法在调和分析中非常有效。

【例 5.1】设 K_ε 是恒同逼近，证明存在常数 c 使得对所有可积函数 f 有 $\sup_{\varepsilon>0}|(K_\varepsilon*f)(x)|\le cMf(x)$，$\forall x\in R^d$。

【解】$|\int f(x-y)K_\varepsilon(y)dy|\le\int_{|y|<\varepsilon}|f(x-y)K_\varepsilon(y)|dy+\int_{|y|\ge\varepsilon}|f(x-y)K_\varepsilon(y)|dy$

$$\le\int_{|y|<\varepsilon}|f(x-y)|\varepsilon^{-d}dy+\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2^k\varepsilon\le|y|<2^{k+1}\varepsilon}|f(x-y)|\cdot\varepsilon\cdot|y|^{-d-1}dy=c_d\frac{1}{m(B(x,\varepsilon))}\int_{B(x,\varepsilon)}f(y)dy$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2^k\varepsilon\le|y|<2^{k+1}\varepsilon}|f(x-y)|\cdot\varepsilon\cdot(2^k\varepsilon)^{-d-1}dy\le c_dMf(x)+\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{|y|<2^{k+1}\varepsilon}|f(x-y)|\cdot\varepsilon^{-d}\cdot 2^{-kd-k}dy$$

$$=c_dMf(x)+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{c_d}{m(B(x,2^{k+1}\varepsilon))}\int_{B(x,2^{k+1}\varepsilon)}|f(y)|(2^{k+1}\varepsilon)^d\varepsilon^{-d}2^{-kd-k}dy\le c_dMf(x)+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^dc_d}{2^k}Mf(x)$$

(级数收敛的一致性)$\le cMf(x)$。

*Dini 导数：$\Delta_hF=\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$，$D^+F(x)=\overline{\lim\limits_{h>0,h\to 0}}\Delta_hF$，$D^-F(x)=\overline{\lim\limits_{h<0,h\to 0}}\Delta_hF$，

$D_+F(x)=\underline{\lim\limits_{h>0,h\to 0}}\Delta_hF$，$D\_F(x)=\underline{\lim\limits_{h<0,h\to 0}}\Delta_hF$。

【例 5.2】F(x)∈C[a,b]，且∀x∈[a,b]，成立 $D^+F(x)\ge 0$。证明 F(x)单调递增。

【解】若 F(x)不单调增，从而存在 $x_1<x_2$ 且 $f(x_1)>f(x_2)$。考虑过两点$(x_1,(2f(x_1)+f(x_2))/3)$和$(x_2,(f(x_1)+2f(x_2))/3)$的直线 m 与 F(x)的最后一个交点。在这个交点上，必有 $D^+F(x)\le k_m$。

【例 5.3】F(x)∈C[a,b]，证明 Dini 导数 $D^+(F)(x)=\overline{\lim\limits_{h\to 0+0}}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ 是可测的。

【解】考虑 $F_n(x)=\sup\limits_{h\in(0,\frac{1}{n})}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$，从而 $D^+(F)(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)$。又因为 $F_n(x)$ 是一族连续函数的上确界函数，而连续函数的上确界函数有 $\{\sup f>t\}=\bigcup\limits_\alpha\{f_\alpha>t\}$ 是开集的并，从而仍是开集，从而其可测，因此可测函数的极限函数可测。

*R^n 中半径一致有界的球族 B_α，则存在互不相交的球列 B_n 使得 $\bigcup\limits_\alpha B_\alpha\subset\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}5B_n$。

*Riesz 日出引理：G 是 R 上的实值连续函数，定义 E={x:∃h>0,s.t.G(x+h)>G(x)}，则 E 为开集$=\cup_{k=1,2,\ldots,+\infty}(a_k,b_k)$。若$(a_k,b_k)$是有限区间，则 $G(a_k)=G(b_k)$。

【例 5.4】定义单边极大函数 $M_+f(x)=\sup\limits_{h>0}\dfrac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(y)|dy$，记 $E_\alpha^+=\{x:M_+f(x)>\alpha\}$，

证明：$m(E_\alpha^+)=\dfrac{1}{\alpha}\int_{E_\alpha^+}|f(y)|dy$。

【解】1°f(x)可积时：容易验证 $g(x)=\int_{-\infty}^{x}|f(t)|dt-\alpha x$ 是实值连续函数。对 g(x)使用 Riesz 日出引理，知在有限区间(a_i,b_i)上成立 $g(a_i)=g(b_i)$。由于 $x\in E_\alpha^+ \Leftrightarrow$ ∃h>0,s.t.G(x+h)>G(x)，从而在有限区间上成立题设。注意到 G(-∞)=+∞,G(+∞)=-∞，从而不可能会有无线区间。于是题设对小区间的可数并自然也成立。

2°f(x)不可积时：

case 1：存在有限区间[a,b]使得 $\int_a^b|f(x)|dx=+\infty$。从而 $(-\infty,a)\in E_\alpha^+$。将区间[a,b]二等分，必有区间积分值是+∞。不断二等分。如果某一次分割中函数在两个区间上的积分值都是+∞，则结论已证：不妨设为[c,d]和[d,e]，则 $(-\infty,d)\in E_\alpha^+$，从而等式右边为+∞。否则，由闭区间套定理，存在 $x_0\in\bigcap[a_i,b_i]$，这将导致|f(x)|在[a,b]\{x_0}上内闭可积。若|f(x)|在区间$[a,x_0]$上积分值是+∞，则 $(-\infty,x_0)\in E_\alpha^+$，结论已证；若|f(x)|在区间$[x_0,b]$上积分值是+∞，则$[x_0,x_0+\delta)$的积分值可以很大，比如说>α(b-a)，这也表明$(-\infty,x_0+\delta)\in E_\alpha^+$，从而等式右边是+∞。

case 2：f(x)在 R 上内闭可积。考虑充分大的$-x_0,y_0$使得$[x_0,y_0]\cap E_\alpha^+$不为空。类似地，可定义 $g(x)=\int_{x_0}^{x}|f(t)|dt-\alpha x$，在$[x_0,y_0]$使用 Riesz 日出引理，从而$[x_0,y_0]\cap E_\alpha^+=\cup(a_k,b_k)$，只是在端点处有 $G(a_k)\le G(b_k)$，其余区间都是等号。如果能找到一系列$\{x_n\}\to-\infty,\{y_n\}\to+\infty$使得都不是端点，那么结论已证；若不对，则∃$x_0$使得$(-\infty,x_0)$中或者是$E_\alpha^+$中的点，或者是$E_\alpha^+$的端点。但构成区间端点的个数只是可数个，从而 m(E_α^+)=+∞。应用日出引理得到的不等式$\int_{x_0}^{b_k}|f|\ge\alpha(b_k-x_0)$，$x_0=a_k$是区间端点，再对 k 求和知等式右边也为+∞。

*单调函数的 Lebesgue 微分定理：F(x)在[a,b]上单调递增，则 F'(x)几乎处处存在，且非负可积，满足$\int_a^b F'(x)dx\le F(b)-F(a)$。

【证】利用可数个间断点构造小跳跃函数 $j_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_n\\ \beta_n\triangleq F(x_n)-F(x_n-0), & x=x_n\\ \alpha_n\triangleq F(x_n+0)-F(x_n-0), & x>x_n\end{cases}$，

则 $J(x)\triangleq\sum_{n=1}^{+\infty}j_n(x)\le F(b)-F(a)$ 从而一致收敛。即 F(x)=J(x)+f(x)，其中跳跃函数 J(x)满足 J'(x)=0 a.e.，f '(x)∃a.e.且可积。由 Fatou 引理，$\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b\varliminf_{n\to+\infty}\dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}dx$ $\le\varliminf_{n\to+\infty}\int_a^b\dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}dx\le f(b)-f(a)$即得结论。

*Fubini 逐项微分定理：$\{f_n(x)\}$是[a,b]上的单增函数列，且$\Sigma f_n(x)$在[a,b]上收敛，则$(\Sigma f_n(x))'=\Sigma f_n'(x)$ a.e. $x\in[a,b]$。

*在[a,b]上的函数 F(x)，定义全变差$T_F([a,b])=\sup\limits_{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b}\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|$。如果 $T_F([a,b])<+\infty$，称 F 是有界变差函数。有界变差函数构成空间 BV([a,b])。

*曲线$\gamma(t)=(x(t),y(t))$可求长的充分必要条件是 x(t),y(t)都是有界变差函数。

*正变差：$P_F([a,b])=\sup\limits_{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b}\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))_+$，

负变差：$N_F([a,b])=\sup\limits_{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b}\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))_-$。

*$F(x)\in BV([a,b])$，则 $F(x)-F(a)=P_F([a,x])-N_F([a,x])$，$T_F([a,x])=P_F([a,x])+N_F([a,x])$。

*F(x)是有界变差函数当且仅当 F(x)是两个有界单调增函数的差，从而有界变差函数几乎处处可导，且导函数可积。

*有界变差函数（空间）的性质：

1. 是线性空间：$f,g\in BV([a,b])\Rightarrow af+bg\in BV([a,b])$；
2. 是代数，$f,g\in BV([a,b])\Rightarrow fg\in BV([a,b])$；
3. 是完备不可分的赋范空间，$\|F\|=\sup|F|+T_F([a,b])$；
4. 函数 $F\in BV([a,b])$当且仅当$\forall a<c<b$，$F\in BV([a,c]),F\in BV([c,b])$，且 BV([a,c]) +BV([c,b])=BV([a,b])，$T_F([a,c])+T_F([c,b])=T_F([a,b])$；
5. 函数 $F\in BV([a,b])$，则 $T_F([a,x])$几乎处处可微，且$(T_F([a,x]))'=|F'(x)|$ a.e.。

【证】考虑分划Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ 使得$|T_F([a,b])-T_F(\Delta)|<\varepsilon$。归纳性定义 g(x): g(a)=0，for $x\in[x_{i-1},x_i]$，$g(x)=g(x_{i-1})+F(x)-F(x_{i-1})$ if $F(x_i)-F(x_{i-1})>0$ otherwise $g(x)=g(x_{i-1})+F(x_{i-1})-F(x)$。我们有 $g(b)=T_F(\Delta)>T_F([a,b])-\varepsilon$。另外，注意到 $T_F([c,d])\geq|g(d)-g(c)|$知 $T_F([a,x])-g(x)$是单调递增函数。容易知道 $g'(x)=|F'(x)|$ a.e.。取$\varepsilon_n=2^{-n}$，从而$\Sigma_n(T_F([a,x])-g_n(x))$单调收敛，根据 Fubini 逐项微分定理和单调函数的 Lebesgue 微分定理，$\Sigma_n(T_F([a,x])'-g_n'(x))<+\infty$，从而 $g_n'(x)\to T_F([a,x])'$ a.e.，进而有$|F'(x)|=T_F([a,x])'$ a.e.。

*定义 F(x)为绝对连续函数，如果$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,s.t.$\forall$有限个两两不交区间$(a_k,b_k)$，$\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\delta$，成立$\sum_{k=1}^{N}|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$。绝对连续函数空间记作 AC([a,b])。

*绝对连续函数（空间）的性质：

1. 一致连续，从而连续；有界变差，且有 $T_F([a,b])=\int_a^b|F'(x)|dx$；
2. 将零测集映成零测集，因此将可测集映成可测集；
3. 是线性空间，是代数，是可分完备的赋范空间，$\|F\|=\sup|F|+\int|F'|$。

*Vitali 覆盖：称$\{B_\alpha$(闭球)$\}$为集合 E 的 Vitali 覆盖，如果$\forall x\in E,\delta>0,\exists B_\alpha$ s.t.$x\in B_\alpha$且$|B_\alpha|<\delta$。如果 $E\subset R^d$且 $m^*(E)<\infty$，则对$\forall$E 的 Vitali 覆盖 $B,\delta>0$，$\exists$B 中的有限个两两不交的球 $B_1,B_2,\ldots,B_n$ 使得 $m^*(E\backslash\cup B_i)<\delta$且$\Sigma m(B_i)\leq m^*(E)+\delta$。

*如果 $F\in AC([a,b])$且 F'=0 a.e.，则 $F\equiv$Const.。

*N-L 公式：如果 $F\in AC([a,b])$，则 F 几乎处处可微，且$\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$。

*分部积分：如果 F,G∈AC([a,b])，则 $\int_a^b F'G+\int_a^b FG'=F(b)G(b)-F(a)G(a)$。

【例 5.5】证明：F(x)满足$|F(t_1)-F(t_2)|\le M|t_1-t_2|$等价于 F(x)绝对连续且$|F'(x)|\le M$ a.e.。

【解】必要性是显然的。下面考虑充分性。

由估计$|F(t_1)-F(t_2)|\le T_F([t_1,t_2])=\int_{t_1}^{t_2}|F'(t)|dt\le M|t_1-t_2|$从而得证。

*如果 F(x)是[a,b]上的实值函数，对任意 E⊂[a,b]，如果 F(x)在 E 上可微且$|F'|_E\le M$，则 $m^*(F(E))\le Mm^*(E)$。

*F(x)在[a,b]上可导，且 F'(x)可积，则 F(x)绝对连续，且 $F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)dt$。

*Lebesgue 分解定理：[a,b]上的单调增函数 F 可分解为 $F=F_{AC}+F_C+J_F$，其中 F_{AC} 是绝对连续函数，F_C 是导数几乎处处为 0 的连续函数，J_F 是跳跃函数；且分解在相差常数意义下唯一。

*给定曲线γ(t)=(x(t),y(t)),a≤t≤b。如果 x(t),y(t)∈AC([a,b])，那么γ(t)可求长，并且 $L(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|dt=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$。

*积分的变量替换公式：φ:[a,b]→[c,d]是单调的绝对连续函数，则对于任意函数 $f(y)\in L^1[c,d]$，成立 $\int_c^d f(y)dy=\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$。

*高维情形：$\varphi:U\to R^d$ 是连续可微单射，$U\subset R^d$ 是开区域，$J_\varphi=|(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j})_{d\times d}|\ne 0$，则对于任意函数 $f(y)\in L^1(\varphi(U))$，成立 $\int_{\varphi(U)}f(y)dy=\int_U f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx$。（更一般的情形是$\varphi,\varphi^{-1}$ 是保可测性的且φ(U),U 测度有限）

*不同连续的概念：

1. 连续：∀x，∀ε>0，∃δ，s.t.|f(x)-f(y)|<ε，∀y 满足|y-x|<δ;
2. 一致连续：∀ε>0，∃δ，s.t.|f(x)-f(y)|<ε，∀|y-x|<δ;
3. Lipschitz 连续：|f(x)-f(y)|≤L|x-y|;
4. 绝对连续：∀ε>0，∃δ，s.t.∀$(a_i,b_i)_{i=1,\dots,N}$ 两两不交且$\Sigma|b_i-a_i|<\delta$，$\Sigma|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$;
5. C^α连续(α-Holder 连续,0<α<1)：$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|^\alpha$。

第六章 L^p 空间

*定义$\|f\|_{L^p}=\left(\int_E|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$，$L^p(E)=\{f:\|f\|_{L^p}<+\infty\}$；$\|f\|_{L^\infty}=\inf\{M:|f|\le M\ a.e.\}$，$L^\infty(E)=\{f:\|f\|_{L^\infty}<+\infty\}$。$L^p(E)$是线性空间。

*Holder 不等式：$f\in L^p(E),g\in L^{p'}(E),1\le p\le+\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，则$\|fg\|_{L^1}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$。

*插值不等式：0<q≤p≤s≤+∞，则∃θ∈[0,1]满足$\|f\|_{L^p}\le\|f\|_{L^q}^\theta\|f\|_{L^s}^{1-\theta},\frac{1}{p}=\frac{\theta}{q}+\frac{1-\theta}{s}$。

*Minkowski 不等式：1≤p≤+∞，则$\|f+g\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}$。

*一个 L^p 范数的刻画：$1\le p\le+\infty$，则 $\|f\|_{L^p}=\sup\limits_{\|g\|_{L^{p'}}=1}\{\|fg\|_{L^1}\}$。

*广义 Minkowski 不等式：$1\le p\le+\infty$，则 $\left\|\int f(x,y)dy\right\|_{L^p_x}\le\int\|f(x,y)\|_{L^p_x}dy$。

*Hardy 不等式：$1<p<+\infty$，$f(x)\in L^p(0,+\infty)$，定义 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，$x>0$，则 $F(x)\in L^p(0,+\infty)$，且 $\|F\|_{L^p}\le\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}$。

*Young 不等式：$f\in L^1(R^d)$，$g\in L^p(R^d)$，$1\le p\le+\infty$，则 $\|f*g\|_{L^p}\le\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$。

*Young 不等式推广：$1\le p,q,r\le+\infty$，$1+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$，则 $\|f*g\|_{L^q}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^r}$。

*恒同逼近推广：$\int K=1$，定义 $K_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-d}K(\varepsilon^{-1}x)$，则 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|K_\varepsilon*f-f\|_{L^p}=0$，$1\le p\le+\infty$。

*对于 $1\le p\le+\infty$，L^p 空间是完备($1\le p<+\infty$则可分)的 Banach 空间。

*取 $p=2$，考虑空间 $L^2(R)$，定义内积$(f,g)=\int fg$，诱导出范数 $\|f\|_{L^2}=\sqrt{(f,f)}$。

*范数的性质：1. Cauchy-Schwarz 不等式：$|(x,y)|\le\|x\|\ \|y\|$；2. 三角不等式：$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$；3. 平行四边形法则：$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$。

*Definition：Hilbert 空间是可分完备的内积空间。

*关于基的一些性质：如果$(f,g)=0$，则 $f\perp g$；$f\perp g\Leftrightarrow\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2$；如果$\{e_n\}$两两垂直，则称为正交系；如果$\|e_n\|=1$，则称为标准正交系；如果标准正交系$\{e_n\}$中有限线性组合构成的集合在 H 中稠密，则称$\{e_n\}$为标准正交基。

*给定$\{e_k\}$为 Hilbert 空间 H 上的标准正交系，则下列命题等价：1°$\{e_k\}$为 H 的一组标准正交基；2°$f\perp e_k\,(\forall k)\Rightarrow f=0$；3°$\forall f\in H$，$S_N(f)\to f$，$S_N(f)=\Sigma_{n=1,2,\dots,N}(f,e_n)e_n$；4°$\forall f\in H$，满足 Parseval 等式，即 $\|f\|^2=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|(f,e_n)|^2$。

*任何 Hilbert 空间都存在一组标准正交基。

*Riesz 表示定理：如果 T 为 Hilbert 空间上的连续线性泛函($T:H\to R, T(ax+by)=aT(x)+bT(y)$，$\exists C$ s.t.$|T(x)|\le C\|x\|$)，则$\exists x_0\in H$ s.t.$T(x)=(x,x_0),\forall x\in H$。