

# 数学分析 II 习题课讲义 (2025 春)

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2025 年 4 月 4 日

## 目录

<b>1</b>	<b>定积分的基本概念与可积性</b>	<b>2</b>
1.1	问题	2
1.2	解答	2
<b>2</b>	<b>定积分的性质与计算</b>	<b>4</b>
2.1	问题	4
2.2	解答	4
<b>3</b>	<b>定积分中值定理, 定积分的应用 (1)</b>	<b>6</b>
3.1	问题	6
3.2	解答	7
<b>4</b>	<b>定积分的应用 (2)</b>	<b>9</b>
4.1	问题	9
4.2	解答	9
<b>5</b>	<b>广义积分</b>	<b>11</b>
5.1	问题	11
5.2	解答	12
<b>6</b>	<b>数项级数</b>	<b>15</b>
6.1	问题	15
6.2	解答	16
<b>7</b>	<b>致谢</b>	<b>20</b>

# 1 定积分的基本概念与可积性

## 1.1 问题

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1, \alpha > 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ .
  - 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有界, 试证明  $f(x) \in R[a, b]$  的充要条件是:  $\forall \varepsilon > 0, \exists [a, b]$  上满足以下条件的连续函数  $g(x)$  和  $h(x)$ : (1)  $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b]$ ; (2)  $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon$ .
  - 函数  $g(x) \in R[a, b], f(x) \in C[A, B]$ , 这里  $A, B$  分别是  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  的上下确界. 证明  $f(g(x)) \in R[a, b]$ .
  - 函数  $f(x) \in R[a, b]$ , 证明存在点  $x_0 \in (a, b)$  使得  $f(x)$  在  $x_0$  处连续.
  - 函数  $f(x) \in R[a, b]$ , 且  $\forall x \in [a, b]$  有  $f(x) > 0$ . 证明  $\int_a^b f(x)dx > 0$ .
  - 函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义, 且在任何有限闭区间上可积. 证明对于任意的  $[a, b], \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx = 0$ .
  - (Hölder 不等式). 非负函数  $f(x), g(x) \in R[a, b], p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 证明  $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$ .  
(编者注: 本题实际上是  $\|f\|_p \|g\|_q \geq \|fg\|_1$ .)  
[一个简单应用, 留作思考题]  $0 < q \leq p \leq s \leq \infty$ , 那么存在  $\theta \in [0, 1]$  使得  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}$ . 证明  $\|f\|_p \leq \|f\|_q^\theta \|f\|_s^{1-\theta}$ .
  - (Minkowski 不等式). 同上题条件, 证明  $\left(\int_a^b (f+g)^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$ .  
(编者注: 本题实际上是  $\|f\|_p + \|g\|_p \geq \|f+g\|_p$ , 这表明  $L_p$  空间是赋范线性空间.)
- 自由选讲.
- $f(x)$  在  $[a, b]$  的每一点处的极限都是 0, 证明  $f(x) \in R[a, b]$  且  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .
  - 已知  $(0, 1)$  上的单调函数  $f(x)$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$  存在, 问是否有  $f(x) \in R[0, 1]$ ?
  - 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \cdots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}}$ .
  - $n \in \mathbb{N}_+, f(x) \in C[a, b], \int_a^b x^k f(x)dx = 0, k = 0, 1, \cdots, n$ . 证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至少有  $n+1$  个零点.

## 1.2 解答

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\varepsilon) < a_n < n^\alpha(1+\varepsilon)$ . 从而当  $n$  足够大时,  $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + N^\alpha) < \varepsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) < \varepsilon, \left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \cdots + (a_n - n^\alpha)]\right| \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha + \cdots + n^\alpha] \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha \leq \varepsilon \int_0^1 x^\alpha dx + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\alpha+1} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ . 这意味着  $\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i^\alpha\right)\right| \leq 4\varepsilon \Rightarrow$  原极限  $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$ .
- 必要性:  $f(x) \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$  分割  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  s.t.  $\sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$  阶梯函数  $s_1(x), s_2(x)$  满足  $s_1(x) \leq f(x) \leq s_2(x)$  且  $\int_a^b [s_2(x) - s_1(x)]dx < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$  连续函数  $g(x), h(x)$  满足  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  且  $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon$ .
- 充分性:  $g(x)$  连续,  $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \exists$  分割  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  s.t.  $\sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$  且  $\sum_{i=1}^n w_i^g(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ . 在此分割下,  $\sum_{i=1}^n w_i^f(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} + w_i^g \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

3. 用 Lebesgue 定理显然. 如不用 Lebesgue 定理, 则  $\forall \delta > 0, \exists \tau > 0$  s.t.  $\forall |x - x'| < \tau, |f(x) - f(x')| < \delta$ . 从而  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  分割  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  s.t.  $\sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$ . 因为  $\{[x_{i-1}, x_i] : w_i^{f \circ g} > \delta\} \subset \{[x_{i-1}, x_i] : w_i^g > \tau\}$ , 从而

而  $\sum_{w_i^{f \circ g} > \delta} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$ , 即  $f \circ g$  可积.

4. 由  $f(x) \in R[a, b]$  知存在  $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ , 使得  $w_{[a_1, b_1]}^f < 1$ . 同样的道理, 由  $f(x) \in R[a_1, b_1]$  知存在  $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$  使得  $w_{[a_2, b_2]}^f < \frac{1}{2}$ . 依此类推, 存在一系列闭区间套满足于  $w_{[a_n, b_n]}^f < \frac{1}{n}$ , 只需取  $x_0 \in \cap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$  即可.

5. 由 4 题知存在连续点  $x_0 \in (a, b)$ , 因此  $\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ . 从而  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx \geq f(x_0)\delta > 0$ .

6.  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在连续函数  $g(x)$  满足  $\int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$ . 因此

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b [f(x+h) - f(x)] dx \right| &\leq \left| \int_a^b [f(x+h) - g(x+h)] dx \right| + \left| \int_a^b [g(x+h) - g(x)] dx \right| + \left| \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq 2 \int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)| dx. \end{aligned}$$

由一致连续性知  $\exists H > 0$  s.t.  $\forall x, x' \in [a-1, b+1], |x - x'| < H, |g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ . 取  $h < H$  知 RHS  $< \varepsilon$ . 这意味着原极限为 0.

7. WLOG  $\left( \int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = 1$ , 则原命题的结论可改写为  $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq 1$ . 由  $\ln x$  的凹性, 我

们有  $\alpha \ln a + (1-\alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1-\alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$ . 令  $\alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b \left( \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} \right) dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.)

8. 由 Hölder 不等式,  $\int_a^b (f+g)^p dx = \int_a^b (f+g)^{p-1} f dx + \int_a^b (f+g)^{p-1} g dx \leq \left( \int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_a^b g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \left( \int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)$ . 消去  $\left( \int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}}$  得到原不等式.

(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Minkowski 不等式.)

9. 由聚点原理知有界性, 即  $|f(x)| \leq M$ . 其次  $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$ , s.t.  $\omega_{U_0(x, \delta_x)} < \varepsilon$ . 开覆盖  $\cup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x) \supset [a, b]$ , 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖  $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$ . 不妨设  $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$ . 取分割点  $y_0 = a, y_{3i+1} = x_i - \frac{\varepsilon}{4nM}, y_{3i+2} = x_i + \frac{\varepsilon}{4nM}, y_{3i+3} \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1}), y_{3n} = b, i = 1, 2, \dots, n-1$ .

对此分割,  $\sum_{i=1}^{3n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon(b-a+1)$ , 因此有可积性. 由于  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sum_{i=1}^{3n} \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)| dx \leq \varepsilon(b-a+1)$ ,

由  $\varepsilon$  的任意性知  $\int_a^b f(x) dx = 0$ .

10. 考虑  $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ , 但是  $\int_0^1 f(x) dx$  不存在.

11. 原式  $= 2^{\alpha-\beta} \frac{\left[ \frac{2}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha + \frac{2}{n} \left(\frac{3}{n}\right)^\alpha + \cdots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha \right]^{\beta+1}}{\left[ \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^\beta + \frac{2}{n} \left(\frac{4}{n}\right)^\beta + \cdots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n}{n}\right)^\beta \right]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{定积分定义}} 2^{\alpha-\beta} \frac{\left( \int_0^2 x^\alpha dx \right)^{\beta+1}}{\left( \int_0^2 x^\beta dx \right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$ .

12.  $\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow$  存在至少 1 个零点, 记为  $x_1$ .  $\int_a^b (x-x_1)f(x) dx = 0 \Rightarrow$  存在至少 2 个零点, 记另一个为  $x_2$ . 依此类推,  $\int_a^b \left[ \prod_{i=1}^n (x-x_i) \right] f(x) dx = 0 \Rightarrow$  存在至少  $n+1$  个零点.

## 2 定积分的性质与计算

### 2.1 问题

1.  $f(x) \in C[-1, 1]$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$ .

2. (Riemann-Lebesgue 引理). 设函数  $f(x), g(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义且内闭可积,  $g(x+T) = g(x)$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)g(nx)dx = \int_a^b f(x)dx \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx.$$

3. 设函数  $f(x) \in C^1[a, b]$  且  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明: (1)  $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)dx$ ; (2) 若  $\int_a^b f^2(x)dx = 1$ , 则  $\int_a^b [f'(x)]^2 dx \int_a^b [xf(x)]^2 dx \geq \frac{1}{4}$ .

■ 自由选讲.

4.  $f(x), g(x)$  在  $[0, 1]$  上非负连续. (1) 若  $f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(s)ds$ , 证明  $f(t) \leq 1 + t$ . (2) 若  $f(t) \leq K + \int_0^t f(s)g(s)ds$ , 其中  $K \geq 0$  是常数, 证明  $f(1) \leq K \exp\left(\int_0^1 g(s)ds\right)$ .

5. 试构造  $f(x) \in D[0, 1]$  但  $f'(x) \notin R[0, 1]$  的例子. 如果额外加上  $f'(x)$  有界条件呢?

6. 试构造可积函数  $f$  和连续函数  $g$  使得  $f \circ g$  不可积. 如果额外要求  $g$  是  $C^\infty$  函数呢?

7. 设函数  $f(x), g(x) \in R[a, b]$ , 记  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  为  $[a, b]$  的一个分割,  $\lambda(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\}$ .

任取  $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 证明  $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx$ .

8.  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $\exists \delta > 0, M > 0$ , s.t.  $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$  成立  $\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| \leq M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$ . 证明  $f(x) \equiv 0$ .

9.  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义且内闭可积, 且  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . 证明  $f(x) = xf(1)$ .

10. 求积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x dx$ .

11. 求积分  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx$ , 并求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n}$ .

12. 求积分  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx$ .

### 2.2 解答

1. 往证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = 0$ .

设  $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \leq M$ . 由连续性知  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , s.t.  $\forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ .

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} &= \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{\delta}^1 (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

其中,  $|I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n \varepsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \varepsilon$ ,

$$|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n \varepsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} \left( \frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} \right)^n.$$

由于  $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$ , 从而可取足够大的  $n$  使得  $|I_2| < \varepsilon$ . 类似放缩  $I_3$ . 此时  $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\varepsilon$ .

2. WLOG 设  $\int_0^T g(x)dx = 0$ , 否则考虑  $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$ .

$\forall \varepsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $s_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq x_m = b \end{cases}$  使得  $\int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$ . 设  $M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$ . 则

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - s_\varepsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\varepsilon(x)g(nx)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|g(nx)dx + \left| \sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx \right| \\ &\leq M\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \leq M\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT. \end{aligned}$$

其中最后一个等式利用了  $\int_0^T g(x)dx = 0$ , 这也意味着  $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \dots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$  (设  $c + kT \leq d < c + (k+1)T$ )  $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \leq MT$ , 对于  $\forall c, d \in \mathbb{R}$ .

选择一个足够大的  $n$ , 使得  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \varepsilon$ . 从而  $\left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| \leq (M+1)\varepsilon$ . 由极限定义立得结论.

3. (1) 由分部积分,

$$\begin{aligned} \int_a^b x f(x) f'(x) dx &= x f^2(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) [x f(x)]' dx = - \int_a^b f^2(x) dx - \int_a^b x f(x) f'(x) dx \\ \Rightarrow \int_a^b x f(x) f'(x) dx &= -\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx. \end{aligned}$$

(2) 由 Cauchy 不等式立得.

$$\begin{aligned} 4. (1) \text{ 原条件等价于 } \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds}} &\leq 1 \xrightarrow{\text{两边积分}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds}} dt \leq \int_0^x 1 dt \xrightarrow{\text{原函数}} \sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds} \Big|_0^x \leq x \Rightarrow \\ \sqrt{1+2\int_0^x f(s)ds} &\leq 1+x \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{1+2\int_0^x f(s)ds} \leq 1+x. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^t f(s)g(s)ds \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) \right]' &= f(t)g(t) \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) - g(t) \int_0^t f(s)g(s)ds \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) \\ &\leq K g(t) \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) = \left[ K - K \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) \right]', \end{aligned}$$

两边积分得到

$$\int_0^1 f(s)g(s)ds \exp\left(-\int_0^1 g(s)ds\right) \leq K - K \exp\left(-\int_0^1 g(s)ds\right) \Rightarrow f(1) \leq K + K \int_0^1 f(s)g(s)ds \leq K \exp\left(\int_0^1 g(s)ds\right).$$

(请大家在积分时注意从相同起点开始积分, 这里补上常数  $K$  也是为了保证两边在  $t=0$  处都取 0. 这个题有微分方程背景, 可以先看懂答案, 再试图理解.)

5. 可以验证  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \in D[0, 1]$ , 但  $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $[0, 1]$  上无界. 若额外

有  $f'(x)$  有界, 可参考 Volterra's function.

6. 设  $\mathcal{C}$  是 fat cantor set. 考虑  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ ,  $g(x) = 1 - \text{dist}(x, \mathcal{C})$ , 但  $f(g(x)) = 1_{x \in \mathcal{C}}$  在正测集  $\mathcal{C}$  上不连续. 若

额外有  $g(x) \in C^\infty$ , 可使用光滑版本的 Urysohn 引理.

7.  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(\eta_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i := S_1 + S_2$ . 显然  $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} S_1 = \int_a^b f(x)g(x)dx$ . 记

$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| = M_f$ . 由  $g(x)$  的可积性, 知  $|S_2| \leq \sum_{i=1}^n M_f \omega_g([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i = M_f [\overline{S}_g(\Delta) - \underline{S}_g(\Delta)] \xrightarrow{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} 0$ .

8. 不妨设  $\exists x_0$  s.t.  $f(x_0) > 0$ . 由连续性,  $\exists \kappa > 0$ , s.t.  $\forall x \in (x_0 - \kappa, x_0 + \kappa), f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ . 从而  $\forall [\alpha, \beta] \subset (x_0 - \kappa, x_0 + \kappa)$ , 成立  $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$  (最后一个大于号成立只需令  $\beta - \alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ ), 矛盾.

9. 只需证明对无理数点成立. 考察  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . 由有理数点的稠密性,  $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \frac{\alpha^2}{2}f(1)$ . 由集合  $\{q\alpha : q \in \mathbb{Q}\}$  的稠密性且  $f(q\alpha) = qf(\alpha)$ ,  $\int_0^{\alpha} f(x)dx = f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$ . 因此  $f(\alpha)\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$ .

10.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d(1 - \cos x) \stackrel{\text{分部积分}}{=} (1 - \cos x) \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) d(\ln \sin x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\sin x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) dx = [\cos x - \ln(1 + \cos x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - 1$ .

11. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x] \cos 2x + \sin[(2n-2)x] \sin 2x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x](1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x]}{2 \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x \cos[(2n-2)x] + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x] \cos x dx = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

由于  $I_1 = 1$ , 因此  $I_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1}$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}$ .

12.  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1 + e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ .

### 3 定积分中值定理, 定积分的应用 (1)

#### 3.1 问题

1. 证明对于  $\forall x > 0$ , 存在唯一的  $\xi_x > 0$  使得  $\int_0^x e^{t^2} dt = xe^{\xi_x^2}$  成立, 并求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\xi_x}{x}$ .

2. 证明  $\left| \int_a^b \sin x^2 dx \right| \leq \frac{1}{a}$ , 其中  $0 < a < b$ .

3. 函数  $f(x) \in D[0, 1]$ , 且  $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x} f(x) dx$ . 证明存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f(\xi) = f'(\xi)$ .

4. 求由下列曲线所围成的平面图形的面积: (1)  $y^2 = x^2(1 - x^2)$ ; (2)  $y^2 = x, x^2 + y^2 = 1$  (在第一、四象限的部分).

■ 自由选讲.

5.  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是凸函数. 证明  $f(x) \in R[0, x], \forall x \in (0, +\infty)$ , 且  $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$  也是  $(0, +\infty)$  上的凸函数.

6.  $f(x) \in C(\mathbb{R})$ , 定义  $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$ . 证明若  $g(x)$  单调递减, 则  $f(x) \equiv 0$ .

7.  $f(x) \in R[0, 1], 0 < m \leq f(x) \leq M$ , 求证  $\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$ . (编者注: 本题比较 tricky.)

8.  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义且内闭可积,  $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ , 求  $f(x)$ .

9. 求积分  $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ .

10. 求积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^{2025} x} dx$ .

11. 求积分  $I = \int_0^1 [\sqrt[7]{1-x^3} - \sqrt[3]{1-x^7}] dx$ .

12.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增, 证明  $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$ . (能试着用定积分第二中值定理吗?)

13.  $f(x) \in C[a, b]$ , 且对任意  $g(x) \in C^\infty[a, b]$  满足  $g(a) = g(b) = 0$  都有  $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$ . 证明  $f(x) \equiv 0$ .

14. (Dirichlet 判别法). 设  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上单调,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  $\forall A \geq a$ ,  $g(x) \in R[a, A]$  且  $\left| \int_a^A g(x) dx \right| \leq M$  恒

成立. 证明极限  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) g(x) dx$  存在.

15. 试求由抛物线  $y^2 = 2x$  与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

## 3.2 解答

1. 第一问由定积分第一中值定理和函数  $e^{t^2}$  的单调性显然. 其次

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\xi_x}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\ln \int_0^x e^{t^2} dt - \ln x}}{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \int_0^x e^{t^2} dt - \ln x}{x^2}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2} dt} - \frac{1}{x}}{2x}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x e^{x^2} - \int_0^x e^{t^2} dt}{2x^2 \int_0^x e^{t^2} dt}}{2x^2 e^{x^2} + 4x \int_0^x e^{t^2} dt}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 e^{x^2}}{2x^2 e^{x^2} + 4x \int_0^x e^{t^2} dt}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{x^2}}{x e^{x^2} + 2 \int_0^x e^{t^2} dt}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 + 1)e^{x^2}}{(2x^2 + 3)e^{x^2}}} = 1. \end{aligned}$$

2.  $\left| \int_a^b \sin x^2 dx \right| \stackrel{t=x^2}{=} \left| \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \right|$ . 由于  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  非负单调递减, 因此由定积分第二中值定理, 原积分  $= \frac{1}{2a} \left| \int_{a^2}^{\xi} \sin t dt \right| \leq \frac{1}{a}$ .

3. 由定积分第一中值定理,  $\exists \xi \in [0, \frac{1}{2}]$ , s.t.  $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x} f(x) dx = e^{1-\xi} f(\xi)$ , 这也意味着对于函数  $g(x) = e^{-x} f(x)$  成立  $g(1) = g(\xi)$ . 由 Rolle 微分中值定理知存在  $g'(\zeta) = 0 \Rightarrow f'(\zeta) = f(\zeta)$ .

4. (1)  $S = 4 \int_0^1 \sqrt{x^2(1-x^2)} dx \stackrel{x=\sin \theta}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = -\frac{4 \cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$ .

(2) 先解出交点, 然后用原函数直接计算  $S = 2 \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{x} dx + 2 \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

5. 凸函数开区间上连续  $\Rightarrow$  闭区间上可积. 由  $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f\left(\frac{t}{x} \cdot x\right) d\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux) du \Rightarrow F\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = \int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i (ux_i)\right) du \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n t_i f(ux_i) du = \sum_{i=1}^n t_i F(x_i)$  知  $F(x)$  凸.

6. 构造  $G(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2$ ,  $G'(x) = g(x)$  单调递减,  $g(0) = 0$ . 因此  $G(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 在  $(-\infty, 0)$  上单调递增. 又因为  $G(0) = 0$ ,  $G(x) \geq 0$  恒成立  $\Rightarrow G(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ .

7. 显然有  $(M - f(x)) \left( \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m} \right) \leq 0$ , 因此  $\int_0^1 (M - f(x)) \left( \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m} \right) dx \leq 0 \Leftrightarrow M \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{m} \int_0^1 f(x) dx \leq 1 + \frac{M}{m}$ . 利用均值不等式,  $\text{LHS} \geq 2 \sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$ .

8. 等式左右两边对  $x$  积分, 得到  $\int_y^{x+y} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + x f(y) + \frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y^2}{2}$ . 类似有  $\int_x^{x+y} f(t) dt = \int_0^y f(t) dt + y f(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2}$ . 两式相减得  $x f(y) + \frac{x^3 y}{3} = y f(x) + \frac{xy^3}{3}$ , 即是  $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$ . 从而  $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^3}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$ . 经验证符合题意.

9. 作代换  $x = \tan t$  得  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt$ . 再作代换  $t = \frac{\pi}{4} - t$  得  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .
10. 记  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot^{2025} x} dx$ . 作换元  $t = \frac{\pi}{2} - x$  知  $I = J$ . 而  $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$ , 因此  $I = J = \frac{\pi}{4}$ .
11.  $\int_0^1 \sqrt[7]{1-x^3} dx \stackrel{y=\sqrt[7]{1-x^3}}{=} \int_0^1 y dx \stackrel{\text{几何意义}}{=} \int_0^1 x dy = \int_0^1 \sqrt[3]{1-y^7} dy \Rightarrow I = \int_0^1 \sqrt[3]{1-y^7} dy - \int_0^1 \sqrt[3]{1-x^7} dx = 0$ .
12.  $f(x)$  单调, 并考虑  $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$ . 由定积分第二中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx &= f(a) \int_a^\xi \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + f(b) \int_\xi^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= f(a) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + (f(b) - f(a)) \int_\xi^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = (f(b) - f(a)) \frac{1}{2} (b - \xi)(\xi - a) \geq 0. \end{aligned}$$

13. 用反证法. WLOG 设  $f(x_0) > 0$ , 由连续性知  $\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ . 从而定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \\ 0, & x \in [a, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, b], \\ C^\infty \text{连接}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

此时  $\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}} \frac{f^2(x_0)}{4} dx > 0$ , 矛盾.

14.  $\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$ , s.t.  $\forall x \geq X, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$ . 从而  $\forall A', A'' \geq X, \left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| \stackrel{\text{定积分第二中值定理}}{\leq} \left| f(A') \int_{A'}^\xi g(x)dx + f(A'') \int_\xi^{A''} g(x)dx \right| \leq 2M(|f(A')| + |f(A'')|) \leq \varepsilon$ . 然后由柯西收敛定理知极限存在.

15. 设弦方程为  $x - \frac{1}{2} = ky$ , 与抛物线交点纵坐标为  $y_1, y_2$ , 则围成区域的面积  $S = \int_{y_1}^{y_2} \left(ky + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_1y_2 + y_1^2)$ . 联立直线与抛物线, 由韦达定理知  $y_1 + y_2 = 2k, y_1y_2 = -1$ . 则  $S = \frac{2}{3}(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ . 因此  $k = 0$  时面积最小, 为  $\frac{2}{3}$ .

### 补充 (不要求掌握)

等周问题: 长为  $L$  的曲线何时围成区域面积最大? 答案: 圆 (一年级小学生皆可猜出).

证明: 设  $D$  为凸区域 ( $D$  中任意两点连线都在  $D$  内). 设  $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0, L]$ , 此处选

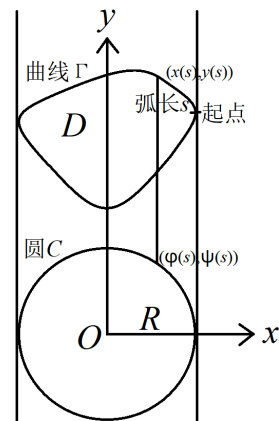
择  $\Gamma$  的弧长为参数, 则  $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ , 且  $D$  的面积为  $A = \int_0^L x dy = \int_0^L x(s)y'(s)ds$ . 设

$C: \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$  是以  $O$  为中心,  $R$  为半径的圆, 此处选择  $\Gamma$  的弧长为参数, 则  $C$  的面

积为  $\pi R^2 = - \int_0^L y dx = - \int_0^L \psi(s)x'(s)ds$ . 从而  $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))ds \leq$

$\int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2} ds \leq \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)} ds = RL$ . 因此成立  $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq A + \pi R^2 \leq$

$RL \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{4\pi}$ . 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是  $(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)$ . 用右边减去左边得到  $(x(s)x'(s) + \psi(s)y'(s))^2 = 0$ . 由于  $x(s)^2 + \psi(s)^2 = R^2$ , 两边求导得  $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = y'(s), \psi(s) = y(s) + y_0$ , 即  $\Gamma$  方程为  $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ , 圆也!





## 4 定积分的应用 (2)

## 4.1 问题

■ 自由选讲.

- 半径为  $R$  的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?
- 求质量分布均匀的对数螺旋线  $r = e^\theta$  在  $(r, \theta) = (1, 0)$  和  $(r, \theta) = (e^\phi, \phi)$  之间一段的重心坐标.
- 求双扭线  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  绕轴  $\theta = \frac{\pi}{4}$  旋转一周所得的曲面的面积.
- 证明极坐标下曲线  $r = r(\theta)$  与  $\theta = \alpha, \theta = \beta$  所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为  $V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin \theta d\theta$ .
- 求圆的渐伸线  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$  上  $A(a, 0), B(a, -2\pi a)$  之间部分与直线  $\overline{AB}$  围成图形的面积.
- 推导重力场中粒子数量密度的分布率  $n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$ , 其中  $T$  是温度,  $k_B$  是玻尔兹曼常量.
- 计算极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t |\sin t| dt}{x^2}$ .
- 已知  $b > e^2$ , 证明  $\int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x} < \frac{2b}{\ln b}$ . BTW, 你能不能找到最优常数  $C \geq 0$ , 使得  $\int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x} + C \leq \frac{2b}{\ln b}$  恒成立.
- 证明  $\pi$  是无理数. 可以按照以下步骤: (1) 设  $\pi = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$ , 定义  $f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$ , 证明  $\forall i \in \mathbb{N}_+, f^{(i)}(0), f^{(i)}(\pi)$  都是整数. (2) 证明定积分  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$  也是整数. (3) 证明  $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 1$ , 得到矛盾.
- $f(x) \in C^2[0, 1], f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$ , 证明  $\int_0^1 [f''(x)]^2 dx \geq 4$ , 取等号当且仅当  $f(x) = x^3 - x^2$ .
- $f(x) \in C^1[0, 1], f(x) \in [0, 1], f(0) = f(1) = 0, f'(x)$  单调递减. 证明曲线  $y = f(x)$  在  $[0, 1]$  上的弧长不大于 3.
- $f(x) \in C^2[a, b]$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $\int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$ .
- $f(x) \in D[0, 1], f'(x) \in R[0, 1], |f'(x)| \leq M$ . 定义  $A_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ . (1) 证明  $|A_n| \leq \frac{M}{2n}$ . (你可以推广到高阶和高维吗? 答案是  $O(n^{-\frac{k}{d}})$ .) (2) 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n$ .
- (Jensen 不等式). 凸函数  $\varphi(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x): [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  可积且  $\int_a^b p(x) dx > 0$ . 证明对于任意  $f(x) \in R[a, b]$ , 
$$\varphi\left(\frac{\int_a^b f(x)p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}\right) \leq \frac{\int_a^b \varphi(f(x))p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}.$$

## 4.2 解答

- 球心向上移动距离  $h$  时, 球位于水外的体积为  $V(h) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_0^h \pi (\sqrt{R^2 - z^2})^2 dz = \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi \left( R^2 h - \frac{1}{3} h^3 \right)$ . 对应位移  $[h, h + dh]$  所做的微功  $dW = gV(h)\rho dh$ . 从而  $W = g \int_0^R V(h) dh = g \left( \frac{2}{3} \pi R^4 + \frac{5}{12} \pi R^4 \right) = \frac{13}{12} g \pi R^4$ .
- $\bar{x} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \cos \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(\sin \phi + 2 \cos \phi) - 2}{5(e^\phi - 1)}, \bar{y} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(2 \sin \phi - \cos \phi) + 1}{5(e^\phi - 1)}.$
- 原命题等价于  $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$  绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系  $\begin{cases} x = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \cos \theta \\ y = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \sin \theta \end{cases}$ , 则面积  $S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta) \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = 8\pi a^2$ .
- 对应  $[\theta, \theta + d\theta]$  的扇形面积  $dS = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$ , 其质心位于  $\frac{2}{3} r(\theta)$  处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为  $dV = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta 2\pi \frac{2}{3} r(\theta) \sin \theta = \frac{2\pi}{3} r^3(\theta) \sin \theta d\theta$ . 两边积分得到结果.
- 直线  $AB$  的参数方程是  $\begin{cases} x = \phi(t) = a \\ y = \psi(t) = t \end{cases}, t \in [-2\pi a, 0]$ . 故  $S = - \int_0^{2\pi} y(t) dx(t) - \int_{-2\pi a}^0 \psi(t) d\phi(t) = - \int_0^{2\pi} a(\sin t -$

$$t \cos t) a(t \cos t) dt + 0 = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 + \pi a^2.$$

6. 由二力平衡, 压力差  $dF$  托起了单位体积内的粒子重力  $dG$ . 从而  $dF + dG = 0 \Rightarrow Sdp + \rho g Sdz = 0 \Rightarrow dp + nmgdz = 0$ .

0. 由  $p = nk_B T$  知  $dp = k_B T dn \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_B T} dz$ . 两边积分知  $\log n(z) - \log n(0) = \frac{-mgz}{k_B T} \Rightarrow n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$ .

$$7. \text{原式} \stackrel{t=xt}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 xt |\sin(xt)| d(xt)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 t |\sin(xt)| dt \stackrel{\text{R-L Lemma}}{=} \int_0^1 t dt \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{1}{\pi}.$$

8. 考虑  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ , 从而  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0 \Rightarrow f(x)$  单调递增. 因此由定积分第二中值定理,  $\exists \xi \in [e^2, b]$  使得

$$\int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x} = \int_{e^2}^b \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{b}}{\ln b} \int_{\xi}^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{b}}{\ln b} (\sqrt{b} - \sqrt{\xi}) < \frac{2b}{\ln b}.$$

上述做法纯扯淡. 其实我们可以构造  $g(b) = \frac{2b}{\ln b} - \int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x}$ ,  $g'(b) = \frac{2 \ln b - 2}{(\ln b)^2} - \frac{1}{\ln b} = \frac{\ln b - 2}{(\ln b)^2} > 0 \Rightarrow g(b) > g(e^2) = e^2$ .

9. (1)  $f(x)$  是一个次数从  $n$  到  $2n$  的多项式. 至于  $f^{(i)}(0)$  是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时  $i \geq n$ , 求导后得到的非零常数值是  $i!c$ , 且  $c$  是整数除以  $n!$  得到的有理数, 从而  $i!c$  是整数. 由于  $f(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f^{(i)}(\pi) = (-1)^n f^{(i)}(0)$ , 因此  $f^{(i)}(\pi)$  也是整数.

(2) 由分部积分,  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(x)(-\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx = f(0) + f(\pi) + f'(x) \sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx$ .  $f(x)$  是  $2n$  此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - f''(0) - f''(\pi) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(0) + (-1)^n f^{(2n)}(\pi)$ , 因此是整数.

(3) 在区间  $[0, \pi]$  上成立  $0 \leq a - bx = b(\pi - x) \leq a$ , 因此  $0 \leq f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$ , 从而  $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \int_0^\pi f(x) dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$ . 当  $n$  足够大时,  $\frac{\pi^{n+1} a^n}{n!} < 1$ .

10. 令  $p(x) = x^3 - x^2$ , 从而有  $\int_0^1 [(f''(x))^2 - (p''(x))^2] dx = \int_0^1 [f''(x) - p''(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 f''(x)p''(x) dx - 2 \int_0^1 [p''(x)]^2 dx \geq 0 + 2f'(x)p''(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 f'(x)p'''(x) dx - 8 = 2f'(1)p''(1) - 2f(x)p'''(x)|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x)p''''(x) dx - 8 = 0$ .

11. 设  $x_0 = \arg \max_{x \in [0, 1]} f(x) \Rightarrow f'(x_0) = 0$ . 从而成立弧长估计

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \leq \int_0^1 (1 + |f'(x)|) dx = 1 + \int_0^{x_0} f'(x) dx - \int_{x_0}^1 f'(x) dx = 1 + 2f(x_0) \leq 3.$$

12. 由分部积分和定积分第一中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) d(x-a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x) d \frac{(x-a)^2}{2} \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} f''(x) dx \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} dx. \end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2} dx.$$

两式相加得  $\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) + (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)) \frac{(b-a)^3}{48} \stackrel{\text{Darboux}}{=} f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) + f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{24}$ .

13. (1) 直接计算即可:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left( \frac{k}{n} - x \right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2} + \frac{1}{2n}(f(0) - f(1)) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2n} \right) + \frac{1}{2n}(f(0) - f(1)). \end{aligned}$$

利用分部积分,

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)d\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) = f(x)\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx := \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2n} - B_n^k,$$

其中

$$\begin{aligned} B_n^k &= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx \\ &= f'(\xi_{k,1}) \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) dx + f'(\xi_{k,2}) \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) dx = -\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2} + \frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}. \end{aligned}$$

综上所述, 我们有

$$\begin{aligned} nA_n &= \sum_{k=1}^n \frac{f'(\xi_{k,2}) - f'(\xi_{k,1})}{8n} + \frac{f(0) - f(1)}{2} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n &= \frac{1}{8} \left( \int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f'(x)dx \right) + \frac{f(0) - f(1)}{2} = \frac{f(0) - f(1)}{2}. \end{aligned}$$

14. WLOG  $\int_a^b p(x)dx = 1$ , 并设  $\int_a^b f(x)p(x)dx = c$ , 任取  $k \in [\varphi'_-(c), \varphi'_+(c)]$ , 构造“切”直线  $l: y = k(x-c) + \varphi(c)$ . 由凸函数性质知  $\varphi(x) \geq l(x)$  恒成立. 从而  $\varphi(c) = l(c) = k \left( \int_a^b f(x)p(x)dx - c \right) + \varphi(c) = \int_a^b [k(f(x)-c) + \varphi(c)]p(x)dx = \int_a^b l(f(x))p(x)dx \leq \int_a^b \varphi(f(x))p(x)dx$ .

## 5 广义积分

### 5.1 问题

- 讨论广义积分  $\int_1^{+\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^\alpha dx, \alpha > 0$  的收敛性.
- 讨论广义积分  $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$  的收敛性与绝对收敛性.
- 讨论广义积分  $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} dx$  的收敛性.
- 讨论广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$  的收敛性.
- 函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调, 无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛. 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ .
- 函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调,  $g(x) \not\equiv 0$  是  $\mathbb{R}$  上以  $T > 0$  为周期的连续函数. 证明无穷积分  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  收敛的充要条件是无穷积分  $\int_0^{+\infty} f(x)|g(x)|dx$  收敛.
- $f(x), g(x)$  是  $[0, +\infty)$  上单调递减的连续正函数, 并且  $\int_0^{+\infty} f(x)dx, \int_0^{+\infty} g(x)dx$  发散. 记  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ , 讨论  $\int_0^{+\infty} h(x)dx$  的收敛性.

■ 自由选讲.

8. 讨论广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^p} dx, p \geq 0, a \in \mathbb{R}$  的收敛性.
9. 讨论广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q |\sin x|^r} dx, p, q, r > 0$  的收敛性.
10. 讨论广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$  的收敛性.
11. 讨论广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$  的收敛性和绝对收敛性.
12. 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = 0$ .
13. 求积分  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ .
14. 求积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ .
15. (Dirichlet 积分). 求积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ . 你可以利用恒等式  $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$ .
16. (Euler 积分). 求积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ .
17. (Euler-Poisson 积分). 利用数列  $\left\{ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right\}$  的极限, 求积分  $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ . (你可以使用如下命题: 当  $a \geq 1$  时,  $0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^a \leq \frac{x^2}{a} e^{-x}$  在区间  $[0, a]$  上恒成立. 这由导数知识容易验证.)
18.  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上内闭可积,  $f(+\infty) = A, f(-\infty) = B$ . 证明  $\forall a \in \mathbb{R}$ , 积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a) - f(x)] dx$  收敛, 并求其值.
19.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 证明  $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$  收敛.
20. 广义积分  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $\forall k = 1, 2, \dots, n, u_k(x)$  均单调有界. 证明  $\int_0^{+\infty} f(x) \prod_{k=1}^n u_k(x) dx$  收敛.
21.  $a, b > 0$ , 广义积分  $\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$  收敛, 证明  $\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt$ .
22. 利用余元公式  $\text{Beta}(p, 1-p) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{-p} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} (0 < p < 1)$  计算积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ .
23. 计算极限  $\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{t}(e^x - x - 1)} dx$ . 你可能需要用到第 17 题的结论.
- 24.

## 5.2 解答

1. 由于当  $x \rightarrow +\infty$  时  $x \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^\alpha \sim x \left(\frac{1}{2x^2}\right)^\alpha \sim x^{1-2\alpha}$ , 因此  $\alpha > 1$  时收敛,  $0 < \alpha \leq 1$  时发散.
2. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开,  $\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos(\xi(x))}{6} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$ , 其中  $\xi(x) \in \left[0, \frac{\sin x}{x}\right] \cup \left[\frac{\sin x}{x}, 0\right]$ . 由于  $\left|\frac{\cos(\xi(x))}{6} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\right| \leq \frac{1}{6x^3}$  绝对收敛, 而  $\frac{\sin x}{x}$  条件收敛, 因此原积分条件收敛.
3. 做变元替换  $t = \frac{1}{x}$  知原积分为  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t^{\frac{1}{2}} \ln(1+t)}$ . 由于变上限积分  $\int_1^T \sin t dt$  有界,  $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}} \ln(1+t)}$  单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法知收敛.
4. 记  $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx, I_2 = \int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx \stackrel{x=\frac{1}{x}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^{2-p}} dx$ . 先讨论  $I_1$ , 有  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx \stackrel{t=x+\frac{1}{x}}{=} \int_2^{+\infty} \frac{2^{p-1} \sin t}{(t + \sqrt{t^2 - 4})^{p-1} \sqrt{t^2 - 4}} dt$ . 当  $p > 0$  时, 变上限积分  $\int_2^A \sin t dt$  有界,  $\frac{1}{(t + \sqrt{t^2 - 4})^{p-1} \sqrt{t^2 - 4}}$  在  $t$  充分大后单调递减趋于 0, 因此原积分收敛. 当  $p = 0$  时, 后者在  $t$  充分大后单调且不趋于 0 或  $+\infty$ , 由 Abel 判别法知其收敛性与  $\int_2^{+\infty} \sin t dt$  收敛性相同, 因此发散. 当  $p < 0$  时显然发散. 对于  $I_2$  可直接将  $2-p$  代入  $p$  得到  $2-p > 0$  时收敛, 否则

发散. 原积分收敛当且仅当  $I_1, I_2$  同时收敛, 因此其在  $0 < p < 2$  时收敛.

5. 不妨设  $f(x) \geq 0$  且单调递减. 从而  $xf(x) = 2\frac{x}{2}f(x) \leq 2 \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt$ , 由 Cauchy 收敛准则知  $x$  充分大后  $xf(x)$  充分小, 即极限为 0.

6. “ $\Rightarrow$ ”: 由无穷积分收敛,  $f(x)$  单调知可不妨设  $f(x) \geq 0$  且单调递减, 那么由  $|g(x)|$  的有界性立得结果.

“ $\Leftarrow$ ”: 由无穷积分收敛,  $f(x)$  单调,  $g(x)$  连续且不恒为 0 知可不妨设  $f(x) \geq 0$  且单调递减, 并找到区间  $[a, b] \subset [0, T]$  使得  $\forall x \in [a, b], |g(x)| \geq m$ . 从而对于  $\forall k_1 \leq k_2 \in \mathbb{Z}$ , 成立

$$\begin{aligned} \int_{a+k_1T}^{a+k_2T} f(x)dx &= \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx + \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{b+kT}^{a+(k+1)T} f(x)dx \\ &= \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx + \frac{T-b+a}{b-a} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f\left(\frac{T-b+a}{b-a}(x-a-kT) + b+kT\right) dx \\ &\leq \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx + \frac{T-b+a}{b-a} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx \\ &= \frac{T}{b-a} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx \leq \frac{T}{(b-a)m} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)|g(x)|dx \leq \frac{T}{(b-a)m} \int_{a+k_1T}^{a+k_2T} f(x)|g(x)|dx, \end{aligned}$$

其中第一个不等号是因为当  $x \in [a+kT, b+kT]$  时,  $f\left(\frac{T-b+a}{b-a}(x-a-kT) + b+kT\right) \leq f(x)$ , 这由  $f(x)$  单调递减保证. 然后利用 Cauchy 收敛原理知广义积分  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  收敛.

7. 可收敛可发散. 可发散是显然的, 一个可收敛的例子是  $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ , 然后交替构造  $f(x)$  和  $g(x)$  让

它们在许多区间为常数函数. 比如说, 他们在  $x=n$  处分开后, 在接下来长度为  $n^2$  的区间里, 令  $f(x) \equiv \frac{1}{n^2}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ; 然后在长度为 1 的区间里,  $f(x)$  连续地连接两点  $\left(n^2+n, \frac{1}{n^2}\right)$  和  $\left(n^2+n+1, \frac{1}{(n^2+n+1)^2}\right)$ ,  $g(x) \equiv \frac{1}{x^2}$ ; 再在接下来长度为  $(n^2+n+1)^2$  的区间里, 令  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) \equiv \frac{1}{(n^2+n+1)^2}$ .

8. (1) 当  $a \neq 0, p > 0$  时,  $\frac{1}{1+x^p}$  单调递减趋于 0,  $\int_0^N \cos ax dx$  有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛.

(2) 当  $a \neq 0, p = 0$  时显然发散. (3) 当  $a = 0, p > 1$  时显然收敛. (4) 当  $a = 0, 0 \leq p \leq 1$  时显然发散.

9. 显然当  $q \leq p+1$  时原积分发散. 当  $q > p+1$  时, 一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q |\sin t|^r} dt \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^p \pi^p \int_0^\pi \frac{dt}{1+(k\pi)^q |\frac{2}{\pi}t|^r} \leq C_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^p}{k^{\frac{q}{r}}} \int_0^{2(k\pi)^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}.$$

另一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q |\sin t|^r} dt \geq \sum_{k=0}^{+\infty} (k\pi)^p \int_0^\pi \frac{dt}{1+[(k+1)\pi]^q |t|^r} \geq C_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^p}{(k+1)^{\frac{q}{r}}} \int_0^{\pi[(k+1)\pi]^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}.$$

由于: (1)  $r > 1$  时  $\int_0^A \frac{dt}{1+t^r}$  一致有界; (2)  $r = 1$  时  $\int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim \ln A$ ; (3)  $r < 1$  时  $\int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim A^{1-r}$ ; 因此原积分收敛当且仅当  $q > (p+1)\max(r, 1)$ .

10. 函数恒正, 只需讨论有界性. 令  $u_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$ , 则

$$\begin{aligned} u_k &\leq k\pi \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = k\pi \int_0^\pi \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} \\ &\leq 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+4(k-1)^6 \pi^4 x^2} = \frac{k}{\pi(k-1)^3} \int_0^{(k-1)^3 \pi^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{2k^2}. \end{aligned}$$

由于  $\int_0^{n\pi} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x} = \sum_{k=1}^n u_k \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < +\infty$ , 因此原广义积分收敛.

11. 先考虑收敛性. 显然  $p \leq 0$  时发散.  $p > 0$  时, 由于  $\left| \int_a^A e^{\sin x} \sin 2x dx \right| = 2 \left| \int_{\sin a}^{\sin A} e^{\sin x} \sin x d \sin x \right| = 2 |e^{\sin A} (\sin A - 1) - e^{\sin a} (\sin a - 1)| < 8e$ , 且  $\frac{1}{x^p}$  单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法,  $\int_1^{+\infty} \frac{e^x \sin 2x}{x^p} dx$  收敛, 我们只需考察积分在 0 处的性质. 由于当  $x \rightarrow 0$  时  $\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \sim \frac{2}{x^{p-1}}$ , 因此  $p \geq 2$  时发散,  $0 < p < 2$  时收敛. 再考虑绝对收敛性.  $1 < p < 2$  时,  $\left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \right| \leq \frac{e}{x^p}$ , 因此绝对收敛.  $0 < p \leq 1$  时,  $\left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \right| \geq \frac{2^p}{e} \left| \frac{\sin 2x}{(2x)^p} \right| \geq \frac{1}{e} \left| \frac{\sin^2 2x}{(2x)^p} \right| = \frac{1}{2e} \left( \frac{1 - \cos 4x}{(2x)^p} \right)$ , 而  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{(2x)^p} dx$  收敛,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x)^p} dx$  发散, 因此原积分条件收敛.

12. 做变换  $t = \frac{1}{x}$ , 则

$$\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt = \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt := I_1 + I_2.$$

对于  $I_1$ , 由定积分第二中值定理知  $\exists \xi_A \in [1, A]$  s.t.  $I_1 = \int_1^{\xi_A} \cos^n t dt$ . 因此对于任意固定的  $A$ , 当  $n \rightarrow +\infty$  时  $I_1 \rightarrow 0$ .

对于  $I_2$ , 成立  $|I_2| \leq \int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{A}$ . 因此  $\forall \varepsilon > 0$ , 选择  $A = \frac{2}{\varepsilon}$ , 则  $|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , 并选择充分大的  $n$  使得  $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 此时  $|I| \leq \varepsilon$ , 由极限定义知结论成立.

13. 做倒数变换, 知  $I(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{d\frac{1}{x}}{(1+x^{-2})(1+x^{-\alpha})} = I(-\alpha)$ . 又有  $I(\alpha) + I(-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ , 因此  $I(\alpha) \equiv \frac{\pi}{4}$ .

14.  $I = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx \stackrel{x=2x}{=} \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2x)}{(2x)^2+4} d(2x) = \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{\ln 2}{6} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \stackrel{x=e^t}{=} \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{e^{2t}+1} dt - \frac{\pi \ln 2}{12} = -\frac{\pi \ln 2}{12}$ .

15. 对恒等式两边积分知  $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ . 记  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$ . 由于  $x \rightarrow 0$  时  $f(x) = O(x)$ , 故  $f(x) \in R[0, \pi]$ .

由 R-L 引理知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x dx = 0$ , 即是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ .

再利用恒等式  $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  立得结论.

16. 由对称性知  $I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \sin x dx$ . 做变换  $x = 2x$  知

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

17. 记  $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{t^2}{n} \right)^n dt$ . 做变元替换  $t = \sqrt{n} \sin x$  知  $I_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . 由于  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$ , 因此只需求出极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[ e^{-t^2} - \left( 1 - \frac{t^2}{n} \right)^n \right] dt$ . 在提示中令  $x = t^2, a = n$ ,

得到估计式  $0 \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left[ e^{-t^2} - \left( 1 - \frac{t^2}{n} \right)^n \right] dt \leq \frac{\int_0^{\sqrt{n}} t^4 e^{-t^2} dt}{n}$ . 当  $n \rightarrow +\infty$  时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0, 由夹逼原理知欲求极限存在且为 0. 从而  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

18. 直接用定义.  $\int_M^N [f(x+a) - f(x)] dx = \int_N^{N+a} f(x) dx - \int_M^{M+a} f(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty, M \rightarrow -\infty} (A-B)a$ .

19. 做变量替换  $t = x - \frac{1}{x}$ , 知  $\int_0^{+\infty} f \left( x - \frac{1}{x} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} f \left( x - \frac{1}{x} \right) d \left( x - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t + \sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}} f(t) dt$ .

由于  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  收敛,  $\frac{t + \sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}$  单调有界, 因此由 Abel 判别法知  $\int_0^{+\infty} f \left( x - \frac{1}{x} \right) dx$  收敛. 另一侧同理.

20. 由 Abel 判别法,  $\int_0^{+\infty} f(x) u_1(x) dx$  收敛, 而  $u_2(x)$  单调有界, 因此  $\int_0^{+\infty} f(x) u_1(x) u_2(x) dx$  收敛, 依此类推.

21. 令  $t = ax - \frac{b}{x}$ , 则  $x = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{2a}$ ,  $ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2 + 4ab}$ ,  $dx = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{2a\sqrt{t^2 + 4ab}} dt$ , 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^0 f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} - t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} + t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt. \end{aligned}$$

22.  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx \stackrel{t=\frac{1}{1+x^\beta}}{=} \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} (1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} \text{Beta}\left(1 - \frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha+1}{\beta} \pi}.$

23. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开和变元替换  $x = x\sqrt{t}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{t}(e^x - x - 1)} dx &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{t} \frac{e^{\xi(x)} x^2}{2}} dx \quad (0 \leq \xi(x) \leq x) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^M e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} dx + \int_M^{+\infty} e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} dx := I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

对于  $I_1$ , 由于  $\lim_{t \rightarrow 0+0} e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$  且有一致性  $\lim_{t \rightarrow 0+0} \sup_{x \in [0, M]} \left| e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} \right| = 0$ , 因此  $\lim_{t \rightarrow 0+0} I_1(t) = \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .

对于  $I_2$ , 我们有  $|I_2(t)| \leq \int_M^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  恒成立. 因此我们取充分大的  $M$ , 此时有

$$\left| I_1(t) + I_2(t) - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \leq \left| I_1(t) - \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| + |I_2(t)| + \left| \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

对充分小的  $t$  成立. 因此原极限值为  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

(编者注: 你也可以直接使用 Lebesgue 控制收敛定理.)

## 6 数项级数

### 6.1 问题

1. 讨论级数  $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$  的收敛性.

2. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{n^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$  的收敛性.

3. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  的收敛性和绝对收敛性.

4. 设非常数函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续非负, 且  $f(x) \leq 1$ , 并记  $a_n = \left[ \int_0^1 f(x) dx \right]^{\frac{1}{n}}$ . 证明级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - a_n)$  发散.

■ 自由选讲.

5. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$  的收敛性.

6. 讨论级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln n}$  的收敛性和绝对收敛性.

7. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n + \frac{1}{n})^n}$  的收敛性.

8. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n + \sin n}}$  的收敛性.
9. 讨论级数  $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \cdots$  的收敛性.
10. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$  的收敛性.
11.  $0 < a_1 < \frac{\pi}{2}, a_n = \sin a_{n-1}$ , 讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p$  的收敛性.
12.  $p, q > 0$ , 讨论级数  $1 - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q} + \cdots$  的收敛性与绝对收敛性.
13.  $a_n > 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$  收敛.
14. 是否存在部分和序列有界且通项趋于 0 的发散级数?
15. 如果对任意以 0 为极限的数列  $\{x_n\}$  都有  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  也收敛. 绝对收敛性呢?
16. 计算级数  $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4k^2 - 4k + 1}$ .
17. 计算级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{5}n)}{n}$ .
18. (Bertrand 判别法). 对于正项级数, 证明: 
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散} \end{cases}.$$
19.  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛, 数列  $p_n > 0$  且单调递增趋于  $+\infty$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{p_n} = 0$ .
20. 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$  收敛, 证明: (1)  $\forall k \in \mathbb{N}_+, \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n+k}$  收敛; (2)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n+k} = 0$ .
21.  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$  且绝对收敛,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$  且条件收敛, 证明它们的 Cauchy 乘积收敛且  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = AB$ .
22. 对于两个发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?
23. (1) 对于收敛级数和发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?  
(2) 对于正项收敛级数和正项发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?
24.  $f(x) \in D[1, +\infty)$ , 且  $\int_1^{+\infty} |f'(x)| dx$  收敛, 证明广义积分  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  与无穷级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  同敛散.
25.  $0 < p < 1, a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n^p}$ , 证明  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛.
26. 设  $x \in (0, 1)$ , 证明  $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1}$ .
27. (Euler 公式). 证明  $\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$ . 你可以将  $\sin[(2n+1)\phi]$  写成关于  $\sin \phi$  的多项式, 并利用零点求解.
28. 计算无穷乘积  $2 \left( \frac{2}{1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \right)^{\frac{1}{8}} \cdots$ . 你可以先写出通项公式, 然后逐步化简.
29. 给定  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty, a_n > 0$ , 问是否总存在  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty, b_n > 0$  且满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ ?

## 6.2 解答

1. 当  $e^k \leq n \leq e^{k+1}$  时,  $\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \geq \frac{1}{(k+1)^{\ln(k+1)}}$ , 从而  $\sum_{n \in [e^k, e^{k+1}]} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \geq \frac{e^{k+1} - e^k - 2}{(k+1)^{\ln(k+1)}} \rightarrow +\infty$ , 因此发散.



2. 由于  $\frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{n^\alpha} \sim \frac{1}{6n^{2+\alpha}}$ , 因此收敛.
3. 由于  $\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^\alpha$  单调递减趋于 0, 由 Leibniz 判别法知收敛. 由于  $\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^\alpha \sim \frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha}}$ , 因此  $\alpha > \frac{1}{2}$  时绝对收敛,  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$  时条件收敛.
4. 显然存在  $0 < r < 1$  使得  $\int_0^1 f(x)dx < r$ . 因此  $1 - a_n \geq 1 - r^{\frac{1}{n}} = 1 - e^{\frac{\ln r}{n}} \sim -\frac{\ln r}{n}$ , 由调和级数发散知原级数发散.
5.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n + n\pi)}{n}$ . 部分和序列  $\sum_{k=1}^n \sin(k + k\pi)$  有界,  $\frac{1}{n}$  单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知级数收敛.
6.  $\frac{1}{\ln n}$  单调递减趋于 0,  $\sum_{n=2}^k \sin n$  对于  $\forall k \geq 1$  有一致上界, 由 Dirichlet 判别法知级数收敛. 又因为  $\left|\frac{\sin n}{\ln n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{\ln n} = \frac{1 - \cos 2n}{2 \ln n} = \frac{1}{2 \ln n} - \frac{\cos 2n}{\ln n}$ , 而  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{\ln n}$  收敛,  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2 \ln n}$  发散, 因此级数不绝对收敛.
7.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n + \frac{1}{n})^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1 + \frac{1}{n^2})^n} = 1$ , 因此原级数发散.
8. 首先由 Dirichlet 判别法易知级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$  收敛. 注意到  $\frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n} - \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin n)}$ , 且成立估计

$$\frac{1 - \cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)} = \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)} \leq \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin n)} \leq \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)} = \frac{1 - \cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)}.$$

但级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} \pm 1)}$  均发散, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} \pm 1)}$  均收敛 (Abel 判别法), 因此级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin n)}$  发散, 从而原级数可写成一个收敛级数和一个发散级数的和, 故发散.

9. 注意到  $\sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4}$ ,  $\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{4}} = 2 \sin \frac{\pi}{8}$ ,  $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{8}} = 2 \sin \frac{\pi}{16}$ , 依此类推, 再利用  $\sin x \sim x$  知原级数收敛.

10. 合并同号项, 则级数改写为  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k b_k$ , 其中  $b_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2 - 1} \leq \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0$ . 另一方面,  $b_k \geq \int_0^1 \frac{1}{k^2 + x} dx + \int_1^2 \frac{1}{k^2 + x} dx + \cdots + \int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{k^2 + x} dx = \int_0^{2k+1} \frac{1}{k^2 + x} dx = \ln \frac{(k+1)^2}{k^2}$ , 而  $b_{k+1} \leq \int_{-1}^0 \frac{1}{(k+1)^2 + x} dx + \cdots + \int_{2k+1}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2 + x^2} dx = \int_{-1}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2 + x^2} dx = \ln \frac{(k+1)^2 + 2(k+1)}{k(k+2)} \Rightarrow b_k - b_{k+1} \geq \ln \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)} \geq 0$ . 由 Leibniz 判别法知收敛.

11. 上学期例题已证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n^2 = 3$ , 因此  $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ ,  $a_n^p \sim \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{p}{2}}$ , 从而当  $p \leq 2$  时级数发散,  $p > 2$  时级数收敛.

12. (a) 当  $p > 1, q > 1$  时,  $|a_n| \leq \frac{1}{n^{\min(p,q)}}$ , 因此绝对收敛.

(b) 当  $0 < p = q \leq 1$  时, 由 Leibniz 判别法知条件收敛.

(c) 当  $p > 1, 0 < q \leq 1$  或  $0 < p \leq 1, q > 1$  时, 级数正部 (或负部) 收敛, 负部 (或正部) 发散, 因此发散.

(d) 当  $0 < p < q \leq 1$  时, 由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q}}{\frac{1}{(2n-1)^p}} = 1$  知级数发散.

(e) 当  $0 < q < p \leq 1$  时, 由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{(2n)^q} + \frac{1}{(2n+1)^p}}{-\frac{1}{(2n)^q}} = 1$  知级数发散.

13.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛  $\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$ . 因此可按从小到大顺序将  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  重排为  $a_{\phi(1)} \leq a_{\phi(2)} \leq \cdots \leq a_{\phi(n)} \leq \cdots$ .

令  $b_n = \frac{n}{a_{\phi(1)} + a_{\phi(2)} + \cdots + a_{\phi(n)}}$ , 则  $\{b_n\}$  单调递减, 且  $b_{2n} = \frac{2n}{a_{\phi(1)} + \cdots + a_{\phi(2n)}} \leq \frac{2n}{a_{\phi(n)} + \cdots + a_{\phi(2n)}} \leq \frac{2n}{n a_{\phi(n)}} = \frac{2}{a_{\phi(n)}}$ , 故  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$ . 又因为  $\frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leq b_n$ , 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n}$  收敛.

14. 存在. 一个例子为  $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$

15. 不妨设  $a_n > 0$ , 否则可将对应  $x_n$  反号, 题目条件与绝对收敛性结论不变. 如果  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  发散, 则可归纳构造数列  $A_n$ ,

满足  $A_0 = 0, A_n = \inf_{k \in \mathbb{N}_+} \sum_{i=A_{n-1}+1}^k a_i \geq n$ . 从而定义数列  $\{x_n\}$  为  $A_1 - A_0$  个  $1, A_2 - A_1$  个  $\frac{1}{2}, \dots, A_n - A_{n-1}$  个  $\frac{1}{n}, \dots$

的依次排列, 满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ , 而  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n > 1 + 1 + \dots = +\infty$ . 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  绝对收敛.

16. 注意到  $\arctan \frac{2}{4k^2 - 4k + 1} = \arctan \frac{1}{2k-1} - \arctan \frac{1}{2k}$ , 从而  $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4k^2 - 4k + 1} = \arctan \frac{1}{2}$ .

17.  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \sqrt{5}k}{k} = - \int_{\sqrt{5}}^{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kt dt = - \int_{\sqrt{5}}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t - \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = - \int_{\sqrt{5}}^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t dt + \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{5}) \xrightarrow{R-L} \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{5})$ .

18. 先证明第一种情况. 由条件知  $\exists N_1 > 0, \text{s.t.} \forall n > N_1, \ln n \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > r_1 > 1 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + r_1}$ .

可以验证当  $1 < p < r_1$  时,  $\frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + r_1} < \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \Leftrightarrow \frac{(n+1)[\ln^p(n+1) - \ln^p n]}{\ln^{p-1} n} < r_1$ . 利用  $f(x) = x^p$

的微分中值定理, 知  $\text{LHS} = \frac{(n+1)p \ln^{p-1}(n+\theta)[\ln(n+1) - \ln n]}{\ln^{p-1} n} < \underbrace{p(n+1)[\ln(n+1) - \ln n]}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\ln^{p-1}(n+1)}{\ln^{p-1} n}}_{\rightarrow 1} < r_1 =$

RHS 当  $n$  足够大时成立. 因此有  $\exists N_2 > N_1, \text{s.t.} \forall n > N_2, \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \Rightarrow a_n < \frac{C}{n \ln^p n}$ . 由于  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{n \ln^p n}$

收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛.

19. 记  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 并设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k a_k &= p_1 S_1 + \sum_{k=2}^n p_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (p_k - p_{k+1}) + S_n p_n \\ &\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^n p_k S_k}{p_n} = S_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} = (S_n - S) - \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} + S \frac{p_1}{p_n}. \end{aligned}$$

当  $n$  充分大时,  $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{6}, \left| S \frac{p_1}{p_n} \right| < \frac{\varepsilon}{6}$ . 对于第二项, 设  $|S_n| \leq M$ , 由极限定义,  $\exists N_1 > 1, \text{s.t.} \forall n \geq N_1, |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 从而有估计

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \right| \leq 2M \sum_{k=1}^{N_1} \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N_1+1}^{n-1} \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \leq 2M \frac{p_{N_1+1} - p_1}{p_n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由极限定义,  $\exists N_2 > N_1, \text{s.t.} \forall n \geq N_2, \frac{p_{N_1+1} - p_1}{p_n} < \frac{\varepsilon}{12M}$ . 此时  $\left| \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \right| < \frac{2\varepsilon}{3}$ , 从而有  $\left| \frac{\sum_{k=1}^n p_k S_k}{p_n} \right| < \varepsilon$ .

这表明其极限值为 0.

20. (1)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+k)a_{n+k}$  收敛,  $\frac{n}{n+k}$  随  $n$  单调有界, 由 Abel 判别法知收敛. (2) 记  $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} k a_k$ . 则

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^m n a_{n+k} \right| &= \left| \sum_{n=1}^m \frac{n}{n+k} (n+k) a_{n+k} \right| = \left| \sum_{n=1}^m \frac{n}{n+k} (R_{n+k-1} - R_{n+k}) \right| \\ &= \left| \frac{1}{k+1} R_k - \frac{m}{k+m} R_{k+m} + \sum_{n=1}^{m-1} R_{n+k} \left( \frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{k+1}|R_k| + \frac{m}{k+m}|R_{k+m}| + \sup_{k+1 \leq j \leq n+m-1} |R_j| \sum_{n=1}^{m-1} \left( \frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) \\ &\leq \frac{1}{k+1}|R_k| + \frac{m}{k+m}|R_{k+m}| + \sup_{j \geq k+1} |R_j| \left( \frac{m}{k+m} - \frac{1}{k+1} \right) \end{aligned}$$

令  $m \rightarrow +\infty$ , 得到  $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k} \right| \leq \frac{1}{k+1}|R_k| + \sup_{j \geq k+1} |R_j| \leq 2 \sup_{j \geq k} |R_j| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

21. 记  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , 则  $\sum_{k=1}^n c_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1 = A_n B + (a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1)$  (定义  $\beta_k = B_k - B := \Delta_1(n) + \Delta_2(n)$ ). 显然  $\Delta_1(n) \rightarrow AB$ , 下证  $\Delta_2(n) \rightarrow 0$ . 设  $|\beta_n| \leq \beta, \forall n \geq 1$ . 由定义,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 3$ , s.t.  $\forall n > N, \forall p \geq 1, |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \right)}, \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$ . 从而当  $n \geq 2N$  时,  $|\Delta_2(n)| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k \beta_{n+1-k} \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n a_k \beta_{n+1-k} \right| \leq \varepsilon$ .

22. 不一定, 反例是  $a_0 = 1, a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n$  和  $b_0 = 1, b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ .  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  均发散, 但 Cauchy 乘积  $c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \cdots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^1 + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$  收敛.

23. (1) 不一定, 反例是  $a_n \equiv 0$  和  $b_n \equiv 1$ . 当然也不一定收敛, 如  $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = n$ .

(2) 一定. 设  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  发散, 则  $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \geq a_1 b_{n-1}$ , 由比较判别法知  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$  发散.

24. 注意到

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^{n-1} f(k) - \int_m^n f(x) dx \right| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} |f(k) - f(x)| dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \int_k^x |f'(t)| dt dx \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \int_k^{k+1} |f'(t)| dx dt \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} |f'(t)| dt = \int_m^n |f'(t)| dt, \end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则知广义积分  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  与无穷级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  同敛散.

25. 易知  $a_n$  单调递减, 且  $a_{n+1} - a_n = -a_{n+1} a_n^p \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^p} < \frac{a_n - a_{n+1}}{\xi_n^p} \stackrel{\text{微分中值定理}}{=} \frac{1}{1-p} (a_n^{1-p} - a_{n+1}^{1-p})$ . 然后两边累加得到收敛性.

$$26. \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{+\infty} (1 + x^{2^i(2n-1)}) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1}.$$

27. 注意到  $\sin[(2n+1)\phi]$  可展开为  $\sin \phi$  的  $2n+1$  次多项式, 且只含奇次幂项, 因此  $\sin[(2n+1)\phi] = \sin \phi P(\sin^2 \phi)$ , 其中  $P(\cdot)$  是  $n$  次多项式. 由极限关系知  $P(0) = 2n+1$ , 且 LHS 全部零点为  $x_k = \frac{k\pi}{2n+1}, k = 1, \cdots, n$ , 因此

$$\begin{aligned} P(t) &= (2n+1) \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{t}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right) \\ \Rightarrow \sin[(2n+1)\phi] &= (2n+1) \sin \phi \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right) \\ \Rightarrow \sin x &= (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right). \end{aligned}$$

现在, 问题变为求 RHS 在  $n \rightarrow +\infty$  时的极限. 记

$$U_m = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^m \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right), V_m = \prod_{k=m+1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right).$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_m = x \prod_{k=1}^m \left( 1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right),$$

$$1 > V_m \geq \prod_{k=m+1}^n \left( 1 - \frac{\left(\frac{x}{2n+1}\right)^2}{\frac{4}{\pi^2} \frac{k^2 \pi^2}{(2n+1)^2}} \right) = \prod_{k=m+1}^n \left( 1 - \frac{x^2}{4k^2} \right) > \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{4k^2} \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1.$$

因此由夹逼原理,  $\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right).$

28. 主要难点在于如何写成通式.

$$\begin{aligned} P_n &= 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{(2^{k-1}-1)!!(2^k)!!}{(2^{k-1})} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2^k}} \stackrel{(2^n-1)!! = \frac{(2^n)!}{2^{2^{n-1}}(2^{n-1})!}}{=} 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!}{2^{2^{k-2}}(2^{k-2})!} \cdot \frac{(2^k)!}{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!} \right]^{\frac{1}{2^{k-1}}} \\ &= 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[ 2^{2^{k-1}-\frac{1}{2}} \frac{((2^{k-1})!)^3}{((2^{k-2})!)^2(2^k)!} \right]^{\frac{1}{2^{k-1}}} = 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[ 2^{1-\frac{1}{2^k}} \frac{\left(\frac{(2^{k-1})!}{(2^k)!}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}}{\left(\frac{(2^{k-2})!}{(2^{k-1})!}\right)^{\frac{1}{2^{k-2}}}} \right] = 2\sqrt{2} \cdot 2^{n-1-\sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k}} \frac{1}{\frac{1}{2}} \left[ \frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^{\frac{1}{2^{n-1}}} \\ &= 2 \cdot 2^{n+\frac{1}{2^n}} \left[ \frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^{\frac{1}{2^{n-1}}} = 2 \left\{ 2^{n2^n+1} \left[ \frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2^n}} \stackrel{\text{Stirling}}{\sim} 2 \left[ 2^{n2^n+1} \frac{2\pi 2^{n-1} \left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^n \left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^{n+1}}} \right]^{\frac{1}{2^n}} \rightarrow e. \end{aligned}$$

29. 先递归构造  $k_n$ : 设  $k_0 = 0$ ,  $k_n = \inf_{m \in \mathbb{N}_+} \left\{ m > k_{n-1} : \sum_{i=k_{n-1}+1}^m a_i > n \right\}$ , 随后定义当  $k_{n-1} < m \leq k_n$  时,  $b_m = \frac{a_m}{n}$ .

## 7 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学信息科学技术学院 22 级本科生吴明睿同学, 他提供了很多  $\text{\LaTeX}$  排版的建议. 感谢选修 2025 春数学分析 II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.