

# 数学分析 II 习题课讲义

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2024 年 1 月 5 日

## 目录

1	第 1 次习题课: 定积分基本概念, 可积性	3
1.1	问题	3
1.2	解答	3
2	第 2 次习题课: 定积分的计算, 中值定理	5
2.1	问题	5
2.2	解答	5
3	第 3 次习题课: 定积分的应用	5
3.1	问题	5
3.2	解答	5
4	第 4 次习题课: 广义积分	5
4.1	问题	5
4.2	解答	5
5	第 5 次习题课: 正项级数	5
5.1	问题	5
5.2	解答	5
6	第 6 次习题课: 任意项级数, 数项级数的性质	5
6.1	问题	5
6.2	解答	5
7	第 7 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (1)	5
7.1	问题	5
7.2	解答	5
8	第 8 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (2)	5
8.1	问题	5
8.2	解答	5
9	第 9 次习题课: 幂级数的基本性质	5
9.1	问题	5
9.2	解答	5

10 第 10 次习题课: 泰勒展开与多项式逼近	5
10.1 问题	5
10.2 解答	5
11 第 11 次习题课: 傅里叶级数的基本性质	5
11.1 问题	5
11.2 解答	5
12 第 12 次习题课: 傅里叶级数的收敛性	5
12.1 问题	5
12.2 解答	5
13 致谢	5

# 1 第 1 次习题课: 定积分基本概念, 可积性

## 1.1 问题

1.  $f(x)$  在  $[a, b]$  的每一点处的极限都是 0, 证明  $f(x) \in R[a, b]$  且  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .
2.  $f(x) \in R[a, b]$ ,  $\int_a^b f(x)dx > 0$ . 证明  $\exists[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , s.t.  $\forall x \in [\alpha, \beta], f(x) > 0$ .
3.  $f(x) \in R[a, b]$ , 问  $\lfloor f(x) \rfloor$  是否一定  $\in R[a, b]$ ?

## 1.2 解答

1. 显然  $f(x)$  有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次  $\forall \epsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$ , s.t.  $\omega_{(x-\delta_x, x+\delta_x)} < \epsilon$ . 由于  $\cup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x) \supset [a, b]$ , 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖  $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$ . 不妨设  $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ . 可取分割点  $y_i \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1})$ , 对于这个分割,  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon(b-a)$ , 因此有可积性. 由于  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)|dx \leq \epsilon(b-a)$ ,  $\epsilon$  的任意性知  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .
2. 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.
3.  $f(x) = -\text{Riemann}(x) \in R[0, 1], \lfloor f(x) \rfloor = -\text{Dirichlet}(x) \notin R[0, 1]$ .



## 2 第 2 次习题课: 定积分的计算, 中值定理

2.1 问题

2.2 解答

## 3 第 3 次习题课: 定积分的应用

3.1 问题

3.2 解答

## 4 第 4 次习题课: 广义积分

4.1 问题

4.2 解答

## 5 第 5 次习题课: 正项级数

5.1 问题

5.2 解答

## 6 第 6 次习题课: 任意项级数, 数项级数的性质

6.1 问题

6.2 解答

## 7 第 7 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (1)

7.1 问题

7.2 解答

## 8 第 8 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (2)

8.1 问题

8.2 解答

## 9 第 9 次习题课: 幂级数的基本性质

9.1 问题

9.2 解答

## 10 第 10 次习题课: 泰勒展开与多项式逼近

10.1 问题

10.2 解答

## 11 第 11 次习题课: 傅里叶级数的基本性质