# 高等数学 A II 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2023 年 2 月 28 日

## 目录

# 1 第 1 次习题课: 二重积分

## 1.1 问题

1. 累次积分变序: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx, \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$.
2. 求 $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 与 $xoy$ 平面所围的体积.
3. 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$.
4. 区域 $D$ 由 $y = x^3, y = 0, x = 1$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{1-x^4} d\sigma$.
5. 区域 $D$ 由 $y = 0, x = 1, y = x$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} d\sigma$.
6. 区域 $D$ 由 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $y = -x^2 + 1, y = x^2 - 1$ 两线在 $|x| \le 2$ 部分所围成, 计算积分 $I = \iint_D (x^2 + y^3) d\sigma$.
7. $0 \le p(x) \in R[a,b]$, $f(x), g(x)$ 于 $[a,b]$ 单调递增, 证明 $\int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \le \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$.
8. 计算极限 $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$.
9. 区域 $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$, 计算积分 $I = \iint_D \log(1 + x^2 + y^2) dxdy$.
10. 区域 $D$ 由 $y = 0, y = 1, y = x, y = x + 1$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D (4y - 2x) dxdy$.

## 1.2 解答

1. 这种题最好画图. 答案是 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y)dy, \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f(x,y)dx$.
2. 区域 $D = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}, D_0 = \{(x,y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\}$. 则体积 $V = \iint_D z d\sigma = 4 \iint_{D_0} z d\sigma = 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 4 \int_0^a \frac{2}{3} \frac{b}{a^3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \cdots$(换元法)$\cdots = \frac{\pi}{2} ab$.
3. 区域 $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le \sqrt{x}\}$. 累次积分时先对 $x$ 积分, 则原积分 $= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy = 1 - \sin 1$.
4. $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{1-x^4} dy = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^4} dx = -\frac{1}{6}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{1}{6}$.
5. $I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2} dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2 - y^2} + \frac{4x^2}{2} \arcsin \frac{y}{2x}\right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 (\frac{x}{2}\sqrt{3x^2} + 2x^2 \arcsin \frac{1}{2}) dx = \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3})$.
6. 首先, 因为积分区域关于 $y = 0$ 对称, 所以 $\iint_D y^3 d\sigma = 0$. 记 $D_1$ 为 $D$ 的第一象限部分, $D_2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}, D_3 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le -x^2 + 1\}$. 因此 $I = 4 \iint_{D_1} x^2 d\sigma = 4 \iint_{D_2} x^2 d\sigma - 4 \iint_{D_3} x^2 d\sigma = 4 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 dy - 4 \int_0^1 dx \int_0^{-x^2+1} x^2 dy = 4 \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx - 4 \int_0^1 x^2(1-x^2) dx = 4\pi - \frac{8}{15}$.
7. 利用二重积分.

$$\begin{aligned}
\text{RHS} - \text{LHS} &= \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b p(y)dy \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(y)f(y)dy \int_a^b p(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b \int_a^b [p(x)p(y)f(x)g(x) - p(x)p(y)f(y)g(x)] d\sigma = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(x)[f(x) - f(y)] d\sigma
\end{aligned}$$

同理 $\text{RHS} - \text{LHS} = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y) - f(x)] d\sigma$. 两式相加得 $2(\text{RHS} - \text{LHS}) = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)[g(x) - g(y)][f(x) - f(y)] d\sigma \ge 0$.
8. 记 $I(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$, 则 $I^2(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-a}^a e^{-y^2} dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} d\sigma$. 记区域 $D(a) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2\}$, 积分 $J(a) = \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2} d\sigma$. 由简单的二维区域包含关系知 $J(a) \le I^2(a) \le J(\sqrt{2}a)$. 再利用二重积分极坐标换元知 $J(a) = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta = -\pi e^{-r^2}|_{r=0}^{r=a} = \pi(1 - e^{-a^2})$. 因此 $\lim\limits_{a\to+\infty} J(a) = \pi$. 由夹逼原理知 $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a) = \sqrt{\pi}$.
9. 作极坐标变换, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \log(1 + r^2) r dr = \frac{\pi}{4}[(1 + r^2)\log(1 + r^2) - r^2]|_0^1 = \frac{\pi}{2}(\log 2 - \frac{1}{2})$.
10. $I = \int_0^1 dy \int_{y-1}^y (4y - 2x) dx = \int_0^1 (2y + 1) dy = 2$.

## 1.3 补充 (不要求掌握!)

类似于累次极限和整体极限的关系, 累次积分和二重积分也不具有相互决定性, 即二重积分存在并不保证累次积分存在. 例如设 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 是区间 $[0,1]$ 上的所有有理数组成的序列, 定义矩形 $D = [0,1] \times [0,1]$ 上的函数为 $f(x,y) =$

$\begin{cases} \frac{1}{k}, \text{ if } x = x_k, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$. 可以证明 $f(x,y) \in R(D)$ 且 $\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$. 但是, 由于 $f(x_k,y) = \frac{1}{k}\text{Dirichlet}(y)$ 导致 $\int_0^1 f(x_k,y)dy \not\exists$, 所以 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 不能使用累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ 计算. 但是若固定 $y$, $f(x,y)$ 要么是 Riemann 函数要么恒为 0, 积分值都是 0, 因此 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 可以使用累次积分 $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$ 计算.

# 2 第 2 次习题课: 三重积分

## 2.1 问题

1. 区域 $\Omega$ 由 $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$ 围成, 计算积分 $I = \iiint_\Omega x dv$.
2. 区域 $\Omega = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}$, 计算积分 $I = \iiint_\Omega z dv$.
3. 区域 $\Omega = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$, 计算积分 $I = \iiint_\Omega (x+y+z)^2 dv$.
4. 区域 $D$ 由 $(x-a)^2+y^2 = a^2 (y>0), (x-2a)^2+y^2 = 4a^2 (y>0), y=x$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$.
5. 计算椭圆抛物面 $z = x^2+2y^2$ 及抛物柱面 $z = 2-x^2$ 所围成立体的体积.
6. 区域 $D = \{(x,y) : 0 \le x+y \le 1, 0 \le x-y \le 1\}$, 计算积分 $I = \iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} d\sigma_{xy}$.
7. 区域 $\Omega$ 由 $z = \frac{x^2+y^2}{m}, z = \frac{x^2+y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y = \beta x (0 < m < n, 9 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$ 围成且在第一卦限的部分, 计算积分 $I = \iiint_\Omega xyz dv$.
8. 设 $h = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, f(x) \in C[-h,h]$, 证明 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \le 1} f(\alpha x + \beta y + \gamma z) dv_{xyz} = \pi \int_{-1}^1 (1-\zeta^2) f(h\zeta) d\zeta$.
9. 区域 $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 2z\}$, 计算积分 $I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2) dv$.
10. 区域 $\Omega = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$, 计算积分 $I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2) dv$.
11. 区域 $D = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, 计算积分 $I = \iint_D \max\{xy, x^3\} d\sigma$.
12. 区域 $\Omega = \{(x,y,z) : 0 \le z \le x^2+y^2 \le 1\}$, 计算积分 $I = \iiint_\Omega (y^2+z^2) dv$,
13. 区域 $V$ 由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 围成, 计算积分 $I = \iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dv$.

## 2.2 解答

1. 记区域 $D_{xy} = \{(x,y) : x \ge 0, y \ge 0, x+2y \le 1\}$, 累次积分时依次对 $z, y, x$ 积分, 有 $I = \iint_{D_{xy}} [\int_0^{1-x-2y} x dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} x(1-x-2y) d\sigma_{xy} = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} [x(1-x) - 2xy] dy = \int_0^1 [\frac{1}{2}x(1-x)^2 - \frac{1}{4}x(1-x)^2] = \frac{1}{48}$.
2. 记区域 $D_{xy} = \{(x,y) : x^2+y^2 \le \frac{R^2}{2}\}$, 累次积分时先对 $z$ 积分再极坐标换元, 有 $I = \iint_{D_{xy}} [\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} z dz] d\sigma_{xy} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}[R^2 - 2(x^2+y^2)] d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}(R^2 - 2r^2) r dr = \frac{\pi R^4}{8}$.
3. 由对称性, $I = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2) dv + 2\iiint_\Omega (xy+yz+zx) dv = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2) dv$. 先计算 $I_1 = \iiint_\Omega z^2 dv$. 记区域 $D_z = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} \le 1\}$, 累次积分时先对 $\sigma_{xy}$ 积分再对 $z$ 积分, 有 $I_1 = \int_{-c}^c dz \iint_{D_z} z^2 d\sigma_{xy} = \int_{-c}^c z^2 \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2}) dz = \frac{4\pi abc^3}{15}$. 因此 $I = \frac{4\pi abc}{15}(a^2+b^2+c^2)$.
4. 令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, 有 $\begin{cases} (x-a)^2+y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 - 2ar\cos\theta = 0 \Rightarrow r = 2a\cos\theta \\ (x-2a)^2+y^2 = 4a^2 \Rightarrow r = 4a\cos\theta \\ y = x \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$, 从而 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta} r^2 dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{56}{3} a^3 \cos^3\theta d\theta = \frac{112-70\sqrt{2}}{9} a^3$.
5. 联立方程 $\begin{cases} z = x^2+2y^2 \\ z = 2-x^2 \end{cases}$ $\Rightarrow x^2+y^2 = 1$, 因此区域 $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$, 体积 $V = \iint_D [(2-x^2) - (x^2+2y^2)] d\sigma = 2\iint_D (1-x^2-y^2) d\sigma$. 做极坐标换元知 $V = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) dr = \pi$.
6. 令 $\begin{cases} \xi = x+y \\ \eta = x-y \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ y = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2}$, 区域 $D_{xy} = \{(x,y) : 0 \le x+y \le 1, 0 \le x-y \le 1\} \Rightarrow D_{\xi\eta} = \{(\xi,\eta) : 0 \le \xi \le 1, 0 \le \eta \le 1\}$, 所以换元后 $I = \iint_{D_{\xi\eta}} \xi^2 e^{\xi\eta} |J| d\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\int_0^1 d\xi \int_0^1 \xi^2 e^{\xi\eta} d\eta = \frac{1}{2}\int_0^1 \xi(e^\xi - 1) d\xi = \frac{1}{4}$.

7. 令 $\begin{cases} u=\frac{z}{x^2+y^2} \\ v=xy \\ w=\frac{y}{x} \end{cases}$，即 $\begin{cases} x=\sqrt{\frac{v}{w}} \\ y=\sqrt{wv} \\ z=uv(w+\frac{1}{w}) \end{cases}$，Jacobi 行列式 $J=|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|=\frac{v}{2w}(w+\frac{1}{w})$，区域 $\Omega\to\Omega_{uvw}=\{(u,v,w):\frac{1}{n}\le u\le\frac{1}{m},a^2\le v\le b^2,\alpha\le w\le\beta\}$，所以换元后 $I=\iiint_{\Omega_{uvw}}\sqrt{\frac{v}{w}}\sqrt{wv}uv(w+\frac{1}{w})\frac{v}{2w}(w+\frac{1}{w})dudvdw=\iiint_{\Omega_{uvw}}v^3u(w+\frac{1}{w})^2\frac{1}{w}dudvdw=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}udu\int_{a^2}^{b^2}v^3dv\int_\alpha^\beta(w+\frac{2}{w}+\frac{1}{w^3})dw=\frac{1}{32}(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2})(b^8-a^8)[(\beta^2-\alpha^2)(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2})+4\log\frac{\beta}{\alpha}]$.

8. 作正交变换 $\begin{cases} \xi=a_1x+b_1y+c_1z \\ \eta=a_2x+b_2y+c_2z \\ \zeta=\frac{1}{h}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \end{cases}$ (旋转)，则 $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}|=1$，所以换元后 LHS $=\iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le1}f(h\zeta)d\xi d\eta d\zeta=\int_{-1}^1d\zeta\iint_{\xi^2+\eta^2\le1-\zeta^2}f(h\zeta)d\xi d\eta=\pi\int_{-1}^1(1-\zeta^2)f(h\zeta)d\zeta=$ RHS.

9. 作球坐标变换，区域 $\Omega:0\le r\le2\cos\phi$，积分 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=\int_0^{2\cos\phi}r^2\,r^2\sin\phi dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi\int_0^{2\cos\phi}r^4dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\frac{32}{5}\cos^5\phi d\phi=-\frac{64}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\phi d\cos\phi=-\frac{64}{5}\frac{\cos^6\phi}{6}|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{15}\pi$.

10. 作广义球坐标系变换 $\begin{cases} x=ar\sin\phi\cos\theta \\ y=br\sin\phi\sin\theta \\ z=cr\cos\phi \end{cases}$，Jacobi 行列式为 $J=abcr^2\sin\phi$，所以换元后

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\phi\int_0^1dr\,r^2abc\sin\phi(a^2r^2\sin^2\phi\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\phi\sin^2\theta+c^2r^2\cos^2\phi)\\
&=\frac{abc}{5}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}-[(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)(1-\cos^2\phi)+c^2\cos^2\phi]d\cos\phi\\
&=\frac{abc}{5}\int_0^{2\pi}[\frac{4}{3}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)+\frac{2}{3}c^2]d\theta=\frac{4abc\pi}{15}(a^2+b^2+c^2)
\end{aligned}$$

11. 引入辅助积分 $J=\iint_D\min\{xy,x^3\}d\sigma$. $I+J=\iint_D(xy+x^3)d\sigma=\int_0^1dy\int_{-1}^1(xy+x^3)dx=0$, $I-J=\iint_D|xy-x^3|d\sigma=\iint_D|x||y-x^2|d\sigma=2\int_0^1dy\int_0^1x|y-x^2|dx\overset{u=x^2}{=}\int_0^1dy\int_0^2|y-u|du\overset{\text{几何意义}}{=}\frac{1}{2}\int_0^1[y^2+(1-y)^2]dy=\frac{1}{3}\Rightarrow I=\frac{1}{6}$.

12. $I\overset{\text{对称性}}{=}\iint_{x^2+y^2\le1}d\sigma_{xy}\int_0^{x^2+y^2}(\frac{x^2+y^2}{2}+z^2)dz=\iint_{x^2+y^2\le1}[\frac{1}{3}(x^2+y^2)^3+\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2]d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta(\frac{1}{3}r^6+\frac{1}{2}r^4)rdr=\frac{\pi}{4}$.

13. $I\overset{w=x+y+z}{=}\iiint_{x,y\ge0,x+y\le w\le1}\frac{1}{(1+w)^2}dxdydw=\int_0^1\frac{1}{(1+w)^2}dw\iint_{x,y\ge0,x+y\le w}d\sigma_{xy}=\int_0^1\frac{w^2}{2(1+w)^2}dw=\frac{3}{4}-\log2$.

### 2.3 补充 (不要求掌握!)

$n$ 维空间中的球坐标系: 一个向径 $r$, $n-1$ 个角度 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}$, 其中, 一个角度转一圈 $(\theta_{n-1})$, $n-2$ 个角度转半圈 $(\theta_1,\cdots,\theta_{n-2})$. 与直角坐标系的关系为 $\begin{cases} x_1=r\cos\theta_1 \\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-2}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2} \\ x_{n-1}=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$，利用归纳法可以证明 Jacobi 行列式为 $|J|=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$.

$n$ 维空间中半径为 $R$ 的球体 $\Omega:x_1^2+\cdots+x_n^2\le R^2$ 的体积 $V_n$: 作球坐标变换知

$$\begin{aligned}
V_n&=\int\cdots\int_\Omega dx_1\cdots dx_n=\int_0^{2\pi}d\theta_{n-1}\int_0^{\pi}d\theta_{n-2}\cdots\int_0^{\pi}d\theta_1\int_0^Rr^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}dr\\
&=\frac{R^n}{n}2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta_{n-3}d\theta_{n-3}\cdots\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_1d\theta_1\\
&=\frac{R^n}{n}2\pi\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},1)\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\cdots\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{n-2}{2})\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2})
\end{aligned}$$

# 3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式

## 3.1 问题

1. 曲线 $\Gamma : x^2 + y^2 = x$, 计算积分 $I = \int_\Gamma \sqrt{1 - x^2 - y^2} ds$.
2. 曲线 $C$ 是 $y = 0, y = x(x \geq 0), x^2 + y^2 = a^2$ 所围成图形的边界, 计算积分 $I = \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$.
3. 曲线 $L : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = at \end{cases}$ $, 0 \leq t \leq 2\pi$, 计算积分 $I = \int_L \frac{z^2 ds}{x^2+y^2}$.
4. 曲线 $C : \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$ $, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 计算积分 $I = \int_C (x^2 + y^2)^n ds$.
5. 曲线 $C : x^2 + y^2 = a^2$, 计算积分 $I = \oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 方向是逆时针.
6. 曲线 $\widehat{AB}$ 为单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半部分, 计算积分 $I = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy$, 方向为从 $A(1, 0)$ 到 $B(-1, 0)$.
7. 曲线 $\Gamma$ 是从 $(0, 0)$ 沿函数 $y = x^\alpha$ 到 $(1, 1)$ 的部分, 计算积分 $I = \int_\Gamma (x^2 - y^2)dx - 2xydy$.
8. 曲线 $\Gamma$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 计算积分 $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz$, 方向是从 $z$ 轴正向看回来的逆时针方向.
9. 区域 $D$ 是由点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 围成的三角形, 计算积分 $I = \iint_D x^2 dxdy$.
10. 曲线 $C : 741x^8 + 886e^x y^2 + \sin(x^9 \cos(y)) = 5$, 计算积分 $I = \oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.
11. 曲线 $E : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 计算积分 $I = \int_E |xy| ds$.
12. 证明或否定: 曲线积分 $I = \int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} - \frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内积分与路径无关.
13. (格林第二公式) 设闭区域 $D$ 是由有限条逐段光滑曲线围成的, $u = u(x, y), v = v(x, y) \in C^2(D)$, 证明 $\iint_D (v\triangle u - u\triangle v)d\sigma = \oint_{\partial D} (v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}})ds$, 其中 $\overrightarrow{n}$ 为 $\partial D$ 的单位外法向量.
14. 求函数 $u(x, y)$ 使得 $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1+x^2}dy$.
15. $L_n = \{(t, |\sin t|) : 0 \leq t \leq n\pi\}, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{L_n} e^{y^2-x^2} \cos(2xy)dx + e^{y^2-x^2} \sin(2xy)dy$.

## 3.2 解答

1. 曲线参数方程 $x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t, y = \frac{1}{2}\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, 则 $ds = \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}dt$, 原积分 $I = \int_\Gamma \sqrt{1 - x}ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sin\frac{t}{2}|dt = \int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt = 2$.
2. 记 $C_1, C_2, C_3$ 分别为曲线 $C$ 的下、右上、左上部分, 则原积分 $I = \int_{C_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{C_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{C_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int_0^a e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a ad\theta + \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx = (e^a - 1) + \frac{\pi}{4}ae^a + e^{\sqrt{2}x}|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}ae^a + 2(e^a - 1)$.
3. 直接使用公式, $I = \int_0^{2\pi} \frac{a^2t^2}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2}dt = \int_0^{2\pi} t^2\sqrt{2}adt = \frac{8\sqrt{2}}{3}a\pi^3$.
4. 直接使用公式, $I = \int_0^{2\pi} a^{2n}ad\theta = 2\pi a^{2n+1}$.
5. 曲线参数方程 $x = a\cos t, y = a\sin t$, 因此 $I = \oint \frac{a^2(\cos t+\sin t)(-\sin t)-a^2(\cos t-\sin t)\cos t}{a^2}dt = \int_0^{2\pi}(-1)dt = -2\pi$.
6. 由 $x^2 + y^2 = 1$ 知 $dy = -\frac{x}{y}dx$, 从而有 $\int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy = \int_1^{-1} -ydx + x(-\frac{x}{y}dx) = \int_{-1}^1 (\frac{x^2+y^2}{y})dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.
7. 直接计算得 $I = \int_0^1 (x^2 - x^{2\alpha})dx - 2xx^\alpha(\alpha x^{\alpha-1})dx = \int_0^1 (x^2 - (2\alpha + 1)x^{2\alpha})dx = -\frac{2}{3}$.
8. 球面的单位法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (x, y, z)$, 平面的单位法向量为 $\overrightarrow{n_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$. 所以曲线 $\Gamma$ 的单位切向量为 $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$. 从而积分为 $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot \overrightarrow{\tau}ds = \int_\Gamma (x, y, z) \cdot (\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2})ds = \int_\Gamma 0ds = 0$.
9. $AB$ 的方程为 $y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$, $BC$ 的方程为 $y = y_2 + \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x - x_2)$, $CA$ 的方程为 $y = y_3 + \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x - x_3)$. 由格林公式, 知原积分 $I = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{3}x^3)d\sigma = \oint_{\partial D} \frac{1}{3}x^3dy = \int_{\overline{AB}} \frac{1}{3}x^3dy + \int_{\overline{BC}} \frac{1}{3}x^3dy + \int_{\overline{CA}} \frac{1}{3}x^3dy = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{3}x^3\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{1}{3}x^3\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}dx+\int_{x_3}^{x_1} \frac{1}{3}x^3\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}dx = \frac{1}{12}[(y_2-y_1)(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1)+(y_3-y_2)(x_3^2+x_2^2)(x_3+x_2)+(y_1-y_3)(x_1^2+x_3^2)(x_1+x_3)]$.
10. 容易验证圆点 $O$ 是闭曲线 $C$ 所围成区域的内点. 记 $C_\epsilon : x^2 + y^2 = \epsilon^2$, 取 $\epsilon$ 足够小使 $C_\epsilon$ 围成的区域完全在曲线 $C$ 内侧. 在 $C$ 与 $C_\epsilon$ 围成的区域 $D$ 上使用格林公式知 $\oint_{\partial D} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+y^2}))d\sigma = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \oint_{C_\epsilon} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \overset{x=\epsilon\cos\theta,y=\epsilon\sin\theta}{=} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.
11. 利用变换 $x = \cos\theta, y = 2\sin\theta$ 知 $I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}d\theta \overset{t=\cos 2\theta}{=} 2\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}t + \frac{5}{2}}dt = \frac{56}{9}$.

12. 上述积分为两个曲线积分之差, 即 $I=\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=\int_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_\Gamma \frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}$. 令 $P_i=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q_i=\frac{(x-i)dy}{(x-i)^2+y^2}, i=0,1$, 容易验证 $\frac{\partial P_i}{\partial y}=\frac{\partial Q_i}{\partial x}$. 但由于 $P_0,Q_0$ 包含瑕点 $(0,0)$, $P_1,Q_1$ 包含瑕点 $(1,0)$, 且在包含瑕点的区域内积分值可能为 $2\pi$(第 10 题结论), 不包含瑕点的区域内积分值必为 0, 因此原积分与路径有关, 结论不对.

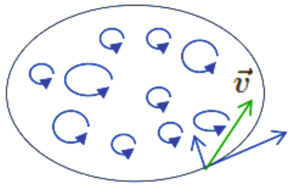
13. 由格林公式, $\iint_D \nabla\cdot(P,Q)d\sigma=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma=\oint_{\partial D}Pdy-Qdx=\oint_{\partial D}(P,Q)\cdot(dy,-dx)=\oint_{\partial D}(P,Q)\cdot\overrightarrow{n}ds$. 因此 $\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}ds=\oint_{\partial D}v\nabla u\cdot\overrightarrow{n}ds=\iint_D\nabla\cdot(v\nabla u)d\sigma=\iint_D(\nabla v\cdot\nabla u+v\triangle u)d\sigma$, 类似有 $\oint_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}}ds=\iint_D(\nabla u\cdot\nabla v+u\triangle v)d\sigma$. 两式相减即得结果.

14. 令 $P(x,y)=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x,y)=\frac{e^y}{1+x^2}$, 则有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xe^y}{(x^2+1)^2}$. $\int P(x,y)dx=\frac{e^y-1}{x^2+1}+C'$, $Q(x,y)$ 删除掉含 $x$ 的项后为 0, 因此 $u(x,y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}+C$.

15. 容易验证该曲线积分与路径无关, 因此沿着 $x$ 轴积分有 $I_n=\int_0^{n\pi}e^{-x^2}dx\to\int_0^{+\infty}e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

### 3.3 补充 (不要求掌握!)

格林公式的物理意义: 平面定常流体 (各点流速只与位置有关, 与时间无关) 于 $(x,y)$ 点的流速为 $\overrightarrow{v}(x,y)=P(x,y)\overrightarrow{i}+Q(x,y)\overrightarrow{j}$. 对于固定的 $x$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ 决定了 $x$ 方向向 $y$ 方向的旋转, 所以若以逆时针方向为正向, 则 $x$ 方向向 $y$ 方向的旋转度量为 $-\frac{\partial P}{\partial y}$. 对于固定的 $y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 决定了 $y$ 方向向 $x$ 方向的旋转, 其度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x}$. 从而, $(x,y)$ 点的流体的旋转度的度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$, 命名为 (平面流场的旋度), 记为 $\mathrm{rot}\overrightarrow{v}$.




物理现象: 边界线 $\partial D$ 上的环流量等于区域 $D$ 上各点旋转量的迭加.

## 4 第 4 次习题课: 曲面积分

### 4.1 问题

1. 计算球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被柱面 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ 割下的部分的面积.

2. 求螺旋面 $\Sigma:\begin{cases}x=u\sin v\\ y=u\cos v\\ z=av\end{cases}$ 在 $0\le u\le R, 0\le v\le 2\pi$ 部分的面积, 其中 $a>0$ 是常数.

3. 求抛物面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy(a>0)$ 内的那部分面积.

4. $\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 计算积分 $I=\iint_\Sigma x^2y^2dS$.

5. $\Sigma$ 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2, 0\le z\le H$, 计算积分 $I=\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)dS$.

6. $S$ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截下的部分, 计算积分 $I=\iint_S(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)dS$.

7. 求均匀物质曲面 $\Sigma: z=2-(x^2+y^2), z\ge 0$ 的质心坐标.

8. $\Sigma$ 是平面 $2x+2y+z=6$ 于第一卦限部分上侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}dS$, 其中 $\overrightarrow{F}=(xy,-x^2,x+z)$.

9. $\Omega=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$, $\Sigma$ 是 $\partial\Omega$ 的外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma xyzdxdy$.

10. 流 $\overrightarrow{v}=xy\overrightarrow{i}+yz\overrightarrow{j}+xz\overrightarrow{k}$, 求穿出 $\frac{1}{8}$ 球面 $x^2+y^2+z^2=1$(第一卦限) 的流量.

11. $\Sigma$ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\le z\le h)$ 外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma xdydz+ydxdz+zdxdy$.

12. $\Sigma$ 是由三个坐标平面及 $x+y+z=1$ 所围成四面体外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$.

13. $S$ 是曲面 $x^2+y^2=1(0\le z\le 2)$ 的外侧, 计算积分 $I=\iint_S x(y-z)dydz+(x-y)dxdy$.

14. $S$ 是椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面, 计算积分 $I=\iint_S\frac{dxdy}{z}$.

15. $S$ 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=4$ 所截取部分的外侧, 计算积分 $I=\oiint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$.

### 4.2 解答

1. 割下部分 $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y)\in D=\{(x,y):(x-\frac{1}{2})^2+y^2\le\frac{1}{4}\}$. 从而 $S=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}d\sigma_{xy}=2\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}d\sigma_{xy}$. 利用极坐标变换知 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-r^2}|_0^{\cos\theta}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=2\pi-4$.

2. $\overrightarrow{\tau_1}=(\sin v,\cos v,0), \overrightarrow{\tau_2}=(u\cos v,-u\sin v,a), |\overrightarrow{\tau_1}\times\overrightarrow{\tau_2}|=\sqrt{u^2+a^2}\Rightarrow S=\iint_\Sigma|\overrightarrow{\tau_1}\times\overrightarrow{\tau_2}|d\sigma_{uv}=\int_0^{2\pi}dv\int_0^R\sqrt{u^2+a^2}du$ $=2\pi[\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log(u+\sqrt{u^2+a^2})]_0^T=\pi R\sqrt{R^2+a^2}+\pi a^2\log(\frac{R+\sqrt{R^2+a^2}}{a})$.

3. 由抛物面方程得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{a},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{a},dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}$. 从曲线表达式 $\begin{cases}(x^2+y^2)^2=2a^2xy\\ z=0\end{cases}$ 知 $(x,y)$ 落在第一、四象限. 做极坐标变换, 知柱面方程为 $r^2=a^2\sin 2\theta(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\text{或}\pi\le\theta\le\frac{3\pi}{2})$. 因此由对称性知 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}rdr=\frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}}-1]d\theta=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3(\theta+\frac{\pi}{4})d\theta-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 udu-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}(-\frac{1}{3}\sin^2 u\cos u-\frac{2}{3}\cos u)|_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{20}{9}a^2-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$.
4. $\Sigma$ 在 $xoy$ 平面的投影区域为 $D:x^2+y^2\le R^2$. 又有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$, 所以 $\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $I=\iint_\Sigma x^2y^2dS=\iint_D x^2y^2\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr=R\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\int_0^R\frac{r^5}{\sqrt{R^2-r^2}}dr$. 分开计算: $\int_0^R\frac{r^5}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=\frac{1}{2}\int_0^R\frac{r^4}{\sqrt{R^2-r^2}}dr^2\overset{R^2-r^2=t}{=}\frac{1}{2}\int_0^{R^2}\frac{(R^2-t)^2}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{R^2}(R^4t^{-\frac{1}{2}}-2R^2t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}})dt=\frac{1}{2}[2R^4t^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}r^2t^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}]|_0^{R^2}=\frac{8}{15}R^5,\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)d\theta=\frac{\pi}{4}$. 所以 $I=R\frac{\pi}{4}\frac{8}{15}R^5=\frac{2}{15}\pi R^6$.
5. $\Sigma$ 可以表示为 $x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$, 其在 $yoz$ 平面的投影区域为 $D_{yz}:-R\le y\le R,0\le z\le H$. 又 $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}},\frac{\partial x}{\partial z}=0,\sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}$. 再考虑对称性, $I=2\iint_{D_{yz}}(R^2+z^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}d\sigma_{yz}=2R\int_{-R}^R\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H(R^2+z^2)dz=2R\arcsin\frac{y}{R}|_{-R}^T(R^2z+\frac{1}{3}z^3)|_0^H=2RH\pi(R^2+\frac{H^2}{3})$.
6. $I=\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1}[x^2y^2+(x^2+y^2)^2]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+r^4)rdr=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$.
7. 设其质心坐标为 $(x_0,y_0,z_0)$, 由对称性有 $x_0=y_0=0,z_0=\frac{\iint_\Sigma zdS}{\iint_\Sigma dS}$. 易知 $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$, 因此 $\iint_\Sigma dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=2\pi\cdot\frac{1}{2}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi$, $\iint_\Sigma zdS=\iint_{D_{xy}}(2-x^2-y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}dr=\frac{37}{10}\pi$. 所以 $z_0=\frac{111}{130}$.
8. $\overrightarrow{n}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}),z=6-2x-2y,D=\{(x,y):x\ge 0,y\ge 0,x+y\le 3\},dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}d\sigma_{xy}=3d\sigma_{xy}$, 则 $I=\iint_\Sigma\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}dS=\iint_\Sigma[\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}(x+z)]dS=\iint_D[\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}(x+6-2x-2y)]\cdot 3d\sigma_{xy}=\iint_D[2xy-2x^2-x-2y+6]d\sigma_{xy}=\int_0^3dx\int_0^{3-x}[2xy-2x^2-x-2y+6]dy=\frac{27}{4}$.
9. 记 $\Sigma_1,\Sigma_2$ 分别为 $\Sigma$ 在第一卦限和第五卦限的部分, $D=\{(x,y):x\ge 0,y\ge 0,x^2+y^2\le 1\}$. 由对称性, 可简化 $I=2\iint_{\Sigma_1}xyzdxdy=2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma_{xy}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-r^2}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr^2=\frac{1}{2}\int_0^1 u\sqrt{1-u}du\overset{t=\sqrt{1-u}}{=}\frac{1}{2}\int_1^0(1-t^2)t(-2t)dt=\frac{2}{15}$.
10. $\overrightarrow{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),Q=\iint_\Sigma\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}dS=\iint_\Sigma Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint_\Sigma xydydz+yzdxdz+xzdxdy\overset{\text{对称性}}{=}3\iint_\Sigma xzdxdy=3\iint_{x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0}x\sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma_{xy}=\frac{3\pi}{16}$.
11. $I=\iint_\Sigma(x,y,z)\cdot\overrightarrow{n}dS=\iint_\Sigma(x,y,z)\cdot\frac{(x,y,-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=\iint_\Sigma\frac{x^2+y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=0$.
12. 记 $\Sigma$ 在 $xy,yz,zx$ 平面上的部分分别为 $\Sigma_z,\Sigma_x$ 和 $\Sigma_y$, 在平面 $x+y+z=1$ 上的部分为 $\Sigma_1$. 在 $\Sigma_z$ 上, $z=0,dydz=dzdx=0$, 从而 $\iint_{\Sigma_z}xdydz+ydzdx+zdxdy=0$. 同理在 $\Sigma_y$ 与 $\Sigma_z$ 上的积分都为零. 因此 $I=\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$. 记 $D=\{(x,y):x\ge 0,y\ge 0,x+y\le 1\}$, 则由对称性 $I=3\iint_D(1-x-y)d\sigma_{xy}=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{2}$.
13. 注意到曲面 $S$ 在 $O_{xy}$ 平面上的投影为一曲线, 所以 $\iint_S(x-y)dxdy=0$. 为了计算另一个积分, 将曲面分成两部分 $\begin{cases}S_1:x=\sqrt{1-y^2}(0\le z\le 2)\\ S_2:x=-\sqrt{1-y^2}(0\le z\le 2)\end{cases}$. 记 $D=\{(y,z):-1\le y\le 1,0\le z\le 2\}$, 由对称性, $I=2\iint_{S_1}x(y-z)dydz=2\int_0^2dz\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}(y-z)dy=-2\pi$.
14. 由对称性, $I=2\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{dxdy}{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}=\frac{2}{c}\int_{-a}^a dx\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\frac{dy}{\sqrt{(1-x^2/a^2)-y^2/b^2}}=\frac{2}{c}\int_{-a}^a\frac{b\pi}{2}dx=\frac{2\pi ab}{c}$.
15. 由对称性 $\oiint_S xdydz+ydzdx=0$. 从而 $I=\oiint_S zdxdy=\iint_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2rdr=8\pi$.

### 4.3 补充 (不要求掌握!)

事实上, 有些集合是不可求长的. 用 $m(A)$ 表示集合 $A$ 的 "长度", 在 $[0,1]$ 中根据规则 "$x_1\sim x_2$ 当且仅当 $x_1-x_2\in\mathbb{Q}$" 划分等价类, 每个等价类选取一个元素 $x_\alpha$(依赖于选择公理), 这样构成了集合 $A$. 假设 $A$ 可求长, 那么 $A_q=(A+q)\cap[0,1],\forall q\in\mathbb{Q}$ 也可求长, 且对于 $q\ne p$ 有 $A_q\cap A_p=\emptyset$. 这表明 $1=m([0,1])=\sum_{q\in\mathbb{Q}}m(A_q)$, 即 $A$ 不是零长度的. 注意到对任意的 $q\in\mathbb{Q}$ 成立 $m(A_q)\ge m(A)-q$, 这样只需考虑所有在区间 $[0,\frac{1}{2}m(A)]$ 中的有理数便知矛盾! 这说明集合 $A$ 是不可求长的. 因此, 不是所有的曲线都能求其长度, 不是所有的曲面都能求其面积.

# 5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式

## 5.1 问题

1. $\Sigma$ 是锥面 $x^2+y^2=z^2(0\le z\le 1)$ 外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$.
2. $S$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上半部分上侧, 计算积分 $I=\iint_S(\sin yz+x)dydz+(e^{xz}+y)dzdx+(xy+z)dxdy$.
3. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为一封闭光滑曲面, 以它为边界的闭区域为 $D$, $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3$ 不在 $S$ 上. 计算积分 $I=\iint_S\frac{\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})}{r^2}$, 其中 $\overrightarrow{r}=(x-\xi,y-\eta,z-\zeta),r=|\overrightarrow{r}|,|\overrightarrow{n}|$ 是 $S$ 的单位外法向量.
4. 设 $f(x,y,z)$ 表示从原点到椭球面 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $P(x,y,z)$ 的切平面的距离, 计算积分 $I=\iint_\Sigma\frac{dS}{f(x,y,z)}$.
5. $L$ 是平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截得三角形 $\Sigma$ 的边界, 其正向与此三角形上侧成右手系, 计算积分 $I=\oint_L zdx+xdy+ydz$.
6. $L$ 为椭圆 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\end{cases}$, 方向与椭圆面上侧构成右手系, 计算积分 $I=\oint_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$.
7. $\Gamma_h$ 是平面 $x+y+z=h$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线, 从 $z$ 轴正向看去逆时针方向, 计算积分 $I=\oint_{\Gamma_h}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$.
8. $C$ 是平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 切立方体 $\Omega=\{(x,y,z):0\le x,y,z\le a\}$ 的表面所得的切痕, 方向是从 $x$ 轴正向看去逆时针方向, 计算积分 $I=\oint_C(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$.
9. $S$ 是柱面 $x^2+y^2=R^2,-R\le z\le R$ 所围成的立体表面外侧, 计算积分 $I=\iint_S\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$.
10. $S$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1,z=2$ 所围立体的表面外侧, 计算积分 $\iint_S\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.
11. 函数 $P(x,y),Q(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$, 且曲线积分 $\int_\Gamma Pdx-Qdy$ 和 $\int_\Gamma Pdy+Qdx$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中与路径无关, 求证 $P(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(x+\cos\theta,y+\sin\theta)d\theta,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

## 5.2 解答

1. 记 $\Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\},\Sigma_0=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1,z=1\}$, 则 $I=\oiint_{\partial\Omega}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy-\iint_{\Sigma_0}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy:=I_1-I_2$. 根据高斯公式, $I_1=\iiint_\Omega[0+0+0]dv=0$, 而 $I_2=\iint_{\Sigma_0}(x-y)dxdy=\iint_{\Sigma_0}xd\sigma_{xy}-\iint_{\Sigma_0}yd\sigma_{xy}=0-0=0$. 因此 $I=0$.
2. 取 $S_1=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1,z=0\}$, 方向向下, 则 $S\cup S_1$ 构成了上班单位球体 $D$ 的边界外侧. 由高斯公式得 $\iint_{S\cup S_1}(\sin yz+x)dydz+(e^{xz}+y)dzdx+(xy+z)dxdy=3\iiint_D dv=2\pi$. 而 $\iint_{S_1}(xy+z)dxdy=-\iint_{x^2+y^2\le 1}xyd\sigma_{xy}=0$. 因此 $I=2\pi$.
3. $\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})=\frac{1}{r}\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n}\Rightarrow I=\iint_S\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{n}dS=\iint_S\frac{x-\xi}{r^3}dydz+\frac{y-\eta}{r^3}dzdx+\frac{z-\zeta}{r^3}dxdy$. 由 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3})=\frac{1}{r^3}-\frac{3(x-\xi)^2}{r^5},\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3})=\frac{1}{r^3}-\frac{3(y-\eta)^2}{r^5},\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})=\frac{1}{r^3}-\frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$ 知 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})=0$. 当 $(\xi,\eta,\zeta)\notin D$ 时, 根据高斯公式成立 $I=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})]dv=0$. 当 $(\xi,\eta,\zeta)\in D$ 时, 取 $\epsilon$ 充分小使得球面 $S_\epsilon=\{(x,y,z):(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\epsilon^2\}$ 完全落在 $D$ 的内部. 如果取 $S_\epsilon$ 的内侧 $S_\epsilon^-$, 设区域 $D_\epsilon$ 以 $S$ 与 $S_\epsilon^-$ 为边界, 则 $\iint_{S\cup S_\epsilon^-}\frac{\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})}{r^2}dS=\iint_{D_\epsilon}0dv=0$. 注意到在 $S_\epsilon$ 上, $\overrightarrow{r}$ 与 $\overrightarrow{n}$ 平行, 从而 $I=-\iint_{S_\epsilon^-}\frac{\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})}{r^2}dS=\iint_{S_\epsilon}\frac{dS}{\epsilon^2}=\frac{1}{\epsilon^2}4\pi\epsilon^2=4\pi$.
4. 对 $\Sigma$ 的方程两边微分得到 $\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0$, 因此 $P$ 处的外法向量为 $\overrightarrow{n}=(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})$, 切平面方程为 $\frac{x}{a^2}(X-a)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0$, 原点到切平面距离 $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2+(\frac{y}{b^2})^2+(\frac{z}{c^2})^2}}$, 因此 $I=\iint_\Sigma\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2+(\frac{y}{b^2})^2+(\frac{z}{c^2})^2}dS=\iint_\Sigma(\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma)dS=\iint_\Sigma\frac{x}{a^2}dydz+\frac{y}{b^2}dzdx+\frac{z}{c^2}dxdy$. 记 $V=\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 由高斯公式有 $I=\iiint_V(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})dv=\frac{4\pi abc}{3}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$.
5. $\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}=dydz+dzdx+dxdy$, 因此由斯托克斯公式, $I=\iint_\Sigma dydz+dxdz+dxdy=3\iint_\Sigma dxdy=\frac{3}{2}$.
6. 记椭圆面上侧为 $\Sigma$, $\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}=-2dydz-2dzdx-2dxdy$, 因此由斯托克斯公式, $I=\iint_\Sigma-2dydz-2dzdx-2dxdy=-2\iint_\Sigma dydz+dxdy=-2[\iint_{D_{yz}}d\sigma_{yz}+\iint_{D_{xy}}d\sigma_{xy}]=-2(\pi ah+\pi a^2)$.

7. 设平面 $x+y+z=h$ 被圆周 $\Gamma_h$ 所围成部分为 $S_h$, 则 $S_h$ 是一半径为 $\sqrt{1-\frac{h^2}{3}}$ 的圆盘. 由斯托克斯公式, $I=\iint_{S_h}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=-\frac{4}{\sqrt{3}}(x+y+z)dS=-\frac{4h}{\sqrt{3}}\iint_{S_h}dS=-\frac{4h}{\sqrt{3}}\pi(1-\frac{h^2}{3})$.
8. 令 $\Sigma$ 是 $C$ 所围的区域, 方向为上侧, 由斯托克斯公式知 $I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(x+y+z)dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\frac{3}{2}adS=-2\sqrt{3}a\iint_\Sigma dS$. 最后, 因为 $\Sigma$ 是边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的正六边形, 面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, 所以 $I=-\frac{9}{2}a^3$.
9. 记 $S_1,S_2,S_3$ 分别为 $S$ 的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为 $I=\iint_S\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}+\iint_S\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}:=I_1+I_2$. 先看第一项, 显然 $\iint_{S_1}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{S_2}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=0$. 记 $D_{yz}=\{(y,z):-R\le y,z\le R\}$, 从而 $\iint_{S_3}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=2\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2}=2\int_{-R}^R\frac{1}{R^2+z^2}dz\int_{-R}^R\sqrt{R^2-y^2}dy=2\times\frac{1}{2}\pi R^2\times\frac{\pi}{2R}=\frac{1}{2}\pi^2R$. 再看第二项, 显然 $\iint_{S_1+S_2}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0,\iint_{S_3}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0$(前者是因为对称性, 后者是因为 $S_3$ 在 $xoy$ 平面上的投影是一曲线). 因此 $I=\frac{1}{2}\pi^2R$. 请读者注意, 本题由于区域内存在瑕点 $(0,0,0)$, 不可直接使用高斯公式.
10. 记 $S_1,S_2,S_3$ 分别为 $S$ 的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为 $(\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3})\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$. 投影 $D_1=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$, 从而 $\iint_{S_1}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint_{D_1}\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 edr=-2\pi e$. 投影 $D_2=\{(x,y):x^2+y^2\le 4\}$, 从而 $\iint_{S_2}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{D_2}\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^2dr=4\pi e^2$. 投影 $D_3=\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 4\}$, 从而 $\iint_{S_3}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint_{D_3}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_1^2 e^rdr=-2\pi e(e-1)$. 因此 $I=-2\pi e+4\pi e^2-2\pi e(e-1)=2\pi e^2$.
11. 积分与路径无关意味着 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P}{\partial y^2}=0$. 由格林公式知 $\forall$ 区域 $D$, $\oint_{\partial D}\frac{\partial P}{\partial\overrightarrow{n}}ds=\iint_D\triangle Pd\sigma=0$. 从而 $0=\oint_{\partial B((x,y),r)}\frac{\partial P}{\partial\overrightarrow{n}}ds=\oint_{\partial B((x,y),r)}\frac{\partial P}{\partial r}ds=\int_0^{2\pi}\frac{\partial P(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\partial r}rd\theta=r\frac{\partial}{\partial r}(\int_0^{2\pi}P(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)d\theta)\Rightarrow\int_0^{2\pi}P(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)d\theta\equiv C$. 令 $r\to 0$ 知 $\int_0^{2\pi}P(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)\to 2\pi P(x,y)\Rightarrow P(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(x+\cos\theta,y+\sin\theta)d\theta$(令 $r=1$ 即可).

### 5.3 补充 (不要求掌握!)

高斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流苏 $\overrightarrow{F}=(P,Q,R)$, 定义其散度为 $\mathrm{div}\overrightarrow{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\overrightarrow{F}$. $\mathrm{div}\overrightarrow{F}>0$ 表示点为 “源”, 即能生流; $\mathrm{div}\overrightarrow{F}<0$ 表示点为 “汇”, 即能 “吸流”; $\mathrm{div}\overrightarrow{F}=0$ 表示点非源非汇. 因此高斯公式的向量形式为 $\oiint_{\Sigma^+}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}dS=\iiint_\Omega\mathrm{div}\overrightarrow{F}dv$, 即: 流在某区域 $\Omega$ 上的总散度等于流通过 $\Omega$ 的边界的总流量.
斯托克斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流速 $\overrightarrow{F}=(P,Q,R)$, 定义其旋度为 $\mathrm{rot}\overrightarrow{F}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\overrightarrow{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\overrightarrow{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\overrightarrow{k}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}=\nabla\times\overrightarrow{F}$, 因此斯托克斯公式的向量形式为 $\iint_\Sigma\mathrm{rot}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}dS=\oint_L\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{s}$, 即: 流在闭路 $L$ 上的循环量 (环流量), 就是旋度在以 $L$ 为边界的光滑曲面上的流量 (旋流量).

# 6 第 6 次习题课: 初等积分法

## 6.1 问题

1. 求解微分方程 $(2x\sin y+3x^2y)dx+(x^3+x^2\cos y+y^2)dy=0$.
2. 求解微分方程 $(x^2+1)(y^2-1)dx+xydy=0$.
3. 质量为 $m$ 的物体在空中下落, 初速度为 $v_0$, 空气阻力与物体速度的平方成正比, 阻尼系数为 $k>0$. 沿垂直地面向下的方向取定坐标轴 $x$, 计算 $t$ 时刻的速度.
4. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^3(x\neq 0)$.
5. 设微分方程 $\frac{dy}{dx}+ay=f(x)$, 其中 $a>0$ 为常数, 而 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的连续函数. 试求方程的 $2\pi$ 周期解.
6. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.
7. 求解微分方程 $y'=xy+3x+2y+6$.

8. 考虑里卡蒂方程 $\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m$, 其中 $a\neq 0, b, m$ 都是常数, $x\neq 0, y\neq 0$. 证明当 $m=0,-2,\frac{-4k}{2k+1},\frac{-4k}{2k-1}(k=1,2,\cdots)$ 时, 方程可通过适当的变换化为变量分离的方程.
9. 证明: 若 $\mu=\mu(x,y)$ 是方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的一个积分因子使得 $\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=d\Phi(x,y)$, 则 $\mu(x,y)g(\Phi(x,y))$ 也是一个积分因子, 其中 $g(\cdot)$ 是任一可微的非零函数.
10. 求解微分方程 $(x^3y-2y^2)dx+x^4dy=0$.
11. 证明: 若 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 是齐次方程, 则 $\mu(x,y)=\frac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$ 是一个积分因子.
12. 求解微分方程 $(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$.
13. 微分方程 $\frac{dy}{dx}=H(x,y)$ 在 $(x,y)$ 平面上给出了一个以 $C$ 为参数的曲线族 $\mathscr{C}$. 试求另一个微分方程, 其给出了曲线族 $\mathscr{K}$, 并且 $\mathscr{C}$ 中的每一条曲线和 $\mathscr{K}$ 中的每一条曲线相交成定角 $\alpha(-\frac{\pi}{2}<\alpha\leq\frac{\pi}{2}$, 以逆时针方向为正).

## 6.2 解答

1. $\frac{\partial P}{\partial y}=2x\cos y+3x^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 因此是恰当方程. 注意到 $d(x^2\sin y+x^3y+\frac{1}{3}y^3)=(2x\sin y+3x^2y)dx+(x^3+x^2\cos y+y^2)dy$, 因此通积分为 $x^2\sin y+x^3y+\frac{1}{3}y^3=C$.
2. 当因子 $x(y^2-1)\neq 0$ 时, 用它除方程两端, 得到等价方程 $\frac{x^2+1}{x}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0$. 积分得到 $x^2+\log x^2+\log|y^2-1|=C_1\Rightarrow x^2e^{x^2}|y^2-1|=e^{C_1}\Rightarrow y^2=1+C\frac{e^{-x^2}}{x^2}$, 其中 $C\neq 0$. 当因子 $x(y^2-1)=0$ 时, 得到特解 $x=0$ 和 $y=\pm 1$. 因此通积分为 $y^2=1+C\frac{e^{-x^2}}{x^2}$ 或 $x=0$.
3. 由牛顿第二运动定律知 $m\ddot{x}=mg-k\dot{x}^2\Rightarrow\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v^2\Rightarrow\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=dt\Rightarrow v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{Ce^{2\sqrt{kg/m}t}+1}{Ce^{2\sqrt{kg/m}t}-1}$. 代入初值条件知 $C=(v_0-\sqrt{\frac{mg}{k}})^{-1}(v_0+\sqrt{\frac{mg}{k}})$.
4. 积分因子是 $e^{\int\frac{1}{x}dx}=|x|$. 用它乘方程两侧得到 $\frac{d}{dx}(xy)=x^4\Rightarrow y=\frac{1}{5}x^4+\frac{C}{x}$.
5. 方程通解为 $y(x)=Ce^{-ax}+\int_0^x e^{-a(x-s)}f(s)ds$, 现在选择常数 $C$, 使 $y(x)$ 成为 $2\pi$ 周期函数. 代入 $y(2\pi)=y(0)$ 得到 $y(x)=\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi}e^{-a(x-s)}f(s)ds$, 容易验证它确实是 $2\pi$ 周期解.
6. 令 $y=ux$, 则 $x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u}{1-u}\Rightarrow\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}\Rightarrow\arctan u-\log\sqrt{1+u^2}=\log|x|-\log C$. 从而 $|x|\sqrt{1+u^2}=Ce^{\arctan u}$. 以 $u=y/x$ 代回得到通积分 $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan\frac{y}{x}}$.
7. 原方程等价于 $\frac{dy}{y+3}=(x+2)dx$. 两边积分知 $y=Ce^{\frac{1}{2}x^2+2x}-3$(特解 $y=-3$ 已包含在内).
8. 不妨设 $a=1$(否则作变换 $\bar{x}=ax$). 因此考虑 $\frac{dy}{dx}+y^2=bx^m$. $m=0$ 时显然是一个变量分离的方程. 当 $m=-2$ 时, 作变换 $z=xy$, 代入方程得到 $\frac{dz}{dx}=\frac{b+z-z^2}{x}$, 这也是一个变量分离的方程. 当 $m=\frac{-4k}{2k+1}$, 作变换 $x=\xi^{\frac{1}{m+1}}, y=\frac{b}{m+1}\eta^{-1}$, 则方程变为 $\frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=\frac{b}{(m+1)^2}\xi^n$, 其中 $n=\frac{-4k}{2k-1}$. 再作变换 $\xi=\frac{1}{t},\eta=t-zt^2$, 方程变为 $\frac{dz}{dt}+z^2=\frac{b}{(m+1)^2}t^l$, 其中 $l=\frac{-4(k-1)}{2(k-1)+1}$. 比较 $m$ 与 $l$ 对 $k$ 的依赖关系知只要将上述变换的过程重复 $k$ 次, 就能把原方程化为 $m=0$ 的情形. 当 $m=\frac{-4k}{2k-1}$ 时, 注意上述过程中 $n$ 对 $k$ 的依赖关系知可以化归到 $m=0$ 的情形.
9. 直接验证 $\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)g(\Phi(x,y))P(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)g(\Phi(x,y))Q(x,y)]$ 即可.
10. 改写为 $(x^3ydx+x^4dy)-2y^2dx=0$. 前一组有积分因子 $x^{-3}$ 和通积分 $xy=C$, 后一组有积分因子 $y^{-2}$ 和通积分 $x=C$. 根据上一题结果, 只需找可微函数 $g_1,g_2$ 使得 $\frac{1}{x^3}g_1(xy)=\frac{1}{y^2}g_2(x)$. 只需取 $g_1(xy)=\frac{1}{(xy)^2}$ 和 $g_2(x)=\frac{1}{x^5}$, 得到原方程的积分因子 $\frac{1}{x^5y^2}$. 用它乘原方程得到全微分方程 $\frac{1}{(xy)^2}d(xy)-\frac{2}{x^5}dx=0$, 因此通积分为 $y=\frac{2x^3}{2Cx^4+1}$. 注意到方程还有特解 $x=0$ 和 $y=0$, 它们实际上是在用积分因子乘方程时丢失的解.
11. 代入 $P(x,y)=x^mP_1(\frac{y}{x}), Q(x,y)=x^mQ_1(\frac{y}{x})$ 直接验证即可.
12. $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+3y^2$, 因此不是恰当方程, 但是 $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=3$ 不依赖于 $y$, 因此有积分因子 $e^{3x}$, 用它乘原方程得到 $e^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)dx+e^{3x}(x^2+y^2)dy=d[e^{3x}(x^2y+\frac{1}{3}y^3)]=0$, 因此通积分为 $e^{3x}(x^2y+\frac{1}{3}y^3)=C$.
13. 设曲线族 $\mathscr{C}$ 中过点 $(x,y)$ 的线素斜率为 $y_1'$, 与它相交成 $\alpha$ 角的线素斜率记为 $y'$. 当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\tan\alpha=\frac{y'-y_1'}{1+y'y_1'}$, 即 $y_1'=\frac{y'-\tan\alpha}{y'\tan\alpha+1}$. 因为 $y_1'=H(x,y)$, 所以等角轨线的微分方程为 $\frac{y'-\tan\alpha}{y'\tan\alpha+1}=H(x,y)$, 即 $\frac{dy}{dx}=\frac{H(x,y)+\tan\alpha}{1-H(x,y)\tan\alpha}$. 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时有 $y'=-\frac{1}{y_1'}$, 即微分方程为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{H(x,y)}$.

## 6.3 补充 (不要求掌握!)

皮亚诺存在定理: 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $|x-x_0|\leq a, |y-y_0|\leq b$ 内连续, 则初值问题 $\frac{dy}{dx}=f(x,y), y(x_0)=y_0$ 在区间 $|x-x_0|\leq\min\{a,\frac{b}{M}\}(M>\max_{(x,y)\in\mathbb{R}}|f(x,y)|)$ 上至少有一个解 $y=y(x)$.
证明过程较为复杂, 有兴趣的同学可以参考《常微分方程教程》(丁同仁、李承治) 第二版 3.2 节.

# 7 第 7 次习题课: 解的存在唯一性, 高阶线性微分方程

## 7.1 问题

1. 设初值问题 $\frac{dy}{dx}=F(x,y),y(0)=0$, 其中函数 $F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当}x=0,-\infty<y<\infty\\ 2x, & \text{当}0<x\le 1,-\infty<y<0\\ 2x-\frac{4y}{x}, & \text{当}0<x\le 1,0\le y<x^2\\ -2x, & \text{当}0<x\le 1,x^2\le y<\infty\end{cases}$. 考虑区域 $S:0\le x\le 1,-\infty<y<\infty$, 求其皮卡序列.
2. 设函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 的某个邻域上关于 $y$ 单调下降, 证明初值问题 $\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$ 至多有一个右行解.
3. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $G$ 内连续, 且满足不等式 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le F(|y_1-y_2|)$, 其中 $F(r)>0$ 是 $r>0$ 的连续函数, 且 $\lim\limits_{\epsilon\to 0+0}\int_\epsilon^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=+\infty(r_1>0$ 是常数). 证明微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 在 $G$ 内经过每一点的解都是唯一的.
4. 设函数 $p(x),q(x),f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明初值问题 $\begin{cases}y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\\ y(x_0)=c,y'(x_0)=d\quad(x_0\in(a,b))\end{cases}$ 在区间 $[a,b]$ 内存在唯一的解.
5. 考虑线性齐次方程 $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'(x)+p_n(x)y=0$, 其中 $p_i(x)\in C(\mathbb{R})$, 证明其有且仅有 $n$ 个线性无关的解.
6. 求解微分方程 $y'''-y''-2y'=0$.
7. 求解微分方程 $y^{(5)}-3y^{(4)}+4y'''-4y''+3y'-y=0$.
8. 求解微分方程 $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$.
9. 求解微分方程 $y''+4y'+4y=\cos 2x$.
10. 求解微分方程 $y''-4y'+3y-4e^x=0$.

## 7.2 解答

1. $y_1(x)=\int_0^x F(t,0)dt=x^2,y_2(x)=\int_0^x F(t,t^2)dt=-x^2$, 由数学归纳法知 $y_n(x)=(-1)^{n+1}x^2$. 本题的例子告诉我们没有 Lipschitz 条件, 皮卡序列可能不收敛.
2. 假设不然. 则设方程有两个右行解 $y_1(x),y_2(x)$, 且至少存在一个值 $x_1>x_0$ 使得 $y_1(x_1)\neq y_2(x_1)$. 不妨设 $y_1(x_1)>y_2(x_1)$. 令 $\bar{x}=\sup_{x\in[x_0,x_1]}\{x:y_1(x)=y_2(x)\}$, 显然有 $x_0\le\bar{x}<x_1$, 而且 $r(x):=y_1(x)-y_2(x)>0,\forall\bar{x}<x\le x_1$ 和 $r(\bar{x})=0$. 因此, 我们有 $r'(x)=y_1'(x)-y_2'(x)=f(x,y_1(x))-f(y_2(x))<0$, 进而 $r(x_1)=\int_{\bar{x}}^{x_1}r'(t)dt<0$, 矛盾.
3. 假设不然. 则在 $G$ 内可以找到一点 $(x_0,y_0)$ 使得方程有两个解 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ 都经过 $(x_0,y_0)$, 且至少存在一个值 $x_1\neq x_0$ 使得 $y_1(x_1)\neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1>x_0$, 且 $y_1(x_1)>y_2(x_1)$. 令 $\bar{x}=\sup_{x\in[x_0,x_1]}\{x:y_1(x)=y_2(x)\}$, 显然有 $x_0\le\bar{x}<x_1$, 而且 $r(x):=y_1(x)-y_2(x)>0,\forall\bar{x}<x\le x_1$ 和 $r(\bar{x})=0$. 因此, 我们有 $r'(x)=y_1'(x)-y_2'(x)=f(x,y_1(x))-f(x,y_2(x))\le F(|y_1(x)-y_2(x)|)=F(r(x))$, 即 $\frac{dr(x)}{F(r(x))}\le dx(\bar{x}<x\le x_1)$. 从 $\bar{x}$ 到 $x_1$ 积分上式, 得到 $\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}\le x_1-\bar{x}$, 其中 $r_1=r(x_1)>0$. 但这不等式左端是 $+\infty$, 右端是一个有限的数, 矛盾.
4. 令 $y_1=y,y_2=y'$, 则原微分方程可改写为 $\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q(x) & -p(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ f(x)\end{pmatrix}(y_1(x_0)=c,y_2(x_0)=d)$, 即是 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)(\boldsymbol{y}(x_0)=(c,d)^T)$. 固定 $x$, 等式右边显然对 $\boldsymbol{y}$ 满足 Lipschitz 条件, 因此解存在唯一.
5. 令 $y_1=y,y_2=y',\cdots,y_n=y^{(n-1)}$, 可以将原微分方程改写为 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$. 固定 $x_0$, 由存在唯一性定理知对于任何常数向量 $\boldsymbol{y_0}\in\mathbb{R}^n$, 存在唯一的元素 $\boldsymbol{y}(x)$ 使得 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y_0}$. 这样得到一个映射 $H:\boldsymbol{y_0}\mapsto\boldsymbol{y}(x),\mathbb{R}^n\to S$(记解空间为 $S$). 显然对于任何 $\boldsymbol{y}(x)\in S$, 我们有 $\boldsymbol{y}(x_0)\in\mathbb{R}^n,H(\boldsymbol{y}(x_0))=\boldsymbol{y}(x)$, 所以 $H$ 是满的. 由唯一性又知 $H$ 是单的. 容易验证 $H$ 是线性的. 因此 $H$ 是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $S$ 的同构映射, 从而 $S$ 是 $n$ 维的, 即原微分方程有且仅有 $n$ 个线性无关的解.
6. 特征方程 $\lambda^3-\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)=0$, 因此有通解 $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$.
7. 特征方程 $\lambda^5-3\lambda^4+4\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)=0$, 因此有通解 $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x+C_4\cos x+C_5\sin x$.
8. 特征方程 $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3=0$, 因此齐次方程通解为 $(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}$. 设有特解 $y^*=x^3(a+bx)e^{-x}=(ax^3+bx^4)e^{-x}$, 代入微分方程得 $a=-\frac{5}{6},b=\frac{1}{24}$. 因此原方程通解为 $y=(C_1+C_2x+C_3x^2-\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4)e^{-x}$.

9. 特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$, 因此齐次方程通解为 $(C_1+C_2x)e^{-2x}$. 设有特解 $y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$, 代入微分方程得 $a=0, b=\frac{1}{8}$. 因此原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{8}\sin 2x$.
10. 特征方程是 $\lambda^2-4\lambda+3=0$, 因此齐次方程通解为 $C_1e^x+C_2e^{3x}$. 设有特解 $y^*=Axe^x$, 代入微分方程得 $A=-2$. 因此原方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2xe^x$.

### 7.3 补充 (不要求掌握!)

皮卡存在唯一性定理的另一种证明方法: 考虑连续函数空间上的映射 $F: y\mapsto y_0+\int_{x_0}^x f(x,y)dx$, 由于 $|F(y_1)-F(y_2)|=|\int_{x_0}^x[f(x,y_1)-f(x,y_2)]dx|\le\int_{x_0}^x|f(x,y_1)-f(x,y_2)|dx\le\int_{x_0}^x L|y_1-y_2|dx=L|x-x_0||y_1-y_2|$. 回顾连续函数空间上的度量为 $\rho_{[a,b]}(y_1,y_2)=\max_{x\in[a,b]}|y_1(x)-y_2(x)|$, 因此当 $|x-x_0|<\frac{1}{L}$ 时, 映射 $F$ 是一个压缩映射. 由压缩映像原理, $F$ 的不动点存在且唯一, 这就意味着 $y=y_0+\int_{x_0}^x f(x,y)dx$ 的解存在且唯一.

## 8 第 8 次习题课: 常数变易法, 常系数线性微分方程组

### 8.1 问题

1. 用常数变易法求解一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$.
2. 求解微分方程 $x^2y''+xy'+4y=10$.
3. 求解微分方程组 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x-2y\\ \frac{dy}{dt}=2x-y\end{cases}$.
4. 求解微分方程组 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\sin t-2x-y\\ \frac{dy}{dt}=\cos t+4x+2y\end{cases}$.
5. 求解微分方程组 $\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}=y\\ \frac{d^2y}{dt^2}=x\end{cases}$.
6. 设有一理想的柔软而不能伸缩的细线, 把它悬挂在两个定点 $P_1$ 和 $P_2$ 之间, 且只受重力作用, 试求悬链线的形状.
7. 利用牛顿第二定律和万有引力定律推导行星运动轨道方程.
8. 求解微分方程组 $\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$.
9. 平面直角坐标系第一象限中有一条曲线 $L=\{(x,y(x)):x\ge0\}$, 其中 $y(0)=1$, $y(x)$ 严格递减、可导. $L$ 上任意一点 $M$ 的切线交 $x$ 轴于点 $A$ 都满足 $\overline{MA}\equiv1$. 求 $y=y(x)$ 所满足的一阶常微分方程, 并且解出该初值问题.
10. (1) 设 $D=\mathbb{R}^2-\{(x,0):x\ge0\}$. 写出一个函数 $T: D\to\mathbb{R}$ 满足 $T$ 在 $D$ 中每点可微, 并且 $\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial T}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$. (2) 设 $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. 证明不存在函数 $U:\Omega\to\mathbb{R}$ 满足 $U$ 在 $\Omega$ 中每点可微, 并且 $\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

### 8.2 解答

1. 对应齐次方程通解为 $Ce^{-\int p(x)dx}$. 设原微分方程通解为 $C(x)e^{-\int p(x)dx}$, 代入得 $C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)\Rightarrow C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}\Rightarrow C(x)=C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$.
2. 作代换 $y=y-\frac{5}{2}$, 仍记为 $y$, 得到 $x^2y''+xy'+4y=0$. 这是欧拉方程, 因此设 $x=e^t$, 得到 $y''+4y=0$, 特征方程 $\lambda^2+4=0$, 从而通解是 $y=C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)$, 即 $y=C_1\cos(2\log|x|)+C_2\sin(2\log|x|)$. 因此原方程通解为 $y=C_1\cos(2\log|x|)+C_2\sin(2\log|x|)+\frac{5}{2}$.
3. 第二式可写为 $x=\frac{1}{2}(\frac{dy}{dt}+y)$, 求导得 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(\frac{d^2y}{dt^2}+y)$. 代入第一式得 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0$, 特征方程 $\lambda^2-2\lambda+1$, 因此有通解 $y=(C_1+C_2t)e^t$. 反代入 $x=\frac{1}{2}(\frac{dy}{dt}+t)$, 可求出 $x=\frac{1}{2}(2C_1+C_2+2C_2t)e^t$.
4. 对第一式两端求导得 $\frac{d^2x}{dt^2}=\cos t-2\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}$. 由于 $y=\sin t-2x-\frac{dx}{dt}$, 代入第二式得 $\frac{dy}{dt}=\cos t+4x+2(\sin t-2x-\frac{dx}{dt})=\cos t+2\sin t-2\frac{dx}{dt}\Rightarrow\cos t-2\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=-2\sin t\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}=-2\sin t\Rightarrow x=2\sin t+C_1t+C_2$. 再代回原方程第一式知 $y=-3\sin t-2\cos t-2C_1t-C_1-2C_2$.
5. 对第一式两端求二阶导再代入第二式, 得到 $\frac{d^4x}{dt^4}=x$, 特征方程 $\lambda^4-1=0$, 从而通解是 $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t, y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t$.

6. 任取悬链线 $y=y(x)$ 上的一小段 $\widehat{PQ}$, 设 $P$ 和 $Q$ 的坐标分别为 $(x,y(x))$ 和 $(x+\Delta x,y(x+\Delta x))$, 长度为 $\Delta s$, 其中 $s$ 表示弧段 $\widehat{P_1P}$ 的长度. 则 $\widehat{PQ}$ 所受的重力为 $W=\gamma\cdot\Delta s$, 方向竖直向下. 除重力外还有张力 $F_1$ 和 $F_2$, 它们分别为 $P$ 点和 $Q$ 点沿着切线方向. 令 $F_1$ 和 $F_2$ 的水平分量分别为 $H_1=H(X)$ 和 $H_2=H(x+\Delta x)$, 而垂直分量分别为 $V_1=V(x)$ 和 $V_2=V(x+\Delta x)$. 利用平衡条件有 $H_2-H_1=0,V_2-V_1-W=0$. 因此 $H(x)\equiv H_0,V(x+\Delta)-V(x)=\gamma\cdot\Delta s$. 再利用拉格朗日微分中值定理得到 $V'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x=\gamma\cdot\Delta s(0<\theta<1)$. 令 $\Delta x\to 0$ 就有 $V'(x)=\gamma\frac{ds}{dx}$. 由弧长公式知 $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+(y'(x))^2}$. 由张力的方向知 $V(x)=H(x)y'(x)=H_0\cdot y'(x)$. 因此 $H_0\cdot y''(x)=\gamma\sqrt{1+(y'(x))^2}$. 令 $z=y'$, 则降为一阶方程 $z'=\frac{\gamma}{H_0}\sqrt{1+z^2}$, 通解为 $z=\sinh[\frac{\gamma}{H_0}(x+C_1)]$. 再积分得到通解 $y=\frac{H_0}{\gamma}\cosh[\frac{\gamma}{H_0}(x+C_1)]+C_2$.

7. 设太阳 $S$ 位于惯性坐标系 $(x,y,z)$ 的原点 $O$, 地球 $E$ 的坐标向量为 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. 由牛顿第二定律和万有引力定律知 $m_e\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=-\frac{Gm_sm_e}{|\boldsymbol{r}(t)|^2}\frac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|}$, 即 $\ddot{x}=-\frac{Gm_sx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\ddot{y}=-\frac{Gm_sy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3},\ddot{z}=-\frac{Gm_sz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$. 显然 $z\ddot{y}-y\ddot{z}=0$, 即 $\frac{d}{dt}(z\dot{y}-y\dot{z})=0\Rightarrow z\dot{y}-y\dot{z}=C_1$. 类似地有 $x\dot{z}-z\dot{x}=C_2,y\dot{x}-x\dot{y}=C_3$. 因此 $C_1x+C_2y+C_3z=0$, 这证明了地球运动轨道永远在同一平面上. 不妨设永远在平面 $z=0$ 上, 则方程改写为 $\ddot{x}+\mu x(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0,\ddot{y}+\mu y(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0$, 其中常数 $\mu=Gm_s$. 由此可得 $(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})+\mu(x\dot{x}+y\dot{y})(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}=0$, 即 $\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-2\mu\frac{d}{dt}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})=0$. 由此有 $\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_4$. 利用极坐标变换, 改写为 $(\frac{dr}{dt})^2+(r\frac{d\theta}{dt})^2-\frac{2\mu}{r}=C_4$. 注意到 $y\dot{x}-x\dot{y}=C_3$ 也可类似改写为 $r^2\frac{d\theta}{dt}=-C_3$. 从而 $(\frac{dr}{dt})^2=C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}$. 再利用 $r^2\frac{d\theta}{dt}=-C_3$ 可知 $\frac{dr}{d\theta}=\pm\frac{r^2}{C_3}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}$, 即是 $\frac{d(\frac{C_3}{r})}{\pm\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2-(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3})^2}}=d\theta$. 由此, 我们得到 $\arccos\frac{\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}}{\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}}=\theta-C_5$. 从上式接出 $r$ 关于 $\theta$ 的函数, 得到 $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$, 其中常数 $e=\frac{C_3}{\mu}\sqrt{C_4+(\frac{\mu}{C_3})^2}>0,p=\frac{C_3^2}{\mu}>0,\theta_0=C_5$. 由平面解析几何知识知 $e<1$ 时为椭圆, $e=1$ 时为抛物线, $e>1$ 时为双曲线.

8. 传统方法很容易, 但这里笔者希望使用另一种方法. 设 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, 原方程可写为 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$. 回顾一元情形 $y'=ay$ 的解为 $Ce^{ax}$, 启发式地, 似乎我们也可以把现在这个方程的解写为 $e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{C}$. 运用一点线性代数知识可知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$. 冥冥之中, $e^{\boldsymbol{A}x}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}x}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{-x}&\frac{1}{2}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{-x}\\\frac{1}{2}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{-x}&\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{-x}\end{pmatrix}$. 因此, 通解可以写成 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1(e^{3x}+e^{-x})+C_2(e^{3x}-e^{-x})\\C_1(e^{3x}-e^{-x})+C_2(e^{3x}+e^{-x})\end{pmatrix}$. 由此可见, 这是一个多么和谐的数学世界啊!

9. 设 $M=(x,y)$, 则切线方程为 $Y-y=y'(x)(X-x)$, 从而 $A=(x-\frac{y}{y'},0)$. 则 $\overline{MA}=\sqrt{(\frac{y}{y'})^2+y^2}=1$, 意味着 $y'^2=\frac{y^2}{1-y^2}$, 由严格递减知 $y'=-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. 从而 $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}dy=-dx$, 两边积分得到 $x=-\sqrt{1-y^2}+\log(1+\sqrt{1-y^2})-\log y+C$, 代入初值条件知 $C=0$.

10. (1) $T$ 是极坐标系里的 $\theta$. (2) 设函数 $U(x,y)$ 满足题意, 则对单位圆周 $C$ 有 $\int_C\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial u}dy=\int_0^{2\pi}dU(\cos t,\sin t)=U(1,0)-U(1,0)=0$, 而另一方面又有 $\int_C\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial y}{dy}=\int_0^{2\pi}(-\sin t)(-\sin t)dt+\cos t\cos tdt=2\pi$, 矛盾.

### 8.3 补充 (不要求掌握!)

可适当了解一些常微分方程定性分析的内容, 可以理解为方程解对初值的敏感性. 由微分方程驱动的系统可能会由于初值的微扰引发极端变化. 一个正面的例子是 $\frac{dx}{dt}=x$: 如果 $x(0)=0$, 那它就一直为 0; 如果 $x(0)=1$, 那对不起, $x(t)=e^t$, 越走越远. 一个反面的例子是 $\frac{dx}{dt}=-x$: 如果 $x(0)=1$, 那很幸运, $x(t)=e^{-t}$, 和 $x(0)=0$ 的情形殊途同归. 一个好用的画相图的网站: `https://anvaka.github.io/fieldplay`.

## 9 第 9 次习题课: 数项级数

### 9.1 问题

1. 设 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2},n\in\mathbb{N},n\geq 3$, 且 $F_1=1,F_2=2$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{F_n}$ 的收敛性.

2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\log\cos\frac{\pi}{n}$ 的收敛性.

3. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-\sqrt[k]{\frac{n-1}{n+1}})^p$ 的收敛性, 其中 $k>0,p>0$ 为常数.

4. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ 的收敛性.

5. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调递减数列, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

6. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$ 的收敛性 $(x \geq 0)$.

7. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - \sin\frac{1}{n})^{n^2}$ 的收敛性.

8. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, 记余项 $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k, n \in \mathbb{N}$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$ 的收敛性, 其中 $p > 0$.

9. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}$ 的收敛性.

10. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha + \frac{1}{n}}} (\alpha > 0)$ 的收敛性.

11. 数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx (x \neq k\pi)$ 的绝对收敛性.

12. 假设存在 $M > 0$ 使得 $|f(n) - n| \leq M$, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{f(n)}$ 收敛, 且收敛值相等.

13. 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p \log^q n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

## 9.2 解答

1. 易证 $F_n$ 单调上升, $\frac{1}{F_n} > 0$ 单调下降. 由 $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3} < 2F_{n-2}$ 知 $F_{n-2} > \frac{1}{2}F_{n-1}$, 从而 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} > \frac{3}{2}F_{n-1}$, 即 $\frac{1}{F_n} < \frac{2}{3}\frac{1}{F_{n-1}}$. 故 $\frac{1}{F_n} < (\frac{2}{3})^{n-1}\frac{1}{F_1} = (\frac{2}{3})^{n-1}, \forall n \geq 2 \Rightarrow S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{F_n} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{N} \frac{1}{F_n} < 1 + \sum\limits_{n=2}^{N} (\frac{2}{3})^{n-1} < \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$. 而 $S_N$ 单调上升, 因此原级数收敛.

2. 因为 $0 \leq \cos\frac{\pi}{n} \leq 1, n \geq 3$, 所以 $u_n = \log\cos\frac{\pi}{n} \leq 0$, 即级数为定号级数. 由于 $\log\cos\frac{\pi}{n} = \log[1 + (\cos\frac{\pi}{n} - 1)] \sim \cos\frac{\pi}{n} - 1 \sim -\frac{\pi^2}{2n^2} (n \to +\infty)$, 故 $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \log\cos\frac{\pi}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 同敛散, 因此原级数收敛.

3. 因为 $\sqrt[k]{\frac{n-1}{n+1}} = (1 - \frac{2}{n+1})^{\frac{1}{k}} = 1 - \frac{2}{k}\frac{1}{n+1} + o(\frac{1}{n+1}) + o(\frac{1}{n+1}) (n \to +\infty)$, 所以 $1 - \sqrt[k]{\frac{n-1}{n+1}} \sim \frac{2}{k}\frac{1}{n+1} (n \to +\infty)$, 因此有 $(1 - \sqrt[k]{\frac{n-1}{n+1}})^p \sim (\frac{2}{k}\frac{1}{n+1})^p = (\frac{2}{k})^p \frac{1}{(n+1)^p} (n \to +\infty)$, 故原级数与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$ 同敛散, 即 $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散.

4. 记 $u_n = \frac{1}{n^2}\frac{n^n}{e^n n!} := \frac{1}{n^2}a_n$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{e^n n!}{n^n} = \frac{1}{e} \cdot (\frac{n+1}{n})^n \leq 1$. 因此 $a_n$ 单调下降, 故 $a_n \leq a_1 = \frac{1}{e}$. 从而成立 $0 \leq u_n \leq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛知原级数收敛.

5. 显然 $a_n \downarrow 0$. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 由 Cauchy 准则, 存在 $N_1$ 使得 $\sum\limits_{k=m+1}^{m+p} a_k < \frac{\epsilon}{4}, \forall m > N_1, \forall p \in \mathbb{N}$. 任取 $n > N_1, p = n$, 成立 $\frac{1}{2}(2n)a_{2n} = na_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} a_{2n} \leq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow (2n)a_{2n} < \frac{\epsilon}{2}$. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, 因此 $\exists N_2$, 使得 $\forall n > N_2$ 成立 $a_n < \frac{\epsilon}{2}$. 从而取 $N = 2\max\{N_1, N_2\} + 1, \forall n > N$ 成立 $na_n = \begin{cases} (2k)a_{2k} < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, & n = 2k \\ (2k+1)a_{2k+1} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq (2k+1)a_{2k} \leq \epsilon & n = 2k+1 \end{cases}$. 由极限的定义知结论成立.

6. 记 $a_n = \frac{x^n n!}{n^n}$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = x(\frac{n+1}{n})^n \to \frac{x}{e} (n \to +\infty)$. 因此 $x > e$ 时级数发散, $0 \leq x < e$ 时级数收敛. 当 $x = e$ 时, 由于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > 1$, 从而 $a_n \uparrow$, 而 $a_1 = e$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, 级数发散.

7. 记 $a_n = (\sqrt[n]{n} - \sin\frac{1}{n})^{n^2}, n \in \mathbb{N}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} = (\sqrt[n]{n} - \sin\frac{1}{n})^n$. 利用 Taylor 展开有估计 $\sqrt[n]{n} - \sin\frac{1}{n} = e^{\frac{1}{n}\log n} - \sin\frac{1}{n} = \left\{1 + \frac{\log n}{n} + \frac{1}{2}(\frac{\log n}{n})^2 + o(\frac{\log^2 n}{n^2})\right\} - \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})\right\} = 1 + \frac{\log n - 1}{n} + o(\frac{1}{n}) := 1 + u_n$, 其中 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0, \lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$. 则 $\sqrt[n]{a_n} = (1 + u_n)^n = (1 + u_n)^{\frac{1}{u_n} nu_n} \to +\infty (n \to +\infty)$, 从而原级数发散.

8. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为收敛的正向级数, 所以 $r_n$ 单调下降趋于 0. 注意到 $a_n = r_n - r_{n+1}$, 所以 $0 < \frac{a_n}{r^p} \leq \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{dx}{x^p}, \forall n \in \mathbb{N}$. 当 $0 < p < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{a_n}{r_n^p} \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{dx}{x^p} = \int_{r_{N+1}}^{r_1} \frac{dx}{x^p} \leq \int_0^S \frac{dx}{x^p} < +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$ 收敛. 当 $p = 1$ 时, 对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$, 成

立 $\sum\limits_{k=n}^{n+m}\frac{a_k}{r_k}\geq\frac{1}{r_n}\sum\limits_{k=n}^{n+m}a_k=\frac{r_n-r_{n+m}}{r_n}=1-\frac{r_{n+m}}{r_n},\forall m\in\mathbb{N}$, 因此 $\lim\limits_{m\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{n+m}\frac{a_k}{r_k}\geq 1$. 根据 Cauchy 收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n}$ 发散. 当 $p>1$ 时, $\frac{a_n}{r_n^p}\geq\frac{a_n}{r_n},\forall n\in\mathbb{N}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n}$ 发散. 本题告诉我们, 若定义 $b_n=\frac{a_n}{r_n^p}(0<p<1)$, 虽然 $\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{r_n^p}\to+\infty$, 但依然有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛. 即, 对任何一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$, 总有另一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=+\infty$.

9. 显然是交错级数, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\log n}=0$. 用导数知识可以证明 $f(x)=x-\log x$ 在 $x\geq 1$ 时单调上升, 从而 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $x\geq 1$ 时单调下降, 使用 Leibniz 判别法立得.

10. 令 $a_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha},b_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, $\{b_n\}$ 单调有界 (使用 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的单调性), 由 Abel 判别法知原级数收敛.

11. 书上例题已经证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx$ 收敛. 由于当 $x\neq k\pi$ 时, $|a_n\sin nx|\geq a_n\sin^2 nx=\frac{a_n}{2}(1-\cos 2nx)$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(2nx)$ 收敛, $\lim\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n\sin nx|$ 发散, 即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx$ 条件收敛.

12. 记 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$ 的部分和序列为 $S_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 的部分和序列为 $S'_n$. 由有界重排性, $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^n$ 只能在 $\{a_k\}_{k=1}^{n+M}$ 中, $\{a_k\}_{k=1}^{n-M}$ 必在 $\{a_{f(k)}\}_{k=1}^n$ 中, 从而 $|S'_n-S_n|\leq\sum\limits_{j=-M}^{M}|a_{n+j}|,\forall n\in\mathbb{N},n>M$. 于是若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=0$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{j=-M}^{M}|a_{n+j}|=0$. 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n\exists$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}S'_n=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$. 反之, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}$ 的一个有界重排, 由上知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$ 收敛.

13. (i) 当 $p>0$ 时, 原级数收敛, 因为函数 $f(x)=x^p\log^q x$ 在 $x$ 充分大后单调递增且趋于 $+\infty$, 从而 $\frac{1}{n^p\log^q n}$ 单调下降趋于 0. (ii) $p=0,q>0$ 时, $\frac{1}{\log^q n}$ 单调下降趋于 0, 原级数收敛. (iii) 当 $p=0,q=0$ 时, $a_n=(-1)^n\not\to 0(n\to+\infty)$, 从而原级数发散. (iv) 当 $p<0$ 或 $p=0,q<0$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\log^q n}=+\infty$, 因此原级数发散. (v) 当 $p>1$ 时, 显然原级数绝对收敛. (vi) 当 $p=1,q>1$ 时, 由积分判别法知原级数绝对收敛. (vii) 当 $p=1,q\leq 1$ 时, 由积分判别法知原级数条件收敛. (viii) 当 $0<p<1,q\in\mathbb{R}$ 时, $\frac{1}{n^p\log^q n}>\frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}$ 且 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}$ 发散, 所以原级数条件收敛. 综上所述, 我们有以下结论:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p\log^q n}\begin{cases}p<0, & \text{发散}\\ p=0,\begin{cases}q\leq 0, & \text{发散}\\ q>0, & \text{条件收敛}\end{cases} & \\ 0<p<1, & \text{条件收敛}\\ p=1,\begin{cases}q>1, & \text{绝对收敛}\\ q\leq 1, & \text{条件收敛}\end{cases} & \\ p>1, & \text{绝对收敛}\end{cases}.$$

### 9.3 补充 (不要求掌握!)

Riemann 重排定理: 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 条件收敛, 则 $\forall S\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, 存在重排 $\{f(n)\}$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{f(n)}=S$.

证明思路: 记 $a_n^+=\max\{0,a_n\},a_n^-=\max\{0,-a_n\}$, 则 $a_n^+\geq 0,a_n^-\geq 0,a_n=a_n^+-a_n^-$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n^+=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n^-=0$, 并且有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^+=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^-=+\infty$. 然后运用放多少拿多少的原则, 超过 $S$ 就开始放另一项, 低于 $S$ 又开始放另一项, 如此在 $S$ 附近反复震荡 ($\lim\limits_{n\to+\infty}a_n^+=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n^-=0$ 保证了震荡越来越小), 以至无穷.

# 10 第 10 次习题课: 函数项级数

### 10.1 问题

1. 证明或否定: $f_n(x)\rightrightarrows f(x),g_n(x)\rightrightarrows g(x)$, 则 $f_n(x)g_n(x)\rightrightarrows f(x)g(x)$.

2. $f(x)\in C[0,1]$ 且 $f(1)=0$, 证明 $x^n f(x)\rightrightarrows 0,x\in[0,1]$.

3. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)x}{[1+(n+1)^2x][1+n^2x]}$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上一致收敛, 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.
4. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^ke^{-nx}(k>1$ 为常数) 在 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.
5. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[1,+\infty)$ 一致收敛 $\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛.
6. 设函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty},\{u_{1,n}(x)\}_{n=1}^{+\infty},\{u_{2,n}(x)\}_{n=1}^{+\infty},\cdots,\{u_{2023,n}(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在区间 $I\in\mathbb{R}$ 上有定义并且满足条件: (1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛; (2) 对每个 $x\in I,k\in\{1,2,\cdots,2023\}$, $\{u_{k,n}(x)\}$ 关于 $n$ 都是单调且一致有界的 (对于不同的 $k$, $u_{k,n}(x)$ 单调性可能不同). 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(f_n(x)\prod_{k=1}^{2023}u_{k,n}(x)\right)$ 在区间 $I$ 上的一致收敛性.
7. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ 在任意区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上一致收敛.
8. 讨论 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+\frac{\cos nx}{n}}\arctan nx$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一致收敛性.
9. 设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续.
10. 证明当 $x\in(-1,1)$ 时, $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
11. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\in C^\infty(1,+\infty)$.
12. 试构造一个函数, 它仅在 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\mathbb{R}$ 处间断.
13. 证明 $f_n(x)=n^2(e^{\frac{1}{nx}}-1)\sin\frac{1}{nx}$, 证明 $f_n(x)$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 不一致收敛, 但对 $x\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛, 其中 $\delta>0$.
14. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^x+n}$ 的收敛域.

## 10.2 解答

1. 结论不对. $f_n(x)=\frac{1}{1-x},g_n(x)=(1-x)x^n,x\in(0,1)$, 则 $f_n(x)\rightrightarrows\frac{1}{1-x},g_n(x)\rightrightarrows 0$, 但是 $f_n(x)g_n(x)\not\rightrightarrows 0$.
2. 显然 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0,x\in[0,1]$. 记 $M=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$. 由连续性, $\exists\delta>0$ 使得 $|f(x)|<\epsilon,\forall x\in(1-\delta,1)$. 这样就有 $\begin{cases}x\in[0,1-\delta]\text{时},|x^nf(x)|\le M(1-\delta)^n\\ x\in(1-\delta,1]\text{时},|x^nf(x)|\le|f(x)|<\epsilon\end{cases}$. 取 $n$ 足够大使 $M(1-\delta)^n<\epsilon$ 即可.
3. $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)x}{[1+(k+1)^2x][1+k^2x]}=\sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{1}{1+k^2x}-\frac{1}{1+(k+1)^2x}]=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+(n+1)^2x}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=\frac{1}{1+x}=S(x),x\in(0,+\infty)$. 当 $x\in[a,+\infty)$ 时, $|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{1+(n+1)^2x}\le\frac{1}{(n+1)^2a}\to 0(n\to+\infty)\Rightarrow S_n(x)\rightrightarrows S(x),x\in[a,+\infty)$. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n=\frac{1}{(n+1)^2}\in(0,+\infty)$ 使得 $|S_n(x_n)-S(x_n)|=\frac{1}{2}$, 从而 $S_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛于 $S(x)$.
4. $u_n(0)=0,u_n(x)>0(\forall x>0),\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)=0,u_n(x)\in C^2[0,+\infty)$, 令 $u_n'(x)=0$ 得到唯一驻点 $x=\frac{k}{n}$. 容易验证此为最大值点, $M_n=u_n(x_n)=(\frac{k}{e})^k\frac{1}{n^k}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}M_n$ 收敛, 从而原级数在 $I$ 上一致收敛.
5. "$\Rightarrow$": 显然. "$\Leftarrow$": 已知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛. 又有 $\frac{1}{n^{x-1}}$ 关于 $n$ 单调下降且 $|\frac{1}{n^{x-1}}|\le 1,\forall x\in[1,+\infty),\forall n\in\mathbb{N}$. 由 Abel 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}\frac{1}{n^{x-1}}$ 在 $[1,+\infty)$ 一致收敛.
6. 由 Abel 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)u_{1,n}(x)$ 一致收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[f_n(x)u_{1,n}(x)]u_{2,n}(x)$ 一致收敛, 依此类推知原级数一致收敛.
7. 记 $u_n(x)=(-1)^n,v_n(x)=\frac{x^2+n}{n^2}$, 则 $|\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)|\le 1,\forall x\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n(x)=\frac{x^2}{n^2}+\frac{1}{n}$ 固定 $x$ 后关于 $n$ 单调下降, 且 $v_n(x)\le\frac{\max\{|a|,|b|\}+n}{n^2}\downarrow 0(n\to+\infty)$, 即 $v_n(x)\rightrightarrows 0,x\in[a,b]$. 根据 Dirichlet 判别法, 原级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.
8. 由于 $|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}|\le 1$, $\frac{1}{n+\frac{\cos nx}{n}}$ 当 $n\ge 3$ 时对 $n$ 单调递减且一致收敛到 0, 由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+\frac{\cos nx}{n}}$ 一致收敛. 又由于 $\arctan nx$ 对 $n$ 单调且 $|\arctan nx|\le\frac{\pi}{2}$ 恒成立 (i.e. 一致有界), 由 Abel 判别法知原级数一致收敛.
9. 往证级数在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛. 不妨设 $a_n$ 非负单调下降. 记 $u_n(x)=a_n,v_n(x)=\cos nx$. 则任意 $\delta>0$, 对于 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$, $u_n(x)\rightrightarrows 0$, 且关于 $n$ 单调. 另一方面, $|\sum\limits_{k=1}^{n}v_k(x)|=|\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx|=\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}|}{2\sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$, 因此一致有

界. 根据 Dirichlet 判别法, 原级数在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \in C(0, 2\pi)$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$ 在 $[-x, x]$ 上一致收敛, 所以积分求和可交换, 即 $\int_0^x (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{2n}) dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^{2n} dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. 而 $\int_0^x (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{2n}) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$. 从而当 $x \in (-1, 1)$ 时, LHS = RHS.

11. $\forall k \in \mathbb{N}, (\frac{1}{n^x})^{(k)} = \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x}$, 因此只需证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上内闭一致收敛即可, 而这是显然的.

12. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$.

13. 容易证明 $f_n(x) \to \frac{1}{x^2} = f(x) (n \to +\infty)$. 对于 $x \in (0, +\infty)$, 取 $x_n = \frac{1}{n}$, 则 $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |n^2(e-1)\sin 1 - 1| \to +\infty (n \to +\infty)$, 因此对于 $x \in (0, +\infty)$, $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$. 对于 $x \in [\delta, +\infty)$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x^2} |\frac{e^{\frac{1}{nx}}-1}{\frac{1}{nx}} \frac{\sin\frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} - 1| \overset{t=\frac{1}{nx}}{=} \frac{1}{x^2} |\frac{1}{t^2}(t + \frac{e^{\theta_1 t}}{2!} t^2)(t - \frac{\cos\theta_2 y}{3!} t^3) - 1| = \frac{1}{x^2} |\frac{e^{\theta_1 t}}{2!} t - \frac{\cos\theta_2 t}{3!} t^2 + \frac{e^{\theta_1 t}}{2!} \frac{\cos\theta_2 t}{3!} t^3|$. 因此存在常数 $C$, 当 $n$ 充分大时, 成立如下估计 $\sup_{x \in [\delta, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{\delta^2} C \frac{1}{n\delta} \to 0 (n \to +\infty)$. 故对于 $x \in [\delta, +\infty)$ 成立 $f_n(x) \rightrightarrows f(x) = \frac{1}{x^2}$.

14. 设 $f(y) = y^x + y$. 当 $x \ge 0, y \ge 1$ 时, $f'(y) = xy^{x-1} + 1 \ge 0 + 1 > 0$. 当 $x < 0$ 时且 $y$ 足够大时, $f'(y) = xy^{x-1} + 1 > -\frac{1}{2} + 1 > 0$. 所以任意给定 $x \in \mathbb{R}$, 当 $n$ 充分大后 $n^x + n \uparrow \Rightarrow \frac{1}{n^x + n} \downarrow 0$. 由 Leibniz 判别法知收敛域为 $\mathbb{R}$.

### 10.3 补充 (不要求掌握!)

等度连续: 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在区间 $I$ 上的函数列, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $|f_n(x') - f_n(x'')| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x', x'' \in I$ 满足 $|x' - x''| < \delta$, 则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $I$ 上等度连续.

定理 1: 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 若 $f_n(x) \in C[a, b], n = 1, 2, \cdots$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续.

定理 2: 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续, 且 $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$, 则 $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in [a, b]$.

Ascoli 引理: $X$ 为紧致 Hausdorff 空间, $Y$ 为度量空间, 则 $F \subset C(X, Y)$ 在紧开拓扑下是紧集的充要条件是 $F$ 等度连续, 逐点列紧且为闭集.

证明留给读者思考. (数学书中常见话术, we leave the proofs to the readers)

## 11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数

### 11.1 问题

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)}{n^2} (x-3)^n$ 的收敛半径和收敛域.

2. 设 $a_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 已知 $n \to +\infty$ 时, 有 $S_n \to +\infty$, 且 $\frac{a_n}{S_n} \to 0$. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

3. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-2)(3n+1)}$.

4. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+2)!}$.

5. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} xe^{-nx}$ 的收敛域与和函数.

6. 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ 的收敛半径、收敛域与和函数, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

7. 对 $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$ 在 $x = 0$ 处做泰勒展开.

8. 对 $f(x) = \log^2(1+x)$ 在 $x = 0$ 处做泰勒展开.

9. 证明 $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

10. 证明 $x = \sin x + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 并由此计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

11. 试构造 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), f_n(x) \not\rightrightarrows f(x), x \in [0, 1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\right) dx$.

12. $a_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, 且 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n n!$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n n!$.

## 11.2 解答

1. 记 $a_n=\frac{\log(n+1)}{n^2}$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}=1$, 所以收敛半径为 $r=1$. 当 $x-3=-1$ 即 $x=2$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\log(n+1)}{n^2}(-1)^n$, 绝对收敛. 当 $x-3=1$ 即 $x=4$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\log(n+1)}{n^2}$, 绝对收敛. 所以收敛区域为 $[2,4]$.

2. 当 $x=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ 发散, 故收敛半径 $r\le 1$. 记幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}S_nx^n$ 的收敛半径为 $R$, 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{S_n}=0$, 因此 $r\ge R$. 又有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n-a_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{a_n}{S_n})=1$, 从而 $R=1$. 综上 $r=1$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}(3n+1)=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3n-2}-\frac{(-1)^n}{3n+1}\right]=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}-\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}-\frac{1}{3}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}=\frac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}+\frac{1}{3}$. 考虑幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}x^{3n-2},|x|\le 1$. 逐项求导, 知 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^nx^{3n-3}=-\frac{1}{1+x^3},|x|<1$. 因此有 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{-1}{1+t^3}dt,|x|\le 1$. 所以 $f(1)=\int_0^1\frac{-1}{1+t^3}dt=-\frac{1}{3}\log 2-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$. 因此原级数求和为 $-\frac{1}{27}(6\log 2+2\sqrt{3}\pi-9)$.

4. 引入幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n+2}}{(n+2)!}$, 易知其收敛半径为 $+\infty$. 从而逐项求导知 $f''(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=xe^x\Rightarrow f(x)=(x-2)e^x+x+2\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+2)!}=f(1)=3-e$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}xe^{-nx}=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n$, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}t^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$, 且 $x=0$ 时原级数为 0, 知 $x$ 的收敛域为 $[0,\infty)$. 和函数为 $S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{xe^x}{e^x-1}, & x>0\end{cases}$.

6. 利用 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ 可知收敛半径为 1, 收敛域为 $[-1,1]$. 记 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)},x\in[-1,1]$, 则 $f(0)=0,f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n}(x\in(-1,1)),f'(0)=0,f''(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2x^{2n-1}=\frac{2x}{1-x^2},x\in(-1,1)$. 从而成立 $f'(x)=f'(x)-f'(0)=\int_0^x\frac{2t}{1-t^2}dt=-\log(1-x^2),f(x)=f(x)-f(0)=-\int_0^x\log(1-t^2)dt=-t\log(1-t^2)|_0^x+\int_0^x t\frac{(-2t)}{1-t^2}dt=-x\log(1-x^2)+2\int_0^x\frac{-t^2}{1-t^2}dt=-x\log(1-x^2)+2x+\log\frac{1-x}{1+x}=(1-x)\log(1-x)-(1+x)\log(1+x)+2x,x\in[-1,1]$. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=f(1)=2(1-\log 2)$.

7. $\frac{1}{(1+t)^2}$ 的展开式为 $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}t^n=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+1)t^n$, 因此 $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}nx^{2n},|x|<1$.

8. $\log(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\Rightarrow\log^2(1+x)=\left[\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\right]^2=x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$, 其中 $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1},c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}=(-1)^n\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(n-k+1)}=\frac{(-1)^n}{n+2}\sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1})=\frac{(-1)^n 2}{n+2}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1},n\in\mathbb{N}$. 所以 $\log^2(1+x)=2x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+2}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)x^n$. 可以验证收敛域为 $x\in(-1,1]$.

9. $x^{-x}=e^{-x\log x}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x\log x)^n}{n!}$. 由于 $x\log x\in[-\frac{1}{e},0]$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x\log x)^n}{n!}$ 在此范围内一致收敛, 因此积分求和顺序可交换. 再利用 $\int_0^1 x^n\log^n xdx=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ 知 $\int_0^1 x^{-x}dx=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

10. 对 $\arcsin t$ 做泰勒展开知 $\arcsin t=t+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, 换元 $x=\arcsin t$ 立得. 由一致收敛性, 两边从 $x=0$ 积分到 $x=\frac{\pi}{2}$ 得到 $\frac{\pi^2}{8}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

11. 取 $f_n(x)=nx(1-x)^n$.

12. 一方面, $\forall N\in\mathbb{N},\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)dx\ge\int_0^{+\infty}e^{-x}(\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx^n)dx=\sum\limits_{n=0}^{N}a_nn!$. 令 $N\to+\infty$ 知 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)dx\ge\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$. 另一方面, $\forall M>0,\int_0^{M}e^{-x}f(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^{M}e^{-x}x^ndx\le\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^ndx=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$. 令 $M\to+\infty$ 知 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)dx\le\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$. 综上所述 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$. 请读者注意, 我们没有 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 在 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

## 11.3 补充 (不要求掌握!)

命题: 存在处处连续但处处不可导的函数. 一个构造是 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{u(4^nx)}{4^n}$, 其中 $u(x)$ 是 $|x|(-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2})$ 的周期延拓.

证明: 显然 $S(x)$ 一致收敛, 且每一项都是连续函数, 因此 $S(x)$ 连续. 下面证明 $\forall x_0\in\mathbb{R}, S'(x_0)\exists$. 不妨设 $x_0\in(0,1)$. 注意到 $u_n(x)=\frac{u(4^n x)}{4^n}$ 以 $\frac{1}{4^n}$ 为周期, 在 $[\frac{m}{4^n},\frac{m}{4^n}+\frac{1}{2}\frac{1}{4^n}]$ 上斜率为 1, 在 $[\frac{m}{4^n}+\frac{1}{2}\frac{1}{4^n},\frac{m+1}{4^n}]$ 上斜率为 $-1$. 对于每个 $n\geq 1$, 存在 $m_n$ 使得 $\frac{m_n}{2\cdot 4^{n-1}}\leq x_0<\frac{m_n+1}{2\cdot 4^{n-1}}$. 因此在 $I_n=[\frac{m_n}{2\cdot 4^{n-1}},\frac{m_n+1}{2\cdot 4^{n-1}})$ 内, 存在 $x_n$ 使得 $|x_n-x_0|=\frac{1}{2}|I_n|=\frac{1}{4^n}$. 于是 $\frac{S(x_n)-S(x_0)}{x_n-x_0}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}$. 对于 $k\geq n, T_k=\frac{1}{4^k}$ 整除 $|x_n-x_0|$, 因此相应项为 0. 当 $k\leq n-1$ 时, 相应项为 1 或 $-1$, 故 $\frac{S(x_n)-S(x_0)}{x_n-x_0}=\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_k$, 其中 $a_k=1$ 或 $-1$. 当 $n\to+\infty$ 时, $x_n\to x_0$, 但 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$ 不可能存在. 故 $S'(x_0)$ 不存在.

# 12　第 12 次习题课: 广义积分

## 12.1　问题

1. 计算积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.
2. 计算积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx$.
3. 计算积分 $I_1=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx, I_2=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx dx$, 其中 $a>0, b\in\mathbb{R}$.
4. 讨论积分 $\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x^p}-\log(1+\frac{1}{x^p})\right]dx(p>0)$ 的敛散性.
5. 证明或否定: $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.
6. 讨论积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx(\alpha>0)$ 的收敛性和绝对收敛性.
7. 讨论积分 $I=\int_1^{+\infty}\log(1+\frac{\sin x}{x^p})dx(p>0)$ 的收敛性.
8. 讨论积分 $I=\int_0^1\frac{1}{(1-x^2)^p}dx$ 的收敛性.
9. 讨论积分 $I=\int_0^1(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2})dx$ 的收敛性.
10. $f(x)$ 于 $[a,+\infty)$ 单调, $g(x)\in C(\mathbb{R}), g(x)\not\equiv 0, g(x)=g(x+T)$. 求证 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow\int_a^{+\infty}f(x)|g(x)|dx$ 收敛.
11. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.
12. 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}(\frac{\sin x}{x})^2dx$.
13. 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$, 证明对 $0<a<b$, 成立 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=(f(0)-L)\log\frac{b}{a}$.

## 12.2　解答

1. $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int_0^1\frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\log(t+\sqrt{1+t^2})|_0^1=\log(1+\sqrt{2})$.
2. $I=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\arctan x d\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2x^2}\arctan x|_1^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}-\arctan x\right]|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$.
3. 由分部积分有 $aI_1=-\int_0^{+\infty}\sin bx de^{-ax}=-\sin bx\cdot e^{-ax}|_0^{+\infty}+b\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx dx=bI_2, aI_2=-\int_0^{+\infty}\cos bx de^{-ax}=-\cos bx\cdot e^{-ax}|_0^{+\infty}-b\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx=1-bI_1$. 解出 $I_1=\frac{b}{a^2+b^2}, I_2=\frac{a}{a^2+b^2}$.
4. $t\to 0$ 时 $\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$. 故 $x\to+\infty$ 时, $\frac{1}{x^p}-\log(1+\frac{1}{x^p})\sim\frac{1}{2x^{2p}}$. 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2p}}dx$ 于 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛, 于 $p\leq\frac{1}{2}$ 时发散. 所以原积分于 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛, 于 $p\leq\frac{1}{2}$ 时发散.
5. 结论不对, 例如 $f(x)=\begin{cases}n, & x\in\left[n-\frac{1}{2n^3},n+\frac{1}{2n^3}\right], n\in\mathbb{N}, n>1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$.
6. 当 $\alpha>0$ 时, 由于 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减趋于 0, 而 $|\int_1^x\sin tdt|\leq 2$, 所以由 Dirichlet 判别法, 此无穷积分收敛. 当 $\alpha>1$ 时, $|\frac{\sin x}{x^\alpha}|<\frac{1}{x^\alpha}$, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}$ 收敛, 所以积分绝对收敛. 当 $0<\alpha\leq 1$ 时, $\int_\pi^{N\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx\geq\sum\limits_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|dx=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\frac{2}{(n+1)\pi}$, 所以积分条件收敛.
7. 泰勒展开知 $I=\int_1^{+\infty}\left[\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{2x^{2p}}+o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}\right)\right]dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x^p}-\int_1^{+\infty}\frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{2x^{2p}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}o(1)dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x^p}+\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2xdx}{4x^{2p}}-\int_1^{+\infty}\frac{1-4o(1)\sin^2 x}{4x^{2p}}dx:=I_1+I_2+I_3$. 当 $p>1$ 时, 三者都绝对收敛. 当 $\frac{1}{2}<p\leq 1$ 时, $I_1$ 收敛, $I_2$ 和 $I_3$ 绝对收敛, 故原积分收敛. 当 $0<p\leq\frac{1}{2}$ 时, $I_1$ 和 $I_2$ 收敛. 又 $\exists A>1$ 使得 $\frac{1}{2}\leq 4o(1)\sin^2 x\leq 2, \forall x>A$, 所以 $\frac{1-4o(1)\sin^2 x}{4x^{2p}}>\frac{1}{8x^{2p}}, \forall x>A$. 而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2p}}(p\leq\frac{1}{2})$ 发散, 因此原积分发散.
8. 容易看出原积分与 $\int_0^1\frac{1}{(1-x)^p}dx$ 同敛散, 因此 $p<1$ 时收敛, $p\geq 1$ 时发散.
9. $I=\int_0^1(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2})dx\overset{t=\frac{1}{x^2}}{=}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt-\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$, 因此收敛.

10. $f(x)$ 于 $[a,+\infty)$ 单调, 所以可认为其定号, 不妨设 $f(x)\geq 0$. $g(x)$ 是连续周期函数, 因此存在 $M$ 使得 $|g(x)|\leq M$.
"$\Rightarrow$": 因为 $0\leq\int_{x'}^{x''}f(x)|g(x)|dx\leq M\int_{x'}^{x''}f(x)dx,\forall x',x''$, 所以由 Cauchy 收敛原理立得.
"$\Leftarrow$": 记 $m=\frac{1}{T}\int_0^T|g(x)|dx$. 由于 $\int_a^x f(t)dt$ 单调上升, 故只需证明存在 $x_n\uparrow$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ 使得 $\int_a^{x_n}f(x)dx$ 有界即可. 取合适的 $n_0$ 使得 $a\leq n_0T$ 和 $x_n=(n_0+n)T$, 往证 $\int_{n_0T}^{(n_0+n)T}f(x)dx$ 有界 ($\Leftrightarrow\int_a^{x_n}f(x)dx$ 有界). 首先, 利用反证法知 $f(x)$ 单调下降趋于 0. 其次,

$$\begin{aligned}\int_{(n_0+1)T}^{(n_0+n+1)T}f(x)dx&=\sum_{k=n_0+1}^{n_0+n}\int_{kT}^{(k+1)T}f(x)dx\leq\sum_{k=n_0+1}^{n_0+n}f(kT)T=\frac{1}{m}\sum_{k=n_0+1}^{n_0+n}f(kT)\cdot mT\\&=\frac{1}{m}\sum_{k=n_0+1}^{n_0+n}f(kT)\int_{(k-1)T}^{kT}|g(x)|dx\leq\frac{1}{m}\sum_{n_0+1}^{n_0+n}\int_{(k-1)T}^{kT}f(x)|g(x)|dx=\frac{1}{m}\int_{n_0T}^{(n_0+n)T}f(x)|g(x)|dx\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$, 由 $\int_a^{+\infty}f(x)|g(x)|dx$ 收敛知 $\frac{1}{m}\int_{n_0T}^{(n_0+n)T}f(x)|g(x)|dx$ 极限存在. 这意味着 $\int_{(n_0+1)T}^{(n_0+n+1)T}f(x)dx$ 有界, 也就是 $\int_{n_0T}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 结论成立.
11. 由 $2\sin\frac{x}{2}(\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx)=\sin(n+\frac{1}{2})x$ 知 $\int_0^\pi(\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx)dx=\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$. 定义 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$, 容易计算出 $\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=0$. 因此 $f(x)\in R[0,\pi]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)\sin(n+\frac{1}{2})xdx=0$, 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$.
12. $I=\int_0^{+\infty}(\frac{\sin x}{x})^2dx=\int_0^{+\infty}\sin^2xd(-\frac{1}{x})=-\frac{\sin^2x}{x}|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.
13. 对于 $\forall 0<\delta<A$, 我们有 $\int_\delta^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{a\delta}^{aA}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\delta}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)-f(0)}{t}dt-\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)-L}{t}dt+(f(0)-L)\log\frac{b}{a}$. 令 $\delta\to0+0,A\to+\infty$ 知前两项都趋于 0, 从而 LHS = RHS.

### 12.3 补充 (不要求掌握!)

我们来了解一下 Lebesgue-Stieltjes 积分. 首先设 $\mu$ 是 $\sigma$ 域 $\mathscr{F}$ 上的非负可列可加函数, 满足 $\mu(\emptyset)=0$.
$X$ 的可测划分: $\{A_i\}_{i=1}^{+\infty}\subset\mathscr{F}$ 满足 $\mu(A_i\cap A_j)=0,\forall i\neq j$ 且 $\mu((\cup_iA_i)^c)=0$.
非负简单函数的积分: $\{A_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 为 $X$ 的划分, $a_i\geq0,\forall i,f=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iI_{A_i}$, 则 $\int_Xfd\mu:=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i)$.
非负可测函数的积分: $\int_Xfd\mu:=\sup\left\{\int_Xgd\mu:g\text{ 非负简单且}g\leq f\right\}$
可测函数的积分: 若 $\min\{\int_Xf^+d\mu,\int_Xf^-d\mu\}<\infty$, 则称 $f$ 的积分存在; 若 $\max\{\int_Xf^+d\mu,\int_Xf^-d\mu\}<\infty$, 则称 $f$ 可积; 上述两种情况下, 将 $f$ 的积分定义为 $\int_Xfd\mu:=\int_Xf^+d\mu-\int_Xf^-d\mu$.

## 13 第 13 次习题课: 含参积分

### 13.1 问题

1. 设 $0<a<b$, 计算积分 $I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\log x}dx$.
2. 设 $f(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$, $F(x)=\int_x^{x^2}ds\int_s^xf(s,t)dt$, 计算 $F'(x)$.
3. 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, 证明 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)$ 对 $\alpha\in(0,+\infty)$ 一致收敛的充要条件是 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.
4. 讨论含参变量积分 $I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy$ 在 $x\in[\alpha_0,+\infty)(\alpha_0>0)$ 和 $x\in(0,+\infty)$ 的一致收敛性.
5. 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}dx(b>a>0)$.
6. 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx$, 其中 $b>a>0$.
7. $f(t)$ 是区间 $[0,2\pi]$ 上的连续函数, 求函数 $F(x_0,x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(t)-\frac{x_0}{2}-\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k\cos kt+y_k\sin kt)]^2dt$ 的最小值点.
8. 计算积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.
9. 求极限 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}dx$.
10. 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$.
11. 计算积分 $I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.
12. 任意取定 $r>0$, 证明含参变量 $y$ 的无穷积分 $\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}\cos xdx$ 对于 $y\in[r,+\infty)$ 是一致收敛的.

### 13.2 解答

1. $I=\int_0^1(\int_a^b x^y dy)dx=\int_a^b(\int_0^1 x^y dx)dy=\int_a^b \frac{dy}{y+1}=\log\frac{1+b}{1+a}$.
2. 直接用公式, $F'(x)=\int_x^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_s^x f(s,t)dt\right]ds+\int_{x^2}^x f(x^2,t)dt2x-\int_x^x f(x,t)dt=\int_x^{x^2} f(s,x)ds+2x\int_{x^2}^x f(x^2,t)dt$.
3. 充分性由 Abel 判别法立得. 必要性使用反证法. 如果 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)dx$ 对 $\alpha\in(0,+\infty)$ 一致收敛而 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则 $\exists\epsilon_0>0$, 对于 $\forall A_0>0,\exists A_2>A_1>A_0$ 使得 $|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx|>2\epsilon_0$. $F(\alpha,x)=e^{-\alpha x}f(x)$ 在 $(x,\alpha)\in[A_1,A_2]\times[0,1]$ 上连续, 从而 $\lim\limits_{\alpha\to 0+0}\int_{A_1}^{A_2} e^{-\alpha x}f(x)dx=\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx$. 因此 $\exists\alpha'>0$ 使得 $|\int_{A_1}^{A_2} e^{-\alpha' x}f(x)dx|\geq\frac{1}{2}|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx|>\frac{1}{2}\cdot 2\epsilon_0=\epsilon_0$. 此与一致收敛矛盾.
4. (1) 对于 $\forall x\in[\alpha_0,+\infty)$ 及 $A>0$, 有 $|\int_0^A f(x,y)dy|=|\int_0^A \sin xydy|=|\frac{1}{x}(1-\cos xA)|\leq\frac{2}{\alpha_0}$. 而 $g(x,y)=\frac{1}{y}$ 关于 $y$ 单调, 且对 $x\in[\alpha_0,+\infty)$ 一致趋于 0. 由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 一致收敛. (2) 取 $x=\frac{1}{2k}(k\in\mathbb{N})$, 则 $|\int_{2k\pi}^{3k\pi}\frac{\sin xy}{y}dy|=|\int_{2k\pi}^{3k\pi}\frac{\sin\frac{y}{2k}}{y}dy|\geq\frac{1}{3k\pi}|\int_{2k\pi}^{3k\pi}\sin\frac{y}{2k}dy|=\frac{2}{3\pi}$. 这与一致 Cauchy 准则矛盾, 所以不一致收敛.
5. $I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b\frac{dt}{1+t^2x^2}\right)dx$. 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+t^2x^2}$ 对 $t\in[a,b]$ 一致收敛, 所以积分可交换顺序, 因此有 $I=\int_a^b dt\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+t^2x^2}=\int_a^b\frac{\pi}{2t}dt=\frac{\pi}{2}\log\frac{b}{a}$.
6. $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\left[\int_a^b e^{-tx^2}dt\right]dx$. 由于 $\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}$ 对 $t\in[a,b]$ 一致收敛, 所以积分可交换顺序, 因此有 $I=\int_a^b dt\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx=\int_a^b\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}dt=\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$.
7. 直接求导即可, 最小值点是 $x_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kxdx, k=0,1,\cdots,n$. $y_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kxdx, k=1,2,\cdots,n$.
8. $I(\alpha)+I(-\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{-\alpha})}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. 作换元 $t=\frac{1}{x}$ 又知道 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{-\alpha})}=I(-\alpha)$. 从而 $I(\alpha)\equiv\frac{\pi}{4}$.
9. 在区间 $[0,1-\frac{\epsilon}{6}]$ 上 $e^{-x^\alpha}\rightrightarrows\uparrow 1(\alpha\to+\infty)$, 因此 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_0^{1-\frac{\epsilon}{6}}e^{-x^\alpha}dx=1-\frac{\epsilon}{6}$, 存在足够大的 $\alpha_1$ 使得 $\forall\alpha>\alpha_1, 1-\frac{\epsilon}{3}<\int_0^{1-\frac{\epsilon}{6}}e^{-x^\alpha}dx<1$. 在区间 $[1+\frac{\epsilon}{6},+\infty)$ 上 $e^{-x^\alpha}\rightrightarrows\downarrow 0(\alpha\to+\infty)$, 因此 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_{1+\frac{\epsilon}{6}}^{+\infty}e^{-x^\alpha}dx=0$, 存在足够大的 $\alpha_2$ 使得 $\forall\alpha>\alpha_2, 0<\int_{1+\frac{\epsilon}{6}}^{+\infty}e^{-x^\alpha}dx<\frac{\epsilon}{3}$. 在区间 $[1-\frac{\epsilon}{6},1+\frac{\epsilon}{6}]$ 上总有 $e^{-x^\alpha}<1$, 因此 $0<\int_{1-\frac{\epsilon}{6}}^{1+\frac{\epsilon}{6}}<\frac{\epsilon}{3}$. 综上所述, 当 $\alpha>\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 时, $1-\epsilon<1-\frac{\epsilon}{3}<\int_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}<1+\frac{2\epsilon}{3}<1+\epsilon$, 由极限定义知 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}dx=1$.
10. $I=\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
11. $I=\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\pi$.
12. 在 $y\in[r,+\infty)$ 上, $e^{-xy^2}$ 单调递减一致趋于 0, 变上限积分 $\int_0^N\cos xdx$ 一致有界, 用 Dirichlet 判别法知一致收敛.

### 13.3 补充 (不要求掌握!)

其实, 笔者已经不太记得积分求导可交换的条件了, 因为如果按照 12.3 节定义的积分, 这个是自然成立的.

Fubini 定理: 给定 $\mathbb{R}^d$ 上的可积函数 $f(x,y)$, 则: (1) 对几乎所有的 $x$, 作为 $y$ 的函数 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上的可积函数; (2) 对 $y$ 的积分 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}}f(x,y)$ 定义了 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上的可积函数; (3) 积分满足关系 $\int_{\mathbb{R}^d}f(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}(\int_{\mathbb{R}^{d_2}}f(x,y)dy)dx$.

Tonelli 定理: 给定 $\mathbb{R}^d$ 上的非负可测函数 $f(x,y)$, 则: (1) 对几乎所有的 $x$, 作为 $y$ 的函数 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上的可测函数; (2) 对 $y$ 的积分 $\int_{\mathbb{R}^{d_2}}f(x,y)$ 定义了 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上的可测函数; (3) 积分满足关系 $\int_{\mathbb{R}^d}f(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}(\int_{\mathbb{R}^{d_2}}f(x,y)dy)dx$(可以是无穷).

## 14 第 14 次习题课: 傅里叶级数

### 14.1 问题

1. 求以 $T$ 为周期的周期函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t\in[-\frac{T}{2},0)\\ E\sin\frac{2\pi t}{T}, & t\in[0,\frac{T}{2})\end{cases}$ 的傅里叶级数.
2. 求定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=x+1$ 的余弦级数和正弦级数.
3. 求函数 $f(x)=\cos\alpha x, x\in[-\pi,\pi), \alpha\in(0,1)$ 的傅里叶级数.
4. 求函数 $f(x)=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}, x\in[-\pi,\pi], |q|<1$ 的傅里叶级数.
5. 求函数 $f(x)=x^2, x\in[-\pi,\pi]$ 的傅里叶级数, 并计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

6. 证明余元公式 $\mathrm{Beta}(p,1-p)=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$, 并计算积分 $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$ 和 $I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. (提示: 不一定要用前面这个结论)

7. 设 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$, 证明 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}a_0\alpha_0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)$.

8. $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 $2\pi$ 的可导函数, 且导函数连续, 证明其傅里叶级数系数 $a_n=o(\frac{1}{n}), b_n=o(\frac{1}{n})$.

## 14.2 解答

1. $f(t)\sim\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\frac{2\pi t}{T}-\frac{2E}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos\frac{4\pi nt}{T}$.

2. 余弦级数: $f(x)\sim\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$. 正弦级数: $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1-2(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin n\pi x$.

3. $f(x)=f(-x)\Rightarrow b_n=0$. $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\alpha xdx=\frac{2}{\pi\alpha}\sin\alpha\pi, a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\alpha x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(\alpha-n)x+\cos(\alpha+n)x]dx=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n}]_0^\pi=(-1)^n\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}, n\in\mathbb{N}_+$. 故 $\cos\alpha x\sim\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}[\frac{1}{\alpha}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx]$.

4. $f(x)=\frac{1}{2i}(\frac{1}{1-qe^{ix}}-\frac{1}{1-qe^{-ix}})=\frac{1}{2i}[\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(qe^{ix})^n-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(qe^{-ix})^n]=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{q^n(e^{inx}-e^{-inx})}{2i}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}q^n\sin nx$. 由于上述级数一致收敛到 $f(x)$, 故一定为 $f(x)$ 的傅里叶级数.

5. $f(x)=f(-x)\Rightarrow b_n=0$. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2, a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nxdx=(-1)^n\frac{4}{n^2}, n\in\mathbb{N}_+$. $x^2$ 可导 $\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n4}{n^2}\cos nx$. 令 $x=\pi$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 由帕塞瓦尔等式知 $\frac{1}{2}(\frac{2}{3}\pi^2)^2+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx=\frac{2}{5}\pi^4$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

6. $\mathrm{Beta}(p,1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx$, 利用变量替换 $x=\frac{1}{t}$ 有 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{-p}}{1+x}dx$, 因此 $\mathrm{Beta}(p,1-p)=\int_0^1\frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}dx$. 将 $\frac{1}{1+x}$ 展成幂级数有

$$\begin{aligned}\mathrm{Beta}(p,1-p)&=\lim_{r\to1-0}\int_0^r\frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}dx=\lim_{r\to1-0}\int_0^r\left[\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx^{k+p-1}+\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx^{k-p}\right]dx\\&=\lim_{r\to1-0}\int_0^r\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+p}r^{k+p}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k-p+1}r^{k-p+1}\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+p}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k-p+1}\\&=\frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k+p}+\frac{1}{p-k}\right)=\frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{2p}{p^2-k^2}\end{aligned}$$

由于 $\cos px$ 的傅里叶级数 $\cos p\pi=\frac{\sin p\pi}{\pi}\left[\frac{1}{p}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{2p}{p^2-k^2}\cos kx\right]$ 在 $|x|\le\pi$ 处处收敛, 令 $x=0$ 得 $\mathrm{Beta}(p,1-p)=\frac{1}{p}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{2p}{p^2-k^2}=\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx\overset{t=\frac{1}{1+x^\beta}}{=}\frac{1}{\beta}\int_0^1t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}(1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}dt=\frac{1}{\beta}\mathrm{Beta}(1-\frac{\alpha+1}{\beta},\frac{\alpha+1}{\beta})=\frac{1}{\beta}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha+1}{\beta}\pi}$.

令 $p=\frac{x}{\pi}, 0<x<\pi$, 得到 $\frac{\pi}{\sin x}=\frac{\pi}{x}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x\pi}{x^2-n^2\pi^2}$, 即 $1=\frac{\sin x}{x}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}$. 两边积分有 $\pi=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^\pi\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}dx$. 从而

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}[\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi}\frac{\sin x}{x}dx]\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}[\int_0^\pi\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}dt+\int_0^\pi\frac{\sin[t-(n+1)\pi]}{t-(n+1)\pi}dt]=\frac{1}{2}[\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}dt+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^\pi\frac{2t\sin t}{t^2-n^2\pi^2}dt]=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

这题稍微难了点!

7. 将 $f+g$ 和 $f-g$ 的帕塞瓦尔等式相减即得.

8. $a_n\simeq\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)d\sin nx=\frac{1}{n}[f(x)\sin nx]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx=0-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx=o(\frac{1}{n})$. 类似过程可知 $b_n=o(\frac{1}{n})$.

### 14.3 补充 (不要求掌握!)

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\}_{n=1}^{+\infty},\{\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\}_{n=1}^{+\infty}$ 本质上是 $L^2[-\pi,\pi]$ 空间上的一组单位正交基, 该空间有范数 $||f||_2=\left(\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$, 有内积 $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$, 是 Hilbert 空间. 计算傅里叶级数系数就是求各分量坐标, 帕塞瓦尔等式就是勾股定理. 顺便一提, 课本上似乎没有下面这几个定理, 但笔者感觉很重要, 故补充在这里.

**傅里叶级数的逐项积分定理**: 设函数 $f(x)\in R[0,2\pi]$, 且以 $2\pi$ 为周期, 设 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则 $\int_0^x f(t)dt=\frac{a_0}{x}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[\frac{a_n}{n}\sin nx+\frac{b_n(1-\cos nx)}{n}]$ 在 $[0,2\pi]$ 成立.

证明: 对于 $x\in[0,2\pi]$, 构造函数 $g(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & t=0,t=x\\ \pi, & t\in(0,x)\\ 0, & t\in(x,\pi)\end{cases}$. 然后用第 7 题结论立得.

**傅里叶级数的一致收敛性**: 设 $2\pi$ 周期函数 $f(x)\in D[-\pi,\pi]$, 且导函数 $f'(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数一致收敛到 $f(x)$.

证明: 设 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, $f'(x)$ 的傅里叶级数为 $f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)$, 分部积分可证 $a_0'=0,a_n'=nb_n,b_n'=-na_n,n=1,2,\cdots$. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{N}(|a_n|+|b_n|)=\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{|a_n'|+|b_n'|}{n}\le\left[\sum\limits_{n=1}^{N}(a_n'^2+b_n'^2)\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, 因此绝对一致收敛.

**傅里叶级数逐项微分定理**: 设 $2\pi$ 周期函数 $f(x)$ 二阶可导, 且二阶导函数 $f''(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 并设 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx),x\in\mathbb{R}$.

证明: 利用一致收敛性和函数项级数逐项微分定理.

# 15 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢一位不愿意透露姓名的同学, 他提供了大量精彩的题目. 感谢选修 2023 春高等数学 A II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.