数学分析 II 习题课讲义 (2025 春)

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 4 月 30 日

目录

1　定积分的基本概念与可积性

1.1　问题

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n^\alpha}=1,\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 试证明 $f(x)\in R[a,b]$ 的充要条件是: $\forall\varepsilon>0$, $\exists[a,b]$ 上满足以下条件的连续函数 $g(x)$ 和 $h(x)$: (1) $g(x)\le f(x)\le h(x),\forall x\in[a,b]$; (2) $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon$.

3. 函数 $g(x)\in R[a,b], f(u)\in C[A,B]$, 这里 A,B 分别是 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的上下确界. 证明 $f(g(x))\in R[a,b]$.

4. 函数 $f(x)\in R[a,b]$, 证明存在点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

5. 函数 $f(x)\in R[a,b]$, 且 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(x)>0$. 证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

6. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积. 证明对于任意的 $[a,b]$, $\displaystyle\lim_{h\to0}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x=0$.

7. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x),g(x)\in R[a,b],p,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\left(\int_a^b f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}}$.

(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p\|g\|_q\ge\|fg\|_1$.)

[一个简单应用, 留作思考题] $0<q\le p\le s\le\infty$, 那么存在 $\theta\in[0,1]$ 使得 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{\theta}{q}+\dfrac{1-\theta}{s}$. 证明 $\|f\|_p\le\|f\|_q^\theta\|f\|_s^{1-\theta}$.

8. (Minkowski 不等式). 同上题条件, 证明 $\displaystyle\left(\int_a^b(f+g)^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$.

(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p+\|g\|_p\ge\|f+g\|_p$, 这表明 L_p 空间是赋范线性空间.)

■ 自由选讲.

9. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x)\in R[a,b]$ 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

10. 已知 $(0,1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 问是否有 $f(x)\in R[0,1]$?

11. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.

12. $n\in\mathbb{N}_+, f(x)\in C[a,b], \displaystyle\int_a^b x^kf(x)\mathrm{d}x=0, k=0,1,\cdots,n$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个零点.

1.2　解答

1. $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N, n^\alpha(1-\varepsilon)<a_n<n^\alpha(1+\varepsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\varepsilon$, $\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\varepsilon$, $\displaystyle\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]\right|\le\frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\le\frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}\sum_{i=1}^n i^\alpha=\frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha\le\varepsilon\int_0^1x^\alpha\mathrm{d}x+\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\alpha+1}+\varepsilon\le2\varepsilon$. 这意味着 $\displaystyle\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}\left(\sum_{i=1}^n a_i-\sum_{i=1}^n i^\alpha\right)\right|\le4\varepsilon\Rightarrow$ 原极限 $\displaystyle=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum_{i=1}^n i^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$.

2. 必要性: $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists$ 分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\displaystyle\sum_{i=1}^n\omega_i(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\exists$ 阶梯函数 $s_1(x),s_2(x)$ 满足 $s_1(x)\le f(x)\le s_2(x)$ 且 $\displaystyle\int_a^b[s_2(x)-s_1(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\exists$ 连续函数 $g(x),h(x)$ 满足 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 且 $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]<\varepsilon$.

充分性: $g(x)$ 连续, $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}\Rightarrow\exists$ 分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{h(x)-g(x)\}(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\displaystyle\sum_{i=1}^n w_i^g(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}$. 在此分割下, $\displaystyle\sum_{i=1}^n w_i^f(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^n\left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}h(x)-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}g(x)\right](x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^n\left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{h(x)-g(x)\}+w_i^g\right](x_i-x_{i-1})\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

3. 用 Lebesgue 定理显然. 如不用 Lebesgue 定理, 则 $\forall\delta>0,\exists\tau>0$ s.t. $\forall|x-x'|<\tau,|f(x)-f(x')|<\delta$. 从而 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\sum\limits_{w_i^g>\tau}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$. 因为 $\{[x_{i-1},x_i]:w_i^{f\circ g}>\delta\}\subset\{[x_{i-1},x_i]:w_i^g>\tau\}$, 从而 $\sum\limits_{w_i^{f\circ g}>\delta}(x_i-x_{i-1})\le\sum\limits_{w_i^g>\tau}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$, 即 $f\circ g$ 可积.

4. 由 $f(x)\in R[a,b]$ 知存在 $[a_1,b_1]\subset(a,b)$, 使得 $w^f_{[a_1,b_1]}<1$. 同样的道理, 由 $f(x)\in R[a_1,b_1]$ 知存在 $[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1)$ 使得 $w^f_{[a_2,b_2]}<\dfrac{1}{2}$. 依此类推, 存在一系列闭区间套满足于 $w^f_{[a_n,b_n]}<\dfrac{1}{n}$, 只需取 $x_0\in\cap_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]$ 即可.

5. 由 4 题知存在连续点 $x_0\in(a,b)$, 因此 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$, $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\ge f(x_0)\delta>0$.

6. $\forall\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g(x)$ 满足 $\displaystyle\int_{a-1}^{b+1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x\right|&\le\left|\int_a^b[f(x+h)-g(x+h)]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b[g(x+h)-g(x)]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x\right|\\&\le2\int_{a-1}^{b+1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由一致连续性知 $\exists H>0$ s.t. $\forall x,x'\in[a-1,b+1],|x-x'|<H,|g(x)-g(x')|<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 取 $h<H$ 知 RHS $<\varepsilon$. 这意味着原极限为 0.

7. WLOG $\displaystyle\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}=1$, 则原命题的结论可改写为 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha\ln a+(1-\alpha)\ln b\le\ln(\alpha a+(1-\alpha)b)\Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha}\le\alpha a+(1-\alpha)b$. 令 $\alpha=\dfrac{1}{p},1-\alpha=\dfrac{1}{q},a=x^p,b=y^q\Rightarrow xy\le\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\Rightarrow\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b\left(\frac{f(x)^p}{p}+\frac{g(x)^q}{q}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.)

8. 由 Hölder 不等式, $\displaystyle\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x=\int_a^b(f+g)^{p-1}f\mathrm{d}x+\int_a^b(f+g)^{p-1}g\mathrm{d}x\le\left(\int_a^b(f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b f^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b(f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b g^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\int_a^b f^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right)$. 消去 $\displaystyle\left(\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$ 得到原不等式.
(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Minkowski 不等式.)

9. 由聚点原理知有界性, 即 $|f(x)|\le M$. 其次 $\forall\varepsilon>0,\forall x\in[a,b],\exists\delta_x>0$, s.t. $\omega_{U_0(x,\delta_x)}<\varepsilon$. 开覆盖 $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)\supset[a,b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\supset[a,b]$. 不妨设 $a\le x_1<\cdots<x_n\le b$. 取分割点 $y_0=a,y_{3i+1}=x_i-\dfrac{\varepsilon}{4nM},y_{3i+2}=x_i+\dfrac{\varepsilon}{4nM},y_{3i+3}\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap(x_{i+1}-\delta_{i+1},x_i+\delta_{i+1}),y_{3n}=b,i=1,2,\cdots,n-1$. 对此分割, $\sum\limits_{i=1}^{3n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon(b-a+1)$, 因此有可积性. 由于 $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\le\sum_{i=1}^{3n}\int_{y_{i-1}}^{y_i}|f(x)|\mathrm{d}x\le\varepsilon(b-a+1)$, 由 ε 的任意性知 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

10. 考虑 $f(x)=\tan\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=0$, 但是 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

11. 原式 $=2^{\alpha-\beta}\dfrac{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\frac{2}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}\xrightarrow{\text{定积分定义}}2^{\alpha-\beta}\dfrac{\left(\int_0^2x^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2x^\beta\mathrm{d}x\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\dfrac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$.

12. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 1 个零点, 记为 x_1. $\displaystyle\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 2 个零点, 记另一个为 x_2. 依此类推, $\displaystyle\int_a^b\left[\prod_{i=1}^n(x-x_i)\right]f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 $n+1$ 个零点.

2 定积分的性质与计算

2.1 问题

1. $f(x)\in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=f(0)$.

2. (Riemann-Lebesgue 引理). 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, $g(x+T)=g(x)$, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设函数 $f(x)\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: (1) $\displaystyle\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$; (2) 若 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$, 则 $\displaystyle\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_a^b[xf(x)]^2\mathrm{d}x\geq\frac{1}{4}$.

■ 自由选讲.

4. $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续. (1) 若 $f^2(t)\leq 1+2\displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$, 证明 $f(t)\leq 1+t$. (2) 若 $f(t)\leq K+\displaystyle\int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$, 其中 $K\geq 0$ 是常数, 证明 $f(1)\leq K\exp\left(\displaystyle\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right)$.

5. 试构造 $f(x)\in D[0,1]$ 但 $f'(x)\notin R[0,1]$ 的例子. 如果额外加上 $f'(x)$ 有界条件呢?

6. 试构造可积函数 f 和连续函数 g 使得 $f\circ g$ 不可积. 如果额外要求 g 是 C^∞ 函数呢?

7. 设函数 $f(x),g(x)\in R[a,b]$, 记 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 的一个分割, $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\}$. 任取 $\xi_i,\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$, 证明 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\displaystyle\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

8. $f(x)\in C[a,b]$, 且 $\exists\delta>0,M>0,\text{s.t.}\forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]$成立 $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|\leq M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x)\equiv 0$.

9. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明 $f(x)=xf(1)$.

10. 求积分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\mathrm{d}x$.

11. 求积分 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\mathrm{d}x$, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_n}{\ln n}$.

12. 求积分 $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

2.2 解答

1. 往证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=0$.

设 $\max\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|\leq M$. 由连续性知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in(-\delta,\delta)$, $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}&=\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\\&:=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

其中, $|I_1|\leq\dfrac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\varepsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq\varepsilon$,

$$|I_2|\leq 2M\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\varepsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M\frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M(1-\delta)\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n}=2M\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}\right)^n.$$

由于 $\dfrac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}<1$, 从而可取足够大的 n 使得 $|I_2|<\varepsilon$. 类似放缩 I_3. 此时 $|I_1+I_2+I_3|<3\varepsilon$.

2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$.

$\forall \varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 $s_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \le x < x_1 \\ C_2 & x_1 \le x < x_2 \\ \cdots & \\ C_m & x_{m-1} \le x \le x_m = b \end{cases}$ 使得 $\int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$. 设 $M = \sup\limits_{x\in[0,T]} |g(x)|$. 则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b (f(x)-s_\varepsilon(x))g(nx)\mathrm{d}x + \int_a^b s_\varepsilon(x)g(nx)\mathrm{d}x\right| \\ &\le \int_a^b |f(x)-s_\varepsilon(x)|g(nx)\mathrm{d}x + \left|\sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)\mathrm{d}x\right| \\ &\le M\varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)\mathrm{d}x \le M\varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_i MT.\end{aligned}$$

其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0$, 这也意味着 $\int_c^d g(x)\mathrm{d}x = \int_c^{c+T} g(x)\mathrm{d}x + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{c+kT}^d g(x)\mathrm{d}x$ (设 $c + kT \le d < c + (k+1)T$) $= \int_{c+kT}^d g(x)\mathrm{d}x \le MT$, 对于 $\forall c, d \in \mathbb{R}$.

选择一个足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_i MT < \varepsilon$. 从而 $\left|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right| \le (M+1)\varepsilon$. 由极限定义立得结论.

3. (1) 由分部积分,

$$\begin{aligned}&\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = xf^2(x)|_a^b - \int_a^b f(x)[xf(x)]'\mathrm{d}x = -\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ \Rightarrow &\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 由 Cauchy 不等式立得.

4. (1) 原条件等价于 $\frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}} \le 1 \overset{\text{两边积分}}{\Rightarrow} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}}\mathrm{d}t \le \int_0^x 1\mathrm{d}t \overset{\text{原函数}}{\Rightarrow} \left.\sqrt{1+2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\right|_0^x \le x \Rightarrow$ $\sqrt{1+2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s} \le 1 + x \Rightarrow f(x) \le \sqrt{1+2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s} \le 1 + x$.

(2) 注意到

$$\begin{aligned}\left[\int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s \exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\right]' &= f(t)g(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right) - g(t)\int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right) \\ &\le Kg(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right) = \left[K - K\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\right]',\end{aligned}$$

两边积分得到

$$\int_0^1 f(s)g(s)\mathrm{d}s \exp\left(-\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right) \le K - K\exp\left(-\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right) \Rightarrow f(1) \le K + K\int_0^1 f(s)g(s)\mathrm{d}s \le K\exp\left(\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right).$$

(请大家在积分时注意从相同起点开始积分, 这里补上常数 K 也是为了保证两边在 $t = 0$ 处都取 0. 这个题有微分方程背景, 可以先看懂答案, 再试图理解.)

5. 可以验证 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0\end{cases} \in D[0,1]$, 但 $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上无界. 若额外有 $f'(x)$ 有界, 可参考 Volterra's function.

6. 设 $\mathcal{C}$ 是 fat cantor set. 考虑 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1\end{cases}$, $g(x) = 1 - \mathrm{dist}(x, \mathcal{C})$, 但 $f(g(x)) = 1_{x\in\mathcal{C}}$ 在正测集 $\mathcal{C}$ 上不连续. 若额外有 $g(x) \in C^\infty$, 可使用光滑版本的 Urysohn 引理.

7. $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(\eta_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i := S_1 + S_2$. 显然 $\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} S_1 = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 记 $\max_{x\in[a,b]} |f(x)| = M_f$. 由 $g(x)$ 的可积性, 知 $|S_2| \le \sum_{i=1}^{n} M_f \omega_g([x_{i-1},x_i])\Delta x_i = M_f[\overline{S}_g(\Delta) - \underline{S}_g(\Delta)] \overset{\lambda(\Delta)\to 0}{\to} 0$.

8. 不妨设 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)>0$. 由连续性, $\exists \kappa>0$, s.t. $\forall x\in(x_0-\kappa,x_0+\kappa), f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\forall[\alpha,\beta]\subset(x_0-\kappa,x_0+\kappa)$, 成立 $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha) > M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$(最后一个大于号成立只需令 $\beta-\alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

9. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha^2}{2}f(1)$. 由集合 $\{q\alpha : q\in\mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha) = qf(\alpha)$, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x = f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha)\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$.

10. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}(1-\cos x) \overset{\text{分部积分}}{=} (1-\cos x)\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\mathrm{d}(\ln\sin x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin x + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x = [\cos x - \ln(1+\cos x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - 1$.

11. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2nx)}{2\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos[(2n-2)x]\cos 2x + \sin[(2n-2)x]\sin 2x}{2\sin x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos[(2n-2)x](1-2\sin^2 x) + 2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos[(2n-2)x]}{2\sin x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x\cos[(2n-2)x] + 2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x \\
&= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x]\cos x\mathrm{d}x = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n-1)x\mathrm{d}x \\
&= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1}\cos[(2n-1)x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1}.
\end{aligned}$$

由于 $I_1 = 1$, 因此 $I_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}$.

12. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2(-x)}{1+e^{x}}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

3 定积分中值定理, 定积分的应用 (1)

3.1 问题

1. 证明对于 $\forall x>0$, 存在唯一的 $\xi_x>0$ 使得 $\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t = xe^{\xi_x^2}$ 成立, 并求 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi_x}{x}$.
2. 证明 $\left|\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{a}$, 其中 $0<a<b$.
3. 函数 $f(x)\in D[0,1]$, 且 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi) = f'(\xi)$.
4. 求由下列曲线所围成的平面图形的面积: (1) $y^2 = x^2(1-x^2)$; (2) $y^2 = x, x^2+y^2 = 1$(在第一、四象限的部分).

■ 自由选讲.

5. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x)\in R[0,x], \forall x\in(0,+\infty)$, 且 $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.
6. $f(x)\in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x) = f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)\equiv 0$.
7. $f(x)\in R[0,1], 0<m\le f(x)\le M$, 求证 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{(m+M)^2}{4mM}$. (编者注: 本题比较 tricky.)
8. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, $f(x+y) = f(x)+f(y)+xy(x+y)$, 求 $f(x)$.
9. 求积分 $I = \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

10. 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^{2025} x}\mathrm{d}x$.

11. 求积分 $I = \int_0^1 [\sqrt[7]{1-x^3} - \sqrt[3]{1-x^7}]\mathrm{d}x$.

12. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 证明 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. (能试着用定积分第二中值定理吗?)

13. $f(x) \in C[a,b]$, 且对任意 $g(x) \in C^\infty[a,b]$ 满足 $g(a) = g(b) = 0$ 都有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明 $f(x) \equiv 0$.

14. (Dirichlet 判别法). 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\forall A \geq a$, $g(x) \in R[a,A]$ 且 $\left|\int_a^A g(x)\mathrm{d}x\right| \leq M$ 恒成立. 证明极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 存在.

15. 试求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

3.2 解答

1. 第一问由定积分第一中值定理和函数 e^{t^2} 的单调性显然. 其次

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi_x}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t - \ln x}}{x} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t - \ln x}{x^2}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t} - \frac{1}{x}}{2x}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x^2} - \int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{2x^2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2e^{x^2}}{2x^2e^{x^2} + 4x\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x^2}}{xe^{x^2} + 2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+1)e^{x^2}}{(2x^2+3)e^{x^2}}} = 1.
\end{aligned}$$

2. $\left|\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x\right| \overset{t=x^2}{=} \left|\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right|$. 由于 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 非负单调递减, 因此由定积分第二中值定理, 原积分 $= \frac{1}{2a}\left|\int_{a^2}^{\xi}\sin t\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{a}$.

3. 由定积分第一中值定理, $\exists\xi \in [0,\frac{1}{2}]$, s.t. $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x}f(x)\mathrm{d}x = e^{1-\xi}f(\xi)$, 这也意味着对于函数 $g(x) = e^{-x}f(x)$ 成立 $g(1) = g(\xi)$. 由 Rolle 微分中值定理知存在 $g'(\zeta) = 0 \Rightarrow f'(\zeta) = f(\zeta)$.

4. (1) $S = 4\int_0^1\sqrt{x^2(1-x^2)}\mathrm{d}x \overset{x=\sin\theta}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{4\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$.

(2) 先解出交点, 然后用原函数直接计算 $S = 2\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{x}\mathrm{d}x + 2\int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. 凸函数开区间上连续 $\Rightarrow$ 闭区间上可积. 由 $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f\left(\frac{t}{x}\cdot x\right)\mathrm{d}\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux)\mathrm{d}u \Rightarrow F\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right) = \int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i(ux_i)\right)\mathrm{d}u \leq \int_0^1\sum_{i=1}^n t_if(ux_i)\mathrm{d}u = \sum_{i=1}^n t_iF(x_i)$ 知 $F(x)$ 凸.

6. 构造 $G(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2$, $G'(x) = g(x)$ 单调递减, $g(0) = 0$. 因此 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 又因为 $G(0) = 0$, $G(x) \geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

7. 显然有 $(M - f(x))\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m}\right) \leq 0$, 因此 $\int_0^1 (M-f(x))\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m}\right)\mathrm{d}x \leq 0 \Leftrightarrow M\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{m}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq 1 + \frac{M}{m}$. 利用均值不等式, LHS $\geq 2\sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$.

8. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(y) + \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^y f(t)\mathrm{d}t + yf(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$. 两式相减得 $xf(y) + \frac{x^3y}{3} = yf(x) + \frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^3}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$. 经验证符合题意.

9. 作代换 $x=\tan t$ 得 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$. 再作代换 $t=\frac{\pi}{4}-t$ 得 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln 2-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

10. 记 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cot^{2025}x}\mathrm{d}x$. 作换元 $t=\frac{\pi}{2}-x$ 知 $I=J$. 而 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 因此 $I=J=\frac{\pi}{4}$.

11. $\int_0^1\sqrt[7]{1-x^3}\mathrm{d}x\overset{y=\sqrt[7]{1-x^3}}{=}\int_0^1 y\mathrm{d}x\overset{\text{几何意义}}{=}\int_0^1 x\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt[3]{1-y^7}\mathrm{d}y\Rightarrow I=\int_0^1\sqrt[3]{1-y^7}\mathrm{d}y-\int_0^1\sqrt[3]{1-x^7}\mathrm{d}x=0$.

12. $f(x)$ 单调, 并考虑 $g(x)=x-\frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理,

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\=&f(a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+(f(b)-f(a))\int_{\xi}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=(f(b)-f(a))\frac{1}{2}(b-\xi)(\xi-a)\geq 0.\end{aligned}$$

13. 用反证法. WLOG 设 $f(x_0)>0$, 由连续性知 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b], f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$. 从而定义

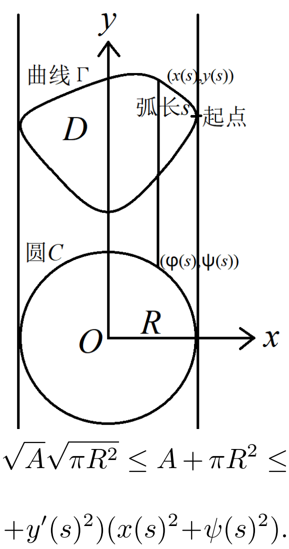
$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x_0)}{2}, & x\in[x_0-\frac{\delta}{2},x_0+\frac{\delta}{2}]\\ 0, & x\in[a,x_0-\delta]\cup[x_0+\delta,b]\\ C^{\infty}\text{连接}, & \text{otherwise}\end{cases},$$

此时 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\geq\int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}}\frac{f^2(x_0)}{4}\mathrm{d}x>0$, 矛盾.

14. $\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\text{s.t.}\forall x\geq X,|f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{4M}$. 从而 $\forall A',A''\geq X$, $\left|\int_{A'}^{A''}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\overset{\text{定积分第二中值定理}}{=}\left|f(A')\int_{A'}^{\xi}g(x)\mathrm{d}x+f(A'')\int_{\xi}^{A''}g(x)\mathrm{d}x\right|\leq 2M(|f(A')|+|f(A'')|)\leq\varepsilon$. 然后由柯西收敛定理知极限存在.

15. 设弦方程为 $x-\frac{1}{2}=ky$, 与抛物线交点纵坐标为 y_1,y_2, 则围成区域的面积 $S=\int_{y_1}^{y_2}\left(ky+\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{k}{2}(y_2-y_1)(y_2+y_1)+\frac{1}{2}(y_2-y_1)-\frac{1}{6}(y_2-y_1)(y_2^2+y_1y_2+y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1+y_2=2k,y_1y_2=-1$. 则 $S=\frac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k=0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.

补充 (不要求掌握)



等周问题: 长为 L 的曲线何时围成区域面积最大? 答案: 圆 (一年级小学生皆可猜出).

证明: 设 D 为凸区域 (D 中任意两点连线都在 D 内). 设 $\Gamma:\begin{cases}x=x(s)\\y=y(s)\end{cases}\in C^1[0,L]$, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2+y'(s)^2=1$, 且 D 的面积为 $A=\int_0^L x\mathrm{d}y=\int_0^L x(s)y'(s)\mathrm{d}s$. 设 $C:\begin{cases}x=\varphi(s)=x(s)\\y=\psi(s)\end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为半径的圆, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面积为 $\pi R^2=-\int_0^L y\mathrm{d}x=-\int_0^L\psi(s)x'(s)\mathrm{d}s$. 从而 $A+\pi R^2=\int_0^L(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))\mathrm{d}s\leq\int_0^L\sqrt{(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))^2}\mathrm{d}s\leq\int_0^L\sqrt{(x'(s)^2+y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)}\mathrm{d}s=RL$. 因此成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2}\leq A+\pi R^2\leq RL\Rightarrow A\leq\frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))^2=(x'(s)^2+y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s)+\psi(s)y'(s))^2=0$. 由于 $x(s)^2+\psi(s)^2=R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s)+\psi(s)\psi'(s)=0\Rightarrow\psi'(s)=y'(s),\psi(s)=y(s)+y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2+(y-y_0)^2=R^2$, 圆也!

4 定积分的应用 (2)

4.1 问题

■ 自由选讲.

1. 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?
2. 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r=e^\theta$ 在 $(r,\theta)=(1,0)$ 和 $(r,\theta)=(e^\phi,\phi)$ 之间一段的重心坐标.
3. 求双扭线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ 绕轴 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.
4. 证明极坐标下曲线 $r=r(\theta)$ 与 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为 $V=\dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$.
5. 求圆的渐伸线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}, t\in[0,2\pi]$ 上 $A(a,0),B(a,-2\pi a)$ 之间部分与直线 $\overline{AB}$ 围成图形的面积.
6. 推导重力场中粒子数量密度的分布率 $n(z)=n(0)e^{-\frac{mgz}{k_BT}}$, 其中 T 是温度, k_B 是玻尔兹曼常量.
7. 计算极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t|\sin t|\mathrm{d}t}{x^2}$.
8. 已知 $b>e^2$, 证明 $\displaystyle\int_{e^2}^b\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}<\frac{2b}{\ln b}$. BTW, 你能不能找到最优常数 $C\geq 0$, 使得 $\displaystyle\int_{e^2}^b\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}+C\leq\frac{2b}{\ln b}$ 恒成立.
9. 证明 π 是无理数. 可以按照以下步骤: (1) 设 $\pi=\dfrac{a}{b},a,b\in\mathbb{Z}$, 定义 $f(x)=\dfrac{b^nx^n(\pi-x)^n}{n!}$, 证明 $\forall i\in\mathbb{N}_+,f^{(i)}(0),f^{(i)}(\pi)$ 都是整数. (2) 证明定积分 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 也是整数. (3) 证明 $0<\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x<1$, 得到矛盾.
10. $f(x)\in C^2[0,1],f(0)=f(1)=f'(0)=0,f'(1)=1$, 证明 $\displaystyle\int_0^1[f''(x)]^2\mathrm{d}x\geq 4$, 取等号当且仅当 $f(x)=x^3-x^2$.
11. $f(x)\in C^1[0,1],f(x)\in[0,1],f(0)=f(1)=0,f'(x)$ 单调递减. 证明曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的弧长不大于 3.
12. $f(x)\in C^2[a,b]$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$.
13. $f(x)\in D[0,1]$, $f'(x)\in R[0,1]$, $|f'(x)|\leq M$. 定义 $A_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. (1) 证明 $|A_n|\leq\dfrac{M}{2n}$. (你可以推广到高阶和高维吗? 答案是 $O(n^{-\frac{k}{d}})$.) (2) 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nA_n$.
14. (Jensen 不等式). 凸函数 $\varphi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x):[a,b]\to[0,\infty)$ 可积且 $\displaystyle\int_a^b p(x)\mathrm{d}x>0$. 证明对于任意 $f(x)\in R[a,b]$, $\varphi\left(\dfrac{\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)\leq\dfrac{\int_a^b\varphi(f(x))p(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}$.

4.2 解答

1. 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h)=\dfrac{1}{2}\dfrac{4}{3}\pi R^3+\displaystyle\int_0^h\pi\left(\sqrt{R^2-z^2}\right)^2\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi R^3+\pi\left(R^2h-\frac{1}{3}h^3\right)$. 对应位移 $[h,h+\mathrm{d}h]$ 所做的微功 $\mathrm{d}W=gV(h)\rho\mathrm{d}h$. 从而 $W=g\displaystyle\int_0^R V(h)\mathrm{d}h=g\left(\frac{2}{3}\pi R^4+\frac{5}{12}\pi R^4\right)=\frac{13}{12}g\pi R^4$.
2. $\bar{x}=\dfrac{\int_0^\phi e^{2\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^\phi e^\theta\mathrm{d}\theta}=\dfrac{e^{2\phi}(\sin\phi+2\cos\phi)-2}{5(e^\phi-1)},\bar{y}=\dfrac{\int_0^\phi e^{2\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^\phi e^\theta\mathrm{d}\theta}=\dfrac{e^{2\phi}(2\sin\phi-\cos\phi)+1}{5(e^\phi-1)}$.
3. 原命题等价于 $r^2=2a^2\sin 2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases}x=a\sqrt{2\sin 2\theta}\cos\theta\\ y=a\sqrt{2\sin 2\theta}\sin\theta\end{cases}$, 则面积 $S=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi y(\theta)\sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta=8\pi a^2$.
4. 对应 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的扇形面积 $\mathrm{d}S=\dfrac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$, 其质心位于 $\dfrac{2}{3}r(\theta)$ 处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为 $\mathrm{d}V=\dfrac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta 2\pi\dfrac{2}{3}r(\theta)\sin\theta=\dfrac{2\pi}{3}r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$. 两边积分得到结果.
5. 直线 AB 的参数方程是 $\begin{cases}x=\phi(t)=a\\ y=\psi(t)=t\end{cases}, t\in[-2\pi a,0]$. 故 $S=-\displaystyle\int_0^{2\pi}y(t)\mathrm{d}x(t)-\int_{-2\pi a}^0\psi(t)\mathrm{d}\phi(t)=-\int_0^{2\pi}a(\sin t-$

$t\cos t)a(t\cos t)\mathrm{d}t+0=\dfrac{4}{3}\pi^3a^2+\pi a^2$.

6. 由二力平衡, 压力差 $\mathrm{d}F$ 托起了单位体积内的粒子重力 $\mathrm{d}G$. 从而 $\mathrm{d}F+\mathrm{d}G=0\Rightarrow S\mathrm{d}p+\rho gS\mathrm{d}z=0\Rightarrow \mathrm{d}p+nmg\mathrm{d}z=0$. 由 $p=nk_BT$ 知 $\mathrm{d}p=k_BT\mathrm{d}n\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}n}{n}=-\dfrac{mg}{k_BT}\mathrm{d}z$. 两边积分知 $\log n(z)-\log n(0)=\dfrac{-mgz}{k_BT}\Rightarrow n(z)=n(0)e^{-\frac{mgz}{k_BT}}$.

7. 原式 $\overset{t=xt}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^1 xt|\sin(xt)|\mathrm{d}(xt)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 t|\sin(xt)|\mathrm{d}t\overset{\text{R-L Lemma}}{=}\int_0^1 t\mathrm{d}t\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}$.

8. 考虑 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$, 从而 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}>0\Rightarrow f(x)$ 单调递增. 因此由定积分第二中值定理, $\exists\xi\in[e^2,b]$ 使得

$$\int_{e^2}^b\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}=\int_{e^2}^b\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{b}}{\ln b}\int_\xi^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{b}}{\ln b}(\sqrt{b}-\sqrt{\xi})<\frac{2b}{\ln b}.$$

上述做法纯扯淡. 其实我们可以构造 $g(b)=\dfrac{2b}{\ln b}-\displaystyle\int_{e^2}^b\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$, $g'(b)=\dfrac{2\ln b-2}{(\ln b)^2}-\dfrac{1}{\ln b}=\dfrac{\ln b-2}{(\ln b)^2}>0\Rightarrow g(b)>g(e^2)=e^2$.

9. (1) $f(x)$ 是一个次数从 n 到 $2n$ 的多项式. 至于 $f^{(i)}(0)$ 是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时 $i\geq n$, 求导后得到的非零常数值是 $i!c$, 且 c 是整数除以 $n!$ 得到的有理数, 从而 $i!c$ 是整数. 由于 $f(x)=f(\pi-x)\Rightarrow f^{(i)}(\pi)=(-1)^nf^{(i)}(0)$, 因此 $f^{(i)}(\pi)$ 也是整数.

(2) 由分部积分, $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=f(x)(-\cos x)|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x=f(0)+f(\pi)+f'(x)\sin x|_0^\pi-\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x=f(0)+f(\pi)-\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x$. $f(x)$ 是 $2n$ 此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=f(0)+f(\pi)-f''(0)-f''(\pi)+\cdots+(-1)^nf^{(2n)}(0)+(-1)^nf^{(2n)}(\pi)$, 因此是整数.

(3) 在区间 $[0,\pi]$ 上成立 $0\leq a-bx=b(\pi-x)\leq a$, 因此 $0\leq f(x)=\dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}\leq\dfrac{\pi^na^n}{n!}$, 从而 $0<\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x\leq\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x<\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$. 当 n 足够大时, $\dfrac{\pi^{n+1}a^n}{n!}<1$.

10. 令 $p(x)=x^3-x^2$, 从而有 $\displaystyle\int_0^1[(f''(x))^2-(p''(x))^2]\mathrm{d}x=\int_0^1[f''(x)-p''(x)]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1f''(x)p''(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1[p''(x)]^2\mathrm{d}x\geq 0+2f'(x)p''(x)|_0^1-2\int_0^1f'(x)p'''(x)\mathrm{d}x-8=2f'(1)p''(1)-2f(x)p'''(x)|_0^1+2\int_0^1f(x)p''''(x)\mathrm{d}x-8=0$.

11. 设 $x_0=\underset{x\in[0,1]}{\arg\max}f(x)\Rightarrow f'(x_0)=0$. 从而成立弧长估计

$$s=\int_0^1\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x\leq\int_0^1(1+|f'(x)|)\mathrm{d}x=1+\int_0^{x_0}f'(x)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^1f'(x)\mathrm{d}x=1+2f(x_0)\leq 3.$$

12. 由分部积分和定积分第一中值定理,

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}(x-a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}-\int_a^{\frac{a+b}{2}}f'(x)\mathrm{d}\frac{(x-a)^2}{2}\\&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{8}+\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{(x-a)^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x\\&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{8}+f''(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{(x-a)^2}{2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^bf(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{8}+f''(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{(x-b)^2}{2}\mathrm{d}x.$$

两式相加得 $\displaystyle\int_a^bf(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))\frac{(b-a)^3}{48}\overset{\text{Darboux}}{=}f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$.

13. (1) 直接计算即可:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nf\left(\frac{k}{n}\right)\right|&=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\right|\leq\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\\&\leq\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}M\left(\frac{k}{n}-x\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\frac{M}{2n^2}=\frac{M}{2n}.\end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned}A_n &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2} + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1))\\&= \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n}\right) + \frac{1}{2n}(f(0)-f(1)).\end{aligned}$$

利用分部积分,

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right) = f(x)\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)\Bigg|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'(x)\mathrm{d}x := \frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n} - B_n^k,$$

其中

$$\begin{aligned}B_n^k &= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'(x)\mathrm{d}x\\&= f'(\xi_{k,1})\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)\mathrm{d}x + f'(\xi_{k,2})\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)\mathrm{d}x = -\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2} + \frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}.\end{aligned}$$

综上所述, 我们有

$$\begin{aligned}nA_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{f'(\xi_{k,2})-f'(\xi_{k,1})}{8n} + \frac{f(0)-f(1)}{2}\\ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} nA_n &= \frac{1}{8}\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right) + \frac{f(0)-f(1)}{2} = \frac{f(0)-f(1)}{2}.\end{aligned}$$

14. WLOG $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x = 1$, 并设 $\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x = c$, 任取 $k\in[\varphi'_-(c),\varphi'_+(c)]$, 构造 “切” 直线 $l: y = k(x-c)+\varphi(c)$. 由凸函数性质知 $\varphi(x)\geq l(x)$ 恒成立. 从而 $\varphi(c) = l(c) = k\left(\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x - c\right)+\varphi(c) = \int_a^b [k(f(x)-c)+\varphi(c)]p(x)\mathrm{d}x = \int_a^b l(f(x))p(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b \varphi(f(x))p(x)\mathrm{d}x$.

5 广义积分

5.1 问题

1. 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\mathrm{d}x, \alpha>0$ 的收敛性.
2. 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$ 的收敛性与绝对收敛性.
3. 讨论广义积分 $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\mathrm{d}x$ 的收敛性.
4. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性.
5. 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
6. 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调, $g(x)\neq 0$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 $T>0$ 为周期的连续函数. 证明无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)|g(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.
7. $f(x), g(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调递减的连续正函数, 并且 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散. 记 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, 讨论 $\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性.

■ 自由选讲.

8. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^p}\mathrm{d}x, p\geq 0, a\in\mathbb{R}$ 的收敛性.

9. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q|\sin x|^r}\mathrm{d}x, p,q,r>0$ 的收敛性.

10. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 的收敛性.

11. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性和绝对收敛性.

12. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$.

13. 求积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.

14. 求积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$.

15. (Dirichlet 积分). 求积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$. 你可以利用恒等式 $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$.

16. (Euler 积分). 求积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$.

17. (Euler-Poisson 积分). 利用数列 $\left\{\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right\}$ 的极限, 求积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$. (你可以使用如下命题: 当 $a\geq 1$ 时, $0\leq e^{-x}-\left(1-\frac{x}{a}\right)^a\leq\frac{x^2}{a}e^{-x}$ 在区间 $[0,a]$ 上恒成立. 这由导数知识容易验证.)

18. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭可积, $f(+\infty)=A, f(-\infty)=B$. 证明 $\forall a\in\mathbb{R}$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+a)-f(x)]\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.

19. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 收敛.

20. 广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $\forall k=1,2,\cdots,n, u_k(x)$ 均单调有界. 证明 $\int_0^{+\infty}f(x)\prod\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

21. $a,b>0$, 广义积分 $\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t$.

22. 利用余元公式 $\mathrm{Beta}(p,1-p):=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}(0<p<1)$ 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\mathrm{d}x$.

23. 计算极限 $\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{t}(e^x-x-1)}\mathrm{d}x$. 你可能需要用到第 17 题的结论.

5.2 解答

1. 由于当 $x\to+\infty$ 时 $x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^\alpha\sim x\left(\frac{1}{2x^2}\right)^\alpha\sim x^{1-2\alpha}$, 因此 $\alpha>1$ 时收敛, $0<\alpha\leq 1$ 时发散.

2. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, $\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos(\xi(x))}{6}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$, 其中 $\xi(x)\in\left[0,\frac{\sin x}{x}\right]\cup\left[\frac{\sin x}{x},0\right]$. 由于 $\left|\frac{\cos(\xi(x))}{6}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\right|\leq\frac{1}{6x^3}$ 绝对收敛, 而 $\frac{\sin x}{x}$ 条件收敛, 因此原积分条件收敛.

3. 做变元替换 $t=\frac{1}{x}$ 知原积分为 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{2}}\ln(1+t)}$. 由于变上限积分 $\int_1^T\sin t\mathrm{d}t$ 有界, $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}\ln(1+t)}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法知收敛.

4. 记 $I_1=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x\overset{x=\frac{1}{x}}{=}\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{2-p}}\mathrm{d}x$. 先讨论 I_1, 有 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x\overset{t=x+\frac{1}{x}}{=}\int_2^{+\infty}\frac{2^{p-1}\sin t}{(t+\sqrt{t^2-4})^{p-1}\sqrt{t^2-4}}\mathrm{d}t$. 当 $p>0$ 时, 变上限积分 $\int_2^A\sin t\mathrm{d}t$ 有界, $\frac{1}{(t+\sqrt{t^2-4})^{p-1}\sqrt{t^2-4}}$ 在 t 充分大后单调递减趋于 0, 因此原积分收敛. 当 $p=0$ 时, 后者在 t 充分大后单调且不趋于 0 或 $+\infty$, 由 Abel 判别法知其收敛性与 $\int_2^{+\infty}\sin t\mathrm{d}t$ 收敛性相同, 因此发散. 当 $p<0$ 时显然发散. 对于 I_2 可直接将 $2-p$ 代入 p 得到 $2-p>0$ 时收敛, 否则发散. 原积分收敛当且仅当 I_1,I_2 同时收敛, 因此其在 $0<p<2$ 时收敛.

5. 不妨设 $f(x)\geq 0$ 且单调递减. 从而 $xf(x)=2\dfrac{x}{2}f(x)\leq 2\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)\mathrm{d}t$, 由 Cauchy 收敛准则知 x 充分大后 $xf(x)$ 充分小, 即极限为 0.
6. "$\Rightarrow$": 由无穷积分收敛, $f(x)$ 单调知可不妨设 $f(x)\geq 0$ 且单调递减, 那么由 $|g(x)|$ 的有界性立得结果.
"$\Leftarrow$": 由无穷积分收敛, $f(x)$ 单调, $g(x)$ 连续且不恒为 0 知可不妨设 $f(x)\geq 0$ 且单调递减, 并找到区间 $[a,b]\subset[0,T]$ 使得 $\forall x\in[a,b]$, $|g(x)|\geq m$. 从而对于 $\forall k_1\leq k_2\in\mathbb{Z}$, 成立

$$\begin{aligned}
\int_{a+k_1T}^{a+k_2T}f(x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_{a+kT}^{b+kT}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_{b+kT}^{a+(k+1)T}f(x)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_{a+kT}^{b+kT}f(x)\mathrm{d}x+\frac{T-b+a}{b-a}\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_{a+kT}^{b+kT}f\left(\frac{T-b+a}{b-a}(x-a-kT)+b+kT\right)\mathrm{d}x\\
&\leq\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_{a+kT}^{b+kT}f(x)\mathrm{d}x+\frac{T-b+a}{b-a}\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_{a+kT}^{b+kT}f(x)\mathrm{d}x\\
&=\frac{T}{b-a}\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_{a+kT}^{b+kT}f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{T}{(b-a)m}\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_{a+kT}^{b+kT}f(x)|g(x)|\mathrm{d}x\leq\frac{T}{(b-a)m}\int_{a+k_1T}^{a+k_2T}f(x)|g(x)|\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

其中第一个不等号是因为当 $x\in[a+kT,b+kT]$ 时, $f\left(\dfrac{T-b+a}{b-a}(x-a-kT)+b+kT\right)\leq f(x)$, 这由 $f(x)$ 单调递减保证. 然后利用 Cauchy 收敛原理知广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
7. 可收敛可发散. 可发散是显然的, 一个可收敛的例子是 $h(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ \dfrac{1}{x^2}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$, 然后交替构造 $f(x)$ 和 $g(x)$ 让它们在许多区间为常数函数. 比如说, 他们在 $x=n$ 处分开后, 在接下来长度为 n^2 的区间里, 令 $f(x)\equiv\dfrac{1}{n^2}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$; 然后在长度为 1 的区间里, $f(x)$ 连续地连接两点 $\left(n^2+n,\dfrac{1}{n^2}\right)$ 和 $\left(n^2+n+1,\dfrac{1}{(n^2+n+1)^2}\right)$, $g(x)\equiv\dfrac{1}{x^2}$; 再在接下来长度为 $(n^2+n+1)^2$ 的区间里, 令 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $g(x)\equiv\dfrac{1}{(n^2+n+1)^2}$.
8. (1) 当 $a\neq 0,p>0$ 时, $\dfrac{1}{1+x^p}$ 单调递减趋于 0, $\displaystyle\int_0^N\cos ax\mathrm{d}x$ 有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛.
(2) 当 $a\neq 0,p=0$ 时显然发散. (3) 当 $a=0,p>1$ 时显然收敛. (4) 当 $a=0,0\leq p\leq 1$ 时显然发散.
9. 显然当 $q\leq p+1$ 时原积分发散. 当 $q>p+1$ 时, 一方面,

$$I=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}\mathrm{d}t\leq 2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^p\pi^p\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+(k\pi)^q|\frac{2}{\pi}t|^r}\leq C_1\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^p}{k^{\frac{q}{r}}}\int_0^{2(k\pi)^{\frac{q}{r}}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}.$$

另一方面,

$$I=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q|\sin t|^r}\mathrm{d}t\geq\sum_{k=0}^{+\infty}(k\pi)^p\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+[(k+1)\pi]^q|t|^r}\geq C_2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^p}{(k+1)^{\frac{q}{r}}}\int_0^{\pi[(k+1)\pi]^{\frac{q}{r}}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}.$$

由于: (1) $r>1$ 时 $\displaystyle\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}$ 一致有界; (2) $r=1$ 时 $\displaystyle\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}\sim\ln A$; (3) $r<1$ 时 $\displaystyle\int_0^A\frac{\mathrm{d}t}{1+t^r}\sim A^{1-r}$; 因此原积分收敛当且仅当 $q>(p+1)\max(r,1)$.
10. 函数恒正, 只需讨论有界性. 令 $u_k=\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2x}$, 则

$$\begin{aligned}
u_k&\leq k\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2x}=k\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2x}=2k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^6\pi^6\sin^2x}\\
&\leq 2k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+4(k-1)^6\pi^4x^2}=\frac{k}{\pi(k-1)^3}\int_0^{(k-1)^3\pi^3}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\sim\frac{1}{2k^2}.
\end{aligned}$$

由于 $\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2x}=\sum_{k=1}^{n}u_k\sim\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<+\infty$, 因此原广义积分收敛.

11. 先考虑收敛性. 显然 $p \le 0$ 时发散. $p>0$ 时, 由于 $\left|\int_a^A e^{\sin x}\sin 2x\mathrm{d}x\right| = 2\left|\int_{\sin a}^{\sin A} e^{\sin x}\sin x\mathrm{d}\sin x\right| = 2|e^{\sin A}(\sin A-1)-e^{\sin a}(\sin a-1)|<8e$, 且 $\dfrac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty}\dfrac{e^x\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 我们只需考察积分在 0 处的性质. 由于当 $x\to 0$ 时 $\dfrac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\sim\dfrac{2}{x^{p-1}}$, 因此 $p\ge 2$ 时发散, $0<p<2$ 时收敛. 再考虑绝对收敛性. $1<p<2$ 时, $\left|\dfrac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right|\le\dfrac{e}{x^p}$, 因此绝对收敛. $0<p\le 1$ 时, $\left|\dfrac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\right|\ge\dfrac{2^p}{e}\left|\dfrac{\sin 2x}{(2x)^p}\right|\ge\dfrac{1}{e}\left|\dfrac{\sin^2 2x}{(2x)^p}\right|=\dfrac{1}{2e}\left(\dfrac{1-\cos 4x}{(2x)^p}\right)$, 而 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos 4x}{(2x)^p}\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(2x)^p}\mathrm{d}x$ 发散, 因此原积分条件收敛.

12. 做变换 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$\int_0^1\cos^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\int_1^A\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}\frac{\cos^n t}{t^2}\mathrm{d}t:=I_1+I_2.$$

对于 I_1, 由定积分第二中值定理知 $\exists\xi_A\in[1,A]$ s.t. $I_1=\int_1^{\xi_A}\cos^n t\mathrm{d}t$. 因此对于任意固定的 A, 当 $n\to+\infty$ 时 $I_1\to 0$. 对于 I_2, 成立 $|I_2|\le\int_A^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{A}$. 因此 $\forall\varepsilon>0$, 选择 $A=\dfrac{2}{\varepsilon}$, 则 $|I_2|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$, 并选择充分大的 n 使得 $|I_1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 此时 $|I|\le\varepsilon$, 由极限定义知结论成立.

13. 做倒数变换, 知 $I(\alpha)=\int_{+\infty}^0\dfrac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{(1+x^{-2})(1+x^{-\alpha})}=I(-\alpha)$. 又有 $I(\alpha)+I(-\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{2}$, 因此 $I(\alpha)\equiv\dfrac{\pi}{4}$.

14. $I=\dfrac{1}{3}\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{3}\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+4}\mathrm{d}x\overset{x=2x}{=}\dfrac{1}{3}\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{3}\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(2x)}{(2x)^2+4}\mathrm{d}(2x)=\dfrac{1}{6}\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x-\dfrac{\ln 2}{6}\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x\overset{x=e^t}{=}\dfrac{1}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{te^t}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t-\dfrac{\pi\ln 2}{12}=-\dfrac{\pi\ln 2}{12}$.

15. 对恒等式两边积分知 $\int_0^\pi\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$. 记 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$. 由于 $x\to 0$ 时 $f(x)=O(x)$, 故 $f(x)\in R[0,\pi]$. 由 R-L 引理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0$, 即是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$. 再利用恒等式 $\int_0^\pi\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\overset{n\to+\infty}{\to}\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 立得结论.

16. 由对称性知 $I=\dfrac{1}{2}\int_0^\pi\ln\sin x\mathrm{d}x$. 做变换 $x=2x$ 知

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

17. 记 $I_n=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t$. 做变元替换 $t=\sqrt{n}\sin x$ 知 $I_n=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x=\sqrt{n}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\overset{n\to+\infty}{\to}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. 由于 $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}\mathrm{d}t$, 因此只需求出极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left[e^{-t^2}-\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n\right]\mathrm{d}t$. 在提示中令 $x=t^2,a=n$, 得到估计式 $0\le\int_0^{\sqrt{n}}\left[e^{-t^2}-\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n\right]\mathrm{d}t\le\dfrac{\int_0^{\sqrt{n}}t^4e^{-t^2}\mathrm{d}t}{n}$. 当 $n\to+\infty$ 时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0, 由夹逼原理知欲求极限存在且为 0. 从而 $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

18. 直接用定义. $\int_M^N[f(x+a)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_N^{N+a}f(x)\mathrm{d}x-\int_M^{M+a}f(x)\mathrm{d}x\overset{N\to+\infty,M\to-\infty}{\to}(A-B)a$.

19. 做变量替换 $t=x-\dfrac{1}{x}$, 知 $\int_0^{+\infty}f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}f(t)\mathrm{d}t$. 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ 收敛, $\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}$ 单调有界, 因此由 Abel 判别法知 $\int_0^{+\infty}f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 收敛. 另一侧同理.

20. 由 Abel 判别法, $\int_0^{+\infty}f(x)u_1(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $u_2(x)$ 单调有界, 因此 $\int_0^{+\infty}f(x)u_1(x)u_2(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 依此类推.

21. 令 $t=ax-\frac{b}{x}$, 则 $x=\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a}, ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}, \mathrm{d}x=\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t$, 从而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t+\frac{1}{2a}\int_{0}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a}\int_{0}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t+\frac{1}{2a}\int_{0}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

22. $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\mathrm{d}x\overset{t=\frac{1}{1+x^\beta}}{=}\frac{1}{\beta}\int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}(1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta}\mathrm{Beta}\left(1-\frac{\alpha+1}{\beta},\frac{\alpha+1}{\beta}\right)=\frac{1}{\beta}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha+1}{\beta}\pi}$.

23. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开和变元替换 $x=x\sqrt{t}$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{t}(e^x-x-1)}\mathrm{d}x&=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{t}\frac{e^{\xi(x)}x^2}{2}}\mathrm{d}x\quad(0\le\xi(x)\le x)\\&=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})}x^2}{2}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{M}e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})}x^2}{2}}\mathrm{d}x+\int_M^{+\infty}e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})}x^2}{2}}\mathrm{d}x:=I_1(t)+I_2(t).\end{aligned}$$

对于 I_1, 由于 $\lim\limits_{t\to0+0}e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})}x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 且有一致性 $\lim\limits_{t\to0+0}\sup\limits_{x\in[0,M]}\left|e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})}x^2}{2}}-e^{-\frac{x^2}{2}}\right|=0$, 因此 $\lim\limits_{t\to0+0}I_1(t)=\int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$. 对于 I_2, 我们有 $|I_2(t)|\le\int_M^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ 恒成立. 因此我们取充分大的 M, 此时有

$$\left|I_1(t)+I_2(t)-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right|\le\left|I_1(t)-\int_0^{M}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right|+|I_2(t)|+\left|\int_0^{M}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

对充分小的 t 成立. 因此原极限值为 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
(编者注: 你也可以直接使用 Lebesgue 控制收敛定理.)

6 数项级数

6.1 问题

1. 讨论级数 $\sum\limits_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ 的收敛性.
2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1-n\sin\frac{1}{n}}{n^\alpha}, \alpha>0$ 的收敛性.
3. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha, \alpha>0$ 的收敛性和绝对收敛性.
4. 设非常数函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续非负, 且 $f(x)\le1$, 并记 $a_n=\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}$. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ 发散.

■ 自由选讲.

5. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n}$ 的收敛性.
6. 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin n}{\ln n}$ 的收敛性和绝对收敛性.
7. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ 的收敛性.

8. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$ 的收敛性.

9. 讨论级数 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$ 的收敛性.

10. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 的收敛性.

11. $0<a_1<\frac{\pi}{2}, a_n=\sin a_{n-1}$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p$ 的收敛性.

12. $p,q>0$, 讨论级数 $1-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}+\cdots$ 的收敛性与绝对收敛性.

13. $a_n>0$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.

14. 是否存在部分和序列有界且通项趋于 0 的发散级数?

15. 如果对任意以 0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 都有 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛. 绝对收敛性呢?

16. 计算级数 $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan\frac{2}{4k^2-4k+1}$.

17. 计算级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{5}n)}{n}$.

18. (Bertrand 判别法). 对于正项级数, 证明: $\begin{cases} \varliminf\limits_{n\to+\infty} \ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]>1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\text{收敛} \\ \varlimsup\limits_{n\to+\infty} \ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]<1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\text{发散} \end{cases}$.

19. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 数列 $p_n>0$ 且单调递增趋于 $+\infty$. 证明 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{p_n}=0$.

20. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ 收敛, 证明: (1) $\forall k\in\mathbb{N}_+, \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k}$ 收敛; (2) $\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k}=0$.

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=A$ 且绝对收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n=B$ 且条件收敛, 证明它们的 Cauchy 乘积收敛且 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n=AB$.

22. 对于两个发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

23. (1) 对于收敛级数和发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

(2) 对于正项收敛级数和正项发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?

24. $f(x)\in D[1,+\infty)$, 且 $\int_1^{+\infty} |f'(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 证明广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 同敛散.

25. $0<p<1, a_1>0, a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n^p}$, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

26. 设 $x\in(0,1)$, 证明 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+x^n)=\prod_{n=1}^{+\infty}(1-x^{2n-1})^{-1}$.

27. (Euler 公式). 证明 $\sin x=x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. 你可以将 $\sin[(2n+1)\phi]$ 写成关于 $\sin\phi$ 的多项式, 并利用零点求解.

28. 计算无穷乘积 $2\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots$. 你可以先写出通项公式, 然后逐步化简.

29. 给定 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=+\infty, a_n>0$, 问是否总存在 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n=+\infty, b_n>0$ 且满足 $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$?

6.2 解答

1. 当 $e^k\le n\le e^{k+1}$ 时, $\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}\ge\frac{1}{(k+1)^{\ln(k+1)}}$, 从而 $\sum_{n\in[e^k,e^{k+1}]}\frac{1}{(\ln n)^{\ln(lnn)}}\ge\frac{e^{k+1}-e^k-2}{(k+1)^{\ln(k+1)}}\to+\infty$, 因此发散.

2. 由于 $\dfrac{1-n\sin\frac{1}{n}}{n^\alpha}\sim\dfrac{1}{6n^{2+\alpha}}$, 因此收敛.

3. 由于 $\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)^\alpha$ 单调递减趋于 0, 由 Leibniz 判别法知收敛. 由于 $\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)^\alpha\sim\dfrac{1}{2^\alpha n^{2\alpha}}$, 因此 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时绝对收敛, $0<\alpha\leq\dfrac{1}{2}$ 时条件收敛.

4. 显然存在 $0<r<1$ 使得 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<r$. 因此 $1-a_n\geq 1-r^{\frac{1}{n}}=1-e^{\frac{\ln r}{n}}\sim-\dfrac{\ln r}{n}$, 由调和级数发散知原级数发散.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n+n\pi)}{n}$. 部分和序列 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(k+k\pi)$ 有界, $\dfrac{1}{n}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知级数收敛.

6. $\dfrac{1}{\ln n}$ 单调递减趋于 0, $\displaystyle\sum_{n=2}^{k}\sin n$ 对于 $\forall k\geq 1$ 有一致上界, 由 Dirichlet 判别法知级数收敛. 又因为 $\left|\dfrac{\sin n}{\ln n}\right|\geq\dfrac{\sin^2 n}{\ln n}=\dfrac{1-\cos 2n}{2\ln n}=\dfrac{1}{2\ln n}-\dfrac{\cos 2n}{\ln n}$, 而 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos 2n}{\ln n}$ 收敛, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2\ln n}$ 发散, 因此级数不绝对收敛.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}=1$, 因此原级数发散.

8. 首先由 Dirichlet 判别法易知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 收敛. 注意到 $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}-\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}=\dfrac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sin n)}$, 且成立估计

$$\frac{1-\cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}=\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}\leq\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sin n)}\leq\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)}=\frac{1-\cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)}.$$

但级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}(\sqrt{n}\pm 1)}$ 均发散, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n}\pm 1)}$ 均收敛 (Abel 判别法), 因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sin n)}$ 发散, 从而原级数可写成一个收敛级数和一个发散级数的和, 故发散.

9. 注意到 $\sqrt{2}=2\sin\dfrac{\pi}{4}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\dfrac{\pi}{4}}=2\sin\dfrac{\pi}{8}$, $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\dfrac{\pi}{4}}}=\sqrt{2-2\cos\dfrac{\pi}{8}}=2\sin\dfrac{\pi}{16}$, 依此类推, 再利用 $\sin x\sim x$ 知原级数收敛.

10. 合并同号项, 则级数改写为 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k b_k$, 其中 $b_k=\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{k^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{(k+1)^2-1}\leq\dfrac{2k+1}{k^2}\to 0$. 另一方面, $b_k\geq\displaystyle\int_0^1\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{2k}^{2k+1}\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x=\int_0^{2k+1}\frac{1}{k^2+x}\mathrm{d}x=\ln\frac{(k+1)^2}{k^2}$, 而 $b_{k+1}\leq\displaystyle\int_{-1}^0\frac{1}{(k+1)^2+x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{2k+1}^{2k+2}\frac{1}{(k+1)^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2k+2}\frac{1}{(k+1)^2+x^2}\mathrm{d}x=\ln\frac{(k+1)^2+2(k+1)}{k(k+2)}\Rightarrow b_k-b_{k+1}\geq\ln\frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)}\geq 0$. 由 Leibniz 判别法知收敛.

11. 上学期例题已证 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}na_n^2=3$, 因此 $a_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}, a_n^p\sim\left(\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{p}{2}}$, 从而当 $p\leq 2$ 时级数发散, $p>2$ 时级数收敛.

12. (a) 当 $p>1,q>1$ 时, $|a_n|\leq\dfrac{1}{n^{\min(p,q)}}$, 因此绝对收敛.

(b) 当 $0<p=q\leq 1$ 时, 由 Leibniz 判别法知条件收敛.

(c) 当 $p>1,0<q\leq 1$ 或 $0<p\leq 1,q>1$ 时, 级数正部 (或负部) 收敛, 负部 (或正部) 发散, 因此发散.

(d) 当 $0<p<q\leq 1$ 时, 由 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}}{\frac{1}{(2n-1)^p}}=1$ 知级数发散.

(e) 当 $0<q<p\leq 1$ 时, 由 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{(2n)^q}+\frac{1}{(2n+1)^p}}{-\frac{1}{(2n)^q}}=1$ 知级数发散.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛 $\Rightarrow\dfrac{1}{a_n}\to 0\Rightarrow a_n\to+\infty$. 因此可按从小到大顺序将 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 重排为 $a_{\phi(1)}\leq a_{\phi(2)}\leq\cdots\leq a_{\phi(n)}\leq\cdots$. 令 $b_n=\dfrac{n}{a_{\phi(1)}+a_{\phi(2)}+\cdots+a_{\phi(n)}}$, 则 $\{b_n\}$ 单调递减, 且 $b_{2n}=\dfrac{2n}{a_{\phi(1)}+\cdots+a_{\phi(2n)}}\leq\dfrac{2n}{a_{\phi(n)}+\cdots+a_{\phi(2n)}}\leq\dfrac{2n}{na_{\phi(n)}}=\dfrac{2}{a_{\phi(n)}}$, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}b_n<+\infty$. 又因为 $\dfrac{n}{a_1+\cdots+a_n}\leq b_n$, 因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$ 收敛.

14. 存在. 一个例子为 $1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\cdots$.

15. 不妨设 $a_n>0$, 否则可将对应 x_n 反号, 题目条件与绝对收敛性结论不变. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散, 则可归纳构造数列 A_n, 满足 $A_0=0,A_n=\inf\limits_{k\in\mathbb{N}_+}\sum\limits_{i=A_{n-1}+1}^{k}a_i\geq n$. 从而定义数列 $\{x_n\}$ 为 A_1-A_0 个 1, A_2-A_1 个 $\frac{1}{2},\cdots,A_n-A_{n-1}$ 个 $\frac{1}{n},\cdots$ 的依次排列, 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx_n>1+1+\cdots=+\infty$. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛.

16. 注意到 $\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1}=\arctan\frac{1}{2k-1}-\arctan\frac{1}{2k}$, 从而 $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1}=\arctan\frac{1}{2}$.

17. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\sqrt{5}k}{k}=-\int_{\sqrt{5}}^{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt\mathrm{d}t=-\int_{\sqrt{5}}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t-\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=-\int_{\sqrt{5}}^{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\mathrm{d}t+\frac{1}{2}(\pi-\sqrt{5})\overset{\text{R-L}}{\to}\frac{1}{2}(\pi-\sqrt{5})$.

18. 先证明第一种情况. 由条件知 $\exists N_1>0,\text{s.t.}\forall n>N_1,\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]>r_1>1\Leftrightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{n\ln n}{(n+1)\ln n+r_1}$. 可以验证当 $1<p<r_1$ 时, $\frac{n\ln n}{(n+1)\ln n+r_1}<\frac{n\ln^p n}{(n+1)\ln^p(n+1)}\Leftrightarrow\frac{(n+1)[\ln^p(n+1)-\ln^p n]}{\ln^{p-1}n}<r_1$. 利用 $f(x)=x^p$ 的微分中值定理, 知 $\text{LHS}=\frac{(n+1)p\ln^{p-1}(n+\theta)[\ln(n+1)-\ln n]}{\ln^{p-1}n}<p\underbrace{(n+1)[\ln(n+1)-\ln n]}_{\to1}\underbrace{\frac{\ln^{p-1}(n+1)}{\ln^{p-1}n}}_{\to1}<r_1=\text{RHS}$ 当 n 足够大时成立. 因此有 $\exists N_2>N_1,\text{s.t.}\forall n>N_2,\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{n\ln^p n}{(n+1)\ln^p(n+1)}\Rightarrow a_n<\frac{C}{n\ln^p n}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{C}{n\ln^p n}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.

19. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 并设 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}p_ka_k=p_1S_1+\sum_{k=2}^{n}p_k(S_k-S_{k-1})=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(p_k-p_{k+1})+S_np_n$$
$$\Rightarrow\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_kS_k}{p_n}=S_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}=(S_n-S)-\sum_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}+S\frac{p_1}{p_n}.$$

当 n 充分大时, $|S_n-S|<\frac{\varepsilon}{6},\left|S\frac{p_1}{p_n}\right|<\frac{\varepsilon}{6}$. 对于第二项, 设 $|S_n|\leq M$, 由极限定义, $\exists N_1>1$, s.t. $\forall n\geq N_1,|S_n-S|<\frac{\varepsilon}{2}$. 从而有估计

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}\right|\leq2M\sum_{k=1}^{N_1}\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N_1+1}^{n-1}\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}\leq2M\frac{p_{N_1+1}-p_1}{p_n}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由极限定义, $\exists N_2>N_1$, s.t. $\forall n\geq N_2,\frac{p_{N_1+1}-p_1}{p_n}<\frac{\varepsilon}{12M}$. 此时 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n-1}(S_k-S)\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}\right|<\frac{2\varepsilon}{3}$, 从而有 $\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}p_kS_k}{p_n}\right|<\varepsilon$. 这表明其极限值为 0.

20. (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+k)a_{n+k}$ 收敛, $\frac{n}{n+k}$ 随 n 单调有界, 由 Abel 判别法知收敛. (2) 记 $R_n=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}ka_k$. 则

$$\left|\sum_{n=1}^{m}na_{n+k}\right|=\left|\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{n+k}(n+k)a_{n+k}\right|=\left|\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{n+k}(R_{n+k-1}-R_{n+k})\right|$$
$$=\left|\frac{1}{k+1}R_k-\frac{m}{k+m}R_{k+m}+\sum_{n=1}^{m-1}R_{n+k}\left(\frac{n+1}{n+k+1}-\frac{n}{n+k}\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{k+1}|R_k| + \frac{m}{k+m}|R_{k+m}| + \sup_{k+1\le j\le n+m-1}|R_j|\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{n+1}{n+k+1}-\frac{n}{n+k}\right)\\
&\le \frac{1}{k+1}|R_k| + \frac{m}{k+m}|R_{k+m}| + \sup_{j\ge k+1}|R_j|\left(\frac{m}{k+m}-\frac{1}{k+1}\right)
\end{aligned}
$$

令 $m\to+\infty$, 得到 $\left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_{n+k}\right| \le \dfrac{1}{k+1}|R_k| + \sup\limits_{j\ge k+1}|R_j| \le 2\sup\limits_{j\ge k}|R_j| \overset{k\to+\infty}{\to} 0.$

21. 记 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_n=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1=A_nB+(a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1)$(定义 $\beta_k=B_k-B$):$=\Delta_1(n)+\Delta_2(n)$. 显然 $\Delta_1(n)\to AB$, 下证 $\Delta_2(n)\to 0$. 设 $|\beta_n|\le\beta,\forall n\ge 1$. 由定义, $\forall\varepsilon>0,\exists N\ge 3$, s.t. $\forall n>N,\forall p\ge 1,|\beta_n|<\dfrac{\varepsilon}{2\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|\right)}, \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\dfrac{\varepsilon}{2\beta}$. 从而当 $n\ge 2N$ 时, $|\Delta_2(n)|\le\left|\sum\limits_{k=1}^{N}a_k\beta_{n+1-k}\right|+\left|\sum\limits_{k=N+1}^{n}a_k\beta_{a+1-k}\right|\le\varepsilon.$

22. 不一定, 反例是 $a_0=1,a_n=-\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ 和 $b_0=1,b_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n,\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n$ 均发散, 但 Cauchy 乘积 $c_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n-1}+\dfrac{1}{2^n}\right)-\cdots-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^1+\dfrac{1}{2^2}\right)-\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 收敛.

23. (1) 不一定, 反例是 $a_n\equiv 0$ 和 $b_n\equiv 1$. 当然也不一定收敛, 如 $a_n=\dfrac{1}{n^2},b_n=n$.

(2) 一定. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散, 则 $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\ge a_1b_{n-1}$, 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 发散.

24. 注意到

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n-1}f(k)-\int_m^n f(x)\mathrm{d}x\right| &\le \sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}|f(k)-f(x)|\mathrm{d}x \le \sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}\int_k^x|f'(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\
&\le \sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}\int_k^{k+1}|f'(t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_m^n|f'(t)|\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

因此由 Cauchy 收敛准则知广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 同敛散.

25. 易知 a_n 单调递减, 且 $a_{n+1}-a_n=-a_{n+1}a_n^p\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_n^p}<\dfrac{a_n-a_{n+1}}{\xi_n^p}\overset{\text{微分中值定理}}{=}\dfrac{1}{1-p}(a_n^{1-p}-a_{n+1}^{1-p})$. 然后两边累加得到收敛性.

26. $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1+x^n)=\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\prod\limits_{i=0}^{+\infty}(1+x^{2^i(2n-1)})=\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-x^{2n-1})^{-1}.$

27. 注意到 $\sin[(2n+1)\phi]$ 可展开为 $\sin\phi$ 的 $2n+1$ 次多项式, 且只含奇次幂项, 因此 $\sin[(2n+1)\phi]=\sin\phi P(\sin^2\phi)$, 其中 $P(\cdot)$ 是 n 次多项式. 由极限关系知 $P(0)=2n+1$, 且 LHS 全部零点为 $x_k=\dfrac{k\pi}{2n+1},k=1,\cdots,n$, 因此

$$
\begin{aligned}
&P(t)=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{t}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)\\
\Rightarrow\ &\sin[(2n+1)\phi]=(2n+1)\sin\phi\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\phi}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)\\
\Rightarrow\ &\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right).
\end{aligned}
$$

现在, 问题变为求 RHS 在 $n\to+\infty$ 时的极限. 记

$$
U_m=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right), V_m=\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right).
$$

从而

$$
\lim_{n\to+\infty}U_m=x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),
$$

$$1 > V_m \geq \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\left(\frac{x}{2n+1}\right)^2}{\frac{4}{\pi^2}\frac{k^2\pi^2}{(2n+1)^2}}\right) = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) > \prod_{k=m+1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) \overset{m\to+\infty}{\to} 1.$$

因此由夹逼原理, $\sin x = \lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)\sin\dfrac{x}{2n+1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right) = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

28. 主要难点在于如何写成通式.

$$P_n = 2\sqrt{2}\prod_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(2^{k-1}-1)!!(2^k)!!}{(2^{k-1})}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^k}} \overset{(2^n-1)!!=\frac{(2^n)!}{2^{2^{n-1}}(2^{n-1})!}}{=} 2\sqrt{2}\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\frac{(2^{k-1})!}{2^{2^{k-2}}(2^{k-2})!}\cdot 2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!}{2^{2^{k-2}}(2^{k-2})!\cdot\frac{(2^k)!}{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!}}\right]^{\frac{1}{2^{k-1}}}$$

$$= 2\sqrt{2}\prod_{k=2}^{n}\left[2^{2^{k-1}-\frac{1}{2}}\frac{((2^{k-1})!)^3}{((2^{k-2})!)^2(2^k)!}\right]^{\frac{1}{2^{k-1}}} = 2\sqrt{2}\prod_{k=2}^{n}\left[2^{1-\frac{1}{2^k}}\frac{\left(\frac{(2^{k-1})!}{(2^k)!}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}}{\left(\frac{(2^{k-2})!}{(2^{k-1})!}\right)^{\frac{1}{2^{k-2}}}}\right] = 2\sqrt{2}\cdot 2^{n-1-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$= 2\cdot 2^{n+\frac{1}{2^n}}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^{\frac{1}{2^{n-1}}} = 2\left\{2^{n2^n+1}\left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2^n}} \overset{\text{Stirling}}{\sim} 2\left[2^{n2^n+1}\frac{2\pi 2^{n-1}\left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^n\left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^{n+1}}}\right]^{\frac{1}{2^n}} \to e.$$

29. 先递归构造 k_n: 设 $k_0=0$, $k_n = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}_+}\left\{m > k_{n-1} : \displaystyle\sum_{i=k_{n-1}+1}^{m} a_i > n\right\}$, 随后定义当 $k_{n-1} < m \leq k_n$ 时, $b_m = \dfrac{a_m}{n}$.

7 函数项级数

7.1 问题

1. 求下列函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数, 并讨论在给定的区间上是否一致收敛: (1) $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n, x\in[0,1]$; (2) $\sin\dfrac{x}{n^n}$, (a) $x\in[a,b]$, (b) $x\in\mathbb{R}$; (3) $\dfrac{\sin(n^n x)}{n^\alpha}, \alpha>0, x\in\mathbb{R}$.

2. 讨论下列函数序列或函数项级数在指定区间上的一致收敛性: (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x^2}}, x\in\mathbb{R}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}, x\in\mathbb{R}$; (3) $\{f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n\}, \alpha\in\mathbb{R}, x\in[0,1]$.

3. 设 $f_n(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数序列, 并且满足 $f_n(x)\to f(x)(n\to+\infty)$, 序列 $\{x_n\}\subset[0,1]$ 满足 $x_n\to x_0(n\to+\infty)$. (1) 试说明当 $n\to+\infty$ 时, $f_n(x_n)$ 未必收敛到 $f(x_0)$; (2) 设 $f_n(x)\rightrightarrows f(x), x\in[0,1]$, 证明必有 $f_n(x_n)$ 收敛到 $f(x_0)$.

■ 自由选讲.

4. 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$ 的收敛域.

5. 讨论函数列 $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

6. 函数列 $\{f_n\},\{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛, 且对于 $\forall n, f_n, g_n$ 在 I 上有界. 讨论函数列 $\{f_ng_n\}$ 在 I 上的一致收敛性.

7. $f(x)\in D\left[0,\dfrac{1}{2}\right], f(0)=0, f'(x)\geq 0$, 讨论 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(x^n)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上一致收敛性.

8. 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的绝对收敛性、一致收敛性和绝对一致收敛性.

9. 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上的一致连续性.

10. $f(x)\in C^1(a,b)$, 定义 $F_n(x) = \dfrac{n}{2}\left[f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\right]$, 证明函数列 $\{F_n\}$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛.

11. $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积一致收敛到 $f(x)$, 且存在 $\mathbb{R}$ 上的可积函数 $F(x)$ 满足 $|f_n(x)|\leq F(x)$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$.

12. a_n 单调递减趋于 0, 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\sin nx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛的充要条件是 $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. (这题稍微难了点!)

13. 证明: (1) $\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$; (2) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
14. $x>1$, 求导数 $\left[\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}+\frac{x^8}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}\cdots\right]'$.
15. 试构造一个函数列 $\{f_n(x)\}$, 使得 $\{f_n'(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处收敛但不一致收敛.
16. 可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 f, 且 $\forall n\in\mathbb{N}_+, f_n$ 有原函数 F_n, 证明 f 也有原函数 F.
17. (Arzela-Ascoli 引理). E 是紧集, 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上逐点有界, 等度连续 ($\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}_+,\forall|x-x'|<\delta,$ 成立$|f_n(x)-f_n(x')|<\varepsilon$). 证明 $\{f_n(x)\}$ 存在 E 上的一致收敛子列.
18. 求级数 $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\cdots$ 的和.
19. $x\in(-1,1)$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ 的和.
20. 区间 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛到 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 连续的充要条件是 $\forall\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N}_+,\exists N'>N,\text{s.t.}\forall x\in[a,b],\exists n_x\in[N,N'],\text{s.t.}|f_{n_x}(x)-f(x)|<\varepsilon$.
21. 设函数 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义且有界, 并在任何闭区间 $[a,b]$ 上 $f_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$. 问是否有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_x f_n(x)=\sup\limits_x\varphi(x)$?
22. 函数列 $f_n(x)=\cos nx$ 是否存在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛的子列?

7.2 解答

1. (1) 极限函数为 0, 因为 $f_n(\frac{1}{n})>\frac{n}{3}$, 因此不一致收敛.
(2) 极限函数为 0. (a) 因为 $\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|\sin\frac{x}{n^n}\right|\le\frac{|a|+|b|}{n^n}$, 由 M-判别法知一致收敛; (b) 因为 $f(n^n)=\sin 1$, 因此不一致收敛.
(3) 极限函数为 0, 因为 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(n^n x)}{n^\alpha}\right|\le\frac{1}{n^\alpha}$, 由 M-判别法知一致收敛.
2. (1) $\sum_{n=1}^N\sin x\sin nx=\sum_{n=1}^N\frac{1}{2}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right]$ 一致有界, $\frac{1}{\sqrt{n+x^2}}$ 关于 n 单调递减且一致趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法知一致收敛.
(2) $\sum_{n=1}^N(-1)^n$ 一致有界, $\frac{1}{n+x^2}$ 关于 n 单调递减且一致趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法知一致收敛.
(3) $\sup\limits_{x\in[0,1]}f_n(x)=f_n(\frac{1}{n+1})\sim Cn^{\alpha-1}$, 因此 $\alpha<1$ 时一致收敛, $\alpha\ge1$ 时不一致收敛.
3. (1) 如 $f_n(x)=\begin{cases}1-nx, & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$, 取 $x_n=\frac{1}{n}$.
(2) $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Rightarrow f(x)\in C[0,1]$. 那么对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta), |f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 由 (一致) 收敛性知当 n 充分大时有 $|x_n-x_0|<\delta$ 且 $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 从而 $|f_n(x_n)-f(x_0)|\le|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, 因此有原收敛关系.
4. 原级数是 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^n$, 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, 因此当 $x>-1$ 时收敛, 当 $x<-1$ 时发散. 而当 $x=-1$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n-n^2\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{\frac{1}{2}}$, 因此原幂级数发散.
5. 显然 $f_n(x)\to\max(1,x)$. 在 $[0,1]$ 上, $|f_n(x)-1|\le\sqrt[n]{2}-1$; 在 $[1,+\infty)$ 上, $|f_n(x)-x|\le\sqrt[n]{2}-1$(因为 $(f_n(x)-x)'<0$). 因此由最值判别法知一致收敛.
6. 先证一致有界性. 由一致收敛性,

$$\exists N\in\mathbb{N}_+,\ \text{s.t.}\ \forall m,n\ge N,\forall x\in I,|f_n(x)-f_m(x)|\le1.$$

从而对 $\forall n\in\mathbb{N}_+,\forall x\in I$, 有

$$|f_n(x)|\le\sup_{x\in I,1\le k\le N}|f_k(x)|+1:=M_f,$$

因此一致有界. 同理对 $\forall n\in\mathbb{N}_+,\forall x\in I$, 有 $|g_n(x)|\le M_g$.
从而

$$\begin{aligned}|f_m(x)g_m(x)-f_n(x)g_n(x)| &\le |f_m(x)g_m(x)-f_m(x)g_n(x)|+|f_m(x)g_n(x)-f_n(x)g_n(x)|\\ &\le M_f|g_m(x)-g_n(x)|+M_g|f_m(x)-f_n(x)|.\end{aligned}$$

由一致收敛性,

$$\forall\varepsilon>0,\exists N',\ \text{s.t. }\forall m,n>N',\forall x\in I,|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2M_g},|g_n-g_m|<\frac{\varepsilon}{2M_f}.$$

此时 $\sup\limits_{x\in I}|f_m(x)g_m(x)-f_n(x)g_n(x)|<\varepsilon$. 因此函数列 $\{f_ng_n\}$ 在 I 上一致收敛.

7. $\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^n$ 一致有界, $f(x^n)$ 随 n 单调递减且一致趋于 0, 有 Dirichlet 判别法知一致收敛.

8. 绝对 (一致) 收敛性: $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}\right|\begin{cases}=0, & x=0\\ \le\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, & x\ne 0\end{cases}$ 知绝对收敛, $\left[\sum\limits_{k=n}^{2n}\left|\dfrac{(-1)^{k-1}x^2}{(1+x^2)^k}\right|\right]_{x^2=\frac1n}=\dfrac{(1+\frac1n)^{n+1}-1}{(1+\frac1n)^{2n}}>\dfrac{e-1}{e^2}$ 知不绝对一致收敛. 一致收敛性: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ 有界, $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 关于 n 单调递减且一致趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知一致收敛.

9. 记 $f_n(x)=\dfrac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}}$. 则 $f_n(x)\ge f_{n+1}(x)\Leftrightarrow(1-x)(1+x^{2n+1})\ge 0$ 恒成立, 且 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\le\dfrac{1}{n+1}\rightrightarrows 0$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{N}\sin nx$ 关于 $x\in\left(\dfrac12,1\right)$ 一致有界, 因此由 Dirichlet 判别法, 知原级数一致收敛.

10. 由导数定义, $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=\dfrac12\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(x+\frac1n)-f(x)}{\frac1n}+\dfrac{f(x-\frac1n)-f(x)}{-\frac1n}\right]=f'(x)$. 另一方面, 考虑闭区间 $[c,d]$, 则我们有 $|F_n(x)-f'(x)|=\dfrac12\left[\dfrac{f(x+\frac1n)-f(x)}{\frac1n}+\dfrac{f(x-\frac1n)-f(x)}{-\frac1n}-2f'(x)\right]=\dfrac12[(f'(\xi_1)-f'(x))+(f'(\xi_2)-f'(x))]\le\sup\limits_{|x-y|<\frac1n}|f'(x)-f'(y)|\to 0$, 其中最后一步利用了 $f'(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{a+c}{2},\dfrac{b+d}{2}\right]$ 上的一致连续性. 然后用 M-判别法.

11. 由题给条件, $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\exists N'>0,\ \text{s.t. }\forall n>N'$,

$$\begin{aligned}\left|\int_N^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_N^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x\le\int_N^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8},\\ |\int_{-\infty}^{-N}f_n(x)\mathrm{d}x|<\int_{-\infty}^{-N}|f_n(x)|\mathrm{d}x\le\int_{-\infty}^{-N}F(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{8},\end{aligned}$$

且

$$\left|\int_{-N}^{N}f_n(x)\mathrm{d}x-\int_{-N}^{N}f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_{-N}^{N}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x<2N\cdot\frac{\varepsilon}{4N}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 我们有估计

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|&\le\left|\int_N^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_N^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-\infty}^{-N}f_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-\infty}^{-N}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ &\quad+\left|\int_{-N}^{N}f_n(x)\mathrm{d}x-\int_{-N}^{N}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ &<\frac{\varepsilon}{8}\cdot 4+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

对 $\forall n>N'$ 成立. 从而有原极限.

12. 记 $S_{n,p}(x)=\sum\limits_{k=n}^{p}a_k\sin kx$. 先证必要性. $o(1)=S_{n,2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)=\sum\limits_{k=n}^{2n}a_k\sin\dfrac{k\pi}{4n}\ge\dfrac n2(a_{2n-1}+a_{2n})\sin\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow a_n=o\left(\dfrac1n\right)$.
再证充分性. 定义单调递减数列 $b_n=\sup\limits_{m\ge n}\{ma_m\}=o(1)$.

(a) 当 $0\le x\le\dfrac{\pi}{p}$ 时, $|S_{n,p}(x)|\le\sum\limits_{k=n}^{p}ka_kx\le pb_nx\le b_n\pi\overset{n\to+\infty}{\to}0$.

(b) 当 $x \geq \frac{\pi}{n}$ 时, 由于 $\forall m > n, \left|\sum_{k=n}^{m} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \leq \frac{\pi}{x} \leq n$, 利用 Abel 变换可知 $|S_{n,p}(x)| \leq na_n \leq b_n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$.

(c) 当 $\frac{\pi}{p} < x < \frac{\pi}{n}$ 时, 取 $q = \lfloor \frac{\pi}{x} \rfloor$, 则 $|S_{n,p}(x)| \leq |S_{n,q}(x)| + |S_{q+1,p}(x)| \leq b_n\pi + b_{q+1} \leq (\pi+1)b_n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$.

从而由 Cauchy 准则知一致收敛.

13. (1) $x^{-x} = e^{-x\ln x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}$. 一致收敛可交换极限积分顺序, 因此

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}.$$

(2) 考虑 $\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \ln t = \frac{t\ln t}{1-t}$. 由于 $\forall x \in (0,1), t\in[0,x]$, $|t^n\ln t| = |t^{n-1}t\ln t| \leq x^{n-1}e^{-1}$, 因此该级数在 $[0,x]$ 上一致收敛, 从而

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \ln t\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x t^n\ln t\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t\ln t}{1-t}\mathrm{d}t.$$

由于 $\forall y \in [0,1], \left|\int_0^y t^n \ln t\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{y^{n+1}\ln y}{n+1} - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2}\right| \leq \frac{e+1}{(n+1)^2}$, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^y t^n\ln t\mathrm{d}t$ 对 $y\in[0,1]$ 一致收敛, 从而连续, 即是

$$\int_0^1 \frac{t\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to1-0}\int_0^x \frac{t\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to1-0}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x t^n\ln t\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}.$$

两边同时加上 $\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t$ 得到 $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

14. 被导函数 $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\right) = 1$, 因此其导数为 0.

15. $f_n(x) = \sin\frac{x}{n^2}$.

16. 利用一致收敛性容易证明 $f \in R[a,b]$ (why?). 设 $F_n(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $\sup_{a\leq x\leq b}|F_n(x) - F_m(x)| \leq \sup_{a\leq x\leq b}\int_a^x |f_n(t) - f_m(t)|\mathrm{d}t \leq (b-a)\sup_{a\leq x\leq b}|f_n(x) - f_m(x)|\mathrm{d}x \to 0 \Rightarrow F_n(x)$ 一致收敛, 不妨设极限函数为 F. 交换极限和求导顺序, 知 $F'(x) = f(x)$.

17. 由 E 紧, 知存在可数稠密子集 $Q = \{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. $\{f_n(x_1)\}$ 有界, 因此可抽取收敛子列 $\{f_{n,1}(x_1)\}$. 同理 $\{f_{n,1}(x_2)\}$ 有界, 因此可抽取收敛子列 $\{f_{n,2}(x_2)\}$. 依此类推, 考虑对角线子列 $\{f_{n,n}(x)\}$, 显然对于 $\forall x \in Q, f_{n,n}(x)$ 都收敛. 由等度连续性知 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{s.t.}\forall n \in \mathbb{N}_+, \forall|x - x'| < \delta, |f_n(x) - f_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$. 由于 $\cup_{x\in Q}B(x,\delta)$ 是 E 的一个开覆盖, 因此存在有限子覆盖 $\cup_{k=1}^{K}B(y_k,\delta)$. 由 $f_{n,n}(x)$ 在 Q 上的收敛性知 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \text{s.t.}\forall n,m > N, \forall k = 1,2,\cdots,K, |f_{n,n}(y_k) - f_{m,m}(y_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 从而 $\forall x\in E, \forall n,m > N, \exists y_k, \text{s.t.}|x - y_k| < \delta$, 且 $|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \leq |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(y_k)| + |f_{n,n}(y_k) - f_{m,m}(y_k)| + |f_{m,m}(y_k) - f_{m,m}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. 这说明 $\{f_{n,n}(x)\}$ 一致收敛.

18. 原式 $= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{8n-1} - \frac{1}{8n+1}\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1[x^{8n-2}(1-x^2)]\mathrm{d}x$. 记 $u_n(x) = \int_0^x[t^{8n-2}(1-t^2)]\mathrm{d}t$. 显然 $u_n(x) \in C[0,1]$ 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 一致收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to1-0}u_n(x) = \lim_{x\to1-0}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x) = \lim_{x\to1-0}\int_0^x\frac{t^6}{(1+t^2)(1+t^4)}\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{t^6}{(1+t^2)(1+t^4)}\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{8}(1+\sqrt{2})\pi$, 其中倒数第三个等号利用了 $\forall x \in (0,1)$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}t^{8n-2}(1-t^2)$ 在区间 $[0,x]$ 上的一致收敛性. 因此原式 $= \frac{1}{8}(1+\sqrt{2})\pi$.

19. 记 $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, 并任取 $0 < \delta < \frac{1}{2}$. 注意到在闭区间 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上, $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$ 一致收敛, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 收敛, 因此 $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow S(x) = \ln(1+x) + C$. 由 $S(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

20. 先证必要性. $\forall\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N}_+,\forall x\in[a,b],\exists N_x>N,\text{s.t.}|f_{N_x}(x)-f(x)|<\varepsilon$. 由连续性, $\exists\delta_x>0,\text{s.t.}\forall x\in(x-\delta_x,x+\delta_x),|f_{N_x}(x)-f(x)|<\varepsilon$. $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 构成了 $[a,b]$ 的开覆盖, 存在有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})\supset[a,b]$. 因此可取 $N'=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}N_{x_i}$.
再证充分性. 考虑在 x 处并做分解 $|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|$. 由 $f_n(x)$ 的收敛性, $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\text{s.t.}\forall n\ge N,|f(x)-f_n(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 再由题给条件, $\exists N'>N,\text{s.t.}\forall y,\exists n_y\in[N,N'],|f_{n_y}(y)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 最后由连续性, $\exists\delta>0,\text{s.t.}\forall|x-y|<\delta,\forall n\in[N,N'],|f_n(x)-f_n(y)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 此时 $\forall|x-y|<\delta$, 取 $n=n_y\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, 即连续性得证.
21. 考虑 $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$. 对于任意闭区间 $[a,b]$, $f_n(x)$ 都一致收敛于 0, 但是 $\sup\limits_x f_n(x)\equiv1\ne0=\sup\limits_x\varphi(x)$.
22. 不存在. 假设 $f_{n_k}=\cos n_kx$ 在 $\mathbb{R}$ 上内闭一致收敛. 由收敛性知 $\forall\varepsilon>0,\exists N,\text{s.t.}\forall m>k>N,\forall x\in[-1,1],|\cos n_kx-\cos n_mx|<\varepsilon$. 当 $n_m>2n_k$ 时, 考虑 $x=\dfrac{1}{n_m}$, 则 $|\cos n_kx-\cos n_mx|=|\cos\dfrac{n_k}{n_m}-\cos1|>\cos\dfrac12-\cos1$. 矛盾.

8 幂级数的基本概念与性质

8.1 问题

■ 自由选讲.

1. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{n\ln n}x^n$ 的收敛域.

2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{K}k^n}{n^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域, 其中 $K\in\mathbb{N}_+$.

3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域.

4. 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac1kC_n^k$.

5. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

6. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n!2^n}x^n$ 的收敛域与和函数.

7. 求级数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{m^2n}{3^m(n3^m+m3^n)}$ 的和.

8. $a_n>0,f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,\sum_{n=0}^{+\infty}a_nn!$ 收敛, 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nn!$.

9. 证明 $x=\sin x+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1},x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 并据此计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

10. 设 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$. 证明当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\dfrac{\pi^2}{6}$.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=A,\sum_{n=1}^{+\infty}b_n=B$. 证明若 Cauchy 乘积级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$ 收敛, 则它必收敛于 AB.

12. 设曲线 $x^{\frac1n}+y^{\frac1n}=1(n>1)$ 在第一象限与坐标轴围成的面积为 $I(n)$, 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}I(n)<4$.

8.2 解答

1. $\displaystyle\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{n\ln n}}=\varlimsup_{n\to+\infty}\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)=3$, 因此收敛半径是 $\dfrac13$. 考察端点, 当 $x=\dfrac13$ 时,

$$\text{原式}=\sum_{n=1}^{7}\frac{\left(\frac13+\frac23\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{n\ln n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{7}\frac{\left(\frac13+\frac23\cos\frac{(8n+k)\pi}{4}\right)^{8n+k}}{(8n+k)\ln(8n+k)}$$

$$
\begin{aligned}
&= C+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{7}\frac{(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\frac{(8n+k)\pi}{4})^{8n+k}}{(8n+k)\ln(8n+k)}\\
&\geq C+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(8n)\ln(8n)}+\frac{\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{8n+3}}{(8n+3)\ln(8n+3)}+\frac{\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{8n+5}}{(8n+5)\ln(8n+5)}\right]\\
&\geq C+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(8n)\ln(8n)}+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^{8n+1}\frac{2}{(8n)\ln(8n)}\right]\\
&\geq C+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(8n)\ln(8n)}\right],
\end{aligned}
$$

因此原级数发散. $x=-\dfrac{1}{3}$ 时有类似讨论, 因此收敛域为 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

2. 由上学期知识, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{K}k^n}{n^2}}=K$, 讨论端点后知收敛域为 $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|\leq\dfrac{1}{K}\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{K-1}{K+1},\dfrac{K+1}{K-1}\right]$.

3. $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}}=1$, 讨论端点后知收敛域为 $-1<\dfrac{x}{2x+1}\leq 1\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup(-\dfrac{1}{3},+\infty)$.

4. 构造 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}C_n^kx^k$, 则 $S_n'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^kx^{k-1}=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$. 从而

$$
I_n=-S(-1)=\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^n-1}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1[1+x+\cdots+x^{n-1}]\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to+\infty.
$$

5. 容易验证收敛域为 $[-1,1]$. 通过求导再积分, 得到和函数是

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\int_0^x t^{2n-1}\mathrm{d}t=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x\int_0^t s^{2n-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=2\int_0^x\int_0^t\sum_{n=1}^{+\infty}(-s^2)^{n-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
=&2\int_0^x\int_0^t\frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=2\int_0^x\arctan s\mathrm{d}s=2x\arctan x-\ln(1+x^2).
\end{aligned}
$$

6. 显然收敛域为 $\mathbb{R}$. 考虑一致收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!2^n}=x(e^{\frac{x}{2}}-1)$, 逐项求导得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{n!2^n}=\left(\dfrac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}-1$.

7. 原式 $=\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{m^2n^2}{3^mn(n3^m+m3^n)}\overset{\text{对称性}}{=}\dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\dfrac{m^2n^2}{3^mn(n3^m+m3^n)}+\dfrac{m^2n^2}{3^nm(n3^m+m3^n)}\right]=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{mn}{3^m3^n}\right)\overset{\text{分离}}{=}$
$\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\dfrac{m}{3^m}\right)\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\dfrac{n}{3^n}\right)\overset{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}}{=}\dfrac{9}{32}$.

8. 一方面, $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^{+\infty}e^{-x}\left(\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{N}a_nn!$, 从而 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x\geq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$.
另一方面, $\int_0^{N}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x\leq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\int_0^{N}e^{-x}x^n\mathrm{d}x\leq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$, 从而 $\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)\mathrm{d}x\leq\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nn!$.

9. 利用 $\arcsin x=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 换元 $x=\arcsin x$ 知 $x=\sin x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}$. 两边从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 积分, 得到 $\dfrac{\pi^2}{8}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{3}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{4}{3}\dfrac{\pi^2}{8}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

10. 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n}$ 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛, 知 $f(x)$ 可逐项求导. 令 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$, 则

$$
F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}=0.
$$

从而 $F(x) \equiv \lim\limits_{x\to 0} F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

11. 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$. $f(1), g(1)$ 收敛 $\Rightarrow \forall |x| < 1, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n x^n|, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n x^n|$ 收敛 $\Rightarrow \forall |x| < 1, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n x^n\right)$. 这三个级数都在 $x=1$ 处收敛, 因此左连续, 令 $x \to 1-0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$.

12. $I(n) = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{n}})^n \mathrm{d}x \overset{x=t^{2n}}{=} 2n\int_0^1 (1-t^2)^n t^{2n-1}\mathrm{d}t = 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1} t^{2n-2}(1-t^2)t\mathrm{d}t \le 2n\int_0^1 [(1-t^2)t^2]^{n-1}\mathrm{d}t \le \dfrac{2n}{4^{n-1}}$. 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$, 逐项求导得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, 因此代入 $n = \dfrac{1}{4}$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_n \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n}{4^{n-1}} = \dfrac{32}{9} < 4$.

9 幂级数展开与多项式逼近

9.1 问题

■ 自由选讲.

1. (Airy 方程). 利用 Maclaurin 级数求解微分方程 $y''(x) - xy(x) = 0$.
2. 写出函数 $f(x) = \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^2$ 的 Maclaurin 级数并给出收敛域.
3. 写出函数 $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ 的 Maclaurin 级数并给出收敛域.
4. 写出函数 $f(x) = \arctan\dfrac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}$ 的 Maclaurin 级数.
5. 证明 $[0,1]$ 上的连续函数可以被有理系数多项式逼近.
6. 证明 $[0,1]$ 上的连续函数可以被单调递升的多项式列 (即 $P_1 \le P_2 \le \cdots \le P_n \le \cdots$) 逼近.
7. $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 单调递升且收敛于 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 一定能取到其最小值, 但未必能取到其最大值.
8. $[a,b]$ 上的连续函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ 满足 $|u_n(x)| \le v_n(x), \forall n \in \mathbb{N}_+$, 且和函数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ 连续. 证明和函数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 也连续.
9. 证明对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $x \in [0,\pi]$ 成立不等式 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k}\right| \le 2\sqrt{\pi}$.
10. 证明对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $x \in \mathbb{R}$ 成立不等式 $\left|e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right| \le e^{|x|} - \left(1+\dfrac{|x|}{n}\right)^n < \dfrac{x^2 e^{|x|}}{2n}$.
11. 数列 $\{r_n\}$ 是 $[0,1]$ 区间内所有有理数的一个排列, 证明函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x-r_n|}{3^n}$ 在 $[0,1]$ 上处处连续、无理点处可微、有理点处不可微.
12. 试举在 $[0,1]$ 上一致收敛于连续函数的处处不连续函数列 $\{f_n(x)\}$.

9.2 解答

1. 设 $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. 在收敛域内, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)'' - x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0$. 比较系数知 $a_2 = 0, a_{n+2} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$, 从而 $\begin{cases} a_{3n} = \dfrac{(3n-2)!!!}{(3n)!}a_0 \\ a_{3n+1} = \dfrac{(3n-1)!!!}{(3n+1)!}a_1 \\ a_{3n+2} = 0 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.

2. 设 $g(x) = \arcsin^2 x$, 则 $g'(x) = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)(g'(x))^2 = 4g(x)$. 两边求导, 得 $2(1-x^2)g'(x)g''(x) - 2x(g'(x))^2 = 4g'(x) \Rightarrow (1-x^2)g''(x) - xg'(x) = 2$. 两边求 $n-2$ 次导数知 $(1-x^2)g^{(n)}(x) - (2n-3)xg^{(n-1)}(x) - (n-2)^2 g^{(n-2)}(x) = 0$.

令 $x=0$ 知 $g^{(n)}(0)=(n-2)^2g^{(n-2)}(0)$. 由于 $g^{(1)}(0)=0, g^{(2)}(0)=2$, 从而 $g^{(2n-1)}(0)=0, g^{(2n)}(0)=2^{2n-1}((n-1)!)^2$, 因此 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}x^{2n}\Rightarrow f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}$, 收敛域为 $[-1,1]$.

3. $\ln(1+x+x^2)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{3n}}{n}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$.

4. 利用欧拉公式, 知

$$\begin{aligned}f'(x)=\frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{(x-e^{\mathrm{i}\theta})(x-e^{-\mathrm{i}\theta})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{1-e^{\mathrm{i}\theta}x}-\frac{e^{-\mathrm{i}\theta}}{1-e^{-\mathrm{i}\theta}x}\right)\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\mathrm{i}n\theta}-e^{-\mathrm{i}n\theta}\right)x^{n-1}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\theta)x^{n-1},\end{aligned}$$

因此 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(n\theta)}{n}x^n$.

5. $\forall f(x)\in C[0,1],\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\text{s.t.}\exists N$次多项式$P_N(x),\forall x\in[0,1],|P_N(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由于有理数在实数集中稠密, 因此 $\exists N$次有理系数多项式$Q_N(x),\text{s.t.}\forall x\in[0,1],|P_N(x)-Q_N(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 此时 $|Q_N(x)-f(x)|<\varepsilon$.

6. $f_n(x):=f(x)-\dfrac{1}{2^n}$ 可被多项式逼近, 因此 $\exists P_n(x),\text{s.t.}|P_n(x)-f_n(x)|<\dfrac{1}{2^{n+2}}$. 这样的 $\{P_n\}$ 满足题意.

7. 记 $\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)=m\Rightarrow\forall k\geq1,\exists x_k\in[a,b],\text{s.t.}m\leq f(x_k)<m+\dfrac{1}{k}$. 由聚点原理, $\exists$ 子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\},\text{s.t.}\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=x_0\in[a,b]$. 由收敛性, $\exists N>0,\text{s.t.}\ \forall n>N, f(x_0)-\varepsilon<f_n(x_0)\leq f(x_0)$. 从而

$$m\leq f(x_0)<f_n(x_0)+\varepsilon=\lim_{k\to+\infty}f_n(x_{n_k})+\varepsilon\leq\lim_{k\to+\infty}f(x_{n_k})+\varepsilon\leq m+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$ 知 $f(x_0)=m$. 对于最大值, 一个反例是 $f_n(x)=x1_{\{0\leq x\leq1-\frac{1}{n}\}}+(n-1)(1-x)1_{\{1-\frac{1}{n}<x\leq1\}}$.

8. 任意固定 $x_0\in[a,b]$, 考察 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $x=x_0$ 处的连续性. 由收敛性, $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\text{s.t.}\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}v_n(x_0)<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 由连续性, $\exists\delta>0,\text{s.t.}\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$, $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}v_n(x)<\dfrac{\varepsilon}{3}$且$\left|\sum\limits_{n=1}^{N}[u_n(x)-u_n(x_0)]\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)\right|&\leq\left|\sum_{n=1}^{N}[u_n(x)-u_n(x_0)]\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}u_n(x)\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}u_n(x_0)\right|\\&\leq\left|\sum_{n=1}^{N}[u_n(x)-u_n(x_0)]\right|+\sum_{n=N+1}^{+\infty}v_n(x)+\sum_{n=N+1}^{+\infty}v_n(x_0)<\varepsilon.\end{aligned}$$

9. 当 $0<x\leq\dfrac{\sqrt{\pi}}{n}$ 时, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}\right|\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|\sin kx|}{k}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{kx}{k}\leq nx=\sqrt{\pi}$.

当 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{n}<x\leq\pi$ 时, 记 $K=\left\lfloor\dfrac{\sqrt{\pi}}{x}\right\rfloor, S_n=\sum\limits_{k=K+1}^{n}\sin kx$, 则

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|&\leq\left|\sum_{k=1}^{K}\frac{\sin kx}{k}\right|+\left|\sum_{k=K+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leq\sqrt{\pi}+\left|\sum_{k=K+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|=\sqrt{\pi}+\left|\sum_{k=K+1}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{k}\right|\\&\leq\sqrt{\pi}+\left|\sum_{k=K+1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)S_k\right|+\left|\frac{S_n}{n}\right|.\qquad\text{(Abel 变换)}\end{aligned}$$

利用 $|S_n|=\left|\dfrac{\cos\frac{2K+1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leq\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}\leq\dfrac{\pi}{x}$, 知

$$\left|\sum_{k=K+1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)S_k\right|+\left|\frac{S_n}{n}\right|\leq\frac{\pi}{x}\left[\sum_{k=K+1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{n}\right]=\frac{1}{K+1}\frac{\pi}{x}\leq\sqrt{\pi},$$

因此 $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{x}\right|\le\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}$.

10. 左边:

$$\begin{aligned}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|&=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{n}\right)^k\right|=\left|\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}\right)\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right|\\&\le\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}\right)\frac{|x|^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!}=e^{|x|}-\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

右边:

$$\begin{aligned}e^{|x|}-\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n&=\sum_{k=2}^{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\frac{|x|^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!}\\&\le\sum_{k=2}^{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\cdots-\frac{k-1}{n}\right)\right]\frac{|x|^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2n}\frac{|x|^k}{(k-2)!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!}\\&<\frac{x^2}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{x^2}{2n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!}=\frac{x^2}{2n}e^{|x|}.\end{aligned}$$

11. 原级数一致收敛, 因此连续. 考虑 $F_x(h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^nh},\forall x\in[0,1]\backslash\mathbb{Q}$. 由于

$$\left|\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^nh}\right|\le\frac{|(x+h-r_n)-(x-r_n)|}{3^n|h|}=\frac{1}{3^n},$$

因此 $F_x(h)$ 在 $h\in[-x,1-x]$ 上一致收敛, 从而

$$f'(x)=\lim_{h\to0}F_x(h)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{h\to0}\frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{3^nh}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{3^n}.$$

若 $x=r_k\in\mathbb{Q}$, 类似可知

$$\left[\sum_{n=1,n\ne k}^{+\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}\right]'\Bigg|_{x=r_k}=\sum_{n=1,n\ne k}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{3^n}.$$

但是 $\dfrac{|x-r_k|}{3^k}$ 在 $x=r_k$ 处不可导, 因此 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1,n\ne k}^{+\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}+\frac{|x-r_k|}{3^k}$ 在 $x=r_k$ 处不可导.

12. $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\mathrm{Dirichlet}(x)$.

10 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学信息科学技术学院 22 级本科生吴明睿同学, 他提供了很多 LaTeX 排版的建议. 感谢选修 2025 春数学分析 II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.