数学分析 II 习题课讲义

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2024 年 2 月 2 日

目录

1 第 1 次习题课: 定积分基本概念与可积性

1.1 问题

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x)\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx=0$.
2. $f(x)\in R[a,b],\int_a^b f(x)dx>0$. 证明 $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b],\text{s.t.}\forall x\in[\alpha,\beta],f(x)>0$.
3. $f(x)\in R[a,b]$, 问 $\lfloor f(x)\rfloor$ 是否一定 $\in R[a,b]$?
4. 设非负函数 $f(x)\in C[a,b]$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}$ 存在并求之.
5. $f(x)\geq 0,f''(x)\leq 0,x\in[a,b]$. 证明 $\max_{x\in[a,b]}f(x)\leq\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.
6. $n\in\mathbb{N}_+,f(x)\in C[a,b],\int_a^b x^kf(x)dx=0,k=0,1,\cdots,n$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个零点.
7. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}=1,\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.
9. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x),g(x)\in R[a,b],p,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\left(\int_a^b f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}}$.
10. $f(x)\in R[a,b],A=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x),B=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x),g(y)\in C[A,B]$, 证明 $G(x):=g(f(x))\in R[a,b]$.

1.2 解答

1. 显然 $f(x)$ 有界, 否则由聚点原理矛盾. 其次 $\forall\epsilon>0,\forall x\in[a,b],\exists\delta_x>0,\text{s.t.}\omega_{(x-\delta_x,x+\delta_x)}<\epsilon$. 由于 $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)\supset[a,b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\supset[a,b]$. 不妨设 $a\leq x_1<\cdots<x_n\leq b$. 可取分割点 $y_i\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap(x_{i+1}-\delta_{i+1},x_i+\delta_{i+1})$, 对于这个分割, $\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\epsilon(b-a)$, 因此有可积性. 由于 $|\int_a^b f(x)dx|\leq\int_a^b|f(x)|dx\leq\sum_{i=1}^n\int_{y_{i-1}}^{y_i}|f(x)|dx\leq\epsilon(b-a)$, ϵ 的任意性知 $\int_a^b f(x)dx=0$.
2. 反证法. 如果每个区间都存在值小于等于 0, 那么任意分割我都取区间内那个小于等于 0 的点, 达布和始终小于等于 0, 其极限, 即积分值不可能大于 0.
3. $f(x)=-\text{Riemann}(x)\in R[0,1],\lfloor f(x)\rfloor=-\text{Dirichlet}(x)\notin R[0,1]$.
4. 设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x),f(\xi)=M$. 由连续性, $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0\text{ s.t.}\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta),f(x)>M-\epsilon$. 因此当 n 足够大时成立 $M+2\epsilon>((b-a)M^n)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}\geq\left(\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}>(2\delta(M-\epsilon)^n)^{\frac{1}{n}}>M-2\epsilon\Rightarrow\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}\to M$.
5. 设 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. 由题意知 $f(x)$ 是凹函数, 因此成立 $f(x)\geq\begin{cases}\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}(x-a)+f(a), & x\in[a,\xi]\\ \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}(x-\xi)+f(\xi), & x\in[\xi,b]\end{cases}\Rightarrow\text{RHS}\geq$ $\frac{2}{b-a}\left(\int_a^\xi f(x)dx+\int_\xi^b f(x)dx\right)\geq\frac{2}{b-a}\left((\xi-a)\frac{f(\xi)+f(a)}{2}+(b-\xi)\frac{f(b)+f(\xi)}{2}\right)\geq\frac{2}{b-a}\frac{f(\xi)}{2}(\xi-a+b-\xi)=f(\xi)=\text{LHS}$.
6. $\int_a^b f(x)dx=0\Rightarrow\exists 1$ 零点, 记为 x_1. $\int_a^b(x-x_1)f(x)dx=0\Rightarrow\exists 2$ 零点, 记为 x_2. $\cdots\int_a^b\left[\prod_{i=1}^n(x-x_i)\right]f(x)dx=0\Rightarrow$ $\exists n+1$ 零点.
7.

$$\text{原式}=2^{\alpha-\beta}\frac{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\frac{2}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}\xrightarrow{\text{定积分定义}}2^{\alpha-\beta}\frac{\left(\int_0^2x^\alpha dx\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2x^\beta dx\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$$

8. $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,n^\alpha(1-\epsilon)<a_n<n^\alpha(1+\epsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\epsilon,\frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\epsilon,\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]\right|\leq\frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\leq\frac{\epsilon}{n^{1+\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha=\frac{\epsilon}{n}\sum\limits_{i=1}^n(\frac{i}{n})^\alpha\leq\epsilon\int_0^1x^\alpha dx+\epsilon=\frac{\epsilon}{\alpha+1}+\epsilon\leq 2\epsilon$. 这意味着 $\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i-\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha\right)\right|\leq 4\epsilon\Rightarrow$ 原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n i^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$.
9. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}=1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x)dx\leq 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha\ln a+(1-\alpha)\ln b\leq\ln(\alpha a+(1-\alpha)b)\Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha}\leq\alpha a+(1-\alpha)b$. 令 $\alpha=\frac{1}{p},1-\alpha=\frac{1}{q},a=x^p,b=y^q\Rightarrow xy\leq\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\Rightarrow\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\int_a^b\frac{f(x)^p}{p}+\frac{g(x)^q}{q}dx=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
也可以将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式证明.
10. 证法 a: $G(x)$ 的间断点集合是 $f(x)$ 间断点集合的子集, 因此其 Lebesgue 测度为 0, 从而可积.

证法 b: 由于 $g(y)$ 一致连续, 因此 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 使得 $\forall|y_1-y_2|<\delta,|g(y_1)-g(y_2)|<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 由于 $f(x)\in R[a,b]$, 因此 $\exists[a,b]$ 的分割 Δ, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\delta\epsilon}{4M}$, 其中 $M=\sup\limits_{y\in[A,B]}|g(y)|$. 若 $\omega_i(f)<\delta$, 则 $\omega_i(G)<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$. 若 $\omega_i(f)\geq\delta$, 其区间长度 $\sum\limits_{i:\omega_i(f)\geq\delta}\Delta x_i$ 不会超过 $\frac{\epsilon}{4M}$. 因此 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(G)\Delta x_i=\sum\limits_{i:\omega_i(f)<\delta}\omega_i(G)\Delta x_i+\sum\limits_{i:\omega_i(f)\geq\delta}\omega_i(G)\Delta x_i<\frac{\epsilon}{2}+2M\frac{\epsilon}{4M}=\epsilon$. 这样对于任意 $\epsilon>0$ 我们都找到了一个分割 Δ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(G)\Delta x_i<\epsilon$.

2 第 2 次习题课: 定积分的性质与计算

2.1 问题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 证明 $\forall a,b\in\mathbb{R},\lim\limits_{h\to0}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]dx=0$.

2. (Riemann-Lebesgue 引理). $f\in R[a,b],g\in R[0,T],g(x+T)=g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)g(nx)dx\to\int_a^b f(x)dx\cdot\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.

2.2 解答

1. WLOG $h<1$. 由可积函数性质, 存在 $[a,b+1]$ 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|dx<\epsilon$, 且 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x,y\in[a,b+1],|x-y|<\delta$, 成立$|g(x)-g(y)|\leq\frac{\epsilon}{b-a}$. 从而 $\left|\int_a^b[f(x+h)-f(x)]dx\right|\leq\int_a^b|f(x+h)-g(x+h)|dx+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|dx+\int_a^b|g(x)-f(x)|dx\leq\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|dx+\int_a^b\frac{\epsilon}{b-a}dx+\int_a^{b+1}|f(x)-g(x)|dx\leq3\epsilon$.

2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)dx=0$, 否则考虑 $h(x)=g(x)-\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx$.

由 Riemann 积分定义, $\forall\epsilon>0$, 存在阶梯函数 $s_\epsilon(x)=\begin{cases}C_1 & a=x_0\leq x<x_1\\ C_2 & x_1\leq x<x_2\\ \cdots & \\ C_m & x_{m-1}\leq x\leq b\end{cases}$ 使得 $\int_a^b|f(x)-s_\epsilon(x)|dx<\epsilon$. 设 $M=\sup_{x\in[0,T]}|g(x)|$. 则 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx|=|\int_a^b(f(x)-s_\epsilon(x))g(nx)dx+\int_a^b s_\epsilon(x)g(nx)dx|\leq\int_a^b|f(x)-s_\epsilon(x)|g(nx)dx+|\sum\limits_{i=1}^{m}C_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)dx<M\epsilon+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}C_i\int_{nx_{i-1}}^{nx_i}g(x)dx\leq M\epsilon+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}C_iMT$. 其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)dx=0$, 这意味着 $\int_c^d g(x)dx=\int_c^{c+T}g(x)dx+\int_{c+T}^{c+2T}g(x)dx+\cdots+\int_{c+kT}^d g(x)dx$ (设 $c+kT\leq d<c+(k+1)T$) $=\int_{c+kT}^d g(x)dx\leq MT$. 选择一个足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}C_iMT<\epsilon$. 从而 $|\int_a^b f(x)g(nx)dx|\leq(M+1)\epsilon$.

3 第 3 次习题课: 定积分中值定理与应用

3.1 问题

3.2 解答

4 第 4 次习题课: 广义积分

4.1 问题

4.2 解答

5 第 5 次习题课: 正项级数

5.1 问题

5.2 解答

6 第 6 次习题课: 任意项级数, 数项级数的性质

6.1 问题

6.2 解答

7 第 7 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (1)

7.1 问题

7.2 解答

8 第 8 次习题课: 函数项级数的一致收敛性 (2)

8.1 问题

8.2 解答

9 第 9 次习题课: 幂级数的基本性质

9.1 问题

9.2 解答

10 第 10 次习题课: 泰勒展开与多项式逼近

10.1 问题

10.2 解答

11 第 11 次习题课: 傅里叶级数的基本性质

11.1 问题

11.2 解答

12 第 12 次习题课: 傅里叶级数的收敛性