高等代数 I 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 9 月 19 日

目录

1 第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法 **2**

1.1 问题 2

1.2 解答 2

2 第 2 次习题课: 线性方程组的解, 集合 **3**

2.1 问题 3

2.2 解答 4

3 致谢 **5**

1　第 1 次习题课: 向量, Gauss-Jordan 消元法

1.1　问题

1. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4 &= 4 \\ x_2-x_3+x_4 &= -3 \\ x_1+3x_2-4x_4 &= 1 \\ -7x_2+3x_3+x_4 &= -3 \end{cases}$.

2. 设 $\alpha_1=(1,1,4),\alpha_2=(-2,1,5),\alpha_3=(a,2,10),\beta=(1,b,-1)$. 当 a,b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

3. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表出任何向量–如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

4. 某食品厂有四种原料 A,B,C,D. 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

5. (1) 求复矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX=0$ 在复数域上的解集合; (3) 求齐次方程组 $AX=0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1,y_2,y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX=(y_1,y_2,y_3)^T$ 有解?

6. 已知向量 α,β 不共线, 并看成是由原点出发的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$. 设 $u,v\in\mathbb{R}$ 且 $u+v=1$, 问向量 $\overrightarrow{OC}=u\alpha+v\beta$ 的终点 C 在什么位置, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的比值是多少, 何时比值为正数.

7. 求单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上的所有直线.

8. (1) 利用向量运算求空间中三角形重心的公式; (2) 四面体 $ABCD$ 每个顶点到对面三角形的重心作连线. 证明: 这四条线交于一点, 这一点称为四面体的重心; 且每条连线被重心分割为长度比为 3:1 的两条线段.

9. 求以下两个方程组的解, 并解释这两组解为何有较大差异? $\begin{cases} .835x+.667y=.168 \\ .333x+.266y=.067 \end{cases}$, $\begin{cases} .835x+.667y=.168 \\ .333x+.266y=.066 \end{cases}$.

10. 考虑带截距的线性回归 $y\sim x_1+\cdots+x_p$, 参考上一题, 你有什么想法和改进?

1.2　解答

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-=①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+=7*②]{③-=5*②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{④+=2*③}$
$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(-8,3,6,0).$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-=4*①]{②-=①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-=\frac{13}{3}*②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}$. 因此, 当 $a\neq-4$ 或 $a=-4,b=-\frac{13}{2}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

3. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow(k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_s=0)$.

4. 注意 A,B,C,D 的比例和为 1, 因此 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\8&6&3&2&5\\5&25&10&15&12\\15&5&20&10&15\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{②-=8*①\\③-=5*①\\④-=15*①}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&20&5&10&7\\0&-10&5&-5&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{③+=10*②\\④-=5*②}}$

$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&30&25&15\end{bmatrix}\xrightarrow{④+=\frac{2}{3}*③}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&0&-\frac{25}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, 因此解是 $(\frac{7}{25},\frac{16}{75},\frac{7}{15},\frac{1}{25})$.

5. (1) $\begin{bmatrix}1&-i&-1\\2&2&-2\\i&1+i&-i\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{②-=2*①\\③-=i*①}}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&i&0\end{bmatrix}\xrightarrow{③-=\frac{i}{2+2i}*②}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{②*=\frac{1}{2+2i}}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.
(2) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{R}\}$. (3) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{C}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1,\frac{y_2-2y_1}{2+2i},y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1=0$ 时才有解.

6. $\overrightarrow{AC}=(u-1)\alpha+v\beta,\overrightarrow{CB}=-u\alpha+(1-v)\beta,\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{1-u}{u}=\frac{v}{1-v}$, 因此 A,C,B 三点共线, 且当 $0<u,v<1$ 时比值为正数.

7. $(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases}x-z=k(1-y)\\x+z=\frac{1}{k}(1+y)\end{cases}$, 即是 $\begin{cases}x+ky-z=k\\kx-y+kz=1\end{cases}$. 特别地, 当 $y=\pm1$ 时, $z=\pm x$ 也是位于该曲面上的直线.

8. $A=(x_1,y_1,z_1),B=(x_2,y_2,z_2),C=(x_3,y_3,z_3)$, 设 BC,AC,AB 中点分别为 D,E,F, 设 $G=(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$
只需验证 $\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BG},\overrightarrow{CG}$ 分别与 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$ 共线即可. 第二问同理, 重心是取四个点的坐标平均.

9. 用 Gauss 消元法可求得解为 $(1,-1)$ 和 $(-666,834)$. 原因是系数矩阵比较奇异, 用现在的知识来说, 就是行简化阶梯型矩阵的对角元数值比较小.

10. 可以对回归系数做适当的惩罚, 如 L_2 正则 (Ridge); 回归变量中可能存在着强相关变量, 干扰回归结果.

2 第 2 次习题课: 线性方程组的解, 集合

2.1 问题

1. (1) 用向量表示平面 $x+2y+3z=1$; (2) 用向量表示直线 $\begin{cases}x+2y+3z=1\\3x+2y+z=-1\end{cases}$; (3) 求平面 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+l\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},k,l\in\mathbb{R}$ 的平面方程.

2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&4&1&0&8\\3&6&-1&0&7\\1&2&2&0&7\\2&4&1&1&9\end{bmatrix}$. (1) 解齐次方程组 $AX=0$; (2) 已知 $X=(1,1,2,3,0)^T$ 是方程组 $AX=\beta$ 的一个解, 写出 $AX=\beta$ 的所有解.

3. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a+b\sqrt{3},a,b\in\mathbb{Q}$ 的方式唯一.

4. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

5. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 且 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 又能线性表出 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$, 证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$.
6. 考虑 n 个城市之间的航班问题: 记 $H=(a_{ij})$ 为邻接矩阵, 这里 a_{ij} 表示从城市 i 到 j 的航班数. (1) 解释 H^k 的 (i,j) 元的含义; (2) 设 $H=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&3\\0&0&2&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$, 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?
7. 设 A 是有向图 G 的邻接矩阵, 证明 G 中的循环三角形的个数等于 $\mathrm{tr}(A^3)/3$.
8. 由集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集, 记为 $P(A)$. 设集合 A 非空, 证明 $\mathrm{card}(P(A))>\mathrm{card}(A)$.
9. X 为非空集合, 映射 $f:P(X)\to P(X)$ 满足 $f(A)\subset f(B),\forall A\subset B$. 那么存在 $T\subset X$ 使得 $f(T)=T$.
10. (1) 找到 $[0,1]$ 到 $[0,1]\times[0,1]$ 的双射; (2) 找到 $(0,1)$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射.
11. 罗素悖论: 某班的同学在习题课上作游戏. 每个学生可以给班里任意多同学发一次短信 (可包括自己). 记 X 是全体没有给自己发短信的同学构成的集合. 若某同学猜中 X 并给且只给 X 中的每个同学发了短信, 则该同学获胜. 问: 此游戏有无获胜者?
12. 学习使用 numpy 包, 并实现矩阵的基本运算.

2.2 解答

1. (1) 先求得一个点坐标 $(1,0,0)$, 再去求 $x+2y+3z=0$ 的一组基础解系:$(2,-1,0)$ 和 $(3,0,-1)$, 因此向量表示为 $(1,0,0)+k(2,-1,0)+l(3,0,-1),k,l\in\mathbb{R}$.
(2) 先求得一个点坐标 $(0,-1,1)$, 再去求方向向量 $(1,2,3)\times(3,2,1)=(-4,8,4)$, 因此向量表示为 $(0,-1,1)+t(-1,2,1),t\in\mathbb{R}$.
(3) 先求得一个点坐标 $(1,1,2)$, 再去求法向量 $(1,2,0)\times(2,0,1)=(2,-1,-4)$, 因此平面可表示为 $2x-y-4z=-7$.

2. (1) $$\begin{bmatrix}2&4&1&0&8\\3&6&-1&0&7\\1&2&2&0&7\\2&4&1&1&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{② -= \frac{3}{2}*①\\ ③ -= \frac{1}{2}*①\\ ④ -= ①}}\begin{bmatrix}2&4&1&0&8\\0&0&-\frac{5}{2}&0&-5\\0&0&\frac{3}{2}&0&3\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{① -= \frac{2}{3}*③\\ ② += \frac{5}{3}*③}}\begin{bmatrix}2&4&0&0&6\\0&0&0&0&0\\0&0&\frac{3}{2}&0&3\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_4=-x_5\\x_3=-2x_5\\x_1+2x_2=-3x_5\end{cases}\Rightarrow$$
$X=(-3n-2m,m,-2n,-n,n)^T,m,n\in\mathbb{R}$ 是自由变元.
(2) 解集是基础解系加上代表元, 即 $(1-3n-2m,1+m,2-2n,3-n,n)^T$.
3. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{a_1-a_2}{b_2-b_1}\in\mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, $\gcd(a,b)=1$, 那么 $a^2=3b^2\Rightarrow 3|a\Rightarrow 9|a^2\Rightarrow 3|b^2\Rightarrow 3|b$, 矛盾.
4. 类似可知 $Z(\sqrt{-5})=\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})\Rightarrow 9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5}|3\times 3$ 而 $2+\sqrt{-5}\not|3$, 因此不是素数.
5. $(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)A,(\gamma_1,\cdots,\gamma_t)=(\beta_1,\cdots,\beta_s)B\Rightarrow(\gamma_1,\cdots,\gamma_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)(AB)$, 因此可以线性表出.
6. (1) 从 $a_{ij}^2=\sum_s a_{is}a_{sj}$ 可以看出 H^k 的 (i,j) 元表示从 i 到 j 乘坐恰 k 次航班有多少种乘坐方式. (2) $1\to 3,1\to 4,2\to 1,2\to 5,3\to 2,3\to 4,4\to 1,5\to 2,5\to 3$, 分别有 $1,1,1,3,1,3,3,1,2$ 种航班选择; $2\to 4,4\to 2$ 都要倒 3 次, 是最多的.
7. 由上题知 A^3 的 (i,i) 元表示从 i 到 i 有几条恰走 3 次的路径, 三角形会在结点上算 3 次, 因此要除以 3.
8. 本题的关键是处理集合 A 包含无穷元素的情形. 假设存在一一映射 $f:A\mapsto P(A)$, 则考虑集合 $A=\{x:x\notin f(x)\}$. 此时若 $f^{-1}(A)\notin A$, 则根据定义 $f^{-1}(A)\in A$; 反之亦矛盾.
9. 我们的思路应当去找满足条件 $A\subset f(A)$ 的最大集合, 即令 $T=\{\cup_\alpha A_\alpha:A_\alpha\subset f(A_\alpha)\}$. 根据定义有 $T=\cup_\alpha A_\alpha\subset\cup_\alpha f(A_\alpha)=f(\cup_\alpha A_\alpha)=f(T)$, 再根据题给条件有 $f(T)\subset f(f(T))\Rightarrow f(T)\subset T$.

10. (1) 全部写成无限小数, 然后作映射 $0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots \to (0.a_1a_3a_5\cdots, 0.a_2a_4a_6\cdots)$; (2) $y=\tan(\pi x-\frac{\pi}{2})$.
11. 因此在 ZF 公理体系中, 我们不考虑包含自身作为元素的集合.
12. 从 pip install numpy 开始.

3 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 22 级本科生吕承融同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 秋高等代数 I 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.