

高等数学 A I 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2022 年 10 月 25 日

目录

1 第 1 次习题课: 函数, 序列极限	2
1.1 问题	2
1.2 解答	2
1.3 补充 (不要求掌握!)	3
2 第 2 次习题课: 序列极限, 函数极限	3
2.1 问题	3
2.2 解答	3
2.3 补充 (不要求掌握!)	4
3 第 3 次习题课: 闭区间上的连续函数	4
3.1 问题	4
3.2 解答	5
3.3 补充 (不要求掌握!)	6
4 第 4 次习题课: 导数, 高阶导数	6
4.1 问题	6
4.2 解答	7
4.3 补充 (不要求掌握!)	8
5 第 5 次习题课: 隐函数求导, 微分, 不定积分	8
5.1 问题	8
5.2 解答	9
5.3 补充 (不要求掌握!)	10
6 第 6 次习题课: 不定积分, 变上限积分, 定积分	10
6.1 问题	10
6.2 解答	10
6.3 补充 (不要求掌握!)	12
7 第 7 次习题课: 定积分及其应用	12
7.1 问题	12
7.2 解答	13
7.3 补充 (不要求掌握!)	14
8 致谢	15

1 第 1 次习题课: 函数, 序列极限

1.1 问题

1. $f(x) = |x \sin^3 x| e^{\cos x}$. 判断函数 $f(x)$ 的有界性、单调性和奇偶性.
2. 证明 $f(x) = x - [x]$ 是有界周期函数.
3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \cos x + \sin x & x > 0 \end{cases}$. 计算 $f(-x)$.
4. $f(x) = e^{x^2}$, $f \circ \phi = 1 - 3x$ 并且 $\phi(x) \geq 0$, 求解 $\phi(x)$ 及其定义域.
5. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{n^2 - n} = 4$.
6. 设 $q > 1, k \in \mathbb{N}_+$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$.
7. 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n}$.
8. 令 $x_1 > 0$ 并且 $x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$. 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
9. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$.
10. 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.
11. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \exists$.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty, \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0, a_n, b_n > 0$, 证明 $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} = 0$.
13. (Stolz) $0 < b_n \uparrow +\infty, a_n > 0$, 如果 $(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1}) \rightarrow L$, 则 $a_n/b_n \rightarrow L$.

1.2 解答

1. 注意到 $f(2k\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(2k\pi + \frac{\pi}{4})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rightarrow \infty$, 所以 $f(x)$ 无界. 又因为 $f(k\pi) \equiv 0$ 且对于 $x \neq k\pi$ 成立 $f(x) \neq 0$, 所以 $f(x)$ 不单调. 由定义知 $f(x)$ 是偶函数.
2. 容易看出 $f(x)$ 有周期 1 且 $|f(x)| \leq 1$ 对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立.
3. 代入验证即可. $f(-x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ \cos x - \sin x & x < 0 \end{cases}$.
4. $f(\phi) = e^{\phi^2} = 1 - 3x \Rightarrow \phi = \sqrt{\log(1 - 3x)}$. $\phi(x)$ 的定义域是 $\log(1 - 3x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.
5. $|\frac{4n^2}{n^2 - n} - 4| = \frac{4}{n-1}$. 所以当 $n \geq \frac{4}{\epsilon} + 1$ 时, $\frac{4n^2}{n^2 - n}$ 与 4 相差不超过 ϵ .
6. 注意到 $q^n = (1 + q - 1)^n \geq C_n^{k+1}(q - 1)^{k+1} = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \cdots + a_0$ 是 n^k 的高阶无穷大量.
7. 使用夹逼定理. $(*) \geq \frac{\sum_{i=1}^n i}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)^2} \rightarrow \frac{1}{2}$, $(*) \leq \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2 + n} = \frac{n(n+1)}{2(n^2 + n)} \rightarrow \frac{1}{2}$.
8. 在这类问题中, $\{x_n\}$ 一定会是单调有界的. 首先凑答案, 假设极限存在, 令递推公式两边 $n \rightarrow +\infty$, 我们有 $a = \frac{3(1+a)}{3+a} \Rightarrow a = \sqrt{3}$. 然后使用递推公式, 利用数学归纳法, 容易证明如果 $0 < x_1 < \sqrt{3}$ 则 $0 < x_n < x_{n+1} < \sqrt{3}$; 如果 $x_1 > \sqrt{3}$ 则 $x_n > x_{n+1} > \sqrt{3}$. 这意味着极限 $\lim x_n$ 存在.
9. $n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)} \Leftrightarrow n > (1 + 1/n)^n$ 对于 $n \geq 3$ 成立, 这意味着 $n^{1/n}$ 是单调递减的. 注意到我们作业中已经证明了对于任意 $\epsilon > 0$, 成立 $n^{1/n} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow n < (1 + \epsilon)^n$ 对于足够大的 n . 然后使用极限定义的 $N - \epsilon$ 语言.
10. $3 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2 \times 3^n} \rightarrow 3$.
11. 单调上升性显然. 由于 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$, 从而 $\sum_n \frac{1}{n^2} < \sum_n \frac{1}{(n-1)n}$, 有上界 2.
12. 使用截断. $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n/b_n| < \epsilon/2$. 从而 $\sum a_n / \sum b_n = \sum_{i=1}^N a_i / \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=N+1}^n a_i / \sum_{i=1}^n b_i := I_1 + I_2$. 当 n 足够大时, $I_1 < \epsilon/2$ (因为 $\sum b_n \rightarrow +\infty$); 而 $I_2 < \epsilon/2$ 对于所有的 $n \geq N$ 成立. 因此当 n 足够大时, 可以让 $I_1 + I_2 < \epsilon$.
13. 用定义. $\forall \epsilon > 0, \exists N$, 使得对于 $\forall n > N$, 成立 $(L - \epsilon)(b_n - b_{n-1}) \leq (a_n - a_{n-1}) \leq (L + \epsilon)(b_n - b_{n-1})$. 然后用累加 $\Rightarrow (L - \epsilon)(b_n - b_N) \leq a_n - a_N \leq (L + \epsilon)(b_n - b_N) \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} < L + \epsilon$. 然后估计误差 $|\frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} - \frac{a_n}{b_n}| = |\frac{(a_n - a_N)b_N}{(b_n - b_N)b_n} + \frac{a_N b_N}{(b_n - b_N)b_n} + \frac{a_N}{b_n - b_N}| \leq (L + \epsilon)\frac{b_N}{b_n} + \frac{a_N b_N}{(b_n - b_N)b_n} + \frac{a_N}{b_n - b_N} < \epsilon$ (这三项都是趋于 0 的, 所以你总可以找一个足够大的 n 使得上式成立).

1.3 补充 (不要求掌握!)

作为一个已经学习数学这么多年的北京大学练习生, 我相信你一定关心过下面这个问题: 可导函数和连续函数之间差多少? 事实上, 我们有以下定义和结论:

- (1) 开集: 我们称集合 $A \subset \mathbb{R}$ 是开的, 当且仅当 $\forall x \in A$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得 $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset A$.
- (2) 闭集: 我们称集合 $B \subset \mathbb{R}$ 是闭的, 当且仅当它的补集是开的.
- (3) 定义 $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$, 这里 f 是一个函数.
- (4) 你可以证明一个函数 f 是连续的当且仅当任意开集 $A \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(A)$ 是开集.
- (5) 内点: 我们称 $x \in A$ 是集合 A 的内点当且仅当 $\exists \delta_x > 0$, 使得 $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset A$.
- (6) 可数/可列: 我们称集合 A 是可数的当且仅当存在一个从 A 到自然数集 \mathbb{N} 的一一映射或者 $|A| < \infty$, 这里 $|A|$ 是集合 A 中元素的个数.
- (7) 极限点: 我们称 x 是集合 A 的极限点, 当且仅当存在一个序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ 使得 $x_i \rightarrow x$. 我们用记号 A' 来表示 A 所有极限点构成的集合.
- (8) 闭包: 我们称集合 $\bar{A} = A \cup A'$ 是集合 A 的闭包.
- (9) 那么, 对于所有 $[a, b]$ 上的连续函数, 至少存在一点可导的函数构成的集合是无处稠密的不可列并 (第一纲集). 这里, 无处稠密是指其闭包不存在内点的集合, 并且连续函数之间的度量定义为 $\rho_{[a,b]}(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f - g|$.
- (10) Baire 纲集定理: 闭集 B_n 无内点, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 也无内点. 由此容易知道第一纲集是没有内点的.

2 第 2 次习题课: 序列极限, 函数极限

2.1 问题

1. 证明 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1$.
2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.
3. 计算 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$.
4. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.
5. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}$.
6. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.
7. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.
8. 设数列 $a_n \rightarrow 0$ 并且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1}/a_n| = a$. 证明 $a \leq 1$.
9. 令 $a_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1)$, 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
10. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \exists$, 证明 $\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$.
11. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)^{1/n^2} = 1$.
12. $a_1 = b, a_2 = c, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$, 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
13. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1}\right)^{\frac{1}{x}}$. 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.
14. $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, 且 $|f(x)| \leq \sin x$. 证明 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.
15. 设 $\delta > 0$, 且 $f(x)$ 在区间内 $(-\delta, \delta)$ 有界. $\exists a > 1, b > 1$ 使得 $f(ax) = bf(x)$. 证明当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow 0$.
16. a_n 收敛到 a 当且仅当 a_n 的任意子列都收敛到 a .

2.2 解答

1. 注意到 $|\frac{1}{x-1} - 1| = |\frac{x-2}{x-1}|$, 取 $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\epsilon)$.
2. 注意到 $|x^2 \sin \frac{1}{x}| \leq |x^2| \rightarrow 0$, 取 $\delta = \sqrt{\epsilon}$.
3. $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \rightarrow 3x^2$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{1}{2}.$
5. $|\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}| = |2 \sin \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}| \leq |\sin \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}| \leq \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} \rightarrow 0.$
6. $\frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} \sim \frac{2 \times 2x \times x}{x^2} = 4.$
7. 这种形如 $(1+0)^\infty$ 的极限问题一定是去试图凑 e . 原式 $= [(1 + \frac{3}{x^2-2})^{\frac{x^2-2}{3}}]^{\frac{3}{x^2-2}} \rightarrow e^3.$
8. 如果 $a > 1$, 那么 $\exists N$ 使得 $\forall n > N, |a_{n+1}/a_n| > (1+a)/2$, 则 $|a_n| > |a_N|(\frac{1+a}{2})^{n-N} \Rightarrow |a_n| \rightarrow \infty.$
9. $\sum_{k=1}^n (\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} (\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}). (*) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \times \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4}. (*) \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \times \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{4}.$
10. $a_n/n = \sum a_n/n - \frac{n-1}{n} \sum a_{n-1}/(n-1) \rightarrow 0 - 1 \times 0 \rightarrow 0.$
11. 使用夹逼定理知 $1 \leq (n!)^{1/n^2} \leq n^{1/n} \rightarrow 1.$ (PLUS: Stirling: $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$).
12. $a_n - a_{n-1} = (-\frac{1}{2})(a_{n-1} - a_{n-2}) = (-\frac{1}{2})^2(a_{n-2} - a_{n-3}) = \cdots = (-\frac{1}{2})^{n-1}(a_1 - a_0)$, 从而 $a_n - a_0 = (a_1 - a_0)[1 + (-\frac{1}{2}) + \cdots + (-\frac{1}{2})^{n-1}] \rightarrow \frac{2}{3}(a_1 - a_0) \Rightarrow a_n \rightarrow \frac{1}{3}a_0 + \frac{2}{3}a_1.$
13. 我们已经证明了 $(a-1)^{1/x} \rightarrow 1, (1/x)^{1/x} \rightarrow 1$, 所以原极限值等于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^x - 1)^{1/x}$. 从而: 如果 $a > 1, \lim = a$; 如果 $0 < a < 1, \lim = 1$.
14. 注意到 $|f(x)/\sin x| \leq 1$. 令 $x \rightarrow 0$ 即可.
15. $x \in (-\delta, \delta), |f(x)| < M \Rightarrow x \in (-\delta/a, \delta/a), |f(x)| = \frac{1}{b}|f(ax)| \leq \frac{M}{b} \Rightarrow x \in (-\delta/a^n, \delta/a^n), |f(x)| \leq \frac{M}{b^n} \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ 当 $x \rightarrow 0$ 时.
16. \Rightarrow 是显然的. \Leftarrow . 反证法, 如果结论不对, 则 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall N, \exists n_k > N$ 使得 $|a_{n_k} - a| > \epsilon_0$. 取子列 $\{a_{n_k}\}$ 即可.

2.3 补充 (不要求掌握!)

闭区间套定理: $a_n \uparrow, b_n \downarrow, 0 < b_n - a_n \rightarrow 0$, 那么 \exists 唯一的一个点 $x \in \cap_n [a_n, b_n]$.

证明: 令 $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ 即可.

有限覆盖定理: $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族开集 (可能不可数). 如果 $[a, b] \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, 则 $\exists I_1, \cdots, I_m \in \{I_\lambda\}$ 使得 $[a, b] \subset \cup_{i=1}^m I_i$.

证明. 如果结论不对, 即不存在可数子覆盖, 那么对于区间 $[a, (a+b)/2]$ 和 $[(a+b)/2, b]$, 至少有一个区间不存在有限子覆盖, 这样一直切半, 由闭区间套, 必然夹出一个点 x . 由于这是开覆盖, 因此存在开集 O_x 使得 $x \in O_x$. 从而由极限知这个开区间迟早会覆盖前面的从某项开始的闭区间列, 这与假设 (不存在有限覆盖) 矛盾.

聚点原理: $|a_n| < M$, 那么 $\exists \{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, 使得 $a_{n_k} \rightarrow a$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时. (有界序列必有收敛子列)

我们给出几种证明方法:

(1) 取 M 使得 $\forall n, |x_n| \leq M$, 取 $a_1 = -M, b_1 = M$. 对 $[a_n, b_n]$ 多次迭代, 每次找到 $\frac{a_n+b_n}{2}$, 这个点将当前区间划分为两个子区间. 两个子区间中必然至少有一个含有无穷项. 任取其中一个含有无穷项的区间作为 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. 由闭区间套定理, 最终 a_n, b_n 有相同的极限 x , 同时 x_n 中有无穷项与 x 任意接近. 选取 $x_{n_k} \in [a_i, b_i]$, 则 $x_{n_k} \rightarrow x$.

(2) 如果不存在这样的子列, 那么 $\forall x \in [a, b], \exists \delta > 0$ 使得 $|(x-\delta, x+\delta) \cap \{x_i\}_{i=1}^n| \leq 1$. 这样构造出的开区间集合覆盖了 $[a, b]$, 由有限覆盖定理, 必然存在有限个开区间覆盖整个区间. 而由假设, 对于取出的每个开区间中至多只有原序列中的一个点, 由于开区间的数量为有限个, 可以得出原序列长度也是有限的, 这显然不成立.

柯西收敛: $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \epsilon$. 这与之前的极限定义是等价的, 但优点是不需要提前知道“无理数”.

证明. \Rightarrow : 取 $\epsilon = 1$ 以及满足条件的 N , 那么 $1 + \max_{i=1,2,\dots,N} |x_i|$ 给出了整个序列 $\{x_n\}$ 的界. 取它的一个收敛子列 x_{n_k} , 并记这个极限为 x . 从而 $|x_n - x| \leq |x_{n_k} - x| + |x_n - x_{n_k}| \rightarrow 0$. \Leftarrow : $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \rightarrow 0$.

3 第3次习题课: 闭区间上的连续函数

3.1 问题

1. 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.
2. $\{x_n\}$ 收敛且 $\{y_n\}$ 收敛, 证明 $\{x_n + y_n\}$ 收敛. $\{x_n\}$ 且 $\{y_n\}$ 发散, 是否有 $\{x_n + y_n\}$ 或者 $\{x_n y_n\}$ 一定发散? 如果 $\{x_n y_n\}$ 是无穷小量, 是否有 $\{x_n\}$ 或者 $\{y_n\}$ 一定是无穷小?
3. 求极限. $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$.
- 4 (不要求掌握). $0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} \exists$. (这个引理在大偏差理论中很有用).

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_{n+1-i}}{\sum_{i=1}^n p_i} = a$. 其中 $p_k > 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i} = 0$.
6. 求极限. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$.
7. 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \exists \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) \exists$, 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \exists \not\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$.
8. 举例说明存在 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上处处不连续, 但 $|f(x)|$ 处处连续.
9. $a_1, a_2, \dots, a_p > 0$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\frac{\sum_{i=1}^p a_i^x}{p})^{\frac{1}{x}}$.
10. 求极限. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x \log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x}$.
- 11 (不要求掌握). 举例说明存在一个函数处处不连续, 其定义域是 $[0, 1]$ 但是值域为区间.
12. $f(x) \in C[a, b]$, $|f(x)|$ 单调. 证明 $f(x)$ 单调.
- 13 (不要求掌握). $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. $0 < k < 1$. 证明 $kx - f(x)$ 单调上升并且 $\exists c, f(c) = c$.
14. $f(x) \in C[a, b]$, $\forall x, \exists y$, 使得 $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明 $\exists \xi$, 使得 $f(\xi) = 0$.
- 15 (不要求掌握). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有第一类间断点, 证明 $f(x)$ 有界.
16. 设 $f(x) \in C[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$. 证明 $\forall n = 1, 2, \dots, \exists \{\xi_i\}_{i=1}^n \subset [a, b], \xi_i \neq \xi_j$ 使得 $\sum_{i=1}^n e^{f(\xi_i)} = n$.
17. 非负函数 $f \in C[0, 1], f(0) = f(1) = 0$. 证明 $\forall a \in (0, 1), \exists x_0 \in [0, 1]$ 使得 $x_0 + a \in [0, 1]$ 且 $f(x_0) = f(x_0 + a)$. 如果去掉非负条件还对吗?
18. $f_n(x) = x^n + x$. (1) 证明: $\forall n, f_n(x) = 1$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 中有且仅有一个根 c_n ; (2) 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.
19. 不等于常数的连续周期函数一定有最小正周期. 如果把连续性去掉结论如何?
- 20 (不要求掌握). f 在 $[a, b]$ 内处处有极限. 证明: (1) $\forall \epsilon > 0$, 在 $[a, b]$ 中使得 $|\lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x)| > \epsilon$ 的点至多有有限个. (2) $f(x)$ 至多有可列个间断点.

3.2 解答

1. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (使用不等式 $\frac{i}{i+1} < \frac{i+1}{i+2}$), 那么 $x_n^2 < \frac{1}{2n+1}$, 这意味着 $x_n \rightarrow 0$.
2. 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{x_n + y_n\}$ 都收敛, 那么 $\{x_n + y_n - x_n = y_n\}$ 也会收敛. 构造 $x_n = (-1)^{n-1}, y_n = (-1)^n$, 那么 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 发散但是 $\{x_n + y_n\}, \{x_n y_n\}$ 都收敛. 再构造 $x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}, x_{2n} = 1, y_{2n-1} = 1, y_{2n} = \frac{1}{2n}$. $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都不是无穷小量但是 $\{x_n y_n\}$ 是无穷小量.
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$.
4. 考虑 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 的下确界 α . 那么 $\exists n$ 使得 $x_n/n < a + \epsilon$. 设 $\max_{i=1,2,\dots,n} x_i = M$. 那么 $\frac{x_m}{m} \leq \frac{x_n}{m} + \frac{x_m - x_n}{n} \leq \frac{2x_n}{m} + \frac{x_m - 2n}{m}$ (假设 $m = kn + b$) $\leq \dots \leq \frac{kx_n}{m} + \frac{xb}{m} \leq \frac{kx_n}{kn+b} + \frac{M}{m} \leq \frac{x_n}{n} + \frac{M}{m}$. 选择足够大的 m 使得 $\frac{M}{m} < \epsilon$. 从而 $a \leq \frac{x_m}{m} < a + 2\epsilon$.
5. WLOG 令 $a = 0$. 设 $\sup_n \{a_n\} = M$. $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, \forall n \geq N_1$, 使得 $|a_n| < \epsilon$; $\exists N_2, \forall n \geq N_2$, 使得 $p_n / \sum_{i=1}^n p_i < \epsilon / N_1$. 令 $n > N_1 + N_2$, 则 $|\sum_{i=1}^n a_i p_{n+1-i} / \sum_{i=1}^n p_i| \leq |\sum_{i=1}^{n-N_1} p_i a_{n+1-i} / \sum_{i=1}^n p_i| + |\sum_{i=n-N_1+1}^n p_i a_{n+1-i} / \sum_{i=1}^n p_i| < \epsilon + \frac{\epsilon}{N_1} \times N_1 \times M = (M+1)\epsilon$.
6. $(e^{ax} - e^{bx})/x = a \cdot \frac{e^{ax}-1}{ax} + b \cdot \frac{1-e^{bx}}{b} \rightarrow a - b, \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1/x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3+1}}}} \rightarrow \frac{1}{2}$
- $(\sin 1/x + \cos 1/x)^x = [(1 + \cos 1/x + \sin 1/x - 1)^{\frac{1}{\cos 1/x + \sin 1/x - 1}}]^{x \cos 1/x + \sin 1/x - 1} = (1/x = t) = e^{(\cos t + \sin t - 1)/t} = e^1$.
7. $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow x^3 \rightarrow 0$, 但是 $x^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0 + 0$.
8. $f(x) = 1_{\mathbb{Q}} - 1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.
9. $(\frac{\sum_{i=1}^p a_i^x}{p})^{1/x} = [1 + \frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{p}]^{1/x} = \{[1 + \frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{p}]^{\frac{p}{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}}\}^{\frac{\sum_{i=1}^p (a_i^x - 1)}{px}} \rightarrow e^{\frac{\sum_{i=1}^p \log a_i}{p}} = (a_1 a_2 \dots a_p)^{1/p}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x \log(1+3x)}{(1-\cos 2\sqrt{x})^2} \sim \frac{x \cdot 3x}{(2x)^2} = \frac{3}{4}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x} = \frac{(2/3)^x - 1}{1 - (4/3)^x} \sim \frac{x \log(2/3)}{-x \log(4/3)} = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 4 - \log 3}$.
11. $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x + \frac{1}{2} & x \in [0, \frac{1}{2}] \& x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1] \& x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
12. 不妨设 $|f(x)|$ 单调递增. 只需注意到如果 $f(x_0) = 0$, 那么对于所有的 $x \in [a, x_0], f(x) = 0$.

13. 第一问是定义, 第二问用柯西收敛准则, 重复利用已知不等式来证明 $x, f(x), f(f(x)), \dots$ 是柯西列.
14. 如果不存在 ξ 使得 $f(\xi) = 0$. 那么 $f(x)$ 始终保号, 不妨设 $f(x) > 0$. 设 $x_0 = \arg \min f(x)$. 这样就不存在 y 使得 $|f(y)| \leq \frac{1}{2}f(x)$, 矛盾.
15. 第一类间断点 \Rightarrow 每一点都有一个邻域有界 \Rightarrow 所有邻域构成开覆盖, 必有有限子覆盖, 有限个有界总能找到最大界.
16. $\exists \eta > 0$, 使得 $f([a, b]) \supset [-\eta, \eta]$, 这意味着 $e^{f([a, b])} \supset [e^{-\eta}, e^{\eta}] \supset [1 - \epsilon, 1 + \epsilon] (\exists \text{ 一个足够小的 } \epsilon > 0)$. 从而如果 n 是奇数, 选择 $e^{f(\xi_1)} = 1, e^{f(\xi_2)} = 1 - \epsilon/2, e^{f(\xi_3)} = 1 + \epsilon/2, e^{f(\xi_4)} = 1 - \epsilon/3, e^{f(\xi_5)} = 1 + \epsilon/3, \dots$; 如果 n 是偶数, 选择 $e^{f(\xi_1)} = 1 - \epsilon/2, e^{f(\xi_2)} = 1 + \epsilon/2, e^{f(\xi_3)} = 1 - \epsilon/3, e^{f(\xi_4)} = 1 + \epsilon/3, \dots$.
17. 令 $g(x) = f(x+a) - f(x)$. $g(0) \geq 0, g(1-a) \leq 0$, 用介值定理. 去掉非负条件不对, 比如说 $f(x) = \sin(2\pi x), a = 0.7$.
18. (1) 注意到 $f_n \uparrow \in [\frac{1}{2}, 1]$ 且 $f(\frac{1}{2}) < 1, f(1) > 1$, 使用介值定理. (2) 由于 $\forall \epsilon, \exists N$, 使得 $\forall n > N, (1 - \epsilon)^n + 1 - \epsilon < 1$. 由于 $f(1 - \epsilon) < 1 = f(c_n)$ 且 $f_n \uparrow \Rightarrow c_n > 1 - \epsilon$. 由极限定义知 $c_n \rightarrow 1$.
19. 反证法. 如果 $f(a) \neq f(b)$, 考虑正周期序列 $T_n \rightarrow 0$, 则由带余除法, $(b-a) \div T_n = S_n \cdots m_n$, 其中 $0 \leq m_n < T_n \rightarrow 0$. 所以 $a + S_n T_n \rightarrow b, f(a) = f(a + S_n T_n) \rightarrow f(b)$ (连续性) $\Rightarrow f(a) = f(b)$, 矛盾. 把连续性去掉则结论不对, 比如说 Dirichlet 函数.
20. (1) 如果集合有无穷多个元素那一定有聚点 (有界序列必有收敛子列). 从而 $x_n \rightarrow x$. 考虑 y_n 使得 $|y_n - x_n| < 1/n$, 且 $|f(y_n) - f(x_n)| > \epsilon$ (这是集合的定义, 函数极限差 $> \epsilon$ 那么必然存在一个比较近的点使得函数差 $> \epsilon$). 从而 $y_n \rightarrow x$, f 在 x 的极限何在? (极限存在当且仅当任意趋于其的数列极限均相等, 而这里 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$ 显然与 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ 不同). (2) 记 (1) 中集合为 A_ϵ . 注意到间断点集合可以写成 $\cup_n A_{1/n}$. 可列个有限元素集合的并元素一定是可列个的.

3.3 补充 (不要求掌握!)

有界性定理: $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 有界.

证明. 如果无界, 则选择 x_n 使得 $f(x_n) \rightarrow \infty$, 那么存在一个子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 收敛到某个 x (聚点原理). 由连续性知 $f(x) = \infty$, 矛盾.

最值定理: $f(x) \in C[a, b]$, 那么 $\arg \max f(x) \exists$.

证明. 找一个数列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n) \rightarrow \max f(x)$. 利用有界数列必有收敛子列和 $f(x)$ 的连续性.

介值定理: $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0, f(x) \in C[x_1, x_2], \exists x_0$ 使得 $f(x_0) = 0$.

证明. 使用 Lebesgue 方法. 令 $x_0 = \sup\{x : f(x) > 0\}$. 利用连续性知如果 $f(x_0) > 0$ 则 x_0 不是上界 (因为根据连续性会有 x_0 的一个邻域都满足 $f(x) > 0$), 如果 $f(x_0) < 0$ 则有更好的上确界 (同样根据连续性会有 x_0 的一个邻域满足 $f(x) < 0$).

4 第 4 次习题课: 导数, 高阶导数

4.1 问题

- $f(x) \in C(\mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. 证明 $\arg \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \exists$.
- 证明 $\cos x = \frac{1}{x}$ 有无穷多个正实数根.
- $f(x) \in C[a, b], x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. 证明 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$.
- $f(x) = |x|^{1/4} + |x|^{1/2} - \frac{1}{2} \cos x$. 问 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 中有多少个根?
- $f(x) \in C[0, 2], f(0) = f(2)$, 证明 $\exists x_1, x_2 \in [0, 2]$ 使得 $|x_1 - x_2| = 1$ 并且 $f(x_1) = f(x_2)$.
- $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n-1}}$. 讨论连续性.
- $f(x) \in C(\mathbb{R}), f(x+y) = f(x) + f(y)$. 求解 $f(x)$.
- $f(x)$ 连续, 问 $|f(x)|$ 连续否?
- $f(x) \in C[0, 1], 0 \leq f(x) \leq 1$, 证明 $\exists t \in [0, 1]$ 使得 $f(t) = t$.
- (不要求掌握). $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, $0 \leq f(x) \leq 1$, 证明 $\exists t \in [0, 1]$ 使得 $f(t) = t$.
- $f(x)$ 在 $x = 3$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2$. 求 $f'(3)$.
- $f(x)$ 在 x_0 处可导, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+x) - f(x_0-x)}{x}$.

13. 证明奇函数导数是偶函数, 偶函数导数是奇函数.
14. 求导数. $y = \sqrt[3]{2+3x^3}, y = \arcsin \frac{1}{x^2}, y = \log(\arctan 5x) + \log(1-x), y = e^{\sin^2 x} + \sqrt{\cos x} 2^{\sqrt{\cos x}}$.
15. $f(x) = x|x(x-2)|$, 求 $f'(x)$.
16. $f(x), x \in [-1, 1], x \leq f(x) \leq x^2 + x$, 证明 $f'(0) = 1$.
17. 求导数. $e^{xy} = 3x^2y, \arctan y/x = \log \sqrt{x^2 + y^2}$.
18. 求导数. $f(x)^{g(x)}, x^{x^x}$.
19. 求 $\frac{x^n}{1-x}, \sin^4 x + \cos^4 x$ 的 n 阶导数.
20. 求 $\arcsin^2 x$ 在 0 处的 n 阶导数.
21. 求极限. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x, \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1), \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}$.
22. $f([a, b]) \subset [a, b], |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$, 证明 $\forall x_1 \in [a, b]$, 都有 x_n 收敛.

4.2 解答

1. 由极限定义知 $\exists X > 0, \forall |x| > X, f(x) > f(0)$. 那么 $\arg \min_{x \in [-X, X]} f(x) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, 由最值定理知存在性.
2. 设 $f(x) = \cos x - 1/x$, 那么 $f(2k\pi) > 0, f(2k\pi + \frac{\pi}{2}) < 0$, 由介值定理立得.
3. 注意到 $\min f(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \max f(x)$. 使用介值定理.
4. 注意到 $f(x)$ 是偶函数. 由于 $\forall x > 1, f(x) > 0$, 且 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间上单调递增, 则 $f(0) < 0, f(1) > 0 \Rightarrow$ 有且仅有一个正实数根. 从而在 \mathbb{R} 上有两个根.
5. 令 $g(x) = f(x+1) - f(x)$. 那么 $g(0)g(1) \leq 0 \Rightarrow \exists x \in [0, 1]$ 使得 $g(x) = 0$.
6.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| > 1 \\ -x & 0 < |x| < 1 \end{cases}$$
7. 先证有理数点. $f(n) = f(1) + f(n-1) = 2f(1) + f(n-2) = \cdots = nf(1), f(1) = f(1/n) + f((n-1)/n) = 2f(2/n) + f((n-2)/n) = \cdots = nf(1/n) \Rightarrow f(m/n) = mf(1/n) = m/n \times f(1)$. 有理数点满足 $f(x) = xf(1)$, 无理数点用有理数逼近用连续性就可以了.
8. 注意到 $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$. 因此连续.
9. 令 $g(t) = f(t) - t, g(0) \geq 0, g(1) \leq 1$, 利用介值定理.
10. 使用 Lebesgue 方法. 令 $x_0 = \sup_x \{f(x) > x\}$, 往证 $f(x_0) = x_0$. 如果 $f(x_0) > x_0$, 那么 $\forall x_1, x_0 < x_1 < f(x_0)$, 都有 $f(x_1) \geq f(x_0) > x_1$. 这意味着 x_0 不是上界. 如果 $f(x_0) < x_0$, 那么 $\forall x_1, f(x_0) < x_1 < x_0$, 都有 $f(x_1) \leq f(x_0) < x_1$. 这意味着 x_0 不是上确界, 因为有更好的上界. 因此 $f(x_0) = x_0$.
11. 当 $x \rightarrow 3$ 时, $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)/(x-3) \times (x-3) \sim 2 \times (x-3) = 0$. 从而 $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 2$.
12. $\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x} = \frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x} + \frac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x} \rightarrow 2f'(x_0)$.
13. 奇函数导数是偶函数: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{-x \rightarrow -x_0} \frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)} = f'(-x_0)$. 同理偶函数导数是奇函数.
14. $y' = \frac{3x^2 \sqrt[3]{2+3x^3}}{2+3x^3}, y' = \frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}, y' = \frac{5}{\arctan 5x \times (1+25x^2)} + \frac{1}{x-1}, y' = e^{\sin^2 x} \sin 2x - \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} 2^{\sqrt{\cos x}} (1 + \sqrt{\cos x} \log 2)$.
15. 直接计算即可, 注意验证分段点左右导数是否相等.
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x & x < 0 \text{ or } x > 2 \\ 4x - 3x^2 & 0 \leq x < 2 \\ \varnothing & x = 2 \end{cases}$$
16. 注意到 $f(0) = 0$. 从而当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 \leftarrow \frac{x}{x} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \frac{x^2+x}{x} \rightarrow 1$.
17. 两边同时对 x 求导数, 计算可知 $y' = \frac{y(2-xy)}{x(xy-1)}, y' = \frac{x+y}{x-y}$.
18. 方法都是写成指数函数, $e^{g \log f}, e^{e^{\log x} \log x}$. 结果是 $f^g(g' \log f + \frac{f}{g} f'), x^{x^x}(x^x(1 + \log x) \log x + x^{x-1})$.
19. $\frac{x^n}{1-x} = \frac{x^n - x^{n-1} + x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots + x - 1 + 1}{1-x} = -(x^{n-1} + \cdots + x + 1) + \frac{1}{1-x}$, 因此 n 阶导数是 $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. 第二个用倍角公式写出来是 $1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x. y' = -\sin 4x$. 由课上已知关于三角函数高阶导数的结论, 知 $y^{(n)} = -4^{n-1} \sin(4x + \frac{n-1}{2}\pi)$.
20. $f'(x) = 2 \arcsin x / \sqrt{1-x^2}$, 从而 $(1-x^2)f'(x)^2 = 4f(x)$. 两边求导 $-2xf'(x)^2 + 2(1-x^2)f'(x)f''(x) = 4f'(x) \Rightarrow -xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2$. 两边求 $n-2$ 次导数, 并代入 $x=0$, 利用 Leibniz 公式知道 $f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$. 然后再把 $f'(0), f''(0)$ 算出来用递推就可以了.

21. (1) $\sqrt{x^2 + x + 1} - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2+1}} \rightarrow \frac{1}{2}$. (2) $n(\sqrt[n]{n} - 1) = n(e^{\log n/n} - 1) \sim n \log n/n^2 \rightarrow 0$.
 (3) $(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}} = [(1+2x)^{1/(2x)}]^{2(x+1)^2} \rightarrow e^2$.

22. 回忆: 这种题一定是单调数列. 容易验证数列是良定义的, 即不会跑出区间 $[a, b]$ 外. 如果 $x_n \geq x_{n-1}$, 有 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(f(x_n) + x_n)$ (利用 $f(x_n) - f(x_{n-1}) \geq x_{n-1} - x_n \geq \frac{1}{2}(f(x_{n-1}) + x_{n-1}) = x_n$). 从而如果 $x_2 \geq x_1$, 则这成为单调上升有界数列, 必收敛. 同理若 $x_{n-1} \geq x_n$ 也可以推出 $x_n \geq x_{n+1}$.

4.3 补充 (不要求掌握!)

参考 <https://wqgcx.github.io/courses/analysis1.pdf>.

5 第 5 次习题课: 隐函数求导, 微分, 不定积分

5.1 问题

- 求出闭区间 $[-1, 1]$ 上的一元函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$ 达到最小值的所有 $[-1, 1]$ 上的点.
- 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 其中 m 为正整数. 在 $x \neq 0$ 处, 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$. 求 m 满足的条件, 使得 $f(x)$ 有连续的二阶导函数.
- 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} + \frac{x}{2} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{\sin bx}{x} + cx & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导, 确定常数 a, b, c 的值 (需要用洛必达法则).
- $y = e^{-x^2}$, 求 $y^{(4)}|_{x=0}$.
- $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \arccos \frac{x}{a}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
- $y^2 \tan(x+y) - \sin(x-y) = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
- $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
- 求函数 $f(x) = x^{\arcsin x}$ ($0 < x < 1$) 的导函数 $f'(x)$.
- 求函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $x = 0$ 点的 3 阶导数 $f'''(0)$.
- 设 $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$, 求 $f^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}$.
- 求方程 $y^2 + 2 \log y = x^4$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的二阶导数.
- 判断下列结论是否正确.
 (1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) > 0$, 那么: (1.1) $f(x)$ 在 x_0 点一定连续. (1.2) $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内一定连续. (1.3) $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内一定单调上升.
 (2) $f(x)$ 在 x_0 点二阶可导, 那么: (2.1) $f(x)$ 在 x_0 点一定连续. (2.2) $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内一定连续.
- 设 $f(x) = e^{x(x-1)\cdots(x-2021)}$, 求 $f'(2021)$.
- 设 $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
- 设 $y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 并化简.
- 求积分. $\int \frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)} dx, \int \frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6} dx, \int \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx, \int \frac{3+5x}{\sqrt{4x^2-4x+5}} dx$.
- 设 $y = f(x) = x^3, x = g(t) = t^2, y = f(g(t)) = t^6, \Delta t = 0.1, \Delta x = g(1+0.1) - g(1) = 0.21$.
 (1) 当把 t 作为自变量时, 函数 $y = f(g(t))$ 的二阶微分记为 $d_t^2 y$, 函数 $x = g(t)$ 的一阶微分记为 $d_t x$. 计算出: 当 $t = 1, \Delta t = 0.1$ 时, 函数 $y = f(g(t))$ 的二阶微分 $d_t^2 y|_{t=1, \Delta t=0.1}$ 和函数 $x = g(t)$ 的一阶微分 $d_t x|_{t=1, \Delta t=0.1}$.
 (2) 当把 x 作为自变量时, 函数 $y = f(x)$ 的二阶微分记为 $d_x^2 y$, x (看作 x 的函数) 的一阶微分记为 $d_x x$. 计算出: 当 $x = 1, \Delta x = 0.21$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的二阶微分 $d_x^2 y|_{x=1, \Delta x=0.21}$ 和函数 x (看作 x 的函数) 的一阶微分 $d_x x|_{x=1, \Delta x=0.21}$.
 (3) $\frac{d_t^2 y}{(d_t x)^2}|_{t=1, \Delta t=0.1}$ 与 $\frac{d_x^2 y}{(d_x x)^2}|_{x=1, \Delta x=0.21}$ 相等吗?
- 求极限. $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x+\tan x}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cdots \cos \frac{a}{2^n} \ (a \in (0, 1)), \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^{x^2}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.
- 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 0$.

20. 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 如果极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(0)+f(1/n)+f(2/n)+\cdots+f(1)}{n} = M$, 其中 $M = \max_{x \in [0, 1]} f(x)$, 则 $f(x) \equiv M$.
- 21 (Riemann-Lebesgue 引理). $f \in R[a, b], g \in R[0, T], g(x+T) = g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$.

5.2 解答

- $f(1) = f(-1) = 1, f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2x}{3(x^2-1)^{2/3}} = \frac{2[(x^2-1)^{2/3}-x^{4/3}]}{3x^{1/3}(x^2-1)^{2/3}} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $-1 < x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 注意到 $f(0) = 1$. 从而达到最小值的点是 $-1, 0, 1$.
- $f'(x) = -x^{m-2} \cos \frac{1}{x} + mx^{m-1} \sin \frac{1}{x}, f''(x) = -x^{m-4} \sin \frac{1}{x} - (m-2)x^{m-3} \cos \frac{1}{x} - mx^{m-3} \cos \frac{1}{x} - m(m-1)x^{m-2} \sin \frac{1}{x}$. 要使得 $f''(0)$ 存在需要 $f'(0) \exists, f'(x) \rightarrow f'(0)$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} \exists \Rightarrow m \geq 4$, 二阶导函数连续性意味着 $f''(x) \rightarrow f''(0) \Rightarrow m \geq 5$.
- 连续性: $f(0+0) = a \Rightarrow a = 1, b = 1. f'_+(0) = 0, f'_-(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (需要用洛必达).
- $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}, y''' = -2x(4x^2-2)e^{-x^2} + 8xe^{-x^2}, y'''' = (-24x^2+12)e^{-x^2} + (16x^4-24x^2)e^{-x^2}$. 从而 $y''''(0) = 12$.
- $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
- 两边求导, $2yy' \tan(x+y) + \frac{y^2}{\cos^2(x+y)}(y'+1) + (y'-1) \cos(x-y) = 0 \Rightarrow y' = \frac{\cos^2(x+y) \cos(x-y) - y^2}{\cos^2(x+y) \cos(x-y) + y^2 + 2y \sin(x+y) \cos(x+y)}$.
- $y' = a^a x^{a^a-1} + a^{a+1} x^{a-1} \log a + a^{a+x} (\log a)^2$.
- $f(x) = e^{\arcsin x \log x}, f'(x) = x^{\arcsin x} (\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x})$.
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2-8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow f'''(0) = -2$.
- $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{4} (\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}})$.
- 两边求导, $2yy' + 2\frac{y}{y'} = 4x^3 \Rightarrow y^2 y' + y' = 2x^3 y$, 再求一次, $2y(y')^2 + y^2 y'' + y'' = 6x^2 y + 2x^3 y'$, 利用 $y' = \frac{2x^3 y}{y^2+1}$, 得到 $y'' = \frac{6x^2 y}{y^2+1} + \frac{4x^6 y}{(y^2+1)^2} - \frac{8x^6 y^3}{(y^2+1)^3}$.
- (1.1) 可导一定连续. (1.2)(1.3) 不一定, 比如说 $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x+x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. (2.1) (2.2) 都是对的.
- $f'(x) = e^{x(x-1)\cdots(x-2021)} [x(x-1)\cdots(x-2021)]'$, 从而 $f'(2021) = 2021!$.
- $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \operatorname{sgn}(t)$, 注意到 t, x 同号, 因此 $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sgn}(x)$.
- 直接计算, 小心化简. $y'(x) = \frac{1}{x^4+1}$.
- (1) $\frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{x}{(x^2+1)}$, 因此积分后是 $2 \log|x+1| + \log|x| + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$.
(2) $\frac{2x^2+x+5}{x^4-x^2-6} = \frac{11}{10\sqrt{3}} \frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{11}{10\sqrt{3}} \frac{1}{x+\sqrt{3}} - \frac{1}{5\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{x^2+2} + \frac{1}{5} \frac{x}{x^2-3} - \frac{1}{5} \frac{x}{x^2+2}$, 因此积分后是 $\frac{11}{10\sqrt{3}} \log|x-\sqrt{3}| - \frac{11}{10\sqrt{3}} \log|x+\sqrt{3}| - \frac{1}{5\sqrt{2}} \arctan(\frac{\sqrt{2}}{x}) + \frac{1}{10} \log|x^2-3| - \frac{1}{10} \log(x^2+2) + C$.
(3) $\frac{\cos^3 x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{d \tan x}{(\tan x + 1)(\tan^2 x + 1)^2}$, 后面用有理式展开积分. 结果是 $\frac{1}{4} \log|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin x \cos x + \frac{1}{4} \cos^x + C$. (注: 本题也可以用对偶积分, 考虑 $\int \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$).
- $\frac{3+5x}{\sqrt{(2x-1)^2+4}} = \frac{5(x-\frac{1}{2})}{2\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}} + \frac{11}{4\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}}$, 因此积分后是 $\frac{5}{2} \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1} + \frac{11}{4} \log|x-\frac{1}{2} + \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+1}| + C$.
- (1) $d_t^2 y|_{t=1, \Delta t=0.1} = 30t^4(\Delta t)^2|_{t=1, \Delta t=0.1} = 0.3, d_t x|_{t=1, \Delta t=0.1} = 2t\Delta t|_{t=1, \Delta t=0.1} = 0.2$.
(2) $d_x^2 y|_{x=1, \Delta x=0.21} = 6x(\Delta x)^2 = 0.2646, d_x x|_{x=1, \Delta x=0.21} = 1\Delta x|_{x=1, \Delta x=0.21} = 0.21$.
(3) $(d_t x)^2|_{t=1, \Delta t=0.1} = 0.2^2 = 0.04, (d_x x)^2|_{x=1, \Delta x=0.21} = 0.21^2 = 0.0441, \frac{d_t^2 y}{(d_t x)^2}|_{t=1, \Delta t=0.1} = \frac{0.3}{0.04} = 7.5 \neq 6 = \frac{0.2646}{0.0441} = \frac{d_x^2 y}{(d_x x)^2}|_{x=1, \Delta x=0.21}$, 因此不相等.
- (1) $x^x = e^{x \log x} \rightarrow e^0 = 1$.
(2) $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x, x + \tan x \sim 2x$, 因此极限值为 $\frac{1}{6}$.
(3) $\cos \frac{a}{2} \cdots \cos \frac{a}{2^n} \sin \frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n}$ (不断利用 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$), 因此极限值为 $\frac{\sin a}{a}$.
(4) $(1 + \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x})^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x} x(\sqrt{1+x^2}-x)}$, 由于 $x(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{1}{2}$, 因此原极限为 \sqrt{e} .
(5) $\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1) \sim \sqrt{n}(e^{(\log n)/n}-1) \sim \sqrt{n}(\log n)/n = \log n/\sqrt{n} \rightarrow 0$.
- 分奇偶讨论. 使用 $a_n \rightarrow a$ 则 $\sum a_n/n \rightarrow a$ 这个结论.
- 如果结论不对, 则存在一个长度为 δ 的区间, 在这个区间上 $f(x) \leq M - \epsilon$, 则至少有 $[\delta/n] - 1$ 个 $f(i/n)$ 落在这个区间里, 这样一来极限值就会小于等于 $M(1-\delta) + (M-\epsilon)\delta$, 矛盾.
- WLOG 设 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$.

由 Riemann 积分定义, $\forall \epsilon > 0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq b \end{cases}$ 使得 $\int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)| dx < \epsilon$. 设

$M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx| = |\int_a^b (f(x) - s_\epsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx| \leq \int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|g(nx)dx + |\sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx| < M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \leq M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \dots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$ (设 $c+kT \leq d < c+(k+1)T$) $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \leq MT$. 选择一个足够大的 n , 使得 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \epsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx| \leq (M+1)\epsilon$.

5.3 补充 (不要求掌握!)

参考 <https://wqgcx.github.io/courses/analysis2.pdf>, 初步了解可积性理论.

6 第 6 次习题课: 不定积分, 变上限积分, 定积分

6.1 问题

- 求极限. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}})$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (1 + \frac{i}{n}) \sin \frac{i\pi}{n^2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.
- 求导数. $\int_{x^3+1}^{2^x} \frac{\sin t}{t^4+2} dt$, $\int_e^{e^x} \frac{dt}{1+\log t} (x > 1)$, $(\int_a^x f(t)dt)^2$.
- 求积分. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$, $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$, $\int_{-1}^1 \log(x + \sqrt{1+x^2})dx$.
- 求积分. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, $\int \sqrt{\tan x} dx$, $\int \frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx$, $\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$, $\int \frac{dx}{x(x^3+2)}$, $\int x^2 \arctan x dx$, $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$, $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$.
- 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导函数. 证明: 对于任意 $x \in [0, 1]$, 有 $|f(x)| \leq \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |f'(t)|dt$, 并写出取等号条件.
- $x_1 > 0$, 对于每个正整数 n , 有 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在并求之.
- 设 $x > 0$, 定义 $p(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}}$, 证明方程 $p(x+1) = p(x) + \sin x$ 有无穷个互不相等的正实数解.
- 设 $f(x) \in R[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx > 0$, 证明 $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 使得 $f(x) > 0, x \in [\alpha, \beta]$.
- (不要求掌握). $f(x) \in R[a, b]$, 是否有 $[f(x)]$ 可积? 其中 $[\cdot]$ 表示向下取整.
- 设 $f(x) \in C[0, \pi]$ 满足 $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$, 证明 $\exists \alpha, \beta \in (0, \pi), \alpha \neq \beta$, 使得 $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.
- 证明柯西不等式 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$, 并说明取等号条件.
- (不要求掌握). 证明 Holder 不等式 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq [\int_a^b f^p(x)dx]^{\frac{1}{p}} [\int_a^b g^q(x)dx]^{\frac{1}{q}}$, 其中 $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \geq 0$.
- (不要求掌握). 证明 Minkowski 不等式 $[\int_a^b [f(x) + g(x)]^p dx]^{\frac{1}{p}} \leq [\int_a^b f^p(x)dx]^{\frac{1}{p}} + [\int_a^b g^p(x)dx]^{\frac{1}{p}}$, 其中 $p \geq 1, f, g \geq 0$.
- 设 $f(x) \in C[a, b]$ 满足 $\forall \phi(x) \in C[a, b]$, 只要 $\int_a^b \phi(x)dx = 0$, 就有 $\int_a^b f(x)\phi(x)dx = 0$. 证明 $f(x) \equiv C$.
- $a_n/n^\alpha \rightarrow 1, \alpha > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.
- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f'(a) = m, f'(b) = n$, 证明存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f'(c) = \xi$, 其中 ξ 是 $[m, n]$ 或 $[n, m]$ 中的任意一个数. 本题说明导函数虽然不一定连续, 但具有介值性质.
- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 证明存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- 记 $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}, x \in [0, 1]$, 求 $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)dx$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$. 本题说明积分极限不一定可交换.
- 记 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$ 和 $(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x))'$. 本题说明求导极限不一定可交换.

6.2 解答

- 利用定积分定义. (1) $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}|_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$.
- $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2} \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.
- $\frac{i\pi}{n^2} - \epsilon \frac{i\pi}{n^2} \leq \sin \frac{i\pi}{n^2} \leq \frac{i\pi}{n^2}$, $\sum_{i=1}^n (1 + \frac{i}{n}) \frac{i\pi}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 + \frac{i}{n}) \frac{i\pi}{n} \rightarrow \int_0^1 (1+x)\pi x dx = \frac{5\pi}{6}$, 同理左边 $\geq (1-\epsilon)\frac{5\pi}{6}$, 由 ϵ - N 语言.

$$(4) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2.$$

$$2. \text{ 利用变上限积分导数结论. } f' = \frac{\sin 2^x}{16^x+2} 2^x \log 2 - \frac{\sin(x^3+1)}{(x^3+1)^4+2} 3x^2. \quad f' = \frac{e^x}{1+x}. \quad f' = 2f(x) \int_a^x f(t) dt.$$

$$3. \arcsin \frac{x}{a} + C, \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C, \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin(x/a)) + C, \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}|) + C, \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}|) + C, 0 (\text{注意是奇函数}). \text{ 都是利用换元或者分部积分.}$$

$$4. (1) \text{ 令 } u = x + \sqrt{x^2 + x + 1}, x = \frac{u^2-1}{2u+1} \Rightarrow 2 \int \frac{u^2+u+1}{u(2u+1)^2} du = 2 \int \frac{1}{u} - \frac{3(u+1)}{(2u+1)^2} du = 2 \log |u| - 3 \int \frac{du}{2u+1} - 3 \int \frac{du}{(2u+1)^2} + C = 2 \log u - \frac{3}{2} \log |2u+1| + \frac{3}{2} \frac{1}{2u+1} + C.$$

$$(2) \text{ 令 } u = \sqrt{\tan x}, x = \arctan u^2 \Rightarrow \text{原积分} = 2 \int \frac{u^2}{1+u^4} du. \text{ 使用对偶积分. 记 } I = \int \frac{u^2}{1+u^4} du, J = \int \frac{1}{1+u^4} du, I + J = \int \frac{1+u^2}{1+u^4} du = \int \frac{1+1/u^2}{u^2+1/u^2} du = \int \frac{1}{(u+1/u)^2-2} d(u+1/u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}}) + C_1, I - J = \int \frac{u^2-1}{u^4+1} du = \int \frac{1-1/u^2}{u^2+1/u^2} du = \int \frac{1}{(u+1/u)^2-2} d(u+1/u) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}} \right| + C_2. \text{ 从而 } I = \frac{I+J}{2} + \frac{I-J}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{u-1/u}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{u+1/u-\sqrt{2}}{u+1/u+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2}\tan x}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{\tan x-\sqrt{2}\tan x+1}{\tan x+\sqrt{2}\tan x+1} \right| + C.$$

$$(3) = \int \frac{e^x(1-x^2)+e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} de^x + \int \frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{\text{分部积分}}{=} e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \int e^x d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \int \frac{e^x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx + C = e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

$$(4) = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^4 + x^2} dx^2 = \frac{1}{2} \int \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} d(x^2 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} (x^2 + \frac{1}{2}) \sqrt{x^4 + x^2} - \frac{1}{16} \log |x^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{x^4 + x^2}| + C.$$

$$(5) = \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{x^3(x^3+2)} = \frac{1}{6} \int \frac{dx^3}{x^3} - \frac{dx^3}{x^3+2} = \frac{1}{6} \log \left| \frac{x^3}{x^3+2} \right| + C.$$

$$(6) = \frac{1}{3} \int \arctan x dx^3 = \frac{1}{3} x^3 \arctan x + C - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} x^3 \arctan x + C - \frac{1}{6} \int \frac{x^2 dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{3} x^3 \arctan x + C - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \log |1+x^2|.$$

$$(7) = \int \frac{1}{(1-\sin^2 x)^2} d \sin x = \frac{1}{4} \log \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + \frac{\sin x}{2(1-\sin^2 x)} + C. \text{ 最后一个等号是积分 } \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt, \text{ 注意到 } \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{t}{1-t^2} - \int t d \frac{1}{1-t^2} + C = \frac{t}{1-t^2} - \int \frac{2t^2}{(1-t^2)^2} dt + C = \frac{t}{1-t^2} + \int \frac{2}{(1-t^2)^2} dt - \int \frac{2}{(1-t^2)^2} dt + C \Rightarrow \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t^2} dt + \frac{t}{2(1-t^2)} + C = \frac{1}{4} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{t}{2(1-t^2)} + C.$$

$$(8) x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt, \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sin t} dt = - \int \frac{d \cos t}{\sin^2 t} = - \int \frac{d \cos t}{1-\cos^2 t} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-\cos t}{1+\cos t} \right| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{(1-x)+(1+x)-2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{(1-x)+(1+x)+2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \right| + C = \log \left| \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} \right| + C.$$

$$5. \text{ 由连续性和积分中值定理知 } \exists \xi \in [0, 1], \text{ 使得 } |f(\xi)| = \int_0^1 |f(t)| dt. \text{ 从而 } \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f'(t)| dt \geq |f(\xi)| + \int_{\xi}^x |f'(t)| dt \geq |f(\xi)| + \left| \int_{\xi}^x f'(t) dt \right| = |f(\xi)| + |f(x) - f(\xi)| \geq |f(x)|. \text{ 等号处处成立意味着 } f'(x) = 0, \text{ 这也意味着 } f(x) \equiv C.$$

$$6. \text{ 重复这种题很多次了. 首先 } x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 1/x_n) \geq 1. \text{ 其次如果 } x_n \geq 1, \text{ 则 } x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(1/x_n - x_n) \leq 0. \text{ 说明单调递减有下界, 两边求极限知答案是 } 1.$$

$$7. p(x+1) - p(x) = \int_x^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}} \in \left[\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3+2021}}, \frac{1}{\sqrt{x^3+2021}} \right]. \text{ 令 } g(x) = p(x+1) - p(x) - \sin x, g(2k\pi) > 0, g(2k\pi + \pi/2) < 0, \text{ 用介值定理.}$$

$$8. \text{ 反证法, 如果任意区间都有点 } f(x) \leq 0, \text{ 那么 Riemann 和的极限怎么可能 } > 0? (\text{我就偏偏取那个 } \leq 0 \text{ 的点})$$

$$9. \text{ 负的 Riemann 函数可积, 但取整后变成不可积的 Dirichlet 函数.}$$

$$10. \text{ 由于 } \int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0, \text{ 从而存在零点 } \alpha \in (0, \pi). \text{ 再考虑 } \int f(x) \sin(x - \alpha) dx = 0, \text{ 知如果只有一个零点, 那么这个积分不可能为 } 0 (\text{注意到 } f(x) \sin(x - \alpha) \text{ 在只有一个零点 } x = \alpha \text{ 时是始终同号的}).$$

$$11. \int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx \geq 0 \text{ 对于 } \forall t \in \mathbb{R} \text{ 恒成立. 注意到这是关于 } t \text{ 的一元二次方程, 因此 } \Delta \leq 0 \Rightarrow 4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leq 0. \text{ 显然取等号条件是 } f(x) = Cg(x).$$

$$12. \text{ 不妨设 } \int f^p(x) dx = \int g^q(x) dx = 1. \text{ 注意到 } \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) \leq \log(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \text{ 从而 } \int f(x)g(x) dx \leq \int \frac{f^p(x)}{p} dx + \int \frac{g^q(x)}{q} dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$13. \int_a^b (f+g)^p dx = \int_a^b (f+g)^{p-1} f dx + \int_a^b (f+g)^{p-1} g dx \text{ 利用上一问结论 } \leq [\int_a^b (f+g)^p dx]^{(p-1)/p} [\int_a^b f^p dx]^{1/p} + [\int_a^b (f+g)^p dx]^{(p-1)/p} [\int_a^b g^p dx]^{1/p} \Rightarrow [\int_a^b (f+g)^p dx]^{1/p} \leq [\int_a^b f^p dx]^{1/p} + [\int_a^b g^p dx]^{1/p}.$$

$$14. \text{ 考虑 } \phi(x) = f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt. \text{ 从而 } \int_a^b f^2(x) dx = \frac{1}{b-a} \left[\int_a^b f(t) dt \right]^2 \Rightarrow \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b 1 dt = [\int_a^b f(t) dt]^2. \text{ 由 Cauchy 不等式取等条件知 } f(x) \equiv C.$$

$$15. \text{ 这个题提醒大家很多时候感觉虽然可靠, 但要严格说明依然应该使用 } N-\epsilon \text{ 语言. } \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\epsilon) < a_n < n^\alpha(1+\epsilon). \text{ 从而存在足够大的 } n, \text{ 使得 } \frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \dots + N^\alpha) < \epsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \dots + a_N) < \epsilon, \left| \frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \dots + (a_n - n^\alpha)] \right| \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[(N+1)^\alpha + \dots + n^\alpha] \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}\epsilon[1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha] = \epsilon \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha \rightarrow \epsilon \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{\epsilon}{\alpha+1}.$$

$$\text{这意味着当 } n \text{ 足够大时, } \frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \text{ 和 } \frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n i^\alpha \right) \text{ 差不多. 因此原极限是 } \frac{1}{\alpha+1}.$$

16. 通过平移只需证明 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 证明存在 $f'(c) = 0$. $f'(a) > 0$ 说明一定有数 $x > a$ 使得 $f(x) > f(a)$, $f'(b) < 0$ 说明一定有数 $x < b$ 使得 $f(x) > f(b)$. 闭区间上的连续函数必有最大值, 从而最大值点的导数一定为 0 (利用左导数 ≥ 0 , 右导数 ≤ 0). 这就是 $f'(c) = 0$.

17. 构造 $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. $g(a) = g(b) = f(a)$, 从而考虑 $[a, b]$ 区间上 $g(x)$ 的最大值点, 其必有 $g'(x_0) = 0$, 此即 $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

18. 这个题告诉我们求导和极限未必可交换. $f_n(x) \rightarrow 0$ 对于所有 $x \in [0, 1]$ 从而 $\int_0^1 \lim f_n(x) dx = 0$. 而 $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 - e^{-n} - ne^{-n} \rightarrow 1$.

19. $f'_n(x) = \cos(nx)$, $f'_n(0) \rightarrow 1$, 而对于 $x \neq 0$ 其极限不存在. $f_n(x) \rightarrow 0$ 对于所有 $x \in \mathbb{R}$, 从而 $[\lim f_n(x)]' = 0$.

6.3 补充 (不要求掌握!)

测度: 我们把满足以下性质的非负集函数 (定义域是集合, 且函数值非负) 叫做测度: $m(\emptyset) = 0$, 并且对于任意不交的集合 $A_1, A_2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = m(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$. 外测度: 把上述不交条件去掉, 并把 $=$ 改成 \geq .

π 系: 一族集合构成的集合 \mathcal{P} , 且满足 $\forall A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$.

半环: \mathcal{P} 是 π 系, 若 $A, B \in \mathcal{P}, A \supset B$, 则存在有限个两两不交的集合 C_1, C_2, \dots, C_k 使得 $A \setminus B = \cup_k C_k$.

σ -域: 如果 $\emptyset, \Omega \in \mathcal{P}; A \in \mathcal{P} \Rightarrow A^c \in \mathcal{P}; A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P} \Rightarrow \cup_i A_i \in \mathcal{P}$, 则称 \mathcal{P} 是 σ -域.

容易验证所有形如 $(a, b], a, b \in \mathbb{R}$ 的区间构成的集合是半环, 定义 $m((a, b]) = b - a$, 这是半环上的外测度. 由测度扩张定理, 这个外测度可以扩张到 $\sigma(\{(a, b]\})$ 上. 利用 Caratheodory 条件可以完备化. 这个测度成为 Lebesgue 测度.

更多关于 Lebesgue 测度的知识: Cantor 集, 胖 Cantor 集, Cantor-Lebesgue 函数, 等等.

Lebesgue 定理: $f(x) \in R[a, b]$ 当且仅当 $m(\{x : f(x) \text{ 在 } x \text{ 处间断}\}) = 0$, 其中 m 是 Lebesgue 测度.

证明. “ \Rightarrow ” 对于区域 $[a, b]$ 的任何分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, 定义 $\omega_i = \sup\{|f(x) - f(y)|, x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $\Delta_i = |x_i - x_{i-1}|$, $\Delta = \max\{\Delta_i\}$. 因而 f 是 Riemann 可积等价于 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i \omega_i \Delta_i = 0$. 再定义 $\omega_\epsilon(f) = \{x : \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y \in [x-\delta, x+\delta]} |f(y) - f(x)| \geq \epsilon\}$. 先假设如果 f 的不连续点集测度为正, 那么存在 ϵ_0 使得 $\omega_{\epsilon_0}(f) > 0$. 对任意分割, 我们有 $\sum_i \omega_i \Delta_i \geq \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap \omega_{\epsilon_0}(f) \neq \emptyset} \omega_i \Delta_i \geq \epsilon_0 \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap \omega_{\epsilon_0}(f) \neq \emptyset} (x_i - x_{i-1}) \geq \epsilon_0 m(\omega_{\epsilon_0}(f))$. 这表明 f 不是 Riemann 可积的. 因此如果 f 是 Riemann 可积的, 那么不连续点集必定是零测集.

“ \Leftarrow ” 现在我们假设 $\omega_\epsilon(f)$ 是零测集, 我们证明 f 是 Riemann 可积的. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在闭集 $A_\epsilon \subset [a, b]$ 使得 f 在 A_ϵ 上连续. 对 $x_0 \in A_\epsilon$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. 由于 A_ϵ 是有界闭集, 因此存在有限个开区间 $(x_l - \frac{1}{2}\delta_l, x_l + \frac{1}{2}\delta_l)$ 覆盖住 A_ϵ . 取 $\delta = \min\{\frac{1}{3}\delta_l\}$. 这表明对于任意 $x_0 \in A_\epsilon$, 必定有某个 $x_l \in A_\epsilon$, 使得 $x_0 \in (x_l - \frac{1}{2}\delta_l, x_l + \frac{1}{2}\delta_l)$. 这表明 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (x_l - \delta_l, x_l + \delta_l)$, 因而有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. 取 $[a, b]$ 分割使得 $\Delta < \frac{1}{2}\delta$. 现在我们来考虑 $\sum_i \omega_i \Delta_i$. 如果区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 与 A_ϵ 的交集非空, 含有某个点 $y_0 \in [x_{i-1}, x_i] \cap A_\epsilon$, 那么对于任意 $x, y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ 都有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. 注意到 $[x_{i-1}, x_i] \subset [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, 故而 $\omega_i < \epsilon$. 这样我们可以估计 $\sum_i \omega_i \Delta_i = \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap A_\epsilon \neq \emptyset} \omega_i \Delta_i + \sum_{[x_{i-1}, x_i] \cap A_\epsilon = \emptyset} \omega_i \Delta_i \leq \epsilon(b-a) + 2Mm([a, b] \setminus A_\epsilon)$. 这里 M 为 f 在 $[a, b]$ 上的上界.

这就表明如果 f 的不连续点零测且 f 有界, 则 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.

极限和积分可交换的三大定理 (Lebesgue 可积意义下, 但是我们有定理保证 Riemann 可积一定是 Lebesgue 可积):

Fatou 引理: 如果 $f_n \geq 0$, 那么 $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n dx \geq \int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n dx$.

单调收敛定理: 如果 $f_n \geq 0$ 且 $f_n \uparrow f$, 那么 $\int f_n dx \uparrow \int f dx$.

控制收敛定理: 如果 $f_n \rightarrow f$ 几乎处处成立, $|f_n| \leq g$ 对于所有 n 成立, 并且 g 可积, 那么 $\int f_n dx \rightarrow \int f dx$.

7 第 7 次习题课: 定积分及其应用

7.1 问题

1. 判断对错. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个给定的函数, 记 $f_1(x) = f(x) + g(x), f_2(x) = f(x)g(x), f_3(x) = |f(x)|, f_4(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. (1) 假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 $x = x_0$ 处可导. 问 f_1, f_2, f_3, f_4 中哪些函数在 x_0 处一定可导, 哪些不一定? (2) 假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 $[a, b]$ 可积, 问 f_1, f_2, f_3, f_4 中哪些函数在区间 $[a, b]$ 一定可积, 哪些不一定?

- 判断对错. $f_1, f_3 \in C[0, 1]$, $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x), \forall x \in [0, 1]$, 且 $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 f_3(x)dx$. 则 $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f_3(x)$.
- 是否存在 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 f 在所有点上局部无界?
- 证明 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个根 x_n , 并计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
- 求积分. $\int_{-1}^1 \frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}dx, \int_0^2 |x^2 - 1|e^{-|x-1|}dx, \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}dx, \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^2 + 1) \sin^3 x dx, \int_0^1 \log(x + \sqrt{x^2 + 1})dx,$
 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2}dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}dx$.
- 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$, 且 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x \cdot f(x)dx = 0$. 证明 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中至少有两个零点.
- 设 $0 < \lambda < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{1-\lambda}$.
- 求直角坐标 (x, y) 给出的抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, \frac{1}{2})$ 的弧长.
- 设奇数 $n \geq 3$, 求极坐标 (r, θ) 给出的 n 叶玫瑰线 $r = \sin(n\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 所围的有界图形的面积.
- 证明不等式. (1) $\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. (2) $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \frac{1}{10}$.
- $f(x) \in C[-1, 1]$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x)dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \rightarrow f(0)$.
- $f(x) \in C[-1, 1]$, 证明 $\lim_{h \rightarrow 0+0} \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x)dx \rightarrow \pi f(0)$.
- 推导重力场中粒子数量密度的分布率 $n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$, 其中 T 是温度, k_B 是玻尔兹曼常量.

7.2 解答

- (1) f_1, f_2 一定可导, 依据导数四则运算. f_3 不一定可导, $f(x) = x$. f_4 不一定可导, $f(x) = x, g(x) = -x$. (2) 均可积.
- 正确. 用反证法, 如果 $f_3(x_0) > f_1(x_0)$, 由连续性存在 $\epsilon > 0$ 和 x_0 的某个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 使得 $f_3(x) > f_1(x) + \epsilon$.
- 存在. 考虑 $f(x) = \begin{cases} p, & x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.
- 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$. $f_n(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, f(1) = n > 1$, 再由 $f_n(x)$ 单调递增和连续性知有且仅有一个根. 由于 $f_n(\frac{1}{2} + \epsilon) = (\frac{1}{2} + \epsilon)^{1 - \frac{1}{2} + \epsilon} \rightarrow \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon} > 1$, 因此当 n 足够大时 $f_n(x_n) = 1 < f_n(\frac{1}{2} + \epsilon) \Rightarrow x_n < \frac{1}{2} + \epsilon$, 再根据极限的 $N-\epsilon$ 定义.
- (1) 注意到 $\frac{x^2 \arcsin x}{1+x^2} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{1+x^2}dx = 0$. 从而原积分 $= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = 2 - \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 2 - (\arctan x)|_{-1}^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$.
(2) $= \int_0^1 (1-x^2)e^{x-1}dx + \int_1^2 (x^2-1)e^{1-x}dx = (-x^2+2x-1)e^{x-1}|_0^1 + (-x^2-2x-1)e^{1-x}|_1^2 = 4 - \frac{8}{e}$.
(3) $= 2 \int_0^\pi \sqrt{1 - \sin 2x}dx = 2 \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}dx = 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \sin x - \cos x dx) = 4\sqrt{2}$.
(4) 这是奇函数, 积分自然为 0.
(5) $= x \log(x + \sqrt{x^2 + 1})|_0^1 - \int_0^1 x d \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}dx = \log(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{x^2 + 1})|_0^1 = \log(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$.
(6) $= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}dx = (\arcsin x - \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2})|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.
(7) 令 $x = \sin t$, 则原积分 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt \sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 t dt$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t dt \cos t =$ 分部积分
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \sin^4 t \cos^2 t dt = 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t - \sin^6 t dt \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = \frac{5}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt$. 从而原积分 $= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt =$ 分部积分
 $= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{32}$.
(8) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} d \sin x = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \log(1+t^2)|_0^1 = \frac{\log 2}{2}$.
- $\int_0^1 f(x)dx = 0 \Rightarrow$ 一个零点 α . $\int_0^1 (x-\alpha)f(x)dx = 0 \Rightarrow$ 另一个零点 β (若不存在则 $(x-\alpha)f(x)$ 保号).
- WLOG 令 $a = 0$. 由定义 $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n| < \epsilon; \exists M, \forall n > M, |\lambda^n| < \epsilon$. 设 $\max_n a_n = M$ (极限存在蕴含有限). 选择 $n > N + M$. 从而 $|a_n + \lambda a_{n-1} + \cdots + a_N \lambda^{n-N}| < \epsilon(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-N}) < \frac{\epsilon}{1-\lambda}$, 且 $|a_{N-1} \lambda^{n-N+1} + \cdots + a_0 \lambda^n| < M \lambda^{n-N+1} \frac{1-\lambda^N}{1-\lambda} < \frac{M}{1-\lambda} \epsilon$. 从而整个求和 $< \frac{M+1}{1-\lambda} \epsilon$.
- $\int_0^1 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{1+x^2})|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$.
- $S = n \times \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 n\theta d\theta = (t = n\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} (t - \frac{1}{2} \sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.
- (1) 在区间 $[0, 1]$ 上成立 $\sqrt{2} \leq \sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} \leq \frac{3}{2}$. (2) 注意到 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$, 从而 $\frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx < \int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{10}$.
- 往证 $\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \rightarrow 0$. 使用 $N-\epsilon$ 语言. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x)-f(0)| < \epsilon$. 设 $\max |f(x)| = M$. 从而原式 $= \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{\delta}^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)]dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3$. $|I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \epsilon$.

$$|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^{-\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} (\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2})^n. \text{ 注意到 } \frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1, \text{ 从而可以取足}$$

够大的 n 使得 $|I_2| < \epsilon$. 类似地放缩 I_3 , 从而 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$.

12. 只需证明 $\int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} [f(x) - f(0)] dx \rightarrow 0$. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon$. 设 $\max |f(x)| = M$. 从而原式 $= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{h}{x^2+h^2} [f(x) - f(0)] dx + \int_{-1}^{-\delta} \frac{h}{x^2+h^2} [f(x) - f(0)] dx + \int_{\delta}^1 \frac{h}{x^2+h^2} [f(x) - f(0)] dx := I_1 + I_2 + I_3$. 类似的有 $|I_1| \leq \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} \frac{h}{x^2+h^2} dx < \epsilon \int_{-1}^1 \frac{h}{x^2+h^2} dx = \epsilon (\arctan \frac{x}{h})|_{-1}^1 < \pi \epsilon$. $|I_2| \leq 2M \int_{-1}^{-\delta} \frac{h}{x^2+h^2} dx \leq 2M(1-\delta) \frac{h}{\delta^2+h^2} < 2M \frac{1-\delta}{\delta^2} h < \epsilon$ 只要 h 足够接近 0. 同理 $|I_3| < \epsilon$. 从而 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$.

13. 由基本力学知识, 重力场中的压力差 dF 托起了单位体积内的粒子重力 dG . 从而 $dF + dG = 0 \Rightarrow Sdp + \rho g Sdz = 0 \Rightarrow dp + nmgdz = 0$. 由 $p = nk_B T$ 知 $dp = k_B T dn \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_B T} dz$. 两边积分知 $\log n(z) - \log n(0) = \frac{-mgz}{k_B T} \Rightarrow n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$.

7.3 补充 (不要求掌握!)

计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-x^2} dx$. (也写成 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$). 这和正态分布的归一化因子有关.

证法 1: 使用二元积分. $(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy =$ 二元积分换元公式, 改写成极坐标 $= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \times (-\frac{1}{2} e^{-r^2})|_0^\infty = \pi$. 从而 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$. 我们回顾标准正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的密度函数是 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 这意味着 $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$ (概率的归一化!).

证法 2: 使用极限逼近. 我们来证明: $\forall x \in [-A, A], (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \Rightarrow e^{-x^2}$. 其中, \Rightarrow 表示极限的一致性 (一致收敛). 我们都知 $(1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \rightarrow e^{-x^2}$, 但是不同的 x 可能会有不同的收敛速度. 对于某个 x_1 , 可能从第 N_1 项开始有 $|f_n(x_1) - f(x_1)| < \epsilon$, 而对于某个 x_2 , 可能从第 N_2 项开始有 $|f_n(x_2) - f(x_2)| < \epsilon, \dots$. 在给出一致收敛的正式定义前, 我们先看几个例子.

例 1: $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}, f(x) \equiv 0$. 容易看出来 $f_n \rightarrow f$, 且对于不同的 x , 他们的收敛步调一致: 因为只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$, 不管 x 的值都有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

例 2: $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1], f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$. 容易看出来 $f_n \rightarrow f$, 但对于不同的 x , 他们的收敛步调并不

一致: 距离 1 更近的 x 收敛速度更快! 当 $x < \frac{1}{2}$ 时, 只要 $n > \log_2(\frac{1}{\epsilon})$ 就有 $x^n < \epsilon$; 但是当 $x = 1 - \frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})}$ 时, $x^n \approx (1 - \frac{1}{\log_2(\frac{1}{\epsilon})})^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \approx \frac{1}{e}$ 距离 ϵ 还远着呢, 更有 $\lim_{x \rightarrow 1-0} x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} \rightarrow 1 \Rightarrow \exists \delta, \forall x \in (1 - \delta, 1), x^{\log_2(\frac{1}{\epsilon})} > 1 - \epsilon$. 前面的 $f_n(x)$ 已经很小于 ϵ 了, 而后面的一些 $f_n(x)$ 甚至还在原地打转 ($> 1 - \epsilon$)! 下面我们给出定义.

一致收敛: 我们说在区间 $[a, b]$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$ (记作 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$), 意味着 $\forall \epsilon > 0, \exists N$, 使得 $\forall n > N, \forall x \in [a, b], |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

如果在有限区间上收敛具有一致性, 那么积分和极限顺序可交换. 因为 $|\int_a^b f_n(x) - f(x) dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \epsilon(b-a) \rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$, 即是 $\lim \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim f_n(x) dx$.

回到原题, 往证 $\forall x \in [-A, A], (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \Rightarrow e^{-x^2}$. 注意到 $(1 + \frac{x^2}{n})^n \geq 1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k$. 由带 Lagrange 余项的泰勒展开知 $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} t^{k+1} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!} t^{k+1}$, 其中 $f(t) = e^t, \xi \in (0, t)$. 令 $t = x^2$ 知 $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!} x^{2k+2}$. 从而对于 $\forall x \in [-A, A]$, 成立估计 $e^{x^2} - 1 - x^2 - \dots - \frac{x^{2k}}{k!} =$

$\frac{e^\xi}{(k+1)!} x^{2k+2} \leq \frac{e^{A^2} A^{2k+2}}{(k+1)!} \rightarrow 0$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时 (利用 $n! > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$). 这里的估计有一致性! 从而存在 $K, \forall k > K, x \in [-A, A]$, 成立 $|e^{x^2} - 1 - x^2 - \dots - \frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$. 再回头来看 $1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k$ 和 $1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}$. 他们之间的差是一个 $2k$ 阶关于 x 的多项式, 且 $< \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} x^{2i} < \frac{1}{n} (A^2 + A^4 + \dots + A^{2k})$. 这里的估计又有一致性! 所以说, 当 n 足够大时, $\forall x \in [-A, A]$,

成立 $|[1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k] - [1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$. 整理一下思路, $\forall \epsilon > 0, \exists K$, 使得 $\forall k > K, \forall x \in [-A, A]$, 成立 $|e^{x^2} - 1 - x^2 - \dots - \frac{x^{2k}}{k!}| < \epsilon$. $\exists N$, 使得 $\forall n > N, \forall x \in [-A, A]$, 成立 $|[1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k] - [1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}]| < \epsilon$.

这样的话就有 $e^{x^2} - (1 + \frac{x^2}{n})^n < e^{x^2} - [1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k] < \{e^{x^2} - [1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}]\} + \{[1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}] - [1 + C_n^1 \frac{x^2}{n} + \dots + C_n^k (\frac{x^2}{n})^k]\} < 2\epsilon$. 这样 $(1 + \frac{x^2}{n})^n \Rightarrow e^{x^2}$. 取倒数后当然也成立, 这和极限的除法是一个道理, 留作练习.

又注意到当 $A \rightarrow \infty$ 时, $\int_A^\infty (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} dx \leq \int_A^\infty (1 + x^2)^{-1} dx = \arctan x|_A^\infty \rightarrow 0$ 对 n 有一致性. 这说明我们可以取足够大的 A 使得 $\int_A^\infty e^{-x^2} dx < \epsilon$, 且 $\forall n, \int_A^\infty (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} dx < \epsilon$. 这样一来 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} dx =$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^n} d\sqrt{n} \tan t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \alpha d\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 最后一步使用了 Wallis 公式, 其推导就是通过分部积分计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$. 从而 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

8 致谢

感谢元培学院 21 级本科生徐奕辰同学和另一位不愿意透露姓名的同学, 他们提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2022 秋高等数学 A I 习题课 12 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.