

数学分析 II 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 2 月 9 日

目录

1	第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性	3
1.1	问题	3
1.2	解答	3
2	第 2 次习题课: 定积分的性质与计算	4
2.1	问题	4
2.2	解答	4
3	第 3 次习题课: 定积分的应用与中值定理	5
3.1	问题	5
3.2	解答	6
4	第 4 次习题课: 广义积分的收敛性与计算	6
4.1	问题	6
4.2	解答	7
5	第 5 次习题课: 积分的综合运用	8
5.1	问题	8
5.2	解答	8
6	第 6 次习题课: 数项级数的基本概念与正项级数	10
6.1	问题	10
6.2	解答	10
7	第 7 次习题课: 任意项级数与数项级数的运算	11
7.1	问题	11
7.2	解答	11
8	第 8 次习题课: 无穷乘积与函数项级数的基本概念	12
8.1	问题	12
8.2	解答	13
9	第 9 次习题课: 函数项级数的一致收敛	14
9.1	问题	14
9.2	解答	15

10 第 10 次习题课: 一致收敛函数项级数的性质 15

10.1 问题 15

10.2 解答 16

11 第 11 次习题课: 幂级数的基本概念与性质 17

11.1 问题 17

11.2 解答 17

12 第 12 次习题课: 幂级数展开与多项式逼近 18

12.1 问题 18

12.2 解答 19

13 第 13 次习题课: Fourier 级数的基本概念与性质 20

13.1 问题 20

13.2 解答 20

14 第 14 次习题课: Fourier 级数的其他收敛性 22

14.1 问题 22

14.2 解答 22

15 致谢 23

第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性

1.1 问题

1. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x) \in R[a, b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$.
2. $f(x) \in R[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx > 0$. 证明 $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, s.t. $\forall x \in [\alpha, \beta], f(x) > 0$.
3. $f(x) \in R[a, b]$, 问 $\lfloor f(x) \rfloor$ 是否一定 $\in R[a, b]$?
4. 讨论区间 $[a, b]$ 上 $f, |f|, f^2$ 的可积性之间的关系.
5. 设非负函数 $f(x) \in C[a, b]$, 证明极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}}$ 存在并求之.
6. $f(x) \geq 0, f''(x) \leq 0, x \in [a, b]$. 证明 $\max_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.
7. $n \in \mathbb{N}_+, f(x) \in C[a, b], \int_a^b x^k f(x)dx = 0, k = 0, 1, \dots, n$. 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个零点.
8. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \dots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \dots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
9. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1, \alpha > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.
10. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x), g(x) \in R[a, b], p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}$.
11. $f(x) \in R[a, b], A = \inf_{x \in [a, b]} f(x), B = \sup_{x \in [a, b]} f(x), g(y) \in C[A, B]$, 证明 $G(x) := g(f(x)) \in R[a, b]$.
12. 已知 $(0, 1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 问是否有 $f(x) \in R[0, 1]$?

1.2 解答

1. 显然 $f(x)$ 有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次 $\forall \epsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$, s.t. $\omega_{(x-\delta_x, x+\delta_x)} < \epsilon$. 由于 $\cup_{x \in [a, b]} (x-\delta_x, x+\delta_x) \supset [a, b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$. 不妨设 $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. 可取分割点 $y_i \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1})$, 对于这个分割, $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon(b-a)$, 因此有可积性. 由于 $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)|dx \leq \epsilon(b-a)$, ϵ 的任意性知 $\int_a^b f(x)dx = 0$.
2. 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.
3. $f(x) = -\text{Riemann}(x) \in R[0, 1], \lfloor f(x) \rfloor = -\text{Dirichlet}(x) \notin R[0, 1]$.
4. $f \in R[a, b] \Rightarrow |f|, f^2 \in R[a, b]$, 因为 f 在 x_0 处连续 $\Rightarrow |f|, f^2$ 在 x_0 处连续.
 $|f| \in R[a, b] \Rightarrow f^2 \in R[a, b], \nRightarrow f \in R[a, b]$. $|f|$ 在 x_0 处连续 $\Rightarrow f^2$ 在 x_0 处连续, 而对于 f 有反例 $f(x) = 1_{\mathbb{Q}} - 1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.
 $f^2 \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b], \nRightarrow f \in R[a, b]$. 理由与上一个相同.
5. 设 $M = \max_{x \in [a, b]} f(x), f(\xi) = M$. 由连续性, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), f(x) > M - \epsilon$. 因此当 n 足够大时成立
 $M + 2\epsilon > ((b-a)M^n)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} > (2\delta(M-\epsilon)^n)^{\frac{1}{n}} > M - 2\epsilon \Rightarrow \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow M$.
6. 设 $f(\xi) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. 由题意知 $f(x)$ 是凹函数, 因此成立 $f(x) \geq \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}(x-a) + f(a), & x \in [a, \xi] \\ \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}(x-\xi) + f(\xi), & x \in [\xi, b] \end{cases} \Rightarrow \text{RHS} \geq \frac{2}{b-a} \left(\int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx \right) \geq \frac{2}{b-a} \left((\xi-a)\frac{f(\xi)+f(a)}{2} + (b-\xi)\frac{f(b)+f(\xi)}{2} \right) \geq \frac{2}{b-a} \frac{f(\xi)}{2} (\xi-a+b-\xi) = f(\xi) = \text{LHS}$.
7. $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists 1$ 零点, 记为 x_1 . $\int_a^b (x-x_1)f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists 2$ 零点, 记为 x_2 . $\dots \int_a^b [\prod_{i=1}^n (x-x_i)] f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists n+1$ 零点.
- 8.

$$\text{原式} = 2^{\alpha-\beta} \frac{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^\alpha + \frac{2}{n} \left(\frac{3}{n} \right)^\alpha + \dots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^\alpha \right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^\beta + \frac{2}{n} \left(\frac{4}{n} \right)^\beta + \dots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n}{n} \right)^\beta \right]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{定积分定义}} 2^{\alpha-\beta} \frac{\left(\int_0^2 x^\alpha dx \right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta dx \right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

9. $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\epsilon) < a_n < n^\alpha(1+\epsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \dots + N^\alpha) < \epsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \dots + a_N) < \epsilon, \left| \frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \dots + (a_n - n^\alpha)] \right| \leq \frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha + \dots + n^\alpha] \leq \frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^\alpha \leq \epsilon \int_0^1 x^\alpha dx + \epsilon = \frac{\epsilon}{\alpha+1} + \epsilon \leq 2\epsilon$. 这意味着 $\left| \frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i^\alpha \right) \right| \leq 4\epsilon \Rightarrow \text{原极限} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$.

10. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} = 1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha \ln a + (1-\alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1-\alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$. 令 $\alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

本题也可以将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.

11. 证法 a: $G(x)$ 的间断点集合是 $f(x)$ 间断点集合的子集, 因此其 Lebesgue 测度为 0, 从而可积.

证法 b: 由于 $g(y)$ 一致连续, 因此 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall |y_1 - y_2| < \delta, |g(y_1) - g(y_2)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 由于 $f(x) \in R[a, b]$, 因此 $\exists [a, b]$ 的分割 Δ , 使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\delta \epsilon}{4M}$, 其中 $M = \sup_{y \in [a, b]} |g(y)|$. 若 $\omega_i(f) < \delta$, 则 $\omega_i(G) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 若 $\omega_i(f) \geq \delta$,

其区间长度 $\sum_{i: \omega_i(f) \geq \delta} \Delta x_i$ 不会超过 $\frac{\epsilon}{4M}$. 因此 $\sum_{i=1}^n \omega_i(G) \Delta x_i = \sum_{i: \omega_i(f) < \delta} \omega_i(G) \Delta x_i + \sum_{i: \omega_i(f) \geq \delta} \omega_i(G) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{\epsilon}{4M} = \epsilon$.

这样对于任意 $\epsilon > 0$ 我们都找到了一个分割 Δ 使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i(G) \Delta x_i < \epsilon$.

12. 考虑 $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) = 0$, 但是 $\int_0^1 f(x)dx$ 不存在.

2 第 2 次习题课: 定积分的性质与计算

2.1 问题

1. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, 证明 $\forall a, b \in \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx = 0$.
2. (Riemann-Lebesgue 引理). $f \in R[a, b], g \in R[0, T], g(x+T) = g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$.
3. 求积分 $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}, \alpha \in (0, \pi)$.
4. 求积分 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx$.
5. 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x dx$.
6. 求积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx$, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.
7. $f(x) \in C[a, b]$, 且对于任意的 $[\alpha, \beta] \subset [a, b], \exists \delta > 0, M > 0, \text{s.t. } \left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| \leq M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x) \equiv 0$.
8. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x) = f(x) \int_0^x f(t)dt$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) \equiv 0$.
9. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明 $f(x) = xf(1)$.
10. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x) \in R[0, x], \forall x \in (0, +\infty)$, 且 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ 也是 $(0, +\infty)$ 上的凸函数.
11. $f(x) \in C[-1, 1]$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x)dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$.
12. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负连续, 且 $f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(s)ds$. 证明 $f(t) \leq 1 + t$.

2.2 解答

1. WLOG $h < 1$. 由可积函数性质, 存在 $[a, b+1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $\int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|dx < \epsilon$, 且 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in [a, b+1], |x - y| < \delta$, 成立 $|g(x) - g(y)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$. 从而 $\left| \int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx \right| \leq \int_a^b |f(x+h) - g(x+h)|dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)|dx + \int_a^b |g(x) - f(x)|dx \leq \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|dx + \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx + \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|dx \leq 3\epsilon$.
2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$.

由 Riemann 积分定义, $\forall \epsilon > 0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq x_m = b \end{cases}$ 使得 $\int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|dx < \epsilon$. 设

$M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$. 则 $\left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - s_\epsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|g(nx)dx + \left| \sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx \right| < M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \leq M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \dots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$ (设 $c+kT \leq d < c+(k+1)T$) $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \leq MT$. 选择一个足够大的 n , 使得 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \epsilon$. 从而 $\left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| \leq (M+1)\epsilon$.

3. $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sin\alpha} \arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2\sin\alpha}.$
4. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$
5. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d(1-\cos x) = (1-\cos x) \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) d(\ln \sin x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin x + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) dx = [\cos x - \ln(1+\cos x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - 1.$
6. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x] \cos 2x + \sin[(2n-2)x] \sin 2x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x](1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x]}{2 \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x \cos[(2n-2)x] + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x] \cos x dx = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

由于 $I_1 = 1$, 因此 $I_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}.$

7. 假设 $\exists f(x_0) > 0$. 由连续性, $\exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$, 从而 $\forall [\alpha, \beta] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$ (最后一个大于号成立只需令 $\beta - \alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

8. 构造 $G(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2$, $G'(x) = g(x)$ 单调递减, $g(0) = 0$, 因此 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且 $G(0) = 0, G(x) \geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

9. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^{\alpha} f(x) dx = \frac{\alpha^2}{2} f(1)$. 由集合 $\{q\alpha : q \in \mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha) = qf(\alpha)$, $\int_0^{\alpha} f(x) dx = f(\alpha) \frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha) \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2} f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$.

10. 凸函数开区间上连续 \Rightarrow 闭区间上可积. 做变换 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f\left(\frac{t}{x} \cdot x\right) d\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux) du$, 从而 $F\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = \int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i (ux_i)\right) du \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n t_i f(ux_i) du = \sum_{i=1}^n t_i F(x_i) \Rightarrow F(x)$ 凸.

11. 往证 $\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \rightarrow 0$, 用极限定义. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon$. 设 $\max |f(x)| = M$.

从而原式 $= \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-\delta}^{-1} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_1^{\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3. |I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \epsilon.$

$|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} \left(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}\right)^n$. 注意到 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$, 从而可以取足

够大的 n 使得 $|I_2| < \epsilon$. 类似地放缩 I_3 , 从而 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$.

12. 原命题条件 $\Rightarrow \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s) ds}} \leq 1 \Rightarrow \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s) ds}} dt \leq \int_0^x 1 dt \Rightarrow \sqrt{1+2\int_0^x f(s) ds} \Big|_0^x \leq x \Rightarrow \sqrt{1+2\int_0^x f(s) ds} \leq 1+x \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{1+2\int_0^x f(s) ds} \leq 1+x.$

3 第 3 次习题课: 定积分的应用与中值定理

3.1 问题

- $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的递减正函数, 证明对于 $\forall 0 < \alpha < \beta \leq 1$ 都有 $\beta \int_0^{\alpha} f(x) dx \geq \alpha \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.
- $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$, 求 $f(x)$.
- 已知 $A > 0, AC - B^2 > 0$, 求椭圆 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 的面积.
- 证明极坐标下曲线 $r = r(\theta)$ 与 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为 $V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin \theta d\theta$.
- 求双扭线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ 绕轴 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.
- $f(x) \in C^1[0, 1], f(x) \in [0, 1], f(0) = f(1) = 0, f'(x)$ 单调递减. 证明曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的弧长不大于 3.
- 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?

8. 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r = e^\theta$ 在 $(r, \theta) = (1, 0)$ 和 $(r, \theta) = (e^\phi, \phi)$ 之间一段的重心坐标.
9. 求圆的渐伸线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ 上 $A(a, 0), B(a, -2\pi a)$ 之间部分与直线 \overline{AB} 围成图形的面积.
10. 试求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.
11. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 用定积分第二中值定理证明 $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$.
12. (Dirichlet 判别法). 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. $\forall A \geq a, g(x) \in R[a, A]$ 且 $|\int_a^A g(x)dx| \leq M$ 恒成立. 证明极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)g(x)dx$ 存在.

3.2 解答

1. $LHS = \beta \int_0^\alpha f(x)dx \geq \beta \alpha f(\alpha) \geq \alpha(\beta - \alpha)f(\alpha) \geq \alpha \int_\alpha^\beta f(x)dx = RHS$.
2. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + xf(y) + \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y} f(t)dt + \int_0^y f(t)dt + yf(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 两式相减得 $xf(y) + \frac{x^3y}{3} = yf(x) + \frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$. 经验证符合题意.
3. 设矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 有相似标准型 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 λ_1, λ_2 是方程 $\lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) = 0$ 的两个根. 则原椭圆在新坐标系下的方程为 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$, 面积 $S = \pi \sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}} = \pi \sqrt{\frac{1}{AC - B^2}}$.
4. 对应 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的扇形面积 $dS = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$, 其质心位于 $\frac{2}{3}r(\theta)$ 处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为 $dV = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta 2\pi \frac{2}{3}r(\theta) \sin \theta = \frac{2\pi}{3}r^3(\theta) \sin \theta d\theta$. 两边积分得到结果.
5. 原命题等价于 $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases} x = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \cos \theta \\ y = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \sin \theta \end{cases}$, 则面积 $S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta) \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = 8\pi a^2$.
6. 设 $f'(M) = 0$. 则周长 $C = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \leq \int_0^1 (1 + |f'(x)|) dx = 1 + \int_0^M f'(x) dx - \int_M^1 f'(x) dx = 1 + 2f(M) \leq 3$.
7. 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_0^h \pi (\sqrt{R^2 - z^2})^2 dz = \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi (R^2 h - \frac{1}{3} h^3)$. 对应位移 $[h, h + dh]$ 所做的微功 $dW = gV(h)\rho dh$. 从而 $W = g \int_0^R V(h) dh = g(\frac{2}{3} \pi R^4 + \frac{5}{12} \pi R^4) = \frac{13}{12} g \pi R^4$.
8. $\bar{x} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \cos \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(\sin \phi + 2 \cos \phi) - 2}{5(e^\phi - 1)}, \bar{y} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(2 \sin \phi - \cos \phi) + 1}{5(e^\phi - 1)}$.
9. 直线 AB 的参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) = a \\ y = \psi(t) = t \end{cases}, t \in [-2\pi a, 0]$. 于是 $S = - \int_0^{2\pi} y(t) dx(t) - \int_{-2\pi a}^0 \psi(t) d\phi(t) = - \int_0^{2\pi} a(\sin t - t \cos t) a(t \cos t) dt + 0 = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 + \pi a^2$.
10. 焦点为 $(\frac{1}{2}, 0)$, 设过焦点的直线为 $x - \frac{1}{2} = ky$, 与抛物线交点为 y_1, y_2 , 则围成的面积为 $S = \int_{y_1}^{y_2} (ky + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}) dy = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1 + y_2 = 2k, y_1 y_2 = -1$. 则 $S = \frac{2}{3}(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k = 0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.
11. $f(x)$ 单调, $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理, $\int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) f(x) dx = f(a) \int_a^\xi (x - \frac{a+b}{2}) dx + f(b) \int_\xi^b (x - \frac{a+b}{2}) dx = f(a) \int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) dx + (f(b) - f(a)) \int_\xi^b (x - \frac{a+b}{2}) dx = (f(b) - f(a)) \frac{1}{2}(b - \xi)(\xi - a) \geq 0$.
12. 由极限定义, $\forall \epsilon > 0, \exists X > a, \text{s.t. } \forall x \geq X, |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{4M}$. 从而 $\forall A', A'' \geq X, |\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx| = |f(A') \int_{A'}^\xi g(x)dx + f(A'') \int_\xi^{A''} g(x)dx| \leq 2M(|f(A')| + |f(A'')|) \leq \epsilon$. 由柯西收敛定理知极限存在.

4 第 4 次习题课: 广义积分的收敛性与计算

4.1 问题

1. $f(x) > 0, x \in (1, +\infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = -\lambda, \lambda > 1$, 试判断 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性.
2. (Euler 积分). 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$.
3. (Dirichlet 积分). 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
4. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = 0$.

5. 计算 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.
6. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上内闭可积, $f(+\infty) = A, f(-\infty) = B$. 证明 $\forall a \in \mathbb{R}$, 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a) - f(x)]dx$ 收敛, 并求其值.
7. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$ 的收敛性.
8. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^x \sin 2x}{x^p} dx$ 的收敛性和绝对收敛性.
9. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^p} dx, p \geq 0, a \in \mathbb{R}$ 的收敛性.
10. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q |\sin x|^r} dx, p, q, r > 0$ 的收敛性.
11. $f(x) \in C^1[0, 1]$ 且 $f'(x) > 0$, 证明广义积分 $\int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{x^p} dx$ 在 $p < 2$ 时收敛, 在 $p \geq 2$ 时发散.
12. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \frac{1}{x}) dx$ 收敛.

4.2 解答

1. 由极限定义, $\exists X > 1, \text{s.t.} \forall x > X, \frac{\ln f(x)}{\ln x} < -\frac{\lambda+1}{2} \Leftrightarrow f(x) < x^{-\frac{\lambda+1}{2}}$. 由比较判别法知无穷积分收敛.
2. 由对称性, $I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \sin x dx$. 做两倍变换, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.
3. 注意到 $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$, 从而 $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. 定义 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$. 由于 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = O(x)$, 因此 $f(x) \in R[0, \pi]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理 (2.1.2) 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) \sin(n+\frac{1}{2})x dx = 0$, 即是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. 再利用恒等式 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 立得结论.
4. 做变换 $t = \frac{1}{x}$, 则 $\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt = \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt := I_1 + I_2$. 对于 I_1 , 由定积分第二中值定理知 $\exists \xi_A \in [1, A]$ s.t. $I_1 = \int_1^{\xi_A} \cos^n t dt$. 因此对于任意固定的 $A, n \rightarrow +\infty$ 时 $I_1 \rightarrow 0$. 对于 I_2 , 成立 $|I_2| \leq \int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{A}$. 因此 $\forall \epsilon > 0$, 选择 $A = \frac{2}{\epsilon}$, 则 $|I_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$, 并选择充分大的 n 使得 $|I_1| < \frac{\epsilon}{2}$, 此时 $|I| \leq \epsilon$, 由极限定义知结论成立.
5. 做倒数变换, 知 $I(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{d\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x^2})(1+x^{-\alpha})} = I(-\alpha)$. 又由于 $I(\alpha) + I(-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, 因此 $I(\alpha) \equiv \frac{\pi}{4}$.
6. $\int_M^N [f(x+a) - f(x)]dx = \int_N^{N+a} f(x)dx - \int_M^{M+a} f(x)dx \rightarrow (A-B)a$.
7. 函数恒正, 只需讨论有界性. 令 $u_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$, 则 $u_k \leq k\pi \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = k\pi \int_0^\pi \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} \leq 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+4(k-1)^6 \pi^4 x^2} = \frac{k}{\pi(k-1)^3} \int_0^{(k-1)^3 \pi^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{2k^2}$. 由于 $\int_0^{+\infty} = \sum_{k=1}^n u_k \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < +\infty$, 因此原广义积分收敛.
8. 先考虑积分收敛性. 显然当 $p \leq 0$ 时原积分发散. 当 $p > 0$ 时, 由于 $|\int_a^A e^{\sin x} \sin 2x dx| = 2|\int_{\sin a}^{\sin A} e^{\sin x} \sin x d \sin x| = 2|e^{\sin A}(\sin A - 1) - e^{\sin a}(\sin a - 1)| < 8e, \frac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty} \frac{e^x \sin 2x}{x^p} dx$ 收敛, 我们只需考察积分在 0 处的性质. 由于当 $x \rightarrow 0$ 时 $\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \sim \frac{2}{x^{p-1}}$, 因此 $p \geq 2$ 时原积分发散, $p < 2$ 时原积分收敛. 再考虑绝对收敛性. 当 $1 < p < 2$ 时, $|\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p}| \leq \frac{e}{x^p}$, 因此绝对收敛. 当 $0 < p \leq 1$ 时, $|\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p}| \geq \frac{2p}{e} |\frac{\sin 2x}{(2x)^p}| \geq \frac{1}{e} |\frac{\sin^2 2x}{(2x)^p}| = \frac{1}{2e} (\frac{1-\cos 4x}{(2x)^p})$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{(2x)^p} dx$ 收敛, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x)^p} dx$ 发散, 因此原积分条件收敛.
9. 当 $a \neq 0, p > 0$ 时, $\frac{1}{1+x^p}$ 单调递减趋于 0, $\int_0^N \cos ax dx$ 有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 当 $a \neq 0, p = 0$ 时显然发散. 当 $a = 0, p > 1$ 时显然收敛. 当 $a = 0, 0 \leq p \leq 1$ 时显然发散.
10. 显然当 $q \leq p+1$ 时原积分发散. 当 $q > p+1$ 时, 一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q |\sin t|^r} dt \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^p \pi^p \int_0^\pi \frac{dt}{1+(k\pi)^q |\frac{2}{\pi} t|^r} \leq C_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^p}{k^{\frac{q}{r}}} \int_0^{2(k\pi)^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}$$

另一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q |\sin t|^r} dt \geq \sum_{k=0}^{+\infty} (k\pi)^p \int_0^\pi \frac{dt}{1+[(k+1)\pi]^q |t|^r} \geq C_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^p}{(k+1)^{\frac{q}{r}}} \int_0^{\pi[(k+1)\pi]^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}$$

$r > 1, \int_0^A \frac{dt}{1+t^r}$ 一致有界. $r = 1, \int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim \ln A$. $r < 1, \int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim A^{1-r}$. 因此原积分收敛 iff $q > (p+1) \max(r, 1)$.

11. 由柯西微分中值定理, $\exists \xi \in (0, x)$ s.t. $\frac{f(x)-f(0)}{x^p} = \frac{f'(\xi)}{x^{p-1}}$. 由于 $f'(x)$ 连续且大于 0, 因此 $\exists 0 < m < M$ s.t. $m < f'(x) < M$ 对 $\forall x \in [0, 1]$ 均成立, 即 $\frac{m}{x^{p-1}} < \frac{f(x)-f(0)}{x^p} < \frac{M}{x^{p-1}}$. 从而 $p \geq 2$ 时发散, $p < 2$ 时收敛.
12. $\int_0^{+\infty} f(x - \frac{1}{x}) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} f(x - \frac{1}{x}) d(x - \frac{1}{x}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}} f(t) dt$. 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 收敛, $\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}$ 单调有界, 由 Abel 判别法知 $\int_0^{+\infty} f(x - \frac{1}{x}) dx$ 收敛. 另一侧同理.

5 第 5 次习题课: 积分的综合运用

5.1 问题

1. 证明 π 是无理数. 你可以按照以下步骤: (1) 设 $\pi = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$, 定义 $f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$, 证明 $\forall i \in \mathbb{N}_+, f^{(i)}(0), f^{(i)}(\pi)$ 都是整数. (2) 证明定积分 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ 也是整数. (3) 证明 $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 1$, 得到矛盾.
2. $f(x) \in C^2[0, 1], f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$, 证明 $\int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 4$, 取等号当且仅当 $f(x) = x^3 - x^2$.
3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上恒正, 且满足 Lipschitz 条件 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$. 又已知对于 $a \leq c \leq d \leq b$ 成立 $\int_c^d \frac{dx}{f(x)} = \alpha, \int_a^b \frac{dx}{f(x)} = \beta$. 证明积分不等式 $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L\alpha} \int_c^d f(x) dx$.
4. $f(x) \in C[0, +\infty)$ 且平方可积, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$. 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(x) dx$.
5. (Euler-Poisson 积分). 利用数列 $\left\{ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right\}$ 的极限, 求积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. (你也许需要用到如下命题: 当 $a \geq 1$ 时, $0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^a \leq \frac{x^2}{a} e^{-x}$ 在区间 $[0, a]$ 上恒成立. 这由导数知识容易验证.)
6. 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.
7. $a, b > 0$, 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x}) dx$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x}) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt$.
8. $f(x) \in C^2[a, b]$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\int_a^b f(x) dx - (b-a)f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$.
9. $f'(x) \in R[0, 1]$, 定义 $A_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n = \frac{1}{2}(f(0) - f(1))$.
10. (等周问题). 长为 L 的曲线何时围成的区域面积最大? 你可以假设围成的区域是凸域且边界足够光滑, 以及其他正则性条件.
11. 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $\forall k = 1, 2, \dots, n, u_k(x)$ 均单调有界. 证明 $\int_0^{+\infty} f(x) \prod_{k=1}^n u_k(x) dx$ 收敛.
12. $f(x) \in C[0, +\infty), a > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + a \int_0^x f(t) dt) = A < \infty$, 证明 $f(+\infty) = 0$.

5.2 解答

1. (1) $f(x)$ 是一个次数从 n 到 $2n$ 的多项式. 至于 $f^{(i)}(0)$ 是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时 $i \geq n$, 求导后得到的非零常数值是 $i!c$, 且 c 是整数除以 $n!$ 得到的有理数, 从而 $i!c$ 是整数. 由于 $f(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f^{(i)}(\pi) = (-1)^i f^{(i)}(0)$, 因此 $f^{(i)}(\pi)$ 也是整数.
- (2) 由分部积分, $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(x)(-\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx = f(0) + f(\pi) + f'(x) \sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx$. $f(x)$ 是 $2n$ 此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - f''(0) - f''(\pi) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(0) + (-1)^n f^{(2n)}(\pi)$, 因此是整数.
- (3) 在区间 $[0, \pi]$ 上成立 $0 \leq a - bx = b(\pi - x) \leq a$, 因此 $0 \leq f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$, 从而 $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \int_0^\pi f(x) dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$. 当 n 足够大时, $\frac{\pi^{n+1} a^n}{n!} < 1$.
2. 令 $p(x) = x^3 - x^2$, 从而有 $\int_0^1 [(f''(x))^2 - (p''(x))^2] dx = \int_0^1 [f''(x) - p''(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 f''(x)p''(x) dx - 2 \int_0^1 [p''(x)]^2 dx \geq 0 + 2f'(x)p''(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 f'(x)p'''(x) dx - 8 = 2f'(1)p''(1) - 2f(x)p'''(x)|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x)p''''(x) dx - 8 = 0$.
3. 设 $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_0)$, 从而 $m \leq f(x) \leq m + L|x - x_0|, \frac{1}{m+L|x-x_0|} \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}$. 两边积分, 得到

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq m(b-a) + \frac{L}{2}[(x_0-a)^2 + (x_0-b)^2]$$

$$\frac{b-a}{m} \geq \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \beta \geq \frac{1}{L} \ln \frac{(x_0 + \frac{m}{L} - a)(-x_0 + \frac{m}{L} + b)}{(\frac{m}{L})^2}$$

因此

$$\int_a^b f(x) dx \leq \sup_{x_0 \in [a, b]} \left\{ m(b-a) + \frac{L}{2}[(x_0-a)^2 + (x_0-b)^2] \right\} = m(b-a) + \frac{L}{2}(b-a)^2$$

$$\beta \geq \inf_{x_0 \in [a, b]} \left\{ \frac{1}{L} \ln \frac{(x_0 + \frac{m}{L} - a)(-x_0 + \frac{m}{L} + b)}{(\frac{m}{L})^2} \right\} \Rightarrow b-a \leq \frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L}$$

从而

$$\int_a^b f(x) dx \leq m \left(\frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L} \right) + \frac{L}{2} \left(\frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L} \right)^2 = \frac{(e^{2L\beta} - 1)m^2}{2L}$$

对比欲证结论, 只需证明

$$\int_c^d f(x)dx \geq \alpha m^2 = m^2 \int_c^d \frac{dx}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{\int_c^d f(x)dx}{\int_c^d \frac{1}{f(x)}dx} \geq m^2$$

这由 $f(x) \geq m, \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}$ 立得.

4. 由 L'Hospital, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{g^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} 2g(x)f(x) = 0$. 因此 $\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx = \int_0^A g^2(x)d(-\frac{1}{x}) = -\frac{g^2(A)}{A} + 2 \int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}dx$. 再由 Cauchy 不等式, $\left(\int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}dx\right)^2 \leq \int_0^A f^2(x)dx \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \Rightarrow \left(\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx + \frac{g^2(A)}{A}\right)^2 \leq 4 \int_0^A f^2(x)dx \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \Rightarrow \left(\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx\right)^2 \leq 4 \int_0^A f^2(x)dx \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \Rightarrow \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \leq 4 \int_0^A f^2(x)dx$. 令 $A \rightarrow +\infty$ 即可.

5. 记 $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$. 做变换 $t = \sqrt{n} \sin x$ 知 $I_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 由于 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$, 因此只需求出极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right] dt$. 在提示中令 $x = t^2, a = n$, 得到估计式 $0 \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right] dt \leq \frac{\int_0^{\sqrt{n}} t^4 e^{-t^2} dt}{n}$. 当 $n \rightarrow +\infty$ 时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0, 由夹逼原理知欲求极限存在且为 0. 从而 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. $I = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2x)}{(2x)^2+4} d(2x) = \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{\ln 2}{6} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \stackrel{x=e^t}{=} \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{e^{2t}+1} dt - \frac{\pi \ln 2}{12} = -\frac{\pi \ln 2}{12}$.

7. 令 $t = ax - \frac{b}{x}$, 则 $x = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a}, ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2+4ab}, dx = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}} dt$, 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x}) dx &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^0 f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) dt \end{aligned}$$

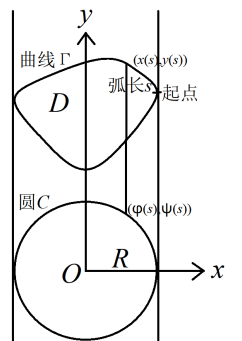
8. $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)d(x-a) = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)d\frac{(x-a)^2}{2} = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} f''(x)dx = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} dx$. 同理 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} + f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2} dx$. 两式相加得 $\int_a^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + (f''(\xi_1) + f''(\xi_2))\frac{(b-a)^3}{48} = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$. 最后一步用了 Darboux 定理.

9. 注意到 $A_n = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2} + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1)) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n} \right) + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1))$. 设 $|f'(x)| \leq M$, 从而 $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)d(x-\frac{2k-1}{2n}) = f(x)(x-\frac{2k-1}{2n}) \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)dx = \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n} - B_n$, 其中 $B_n := \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} (x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} (x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)dx = f'(\xi_{k,1}) \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} (x-\frac{2k-1}{2n})dx + f'(\xi_{k,2}) \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} (x-\frac{2k-1}{2n})dx = -\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2} + \frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}$. 综上所述, 我们有 $nA_n = \sum_{k=1}^n \frac{f'(\xi_{k,2})-f'(\xi_{k,1})}{8n} + \frac{f(0)-f(1)}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n = \frac{1}{8}(\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f'(x)dx) + \frac{f(0)-f(1)}{2} = \frac{f(0)-f(1)}{2}$.

10. 设曲线方程为 $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0, L]$, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$,

且 D 的面积为 $A = \int_0^L x dy = \int_0^L x(s)y'(s)ds$. 又设 $C: \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为

半径的圆, 此处仍选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面积为 $\pi R^2 = -\int_0^L y dx = -\int_0^L \psi(s)x'(s)ds$. 从而由 Cauchy 不等式, $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))ds \leq \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2}ds \leq \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)}ds = RL$. 因此我们成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq A + \pi R^2 \leq RL \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s) + \psi(s)y'(s))^2 = 0$. 由于 $x(s)^2 + \psi(s)^2 = R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = y'(s), \psi(s) = y(s) + y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, 圆也!



11. 由 Abel 判别法, $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)dx$ 收敛, 而 $u_2(x)$ 单调有界, 因此 $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)u_2(x)dx$ 收敛, 依此类推.
12. 记 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. 由 L'Hospital 法则, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}F(x)}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}(aF(x)+f(x))}{ae^{ax}} = \frac{A}{a}$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A - a \cdot \frac{A}{a} = 0$.

6 第 6 次习题课: 数项级数的基本概念与正项级数

6.1 问题

- 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ 的收敛性.
- 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!})^p$ 的收敛性.
- 判断级数 $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$ 的收敛性.
- 计算 $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4k^2-4k+1}$.
- 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}} \leq p, p \geq 1$.
- $a_n > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1) \geq 1$.
- $a_n > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.
- $0 < a_1 < \frac{\pi}{2}, a_n = \sin a_{n-1}$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p$ 的收敛性.
- (Bertrand 判别法). 对于正项级数, 证明:
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n [n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1] > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n [n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1] < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散} \end{cases}$$
- 正项级数 a_n 单调递减, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ 同敛散.
- 是否存在部分和序列有界但通项趋于 0 的发散级数?
- $a_n > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $a_n - a_{n+1}$ 单调下降. 证明 a_n 单调区域趋于 0, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}) = +\infty$.

6.2 解答

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n} = 1$, 因此原级数发散.
- 考虑 Rabbe 判别法. $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = n[(\frac{2n+5}{2n+2})^p - 1] = n[(1+\frac{3}{2n+2})^p - 1] = n[1+\frac{3p}{2n+2}+o(\frac{1}{n})-1] \rightarrow \frac{3}{2}p$, 因此 $p > \frac{2}{3}$ 时收敛, $p < \frac{2}{3}$ 时发散. $p = \frac{2}{3}$ 时, 记 $f(x) = (1+x)^{\frac{2}{3}}$, 则 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = (1+\frac{3}{2(n+1)})^{\frac{2}{3}} = 1+\frac{1}{n+1}+\frac{f''(\xi)}{2!}(\frac{3}{2(n+1)})^2 < 1+\frac{1}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} := \frac{b_n}{b_{n+1}}$. 由 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$ 知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, 即级数发散.
- $\sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4}, \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-2 \cos \frac{\pi}{4}} = 2 \sin \frac{\pi}{8}, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2+2 \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2-2 \cos \frac{\pi}{8}} = 2 \sin \frac{\pi}{16}$, 依此类推, 再利用 $\sin x \sim x$ 知原级数收敛.
- 注意到 $\arctan \frac{2}{4k^2-4k+1} = \arctan \frac{1}{2k-1} - \arctan \frac{1}{2k}$, 从而 $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4k^2-4k+1} = \arctan \frac{1}{2}$.
- $\frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}} = n^{\frac{p-1}{p}} [(\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^p - (\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}})^p] \stackrel{f(x)=x^p \text{ 的微分中值定理}}{=} n^{\frac{p-1}{p}} p(\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}})^{p-1} (\frac{1}{\sqrt[n]{n}} - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}) \leq p(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}})$. 两边累加.
- 反证法. 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1) < 1$. 则 $\exists N > 0, \text{s.t. } \forall n \geq N, n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}$. 两边累加, 知 $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{N+i} < \frac{a_N}{N}$, 这与调和级数的发散性矛盾.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛 $\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$. 因此可按从小到大顺序将 $\{a_n\}$ 重排为 $a_{\phi(1)} \leq a_{\phi(2)} \leq \cdots \leq a_{\phi(n)} \leq \cdots$. 令 $b_n = \frac{n}{a_{\phi(1)}+a_{\phi(2)}+\cdots+a_{\phi(n)}}$, 则 $\{b_n\}$ 单调递减, 且 $b_{2n} = \frac{2n}{a_{\phi(1)}+\cdots+a_{\phi(2n)}} \leq \frac{2n}{a_{\phi(n)}+\cdots+a_{\phi(2n)}} \leq \frac{2n}{na_{\phi(n)}} = \frac{2}{a_{\phi(n)}}$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$. 又因为 $\frac{n}{a_1+\cdots+a_n} \leq b_n$, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$ 收敛.

8. 上学期例题已证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n^2 = 3$, 因此 $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}, a_n^p \sim (\frac{3}{n})^{\frac{p}{2}}$, 从而当 $p \leq 2$ 时级数发散, $p > 2$ 时级数收敛.
9. 先证明第一种情况. 由条件知 $\exists N_1 > 0, \text{s.t.} \forall n > N_1, \ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1] > r_1 > 1 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + r_1}$. 可以验证当 $1 < p < r_1$ 时, $\frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + r_1} < \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \Leftrightarrow \frac{(n+1)[\ln^p(n+1) - \ln^p n]}{\ln^{p-1} n} < r_1$. 利用 $f(x) = x^p$ 的微分中值定理, 知 LHS $= \frac{(n+1)p \ln^{p-1}(n+\theta)[\ln(n+1) - \ln n]}{\ln^{p-1} n} < p \underbrace{(n+1)[\ln(n+1) - \ln n]}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\ln^{p-1}(n+1)}{\ln^{p-1} n}}_{\rightarrow 1} < r_1 = \text{RHS}$ 当 n 足够大时成立.
- 因此有 $\exists N_2 > N_1, \text{s.t.} \forall n > N_2, \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \Rightarrow a_n < \frac{C}{n \ln^p n}$. 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{n \ln^p n}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.
- 再证明第二种情况. 由条件知 $\exists N_3 > 0, \text{s.t.} \forall n > N_3, \ln n[n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1] < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + 1} > \frac{n \ln n}{(n+1) \ln(n+1)} \Rightarrow a_n > \frac{C}{n \ln n}$. 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{n \ln n}$ 发散, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.
10. $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{2^n+k} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} a_{2^n} \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_{2^{n-1}+k} = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$.
11. 存在. 一个例子为 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$.
12. 前者显然. 对于后者, $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} \geq \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{a_n - a_{n+1}}{\sum_{k=n}^{+\infty} (a_k^2 - a_{k+1}^2)} = \frac{a_n - a_{n+1}}{\sum_{k=n}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1})} \geq \frac{a_n - a_{n+1}}{\sum_{k=n}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})(a_k + a_{k+1})} \geq \frac{1}{2 \sum_{k=n}^{+\infty} a_n} \rightarrow +\infty$ 当 $n \rightarrow +\infty$ 时.

7 第 7 次习题课: 任意项级数与数项级数的运算

7.1 问题

- 讨论级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln n}$ 的收敛性和绝对收敛性.
- 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$ 的收敛性.
- $p, q > 0$, 讨论级数 $1 - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q} + \dots$ 的收敛性与绝对收敛性.
- 讨论级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}]$ 的收敛性与绝对收敛性.
- 级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 数列 $p_n > 0$ 且单调递增趋于 $+\infty$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{p_n} = 0$.
- 计算级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{5}n)}{n}$.
- $p > 0$, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} > \frac{2^p}{2^p+1}$.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$ 且绝对收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$ 且条件收敛, 证明 Cauchy 乘积收敛且 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = AB$.
- 如果对任意以 0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 都有 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛. 绝对收敛性呢?
- 对于两个发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?
- (1) 对于收敛级数和发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?
(2) 对于正项收敛级数和正项发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

7.2 解答

- $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减趋于 0, $\sum_{n=2}^k \sin n$ 对于 $\forall k \geq 1$ 有一致上界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 由于 $|\frac{\sin n}{\ln n}| \geq \frac{\sin^2 n}{\ln n} = \frac{1 - \cos 2n}{2 \ln n} = \frac{1}{2 \ln n} - \frac{\cos 2n}{\ln n}$, 而 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{\ln n}$ 收敛, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2 \ln n}$ 发散, 因此不绝对收敛.
- 合并同号项, 级数改写为 $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k b_k$, 其中 $b_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \leq \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0$. 另一方面, $b_k \geq \int_0^1 \frac{1}{k^2+x} dx + \int_1^2 \frac{1}{k^2+x} dx + \dots + \int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{k^2+x} dx = \int_0^{2k+1} \frac{1}{k^2+x} dx = \ln \frac{(k+1)^2}{k^2}$, 而 $b_{k+1} \leq \int_{-1}^0 \frac{1}{(k+1)^2+x} dx + \dots + \int_{2k+1}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2+x} dx =$

$\int_{-1}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2+x^2} dx = \ln \frac{(k+1)^2+2(k+1)}{k(k+2)} \Rightarrow b_k - b_{k+1} \geq \ln \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)} \geq 0$. 由 Leibniz 判别法知收敛.

3. (a) 当 $p > 1, q > 1$ 时, $|a_n| \leq \frac{1}{n^{\min(p,q)}}$, 因此绝对收敛. (b) 当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 由 Leibniz 判别法知条件收敛. (c) 当 $p > 1, 0 < q \leq 1$ 或 $0 < p \leq 1, q > 1$ 时, 级数正部 (或负部) 收敛, 负部 (或正部) 发散, 因此发散. (d) 当 $0 < p < q \leq 1$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q})}{\frac{1}{(2n-1)^p}} = 1$ 知级数发散. (e) 当 $0 < q < p \leq 1$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{(2n)^q} + \frac{1}{(2n+1)^p}}{-\frac{1}{(2n)^q}} = 1$ 知级数发散.

4. (a) $p > 1$ 时, 由 $\left| \ln[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}] \right| < \frac{1}{n^p}$ 知绝对收敛.

(b) 由 Taylor 展开, $\ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2(1+\xi_n)^2} \frac{1}{n^{2p}}$, 因此 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时级数条件收敛, $0 < p < \frac{1}{2}$ 时级数发散.

5. 记 $S_{n,n+p} = \sum_{k=n}^{n+p} b_k, M = \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n - a_{n-1}|$. 由收敛性, $\exists N > 0, \text{s.t. } \forall n > N, |S_{n,n+p}| < \frac{\epsilon}{2M}$. 从而有 $\forall n > N, |\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k| = |\sum_{k=n}^{n+p} a_k (S_{n,k} - S_{n,k-1})| = |a_{n+p} S_{n,n+p} + \sum_{k=n}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) S_{n,k}| \leq |a_{n+p}| |S_{n,n+p}| + \sup_{n \leq k \leq n+p-1} |S_{n,k}| \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \sup_{n \leq k \leq n+p} |S_{n,k}| \left[|a_{n+p}| + \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_{k+1} - a_k| \right] \leq \frac{\epsilon}{2M} 2M = \epsilon$. 由 Cauchy 判别准则知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

6. 记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 并设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, 则 $\sum_{k=1}^n p_k a_k = p_1 S_1 + \sum_{k=2}^n p_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (p_k - p_{k+1}) + S_n p_n \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^n p_k S_k}{p_n} = S_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} = (S_n - S) - \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} + S \frac{p_1}{p_n}$. 显然 $S_n - S \rightarrow 0, S \frac{p_1}{p_n} \rightarrow 0$. 对于第二项, 设 $|S_n| \leq M$, 由极限定义, $\exists N_1 > 1, \text{s.t. } \forall n \geq N_1, |S_n - S| < \frac{\epsilon}{2}$. 从而有估计 $|\sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n}| \leq 2M \sum_{k=1}^{N_1} \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=N_1+1}^{n-1} \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \leq$

$2M \frac{p_{N_1+1} - p_1}{p_n} + \frac{\epsilon}{2}$. 又由极限定义, $\exists N_2 > N_1, \text{s.t. } \forall n \geq N_2, \frac{p_{N_1+1} - p_1}{p_n} \leq \frac{\epsilon}{4M}$. 此时 $|\sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n}| < \epsilon$, 即 $\sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \rightarrow 0$.

7. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \sqrt{5}k}{k} = -\int_{\sqrt{5}}^{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kt dt = -\int_{\sqrt{5}}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t - \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = -\int_{\sqrt{5}}^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t dt + \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{5}) \xrightarrow{R-L} \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{5})$.

8. 利用函数 $f(x) = \frac{1}{x^p}$ 的凸性, 成立 $\frac{1}{(4k-1)^p} - \frac{1}{(4k)^p} + \frac{1}{(4k+1)^p} - \frac{1}{(4k+2)^p} > \frac{1}{(4k)^p} - \frac{1}{(4k+2)^p}$, 从而 $S_{4n+2} > 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}(1 - S_{2n})$, 两边取极限知 $S > 1 - \frac{S}{2^p}$, 即 $S > \frac{2^p}{2^p+1}$.

9. 记 $A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, 则 $\sum_{k=1}^n c_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \dots + a_n B_1 = A_n B + (a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_1)$ (这里 $\beta_k = B_k - B := \Delta_1(n) + \Delta_2(n)$). 显然 $\Delta_1(n) \rightarrow AB$, 下证 $\Delta_2(n) \rightarrow 0$. 设 $|\beta_n| \leq \beta, \forall n \geq 1$. 由定义, $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 3, \text{s.t. } \forall n > N, \forall p \geq 1, |\beta_n| < \frac{\epsilon}{2(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|)}$, $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \frac{\epsilon}{2\beta}$. 从而当 $n \geq 2N$ 时, $|\Delta_2(n)| \leq |\sum_{k=1}^N a_k \beta_{n+1-k}| + |\sum_{k=N+1}^n a_k \beta_{n+1-k}| \leq \epsilon$.

10. 不妨设 $a_n > 0$, 否则可将对应 x_n 反号, 题目条件与绝对收敛性结论不变. 采用反证法, 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散, 则可以归纳构造数列 A_n , 满足 $A_0 = 0, A_n = \inf_{k \in \mathbb{N}_+, i=A_{n-1}+1}^k a_i \geq n$. 从而可定义 $\{x_n\}$ 为 $A_1 - A_0$ 个 1, $A_2 - A_1$ 个 $\frac{1}{2}, \dots, A_n - A_{n-1}$

个 $\frac{1}{n}, \dots$ 的依次排列, 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n > 1 + 1 + \dots = +\infty$. 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛.

11. 不一定, 反例是 $a_0 = 1, a_n = -(\frac{3}{2})^n$ 和 $b_0 = 1, b_n = (\frac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}})$. 显然 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ 均发散, 但它们的 Cauchy 乘积 $c_n = (\frac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}) - (\frac{3}{2})^{n-1}(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}) - \dots - (\frac{3}{2})^{n-1}(2^1 + \frac{1}{2^2}) - (\frac{3}{2})^n = (\frac{3}{4})^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 收敛.

12. (1) 不一定, 反例是 $a_n \equiv 0$ 和 $b_n \equiv 1$. 当然也不一定收敛, 如 $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = n$.

(2) 一定. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散, 则 $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \geq a_1 b_{n-1}$, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 发散.

8 第 8 次习题课: 无穷乘积与函数项级数的基本概念

8.1 问题

1. 证明 $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 当 $n \rightarrow +\infty$ 时极限存在, 并求其值. (请不要用 Stirling 公式)

2. 设 $x \in (0, 1)$, 证明 $\prod_{n=1}^{+\infty} (1+x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1-x^{2n-1})^{-1}$.

3. (Euler 公式). 证明 $\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2})$. 你可以将 $\sin[(2n+1)\phi]$ 写成关于 $\sin \phi$ 的多项式, 并利用零点求解之.

- 讨论无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$ 的收敛性.
- 讨论无穷乘积 $\prod_{n=n_0}^{+\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$ 的收敛性, 其中取 n_0 足够大使得每一项都是正数.
- 计算无穷乘积 $2\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$. 你可以先写出通项公式, 然后逐步化简.
- $f(x) \in D[1, +\infty)$, 且 $\int_1^{+\infty} |f'(x)|dx$ 收敛, 证明广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 同敛散.
- 试构造两个单调递减且发散的级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, 使得 $\sum_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n)$ 收敛.
- 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ 收敛, 证明: (1) $\forall k \in \mathbb{N}_+, \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k}$ 收敛; (2) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k} = 0$.
- $0 < p < 1, a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n^p}$, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.
- 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ 的收敛域.
- 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$ 的收敛域.

8.2 解答

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+n)^{n+\frac{1}{2}}} \Rightarrow \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1 - (n + \frac{1}{2})\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. 因此有 $a_n = \exp(\ln a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}) = \exp\{\ln a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} [-\frac{1}{12k^2} + o(\frac{1}{k^2})]\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在, 并记为 $a(a \neq 0)$. 另一方面, 由 Wallis 公式, $a = \frac{a^2}{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n+1}} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^n n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!!}{\sqrt{n}(2n-1)!!} = \sqrt{2\pi}$.
- $\prod_{n=1}^{+\infty} (1+x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{+\infty} (1+x^{2^i(2n-1)}) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1-x^{2n-1})^{-1}$.
- 注意到 $\sin[(2n+1)\phi]$ 可展开为 $\sin \phi$ 的 $2n+1$ 次多项式, 且只含奇次幂项, 因此 $\sin[(2n+1)\phi] = \sin \phi P(\sin^2 \phi)$, 其中 $P(\cdot)$ 是 n 次多项式. 由极限关系知 $P(0) = 2n+1$, 且 LHS 全部零点为 $x_k = \frac{k\pi}{2n+1}, k=1, \dots, n$, 因此 $P(t) = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right) \Rightarrow \sin x = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$. 现在, 问题变为求 RHS 在 $n \rightarrow +\infty$ 时的极限. 记 $U_m = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right), V_m = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_m = x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right), 1 > V_m \geq \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{(\frac{x}{k})^2}{\pi^2 \frac{k^2 \pi^2}{(2n+1)^2}}\right) = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) > \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$. 因此由夹逼原理, $\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$.
- $\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 = \frac{1}{e} e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} - 1 \sim n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1 \sim -\frac{1}{2n}$, 因此该无穷乘积发散.
- $\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} - 1 = \frac{\alpha\beta - \gamma + (\alpha + \beta - \gamma - 1)n}{(1+n)(\gamma+n)}$. 因此该无穷乘积收敛当且仅当 $\alpha + \beta - \gamma - 1 = 0$.
- 主要难点在于如何写成通式.

$$\begin{aligned}
 P_n &= 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{(2^{k-1}-1)!!(2^k)!!}{(2^{k-1})} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2k}} (2^n-1)!! = \frac{(2^n)!}{2^{2^{n-1}-1}(2^{n-1})!} 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2^{2^{k-1}-1}(2^{k-1})!}{2^{2^{k-2}}(2^{k-2})!} \cdot \frac{(2^k)!}{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!} \right]^{\frac{1}{2k-1}} \\
 &= 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[2^{2^{k-1}-\frac{1}{2}} \frac{((2^{k-1})!)^3}{((2^{k-2})!)^2(2^k)!} \right]^{\frac{1}{2k-1}} = 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[2^{1-\frac{1}{2k}} \frac{\left(\frac{(2^{k-1})!}{(2^k)!}\right)^{\frac{1}{2k-1}}}{\left(\frac{(2^{k-2})!}{(2^{k-1})!}\right)^{\frac{1}{2k-2}}} \right] = 2\sqrt{2} \cdot 2^{n-1-\sum_{k=2}^n \frac{1}{2k}} \frac{1}{\frac{1}{2} \left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^{\frac{1}{2n-1}}} \\
 &= 2 \cdot 2^{n+\frac{1}{2n}} \left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^{\frac{1}{2n-1}} = 2 \left\{ 2^{n2^{n+1}} \left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2^n}} \stackrel{\text{Stirling}}{\sim} 2 \left[\frac{2\pi 2^{n-1} \left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^n \left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^{n+1}}} \right]^{\frac{1}{2^n}} = e
 \end{aligned}$$

- 只需注意到 $\left| \sum_{k=m}^{n-1} - \int_m^n f(x)dx \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} |f(k) - f(x)|dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \int_k^{k+1} |f'(t)|dtdx \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \int_k^{k+1} |f'(t)|dxdt \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} |f'(t)|dt = \int_m^n |f'(t)|dt$, 因此由 Cauchy 收敛准则知广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 同敛散.

8. 一个例子如下.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= \underbrace{\frac{1}{1^2}}_{1^2 \uparrow} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{5^2} + \underbrace{\frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{6^2}}_{6^2 \uparrow} + \frac{1}{42^2} + \cdots + \frac{1}{1805^2} + \cdots \\ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n &= \frac{1}{1^2} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^2}}_{2^2 \uparrow} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{41^2} + \underbrace{\frac{1}{42^2} + \cdots + \frac{1}{42^2}}_{42^2 \uparrow} + \cdots\end{aligned}$$

显然 $\sum_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

9. (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+k)a_{n+k}$ 收敛, $\frac{n}{n+k}$ 随 n 单调有界, 由 Abel 判别法知收敛. (2) 记 $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} ka_k$. 则

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=1}^m na_{n+k} \right| &= \left| \sum_{n=1}^m \frac{n}{n+k} (n+k)a_{n+k} \right| = \left| \sum_{n=1}^m \frac{n}{n+k} (R_{n+k-1} - R_{n+k}) \right| \\ &= \left| \frac{1}{k+1} R_k - \frac{m}{k+m} R_{k+m} + \sum_{n=1}^{m-1} R_{n+k} \left(\frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{k+1} |R_k| + \frac{m}{k+m} |R_{k+m}| + \sup_{k+1 \leq j \leq n+m-1} |R_j| \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) \\ &\leq \frac{1}{k+1} |R_k| + \frac{m}{k+m} |R_{k+m}| + \sup_{j \geq k+1} |R_j| \left(\frac{m}{k+m} - \frac{1}{k+1} \right)\end{aligned}$$

$$\text{令 } m \rightarrow +\infty, \text{ 得到 } \left| \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k} \right| \leq \frac{1}{k+1} |R_k| + \sup_{j \geq k+1} |R_j| \leq 2 \sup_{j \geq k} |R_j| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

10. 容易看出 a_n 单调递减. $a_{n+1} - a_n = -a_{n+1}a_n^p \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^p} < \frac{a_n - a_{n+1}}{\xi_n^p} \stackrel{\text{微分中值定理}}{=} \frac{1}{1-p} (a_n^{1-p} - a_{n+1}^{1-p})$. 两边累加.

11. 显然收敛域为 $-1 < x < 1$.

12. 原级数可改写为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^x (1 + \frac{1}{n})^n} \right)^n$, 而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, 因此当 $x > -1$ 时收敛, 当 $x < -1$ 时发散. 而当 $x = -1$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n - n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{\frac{1}{2}}$, 因此原幂级数发散.

9 第 9 次习题课: 函数项级数的一致收敛

9.1 问题

- $f_0(x) \in R[0, a], f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$, 讨论 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0, a]$ 上的一致收敛性.
- 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在区间 $[0, 1]$ 上的一致收敛性.
- 讨论函数列 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性.
- 函数列 $\{f_n\}, \{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛, 且对于 $\forall n, f_n, g_n$ 在 I 上有界. 讨论函数列 $\{f_n g_n\}$ 在 I 上的一致收敛性.
- 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 \mathbb{R} 上的绝对收敛性、一致收敛性和绝对一致收敛性.
- 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}} \sin nx$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上的一致连续性.
- $f(x) \in D[0, \frac{1}{2}], f(0) = 0, f'(x) \geq 0$, 讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(x^n)$ 在区间 $[0, \frac{1}{2}]$ 上一致收敛性.
- $f(x) \in C^1(a, b)$, 定义 $F_n(x) = \frac{n}{2} [f(x + \frac{1}{n}) - f(x - \frac{1}{n})]$, 证明函数列 $\{F_n\}$ 在 (a, b) 上内闭一致收敛.
- 函数列 $f_n(x) = \cos nx$ 是否存在 \mathbb{R} 上内闭一致收敛的子列?
- $f_n(x)$ 在 \mathbb{R} 上可积一致收敛到 $f(x)$, 且存在 \mathbb{R} 上的可积函数 $F(x)$ 满足 $|f_n(x)| \leq F(x)$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.
- a_n 单调递减趋于 0, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛的充要条件是 $a_n = o(\frac{1}{n})$.
- $\forall n \in \mathbb{N}_+, \{u_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上均单调递增, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a), \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(b)$ 绝对收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

9.2 解答

- 不妨设 $|f_0(x)| \leq M$, 则 $f_1(x) \leq Mx, \dots, f_n(x) \leq \frac{Mx^n}{n!}$, 由最值判别法知一致收敛.
- $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(\frac{1}{2n}) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin \frac{k}{2n}}{k} \geq \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}$, 因此不一致收敛.
- 显然 $f_n(x) \rightarrow \max(1, x)$. 在 $[0, 1]$ 上, $|f_n(x) - 1| \leq \sqrt[3]{2} - 1$; 在 $[1, +\infty)$ 上, $|f_n(x) - x| \leq \sqrt[3]{2} - 1$ (因为 $(f_n(x) - x)' < 0$). 因此由最值判别法知一致收敛.
- 先证一致有界性. 由一致收敛性, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, s.t. $\forall m, n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$. 从而对于 $\forall n \in \mathbb{N}_+, |f_n(x)| \leq \sup_{1 \leq k \leq N} |f_k(x)| + 1 := M_f$, 因此一致有界. 同理 $\forall n \in \mathbb{N}_+, |g_n(x)| \leq M_g$. 从而 $|f_m(x)g_m(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq |f_m(x)g_m(x) - f_m(x)g_n(x)| + |f_m(x)g_n(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq M_f|g_m(x) - g_n(x)| + M_g|f_m(x) - f_n(x)|$. $\forall \epsilon > 0, \exists N', \text{ s.t. } \forall m, n > N', |f_n - f_m| < \frac{\epsilon}{2M_g}, |g_n - g_m| < \frac{\epsilon}{2M_f}$. 从而 $|f_m(x)g_m(x) - f_n(x)g_n(x)| < \epsilon$.
- 绝对 (一致) 收敛性: $\left| \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n} \right| \begin{cases} = 0, & x = 0 \\ \leq \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, & x \neq 0 \end{cases}$ 知绝对收敛, $\left[\sum_{k=n}^{2n} \left| \frac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k} \right| \right]_{x^2=\frac{1}{n}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}-1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}} > \frac{e-1}{e^2}$ 知不一致收敛.
- 绝对一致收敛. 一致收敛性: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$ 有界, $\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 随 n 单调递减且一致趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知一致收敛.
- 记 $f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{1-x^{2n}}$. 则 $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \Leftrightarrow (1-x)(1+x^{2n+1}) \geq 0$ 恒成立, 且 $f_n(x) = \frac{x^n}{(1+x^n)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})} \leq \frac{1}{2n} \Rightarrow 0$, 而 $\sum_{n=1}^N \sin nx$ 关于 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 一致有界, 因此由 Dirichlet 判别法, 知原级数一致收敛.
- $\sum_{n=1}^N (-1)^n$ 一致有界, $f(x^n)$ 随 n 单调递减且一致趋于 0, 有 Dirichlet 判别法知一致收敛.
- 由导数定义, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}} + \frac{f(x-\frac{1}{n})-f(x)}{-\frac{1}{n}} \right] = f'(x)$. 另一方面, 考虑闭区间 $[c, d]$, 则有 $|F_n(x) - f'(x)| = \frac{1}{2} \left[\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}} + \frac{f(x-\frac{1}{n})-f(x)}{-\frac{1}{n}} - 2f'(x) \right] = \frac{1}{2} [(f'(\xi_1) - f'(x)) + (f'(\xi_2) - f'(x))] \leq \sup_{|x-y| < \frac{1}{n}} |f'(x) - f'(y)| \rightarrow 0$, 其中最后一步利用了 $f'(x)$ 在区间 $[\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}]$ 上的一致连续性.
- 不存在. 假设 $f_{n_k} = \cos n_k x$ 在 \mathbb{R} 上内闭一致收敛. 由收敛性, $\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } \forall m > k > N, \forall x \in [-1, 1], |\cos n_k x - \cos n_m x| < \epsilon$. 当 $n_m > 2n_k$ 时, 考虑 $x = \frac{1}{n_m}$, 则 $|\cos n_k x - \cos n_m x| = |\cos \frac{n_k}{n_m} - \cos 1| > \cos \frac{1}{2} - \cos 1$. 矛盾.
- $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \exists N' > 0, \text{ s.t. } \forall n > N', |\int_N^{+\infty} f_n(x) dx| \leq \int_N^{+\infty} |f_n(x)| dx \leq \int_N^{+\infty} F(x) dx < \frac{\epsilon}{8}, |\int_{-\infty}^{-N} f_n(x) dx| < \frac{\epsilon}{8}$, 且 $|\int_{-N}^N f_n(x) dx - \int_{-N}^N f(x) dx| \leq \int_{-N}^N |f_n(x) - f(x)| dx < 2N \cdot \frac{\epsilon}{4N} = \frac{\epsilon}{2}$. 因此, 我们有估计 $|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx| \leq |\int_N^{+\infty} f_n(x) dx| + |\int_N^{+\infty} f(x) dx| + |\int_{-\infty}^{-N} f_n(x) dx| + |\int_{-\infty}^{-N} f(x) dx| + |\int_{-N}^N f_n(x) dx - \int_{-N}^N f(x) dx| < \frac{\epsilon}{8} \cdot 4 + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
- 记 $S_{n,p}(x) = \sum_{k=n}^p a_k \sin kx$. 先证必要性. $o(1) = S_{n,2n}(\frac{\pi}{4n}) = \sum_{k=n}^{2n} a_k \sin \frac{k\pi}{4n} \geq \frac{n}{2} (a_{2n-1} + a_{2n}) \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow a_n = o(\frac{1}{n})$. 再证充分性. 定义单调递减数列 $b_n = \sup_{m \geq n} \{ma_m\} = o(1)$. (a) 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{p}$ 时, $|S_{n,p}(x)| \leq \sum_{k=n}^p ka_k x \leq pb_n x \leq b_n \pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. (b) 当 $x \geq \frac{\pi}{n}$ 时, 由于 $\forall m > n, |\sum_{k=n}^m \sin kx| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \leq \frac{\pi}{x} \leq n$, 利用 Abel 变换可知 $|S_{n,p}(x)| \leq na_n \leq b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. (c) 当 $\frac{\pi}{p} < x < \frac{\pi}{n}$ 时, 取 $q = \lfloor \frac{\pi}{x} \rfloor$, 则 $|S_{n,p}(x)| \leq |S_{n,q}(x)| + |S_{q+1,p}(x)| \leq b_n \pi + b_{q+1} \leq (\pi+1)b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. 从而由 Cauchy 准则知一致收敛.
- $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{ s.t. } \forall m \geq n \geq N, |\sum_{k=n}^m u_k(a)| < \epsilon, |\sum_{k=n}^m u_k(b)| < \epsilon$. 从而对 $\forall x \in [a, b], -\epsilon \leq \sum_{k=n}^m u_k(a) \leq \sum_{k=n}^m u_k(x) \leq \sum_{k=n}^m u_k(b) \leq \epsilon$, 然后用 Cauchy 收敛准则.

10 第 10 次习题课: 一致收敛函数项级数的性质

10.1 问题

- 设连续函数序列 $f_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 且 $f(x)$ 没有零点. 证明 $\frac{1}{f_n(x)}$ 也一致收敛.
- 证明 $f_n(x) = nx(1-x)^n$ 在区间 $[0, 1]$ 上不一致收敛, 但是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$.
- 可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 f , 且 $\forall n \in \mathbb{N}_+, f_n$ 有原函数 F_n , 证明 f 也有原函数 F .
- 证明 $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

5. 证明 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
6. 求级数 $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \cdots$ 的和.
7. $x \in (-1, 1)$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ 的和.
8. $x > 1$, 求函数项级数和函数的导数 $\left[\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \frac{x^8}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)} \cdots \right]'$.
9. (Arzela-Ascoli 引理). E 是紧集, 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上逐点有界, 等度连续 ($\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t. } \forall n \in \mathbb{N}_+, \forall |x-x'| < \delta, |f_n(x) - f_n(x')| < \epsilon$). 证明 $\{f_n(x)\}$ 存在 E 上的一致收敛子列.
10. 区间 $[a, b]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 逐点有界, 证明: 存在 $[a, b]$ 的一个子区间, 使得 $\{f_n(x)\}$ 在此区间上一致有界.
11. 区间 $[a, b]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛到 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 连续的充要条件是 $\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \exists N' > N, \text{s.t. } \forall x \in [a, b], \exists n_x \in [N, N'], \text{s.t. } |f_{n_x}(x) - f(x)| < \epsilon$.
12. 试举一个函数列 $\{f_n(x)\}$, 使得 $\{f'_n(x)\}$ 在 \mathbb{R} 上一致收敛, $\{f_n(x)\}$ 在 \mathbb{R} 上处处收敛但不一致收敛.

10.2 解答

1. $f(x) \in C[a, b]$ 且没有零点, 因此不妨设 $f(x) > 2m > 0$, 从而 $\exists N > 0, \text{s.t. } \forall n > N, \forall x \in [a, b], f_n(x) > m, |f_n(x) - f(x)| \leq m^2 \epsilon$. 这样就有 $|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}| = \frac{1}{f_n(x)f(x)} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ 恒成立 \Rightarrow 一致收敛.
2. $f_n(\frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n})^n \geq \frac{1}{4}$ 在 $n \geq 2$ 时恒成立, 因此不一致收敛. 但是 $f_n(x) \rightarrow 0$, 且 $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0$.
3. 容易证明 $f \in R[a, b]$. 设 $F_n = \int_a^x f(t) dt$, 则 $\sup_{a \leq x \leq b} |F_n(x) - F_m(x)| \leq \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^x |f_n(t) - f_m(t)| dt \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f_m(x)| dx \rightarrow 0 \Rightarrow \{F_n\}$ 一致收敛, 不妨设极限函数为 F . 交换极限和求导顺序, 知 $F'(x) = f(x)$.
4. $x^{-x} = e^{-x \ln x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!}$. 一致收敛可交换极限积分顺序, 因此 $\int_0^1 x^{-x} dx = \int_0^1 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!} dx = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!} dx = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.
5. 考虑 $\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \ln t = \frac{t \ln t}{1-t}$. $\forall x \in (0, 1), t \in [0, x], |t^n \ln t| = |t^{n-1} t \ln t| \leq x^{n-1} e^{-1}$, 因此一致收敛, 从而 $\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \ln t dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^n \ln t dt = \int_0^x \frac{t \ln t}{1-t} dt$. 由于 $\forall y \in [0, 1], |\int_0^y t^n \ln t dt| = |\frac{y^{n+1} \ln y}{n+1} - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2}| \leq \frac{e+1}{(n+1)^2}$, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^y t^n \ln t dt$ 对 $y \in [0, 1]$ 一致收敛, 从而连续, 即是 $\int_0^1 \frac{t \ln t}{1-t} dt = \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \frac{t \ln t}{1-t} dt = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^n \ln t dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 t^n \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. 两边同时加上 $\int_0^1 \ln t dt$ 得到 $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
6. 原式 $= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{8n-1} - \frac{1}{8n+1}) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 [x^{8n-2}(1-x^2)] dx$. 记 $u_n(x) = \int_0^1 [t^{8n-2}(1-t^2)] dt$. 显然 $u_n(x) \in C[0, 1]$ 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 一致收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1-0} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \frac{t^6}{(1+t^2)(1+t^4)} dt = \int_0^1 \frac{t^6}{(1+t^2)(1+t^4)} dt = 1 - \frac{1}{8}(1 + \sqrt{2})\pi$, 其中倒数第三个等号利用了 $\forall x \in (0, 1)$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} t^{8n-2}(1-t^2)$ 在区间 $[0, x]$ 上的一致收敛性. 因此原式 $= \frac{1}{8}(1 + \sqrt{2})\pi$.
7. 记 $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, 并任取 $0 < \delta < \frac{1}{2}$. 在闭区间 $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ 上, $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$ 一致收敛, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 收敛, 因此 $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow S(x) = \ln(1+x) + C$. 由 $S(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.
8. 被导函数 $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\prod_{k=0}^n (1+x^{2^k})} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1-x^{2^{n+1}}} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}} \right) = 1$, 因此其导数为 0.
9. 由 E 紧, 知存在可数稠密子集 $Q = \{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. $\{f_n(x_1)\}$ 有界, 因此可抽取收敛子列 $\{f_{n_1}(x_1)\}$. 同理 $\{f_{n_1}(x_2)\}$ 有界, 因此可抽取收敛子列 $\{f_{n_2}(x_2)\}$. 依此类推, 考虑对角线子列 $\{f_{n,n}(x)\}$, 显然对于 $\forall x \in Q, f_{n,n}(x)$ 都收敛. 由等度连续性知 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t. } \forall n \in \mathbb{N}_+, \forall |x-x'| < \delta, |f_n(x) - f_n(x')| < \frac{\epsilon}{3}$. 由于 $\cup_{x \in Q} B(x, \delta)$ 是 E 的一个开覆盖, 因此存在有限子覆盖 $\cup_{k=1}^K B(y_k, \delta)$. 由 $f_{n,n}(x)$ 在 Q 上的收敛性知 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \text{s.t. } \forall n, m > N, \forall k = 1, 2, \dots, K, |f_{n,n}(y_k) - f_{m,m}(y_k)| < \frac{\epsilon}{3}$. 从而 $\forall x \in E, \forall n, m > N, \exists y_k, \text{s.t. } |x - y_k| < \delta$, 且 $|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \leq |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(y_k)| + |f_{n,n}(y_k) - f_{m,m}(y_k)| + |f_{m,m}(y_k) - f_{m,m}(x)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. 这说明 $\{f_{n,n}(x)\}$ 一致收敛.

10. 用反证法. 对 $M = 1, \exists n_1 \in \mathbb{N}_+, [a_1, b_1] \subset [a, b], \text{s.t.} \forall x \in [a_1, b_1], |f_{n_1}(x)| > 1$. $\{f_n(x)\}$ 在 $[a_1, b_1]$ 上不一致有界, 因此对 $M = 2, \exists n_2 > n_1, [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], \text{s.t.} \forall x \in [a_2, b_2], |f_{n_2}(x)| > 2$. 依此类推. 这样取出来的 $f_{n_k}(x)$ 和区间 $[a_k, b_k]$ 满足 $\forall x \in [a_k, b_k], |f_{n_k}(x)| \geq k$ 且 $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{+\infty}$ 构成一个闭区间套. 因此 $\exists x_0 \in \cap_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$, 且 $|f_{n_k}(x_0)| \geq k$. 这与 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 处的有界性矛盾.

11. 先证必要性. $\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \forall x \in [a, b], \exists N_x > N, \text{s.t.} |f_{N_x}(x) - f(x)| < \epsilon$. 由连续性, $\exists \delta_x > 0, \text{s.t.} \forall x \in (x - \delta_x, x + \delta_x), |f_{N_x}(x) - f(x)| < \epsilon$. $\cup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x)$ 构成了 $[a, b]$ 的开覆盖, 存在有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) \supset [a, b]$. 因此可取 $N' = \max_{i=1, 2, \dots, n} N_{x_i}$.

再证充分性. 考虑在 x 处并做分解 $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$. 由 $f_n(x)$ 的收敛性, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{s.t.} \forall n \geq N, |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. 再由题给条件, $\exists N' > N, \text{s.t.} \forall y, \exists n_y \in [N, N'], |f_{n_y}(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. 最后由连续性, $\exists \delta > 0, \text{s.t.} \forall |x - y| < \delta, \forall n \in [N, N'], |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. 此时 $\forall |x - y| < \delta$, 取 $n = n_y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$, 即连续性得证.

12. $f_n(x) = \sin \frac{x}{n^2}$.

11 第 11 次习题课: 幂级数的基本概念与性质

11.1 问题

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+2\cos \frac{n\pi}{4})^n}{n \ln n} x^n$ 的收敛域.
2. 求级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^K k^n}{n^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域, 其中 $K \in \mathbb{N}_+$.
3. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{v} \sqrt{n}}} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域.
4. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} C_n^k$.
5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$ 的收敛域与和函数.
6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n! 2^n} x^n$ 的收敛域与和函数.
7. 求级数 $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m^2 n}{3^m (n 3^m + m 3^n)}$ 的和.
8. $a_n > 0, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$.
9. 证明 $x = \sin x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 并据此计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
10. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. 证明当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$.
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$. 证明若 Cauchy 乘积级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 收敛, 则它必收敛于 AB .
12. 设曲线 $x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}} = 1 (n > 1)$ 在第一象限与坐标轴围成的面积为 $I(n)$, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} I(n) < 4$.

11.2 解答

1. $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(1+2\cos \frac{n\pi}{4})^n}{n \ln n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (1+2\cos \frac{n\pi}{4}) = 3$, 因此收敛半径是 $\frac{1}{3}$. 考察端点. $x = \frac{1}{3}$ 时, 原式 $= \sum_{n=1}^7 \frac{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{n\pi}{4})^n}{n \ln n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{(8n+k)\pi}{4})^{8n+k}}{(8n+k) \ln(8n+k)} = C + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{(8n+k)\pi}{4})^{8n+k}}{(8n+k) \ln(8n+k)} \geq C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(8n) \ln(8n)} + \frac{(\frac{1-\sqrt{2}}{3})^{8n+3}}{(8n+3) \ln(8n+3)} + \frac{(\frac{1-\sqrt{2}}{3})^{8n+5}}{(8n+5) \ln(8n+5)} \right] \geq C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(8n) \ln(8n)} + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{8n+1} \frac{2}{(8n) \ln(8n)} \right] \geq C + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(8n) \ln(8n)} \right] \Rightarrow$ 原级数发散. $x = -\frac{1}{3}$ 时有类似讨论, 因此收敛域为 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

2. 由上学期知识, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{\sum_{k=1}^K k^n}{n^2}} = K$, 讨论端点后知收敛域为 $|\frac{1-x}{1+x}| \leq \frac{1}{K} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{K-1}{K+1}, \frac{K+1}{K-1}\right]$.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \sqrt[n]{n}}} = 1$, 讨论端点后知收敛域为 $-1 < \frac{x}{2x+1} \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$.
4. 构造 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} C_n^k x^k, S'_n(x) = \sum_{k=1}^n C_n^k x^{k-1} = \frac{(1+x)^{n-1}}{x}$. 从而 $I_n = -S(-1) = \int_{-1}^0 \frac{(1+x)^{n-1}}{x} dx = \int_0^1 [1+x+\cdots+x^{n-1}] dx = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$.
5. 显然收敛域为 $[-1, 1]$. 原式 $= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \int_0^x t^{2n-1} dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x \int_0^t s^{2n-2} ds dt = 2 \int_0^x \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} (-s^2)^{n-1} ds dt = 2 \int_0^x \int_0^t \frac{1}{1+s^2} ds dt = 2 \int_0^x \arctan s ds = 2x \arctan x - \ln(1+x^2)$.
6. 显然收敛域为 \mathbb{R} . 考虑一致收敛级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n! 2^n} = x(e^{\frac{x}{2}} - 1)$, 逐项求导得到 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n! 2^n} = (\frac{x}{2} + 1)e^{\frac{x}{2}} - 1$.
7. 原式 $= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m^2 n^2}{3^m n (n 3^m + m 3^n)} \stackrel{\text{对称性}}{=} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{m^2 n^2}{3^m n (n 3^m + m 3^n)} + \frac{m^2 n^2}{3^n m (m 3^n + n 3^m)} \right] = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{mn}{3^m 3^n} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{9}{32}$.
8. 一方面, $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \geq \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\sum_{n=0}^N a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^N a_n n!$, 从而 $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$.
另一方面, $\int_0^N e^{-x} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^N e^{-x} x^n dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$, 从而 $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!$.
9. 由 $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 换元知 $x = \sin x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1}$. 两边从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分, 得到 $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ 在 $(-1, 1)$ 上内闭一致收敛, 知 $f(x)$ 可逐项求导. 令 $F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$, 则 $F'(x) = f'(x) - f'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = 0$. 从而 $F(x) \equiv \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
11. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$. $f(1), g(1)$ 收敛 $\Rightarrow \forall |x| < 1, \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n x^n|, \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n x^n|$ 收敛 $\Rightarrow \forall |x| < 1, \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n \right)$. 这三个级数都在 $x=1$ 处收敛, 因此左连续, 令 $x \rightarrow 1-0$ 得 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right)$.
12. $I(n) = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{n}})^n dx \stackrel{x=t^{\frac{1}{n}}}{=} 2n \int_0^1 (1-t^2)^n t^{2n-1} dt \leq 2n \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} t^{2n-2} (1-t^2) t dt \leq 2n \int_0^1 [(1-t^2)t^2]^{n-1} dt \leq \frac{2n}{4^{n-1}}$.
注意到 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, 逐项求导得 $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, 因此代入 $n = \frac{1}{4}$ 知 $\sum_{n=1}^{+\infty} I_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{4^{n-1}} = \frac{32}{9} < 4$.

12 第 12 次习题课: 幂级数展开与多项式逼近

12.1 问题

1. (Airy 方程). 利用 Maclaurin 级数求解微分方程 $y''(x) - xy(x) = 0$.
2. 写出函数 $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2$ 的 Maclaurin 级数并给出收敛域.
3. 写出函数 $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ 的 Maclaurin 级数并给出收敛域.
4. 写出函数 $f(x) = \arctan \frac{x \sin \theta}{1-x \cos \theta}$ 的 Maclaurin 级数.
5. 证明 $[0, 1]$ 上的连续函数可以被有理系数多项式逼近.
6. 证明 $[0, 1]$ 上的连续函数可以被单调递升的多项式列 (即 $P_1 \leq P_2 \leq \cdots \leq P_n \leq \cdots$) 逼近.
7. $[a, b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 单调递升且收敛于 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 一定能取到其最小值, 但未必能取到其最大值.
8. $[a, b]$ 上的连续函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ 满足 $|u_n(x)| \leq v_n(x), \forall n \in \mathbb{N}_+, \text{ 且和函数 } \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ 连续. 证明和函数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 也连续.
9. 证明对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $x \in [0, \pi]$ 成立不等式 $\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq 2\sqrt{\pi}$.
10. 证明对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $x \in \mathbb{R}$ 成立不等式 $\left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| \leq e^{|x|} - \left(1 + \frac{|x|}{n} \right)^n < \frac{x^2 e^{|x|}}{2n}$.
11. 数列 $\{r_n\}$ 是 $[0, 1]$ 区间内所有有理数的一个排列, 证明函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n}$ 在 $[0, 1]$ 上处处连续、无理点处可微、有理点处不可微.
12. 试举在 $[0, 1]$ 上一致收敛于连续函数的处处不连续函数列 $\{f_n(x)\}$.

12.2 解答

1. 设 $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. 在收敛域内, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)'' - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0$. 比较系数知 $a_2 = 0, a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$, 从而 $a_{3n} = \frac{(3n-2)!!!}{(3n)!} a_0, a_{3n+1} = \frac{(3n-1)!!!}{(3n+1)!} a_1, a_{3n+2} = 0$.

2. 设 $g(x) = \arcsin^2 x$, 则 $g'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)(g'(x))^2 = 4g(x)$. 两边求导, 得 $2(1-x^2)g'(x)g''(x) - 2x(g'(x))^2 = 4g'(x) \Rightarrow (1-x^2)g''(x) - xg'(x) = 2$. 两边求 $n-2$ 次导数知 $(1-x^2)g^{(n)}(x) - (2n-3)xg^{(n-1)}(x) - (n-2)^2g^{(n-2)}(x) = 0$. 令 $x=0$ 知 $g^{(n)}(0) = (n-2)^2g^{(n-2)}(0)$. 由于 $g^{(1)}(0) = 0, g^{(2)}(0) = 2$, 从而 $g^{(2n-1)}(0) = 0, g^{(2n)}(0) = 2^{2n-1}((n-1)!)^2$, 因此 $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n}$, 收敛域为 $[-1, 1]$.

3. $\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

4. $f'(x) = \frac{\sin \theta}{1-2x \cos \theta + x^2} = \frac{1}{2i} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{(x-e^{i\theta})(x-e^{-i\theta})} = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x} - \frac{e^{-i\theta}}{1-e^{-i\theta}x} \right) = \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) x^{n-1} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta) x^{n-1}$, 因此 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n$.

5. $\forall f(x) \in C[0, 1], \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{s.t.} \exists N$ 次多项式 $P_N(x), \forall x \in [0, 1], |P_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. 由于有理数在实数集中稠密, 因此 $\exists N$ 次有理系数多项式 $Q_N(x), \text{s.t.} \forall x \in [0, 1], |P_N(x) - Q_N(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. 此时 $|Q_N(x) - f(x)| < \epsilon$.

6. $f_n(x) := f(x) - \frac{1}{2^n}$ 可被多项式逼近, 因此 $\exists P_n(x), \text{s.t.} |P_n(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^{n+2}}$. 这样的 $\{P_n\}$ 满足题意.

7. 记 $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = m \Rightarrow \forall k \geq 1, \exists x_k \in [a, b], \text{s.t.} m \leq f(x_k) < m + \frac{1}{k}$. 由聚点原理, \exists 子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}, \text{s.t.} \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$. 由收敛性, $\exists N > 0, \text{s.t.} \forall n > N, f(x_0) - \epsilon < f_n(x_0) \leq f(x_0)$. 从而 $m \leq f(x_0) < f_n(x_0) + \epsilon = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_n(x_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) + \epsilon \leq m + \epsilon$. 令 $\epsilon \rightarrow 0$ 知 $f(x_0) = m$. 对于最大值, 反例是 $f_n(x) = x 1_{\{0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\}} + (n-1)(1-x) 1_{\{1 - \frac{1}{n} < x \leq 1\}}$.

8. 任意固定 $x_0 \in [a, b]$, 考察 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $x = x_0$ 处的连续性. 由收敛性, $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{s.t.} \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x_0) < \frac{\epsilon}{3}$. 由连续性, $\exists \delta > 0, \text{s.t.} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b], \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x) < \frac{\epsilon}{3}, \left| \sum_{n=1}^N [u_n(x) - u_n(x_0)] \right| < \frac{\epsilon}{3}$. 从而 $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^N [u_n(x) - u_n(x_0)] \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x_0) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^N [u_n(x) - u_n(x_0)] \right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x_0) < \epsilon$.

9. 当 $0 < x \leq \frac{\sqrt{\pi}}{n}$ 时, $\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|\sin kx|}{k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{kx}{k} \leq nx = \sqrt{\pi}$.

当 $\frac{\sqrt{\pi}}{n} < x \leq \pi$ 时, 记 $K = \lfloor \frac{\sqrt{\pi}}{x} \rfloor, S_n = \sum_{k=K+1}^n \sin kx$, 则

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^K \frac{\sin kx}{k} \right| + \left| \sum_{k=K+1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \sqrt{\pi} + \left| \sum_{k=K+1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| = \sqrt{\pi} + \left| \sum_{k=K+1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} \right| \\ &\leq \sqrt{\pi} + \left| \sum_{k=K+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) S_k \right| + \left| \frac{S_n}{n} \right| \quad (\text{Abel 变换}) \end{aligned}$$

利用 $|S_n| = \left| \frac{\cos \frac{2K+1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{\pi}{x}$, 知

$$\left| \sum_{k=K+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) S_k \right| + \left| \frac{S_n}{n} \right| \leq \frac{\pi}{x} \left[\sum_{k=K+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{K+1} \frac{\pi}{x} \leq \sqrt{\pi}$$

因此 $\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{x} \right| \leq \sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$.

10. 左边:

$$\begin{aligned} \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{n}\right)^k \right| = \left| \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{n^{k-1}}\right) \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{n^{k-1}}\right) \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|} - \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \end{aligned}$$

右边:

$$\begin{aligned} e^{|x|} - \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n &= \sum_{k=2}^n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=2}^n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \cdots - \frac{k-1}{n}\right)\right] \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2n} \frac{|x|^k}{(k-2)!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \\ &< \frac{x^2}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{x^2}{2n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!} = \frac{x^2}{2n} e^{|x|} \end{aligned}$$

11. 原级数一致收敛, 因此连续. 考虑 $F_x(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^n h}$, $\forall x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. 由于 $|\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^n h}| \leq \frac{|(x+h-r_n)-(x-r_n)|}{3^n |h|} = \frac{1}{3^n}$, 因此 $F_x(h)$ 在 $h \in [-x, 1-x]$ 上一致收敛, 从而 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} F_x(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^n h} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{3^n}$. 若 $x = r_k \in \mathbb{Q}$, 类似可知 $\left[\sum_{n=1, n \neq k}^{+\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n} \right]' \Big|_{x=r_k} = \sum_{n=1, n \neq k}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{3^n}$, 但是 $\frac{|x-r_k|}{3^k}$ 在 $x = r_k$ 处不可导, 因此 $f(x) = \sum_{n=1, n \neq k}^{+\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n} + \frac{|x-r_k|}{3^k}$ 在 $x = r_k$ 处不可导.
12. $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{Dirichlet}(x)$.

13 第 13 次习题课: Fourier 级数的基本概念与性质

13.1 问题

- 求函数 $f(x) = x - [x]$ 的 Fourier 级数.
- 求函数 $f(x) = ax1_{x < 0} + bx1_{x > 0}$, $-\pi \leq x \leq \pi$ 的 Fourier 级数.
- 利用 $f(x) = e^x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ 的 Fourier 级数计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.
- 2π 周期函数 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, 且 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 定义 $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$. 利用 $F(x)$ 的 Fourier 级数证明条件弱化版本的 Parseval 等式.
- 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积, $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. 证明 $f(x) \sin x \sim \frac{a_0 \sin x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + \sin nx) \sin x$.
- 将定义在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的可积和绝对可积函数 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 上, 使得 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n-1} \sin(2n-1)x$.
- $f(x) \in C^1[-\pi, \pi]$, 证明其 Fourier 系数满足 $a_n = o(\frac{1}{n}), b_n = O(\frac{1}{n})$.
- 2π 周期函数 $f(x)$ 满足 $\exists \alpha \in (0, 1], \text{ s.t. } |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$. 证明 $a_n = O(\frac{1}{n^\alpha}), b_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$.
- 连续函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上分段可导, $f'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上可积且平方可积. 证明若条件 $\int_0^\pi f(x)dx = 0$ 或 $f(0) = f(\pi) = 0$ 之中有一个成立, 就有 $\int_0^\pi [f'(x)]^2 dx \geq \int_0^\pi f^2(x) dx$.
- 给定收敛于 0 的正数列 $\{\epsilon_n\}$, 构造连续函数 $f(x)$ 使得其 Fourier 系数对于无穷多个 n 满足 $|a_n| + |b_n| > \epsilon_n$.
- $f(x)$ 是区间 $[0, 2\pi]$ 上的凸函数, 证明 $\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$.
- 2π 周期函数 $f(x) \in R[-\pi, \pi]$ 且 $|f(x)| \leq M$. 记 $S_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数前 n 阶和, 证明 $|S_n(x)| \lesssim M \ln n$.

13.2 解答

- $T = 1$, 因此设 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2n\pi x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2n\pi x)$. $a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx = 1, a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2n\pi x) dx = 0, b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(2n\pi x) dx = -\frac{1}{n\pi}$, 因此 $f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n}$.
- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{b-a}{2}\pi, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} (a-b), b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = \frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{n}$, 因此 $f(x) \sim \frac{b-a}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + (a+b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$.

3. 直接算. $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{2 \sinh \pi}{\pi}$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x d \sin nx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = -\frac{b_n}{n}$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x d \cos nx = \frac{(-1)^{n-1}(e^{\pi} - e^{-\pi})}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{(-1)^{n-1} 2 \sinh \pi}{n\pi} + \frac{a_n}{n} \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n 2 \sinh \pi}{(n^2+1)\pi}$, $b_n = \frac{(-1)^{n-1} 2n \sinh \pi}{(n^2+1)\pi} \Rightarrow e^x \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} (\cos nx - n \sin nx) \right\}$. 由于 Fourier 级数收敛到 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, 因此令 $x = \pi$, 得到 $\cosh \pi = \frac{\sinh \pi}{\pi} (1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi \coth \pi - 1}{2}$.

4. 由逐点收敛性, 知

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos n(x+t) + b_n \sin n(x+t)] \right\} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n (\cos nx \cos nt - \sin nx \sin nt) + b_n (\sin nx \cos nt + \cos nx \sin nt)] \right\} dt \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 \cos nx - a_n b_n \sin nx + b_n a_n \sin nx + b_n^2 \cos nx) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos nx \end{aligned}$$

其中积分求和可交换是因为对于二阶连续可导函数, $a_n = o(\frac{1}{n^2})$, $b_n = o(\frac{1}{n^2})$, 因此一致收敛. 令 $x = 0$, $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$, 此即 Parseval 等式.

5. $\frac{a_0 \sin x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \sin x = \frac{a_0 \sin x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] + b_n [\cos(n-1)x - \cos(n+1)x]\} = \frac{b_1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{b_{n+1} - b_{n-1}}{2} \cos nx + \frac{a_{n-1} - a_{n+1}}{2} \sin nx \right)$. $f(x) \sin x : a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x = b_1$, $a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx = \frac{b_{n+1} - b_{n-1}}{2}$, $b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \sin nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\cos(n-1)x - \cos(n+1)x] dx = \frac{a_{n-1} - a_{n+1}}{2}$. 两者系数相等.

6. $a_n = 0 \Rightarrow$ 奇延拓. 另一方面, $0 = b_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin 2nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\pi-x) (-\sin 2nt) (-dt) \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - f(\pi-x)] \sin 2nx dx \Rightarrow f(x) = f(\pi-x)$. 因此所求延拓为 $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ f(\pi-x), & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 0, & x = 0, \frac{\pi}{2} \\ -F(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$.

7. $|na_n| = |\frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx| = |\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \sin nx| = |-\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx| = |b'_n| \rightarrow 0$. $|nb_n| = |\frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx| = |\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \cos nx| = \frac{1}{\pi} |(-1)^n [f(\pi) - f(-\pi)] - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx| \leq \frac{|f(\pi) - f(-\pi)|}{\pi} + |a'_n|$.
8. $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{-\frac{\pi}{n}} f(x + \frac{\pi}{n}) \cos(nx + \pi) dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \frac{\pi}{n}) \cos nx dx$. 两式取平均得 $|a_n| = |\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x + \frac{\pi}{n})] \cos nx dx| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x + \frac{\pi}{n})| \cdot |\cos nx| dx \leq \frac{1}{2\pi} L(\frac{\pi}{n})^{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx| dx \leq L(\frac{\pi}{n})^{\alpha} \Rightarrow a_n = O(\frac{1}{n^{\alpha}})$. 同理 $b_n = O(\frac{1}{n^{\alpha}})$.

9. (1) 若 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$, 将 $f(x)$ 偶延拓, 则 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \Rightarrow f'(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-na_n) \sin nx$. 从而 $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (na_n)^2 \geq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx$. (2) 若 $f(0) = f(\pi) = 0$, 类似可将 $f(x)$ 奇延拓, 则 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \Rightarrow f'(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (nb_n) \cos nx$. 从而 $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (nb_n)^2 \geq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx$.

10. 令 $n_0 = 0$, 则由收敛性, $\exists n_k > n_{k-1} \in \mathbb{N}_+$, s.t. $\epsilon_{n_k} < \frac{1}{k^2}$. 从而定义 $f(x) = \frac{1}{k^2} \cos n_k x$, 则 $|a_{n_k}| + |b_{n_k}| = \frac{1}{k^2} > \epsilon_{n_k}, \forall k$.

11. 利用拆分积分区间的方法.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{1}{n} \int_0^{2n\pi} f\left(\frac{t}{n}\right) \cos t dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f\left(\frac{t}{n}\right) \cos t dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} f\left(\frac{t}{n}\right) \cos t dt + \int_{2k\pi + \frac{\pi}{2}}^{2k\pi + \pi} f\left(\frac{t}{n}\right) \cos t dt + \int_{2k\pi + \pi}^{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} f\left(\frac{t}{n}\right) \cos t dt + \int_{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}^{2k\pi + 2\pi} f\left(\frac{t}{n}\right) \cos t dt \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} f\left(\frac{t}{n}\right) \cos t dt - \int_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} f\left(\frac{4k\pi + \pi - t}{n}\right) \cos t dt - \int_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} f\left(\frac{t + \pi}{n}\right) \cos t dt + \int_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} f\left(\frac{4k\pi + 2\pi - t}{n}\right) \cos t dt \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \left[f\left(\frac{t}{n}\right) - f\left(\frac{4k\pi + \pi - t}{n}\right) - f\left(\frac{t + \pi}{n}\right) + f\left(\frac{4k\pi + 2\pi - t}{n}\right) \right] \cos t dt \end{aligned}$$

当 $t \in [2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ 时, $\frac{t}{n} \leq \frac{4k\pi + \pi - t}{n} \leq \frac{t + \pi}{n} \leq \frac{4k\pi + 2\pi - t}{n}$ 且 $\frac{t}{n} + \frac{4k\pi + 2\pi - t}{n} = \frac{4k\pi + \pi - t}{n} + \frac{t + \pi}{n}$, 由 $f(x)$ 凸性知 $f\left(\frac{t}{n}\right) - f\left(\frac{4k\pi + \pi - t}{n}\right) - f\left(\frac{t + \pi}{n}\right) + f\left(\frac{4k\pi + 2\pi - t}{n}\right) \geq 0$, 因此 $\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \geq 0$.

12. 由课上所述结论,

$$\begin{aligned} |S_n(x)| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |f(x+t) + f(x-t)| \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{2\sin\frac{t}{2}} dt \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\sin\frac{t}{2}} dt \leq \frac{M}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\frac{t}{\pi}} dt \leq M \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \\ &= M \int_0^1 \frac{|\sin t|}{t} dt + M \int_1^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \leq M \int_0^1 1 dt + M \int_1^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{t} dt \\ &= M \left[1 + \ln \pi + \ln \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \\ \Rightarrow |S_n(x)| &\lesssim M \ln n \end{aligned}$$

14 第 14 次习题课: Fourier 级数的其他收敛性

14.1 问题

1. 2π 周期函数 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, 满足 $f''(x) + \lambda f(x) = g(x)$, 其中 $g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, $\lambda \neq n^2, n \in \mathbb{N}$. 试求 $f(x)$ 的 Fourier 级数.
2. 利用 $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$ 的 Fourier 级数计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
3. 利用 $f(x) = 1_{|x|<a}, x \in [-\pi, \pi]$ 的 Fourier 级数计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}$.
4. $f(x) \in R[-\pi, \pi]$, 其 Fourier 系数全为 0, 证明 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = 0$.
5. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n} \sin nx$, 证明 $\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| \geq \frac{2}{\pi e}$.
6. 数列 $\{b_n\}$ 单调递减收敛于 0, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛, 证明 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积且绝对可积.
7. 证明余元公式 $\text{Beta}(p, 1-p) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{-p} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} (0 < p < 1)$, 并计算积分 $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ 和 $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. (提示: 可参考教材习题十二第 12 题)

14.2 解答

1. 我们设 $f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$, 则 $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n\beta_n \cos nx - n\alpha_n \sin nx)$, $f''(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-n^2 \alpha_n \cos nx - n^2 \beta_n \sin nx)$. 从而 $\alpha_0 = a_0, (\lambda - n^2)\alpha_n = a_n, (\lambda - n^2)\beta_n = b_n \Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{\lambda - n^2} \cos nx + \frac{b_n}{\lambda - n^2} \sin nx \right)$.
2. $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4}{n^2} \cos nx$. 由 Parseval 等式有 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
3. $f(x) \sim \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \sin na}{n\pi} \cos nx$. 由 Parseval 等式有 $\frac{2a}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2a^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \sin^2 na}{n^2 \pi^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a(\pi-a)}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{a(\pi-a)}{2}$.
4. 由 Parseval 等式知 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = 0$.
5. 显然 $f(x) \in C(\mathbb{R})$. 由 Parseval 等式有 $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-2n}$. 而 $\text{LHS} \leq \frac{1}{\pi} 2\pi \max_{x \in [0, 2\pi]} f^2(x) \leq 2 \left(\max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)| \right)^2$, $\text{RHS} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n} = \frac{e^{-2}}{1-e^{-2}} \geq e^{-2}$, 因此 $\max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)| \geq \frac{1}{\sqrt{2e}} \geq \frac{2}{\pi e}$.
6. 由 Dirichlet 判别法知 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 时连续, 因此只需讨论当 $x = 0$ 为瑕点时 $|f|$ 在 $[0, \pi]$ 上的广义可积性. 注意到 $\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} |f(x)| dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} |f(x)| dx$, 而当 $\frac{\pi}{k+1} \leq x \leq \frac{\pi}{k}$ 时, $|f(x)| \leq \left| \sum_{i=1}^k b_i \sin ix \right| + \left| \sum_{i=k+1}^{+\infty} b_i \sin ix \right| \stackrel{\text{Abel 变换}}{\leq} S_k + \frac{b_{k+1}}{|\sin \frac{\pi}{2}|} \leq$

$S_k + \frac{b_{k+1}}{\frac{\pi}{k+1}} \leq S_k + (k+1)b_{k+1} \leq S_k + (k+1)b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^n \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} |f(x)|dx \leq \pi \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k(k+1)} + \pi \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k} = \pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k b_i + \pi \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k} =$
 $\pi \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=i}^n \frac{1}{k(k+1)} + \pi \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k} \leq \pi \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{i} + \pi \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k} \leq 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} < +\infty$. 因此积分 $\int_0^\pi |f(x)|dx$ 收敛.

7. 第一个等式: $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}dx \stackrel{x=\frac{t}{1+t}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}}(1+t)^p \frac{1}{(1+t)^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt$.

第二个等式: 利用变量替换 $x = \frac{1}{t}$ 有 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{-p}}{1+x}dx \Rightarrow \text{Beta}(p, 1-p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x}dx$. 将 $\frac{1}{1+x}$ 展成幂级数,

$$\begin{aligned} \text{Beta}(p, 1-p) &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^r \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x}dx = \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^r \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k+p-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k-p} \right] dx \\ &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} r^{k+p} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k-p+1} r^{k-p+1} \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k-p+1} \\ &= \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+p} + \frac{1}{p-k} \right) = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2 - k^2} \end{aligned}$$

由于 $\cos px$ 的 Fourier 级数 $\cos px = \frac{\sin p\pi}{\pi} \left[\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2 - k^2} \cos kx \right]$ 在 $|x| \leq \pi$ 处处收敛, 令 $x=0$ 得 $\text{Beta}(p, 1-p) = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2p}{p^2 - k^2} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

先求 I_1 . $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx \stackrel{t=\frac{x}{1+x^\beta}}{=} \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}(1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}dt = \frac{1}{\beta} \text{Beta}(1 - \frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta}) = \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha+1}{\beta}\pi}$.

再求 I_2 . 令 $p = \frac{x}{\pi}, 0 < x < \pi$, 得到 $\frac{\pi}{\sin x} = \frac{\pi}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x\pi}{x^2 - n^2\pi^2}$, 即 $1 = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2}$. 两边从 0 到 π

积分有 $\pi = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2}dx$. 从而

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} \frac{\sin x}{x}dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_0^\pi \frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}dt + \int_0^\pi \frac{\sin[t-(n+1)\pi]}{t-(n+1)\pi}dt \right] = \frac{1}{2} \left[\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{2t \sin t}{t^2 - n^2\pi^2}dt \right] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

15 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学数学科学学院 23 级本科生陈全同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2024 春数学分析 II 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.