高等数学 A II 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2023 年 2 月 20 日

目录

1 第 1 次习题课: 二重积分

1.1 问题

1. 累次积分变序: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx, \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$.
2. 求 $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 与 xoy 平面所围的体积.
3. 计算积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$.
4. 区域 D 由 $y = x^3, y = 0, x = 1$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{1-x^4} d\sigma$.
5. 区域 D 由 $y = 0, x = 1, y = x$ 围成, 计算积分 $I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} d\sigma$.
6. 区域 D 由 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $y = -x^2 + 1, y = x^2 - 1$ 两线在 $|x| \le 2$ 部分所围成, 计算积分 $I = \iint_D (x^2 + y^3) d\sigma$.
7. $0 \le p(x) \in R[a,b]$, $f(x), g(x)$ 于 $[a,b]$ 单调递增, 证明 $\int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \le \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$.
8. 计算极限 $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$.

1.2 解答

1. 这种题最好画图. 答案是 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y)dy, \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f(x,y)dx$.
2. 区域 $D = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}, D_0 = \{(x,y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\}$. 则体积 $V = \iint_D z d\sigma = 4\iint_{D_0} z d\sigma = 4\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 4\int_0^a \frac{2}{3}\frac{b}{a^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \cdots$(换元法)$\cdots = \frac{\pi}{2}ab$.
3. 区域 $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le \sqrt{x}\}$. 累次积分时先对 x 积分, 则原积分 $= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (\sin y - y\sin y) dy = 1 - \sin 1$.
4. $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{1-x^4} dy = \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4} dx = -\frac{1}{6}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{1}{6}$.
5. $I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2-y^2} dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2} + \frac{4x^2}{2}\arcsin\frac{y}{2x}\right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 (\frac{x}{2}\sqrt{3x^2} + 2x^2\arcsin\frac{1}{2})dx = \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3})$.
6. 首先, 因为积分区域关于 $y = 0$ 对称, 所以 $\iint_D y^3 d\sigma = 0$. 记 D_1 为 D 的第一象限部分, $D_2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}, D_3 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le -x^2 + 1\}$. 因此 $I = 4\iint_{D_1} x^2 d\sigma = 4\iint_{D_2} x^2 d\sigma - 4\iint_{D_3} x^2 d\sigma = 4\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 dy - 4\int_0^1 dx \int_0^{-x^2+1} x^2 dy = 4\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2} dx - 4\int_0^1 x^2(1-x^2) = 4\pi - \frac{8}{15}$.
7. 利用二重积分.

$$\begin{aligned}
\text{RHS} - \text{LHS} &= \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b p(y)dy \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(y)f(y)dy \int_a^b p(x)g(x)dx \\
&= \int_a^b \int_a^b [p(x)p(y)f(x)g(x) - p(x)p(y)f(y)g(x)] d\sigma = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(x)[f(x) - f(y)] d\sigma
\end{aligned}$$

同理 $\text{RHS} - \text{LHS} = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y) - f(x)] d\sigma$. 两式相加得 $2(\text{RHS} - \text{LHS}) = \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)[g(x) - g(y)][f(x) - f(y)] d\sigma \ge 0$.
8. 记 $I(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$, 则 $I^2(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-a}^a e^{-y^2} dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} d\sigma$. 记区域 $D(a) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2\}$, 积分 $J(a) = \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2} d\sigma$. 由简单的二维区域包含关系知 $J(a) \le I^2(a) \le J(\sqrt{2}a)$. 再利用二重积分极坐标换元知 $J(a) = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} re^{-r^2} d\theta = -\pi e^{-r^2}|_{r=0}^{r=a} = \pi(1 - e^{-a^2})$. 因此 $\lim\limits_{a\to+\infty} J(a) = \pi$. 由夹逼原理知 $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a) = \sqrt{\pi}$.

1.3 补充 (不要求掌握!)

类似于累次极限和整体极限的关系, 累次积分和二重积分也不具有相互决定性, 即二重积分存在并不保证累次积分存在. 例如设 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 是区间 $[0,1]$ 上的所有有理数组成的序列, 定义矩形 $D = [0,1] \times [0,1]$ 上的函数为 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{k}, \text{ if } x = x_k, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$. 可以证明 $f(x,y) \in R(D)$ 且 $\iint_D f(x,y) d\sigma = 0$. 但是, 由于 $f(x_k, y) = \frac{1}{k}\text{Dirichlet}(y)$ 导致 $\int_0^1 f(x_k,y)dy \ \nexists$, 所以 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 不能使用累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ 计算. 但是若固定 y, $f(x,y)$ 要么是 Riemann 函数要么恒为 0, 积分值都是 0, 因此 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 可以使用累次积分 $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$ 计算.

2 第 2 次习题课: 三重积分

2.1 问题

1. 区域 Ω 由 $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$ 围成, 计算积分 $I=\iiint_\Omega xdv$.
2. 区域 $\Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega zdv$.
3. 区域 $\Omega=\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega(x+y+z)^2dv$.
4. 区域 D 由 $(x-a)^2+y^2=a^2(y>0),(x-2a)^2+y^2=4a^2(y>0),y=x$ 围成, 计算积分 $I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$.
5. 计算椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 及抛物柱面 $z=2-x^2$ 所围成立体的体积.
6. 区域 $D=\{(x,y):0\le x+y\le 1, 0\le x-y\le 1\}$, 计算积分 $I=\iint_D(x+y)^2e^{x^2-y^2}d\sigma_{xy}$.
7. 区域 Ω 由 $z=\frac{x^2+y^2}{m}, z=\frac{x^2+y^2}{n}, xy=a^2, xy=b^2, y=\alpha x, y=\beta x(0<m<n, 9<a<b, 0<\alpha<\beta)$ 围成且在第一卦限的部分, 计算积分 $I=\iiint_\Omega xyzdv$.
8. 设 $h=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}, f(x)\in C[-h,h]$, 证明 $\iiint_\Omega f(\alpha x+\beta y+\gamma z)dv_{xyz}=\pi\int_{-1}^1(1-\zeta^2)f(h\zeta)d\zeta$, 其中区域 Ω 是单位球内部.
9. 区域 $\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 2z\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$.
10. 区域 $\Omega=\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 计算积分 $I=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$.
11. 区域 $D=\{(x,y):-1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, 计算积分 $I=\iint_D\max\{xy,x^3\}d\sigma$.

2.2 解答

1. 记区域 $D_{xy}=\{(x,y):x\ge 0, y\ge 0, x+2y\le 1\}$, 累次积分时依次对 z,y,x 积分, 有 $I=\iint_{D_{xy}}[\int_0^{1-x-2y}xdz]d\sigma_{xy}=\iint_{D_{xy}}x(1-x-2y)d\sigma_{xy}=\int_0^1dx\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}[x(1-x)-2xy]dy=\int_0^1[\frac{1}{2}x(1-x)^2-\frac{1}{4}x(1-x)^2]=\frac{1}{48}$.

2. 记区域 $D_{xy}=\{(x,y):x^2+y^2\le\frac{R^2}{2}\}$, 累次积分时先对 z 积分再极坐标换元, 有 $I=\iint_{D_{xy}}[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}zdz]d\sigma_{xy}=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}[R^2-2(x^2+y^2)]d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2}(R^2-2r^2)rdr=\frac{\pi R^4}{8}$.

3. 由对称性, $I=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv+2\iiint_\Omega(xy+yz+zx)dv=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$. 先计算 $I_1=\iiint_\Omega z^2dv$. 记区域 $D_z=\{(x,y):\frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})}\le 1\}$, 累次积分时先对 σ_{xy} 积分再对 z 积分, 有 $I_1=\int_{-c}^cdz\iint_{D_z}z^2d\sigma_{xy}=\int_{-c}^cz^2\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4\pi abc^3}{15}$. 因此 $I=\frac{4\pi abc}{15}(a^2+b^2+c^2)$.

4. 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$, 有 $\begin{cases}(x-a)^2+y^2=a^2\Rightarrow r^2-2ar\cos\theta=0\Rightarrow r=2a\cos\theta\\ (x-2a)^2+y^2=4a^2\Rightarrow r=4a\cos\theta\\ y=x\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\end{cases}$, 从而 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta}r^2dr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{56}{3}a^3\cos^3\theta d\theta=\frac{112-70\sqrt{2}}{9}a^3$.

5. 联立方程 $\begin{cases}z=x^2+2y^2\\ z=2-x^2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=1$, 因此区域 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$, 体积 $V=\iint_D[(2-x^2)-(x^2+2y^2)]d\sigma=2\iint_D(1-x^2-y^2)d\sigma$. 做极坐标换元知 $V=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)dr=\pi$.

6. 令 $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=x-y\end{cases}$, 即 $\begin{cases}x=\frac{\xi+\eta}{2}\\ y=\frac{\xi-\eta}{2}\end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J=\det\left(\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}\right)=-\frac{1}{2}$, 区域 $D_{xy}=\{(x,y):0\le x+y\le 1, 0\le x-y\le 1\}\Rightarrow D_{\xi\eta}=\{(\xi,\eta):0\le\xi\le 1, 0\le\eta\le 1\}$, 所以换元后 $I=\iint_{D_{\xi\eta}}\xi^2e^{\xi\eta}|J|d\sigma_{\xi\eta}=\frac{1}{2}\int_0^1d\xi\int_0^1\xi^2e^{\xi\eta}d\eta=\frac{1}{2}\int_0^1\xi(e^\xi-1)d\xi=\frac{1}{4}$.

7. 令 $\begin{cases}u=\frac{z}{x^2+y^2}\\ v=xy\\ w=\frac{y}{x}\end{cases}$, 即 $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{v}{w}}\\ y=\sqrt{wv}\\ z=uv(w+\frac{1}{w})\end{cases}$, Jacobi 行列式 $J=|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|=\frac{v}{2w}(w+\frac{1}{w})$, 区域 $\Omega\to\Omega_{uvw}=\{(u,v,w):\frac{1}{n}\le u\le\frac{1}{m}, a^2\le v\le b^2, \alpha\le w\le\beta\}$, 所以换元后 $I=\iiint_{\Omega_{uvw}}\sqrt{\frac{v}{w}}\sqrt{wv}uv(w+\frac{1}{w})\frac{v}{2w}(w+\frac{1}{w})dudvdw=\iiint_{\Omega_{uvw}}v^3u(w+\frac{1}{w})^2\frac{1}{w}dudvdw=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}udu\int_{a^2}^{b^2}v^3dv\int_\alpha^\beta(w+\frac{2}{w}+\frac{1}{w^3})dw=\frac{1}{32}(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2})(b^8-a^8)[(\beta^2-\alpha^2)(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2})+4\log\frac{\beta}{\alpha}]$.

8. 作正交变换 $\begin{cases}\xi = a_1x+b_1y+c_1z\\ \eta = a_2x+b_2y+c_2z\\ \zeta = \frac{1}{h}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\end{cases}$ (旋转), 则 $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}| = 1$, 所以换元后 LHS $= \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le 1} f(h\zeta)d\xi d\eta d\zeta =$ $\int_{-1}^1 d\zeta \iint_{\xi^2+\eta^2\le 1-\zeta^2} f(h\zeta)d\xi d\eta = \pi\int_{-1}^1(1-\zeta^2)f(h\zeta)d\zeta =$ RHS.

9. 作球坐标变换, 区域 $\Omega: 0\le r\le 2\cos\phi$, 积分 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \int_0^{2\cos\phi} r^2\, r^2\sin\phi dr = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi d\phi\int_0^{2\cos\phi} r^4 dr =$ $2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\frac{32}{5}\cos^5\phi d\phi = -\frac{64}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\phi d\cos\phi = -\frac{64}{5}\frac{\cos^6\phi}{6}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15}\pi$.

10. 作广义球坐标系变换 $\begin{cases}x = ar\sin\phi\cos\theta\\ y = br\sin\phi\sin\theta\\ z = cr\cos\phi\end{cases}$, Jacobi 行列式为 $J = abcr^2\sin\phi$, 所以换元后

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\phi\int_0^1 dr\, r^2abc\sin\phi(a^2r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\phi\sin^2\theta + c^2r^2\cos^2\phi)\\
&= \frac{abc}{5}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi} -[(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)(1-\cos^2\phi)+c^2\cos^2\phi]d\cos\phi\\
&= \frac{abc}{5}\int_0^{2\pi}[\frac{4}{3}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)+\frac{2}{3}c^2]d\theta = \frac{4abc\pi}{15}(a^2+b^2+c^2)
\end{aligned}$$

11. 引入辅助积分 $J=\iint_D\min\{xy,x^3\}d\sigma$. $I+J=\iint_D(xy+x^3)d\sigma = \int_0^1 dy\int_{-1}^1(xy+x^3)dx = 0$, $I-J=\iint_D|xy-x^3|d\sigma =$ $\iint_D|x||y-x^2|d\sigma = 2\int_0^1 dy\int_0^1 x|y-x^2|dx \overset{u=x^2}{=} \int_0^1 dy\int_0^2|y-u|du \overset{\text{几何意义}}{=} \frac{1}{2}\int_0^1[y^2+(1-y)^2]dy = \frac{1}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{6}$.

2.3 补充 (不要求掌握!)

n 维空间中的球坐标系: 一个向径 r, $n-1$ 个角度 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}$, 其中, 一个角度转一圈 ($\theta_{n-1}$), $n-2$ 个角度转半圈 $(\theta_1,\cdots,\theta_{n-2})$. 与直角坐标系的关系为 $\begin{cases}x_1 = r\cos\theta_1\\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2\\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-2} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\ x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\end{cases}$, 利用归纳法可以证明 Jacobi 行列式为 $|J| = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$.

n 维空间中半径为 R 的球体 $\Omega: x_1^2+\cdots+x_n^2\le R^2$ 的体积 V_n: 作球坐标变换知

$$\begin{aligned}
V_n &= \int\cdots\int_\Omega dx_1\cdots dx_n = \int_0^{2\pi}d\theta_{n-1}\int_0^{\pi}d\theta_{n-2}\cdots\int_0^{\pi}d\theta_1\int_0^R r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}dr\\
&= \frac{R^n}{n}2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta_{n-3}d\theta_{n-3}\cdots\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_1 d\theta_1\\
&= \frac{R^n}{n}2\pi\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},1)\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\cdots\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{n-2}{2})\mathrm{Beta}(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2})
\end{aligned}$$

关于 Beta 函数, 参见后述的含参积分.

3 第 3 次习题课: 曲线积分, 格林公式

3.1 问题

1. 曲线 $\Gamma: x^2+y^2=x$, 计算积分 $I=\int_\Gamma\sqrt{1-x^2-y^2}ds$.
2. 曲线 C 是 $y=0, y=x(x\ge 0), x^2+y^2=a^2$ 所围成图形的边界, 计算积分 $I=\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$.

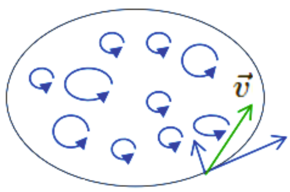
3. 曲线 $L:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=at\end{cases}$ $,0\le t\le 2\pi$, 计算积分 $I=\int_L\frac{z^2ds}{x^2+y^2}$.
4. 曲线 $C:\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}$ $,0\le\theta\le 2\pi$, 计算积分 $I=\int_C(x^2+y^2)^n ds$.
5. 曲线 $C:x^2+y^2=a^2$, 计算积分 $I=\oint_C\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 方向是逆时针.
6. 曲线 $\widehat{AB}$ 为单位圆周 $x^2+y^2=1$ 的上半部分, 计算积分 $I=\int_{\widehat{AB}}-ydx+xdy$, 方向为从 $A(1,0)$ 到 $B(-1,0)$.
7. 曲线 Γ 是从 $(0,0)$ 沿函数 $y=x^\alpha$ 到 $(1,1)$ 的部分, 计算积分 $I=\int_\Gamma(x^2-y^2)dx-2xydy$.
8. 曲线 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 计算积分 $\int_\Gamma xdx+ydy+zdz$, 方向是从 z 轴正向看回来的逆时针方向.
9. 区域 D 是由点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 围成的三角形, 计算积分 $I=\iint_D x^2dxdy$.
10. 曲线 $C:741x^8+886e^xy^2+\sin(x^9\cos(y))=5$, 计算积分 $I=\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.
11. 证明或否定: 曲线积分 $I=\int_\Gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内积分与路径无关.
12. (格林第二公式) 设闭区域 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的, $u=u(x,y),v=v(x,y)\in C^2(D)$, 证明 $\iint_D(v\triangle u-u\triangle v)d\sigma=\oint_{\partial D}(v\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}})ds$, 其中 $\overrightarrow{n}$ 为 ∂D 的单位外法向量.
13. 求函数 $u(x,y)$ 使得 $du=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{e^y}{1+x^2}dy$.

3.2 解答

1. 曲线参数方程 $x=\frac12+\frac12\cos t,y=\frac12\sin t,0\le t\le 2\pi$, 则 $ds=\sqrt{\frac14\sin^2t+\frac14\cos^2t}dt=\frac12dt$, 原积分 $I=\int_\Gamma\sqrt{1-x}ds=\frac12\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}dt=\frac12\int_0^{2\pi}|\sin\frac t2|dt=\int_0^\pi\sin\frac t2dt=2$.
2. 记 C_1,C_2,C_3 分别为曲线 C 的下、右上、左上部分, 则原积分 $I=\int_{C_1}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{C_2}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{C_3}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^xdx+\int_0^{\frac\pi4}e^aad\theta+\int_0^{\frac{a}{\sqrt2}}e^{\sqrt2x}\sqrt2dx=(e^a-1)+\frac\pi4ae^a+e^{\sqrt2x}|_0^{\frac{a}{\sqrt2}}=\frac\pi4ae^a+2(e^a-1)$.
3. 直接使用公式, $I=\int_0^{2\pi}\frac{a^2t^2}{a^2\cos^2t+a^2\sin^2t}\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+a^2}dt=\int_0^{2\pi}t^2\sqrt2adt=\frac{8\sqrt2}{3}a\pi^3$.
4. 直接使用公式, $I=\int_0^{2\pi}a^{2n}ad\theta=2\pi a^{2n+1}$.
5. 曲线参数方程 $x=a\cos t,y=a\sin t$, 因此 $I=\oint\frac{a^2(\cos t+\sin t)(-\sin t)-a^2(\cos t-\sin t)\cos t}{a^2}dt=\int_0^{2\pi}(-1)dt=-2\pi$.
6. 由 $x^2+y^2=1$ 知 $xdx+ydy=0$ 得 $dy=-\frac xydx$, 从而有 $\int_{\widehat{AB}}-ydx+xdy=\int_1^{-1}-ydx+x(-\frac xydx)=\int_{-1}^1(\frac{x^2+y^2}{y})dx=\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$.
7. 直接计算得 $I=\int_0^1(x^2-x^{2\alpha})dx-2xx^\alpha(\alpha x^{\alpha-1})dx=\int_0^1(x^2-(2\alpha+1)x^{2\alpha})dx=-\frac23$.
8. 球面的单位法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$, 平面的单位法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\frac{\sqrt3}{3}(1,1,1)$. 所以曲线 Γ 的单位切向量为 $\overrightarrow{\tau}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$. 从而积分为 $\int_\Gamma xdx+ydy+zdz=\int_\Gamma(x,y,z)\cdot\overrightarrow{\tau}ds=\int_\Gamma(x,y,z)\cdot(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})ds=\int_\Gamma 0ds=0$.
9. AB 的方程为 $y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, BC 的方程为 $y=y_2+\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$, CA 的方程为 $y=y_3+\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_3)$. 由格林公式, 知原积分 $I=\iint_D\frac{\partial}{\partial x}(\frac13x^3)d\sigma=\oint_{\partial D}\frac13x^3dy=\int_{\overline{AB}}\frac13x^3dy+\int_{\overline{BC}}\frac13x^3dy+\int_{\overline{CA}}\frac13x^3dy=\int_{x_1}^{x_2}\frac13x^3\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}dx+\int_{x_2}^{x_3}\frac13x^3\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}dx+\int_{x_3}^{x_1}\frac13x^3\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}dx=\frac1{12}[(y_2-y_1)(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1)+(y_3-y_2)(x_3^2+x_2^2)(x_3+x_2)+(y_1-y_3)(x_1^2+x_3^2)(x_1+x_3)]$.
10. 容易验证圆点 O 是闭曲线 C 所围成区域的内点. 记 $C_\epsilon:x^2+y^2=\epsilon^2$, 取 ϵ 足够小使 C_ϵ 围成的区域完全在曲线 C 内侧. 在 C 与 C_ϵ 围成的区域 D 上使用格林公式知 $\oint_{\partial D}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+y^2}))d\sigma=0\Rightarrow\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{C_\epsilon}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\overset{x=\epsilon\cos\theta,y=\epsilon\sin\theta}{=}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$.
11. 上述积分为两个曲线积分之差, 即 $I=\int_\Gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=\int_\Gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_\Gamma\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}$. 令 $P_i=\frac{-y}{x^2+y^2},Q_i=\frac{(x-i)dy}{(x-i)^2+y^2},i=0,1$, 容易验证 $\frac{\partial P_i}{\partial y}=\frac{\partial Q_i}{\partial x}$. 但由于 P_0,Q_0 包含瑕点 $(0,0)$, P_1,Q_1 包含瑕点 $(1,0)$, 且在包含瑕点的区域内积分值可能为 2π(第 10 题结论), 不包含瑕点的区域内积分值必为 0, 因此原积分与路径有关, 结论不对.
12. 由格林公式, $\iint_D\nabla\cdot(P,Q)d\sigma=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma=\oint_{\partial D}Pdy-Qdx=\oint_{\partial D}(P,Q)\cdot(dy,-dx)=\oint_{\partial D}(P,Q)\cdot\overrightarrow{n}ds$. 因此 $\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{n}}ds=\oint_{\partial D}v\nabla u\cdot\overrightarrow{n}ds=\iint_D\nabla\cdot(v\nabla u)d\sigma=\iint_D(\nabla v\cdot\nabla u+v\triangle u)d\sigma$, 类似有 $\oint_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}}ds=\iint_D(\nabla u\cdot\nabla v+u\triangle v)d\sigma$. 两式相减即得结果.
13. 令 $P(x,y)=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2},Q(x,y)=\frac{e^y}{1+x^2}$, 则有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xe^y}{(x^2+1)^2}$. $\int P(x,y)dx=\frac{e^y-1}{x^2+1}+C'$, $Q(x,y)$ 删除掉含 x 的项后为 0, 因此 $u(x,y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}+C$.

3.3 补充 (不要求掌握!)

格林公式的物理意义: 平面定常流体 (各点流速只与位置有关, 与时间无关) 于 (x,y) 点的流速为 $\overrightarrow{v}(x,y)=P(x,y)\overrightarrow{i}+Q(x,y)\overrightarrow{j}$. 对于固定的 x, $\frac{\partial P}{\partial y}$ 决定了 x 方向向 y 方向的旋转, 所以若以逆时针方向为正向, 则 x 方向向 y 方向的旋转度量为 $-\frac{\partial P}{\partial y}$. 对于固定的 y, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 决定了 y 方向向 x 方向的旋转, 其度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x}$. 从而, (x,y) 点的流体的旋转度的度量为 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$, 命名为 (平面流场的旋度), 记为 $\mathrm{rot}\overrightarrow{v}$.



物理现象: 边界线 ∂D 上的环流量等于区域 D 上各点旋转量的迭加.

4 第 4 次习题课: 曲面积分

4.1 问题

1. 计算球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被柱面 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ 割下的部分的面积.
2. 求螺旋面 $\Sigma:\begin{cases}x=u\sin v\\ y=u\cos v\\ z=av\end{cases}$ 在 $0\le u\le R, 0\le v\le 2\pi$ 部分的面积, 其中 $a>0$ 是常数.
3. 求抛物面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy(a>0)$ 内的那部分面积.
4. Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 计算积分 $I=\iint_\Sigma x^2y^2dS$.
5. Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2, 0\le z\le H$, 计算积分 $I=\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)dS$.
6. 求均匀物质曲面 $\Sigma: z=2-(x^2+y^2), z\ge 0$ 的质心坐标.
7. Σ 是平面 $2x+2y+z=6$ 于第一卦限部分上侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}dS$, 其中 $\overrightarrow{F}=(xy,-x^2,x+z)$.
8. $\Omega=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$, Σ 是 $\partial\Omega$ 的外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma xyzdxdy$.
9. 流 $\overrightarrow{v}=xy\overrightarrow{i}+yz\overrightarrow{j}+xz\overrightarrow{k}$, 求穿出 $\frac{1}{8}$ 球面 $x^2+y^2+z^2=1$(第一卦限) 的流量.
10. Σ 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\le z\le h)$ 外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma xdydz+ydxdz+zdxdy$.
11. Σ 是由三个坐标平面及 $x+y+z=1$ 所围成四面体外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$.
12. S 是曲面 $x^2+y^2=1(0\le z\le 2)$ 的外侧, 计算积分 $I=\iint_S x(y-z)dydz+(x-y)dxdy$.
13. S 是椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面, 计算积分 $I=\iint_S\frac{dxdy}{z}$.

4.2 解答

1. 由对称性, 所求面积 S 为 xy 平面上方曲面的面积的两倍. 割下部分 $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y)\in D, D=\{(x,y): (x-\frac{1}{2})^2+y^2\le\frac{1}{4}\}$. 则面积 $S=2\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}d\sigma_{xy}=2\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}d\sigma_{xy}$. 利用极坐标变换知 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-r^2}|_0^{\cos\theta}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=2\pi-4$.
2. $\overrightarrow{r_1}=(\sin v,\cos v,0), \overrightarrow{r_2}=(u\cos v,-u\sin v,a), |\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2}|=\sqrt{u^2+a^2}\Rightarrow S=\iint_\Sigma|\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{r_2}|d\sigma_{uv}=\int_0^{2\pi}dv\int_0^R\sqrt{u^2+a^2}du$ $=2\pi[\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log(u+\sqrt{u^2+a^2})]_0^T=\pi R\sqrt{R^2+a^2}+\pi a^2\log(\frac{R+\sqrt{R^2+a^2}}{a})$.
3. 由抛物面方程得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{a}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{a}, dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}$. 从曲线表达式 $\begin{cases}(x^2+y^2)^2=2a^2xy\\ z=0\end{cases}$ 知 (x,y) 落在第一、四象限. 做极坐标变换, 知柱面方程为 $r^2=a^2\sin 2\theta(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}或\pi\le\theta\le\frac{3\pi}{2})$. 因此由对称性知 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}rdr=\frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}}-1]d\theta=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3(\theta+\frac{\pi}{4})d\theta-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 udu-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}(-\frac{1}{3}\sin^2 u\cos u-\frac{2}{3}\cos u)|_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{20}{9}a^2-\frac{\pi a^2}{3}=\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$.
4. Σ 在 xoy 平面的投影区域为 $D: x^2+y^2\le R^2$. 又有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$, 所以 $\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $I=\iint_\Sigma x^2y^2dS=\iint_D x^2y^2\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr=R\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\int_0^R\frac{r^5}{\sqrt{R^2-r^2}}dr$.
分开计算: $\int_0^R\frac{r^5}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=\frac{1}{2}\int_0^R\frac{r^4}{\sqrt{R^2-r^2}}dr^2\overset{R^2-r^2=t}{=}\frac{1}{2}\int_0^{R^2}\frac{(R^2-t)^2}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{R^2}(R^4t^{-\frac{1}{2}}-2R^2t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}})dt=\frac{1}{2}[2R^4t^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}r^2t^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}]|_0^{R^2}=\frac{8}{15}R^5, \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)d\theta=\frac{\pi}{4}$. 所以 $I=R\frac{\pi}{4}\frac{8}{15}R^5=\frac{2}{15}\pi R^6$.

5. Σ 可以表示为 $x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$, 其在 yoz 平面的投影区域为 $D_{yz}:-R\le y\le R, 0\le z\le H$. 又 $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}, \frac{\partial x}{\partial z}=0, \sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}$. 再考虑对称性, $I=2\iint_{D_{yz}}(R^2+z^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}d\sigma_{yz}=2R\int_{-R}^{R}\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H(R^2+z^2)dz=2R\arcsin\frac{y}{R}|_{-R}^{T}(R^2z+\frac{1}{3}z^3)|_0^H=2RH\pi(R^2+\frac{H^2}{3})$.
6. 设其质心坐标为 (x_0,y_0,z_0), 由对称性有 $x_0=y_0=0, z_0=\frac{\iint_\Sigma zdS}{\iint_\Sigma dS}$. 易知 $\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$, 因此 $\iint_\Sigma dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=2\pi\cdot\frac{1}{2}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi$, $\iint_\Sigma zdS=\iint_{D_{xy}}(2-x^2-y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}d\sigma_{xy}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}dr=\frac{37}{10}\pi$. 所以 $z_0=\frac{111}{130}$.
7. $\vec{n}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}), z=6-2x-2y, D=\{(x,y):x\ge0,y\ge0,x+y\le3\}, dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}d\sigma_{xy}=3d\sigma_{xy}$, 则 $I=\iint_\Sigma\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_\Sigma[\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}(x+z)]dS=\iint_D[\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}(x+6-2x-2y)]\cdot3d\sigma_{xy}=\iint_D[2xy-2x^2-x-2y+6]d\sigma_{xy}=\int_0^3dx\int_0^{3-x}[2xy-2x^2-x-2y+6]dy=\frac{27}{4}$.
8. 记 Σ_1,Σ_2 分别为 Σ 在第一卦限和第五卦限的部分, $D=\{(x,y):x\ge0,y\ge0,x^2+y^2\le1\}$. 由对称性, $I=2\iint_{\Sigma_1}xyzdxdy=2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma_{xy}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1r^2\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-r^2}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1r^2\sqrt{1-r^2}dr^2=\frac{1}{2}\int_0^1u\sqrt{1-u}du\overset{t=\sqrt{1-u}}{=}\frac{1}{2}\int_1^0(1-t^2)t(-2t)dt=\frac{2}{15}$.
9. $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma), Q=\iint_\Sigma\vec{v}\cdot\vec{n}dS=\iint_\Sigma Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint_\Sigma xydydz+yzdxdz+xzdxdy\overset{\text{对称性}}{=}3\iint_\Sigma xzdxdy=3\iint_{x^2+y^2\le1,x\ge0,y\ge0}x\sqrt{1-x^2-y^2}d\sigma_{xy}=\frac{3\pi}{16}$.
10. $I=\iint_\Sigma(x,y,z)\cdot\vec{n}dS=\iint_\Sigma(x,y,z)\cdot\frac{(x,y,-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=\iint_\Sigma\frac{x^2+y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=0$.
11. 记 Σ 落在 xy,yz,zx 平面上的部分分别为 Σ_z,Σ_x 和 Σ_y, 在平面 $x+y+z=1$ 的部分记为 Σ_1. 则在 Σ_z 上, $z=0, dydz=dzdx=0$, 从而 $\iint_{\Sigma_z}xdydz+ydzdx+zdxdy=0$. 同理在 Σ_y 与 Σ_z 上的积分都为零. 因此 $I=\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$. 记 $D=\{(x,y):x\ge0,y\ge0,x+y\le1\}$, 则由对称性 $I=3\iint_D(1-x-y)d\sigma_{xy}=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{2}$.
12. 注意到曲面 S 在 O_{xy} 平面上的投影为一曲线, 所以 $\iint_S(x-y)dxdy=0$. 为了计算另一个积分, 将曲面分成两部分 $\begin{cases}S_1:x=\sqrt{1-y^2}(0\le z\le2)\\S_2:x=-\sqrt{1-y^2}(0\le z\le2)\end{cases}$. 记 $D=\{(y,z):-1\le y\le1,0\le z\le2\}$, 由对称性, $I=2\iint_{S_1}x(y-z)dydz=2\int_0^2dz\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}(y-z)dy=-2\pi$.
13. 记 $D=\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1\}$, 由对称性知 $I=2\iint_D\frac{dxdy}{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}=\frac{2}{c}\int_{-a}^a dx\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\frac{dy}{\sqrt{(1-x^2/a^2)-y^2/b^2}}=\frac{2}{c}\int_{-a}^a\frac{b\pi}{2}dx=\frac{2\pi ab}{c}$.

4.3 补充 (不要求掌握!)

如何定义某条曲线是“可求长度”的? 如何定义某张曲面是“可求面积”的? 有兴趣的同学可以参考https://wqgcx.github.io/courses/Functions_of_Real_Variables.pdf.
事实上, 有些集合是不可求长的. 用 $m(A)$ 表示集合 A 的“长度”, 在 $[0,1]$ 中根据规则“$x_1\sim x_2$ 当且仅当 $x_1-x_2\in\mathbb{Q}$”划分等价类, 每个等价类选取一个元素 x_α(依赖于选择公理), 这样构成了集合 A. 假设 A 可求长, 那么 $A_q=(A+q)\cap[0,1], \forall q\in\mathbb{Q}$ 也可求长, 且对于 $q\neq p$ 有 $A_q\cap A_p=\emptyset$. 这表明 $1=m([0,1])=\sum_{q\in\mathbb{Q}}m(A_q)$, 即 A 不是零长度的. 注意到对任意的 $q\in\mathbb{Q}$ 成立 $m(A_q)\ge m(A)-q$, 这样只需考虑所有在区间 $[0,\frac{1}{2}m(A)]$ 中的有理数便知矛盾! 这说明集合 A 是不可求长的.

5 第 5 次习题课: 高斯公式, 斯托克斯公式

5.1 问题

1. Σ 是锥面 $x^2+y^2=z^2(0\le z\le1)$ 外侧, 计算积分 $I=\iint_\Sigma(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$.
2. S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上半部分上侧, 计算积分 $I=\iint_S(\sin yz+x)dydz+(e^{xz}+y)dzdx+(xy+z)dxdy$.
3. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为一封闭光滑曲面, 以它为边界的闭区域为 D, $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3$ 不在 S 上. 计算积分 $I=\iint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}$, 其中 $\vec{r}=(x-\xi,y-\eta,z-\zeta), r=|\vec{r}|, |\vec{n}|$ 是 S 的单位外法向量.
4. 设 $f(x,y,z)$ 表示从原点到椭球面 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $P(x,y,z)$ 的切平面的距离, 计算积分 $I=\iint_\Sigma\frac{dS}{f(x,y,z)}$.

5. L 是平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截得三角形 Σ 的边界, 其正向与此三角形上侧成右手系, 计算积分 $I=\oint_L zdx+xdy+ydz$.

6. L 为椭圆 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1 \end{cases}$, 方向与椭圆面上侧构成右手系, 计算积分 $I=\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$.

7. Γ_h 是平面 $x+y+z=h$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线, 从 z 轴正向看去逆时针方向, 计算积分 $I=\oint_{\Gamma_h}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$.

8. C 是平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 切立方体 $\Omega=\{(x,y,z):0\le x,y,z\le a\}$ 的表面所得的切痕, 方向是从 x 轴正向看去逆时针方向, 计算积分 $I=\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$.

9. S 是柱面 $x^2+y^2=R^2, -R\le z\le R$ 所围成的立体表面外侧, 计算积分 $I=\iint_S \frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$.

10. S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1, z=2$ 所围立体的表面外侧, 计算积分 $\iint_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

5.2 解答

1. 记 $\Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}, \Sigma_0=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1, z=1\}$, 则 $I=\oiint_{\partial\Omega}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy-\iint_{\Sigma_0}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy:=I_1-I_2$. 根据高斯公式, $I_1=\iiint_\Omega[0+0+0]dv=0$, 而 $I_2=\iint_{\Sigma_0}(x-y)dxdy=\iint_{\Sigma_0}xd\sigma_{xy}-\iint_{\Sigma_0}yd\sigma_{xy}=0-0=0$. 因此 $I=0$.

2. 取 $S_1=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1, z=0\}$, 方向向下, 则 $S\cup S_1$ 构成了上班单位球体 D 的边界外侧. 由高斯公式得 $\iint_{S\cup S_1}(\sin yz+x)dydz+(e^{xz}+y)dzdx+(xy+z)dxdy=3\iiint_D dv=2\pi$. 而 $\iint_{S_1}(xy+z)dxdy=-\iint_{x^2+y^2\le 1}xyd\sigma_{xy}=0$. 因此 $I=2\pi$.

3. $\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})=\frac{1}{r}\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n}\Rightarrow I=\iint_S\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{n}dS=\iint_S\frac{x-\xi}{r^3}dydz+\frac{y-\eta}{r^3}dzdx+\frac{z-\zeta}{r^3}dxdy$. 由 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3})=\frac{1}{r^3}-\frac{3(x-\xi)^2}{r^5}, \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3})=\frac{1}{r^3}-\frac{3(y-\eta)^2}{r^5}, \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})=\frac{1}{r^3}-\frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$ 知 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})=0$. 当 $(\xi,\eta,\zeta)\notin D$ 时, 根据高斯公式成立 $I=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-\xi}{r^3})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y-\eta}{r^3})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z-\zeta}{r^3})]dv=0$. 当 $(\xi,\eta,\zeta)\in D$ 时, 取 ϵ 充分小使得球面 $S_\epsilon=\{(x,y,z):(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\epsilon^2\}$ 完全落在 D 的内部. 如果取 S_ϵ 的内侧 S_ϵ^-, 设区域 D_ϵ 以 S 与 S_ϵ^- 为边界, 则 $\iint_{S\cup S_\epsilon^-}\frac{\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})}{r^2}dS=\iint_{D_\epsilon}0dv=0$. 注意到在 S_ϵ 上, $\overrightarrow{r}$ 与 $\overrightarrow{n}$ 平行, 从而 $I=-\iint_{S_\epsilon^-}\frac{\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})}{r^2}dS=\iint_{S_\epsilon}\frac{dS}{\epsilon^2}=\frac{1}{\epsilon^2}4\pi\epsilon^2=4\pi$.

4. 对 Σ 的方程两边微分得到 $\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0$, 因此 P 处的外法向量为 $\overrightarrow{n}=(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})$, 切平面方程为 $\frac{x}{a^2}(X-a)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0$, 原点到切平面距离 $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2+(\frac{y}{b^2})^2+(\frac{z}{c^2})^2}}$, 因此 $I=\iint_\Sigma\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2+(\frac{y}{b^2})^2+(\frac{z}{c^2})^2}dS=\iint_\Sigma(\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma)dS=\iint_\Sigma\frac{x}{a^2}dydz+\frac{y}{b^2}dzdx+\frac{z}{c^2}dxdy$. 记 $V=\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 由高斯公式有 $I=\iiint_V(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})dv=\frac{4\pi abc}{3}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$.

5. $\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}=dydz+dzdx+dxdy$, 因此由斯托克斯公式, $I=\iint_\Sigma dydz+dxdz+dxdy=3\iint_\Sigma dxdy=\frac{3}{2}$.

6. 记椭圆面上侧为 Σ, $\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}=-2dydz-2dzdx-2dxdy$, 因此由斯托克斯公式, $I=\iint_\Sigma -2dydz-2dzdx-2dxdy=-2\iint_\Sigma dydz+dxdy=-2[\iint_{D_{yz}}d\sigma_{yz}+\iint_{D_{xy}}d\sigma_{xy}]=-2(\pi ah+\pi a^2)$.

7. 设平面 $x+y+z=h$ 被圆周 Γ_h 所围成部分为 S_h, 则 S_h 是一半径为 $\sqrt{1-\frac{h^2}{3}}$ 的圆盘. 由斯托克斯公式, $I=\iint_{S_h}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}=-\frac{4}{\sqrt{3}}(x+y+z)dS=-\frac{4h}{\sqrt{3}}\iint_{S_h}dS=-\frac{4h}{\sqrt{3}}\pi(1-\frac{h^2}{3})$.

8. 令 Σ 是 C 所围的区域, 方向为上侧, 由斯托克斯公式知 $I=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(x+y+z)dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\frac{3}{2}adS=-2\sqrt{3}a\iint_\Sigma dS$. 最后, 因为 Σ 是边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的正六边形, 面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, 所以 $I=-\frac{9}{2}a^3$.

9. 记 S_1,S_2,S_3 分别为 S 的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为 $I=\iint_S\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}+\iint_S\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}:=I_1+I_2$. 先看第一项, 显然 $\iint_{S_1}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{S_2}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=0$. 记 $D_{yz}=\{(y,z):-R\le y,z\le R\}$, 从而 $\iint_{S_3}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=2\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2}=$

$2\int_{-R}^{R}\frac{1}{R^2+z^2}dz\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy=2\times\frac{1}{2}\pi R^2\times\frac{\pi}{2R}=\frac{1}{2}\pi^2R$. 再看第二项, 显然 $\iint_{S_1+S_2}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0, \iint_{S_3}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0$(前者是因为对称性, 后者是因为 S_3 在 xoy 平面上的投影是一曲线). 因此 $I=\frac{1}{2}\pi^2R$. 请读者注意, 本题由于区域内存在瑕点 $(0,0,0)$, 不可直接使用高斯公式.

10. 记 S_1, S_2, S_3 分别为 S 的下表面、上表面和侧面, 积分项拆分为 $(\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3})\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$. 投影 $D_1=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$, 从而 $\iint_{S_1}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint_{D_1}\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 edr=-2\pi e$. 投影 $D_2=\{(x,y):x^2+y^2\leq 4\}$, 从而 $\iint_{S_2}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{D_2}\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^2dr=4\pi e^2$. 投影 $D_3=\{(x,y):1\leq x^2+y^2\leq 4\}$, 从而 $\iint_{S_3}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint_{D_3}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_1^2 e^rdr=-2\pi e(e-1)$. 因此 $I=-2\pi e+4\pi e^2-2\pi e(e-1)=2\pi e^2$.

5.3 补充 (不要求掌握!)

高斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流苏 $\overrightarrow{F}=(P,Q,R)$, 定义其散度为 $\mathrm{div}\overrightarrow{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\overrightarrow{F}$. $\mathrm{div}\overrightarrow{F}>0$ 表示点为 "源", 即能生流; $\mathrm{div}\overrightarrow{F}<0$ 表示点为 "汇", 即能 "吸流"; $\mathrm{div}\overrightarrow{F}=0$ 表示点非源非汇. 因此高斯公式的向量形式为 $\oiint_{\Sigma^+}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}dS=\iiint_\Omega \mathrm{div}\overrightarrow{F}dv$, 即: 流在某区域 Ω 上的总散度等于流通过 Ω 的边界的总流量.

斯托克斯公式的物理意义: 类似于之前 3.3 节的讨论, 对于流速 $\overrightarrow{F}=(P,Q,R)$, 定义其旋度为 $\mathrm{rot}\overrightarrow{F}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\overrightarrow{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\overrightarrow{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\overrightarrow{k}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\nabla\times\overrightarrow{F}$, 因此斯托克斯公式的向量形式为 $\iint_\Sigma \mathrm{rot}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}dS=\oint_L\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{s}$, 即: 流在闭路 L 上的循环量 (环流量), 就是旋度在以 L 为边界的光滑曲面上的流量 (旋流量).

6 第 6 次习题课: 初等积分法, 解的存在唯一性

6.1 问题

1.

6.2 解答

1.

6.3 补充 (不要求掌握!)

7 第 7 次习题课: 二阶线性微分方程

7.1 问题

7.2 解答

7.3 补充 (不要求掌握!)

8 第 8 次习题课: 常数变易法

8.1 问题

8.2 解答

8.3 补充 (不要求掌握!)

9 第 9 次习题课: 数项级数

9.1 问题

9.2 解答

9.3 补充 (不要求掌握!)

10 第 10 次习题课: 数项级数, 函数项级数

10.1 问题

10.2 解答

10.3 补充 (不要求掌握!)

11 第 11 次习题课: 幂级数, 泰勒级数

11.1 问题

11.2 解答

11.3 补充 (不要求掌握!)

12 第 12 次习题课: 广义积分, 含参积分

12.1 问题

12.2 解答

12.3 补充 (不要求掌握!)

13 第 13 次习题课: 含参广义积分, 傅里叶级数

13.1 问题

13.2 解答

13.3 补充 (不要求掌握!)