

数学分析 II 习题课讲义

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 2 月 4 日

目录

1	第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性	3
1.1	问题	3
1.2	解答	3
2	第 2 次习题课: 定积分的性质与计算	4
2.1	问题	4
2.2	解答	4
3	第 3 次习题课: 定积分的应用与中值定理	5
3.1	问题	5
3.2	解答	6
4	第 4 次习题课: 广义积分的收敛性与计算	6
4.1	问题	6
4.2	解答	7
5	第 5 次习题课: 积分的综合运用	8
5.1	问题	8
5.2	解答	8
6	第 6 次习题课: 正项级数	10
6.1	问题	10
6.2	解答	10
7	第 7 次习题课: 任意项级数, 数项级数的性质	11
7.1	问题	11
7.2	解答	11
8	第 8 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (1)	11
8.1	问题	11
8.2	解答	11
9	第 9 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (2)	11
9.1	问题	11
9.2	解答	11

10 第 10 次习题课: 幂级数的基本性质 11

10.1 问题 11

10.2 解答 11

11 第 11 次习题课: 泰勒展开与多项式逼近 11

11.1 问题 11

11.2 解答 11

12 第 12 次习题课: 傅里叶级数的基本性质 11

12.1 问题 11

12.2 解答 11

13 第 13 次习题课: 傅里叶级数的收敛性 11

13.1 问题 11

13.2 解答 11

14 致谢 11

第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性

1.1 问题

1. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x) \in R[a, b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$.
2. $f(x) \in R[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx > 0$. 证明 $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, s.t. $\forall x \in [\alpha, \beta], f(x) > 0$.
3. $f(x) \in R[a, b]$, 问 $\lfloor f(x) \rfloor$ 是否一定 $\in R[a, b]$?
4. 讨论区间 $[a, b]$ 上 $f, |f|, f^2$ 的可积性之间的关系.
5. 设非负函数 $f(x) \in C[a, b]$, 证明极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}}$ 存在并求之.
6. $f(x) \geq 0, f''(x) \leq 0, x \in [a, b]$. 证明 $\max_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.
7. $n \in \mathbb{N}_+, f(x) \in C[a, b], \int_a^b x^k f(x)dx = 0, k = 0, 1, \dots, n$. 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个零点.
8. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \dots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \dots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
9. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1, \alpha > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.
10. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x), g(x) \in R[a, b], p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}$.
11. $f(x) \in R[a, b], A = \inf_{x \in [a, b]} f(x), B = \sup_{x \in [a, b]} f(x), g(y) \in C[A, B]$, 证明 $G(x) := g(f(x)) \in R[a, b]$.
12. 已知 $(0, 1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 问是否有 $f(x) \in R[0, 1]$?

1.2 解答

1. 显然 $f(x)$ 有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次 $\forall \epsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$, s.t. $\omega_{(x-\delta_x, x+\delta_x)} < \epsilon$. 由于 $\cup_{x \in [a, b]} (x-\delta_x, x+\delta_x) \supset [a, b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$. 不妨设 $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. 可取分割点 $y_i \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1})$, 对于这个分割, $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon(b-a)$, 因此有可积性. 由于 $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)|dx \leq \epsilon(b-a)$, ϵ 的任意性知 $\int_a^b f(x)dx = 0$.
2. 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.
3. $f(x) = -\text{Riemann}(x) \in R[0, 1], \lfloor f(x) \rfloor = -\text{Dirichlet}(x) \notin R[0, 1]$.
4. $f \in R[a, b] \Rightarrow |f|, f^2 \in R[a, b]$, 因为 f 在 x_0 处连续 $\Rightarrow |f|, f^2$ 在 x_0 处连续.
 $|f| \in R[a, b] \Rightarrow f^2 \in R[a, b], \nRightarrow f \in R[a, b]$. $|f|$ 在 x_0 处连续 $\Rightarrow f^2$ 在 x_0 处连续, 而对于 f 有反例 $f(x) = 1_{\mathbb{Q}} - 1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.
 $f^2 \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b], \nRightarrow f \in R[a, b]$. 理由与上一个相同.
5. 设 $M = \max_{x \in [a, b]} f(x), f(\xi) = M$. 由连续性, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), f(x) > M - \epsilon$. 因此当 n 足够大时成立
 $M + 2\epsilon > ((b-a)M^n)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} > (2\delta(M-\epsilon)^n)^{\frac{1}{n}} > M - 2\epsilon \Rightarrow \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow M$.
6. 设 $f(\xi) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. 由题意知 $f(x)$ 是凹函数, 因此成立 $f(x) \geq \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}(x-a) + f(a), & x \in [a, \xi] \\ \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}(x-\xi) + f(\xi), & x \in [\xi, b] \end{cases} \Rightarrow \text{RHS} \geq \frac{2}{b-a} \left(\int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx \right) \geq \frac{2}{b-a} \left((\xi-a)\frac{f(\xi)+f(a)}{2} + (b-\xi)\frac{f(b)+f(\xi)}{2} \right) \geq \frac{2}{b-a} \frac{f(\xi)}{2} (\xi-a+b-\xi) = f(\xi) = \text{LHS}$.
7. $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists 1$ 零点, 记为 x_1 . $\int_a^b (x-x_1)f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists 2$ 零点, 记为 x_2 . $\dots \int_a^b [\prod_{i=1}^n (x-x_i)] f(x)dx = 0 \Rightarrow \exists n+1$ 零点.
- 8.

$$\text{原式} = 2^{\alpha-\beta} \frac{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^\alpha + \frac{2}{n} \left(\frac{3}{n} \right)^\alpha + \dots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^\alpha \right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} \right)^\beta + \frac{2}{n} \left(\frac{4}{n} \right)^\beta + \dots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n}{n} \right)^\beta \right]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{定积分定义}} 2^{\alpha-\beta} \frac{\left(\int_0^2 x^\alpha dx \right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta dx \right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

9. $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\epsilon) < a_n < n^\alpha(1+\epsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \dots + N^\alpha) < \epsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \dots + a_N) < \epsilon, \left| \frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \dots + (a_n - n^\alpha)] \right| \leq \frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha + \dots + n^\alpha] \leq \frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^\alpha \leq \epsilon \int_0^1 x^\alpha dx + \epsilon = \frac{\epsilon}{\alpha+1} + \epsilon \leq 2\epsilon$. 这意味着 $\left| \frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i^\alpha \right) \right| \leq 4\epsilon \Rightarrow \text{原极限} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$.

10. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} = 1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha \ln a + (1-\alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1-\alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$. 令 $\alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

本题也可以将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.

11. 证法 a: $G(x)$ 的间断点集合是 $f(x)$ 间断点集合的子集, 因此其 Lebesgue 测度为 0, 从而可积.

证法 b: 由于 $g(y)$ 一致连续, 因此 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall |y_1 - y_2| < \delta, |g(y_1) - g(y_2)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 由于 $f(x) \in R[a, b]$, 因此 $\exists [a, b]$ 的分割 Δ , 使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\delta \epsilon}{4M}$, 其中 $M = \sup_{y \in [a, b]} |g(y)|$. 若 $\omega_i(f) < \delta$, 则 $\omega_i(G) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 若 $\omega_i(f) \geq \delta$,

其区间长度 $\sum_{i: \omega_i(f) \geq \delta} \Delta x_i$ 不会超过 $\frac{\epsilon}{4M}$. 因此 $\sum_{i=1}^n \omega_i(G) \Delta x_i = \sum_{i: \omega_i(f) < \delta} \omega_i(G) \Delta x_i + \sum_{i: \omega_i(f) \geq \delta} \omega_i(G) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{\epsilon}{4M} = \epsilon$.

这样对于任意 $\epsilon > 0$ 我们都找到了一个分割 Δ 使得 $\sum_{i=1}^n \omega_i(G) \Delta x_i < \epsilon$.

12. 考虑 $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) = 0$, 但是 $\int_0^1 f(x)dx$ 不存在.

2 第 2 次习题课: 定积分的性质与计算

2.1 问题

1. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, 证明 $\forall a, b \in \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx = 0$.
2. (Riemann-Lebesgue 引理). $f \in R[a, b], g \in R[0, T], g(x+T) = g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$.
3. 求积分 $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}, \alpha \in (0, \pi)$.
4. 求积分 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx$.
5. 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x dx$.
6. 求积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx$, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.
7. $f(x) \in C[a, b]$, 且对于任意的 $[\alpha, \beta] \subset [a, b], \exists \delta > 0, M > 0$, s.t. $|\int_\alpha^\beta f(x)dx| \leq M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x) \equiv 0$.
8. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x) = f(x) \int_0^x f(t)dt$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) \equiv 0$.
9. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明 $f(x) = xf(1)$.
10. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x) \in R[0, x], \forall x \in (0, +\infty)$, 且 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ 也是 $(0, +\infty)$ 上的凸函数.
11. $f(x) \in C[-1, 1]$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x)dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$.
12. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负连续, 且 $f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(s)ds$. 证明 $f(t) \leq 1 + t$.

2.2 解答

1. WLOG $h < 1$. 由可积函数性质, 存在 $[a, b+1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $\int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|dx < \epsilon$, 且 $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall x, y \in [a, b+1], |x - y| < \delta$, 成立 $|g(x) - g(y)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$. 从而 $|\int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx| \leq \int_a^b |f(x+h) - g(x+h)|dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)|dx + \int_a^b |g(x) - f(x)|dx \leq \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|dx + \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx + \int_a^{b+1} |f(x) - g(x)|dx \leq 3\epsilon$.
2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$.

由 Riemann 积分定义, $\forall \epsilon > 0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq x_m = b \end{cases}$ 使得 $\int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|dx < \epsilon$. 设

$M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx| = |\int_a^b (f(x) - s_\epsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx| \leq \int_a^b |f(x) - s_\epsilon(x)|g(nx)dx + |\sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx| < M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \leq M\epsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \dots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$ (设 $c+kT \leq d < c+(k+1)T$) $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \leq MT$. 选择一个足够大的 n , 使得 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \epsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx| \leq (M+1)\epsilon$.

3. $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sin\alpha} \arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2\sin\alpha}.$
4. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$
5. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d(1-\cos x) = (1-\cos x) \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) d(\ln \sin x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin x + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) dx = [\cos x - \ln(1+\cos x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - 1.$
6. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x] \cos 2x + \sin[(2n-2)x] \sin 2x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x](1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x]}{2 \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x \cos[(2n-2)x] + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x] \cos x dx = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

由于 $I_1 = 1$, 因此 $I_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}.$

7. 假设 $\exists f(x_0) > 0$. 由连续性, $\exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$, 从而 $\forall [\alpha, \beta] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$ (最后一个大于号成立只需令 $\beta - \alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

8. 构造 $G(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2$, $G'(x) = g(x)$ 单调递减, $g(0) = 0$, 因此 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且 $G(0) = 0, G(x) \geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

9. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^{\alpha} f(x) dx = \frac{\alpha^2}{2} f(1)$. 由集合 $\{q\alpha : q \in \mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha) = qf(\alpha)$, $\int_0^{\alpha} f(x) dx = f(\alpha) \frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha) \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2} f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$.

10. 凸函数开区间上连续 \Rightarrow 闭区间上可积. 做变换 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f\left(\frac{t}{x} \cdot x\right) d\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux) du$, 从而 $F\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = \int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i (ux_i)\right) du \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n t_i f(ux_i) du = \sum_{i=1}^n t_i F(x_i) \Rightarrow F(x)$ 凸.

11. 往证 $\frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \rightarrow 0$, 用极限定义. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \epsilon$. 设 $\max |f(x)| = M$.

从而原式 $= \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-\delta}^{-1} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_1^{\delta} (1-x^2)^n [f(x)-f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} := I_1 + I_2 + I_3. |I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \epsilon.$

$|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n \epsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} \left(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}\right)^n$. 注意到 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$, 从而可以取足

够大的 n 使得 $|I_2| < \epsilon$. 类似地放缩 I_3 , 从而 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\epsilon$.

12. 原命题条件 $\Rightarrow \frac{f(t)}{\sqrt{1+2 \int_0^t f(s) ds}} \leq 1 \Rightarrow \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+2 \int_0^t f(s) ds}} dt \leq \int_0^x 1 dt \Rightarrow \sqrt{1+2 \int_0^x f(s) ds} \Big|_0^x \leq x \Rightarrow \sqrt{1+2 \int_0^x f(s) ds} \leq 1+x \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{1+2 \int_0^x f(s) ds} \leq 1+x.$

3 第 3 次习题课: 定积分的应用与中值定理

3.1 问题

- $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的递减正函数, 证明对于 $\forall 0 < \alpha < \beta \leq 1$ 都有 $\beta \int_0^{\alpha} f(x) dx \geq \alpha \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.
- $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$, 求 $f(x)$.
- 已知 $A > 0, AC - B^2 > 0$, 求椭圆 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 的面积.
- 证明极坐标下曲线 $r = r(\theta)$ 与 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为 $V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin \theta d\theta$.
- 求双扭线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ 绕轴 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.
- $f(x) \in C^1[0, 1], f(x) \in [0, 1], f(0) = f(1) = 0, f'(x)$ 单调递减. 证明曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的弧长不大于 3.
- 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?

8. 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r = e^\theta$ 在 $(r, \theta) = (1, 0)$ 和 $(r, \theta) = (e^\phi, \phi)$ 之间一段的重心坐标.
9. 求圆的渐伸线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ 上 $A(a, 0), B(a, -2\pi a)$ 之间部分与直线 \overline{AB} 围成图形的面积.
10. 试求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.
11. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 用定积分第二中值定理证明 $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$.
12. (Dirichlet 判别法). 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. $\forall A \geq a, g(x) \in R[a, A]$ 且 $|\int_a^A g(x)dx| \leq M$ 恒成立. 证明极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)g(x)dx$ 存在.

3.2 解答

1. $\text{LHS} = \beta \int_0^\alpha f(x)dx \geq \beta \alpha f(\alpha) \geq \alpha(\beta - \alpha)f(\alpha) \geq \alpha \int_\alpha^\beta f(x)dx = \text{RHS}$.
2. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + xf(y) + \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y} f(t)dt + \int_0^y f(t)dt + yf(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 两式相减得 $xf(y) + \frac{x^3y}{3} = yf(x) + \frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$. 经验证符合题意.
3. 设矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 有相似标准型 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 λ_1, λ_2 是方程 $\lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) = 0$ 的两个根. 则原椭圆在新坐标系下的方程为 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$, 面积 $S = \pi \sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}} = \pi \sqrt{\frac{1}{AC - B^2}}$.
4. 对应 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的扇形面积 $dS = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$, 其质心位于 $\frac{2}{3}r(\theta)$ 处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为 $dV = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta 2\pi \frac{2}{3}r(\theta) \sin \theta = \frac{2\pi}{3}r^3(\theta) \sin \theta d\theta$. 两边积分得到结果.
5. 原命题等价于 $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases} x = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \cos \theta \\ y = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \sin \theta \end{cases}$, 则面积 $S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta) \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = 8\pi a^2$.
6. 设 $f'(M) = 0$. 则周长 $C = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \leq \int_0^1 (1 + |f'(x)|) dx = 1 + \int_0^M f'(x) dx - \int_M^1 f'(x) dx = 1 + 2f(M) \leq 3$.
7. 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_0^h \pi (\sqrt{R^2 - z^2})^2 dz = \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi (R^2 h - \frac{1}{3} h^3)$. 对应位移 $[h, h + dh]$ 所做的微功 $dW = gV(h)\rho dh$. 从而 $W = g \int_0^R V(h) dh = g(\frac{2}{3} \pi R^4 + \frac{5}{12} \pi R^4) = \frac{13}{12} g \pi R^4$.
8. $\bar{x} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \cos \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(\sin \phi + 2 \cos \phi) - 2}{5(e^\phi - 1)}, \bar{y} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(2 \sin \phi - \cos \phi) + 1}{5(e^\phi - 1)}$.
9. 直线 AB 的参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) = a \\ y = \psi(t) = t \end{cases}, t \in [-2\pi a, 0]$. 于是 $S = -\int_0^{2\pi} y(t)dx(t) - \int_{-2\pi a}^0 \psi(t)d\phi(t) = -\int_0^{2\pi} a(\sin t - t \cos t)a(t \cos t)dt + 0 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 + \pi a^2$.
10. 焦点为 $(\frac{1}{2}, 0)$, 设过焦点的直线为 $x - \frac{1}{2} = ky$, 与抛物线交点为 y_1, y_2 , 则围成的面积为 $S = \int_{y_1}^{y_2} (ky + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}) dy = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1 + y_2 = 2k, y_1 y_2 = -1$. 则 $S = \frac{2}{3}(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k = 0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.
11. $f(x)$ 单调, $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理, $\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})f(x)dx = f(a) \int_a^\xi (x - \frac{a+b}{2})dx + f(b) \int_\xi^b (x - \frac{a+b}{2})dx = f(a) \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})dx + (f(b) - f(a)) \int_\xi^b (x - \frac{a+b}{2})dx = (f(b) - f(a)) \frac{1}{2}(b - \xi)(\xi - a) \geq 0$.
12. 由极限定义, $\forall \epsilon > 0, \exists X > a, \text{s.t. } \forall x \geq X, |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{4M}$. 从而 $\forall A', A'' \geq X, |\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx| = |f(A') \int_{A'}^\xi g(x)dx + f(A'') \int_\xi^{A''} g(x)dx| \leq 2M(|f(A')| + |f(A'')|) \leq \epsilon$. 由柯西收敛定理知极限存在.

4 第 4 次习题课: 广义积分的收敛性与计算

4.1 问题

1. $f(x) > 0, x \in (1, +\infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = -\lambda, \lambda > 1$, 试判断 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性.
2. (Euler 积分). 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$.
3. (Dirichlet 积分). 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
4. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = 0$.

5. 计算 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.
6. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上内闭可积, $f(+\infty) = A, f(-\infty) = B$. 证明 $\forall a \in \mathbb{R}$, 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a) - f(x)]dx$ 收敛, 并求其值.
7. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$ 的收敛性.
8. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^x \sin 2x}{x^p} dx$ 的收敛性和绝对收敛性.
9. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^p} dx, p \geq 0, a \in \mathbb{R}$ 的收敛性.
10. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q |\sin x|^r} dx, p, q, r > 0$ 的收敛性.
11. $f(x) \in C^1[0, 1]$ 且 $f'(x) > 0$, 证明广义积分 $\int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{x^p} dx$ 在 $p < 2$ 时收敛, 在 $p \geq 2$ 时发散.
12. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \frac{1}{x}) dx$ 收敛.

4.2 解答

1. 由极限定义, $\exists X > 1, \text{s.t.} \forall x > X, \frac{\ln f(x)}{\ln x} < -\frac{\lambda+1}{2} \Leftrightarrow f(x) < x^{-\frac{\lambda+1}{2}}$. 由比较判别法知无穷积分收敛.
2. 由对称性, $I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \sin x dx$. 做两倍变换, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.
3. 注意到 $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$, 从而 $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. 定义 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$. 由于 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = O(x)$, 因此 $f(x) \in R[0, \pi]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理 (2.1.2) 知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) \sin(n+\frac{1}{2})x dx = 0$, 即是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. 再利用恒等式 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 立得结论.
4. 做变换 $t = \frac{1}{x}$, 则 $\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt = \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt := I_1 + I_2$. 对于 I_1 , 由定积分第二中值定理知 $\exists \xi_A \in [1, A]$ s.t. $I_1 = \int_1^{\xi_A} \cos^n t dt$. 因此对于任意固定的 $A, n \rightarrow +\infty$ 时 $I_1 \rightarrow 0$. 对于 I_2 , 成立 $|I_2| \leq \int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{A}$. 因此 $\forall \epsilon > 0$, 选择 $A = \frac{2}{\epsilon}$, 则 $|I_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$, 并选择充分大的 n 使得 $|I_1| < \frac{\epsilon}{2}$, 此时 $|I| \leq \epsilon$, 由极限定义知结论成立.
5. 做倒数变换, 知 $I(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{d\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x^2})(1+x^{-\alpha})} = I(-\alpha)$. 又由于 $I(\alpha) + I(-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, 因此 $I(\alpha) \equiv \frac{\pi}{4}$.
6. $\int_M^N [f(x+a) - f(x)]dx = \int_N^{N+a} f(x)dx - \int_M^{M+a} f(x)dx \rightarrow (A-B)a$.
7. 函数恒正, 只需讨论有界性. 令 $u_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$, 则 $u_k \leq k\pi \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = k\pi \int_0^\pi \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} \leq 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+4(k-1)^6 \pi^4 x^2} = \frac{k}{\pi(k-1)^3} \int_0^{(k-1)^3 \pi^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{2k^2}$. 由于 $\int_0^{+\infty} = \sum_{k=1}^n u_k \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < +\infty$, 因此原广义积分收敛.
8. 先考虑积分收敛性. 显然当 $p \leq 0$ 时原积分发散. 当 $p > 0$ 时, 由于 $|\int_a^A e^{\sin x} \sin 2x dx| = 2|\int_{\sin a}^{\sin A} e^{\sin x} \sin x d \sin x| = 2|e^{\sin A}(\sin A - 1) - e^{\sin a}(\sin a - 1)| < 8e, \frac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty} \frac{e^x \sin 2x}{x^p} dx$ 收敛, 我们只需考察积分在 0 处的性质. 由于当 $x \rightarrow 0$ 时 $\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \sim \frac{2}{x^{p-1}}$, 因此 $p \geq 2$ 时原积分发散, $p < 2$ 时原积分收敛. 再考虑绝对收敛性. 当 $1 < p < 2$ 时, $\left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \right| \leq \frac{e}{x^p}$, 因此绝对收敛. 当 $0 < p \leq 1$ 时, $\left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \right| \geq \frac{2p}{e} \left| \frac{\sin 2x}{(2x)^p} \right| \geq \frac{1}{e} \left| \frac{\sin^2 2x}{(2x)^p} \right| = \frac{1}{2e} \left(\frac{1-\cos 4x}{(2x)^p} \right)$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{(2x)^p} dx$ 收敛, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x)^p} dx$ 发散, 因此原积分条件收敛.
9. 当 $a \neq 0, p > 0$ 时, $\frac{1}{1+x^p}$ 单调递减趋于 0, $\int_0^N \cos ax dx$ 有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛. 当 $a \neq 0, p = 0$ 时显然发散. 当 $a = 0, p > 1$ 时显然收敛. 当 $a = 0, 0 \leq p \leq 1$ 时显然发散.
10. 显然当 $q \leq p+1$ 时原积分发散. 当 $q > p+1$ 时, 一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q |\sin t|^r} dt \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^p \pi^p \int_0^\pi \frac{dt}{1+(k\pi)^q |\frac{2}{\pi} t|^r} \leq C_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^p}{k^{\frac{q}{r}}} \int_0^{2(k\pi)^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}$$

另一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q |\sin t|^r} dt \geq \sum_{k=0}^{+\infty} (k\pi)^p \int_0^\pi \frac{dt}{1+[(k+1)\pi]^q |t|^r} \geq C_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^p}{(k+1)^{\frac{q}{r}}} \int_0^{\pi[(k+1)\pi]^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}$$

$r > 1, \int_0^A \frac{dt}{1+t^r}$ 一致有界. $r = 1, \int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim \ln A$. $r < 1, \int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim A^{1-r}$. 因此原积分收敛 iff $q > (p+1) \max(r, 1)$.

11. 由柯西微分中值定理, $\exists \xi \in (0, x)$ s.t. $\frac{f(x)-f(0)}{x^p} = \frac{f'(\xi)}{x^{p-1}}$. 由于 $f'(x)$ 连续且大于 0, 因此 $\exists 0 < m < M$ s.t. $m < f'(x) < M$ 对 $\forall x \in [0, 1]$ 均成立, 即 $\frac{m}{x^{p-1}} < \frac{f(x)-f(0)}{x^p} < \frac{M}{x^{p-1}}$. 从而 $p \geq 2$ 时发散, $p < 2$ 时收敛.
12. $\int_0^{+\infty} f(x - \frac{1}{x}) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} f(x - \frac{1}{x}) d(x - \frac{1}{x}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}} f(t) dt$. 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 收敛, $\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}$ 单调有界, 由 Abel 判别法知 $\int_0^{+\infty} f(x - \frac{1}{x}) dx$ 收敛. 另一侧同理.

5 第 5 次习题课: 积分的综合运用

5.1 问题

1. 证明 π 是无理数. 你可以按照以下步骤: (1) 设 $\pi = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$, 定义 $f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$, 证明 $\forall i \in \mathbb{N}_+, f^{(i)}(0), f^{(i)}(\pi)$ 都是整数. (2) 证明定积分 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ 也是整数. (3) 证明 $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 1$, 得到矛盾.
2. $f(x) \in C^2[0, 1], f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$, 证明 $\int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 4$, 取等号当且仅当 $f(x) = x^3 - x^2$.
3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上恒正, 且满足 Lipschitz 条件 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$. 又已知对于 $a \leq c \leq d \leq b$ 成立 $\int_c^d \frac{dx}{f(x)} = \alpha, \int_a^b \frac{dx}{f(x)} = \beta$. 证明积分不等式 $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{e^{2L\beta} - 1}{2L\alpha} \int_c^d f(x) dx$.
4. $f(x) \in C[0, +\infty)$ 且平方可积, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$. 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(x) dx$.
5. (Euler-Poisson 积分). 利用数列 $\left\{ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right\}$ 的极限, 求积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. (你也许需要用到如下命题: 当 $a \geq 1$ 时, $0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^a \leq \frac{x^2}{a} e^{-x}$ 在区间 $[0, a]$ 上恒成立. 这由导数知识容易验证.)
6. 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.
7. $a, b > 0$, 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x}) dx$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x}) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt$.
8. $f(x) \in C^2[a, b]$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\int_a^b f(x) dx - (b-a)f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$.
9. $f'(x) \in R[0, 1]$, 定义 $A_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n = \frac{1}{2}(f(0) - f(1))$.
10. (等周问题). 长为 L 的曲线何时围成的区域面积最大? 你可以假设围成的区域是凸域且边界足够光滑, 以及其他正则性条件.
11. 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $\forall k = 1, 2, \dots, n, u_k(x)$ 均单调有界. 证明 $\int_0^{+\infty} f(x) \prod_{k=1}^n u_k(x) dx$ 收敛.
12. $f(x) \in C[0, +\infty), a > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + a \int_0^x f(t) dt) = A < \infty$, 证明 $f(+\infty) = 0$.

5.2 解答

1. (1) $f(x)$ 是一个次数从 n 到 $2n$ 的多项式. 至于 $f^{(i)}(0)$ 是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时 $i \geq n$, 求导后得到的非零常数值是 $i!c$, 且 c 是整数除以 $n!$ 得到的有理数, 从而 $i!c$ 是整数. 由于 $f(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f^{(i)}(\pi) = (-1)^i f^{(i)}(0)$, 因此 $f^{(i)}(\pi)$ 也是整数.
- (2) 由分部积分, $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(x)(-\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx = f(0) + f(\pi) + f'(x) \sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx$. $f(x)$ 是 $2n$ 此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - f''(0) - f''(\pi) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(0) + (-1)^n f^{(2n)}(\pi)$, 因此是整数.
- (3) 在区间 $[0, \pi]$ 上成立 $0 \leq a - bx = b(\pi - x) \leq a$, 因此 $0 \leq f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$, 从而 $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \int_0^\pi f(x) dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$. 当 n 足够大时, $\frac{\pi^{n+1} a^n}{n!} < 1$.
2. 令 $p(x) = x^3 - x^2$, 从而有 $\int_0^1 [(f''(x))^2 - (p''(x))^2] dx = \int_0^1 [f''(x) - p''(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 f''(x)p''(x) dx - 2 \int_0^1 [p''(x)]^2 dx \geq 0 + 2f'(x)p''(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 f'(x)p'''(x) dx - 8 = 2f'(1)p''(1) - 2f(x)p'''(x)|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x)p''''(x) dx - 8 = 0$.
3. 设 $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_0)$, 从而 $m \leq f(x) \leq m + L|x - x_0|, \frac{1}{m+L|x-x_0|} \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}$. 两边积分, 得到

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq m(b-a) + \frac{L}{2}[(x_0-a)^2 + (x_0-b)^2]$$

$$\frac{b-a}{m} \geq \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \beta \geq \frac{1}{L} \ln \frac{(x_0 + \frac{m}{L} - a)(-x_0 + \frac{m}{L} + b)}{(\frac{m}{L})^2}$$

因此

$$\int_a^b f(x) dx \leq \sup_{x_0 \in [a, b]} \left\{ m(b-a) + \frac{L}{2}[(x_0-a)^2 + (x_0-b)^2] \right\} = m(b-a) + \frac{L}{2}(b-a)^2$$

$$\beta \geq \inf_{x_0 \in [a, b]} \left\{ \frac{1}{L} \ln \frac{(x_0 + \frac{m}{L} - a)(-x_0 + \frac{m}{L} + b)}{(\frac{m}{L})^2} \right\} \Rightarrow b-a \leq \frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L}$$

从而

$$\int_a^b f(x) dx \leq m \left(\frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L} \right) + \frac{L}{2} \left(\frac{(e^{L\beta} - 1)m}{L} \right)^2 = \frac{(e^{2L\beta} - 1)m^2}{2L}$$

对比欲证结论, 只需证明

$$\int_c^d f(x)dx \geq \alpha m^2 = m^2 \int_c^d \frac{dx}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{\int_c^d f(x)dx}{\int_c^d \frac{1}{f(x)}dx} \geq m^2$$

这由 $f(x) \geq m, \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{m}$ 立得.

4. 由 L'Hospital, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{g^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} 2g(x)f(x) = 0$. 因此 $\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx = \int_0^A g^2(x)d(-\frac{1}{x}) = -\frac{g^2(A)}{A} + 2 \int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}dx$. 再由 Cauchy 不等式, $\left(\int_0^A \frac{f(x)g(x)}{x}dx\right)^2 \leq \int_0^A f^2(x)dx \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \Rightarrow \left(\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx + \frac{g^2(A)}{A}\right)^2 \leq 4 \int_0^A f^2(x)dx \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \Rightarrow \left(\int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx\right)^2 \leq 4 \int_0^A f^2(x)dx \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \Rightarrow \int_0^A \frac{g^2(x)}{x^2}dx \leq 4 \int_0^A f^2(x)dx$. 令 $A \rightarrow +\infty$ 即可.

5. 记 $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$. 做变换 $t = \sqrt{n} \sin x$ 知 $I_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 由于 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$, 因此只需求出极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right] dt$. 在提示中令 $x = t^2, a = n$, 得到估计式 $0 \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right] dt \leq \frac{\int_0^{\sqrt{n}} t^4 e^{-t^2} dt}{n}$. 当 $n \rightarrow +\infty$ 时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0, 由夹逼原理知欲求极限存在且为 0. 从而 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. $I = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2x)}{(2x)^2+4} d(2x) = \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{\ln 2}{6} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \stackrel{x=e^t}{=} \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{e^{2t}+1} dt - \frac{\pi \ln 2}{12} = -\frac{\pi \ln 2}{12}$.

7. 令 $t = ax - \frac{b}{x}$, 则 $x = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a}, ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2+4ab}, dx = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}} dt$, 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x})dx &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^0 f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \frac{\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) dt \end{aligned}$$

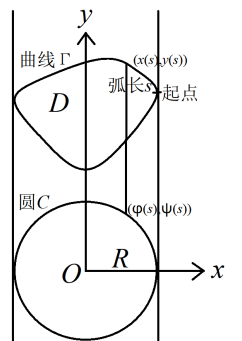
8. $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)d(x-a) = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x)d\frac{(x-a)^2}{2} = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} f''(x)dx = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} - f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} dx$. 同理 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2} + f'(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2} dx$. 两式相加得 $\int_a^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + (f''(\xi_1) + f''(\xi_2))\frac{(b-a)^3}{48} = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$. 最后一步用了 Darboux 定理.

9. 注意到 $A_n = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2} + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1)) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n} \right) + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1))$. 设 $|f'(x)| \leq M$, 从而 $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)d(x - \frac{2k-1}{2n}) = f(x)(x - \frac{2k-1}{2n}) \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (x - \frac{2k-1}{2n})f'(x)dx = \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n} - B_n$, 其中 $B_n := \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (x - \frac{2k-1}{2n})f'(x)dx = \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k-1}{2n}} (x - \frac{2k-1}{2n})f'(x)dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} (x - \frac{2k-1}{2n})f'(x)dx = f'(\xi_{k,1}) \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k-1}{2n}} (x - \frac{2k-1}{2n})dx + f'(\xi_{k,2}) \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} (x - \frac{2k-1}{2n})dx = -\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2} + \frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}$. 综上所述, 我们有 $nA_n = \sum_{k=1}^n \frac{f'(\xi_{k,2})-f'(\xi_{k,1})}{8n} + \frac{f(0)-f(1)}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n = \frac{1}{8}(\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f'(x)dx) + \frac{f(0)-f(1)}{2} = \frac{f(0)-f(1)}{2}$.

10. 设曲线方程为 $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0, L]$, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$,

且 D 的面积为 $A = \int_0^L x dy = \int_0^L x(s)y'(s)ds$. 又设 $C: \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为

半径的圆, 此处仍选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面积为 $\pi R^2 = -\int_0^L y dx = -\int_0^L \psi(s)x'(s)ds$. 从而由 Cauchy 不等式, $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))ds \leq \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2}ds \leq \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)}ds = RL$. 因此我们成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq A + \pi R^2 \leq RL \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s) + \psi(s)y'(s))^2 = 0$. 由于 $x(s)^2 + \psi(s)^2 = R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = y'(s), \psi(s) = y(s) + y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, 圆也!



11. 由 Abel 判别法, $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)dx$ 收敛, 而 $u_2(x)$ 单调有界, 因此 $\int_0^{+\infty} f(x)u_1(x)u_2(x)dx$ 收敛, 依此类推.
12. 记 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. 由 L'Hospital 法则, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}F(x)}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}(aF(x)+f(x))}{ae^{ax}} = \frac{A}{a}$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A - a \cdot \frac{A}{a} = 0$.

6 第 6 次习题课: 正项级数

6.1 问题

1.

6.2 解答

1.

7 第 7 次习题课: 任意项级数, 数项级数的性质

7.1 问题

7.2 解答

8 第 8 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (1)

8.1 问题

8.2 解答

9 第 9 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (2)

9.1 问题

9.2 解答

10 第 10 次习题课: 幂级数的基本性质

10.1 问题

10.2 解答

11 第 11 次习题课: 泰勒展开与多项式逼近

11.1 问题

11.2 解答

12 第 12 次习题课: 傅里叶级数的基本性质

12.1 问题

12.2 解答

13 第 13 次习题课: 傅里叶级数的收敛性

13.1 问题

13.2 解答

14 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2024 春数学分析 II 习题课 3 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.