

高等代数 I 习题课讲义 (2025 秋)

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 10 月 15 日

目录

1	第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法	2
1.1	问题	2
1.2	解答	2
2	线性相关性, 秩	4
2.1	问题	4
2.2	解答	4
3	线性方程组解的结构	5
3.1	问题	5
3.2	解答	6
4	行列式 (1)	8
4.1	问题	8
4.2	解答	9
5	致谢	11

1 第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 是否存在二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 其图像经过下述 4 个点: $A(1, 2), Q(-1, 3), M(-4, 5), N(0, 2)$?

2. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}.$$

3. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D . 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

4. a 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$$
 有解? 当有解时, 求出它的所有解.

5. 解下述线性方程组:
$$\begin{cases} (1 + a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_1 \\ x_1 + (1 + a_2)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1 + a_n)x_n = b_n \end{cases}, \text{ 其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0, \text{ 且 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq -1.$$

6. (1) 求复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\text{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集合;

(3) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1, y_2, y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解?

7. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-2, 1, 5), \alpha_3 = (a, 2, 10), \beta = (1, b, -1)$. 当 a, b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

8. 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, $\beta = \sum_{j=1}^s b_j \alpha_j$. 如果 $b_i \neq 0$, 证明用 β 替换 α_i 得到的向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 也线性无关.

9. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 表出任何向量-如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

10. 求单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线.

11. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$ 的方式唯一.

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

1.2 解答

1. 直接代入求解
$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a - b + c = 3 \\ 16a - 4b + c = 5 \\ c = 2 \end{cases}, \text{ 发现无解.}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=5*\textcircled{2}, \textcircled{4}+=7*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=2*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$

$$3. \text{ 注意 } A, B, C, D \text{ 的比例和为 } 1, \text{ 因此 } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=5*\textcircled{1}, \textcircled{4}-=15*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}+=10*\textcircled{2}, \textcircled{4}-=5*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=\frac{2}{3}*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ 因此解是 } (\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25}).$$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}+=\textcircled{1}, \textcircled{3}-=3*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{bmatrix}. \text{ 因此有解当且仅当 } a = -1, \text{ 通解是 } \begin{cases} x_1 = -\frac{18}{7}x_3 + \frac{1}{7} \\ x_2 = -\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7} \end{cases}.$$

$$5. \text{ 令 } y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \text{ 原方程组改写为 } \begin{cases} y + a_1x_1 = b_1 \\ y + a_2x_2 = b_2 \\ \cdots \\ y + a_nx_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - y}{a_1} \\ x_2 = \frac{b_2 - y}{a_2} \\ \cdots \\ x_n = \frac{b_n - y}{a_n} \end{cases}. \text{ 全部相加得到关于 } y \text{ 的一元}$$

一次方程, 解得 $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}$. 代入上式得到原线性方程组的解.

$$6. (1) \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=2*\textcircled{1}, \textcircled{3}-=i*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{i}{2+2i}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}*= \frac{1}{2+2i}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. (2) (x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}. (3) (x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}. (4) \text{ 将 } A \text{ 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 } (y_1, \frac{y_2 - 2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1), \text{ 因此只有当 } y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0 \text{ 时才有解.}$$

$$7. \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=\textcircled{1}, \textcircled{3}-=4*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{13}{3}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b-\frac{2}{3} \end{bmatrix}. \text{ 因此,}$$

当 $a \neq -4$ 或 $a = -4, b = -\frac{2}{13}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

8. 设 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i\beta + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i(b_1\alpha_1 + \cdots + b_s\alpha_s) + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow (k_1 + k_ib_1)\alpha_1 + \cdots + (k_{i-1} + k_ib_{i-1})\alpha_{i-1} + k_ib_i\alpha_i + (k_{i+1} + k_ib_{i+1})\alpha_{i+1} + \cdots + (k_s + k_ib_s)\alpha_s = 0$. 由线性无关性知 $k_1 + k_ib_1 = \cdots = k_{i-1} + k_ib_{i-1} = k_ib_i = k_{i+1} + k_ib_{i+1} = \cdots = k_s + k_ib_s = 0$, 由于 $b_i \neq 0$, 因此 $k_i = 0$, 进一步得到 $k_1 = \cdots = k_s = 0$, 这也意味着 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

9. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 \Leftrightarrow 表出 0 向量唯一 $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0)$.

10. $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x-z = k(1-y) \\ x+z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x+ky-z=k \\ kx-y+kz=1 \end{cases}$. 特别

地, 当 $y = \pm 1$ 时, $z = \pm x$ 也是位于该曲面上的直线.

11. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3}: a, b \in \mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1+b_1\sqrt{3} = a_2+b_2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a_1-a_2}{b_2-b_1} \in \mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, $\gcd(a, b) = 1$, 那么 $a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3|a \Rightarrow 9|a^2 \Rightarrow 3|b^2 \Rightarrow 3|b$, 矛盾.

12. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5}) = \{a+b\sqrt{-5}: a, b \in \mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5} = (a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5}) \Rightarrow 9 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5}) = (a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5}) = (a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5} \nmid 3 \times 3$ 而 $2+\sqrt{-5} \nmid 3$, 因此不是素数.

2 线性相关性, 秩

2.1 问题

1. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.

2. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其

余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

3. 作初等行变换将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求

A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a, b 取何值时, 向量 $(3, a, b, b, 3)$ 属于 A 的行空间?

4. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$; (2) $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4$; (3) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$; (4) $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 8\alpha_4, \alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4, 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3$.

5. 证明: 若向量组 I 能线性表出向量组 II, 且 $\text{rank}(\text{I}) = \text{rank}(\text{II})$, 则向量组 II 也能表出向量组 I.

6. 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 能线性表出 β_1, \dots, β_s , 并且有 $\beta_i = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r, \forall i = 1, 2, \dots, s$. 证明若矩阵 $B = (b_{ij})_{s \times r}$ 列向量线性无关, 则 β_1, \dots, β_s 也能线性表出 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

7. 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \leq i \leq n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明主对角占优矩阵满秩.

8. 证明秩等式 $\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ 和秩不等式 $\text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

9. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}, \frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.

10. 设 $W = \{f(x) | f(1) = 0, f(x) \in \mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 \mathbb{R} 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.

11. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.

2.2 解答

1. 显然矩阵 A 的秩至少为 2 (第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2 , 因此 $\lambda = 0$, 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4

列线性表出. 综上, $\lambda = 0$ 时秩为 2, 否则为 3.

2. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3$, $-5\alpha_1 - 4\alpha_2 = \alpha_4$;

(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\frac{3}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 = \beta_1$.

3. A 的简化阶梯型矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$, 且 $\beta_3 = 2\beta_1 -$

$\beta_2, \beta_5 = 3\beta_1 + 5\beta_2 - \beta_4$. (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, 且 $\alpha_3 = -\frac{31}{9}\alpha_1 - \frac{55}{9}\alpha_2 + \frac{17}{9}\alpha_4, \alpha_5 = -\frac{20}{9}\alpha_1 - \frac{23}{9}\alpha_2 + \frac{22}{9}\alpha_4$. (3) 仔细计算即可. $a = 4, b = 2$.

4. (1) 线性相关; $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$. (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这五个向量却只有四个自由度.

5. 设 β_1, \dots, β_s 是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量 α , 由于组 I 能表出 $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$, 从而 $\text{rank}(\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha) \leq s$, 即 $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$ 线性相关. 由于 β_1, \dots, β_s 线性无关, 因此它们能表出 α .

6. 只需证明能表出 α_1 . 利用高斯消元法去解方程 $\beta_{i1} = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r$, 由于 B 列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成 $\begin{bmatrix} I_{r \times r} \\ 0_{(s-r) \times r} \end{bmatrix}$ (可用递推法或归纳法证明之), 从而 α_1 能被 β_1, \dots, β_s 线性表出.

7. 反证法. 假设 A 的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$. 我们不妨设在这 n 个系数里面 k_1 的绝对值最大, 那么就有 $k_1a_{11} + k_2a_{12} + \dots + k_na_{1n} = 0$. 但是 $|k_1a_{11} + k_2a_{12} + \dots + k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_2a_{12}| - \dots - |k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_1|(|a_{12}| + \dots + |a_{1n}|) > 0$, 矛盾. 因此 A 满秩.

8. (1) 设 A 的一个列极大线性无关组是 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$, B 的一个列极大线性无关组是 $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_s}$. 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$ 线性无关, 且可以分别用对应小矩阵 A, B 的相同系数表出其他大矩阵的列向量, 因此这是一个大矩阵的列极大线性无关组, 有第一个秩等式.

(2) 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{j_1} \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \gamma_{j_s} \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$ 线性无关, 其中 γ_{j_k} 是矩阵 C 对应于 j_k 的列向量, 因此大矩阵的秩至少是 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$, 有第二个秩不等式. 这里我们无法判断这是不是一个大矩阵的列极大线性无关组, 因此可以严格取到大于号. 一个例子是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $A = (0), B = (0), C = (1)$.

9. 由矩阵满秩知 $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ 和 $(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$ 线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证 $x_3 + k(x_1 - x_2) = x_1 + t(x_2 - x_3), x = a, b, c$ 对于 k, t 是否有解. 由于矩阵满秩, 合并同类项知该方程系数必须满足 $t + 1 = k - 1 = t + k = 0$, 因此 $t = -1, k = 1$. 从而两直线相交.

10. (1) 容易证明对 $\forall f(x), g(x) \in W \Rightarrow af(x) + bg(x) \in W$, 因此是线性子空间. (2) 令 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, $f(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = 0$, 因此 $f(x) = a_1(x - 1) + a_2(x^2 - 1) + \dots + a_{n-1}(x^{n-1} - 1)$. 下面我们只需证明 $x - 1, x^2 - 1, \dots, x^{n-1} - 1$ 确实是 W 的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以 $\dim W = n - 1$.

11. 注意到 $W_i = \{X \in K^n : (a_{i1}, \dots, a_{in})X = 0\}, i = 1, 2, \dots, n$ 都是 K^n 的 $n - 1$ 维子空间, 由于有限个 $n - 1$ 维子空间张不满 n 维全空间, 从而存在 $X_0 \in K^n \setminus (W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n)$, 此时 AX_0 的每个分量都不为零.

3 线性方程组解的结构

3.1 问题

1. 已知矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5]$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ 的行向量组等价, 且 $\alpha_2 = (2, 1, 2, 1)^T, \alpha_5 = (7, 3, 7, 3)^T$. 又知方

程组 $AX = \beta$ 的一个解为 $X = (1, 1, -1, 0, 1)^T$, 这里 $\beta = (7, 5, 7, 4)^T$. (1) 写出矩阵 A 及其行简化阶梯形矩阵 J ; (2) 求 A 行空间的一组基, 并确定当 a, b 为何值时, $(5, 3, 6, a, b)$ 落在 A 的行空间里; (3) 求方程组 $AX = \beta$ 的解空间.

$$2. \text{ 讨论下列方程组的解空间: } (1) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases} ; (2) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases} .$$

$$3. \text{ 讨论下列方程组的解空间: } (1) \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} ; (2) \begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 7x_4 = \lambda \end{cases} .$$

4. A 是 $m \times n$ 矩阵, b 是 $m \times 1$ 矩阵. 证明线性方程组 $A^T A x = A^T b$ 总有解.

5. A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解. 问 A, B 的列向量组是否等价、行向量组是否等价.

6. 证明: $AX = 0$ 有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.

7. 设线性方程组 $AX = b$ 中矩阵 A 的秩等于矩阵 $B = \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.

8. 设 A, B 是数域 K 上的 n 阶方阵, $AX = 0, BX = 0$ 分别有 l, m 个线性无关的解向量. 证明: (1) $(AB)X = 0$ 至少有 $\max(l, m)$ 个线性无关的解向量; (2) 如果 $l + m > n$, 那么 $(A + B)X = 0$ 必有非零解; (3) 如果 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 没有公共的非零解向量, 且 $l + m = n$, 那么 K^n 中的任一向量 α 都可以唯一的分解为 $\alpha = \beta + \gamma$, 其中 β, γ 分别是 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的解向量.

9. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha \neq 0, A^k\alpha = 0$, 那么 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$.

10. 判断方的整系数线性方程组如果模任一素数的意义下都有解, 那么它是否在整数环上有解.

11. 给定复系数线性方程组 $AX = b$, 其中 A 满秩. 假设矩阵 $I + A$ 的每行元素的模的和小于 q , 其中 $0 < q < 1$. 设 X_0 是 \mathbb{C}^n 中任一向量, 归纳定义 $X_{m+1} = (A + I)X_m - b$. 证明序列 X_m 收敛到方程组 $AX = b$ 的解.

12. 已知矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等. 记 A 的解空间为 W , B 的列空间为 V . 证明 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$ 当且仅当 $V \cap W = \{0\}$.

3.2 解答

1. (1) 容易得到 $\alpha_1 - \alpha_3 = (-2, 1, -2, 0)^T$, 并求出题给定的矩阵行空间一组基是 $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$. 考虑其前三个分量, 由能被这组基表出知 $\alpha_3 = 2\alpha_2 = (4, 2, 4, 2)^T$, $\alpha_1 = (2, 3, 2, 2)^T$, 从而 $\alpha_4 = (8, 6, 8, 3)$. 因此

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 一组基为 $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$. 考察各系数, 知当 $a = 14, b \in \mathbb{R}$ 时, 该向量落在 A 的行空间里.

(3) 先求出 $AX = 0$ 的解, 即 $(\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_5)X = 0$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 线性无关. 通解为 $(t_1, 3t_1 - 2t_2, t_2, -t_1, 0)^T$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 是自由变元. 因此 $AX = \beta$ 的通解是 $(t_1 + 1, 3t_1 - 2t_2 + 1, t_2 - 1, -t_1, 1)^T$, 写成解空间是 $\{t_1(1, 3, 0, -1, 0)^T + t_2(0, -2, 1, 0, 0)^T + (1, 1, -1, 0, 1)^T : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$.

2. (1) 通解是 $x_1 = 8x_3 - 7x_4, x_2 = -6x_3 + 5x_4$, 写成解空间是 $\{k_1(8, -6, 1, 0)^T + k_2(-7, 5, 0, 1)^T : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$.

(2) $n = 3m$ 或 $3m + 1$ 时只有零解. $n = 3m + 2$ 时有非零解, 通解是 $x_{3i} = 0, x_{3i+1} = -x_n, x_{3i+2} = x_n, i = 1, 2, \dots, m$, 写成解空间是 $\{k(-1, 1, 0, -1, 1, 0, \dots, 0, -1, 1) : k \in \mathbb{R}\}$.

3. (1) 利用高斯消元得到 $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ -3\lambda x_3 + 8\lambda x_4 = 16 - 7\lambda \end{cases}$, 因此 $\lambda \neq 0$ 时有解, 通解是 $x_1 = \frac{1}{\lambda}, x_3 = \frac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_2, x_4 =$

$\frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}x_2$, 写成解空间是 $\{k(0, 5, -8, -3)^T + \left(\frac{1}{\lambda}, 0, \frac{9\lambda-16}{5\lambda}, \frac{4-\lambda}{5\lambda}\right)^T : k \in \mathbb{R}\}$.

(2) 利用高斯消元得到 $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_2 - 13x_3 - 5x_4 = 3 \\ 0 = 2\lambda \end{cases}$, 因此 $\lambda = 0$ 时有解, 通解是 $x_1 = -\frac{1}{2}(7 + 19x_3 + 7x_4)$, $x_2 =$

$-\frac{1}{2}(3 + 13x_3 + 5x_4)$, 写成解空间是 $\{k_1(-19, -13, 2, 0)^T + k_2(-7, -5, 0, 2)^T + \left(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 0\right)^T : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$.

4. 先证明 $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$. 首先显然 $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A)$, 其次 $A^T A x = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker}(A) \Rightarrow \text{rank}(A^T A) \geq \text{rank}(A)$. 接着, 由于 $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A^T A, A^T b) \leq \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A)$ 知系数矩阵和增广矩阵秩相等, 因此方程有解.

5. 第 1 个结论不对, 比如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 第 2 个结论对. 若解空间 0 维, 则 A, B 均列满秩, 也都可以通

过初等行列变换得到其简化阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}$, 因此等价. 其余情况, 设解空间 $r \geq 1$ 维, 任取 $AX = 0$ 的一个基础解系 X_1, \dots, X_r 构成 $n \times r$ 矩阵 C . 考虑线性方程组 $C^T X = 0$, 其解空间维数为 $n - r = \text{rank}(A)$. 由于 $C^T A^T = 0$, 因此 A 的行空间是该解空间的一个子空间. 由于它们维数相等, 因此 A 的行空间就是该解空间. 同理 B 的行空间也是该解空间.

6. 必要性. 设 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ 是强非零解, 则 $\alpha_i = \sum_{k \neq i} \left(-\frac{x_k}{x_i}\right) \alpha_k, \forall i = 1, \dots, n$.

充分性. 不妨设 $\alpha_i = \sum_{k \neq i} t_{ki} \alpha_k, \forall i = 1, \dots, n$, 则记 $T = \begin{pmatrix} 1 & -t_{12} & -t_{13} & \cdots & -t_{1,n-1} & -t_{1,n} \\ -t_{21} & 1 & -t_{23} & \cdots & -t_{2,n-1} & -t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t_{n-1,1} & -t_{n-1,2} & -t_{n-1,3} & \cdots & 1 & -t_{n-1,n} \\ -t_{n1} & -t_{n2} & -t_{n3} & \cdots & -t_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, 从而

$AT = 0$. 由于 T 的任一主对角元均不为零, 从而存在 X_0 使得 TX_0 每个分量都不为零, 此即该强非零解.

7. (1) $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A, b) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}(B) = \text{rank}(A)$, 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.

(2) 不成立, 考虑 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$, $\text{rank}(A) = 2$, 而 $\text{rank}(B) = 3$.

8. (1) $n - \text{rank}(AB) \geq \max(n - \text{rank}(A), n - \text{rank}(B)) \geq \max(l, m)$.

(2) $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n - l + n - m < n$, 因此 $(A + B)X = 0$ 必有非零解.

(3) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ 与 β_1, \dots, β_m 分别是 $AX = 0, BX = 0$ 线性无关的解. 考虑方程 $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l + \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_m \beta_m = 0$, 则 $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l = -\mu_1 \beta_1 - \dots - \mu_m \beta_m$ 是 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的公共解. 由题意知其必然为零向量, 又由 $\{\alpha_i\}_{i=1}^l, \{\beta_j\}_{j=1}^m$ 线性无关性知 $\lambda_1 = \dots = \lambda_l = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$. 因此 $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_m$ 整体线性无关. 又由于 $l + m = n$, 因此他们是 K^n 一组基, 从而任一向量都可唯一被它们线性表出, 相应的被表出的两部分也就对应了 β 和 γ . 唯一性可由 $\alpha = \beta_1 + \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1$ 是 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的公共解 $\Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1 = 0$ 得到.

9. (1) 设 $\lambda_1 \alpha + \lambda_2 A\alpha + \dots + \lambda_k A^{k-1} \alpha = 0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1 = 0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2 = 0$, 以此类推知线性无关.

(2) 显然 $A^n X = 0 \Rightarrow A^{n+1} X = 0$. 若存在 $A^{n+1} \alpha = 0$ 但 $A^n \alpha \neq 0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha, A\alpha, \dots, A^n \alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$.

10. 不一定, 一个反例是 $4x = 2$.

11. 记 $\|X\|$ 为向量 X 元素模的最大值 (l_∞ 范数). 则 $\|X_n - X_m\| = \|(A + I)X_{n-1} - (A + I)X_{m-1}\| = \|(A + I)(X_{n-1} - X_{m-1})\| < q\|X_{n-1} - X_{m-1}\|$, 因此由 Cauchy 收敛原理知 X_n 在 l_∞ 范数意义下收敛 (有限维线性空间所有范数等价). 记极限值为 X_∞ , 两边求极限知 $X_\infty = (A + I)X_\infty - b \Leftrightarrow AX_\infty = b$.

12. 注意到 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB) \Leftrightarrow \text{Ker}(B) = \text{Ker}(AB)$.

“ \Rightarrow ”: 考虑 $x \in V \cap W$, 则可设 $x = By$. 由于 $AB y = Ax = 0$, 因此 $y \in \text{Ker}(AB) = \text{Ker}(B) \Rightarrow By = 0 \Rightarrow x = 0$.

“ \Leftarrow ”: 显然 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$. 若 $\text{rank}(AB) < \text{rank}(B)$, 则 $\text{Ker}(AB) \neq \text{Ker}(B)$, 即 $\exists x \in \text{Ker}(AB)$ 但 $x \notin \text{Ker}(B)$, 此时 $Bx \neq 0$, 但是 $Bx \in V \cap W$.

4 行列式 (1)

4.1 问题

1. 计算行列式: (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

3. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos 2\phi_1 & \cdots & \cos(n-1)\phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos 2\phi_2 & \cdots & \cos(n-1)\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos 2\phi_n & \cdots & \cos(n-1)\phi_n \end{vmatrix}$.

4. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n \times n})$, 其中 $\alpha^2 - 4\beta\gamma > 0$.

5. (1) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$; (2) 计算行列式 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2 \cdots a_n \neq 0$.

8. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n \times n})$.

9. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n \times n}).$

4.2 解答

1. (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2 + 16 + 16 - 4(x+1) - 16(x-2) - 4(x+1) = x^3 - 27x + 54;$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

2. 用第一列减去第 i 列的 b_i 倍, $i = 2, 3, \dots, n$, 得到

$$\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i.$$

3. 由高中三角函数知识知 $\cos k\theta = 2^{k-1} \cos^k \theta + P_{k-2}(\cos \theta)$, 其中 P_{k-2} 是 $k-2$ 次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos^2 \phi_1 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos^2 \phi_2 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos^2 \phi_n & \cdots & \cos^{n-1} \phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\cos \phi_i - \cos \phi_j).$$

4. 若 $\beta\gamma = 0$, 则行列式为 α^n . 对于一般情形, 按第一行展开得到 $D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}$, 且有初值条件 $D_1 = \alpha, D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma$, 然后用数列的特征值和特征公式设 $D_n = A \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n + B \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n$, 代入 $n = 1, 2$ 解出 A 和 B , 得到 $D_n = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}$.

5. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c-a & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a & a-b \end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知 $D_n = b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}$. 初始条件是 $D_1 = a$, 因此知 $D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

(2) 按第 n 列拆项, 得 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & a_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b+(a_n-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + (a_n - b)E_{n-1} = b(a_1 - c)(a_2 -$

$c) \cdots (a_{n-1} - c) + (a_n - b)E_{n-1}$; 按第 n 列拆项 (或由对称性), 得 $E_n = c(a_1 - b)(a_2 - b) \cdots (a_{n-1} - b) + (a_n - c)E_{n-1}$.
两式联立得 $E_n = \frac{bf(c) - cf(b)}{b - c}$, 其中 $f(x) = (a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_n - x)$.

$$6. \text{ 法 1(拆项法): } \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五}$$

$$\text{项: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4x_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3x_4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_4x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 原行列式是 } 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

$$\text{法 2(加边法): } \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 然后用第 } i+1 \text{ 行减去第 1 行}$$

$$\text{的 } x_i \text{ 倍, } i=1,2,3,4, \text{ 得到 } \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

$$7. \text{ 采用第 6 题的法 1(拆项法), 最后剩下 } n+1 \text{ 项: } \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \cdots, \text{ 它们分别是 } (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} x_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} a_1 x_2 \cdots a_n, \cdots, \text{ 整理得到原}$$

$$\text{行列式为 } (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \right) - 1 \right].$$

8. 先计算 $n=1$ 时, $D_1 = \cos \alpha$; $n=2$ 时, $D_2 = \cos 2\alpha$; 因此可以猜测 $D_n = \cos n\alpha$. 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 $D_{n+1} = 2 \cos \alpha D_n - D_{n-1} = \cos(n+1)\alpha$, 知该假设成立.

9. 法 1: 将第 1 行至第 $n-1$ 行减去第 n 行, 并提出各行和各列公因子, 得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \frac{1}{a_{n-1} + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

再将第 1 列至第 $n-1$ 列减去第 n 列, 并提出各行和各列的公因子, 得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n(a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdot & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第 n 行展开得到递推式 $D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1}(b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n(a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n)} D_{n-1}$, 并直接计算出 D_2 , 得

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

法 2: 若 $a_i = a_j$ 或 $b_i = b_j (i \neq j)$, 即两行 (或两列) 相同, 则 $D_n = 0$. 因此 D_n 含有因子 $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$. 将

D_n 的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得 $D_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)} D'_n$. 显然 D'_n 也含有上述因子.

另一方面, 由于 D'_n 的 (i, j) 元为 $\prod_{k \neq j} (a_i + b_k)$, 所以每一个 a_i 在 D'_n 的展开式中的次数均为 $n-1$, 因此可设 $D_n =$

$\lambda \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$. 为确定常数 λ , 我们不妨令 $a_i = -b_i, i = 1, 2, \dots, n$. 此时 D'_n 为对角行列式, 且 $D_n = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \Rightarrow \lambda = 1$. 因此可得一样的结果.

5 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 秋高等代数 I 习题课 6 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.