数学分析 II 习题课讲义 (2025 春)

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 3 月 6 日

目录

1　定积分的基本概念与可积性

1.1　问题

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n^\alpha}=1,\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 试证明 $f(x)\in R[a,b]$ 的充要条件是: $\forall\varepsilon>0$, $\exists[a,b]$ 上满足以下条件的连续函数 $g(x)$ 和 $h(x)$: (1) $g(x)\le f(x)\le h(x),\forall x\in[a,b]$; (2) $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon$.

3. 函数 $g(x)\in R[a,b],f(u)\in C[A,B]$, 这里 A,B 分别是 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的上下确界. 证明 $f(g(x))\in R[a,b]$.

4. 函数 $f(x)\in R[a,b]$, 证明存在点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

5. 函数 $f(x)\in R[a,b]$, 且 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(x)>0$. 证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

6. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积. 证明对于任意的 $[a,b]$, $\displaystyle\lim_{h\to0}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x=0$.

7. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x),g(x)\in R[a,b],p,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\left(\int_a^b f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}}$.

(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p\|g\|_q\ge\|fg\|_1$.)

[一个简单应用, 留作思考题] $0<q\le p\le s\le\infty$, 那么存在 $\theta\in[0,1]$ 使得 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{\theta}{q}+\dfrac{1-\theta}{s}$. 证明 $\|f\|_p\le\|f\|_q^\theta\|f\|_s^{1-\theta}$.

8. (Minkowski 不等式). 同上题条件, 证明 $\displaystyle\left(\int_a^b(f+g)^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$.

(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p+\|g\|_p\ge\|f+g\|_p$, 这表明 L_p 空间是赋范线性空间.)

■ 自由选讲.

9. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x)\in R[a,b]$ 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

10. 已知 $(0,1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 问是否有 $f(x)\in R[0,1]$?

11. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.

12. $n\in\mathbb{N}_+,f(x)\in C[a,b],\displaystyle\int_a^b x^kf(x)\mathrm{d}x=0,k=0,1,\cdots,n$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个零点.

1.2　解答

1. $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,n^\alpha(1-\varepsilon)<a_n<n^\alpha(1+\varepsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\varepsilon$, $\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\varepsilon$, $\displaystyle\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]\right|\le\frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\le\frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}\sum_{i=1}^n i^\alpha=\frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha\le\varepsilon\int_0^1x^\alpha\mathrm{d}x+\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\alpha+1}+\varepsilon\le2\varepsilon$. 这意味着 $\displaystyle\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}\left(\sum_{i=1}^n a_i-\sum_{i=1}^n i^\alpha\right)\right|\le4\varepsilon\Rightarrow$ 原极限 $\displaystyle=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum_{i=1}^n i^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$.

2. 必要性: $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists$ 分割 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\displaystyle\sum_{i=1}^n\omega_i(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\exists$ 阶梯函数 $s_1(x),s_2(x)$ 满足 $s_1(x)\le f(x)\le s_2(x)$ 且 $\displaystyle\int_a^b[s_2(x)-s_1(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\exists$ 连续函数 $g(x),h(x)$ 满足 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 且 $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]<\varepsilon$.

充分性: $g(x)$ 连续, $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}\Rightarrow\exists$ 分割 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{h(x)-g(x)\}(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\displaystyle\sum_{i=1}^n w_i^g(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}$. 在此分割下, $\displaystyle\sum_{i=1}^n w_i^f(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^n\left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}h(x)-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}g(x)\right](x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^n\left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{h(x)-g(x)\}+w_i^g\right](x_i-x_{i-1})\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

3. 用 Lebesgue 定理显然. 如不用 Lebesgue 定理, 则 $\forall\delta>0,\exists\tau>0$ s.t. $\forall|x-x'|<\tau,|f(x)-f(x')|<\delta$. 从而 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\sum\limits_{w_i^g>\tau}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$. 因为 $\{[x_{i-1},x_i]:w_i^{f\circ g}>\delta\}\subset\{[x_{i-1},x_i]:w_i^g>\tau\}$, 从而 $\sum\limits_{w_i^{f\circ g}>\delta}(x_i-x_{i-1})\le\sum\limits_{w_i^g>\tau}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$, 即 $f\circ g$ 可积.

4. 由 $f(x)\in R[a,b]$ 知存在 $[a_1,b_1]\subset(a,b)$, 使得 $w^f_{[a_1,b_1]}<1$. 同样的道理, 由 $f(x)\in R[a_1,b_1]$ 知存在 $[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1)$ 使得 $w^f_{[a_2,b_2]}<\dfrac{1}{2}$. 依此类推, 存在一系列闭区间套满足于 $w^f_{[a_n,b_n]}<\dfrac{1}{n}$, 只需取 $x_0\in\cap_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]$ 即可.

5. 由 4 题知存在连续点 $x_0\in(a,b)$, 因此 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$, $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\ge f(x_0)\delta>0$.

6. $\forall\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g(x)$ 满足 $\displaystyle\int_{a-1}^{b+1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x\right|&\le\left|\int_a^b[f(x+h)-g(x+h)]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b[g(x+h)-g(x)]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x\right|\\&\le 2\int_{a-1}^{b+1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由一致连续性知 $\exists H>0$ s.t. $\forall x,x'\in[a-1,b+1],|x-x'|<H,|g(x)-g(x')|<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 取 $h<H$ 知 RHS $<\varepsilon$. 这意味着原极限为 0.

7. WLOG $\displaystyle\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}=1$, 则原命题的结论可改写为 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha\ln a+(1-\alpha)\ln b\le\ln(\alpha a+(1-\alpha)b)\Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha}\le\alpha a+(1-\alpha)b$. 令 $\alpha=\dfrac{1}{p},1-\alpha=\dfrac{1}{q},a=x^p,b=y^q\Rightarrow xy\le\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\Rightarrow\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b\left(\frac{f(x)^p}{p}+\frac{g(x)^q}{q}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.)

8. 由 Hölder 不等式, $\displaystyle\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x=\int_a^b(f+g)^{p-1}f\mathrm{d}x+\int_a^b(f+g)^{p-1}g\mathrm{d}x\le\left(\int_a^b(f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b f^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b(f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b g^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\int_a^b f^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right)$. 消去 $\displaystyle\left(\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$ 得到原不等式.
(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Minkowski 不等式.)

9. 由聚点原理知有界性, 即 $|f(x)|\le M$. 其次 $\forall\varepsilon>0,\forall x\in[a,b],\exists\delta_x>0$, s.t. $\omega_{U_0(x,\delta_x)}<\varepsilon$. 开覆盖 $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)\supset[a,b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\supset[a,b]$. 不妨设 $a\le x_1<\cdots<x_n\le b$. 取分割点 $y_0=a,y_{3i+1}=x_i-\dfrac{\varepsilon}{4nM},y_{3i+2}=x_i+\dfrac{\varepsilon}{4nM},y_{3i+3}\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap(x_{i+1}-\delta_{i+1},x_i+\delta_{i+1}),y_{3n}=b,i=1,2,\cdots,n-1$. 对此分割, $\displaystyle\sum_{i=1}^{3n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon(b-a+1)$, 因此有可积性. 由于 $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\le\sum_{i=1}^{3n}\int_{y_{i-1}}^{y_i}|f(x)|\mathrm{d}x\le\varepsilon(b-a+1)$, 由 ε 的任意性知 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

10. 考虑 $f(x)=\tan\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=0$, 但是 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

11. 原式 $=2^{\alpha-\beta}\dfrac{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\frac{2}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}\xrightarrow{\text{定积分定义}}2^{\alpha-\beta}\dfrac{\left(\int_0^2 x^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta\mathrm{d}x\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\dfrac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$.

12. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 1 个零点, 记为 x_1. $\displaystyle\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 2 个零点, 记另一个为 x_2. 依此类推, $\displaystyle\int_a^b\left[\prod_{i=1}^n(x-x_i)\right]f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 $n+1$ 个零点.

2　定积分的性质与计算

2.1　问题

1. $f(x)\in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=f(0)$.

2. (Riemann-Lebesgue 引理). 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, $g(x+T)=g(x)$, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设函数 $f(x)\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: (1) $\displaystyle\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$; (2) 若 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$, 则 $\displaystyle\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_a^b[xf(x)]^2\mathrm{d}x\geq\frac{1}{4}$.

■ 自由选讲.

4. $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续. (1) 若 $f^2(t)\leq 1+2\displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$, 证明 $f(t)\leq 1+t$. (2) 若 $f(t)\leq K+\displaystyle\int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$, 其中 $K\geq 0$ 是常数, 证明 $f(1)\leq K\exp\left(\displaystyle\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right)$.

5. 试构造 $f(x)\in D[0,1]$ 但 $f'(x)\notin R[0,1]$ 的例子. 如果额外加上 $f'(x)$ 有界条件呢?

6. 试构造可积函数 f 和连续函数 g 使得 $f\circ g$ 不可积. 如果额外要求 g 是 C^∞ 函数呢?

7. 设函数 $f(x),g(x)\in R[a,b]$, 记 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 的一个分割, $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\}$. 任取 $\xi_i,\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$, 证明 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

8. $f(x)\in C[a,b]$, 且 $\exists\delta>0,M>0,\text{s.t.}\forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]$成立 $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|\leq M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x)\equiv 0$.

9. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明 $f(x)=xf(1)$.

10. 求积分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\mathrm{d}x$.

11. 求积分 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\mathrm{d}x$, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_n}{\ln n}$.

12. 求积分 $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

2.2　解答

1. 往证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=0$.

设 $\max\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|\leq M$. 由连续性知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in(-\delta,\delta)$, $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}&=\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\\&:=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

其中, $|I_1|\leq\dfrac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\varepsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq\varepsilon$,

$$|I_2|\leq 2M\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\varepsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M\frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M(1-\delta)\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n}=2M\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}\right)^n.$$

由于 $\dfrac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}<1$, 从而可取足够大的 n 使得 $|I_2|<\varepsilon$. 类似放缩 I_3. 此时 $|I_1+I_2+I_3|<3\varepsilon$.

2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x=0$, 否则考虑 $h(x)=g(x)-\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$.

$\forall\varepsilon>0$, 存在阶梯函数 $s_\varepsilon(x)=\begin{cases}C_1 & a=x_0\le x<x_1\\ C_2 & x_1\le x<x_2\\ \cdots & \\ C_m & x_{m-1}\le x\le x_m=b\end{cases}$ 使得 $\int_a^b|f(x)-s_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 设 $M=\sup\limits_{x\in[0,T]}|g(x)|$. 则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_a^b(f(x)-s_\varepsilon(x))g(nx)\mathrm{d}x+\int_a^b s_\varepsilon(x)g(nx)\mathrm{d}x\right|\\&\le\int_a^b|f(x)-s_\varepsilon(x)|g(nx)\mathrm{d}x+\left|\sum_{i=1}^m C_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)\mathrm{d}x\right|\\&\le M\varepsilon+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_i\int_{nx_{i-1}}^{nx_i}g(x)\mathrm{d}x\le M\varepsilon+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_iMT.\end{aligned}$$

其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x=0$, 这也意味着 $\int_c^d g(x)\mathrm{d}x=\int_c^{c+T}g(x)\mathrm{d}x+\int_{c+T}^{c+2T}g(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{c+kT}^d g(x)\mathrm{d}x$ (设 $c+kT\le d<c+(k+1)T$) $=\int_{c+kT}^d g(x)\mathrm{d}x\le MT$, 对于 $\forall c,d\in\mathbb{R}$.

选择一个足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_iMT<\varepsilon$. 从而 $\left|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right|\le(M+1)\varepsilon$. 由极限定义立得结论.

3. (1) 由分部积分,

$$\begin{aligned}&\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=xf^2(x)|_a^b-\int_a^b f(x)[xf(x)]'\mathrm{d}x=-\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\\ \Rightarrow&\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 由 Cauchy 不等式立得.

4. (1) 原条件等价于 $\frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}}\le 1\overset{\text{两边积分}}{\Rightarrow}\int_0^x\frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}}\mathrm{d}t\le\int_0^x 1\mathrm{d}t\overset{\text{原函数}}{\Rightarrow}\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\Big|_0^x\le x\Rightarrow$ $\sqrt{1+2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}\le 1+x\Rightarrow f(x)\le\sqrt{1+2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}\le 1+x$.

(2) 注意到

$$\begin{aligned}\left[\int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\right]'&=f(t)g(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)-g(t)\int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\\&\le Kg(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)=\left[K-K\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\right]',\end{aligned}$$

两边积分得到

$$\int_0^1 f(s)g(s)\mathrm{d}s\exp\left(-\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right)\le K-K\exp\left(-\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right)\Rightarrow f(1)\le K+K\int_0^1 f(s)g(s)\mathrm{d}s\le K\exp\left(\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right).$$

(这里偷摸用了比较定理. 请大家在积分时注意从相同起点开始积分, 这里补上常数 K 也是为了保证两边都在 $t=0$ 处取 0. 这个题有微分方程背景, 可以先看懂答案, 再试图理解.)

5. 可以验证 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}\in D[0,1]$, 但 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上无界. 若额外有 $f'(x)$ 有界, 可参考 Volterra's function.

6. 设 $\mathcal{C}$ 是 fat cantor set. 考虑 $f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$, $g(x)=1-\mathrm{dist}(x,\mathcal{C})$, 但 $f(g(x))=1_{x\in\mathcal{C}}$ 在正测集 $\mathcal{C}$ 上不连续. 若额外有 $g(x)\in C^\infty$, 可使用光滑版本的 Urysohn 引理.

7. $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(\eta_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i := S_1+S_2$. 显然 $\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} S_1 = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 记 $\max_{x\in[a,b]}|f(x)| = M_f$. 由 $g(x)$ 的可积性, 知 $|S_2| \le \sum_{i=1}^{n} M_f\omega_g([x_{i-1},x_i])\Delta x_i = M_f[\overline{S}_g(\Delta)-\underline{S}_g(\Delta)] \overset{\lambda(\Delta)\to 0}{\to} 0$.

8. 不妨设 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)>0$. 由连续性, $\exists\kappa>0$, s.t. $\forall x\in(x_0-\kappa,x_0+\kappa), f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\forall[\alpha,\beta]\subset(x_0-\kappa,x_0+\kappa)$, 成立 $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha) > M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$(最后一个大于号成立只需令 $\beta-\alpha<\left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

9. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha^2}{2}f(1)$. 由集合 $\{q\alpha : q\in\mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha)=qf(\alpha)$, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x = f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha)\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}f(1) \Rightarrow f(\alpha)=\alpha f(1)$.

10. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}(1-\cos x) \overset{\text{分部积分}}{=} (1-\cos x)\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\mathrm{d}(\ln\sin x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin x+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x = [\cos x-\ln(1+\cos x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2-1$.

11. 利用三角函数公式,

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2nx)}{2\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos[(2n-2)x]\cos 2x+\sin[(2n-2)x]\sin 2x}{2\sin x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos[(2n-2)x](1-2\sin^2 x)+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos[(2n-2)x]}{2\sin x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x\cos[(2n-2)x]+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x \\
&= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos[(2n-2)x]+\sin[(2n-2)x]\cos x\mathrm{d}x = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n-1)x\mathrm{d}x \\
&= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1}\cos[(2n-1)x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1}.
\end{aligned}
$$

由于 $I_1=1$, 因此 $I_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}$.

12. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2(-x)}{1+e^{x}}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

3 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 春数学分析 II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.