

数学分析 II 习题课讲义 (2025 春)

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 4 月 2 日

目录

1	定积分的基本概念与可积性	2
1.1	问题	2
1.2	解答	2
2	定积分的性质与计算	4
2.1	问题	4
2.2	解答	4
3	定积分中值定理, 定积分的应用 (1)	6
3.1	问题	6
3.2	解答	7
4	定积分的应用 (2)	9
4.1	问题	9
4.2	解答	9
5	广义积分	11
5.1	问题	11
5.2	解答	12
6	数项级数	15
6.1	问题	15
6.2	解答	16
7	致谢	20

1 定积分的基本概念与可积性

1.1 问题

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1, \alpha > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.
 - 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 试证明 $f(x) \in R[a, b]$ 的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists [a, b]$ 上满足以下条件的连续函数 $g(x)$ 和 $h(x)$: (1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b]$; (2) $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon$.
 - 函数 $g(x) \in R[a, b], f(x) \in C[A, B]$, 这里 A, B 分别是 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的上下确界. 证明 $f(g(x)) \in R[a, b]$.
 - 函数 $f(x) \in R[a, b]$, 证明存在点 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x)$ 在 x_0 处连续.
 - 函数 $f(x) \in R[a, b]$, 且 $\forall x \in [a, b]$ 有 $f(x) > 0$. 证明 $\int_a^b f(x)dx > 0$.
 - 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积. 证明对于任意的 $[a, b], \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx = 0$.
 - (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x), g(x) \in R[a, b], p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$.
(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p \|g\|_q \geq \|fg\|_1$.)
[一个简单应用, 留作思考题] $0 < q \leq p \leq s \leq \infty$, 那么存在 $\theta \in [0, 1]$ 使得 $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}$. 证明 $\|f\|_p \leq \|f\|_q^\theta \|f\|_s^{1-\theta}$.
 - (Minkowski 不等式). 同上题条件, 证明 $\left(\int_a^b (f+g)^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$.
(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p + \|g\|_p \geq \|f+g\|_p$, 这表明 L_p 空间是赋范线性空间.)
- 自由选讲.
- $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x) \in R[a, b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$.
 - 已知 $(0, 1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 问是否有 $f(x) \in R[0, 1]$?
 - 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \cdots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
 - $n \in \mathbb{N}_+, f(x) \in C[a, b], \int_a^b x^k f(x)dx = 0, k = 0, 1, \cdots, n$. 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个零点.

1.2 解答

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\varepsilon) < a_n < n^\alpha(1+\varepsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + N^\alpha) < \varepsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) < \varepsilon, \left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \cdots + (a_n - n^\alpha)]\right| \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha + \cdots + n^\alpha] \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha \leq \varepsilon \int_0^1 x^\alpha dx + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\alpha+1} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$. 这意味着 $\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i^\alpha\right)\right| \leq 4\varepsilon \Rightarrow$ 原极限 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$.
- 必要性: $f(x) \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ s.t. $\sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$ 阶梯函数 $s_1(x), s_2(x)$ 满足 $s_1(x) \leq f(x) \leq s_2(x)$ 且 $\int_a^b [s_2(x) - s_1(x)]dx < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$ 连续函数 $g(x), h(x)$ 满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 且 $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon$.
- 充分性: $g(x)$ 连续, $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ s.t. $\sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\sum_{i=1}^n w_i^g(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. 在此分割下, $\sum_{i=1}^n w_i^f(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} + w_i^g \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

3. 用 Lebesgue 定理显然. 如不用 Lebesgue 定理, 则 $\forall \delta > 0, \exists \tau > 0$ s.t. $\forall |x - x'| < \tau, |f(x) - f(x')| < \delta$. 从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ s.t. $\sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$. 因为 $\{[x_{i-1}, x_i] : w_i^{f \circ g} > \delta\} \subset \{[x_{i-1}, x_i] : w_i^g > \tau\}$, 从而

而 $\sum_{w_i^{f \circ g} > \delta} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$, 即 $f \circ g$ 可积.

4. 由 $f(x) \in R[a, b]$ 知存在 $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, 使得 $w_{[a_1, b_1]}^f < 1$. 同样的道理, 由 $f(x) \in R[a_1, b_1]$ 知存在 $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ 使得 $w_{[a_2, b_2]}^f < \frac{1}{2}$. 依此类推, 存在一系列闭区间套满足于 $w_{[a_n, b_n]}^f < \frac{1}{n}$, 只需取 $x_0 \in \cap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$ 即可.

5. 由 4 题知存在连续点 $x_0 \in (a, b)$, 因此 $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx \geq f(x_0)\delta > 0$.

6. $\forall \varepsilon > 0$, 存在连续函数 $g(x)$ 满足 $\int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b [f(x+h) - f(x)] dx \right| &\leq \left| \int_a^b [f(x+h) - g(x+h)] dx \right| + \left| \int_a^b [g(x+h) - g(x)] dx \right| + \left| \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq 2 \int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)| dx. \end{aligned}$$

由一致连续性知 $\exists H > 0$ s.t. $\forall x, x' \in [a-1, b+1], |x - x'| < H, |g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 取 $h < H$ 知 RHS $< \varepsilon$. 这意味着原极限为 0.

7. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = 1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我

们有 $\alpha \ln a + (1-\alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1-\alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$. 令 $\alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b \left(\frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} \right) dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.)

8. 由 Hölder 不等式, $\int_a^b (f+g)^p dx = \int_a^b (f+g)^{p-1} f dx + \int_a^b (f+g)^{p-1} g dx \leq \left(\int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)$. 消去 $\left(\int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}}$ 得到原不等式.

(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Minkowski 不等式.)

9. 由聚点原理知有界性, 即 $|f(x)| \leq M$. 其次 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$, s.t. $\omega_{U_0(x, \delta_x)} < \varepsilon$. 开覆盖 $\cup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x) \supset [a, b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$. 不妨设 $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$. 取分割点 $y_0 = a, y_{3i+1} = x_i - \frac{\varepsilon}{4nM}, y_{3i+2} = x_i + \frac{\varepsilon}{4nM}, y_{3i+3} \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1}), y_{3n} = b, i = 1, 2, \dots, n-1$.

对此分割, $\sum_{i=1}^{3n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon(b-a+1)$, 因此有可积性. 由于 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sum_{i=1}^{3n} \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)| dx \leq \varepsilon(b-a+1)$,

由 ε 的任意性知 $\int_a^b f(x) dx = 0$.

10. 考虑 $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, 但是 $\int_0^1 f(x) dx$ 不存在.

11. 原式 $= 2^{\alpha-\beta} \frac{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha + \frac{2}{n} \left(\frac{3}{n}\right)^\alpha + \cdots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha \right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^\beta + \frac{2}{n} \left(\frac{4}{n}\right)^\beta + \cdots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n}{n}\right)^\beta \right]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{定积分定义}} 2^{\alpha-\beta} \frac{\left(\int_0^2 x^\alpha dx \right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta dx \right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$.

12. $\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 1 个零点, 记为 x_1 . $\int_a^b (x-x_1)f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 2 个零点, 记另一个为 x_2 . 依此类推, $\int_a^b \left[\prod_{i=1}^n (x-x_i) \right] f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 $n+1$ 个零点.

2 定积分的性质与计算

2.1 问题

1. $f(x) \in C[-1, 1]$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$.

2. (Riemann-Lebesgue 引理). 设函数 $f(x), g(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, $g(x+T) = g(x)$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)g(nx)dx = \int_a^b f(x)dx \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx.$$

3. 设函数 $f(x) \in C^1[a, b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: (1) $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)dx$; (2) 若 $\int_a^b f^2(x)dx = 1$, 则 $\int_a^b [f'(x)]^2 dx \int_a^b [xf(x)]^2 dx \geq \frac{1}{4}$.

■ 自由选讲.

4. $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负连续. (1) 若 $f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(s)ds$, 证明 $f(t) \leq 1 + t$. (2) 若 $f(t) \leq K + \int_0^t f(s)g(s)ds$, 其中 $K \geq 0$ 是常数, 证明 $f(1) \leq K \exp\left(\int_0^1 g(s)ds\right)$.

5. 试构造 $f(x) \in D[0, 1]$ 但 $f'(x) \notin R[0, 1]$ 的例子. 如果额外加上 $f'(x)$ 有界条件呢?

6. 试构造可积函数 f 和连续函数 g 使得 $f \circ g$ 不可积. 如果额外要求 g 是 C^∞ 函数呢?

7. 设函数 $f(x), g(x) \in R[a, b]$, 记 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 的一个分割, $\lambda(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\}$.

任取 $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 证明 $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

8. $f(x) \in C[a, b]$, 且 $\exists \delta > 0, M > 0$, s.t. $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 成立 $\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| \leq M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x) \equiv 0$.

9. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明 $f(x) = xf(1)$.

10. 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x dx$.

11. 求积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx$, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

12. 求积分 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx$.

2.2 解答

1. 往证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = 0$.

设 $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \leq M$. 由连续性知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} &= \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{\delta}^1 (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

其中, $|I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n \varepsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \varepsilon$,

$$|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n \varepsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} \left(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} \right)^n.$$

由于 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$, 从而可取足够大的 n 使得 $|I_2| < \varepsilon$. 类似放缩 I_3 . 此时 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\varepsilon$.

2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$.

$\forall \varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 $s_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq x_m = b \end{cases}$ 使得 $\int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$. 设 $M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$. 则

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - s_\varepsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\varepsilon(x)g(nx)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|g(nx)dx + \left| \sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx \right| \\ &\leq M\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \leq M\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT. \end{aligned}$$

其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 这也意味着 $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \dots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$ (设 $c + kT \leq d < c + (k+1)T$) $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \leq MT$, 对于 $\forall c, d \in \mathbb{R}$.

选择一个足够大的 n , 使得 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \varepsilon$. 从而 $\left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| \leq (M+1)\varepsilon$. 由极限定义立得结论.

3. (1) 由分部积分,

$$\begin{aligned} \int_a^b x f(x) f'(x) dx &= x f^2(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) [x f(x)]' dx = - \int_a^b f^2(x) dx - \int_a^b x f(x) f'(x) dx \\ \Rightarrow \int_a^b x f(x) f'(x) dx &= -\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx. \end{aligned}$$

(2) 由 Cauchy 不等式立得.

$$\begin{aligned} 4. (1) \text{ 原条件等价于 } \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds}} &\leq 1 \xrightarrow{\text{两边积分}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds}} dt \leq \int_0^x 1 dt \xrightarrow{\text{原函数}} \sqrt{1+2\int_0^x f(s)ds} \Big|_0^x \leq x \Rightarrow \\ \sqrt{1+2\int_0^x f(s)ds} &\leq 1+x \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{1+2\int_0^x f(s)ds} \leq 1+x. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t f(s)g(s)ds \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) \right]' &= f(t)g(t) \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) - g(t) \int_0^t f(s)g(s)ds \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) \\ &\leq K g(t) \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) = \left[K - K \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) \right]', \end{aligned}$$

两边积分得到

$$\int_0^1 f(s)g(s)ds \exp\left(-\int_0^1 g(s)ds\right) \leq K - K \exp\left(-\int_0^1 g(s)ds\right) \Rightarrow f(1) \leq K + K \int_0^1 f(s)g(s)ds \leq K \exp\left(\int_0^1 g(s)ds\right).$$

(请大家在积分时注意从相同起点开始积分, 这里补上常数 K 也是为了保证两边在 $t=0$ 处都取 0. 这个题有微分方程背景, 可以先看懂答案, 再试图理解.)

5. 可以验证 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \in D[0, 1]$, 但 $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $[0, 1]$ 上无界. 若额外

有 $f'(x)$ 有界, 可参考 Volterra's function.

6. 设 \mathcal{C} 是 fat cantor set. 考虑 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, $g(x) = 1 - \text{dist}(x, \mathcal{C})$, 但 $f(g(x)) = 1_{x \in \mathcal{C}}$ 在正测集 \mathcal{C} 上不连续. 若

额外有 $g(x) \in C^\infty$, 可使用光滑版本的 Urysohn 引理.

7. $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(\eta_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i := S_1 + S_2$. 显然 $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} S_1 = \int_a^b f(x)g(x)dx$. 记

$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| = M_f$. 由 $g(x)$ 的可积性, 知 $|S_2| \leq \sum_{i=1}^n M_f \omega_g([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i = M_f [\overline{S}_g(\Delta) - \underline{S}_g(\Delta)] \xrightarrow{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} 0$.

8. 不妨设 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0) > 0$. 由连续性, $\exists \kappa > 0$, s.t. $\forall x \in (x_0 - \kappa, x_0 + \kappa), f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\forall [\alpha, \beta] \subset (x_0 - \kappa, x_0 + \kappa)$, 成立 $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$ (最后一个大于号成立只需令 $\beta - \alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

9. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \frac{\alpha^2}{2}f(1)$. 由集合 $\{q\alpha : q \in \mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha) = qf(\alpha)$, $\int_0^{\alpha} f(x)dx = f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha)\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$.

10. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d(1 - \cos x) \stackrel{\text{分部积分}}{=} (1 - \cos x) \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) d(\ln \sin x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) dx = [\cos x - \ln(1 + \cos x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - 1$.

11. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x] \cos 2x + \sin[(2n-2)x] \sin 2x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x](1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x]}{2 \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x \cos[(2n-2)x] + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x] \cos x dx = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

由于 $I_1 = 1$, 因此 $I_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}$.

12. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1 + e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

3 定积分中值定理, 定积分的应用 (1)

3.1 问题

1. 证明对于 $\forall x > 0$, 存在唯一的 $\xi_x > 0$ 使得 $\int_0^x e^{t^2} dt = x e^{\xi_x^2}$ 成立, 并求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\xi_x}{x}$.

2. 证明 $\left| \int_a^b \sin x^2 dx \right| \leq \frac{1}{a}$, 其中 $0 < a < b$.

3. 函数 $f(x) \in D[0, 1]$, 且 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x} f(x) dx$. 证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = f'(\xi)$.

4. 求由下列曲线所围成的平面图形的面积: (1) $y^2 = x^2(1 - x^2)$; (2) $y^2 = x, x^2 + y^2 = 1$ (在第一、四象限的部分).

■ 自由选讲.

5. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x) \in R[0, x], \forall x \in (0, +\infty)$, 且 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ 也是 $(0, +\infty)$ 上的凸函数.

6. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) \equiv 0$.

7. $f(x) \in R[0, 1], 0 < m \leq f(x) \leq M$, 求证 $\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$. (编者注: 本题比较 tricky.)

8. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$, 求 $f(x)$.

9. 求积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

10. 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^{2025} x} dx$.
11. 求积分 $I = \int_0^1 [\sqrt[3]{1-x^3} - \sqrt[3]{1-x^7}] dx$.
12. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 证明 $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$. (能试着用定积分第二中值定理吗?)
13. $f(x) \in C[a, b]$, 且对任意 $g(x) \in C^\infty[a, b]$ 满足 $g(a) = g(b) = 0$ 都有 $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$. 证明 $f(x) \equiv 0$.
14. (Dirichlet 判别法). 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. $\forall A \geq a$, $g(x) \in R[a, A]$ 且 $\left| \int_a^A g(x) dx \right| \leq M$ 恒成立. 证明极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) g(x) dx$ 存在.
15. 试求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

3.2 解答

1. 第一问由定积分第一中值定理和函数 e^{t^2} 的单调性显然. 其次

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\xi_x}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\ln \int_0^x e^{t^2} dt - \ln x}}{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \int_0^x e^{t^2} dt - \ln x}{x^2}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2} dt} - \frac{1}{x}}{2x}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x e^{x^2} - \int_0^x e^{t^2} dt}{2x^2 \int_0^x e^{t^2} dt}}{2x^2 e^{x^2} + 4x \int_0^x e^{t^2} dt}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 e^{x^2}}{2x^2 e^{x^2} + 4x \int_0^x e^{t^2} dt}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{x^2}}{x e^{x^2} + 2 \int_0^x e^{t^2} dt}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 + 1)e^{x^2}}{(2x^2 + 3)e^{x^2}}} = 1. \end{aligned}$$

2. $\left| \int_a^b \sin x^2 dx \right| \stackrel{t=x^2}{=} \left| \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \right|$. 由于 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 非负单调递减, 因此由定积分第二中值定理, 原积分 $= \frac{1}{2a} \left| \int_{a^2}^{\xi} \sin t dt \right| \leq \frac{1}{a}$.

3. 由定积分第一中值定理, $\exists \xi \in [0, \frac{1}{2}]$, s.t. $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x} f(x) dx = e^{1-\xi} f(\xi)$, 这也意味着对于函数 $g(x) = e^{-x} f(x)$ 成立 $g(1) = g(\xi)$. 由 Rolle 微分中值定理知存在 $g'(\zeta) = 0 \Rightarrow f'(\zeta) = f(\zeta)$.

4. (1) $S = 4 \int_0^1 \sqrt{x^2(1-x^2)} dx \stackrel{x=\sin \theta}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = -\frac{4 \cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$.

- (2) 先解出交点, 然后用原函数直接计算 $S = 2 \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{x} dx + 2 \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. 凸函数开区间上连续 \Rightarrow 闭区间上可积. 由 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f\left(\frac{t}{x} \cdot x\right) d\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux) du \Rightarrow F\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = \int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i (ux_i)\right) du \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n t_i f(ux_i) du = \sum_{i=1}^n t_i F(x_i)$ 知 $F(x)$ 凸.

6. 构造 $G(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2$, $G'(x) = g(x)$ 单调递减, $g(0) = 0$. 因此 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增. 又因为 $G(0) = 0$, $G(x) \geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

7. 显然有 $(M - f(x)) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m} \right) \leq 0$, 因此 $\int_0^1 (M - f(x)) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m} \right) dx \leq 0 \Leftrightarrow M \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{m} \int_0^1 f(x) dx \leq 1 + \frac{M}{m}$. 利用均值不等式, $\text{LHS} \geq 2\sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$.

8. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + x f(y) + \frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y} f(t) dt = \int_0^y f(t) dt + y f(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2}$. 两式相减得 $x f(y) + \frac{x^3 y}{3} = y f(x) + \frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^3}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$. 经验证符合题意.

9. 作代换 $x = \tan t$ 得 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt$. 再作代换 $t = \frac{\pi}{4} - t$ 得 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.
10. 记 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot^{2025} x} dx$. 作换元 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 知 $I = J$. 而 $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, 因此 $I = J = \frac{\pi}{4}$.
11. $\int_0^1 \sqrt[7]{1-x^3} dx \stackrel{y=\sqrt[7]{1-x^3}}{=} \int_0^1 y dx \stackrel{\text{几何意义}}{=} \int_0^1 x dy = \int_0^1 \sqrt[3]{1-y^7} dy \Rightarrow I = \int_0^1 \sqrt[3]{1-y^7} dy - \int_0^1 \sqrt[3]{1-x^7} dx = 0$.
12. $f(x)$ 单调, 并考虑 $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx &= f(a) \int_a^\xi \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + f(b) \int_\xi^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= f(a) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + (f(b) - f(a)) \int_\xi^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = (f(b) - f(a)) \frac{1}{2} (b - \xi)(\xi - a) \geq 0. \end{aligned}$$

13. 用反证法. WLOG 设 $f(x_0) > 0$, 由连续性知 $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \\ 0, & x \in [a, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, b], \\ C^\infty \text{连接}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

此时 $\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}} \frac{f^2(x_0)}{4} dx > 0$, 矛盾.

14. $\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$, s.t. $\forall x \geq X, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$. 从而 $\forall A', A'' \geq X, \left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| \stackrel{\text{定积分第二中值定理}}{\leq} \left| f(A') \int_{A'}^\xi g(x)dx + f(A'') \int_\xi^{A''} g(x)dx \right| \leq 2M(|f(A')| + |f(A'')|) \leq \varepsilon$. 然后由柯西收敛定理知极限存在.

15. 设弦方程为 $x - \frac{1}{2} = ky$, 与抛物线交点纵坐标为 y_1, y_2 , 则围成区域的面积 $S = \int_{y_1}^{y_2} \left(ky + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_1y_2 + y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1 + y_2 = 2k, y_1y_2 = -1$. 则 $S = \frac{2}{3}(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k = 0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.

补充 (不要求掌握)

等周问题: 长为 L 的曲线何时围成区域面积最大? 答案: 圆 (一年级小学生皆可猜出).

证明: 设 D 为凸区域 (D 中任意两点连线都在 D 内). 设 $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0, L]$, 此处选

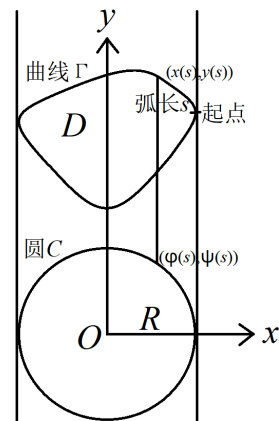
择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, 且 D 的面积为 $A = \int_0^L x dy = \int_0^L x(s)y'(s)ds$. 设

$C: \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为半径的圆, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面

积为 $\pi R^2 = - \int_0^L y dx = - \int_0^L \psi(s)x'(s)ds$. 从而 $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))ds \leq$

$\int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2} ds \leq \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)} ds = RL$. 因此成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq A + \pi R^2 \leq$

$RL \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s) + \psi(s)y'(s))^2 = 0$. 由于 $x(s)^2 + \psi(s)^2 = R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = y'(s), \psi(s) = y(s) + y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, 圆也!



4 定积分的应用 (2)

4.1 问题

■ 自由选讲.

- 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?
- 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r = e^\theta$ 在 $(r, \theta) = (1, 0)$ 和 $(r, \theta) = (e^\phi, \phi)$ 之间一段的重心坐标.
- 求双扭线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ 绕轴 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.
- 证明极坐标下曲线 $r = r(\theta)$ 与 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为 $V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin \theta d\theta$.
- 求圆的渐伸线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ 上 $A(a, 0), B(a, -2\pi a)$ 之间部分与直线 \overline{AB} 围成图形的面积.
- 推导重力场中粒子数量密度的分布率 $n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$, 其中 T 是温度, k_B 是玻尔兹曼常量.
- 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t |\sin t| dt}{x^2}$.
- 已知 $b > e^2$, 证明 $\int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x} < \frac{2b}{\ln b}$. BTW, 你能不能找到最优常数 $C \geq 0$, 使得 $\int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x} + C \leq \frac{2b}{\ln b}$ 恒成立.
- 证明 π 是无理数. 可以按照以下步骤: (1) 设 $\pi = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$, 定义 $f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$, 证明 $\forall i \in \mathbb{N}_+, f^{(i)}(0), f^{(i)}(\pi)$ 都是整数. (2) 证明定积分 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ 也是整数. (3) 证明 $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 1$, 得到矛盾.
- $f(x) \in C^2[0, 1], f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$, 证明 $\int_0^1 [f''(x)]^2 dx \geq 4$, 取等号当且仅当 $f(x) = x^3 - x^2$.
- $f(x) \in C^1[0, 1], f(x) \in [0, 1], f(0) = f(1) = 0, f'(x)$ 单调递减. 证明曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的弧长不大于 3.
- $f(x) \in C^2[a, b]$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$.
- $f(x) \in D[0, 1], f'(x) \in R[0, 1], |f'(x)| \leq M$. 定义 $A_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. (1) 证明 $|A_n| \leq \frac{M}{2n}$. (你可以推广到高阶和高维吗? 答案是 $O(n^{-\frac{k}{d}})$.) (2) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n$.
- (Jensen 不等式). 凸函数 $\varphi(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x): [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ 可积且 $\int_a^b p(x) dx > 0$. 证明对于任意 $f(x) \in R[a, b]$,
$$\varphi\left(\frac{\int_a^b f(x)p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}\right) \leq \frac{\int_a^b \varphi(f(x))p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}.$$

4.2 解答

- 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_0^h \pi (\sqrt{R^2 - z^2})^2 dz = \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi \left(R^2 h - \frac{1}{3} h^3 \right)$. 对应位移 $[h, h + dh]$ 所做的微功 $dW = gV(h)\rho dh$. 从而 $W = g \int_0^R V(h) dh = g \left(\frac{2}{3} \pi R^4 + \frac{5}{12} \pi R^4 \right) = \frac{13}{12} g \pi R^4$.
- $\bar{x} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \cos \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(\sin \phi + 2 \cos \phi) - 2}{5(e^\phi - 1)}, \bar{y} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(2 \sin \phi - \cos \phi) + 1}{5(e^\phi - 1)}.$
- 原命题等价于 $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases} x = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \cos \theta \\ y = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \sin \theta \end{cases}$, 则面积 $S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta) \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = 8\pi a^2$.
- 对应 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的扇形面积 $dS = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$, 其质心位于 $\frac{2}{3} r(\theta)$ 处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为 $dV = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta 2\pi \frac{2}{3} r(\theta) \sin \theta = \frac{2\pi}{3} r^3(\theta) \sin \theta d\theta$. 两边积分得到结果.
- 直线 AB 的参数方程是 $\begin{cases} x = \phi(t) = a \\ y = \psi(t) = t \end{cases}, t \in [-2\pi a, 0]$. 故 $S = - \int_0^{2\pi} y(t) dx(t) - \int_{-2\pi a}^0 \psi(t) d\phi(t) = - \int_0^{2\pi} a(\sin t -$

$$t \cos t) a(t \cos t) dt + 0 = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 + \pi a^2.$$

6. 由二力平衡, 压力差 dF 托起了单位体积内的粒子重力 dG . 从而 $dF + dG = 0 \Rightarrow Sdp + \rho g Sdz = 0 \Rightarrow dp + nmgdz = 0$. 由 $p = nk_B T$ 知 $dp = k_B T dn \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_B T} dz$. 两边积分知 $\log n(z) - \log n(0) = \frac{-mgz}{k_B T} \Rightarrow n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$.

$$7. \text{原式} \stackrel{t=xt}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 xt |\sin(xt)| d(xt)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 t |\sin(xt)| dt \stackrel{\text{R-L Lemma}}{=} \int_0^1 t dt \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{1}{\pi}.$$

8. 考虑 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$, 从而 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调递增. 因此由定积分第二中值定理, $\exists \xi \in [e^2, b]$ 使得

$$\int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x} = \int_{e^2}^b \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{b}}{\ln b} \int_{\xi}^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{b}}{\ln b} (\sqrt{b} - \sqrt{\xi}) < \frac{2b}{\ln b}.$$

上述做法纯扯淡. 其实我们可以构造 $g(b) = \frac{2b}{\ln b} - \int_{e^2}^b \frac{dx}{\ln x}$, $g'(b) = \frac{2 \ln b - 2}{(\ln b)^2} - \frac{1}{\ln b} = \frac{\ln b - 2}{(\ln b)^2} > 0 \Rightarrow g(b) > g(e^2) = e^2$.

9. (1) $f(x)$ 是一个次数从 n 到 $2n$ 的多项式. 至于 $f^{(i)}(0)$ 是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时 $i \geq n$, 求导后得到的非零常数值是 $i!c$, 且 c 是整数除以 $n!$ 得到的有理数, 从而 $i!c$ 是整数. 由于 $f(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f^{(i)}(\pi) = (-1)^n f^{(i)}(0)$, 因此 $f^{(i)}(\pi)$ 也是整数.

(2) 由分部积分, $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(x)(-\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx = f(0) + f(\pi) + f'(x) \sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx$. $f(x)$ 是 $2n$ 此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - f''(0) - f''(\pi) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0) + (-1)^n f^{(2n)}(\pi)$, 因此是整数.

(3) 在区间 $[0, \pi]$ 上成立 $0 \leq a - bx = b(\pi - x) \leq a$, 因此 $0 \leq f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$, 从而 $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \int_0^\pi f(x) dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$. 当 n 足够大时, $\frac{\pi^{n+1} a^n}{n!} < 1$.

10. 令 $p(x) = x^3 - x^2$, 从而有 $\int_0^1 [(f''(x))^2 - (p''(x))^2] dx = \int_0^1 [f''(x) - p''(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 f''(x)p''(x) dx - 2 \int_0^1 [p''(x)]^2 dx \geq 0 + 2f'(x)p''(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 f'(x)p'''(x) dx - 8 = 2f'(1)p''(1) - 2f(x)p'''(x)|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x)p''''(x) dx - 8 = 0$.

11. 设 $x_0 = \arg \max_{x \in [0, 1]} f(x) \Rightarrow f'(x_0) = 0$. 从而成立弧长估计

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \leq \int_0^1 (1 + |f'(x)|) dx = 1 + \int_0^{x_0} f'(x) dx - \int_{x_0}^1 f'(x) dx = 1 + 2f(x_0) \leq 3.$$

12. 由分部积分和定积分第一中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) d(x-a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x) d \frac{(x-a)^2}{2} \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} f''(x) dx \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} dx. \end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2} dx.$$

两式相加得 $\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) + (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)) \frac{(b-a)^3}{48} \stackrel{\text{Darboux}}{=} f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) + f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{24}$.

13. (1) 直接计算即可:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left(\frac{k}{n} - x \right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2} + \frac{1}{2n}(f(0) - f(1)) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2n} \right) + \frac{1}{2n}(f(0) - f(1)). \end{aligned}$$

利用分部积分,

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)d\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) = f(x)\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx := \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2n} - B_n^k,$$

其中

$$\begin{aligned} B_n^k &= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x)dx \\ &= f'(\xi_{k,1}) \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) dx + f'(\xi_{k,2}) \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) dx = -\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2} + \frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}. \end{aligned}$$

综上所述, 我们有

$$\begin{aligned} nA_n &= \sum_{k=1}^n \frac{f'(\xi_{k,2}) - f'(\xi_{k,1})}{8n} + \frac{f(0) - f(1)}{2} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n &= \frac{1}{8} \left(\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f'(x)dx \right) + \frac{f(0) - f(1)}{2} = \frac{f(0) - f(1)}{2}. \end{aligned}$$

14. WLOG $\int_a^b p(x)dx = 1$, 并设 $\int_a^b f(x)p(x)dx = c$, 任取 $k \in [\varphi'_-(c), \varphi'_+(c)]$, 构造“切”直线 $l: y = k(x-c) + \varphi(c)$. 由凸函数性质知 $\varphi(x) \geq l(x)$ 恒成立. 从而 $\varphi(c) = l(c) = k \left(\int_a^b f(x)p(x)dx - c \right) + \varphi(c) = \int_a^b [k(f(x)-c) + \varphi(c)]p(x)dx = \int_a^b l(f(x))p(x)dx \leq \int_a^b \varphi(f(x))p(x)dx$.

5 广义积分

5.1 问题

- 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^\alpha dx, \alpha > 0$ 的收敛性.
- 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$ 的收敛性与绝对收敛性.
- 讨论广义积分 $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} dx$ 的收敛性.
- 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$ 的收敛性.
- 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.
- 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调, $g(x) \not\equiv 0$ 是 \mathbb{R} 上以 $T > 0$ 为周期的连续函数. 证明无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件是无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)|g(x)|dx$ 收敛.
- $f(x), g(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上单调递减的连续正函数, 并且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx, \int_0^{+\infty} g(x)dx$ 发散. 记 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, 讨论 $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ 的收敛性.

■ 自由选讲.

8. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^p} dx, p \geq 0, a \in \mathbb{R}$ 的收敛性.
9. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q |\sin x|^r} dx, p, q, r > 0$ 的收敛性.
10. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$ 的收敛性.
11. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$ 的收敛性和绝对收敛性.
12. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = 0$.
13. 求积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.
14. 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.
15. (Dirichlet 积分). 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. 你可以利用恒等式 $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$.
16. (Euler 积分). 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$.
17. (Euler-Poisson 积分). 利用数列 $\left\{ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right\}$ 的极限, 求积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. (你可以使用如下命题: 当 $a \geq 1$ 时, $0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^a \leq \frac{x^2}{a} e^{-x}$ 在区间 $[0, a]$ 上恒成立. 这由导数知识容易验证.)
18. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上内闭可积, $f(+\infty) = A, f(-\infty) = B$. 证明 $\forall a \in \mathbb{R}$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+a) - f(x)] dx$ 收敛, 并求其值.
19. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ 收敛.
20. 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $\forall k = 1, 2, \dots, n, u_k(x)$ 均单调有界. 证明 $\int_0^{+\infty} f(x) \prod_{k=1}^n u_k(x) dx$ 收敛.
21. $a, b > 0$, 广义积分 $\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$ 收敛, 证明 $\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt$.
22. 利用余元公式 $\text{Beta}(p, 1-p) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{-p} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} (0 < p < 1)$ 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$.
23. 计算极限 $\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{t}(e^x - x - 1)} dx$. 你可能需要用到第 17 题的结论.

5.2 解答

1. 由于当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $x \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^\alpha \sim x \left(\frac{1}{2x^2}\right)^\alpha \sim x^{1-2\alpha}$, 因此 $\alpha > 1$ 时收敛, $0 < \alpha \leq 1$ 时发散.
2. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, $\sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos(\xi(x))}{6} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$, 其中 $\xi(x) \in \left[0, \frac{\sin x}{x}\right] \cup \left[\frac{\sin x}{x}, 0\right]$.
由于 $\left|\frac{\cos(\xi(x))}{6} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\right| \leq \frac{1}{6x^3}$ 绝对收敛, 而 $\frac{\sin x}{x}$ 条件收敛, 因此原积分条件收敛.
3. 做变元替换 $t = \frac{1}{x}$ 知原积分为 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t^{\frac{1}{2}} \ln(1+t)}$. 由于变上限积分 $\int_1^T \sin t dt$ 有界, $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}} \ln(1+t)}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法知收敛.
4. 记 $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx, I_2 = \int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx \stackrel{x=\frac{1}{x}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^{2-p}} dx$. 先讨论 I_1 , 有 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^p} dx \stackrel{t=x+\frac{1}{x}}{=} \int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{(t + \sqrt{t^2 - 4})^{p-1} \sqrt{t^2 - 4}} dt$. 当 $p > 0$ 时, 变上限积分 $\int_2^A \sin t dt$ 有界, $\frac{1}{(t + \sqrt{t^2 - 4})^{p-1} \sqrt{t^2 - 4}}$ 在 t 充分大后单调递减趋于 0, 因此原积分收敛. 当 $p = 0$ 时, 后者在 t 充分大后单调且不趋于 0 或 $+\infty$, 由 Abel 判别法知其收敛性与 $\int_2^{+\infty} \sin t dt$ 收敛性相同, 因此发散. 当 $p < 0$ 时显然发散. 对于 I_2 可直接将 $2-p$ 代入 p 得到 $2-p > 0$ 时收敛, 否则发散. 原积分收敛当且仅当 I_1, I_2 同时收敛, 因此其在 $0 < p < 2$ 时收敛.

5. 不妨设 $f(x) \geq 0$ 且单调递减. 从而 $xf(x) = 2\frac{x}{2}f(x) \leq 2 \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt$, 由 Cauchy 收敛准则知 x 充分大后 $xf(x)$ 充分小, 即极限为 0.

6. “ \Rightarrow ”: 由无穷积分收敛, $f(x)$ 单调知可不妨设 $f(x) \geq 0$ 且单调递减, 那么由 $|g(x)|$ 的有界性立得结果.

“ \Leftarrow ”: 由无穷积分收敛, $f(x)$ 单调, $g(x)$ 连续且不恒为 0 知可不妨设 $f(x) \geq 0$ 且单调递减, 并找到区间 $[a, b] \subset [0, T]$ 使得 $\forall x \in [a, b], |g(x)| \geq m$. 从而对于 $\forall k_1 \leq k_2 \in \mathbb{Z}$, 成立

$$\begin{aligned} \int_{a+k_1T}^{a+k_2T} f(x)dx &= \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx + \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{b+kT}^{a+(k+1)T} f(x)dx \\ &= \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx + \frac{T-b+a}{b-a} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f\left(\frac{T-b+a}{b-a}(x-a-kT)+b+kT\right)dx \\ &\leq \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx + \frac{T-b+a}{b-a} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx \\ &= \frac{T}{b-a} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx \leq \frac{T}{(b-a)m} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)|g(x)|dx \leq \frac{T}{(b-a)m} \int_{a+k_1T}^{a+k_2T} f(x)|g(x)|dx, \end{aligned}$$

其中第一个不等号是因为当 $x \in [a+kT, b+kT]$ 时, $f\left(\frac{T-b+a}{b-a}(x-a-kT)+b+kT\right) \leq f(x)$, 这由 $f(x)$ 单调递减保证. 然后利用 Cauchy 收敛原理知广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

7. 可收敛可发散. 可发散是显然的, 一个可收敛的例子是 $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$, 然后交替构造 $f(x)$ 和 $g(x)$ 让

它们在许多区间为常数函数. 比如说, 他们在 $x=n$ 处分开后, 在接下来长度为 n^2 的区间里, 令 $f(x) \equiv \frac{1}{n^2}$, $g(x) \equiv \frac{1}{x^2}$; 然后在长度为 1 的区间里, $f(x)$ 连续地连接两点 $\left(n^2+n, \frac{1}{n^2}\right)$ 和 $\left(n^2+n+1, \frac{1}{(n^2+n+1)^2}\right)$, $g(x) \equiv \frac{1}{x^2}$; 再在接下来长度为 $(n^2+n+1)^2$ 的区间里, 令 $f(x) \equiv \frac{1}{x^2}$, $g(x) \equiv \frac{1}{(n^2+n+1)^2}$.

8. (1) 当 $a \neq 0, p > 0$ 时, $\frac{1}{1+x^p}$ 单调递减趋于 0, $\int_0^N \cos ax dx$ 有界, 由 Dirichlet 判别法知收敛.

(2) 当 $a \neq 0, p = 0$ 时显然发散. (3) 当 $a = 0, p > 1$ 时显然收敛. (4) 当 $a = 0, 0 \leq p \leq 1$ 时显然发散.

9. 显然当 $q \leq p+1$ 时原积分发散. 当 $q > p+1$ 时, 一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q |\sin t|^r} dt \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^p \pi^p \int_0^\pi \frac{dt}{1+(k\pi)^q |\frac{2}{\pi}t|^r} \leq C_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^p}{k^{\frac{q}{r}}} \int_0^{2(k\pi)^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}.$$

另一方面,

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(k\pi+t)^p}{1+(k\pi+t)^q |\sin t|^r} dt \geq \sum_{k=0}^{+\infty} (k\pi)^p \int_0^\pi \frac{dt}{1+[(k+1)\pi]^q |t|^r} \geq C_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^p}{(k+1)^{\frac{q}{r}}} \int_0^{\pi[(k+1)\pi]^{\frac{q}{r}}} \frac{dt}{1+t^r}.$$

由于: (1) $r > 1$ 时 $\int_0^A \frac{dt}{1+t^r}$ 一致有界; (2) $r = 1$ 时 $\int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim \ln A$; (3) $r < 1$ 时 $\int_0^A \frac{dt}{1+t^r} \sim A^{1-r}$; 因此原积分收敛当且仅当 $q > (p+1)\max(r, 1)$.

10. 函数恒正, 只需讨论有界性. 令 $u_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{xdx}{1+x^6 \sin^2 x}$, 则

$$\begin{aligned} u_k &\leq k\pi \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = k\pi \int_0^\pi \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} = 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(k-1)^6 \pi^6 \sin^2 x} \\ &\leq 2k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+4(k-1)^6 \pi^4 x^2} = \frac{k}{\pi(k-1)^3} \int_0^{(k-1)^3 \pi^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{2k^2}. \end{aligned}$$

由于 $\int_0^{n\pi} \frac{xdx}{1+x^6 \sin^2 x} = \sum_{k=1}^n u_k \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < +\infty$, 因此原广义积分收敛.

11. 先考虑收敛性. 显然 $p \leq 0$ 时发散. $p > 0$ 时, 由于 $\left| \int_a^A e^{\sin x} \sin 2x dx \right| = 2 \left| \int_{\sin a}^{\sin A} e^{\sin x} \sin x dx \right| = 2|e^{\sin A}(\sin A - 1) - e^{\sin a}(\sin a - 1)| < 8e$, 且 $\frac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0, 因此由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty} \frac{e^x \sin 2x}{x^p} dx$ 收敛, 我们只需考察积分在 0 处的性质. 由于当 $x \rightarrow 0$ 时 $\frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \sim \frac{2}{x^{p-1}}$, 因此 $p \geq 2$ 时发散, $0 < p < 2$ 时收敛. 再考虑绝对收敛性. $1 < p < 2$ 时, $\left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \right| \leq \frac{e}{x^p}$, 因此绝对收敛. $0 < p \leq 1$ 时, $\left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} \right| \geq \frac{2^p}{e} \left| \frac{\sin 2x}{(2x)^p} \right| \geq \frac{1}{e} \left| \frac{\sin^2 2x}{(2x)^p} \right| = \frac{1}{2e} \left(\frac{1 - \cos 4x}{(2x)^p} \right)$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{(2x)^p} dx$ 收敛, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x)^p} dx$ 发散, 因此原积分条件收敛.

12. 做变换 $t = \frac{1}{x}$, 则

$$\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt = \int_1^A \frac{\cos^n t}{t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2} dt := I_1 + I_2.$$

对于 I_1 , 由定积分第二中值定理知 $\exists \xi_A \in [1, A]$ s.t. $I_1 = \int_1^{\xi_A} \cos^n t dt$. 因此对于任意固定的 A , 当 $n \rightarrow +\infty$ 时 $I_1 \rightarrow 0$.

对于 I_2 , 成立 $|I_2| \leq \int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{A}$. 因此 $\forall \varepsilon > 0$, 选择 $A = \frac{2}{\varepsilon}$, 则 $|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, 并选择充分大的 n 使得 $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. 此时 $|I| \leq \varepsilon$, 由极限定义知结论成立.

13. 做倒数变换, 知 $I(\alpha) = \int_{+\infty}^0 \frac{d\frac{1}{x}}{(1+x^{-2})(1+x^{-\alpha})} = I(-\alpha)$. 又有 $I(\alpha) + I(-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, 因此 $I(\alpha) \equiv \frac{\pi}{4}$.

14. $I = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4} dx \stackrel{x=2x}{=} \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2x)}{(2x)^2+4} d(2x) = \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx - \frac{\ln 2}{6} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \stackrel{x=e^t}{=} \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{e^{2t}+1} dt - \frac{\pi \ln 2}{12} = -\frac{\pi \ln 2}{12}$.

15. 对恒等式两边积分知 $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. 记 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$. 由于 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = O(x)$, 故 $f(x) \in R[0, \pi]$.

由 R-L 引理知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x dx = 0$, 即是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

再利用恒等式 $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 立得结论.

16. 由对称性知 $I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \sin x dx$. 做变换 $x = 2x$ 知

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

17. 记 $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$. 做变元替换 $t = \sqrt{n} \sin x$ 知 $I_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 由于 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$, 因此只需求出极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right] dt$. 在提示中令 $x = t^2, a = n$, 得到估计式 $0 \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left[e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right] dt \leq \frac{\int_0^{\sqrt{n}} t^4 e^{-t^2} dt}{n}$. 当 $n \rightarrow +\infty$ 时右边分子上的广义积分收敛, 因此右边极限为 0, 由夹逼原理知欲求极限存在且为 0. 从而 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

18. 直接用定义. $\int_M^N [f(x+a) - f(x)] dx = \int_N^{N+a} f(x) dx - \int_M^{M+a} f(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty, M \rightarrow -\infty} (A-B)a$.

19. 做变量替换 $t = x - \frac{1}{x}$, 知 $\int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} f\left(x - \frac{1}{x}\right) d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t + \sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}} f(t) dt$.

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 收敛, $\frac{t + \sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}$ 单调有界, 因此由 Abel 判别法知 $\int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ 收敛. 另一侧同理.

20. 由 Abel 判别法, $\int_0^{+\infty} f(x) u_1(x) dx$ 收敛, 而 $u_2(x)$ 单调有界, 因此 $\int_0^{+\infty} f(x) u_1(x) u_2(x) dx$ 收敛, 依此类推.

21. 令 $t = ax - \frac{b}{x}$, 则 $x = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{2a}$, $ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2 + 4ab}$, $dx = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{2a\sqrt{t^2 + 4ab}} dt$, 从而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^0 f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} - t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} + t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt. \end{aligned}$$

22. $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx \stackrel{t=\frac{1}{1+x^\beta}}{=} \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} (1-t)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} \text{Beta}\left(1 - \frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha+1}{\beta} \pi}.$

23. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开和变元替换 $x = x\sqrt{t}$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{t}(e^x - x - 1)} dx &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{t} \frac{e^{\xi(x)} x^2}{2}} dx \quad (0 \leq \xi(x) \leq x) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^M e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} dx + \int_M^{+\infty} e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} dx := I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

对于 I_1 , 由于 $\lim_{t \rightarrow 0+0} e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 且有一致性 $\lim_{t \rightarrow 0+0} \sup_{x \in [0, M]} \left| e^{-\frac{e^{\xi(x\sqrt{t})} x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} \right| = 0$, 因此 $\lim_{t \rightarrow 0+0} I_1(t) = \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

对于 I_2 , 我们有 $|I_2(t)| \leq \int_M^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ 恒成立. 因此我们取充分大的 M , 此时有

$$\left| I_1(t) + I_2(t) - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \leq \left| I_1(t) - \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| + |I_2(t)| + \left| \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

对充分小的 t 成立. 因此原极限值为 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(编者注: 你也可以直接使用 Lebesgue 控制收敛定理.)

6 数项级数

6.1 问题

1. 讨论级数 $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ 的收敛性.

2. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ 的收敛性.

3. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^\alpha$, $\alpha > 0$ 的收敛性.

4. 设非常数函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续非负, 且 $f(x) \leq 1$, 并记 $a_n = \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^{\frac{1}{n}}$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - a_n)$ 发散.

■ 自由选讲.

5. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$ 的收敛性.

6. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln n}$ 的收敛性和绝对收敛性.

7. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n + \frac{1}{n})^n}$ 的收敛性.

8. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n + \sin n}}$ 的收敛性.
9. 讨论级数 $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \cdots$ 的收敛性.
10. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$ 的收敛性.
11. $0 < a_1 < \frac{\pi}{2}, a_n = \sin a_{n-1}$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p$ 的收敛性.
12. $p, q > 0$, 讨论级数 $1 - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q} + \cdots$ 的收敛性与绝对收敛性.
13. $a_n > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 收敛.
14. 是否存在部分和序列有界且通项趋于 0 的发散级数?
15. 如果对任意以 0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 都有 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛. 绝对收敛性呢?
16. 计算级数 $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4k^2 - 4k + 1}$.
17. 计算级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{5}n)}{n}$.
18. (Bertrand 判别法). 对于正项级数, 证明:
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散} \end{cases}.$$
19. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 数列 $p_n > 0$ 且单调递增趋于 $+\infty$. 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{p_n} = 0$.
20. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ 收敛, 证明: (1) $\forall k \in \mathbb{N}_+, \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n+k}$ 收敛; (2) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n+k} = 0$.
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$ 且绝对收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$ 且条件收敛, 证明它们的 Cauchy 乘积收敛且 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = AB$.
22. 对于两个发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?
23. (1) 对于收敛级数和发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?
(2) 对于正项收敛级数和正项发散级数, 它们的 Cauchy 乘积是否一定发散?
24. $f(x) \in D[1, +\infty)$, 且 $\int_1^{+\infty} |f'(x)| dx$ 收敛, 证明广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 同敛散.
25. $0 < p < 1, a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n^p}$, 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.
26. 设 $x \in (0, 1)$, 证明 $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1}$.
27. (Euler 公式). 证明 $\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$. 你可以将 $\sin[(2n+1)\phi]$ 写成关于 $\sin \phi$ 的多项式, 并利用零点求解.
28. 计算无穷乘积 $2 \left(\frac{2}{1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \right)^{\frac{1}{8}} \cdots$. 你可以先写出通项公式, 然后逐步化简.

6.2 解答

1. 当 $e^k \leq n \leq e^{k+1}$ 时, $\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \geq \frac{1}{(k+1)^{\ln(k+1)}}$, 从而 $\sum_{n \in [e^k, e^{k+1}]} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \geq \frac{e^{k+1} - e^k - 2}{(k+1)^{\ln(k+1)}} \rightarrow +\infty$, 因此发散.
2. 由于 $\frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{n^\alpha} \sim \frac{1}{6n^{2+\alpha}}$, 因此收敛.

3. 由于 $\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^\alpha$ 单调递减趋于 0, 由 Leibniz 判别法知收敛. 由于 $\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^\alpha \sim \frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha}}$, 因此 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时绝对收敛, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时条件收敛.

4. 显然存在 $0 < r < 1$ 使得 $\int_0^1 f(x)dx < r$. 因此 $1 - a_n \geq 1 - r^{\frac{1}{n}} = 1 - e^{\frac{\ln r}{n}} \sim -\frac{\ln r}{n}$, 由调和级数发散知原级数发散.

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n + n\pi)}{n}$. 部分和序列 $\sum_{k=1}^n \sin(k + k\pi)$ 有界, $\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知级数收敛.

6. $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减趋于 0, $\sum_{n=2}^k \sin n$ 对于 $\forall k \geq 1$ 有一致上界, 由 Dirichlet 判别法知级数收敛. 又因为 $\left|\frac{\sin n}{\ln n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{\ln n} = \frac{1 - \cos 2n}{2 \ln n} = \frac{1}{2 \ln n} - \frac{\cos 2n}{\ln n}$, 而 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{\ln n}$ 收敛, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2 \ln n}$ 发散, 因此级数不绝对收敛.

7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n} = 1$, 因此原级数发散.

8. 首先由 Dirichlet 判别法易知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 收敛. 注意到 $\frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n} - \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin n)}$, 且成立估计

$$\frac{1 - \cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)} = \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)} \leq \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin n)} \leq \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)} = \frac{1 - \cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} \pm 1)}$ 均发散, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n} \pm 1)}$ 均收敛 (Abel 判别法), 因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin n)}$ 发散, 从而原级数可写成一个收敛级数和一个发散级数的和, 故发散.

9. 注意到 $\sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{4}} = 2 \sin \frac{\pi}{8}$, $\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{8}} = 2 \sin \frac{\pi}{16}$, 依此类推, 再利用 $\sin x \sim x$ 知原级数收敛.

10. 合并同号项, 则级数改写为 $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k b_k$, 其中 $b_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2 - 1} \leq \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0$. 另一方面, $b_k \geq \int_0^1 \frac{1}{k^2 + x} dx + \int_1^2 \frac{1}{k^2 + x} dx + \cdots + \int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{k^2 + x} dx = \int_0^{2k+1} \frac{1}{k^2 + x} dx = \ln \frac{(k+1)^2}{k^2}$, 而 $b_{k+1} \leq \int_{-1}^0 \frac{1}{(k+1)^2 + x} dx + \cdots + \int_{2k+1}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2 + x^2} dx = \int_{-1}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2 + x^2} dx = \ln \frac{(k+1)^2 + 2(k+1)}{k(k+2)} \Rightarrow b_k - b_{k+1} \geq \ln \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)} \geq 0$. 由 Leibniz 判别法知收敛.

11. 上学期例题已证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n^2 = 3$, 因此 $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$, $a_n^p \sim \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{p}{2}}$, 从而当 $p \leq 2$ 时级数发散, $p > 2$ 时级数收敛.

12. (a) 当 $p > 1, q > 1$ 时, $|a_n| \leq \frac{1}{n^{\min(p,q)}}$, 因此绝对收敛.

(b) 当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 由 Leibniz 判别法知条件收敛.

(c) 当 $p > 1, 0 < q \leq 1$ 或 $0 < p \leq 1, q > 1$ 时, 级数正部 (或负部) 收敛, 负部 (或正部) 发散, 因此发散.

(d) 当 $0 < p < q \leq 1$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q}}{\frac{1}{(2n-1)^p}} = 1$ 知级数发散.

(e) 当 $0 < q < p \leq 1$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{(2n)^q} + \frac{1}{(2n+1)^p}}{-\frac{1}{(2n)^q}} = 1$ 知级数发散.

13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛 $\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$. 因此可按从小到大顺序将 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 重排为 $a_{\phi(1)} \leq a_{\phi(2)} \leq \cdots \leq a_{\phi(n)} \leq \cdots$.

令 $b_n = \frac{n}{a_{\phi(1)} + a_{\phi(2)} + \cdots + a_{\phi(n)}}$, 则 $\{b_n\}$ 单调递减, 且 $b_{2n} = \frac{2n}{a_{\phi(1)} + \cdots + a_{\phi(2n)}} \leq \frac{2n}{a_{\phi(n)} + \cdots + a_{\phi(2n)}} \leq \frac{2n}{n a_{\phi(n)}} = \frac{2}{a_{\phi(n)}}$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$. 又因为 $\frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leq b_n$, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n}$ 收敛.

14. 存在. 一个例子为 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \cdots$.

15. 不妨设 $a_n > 0$, 否则可将对应 x_n 反号, 题目条件与绝对收敛性结论不变. 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散, 则可归纳构造数列 A_n ,

满足 $A_0 = 0, A_n = \inf_{k \in \mathbb{N}_+} \sum_{i=A_{n-1}+1}^k a_i \geq n$. 从而定义数列 $\{x_n\}$ 为 $A_1 - A_0$ 个 $1, A_2 - A_1$ 个 $\frac{1}{2}, \dots, A_n - A_{n-1}$ 个 $\frac{1}{n}, \dots$

的依次排列, 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n > 1 + 1 + \dots = +\infty$. 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛.

16. 注意到 $\arctan \frac{2}{4k^2 - 4k + 1} = \arctan \frac{1}{2k-1} - \arctan \frac{1}{2k}$, 从而 $\sum_{k=2}^{+\infty} \arctan \frac{2}{4k^2 - 4k + 1} = \arctan \frac{1}{2}$.

17. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \sqrt{5}k}{k} = - \int_{\sqrt{5}}^{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kt dt = - \int_{\sqrt{5}}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t - \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = - \int_{\sqrt{5}}^{\pi} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t dt + \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{5}) \xrightarrow{R-L} \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{5})$.

18. 先证明第一种情况. 由条件知 $\exists N_1 > 0, \text{s.t.} \forall n > N_1, \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] > r_1 > 1 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + r_1}$. 可以验证当 $1 < p < r_1$ 时, $\frac{n \ln n}{(n+1) \ln n + r_1} < \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \Leftrightarrow \frac{(n+1)[\ln^p(n+1) - \ln^p n]}{\ln^{p-1} n} < r_1$. 利用 $f(x) = x^p$ 的微分中值定理, 知 LHS = $\frac{(n+1)p \ln^{p-1}(n+\theta)[\ln(n+1) - \ln n]}{\ln^{p-1} n} < p \underbrace{(n+1)[\ln(n+1) - \ln n]}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\ln^{p-1}(n+1)}{\ln^{p-1} n}}_{\rightarrow 1} < r_1 =$

RHS 当 n 足够大时成立. 因此有 $\exists N_2 > N_1, \text{s.t.} \forall n > N_2, \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n \ln^p n}{(n+1) \ln^p(n+1)} \Rightarrow a_n < \frac{C}{n \ln^p n}$. 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{n \ln^p n}$

收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

19. 记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 并设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k a_k &= p_1 S_1 + \sum_{k=2}^n p_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (p_k - p_{k+1}) + S_n p_n \\ &\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^n p_k S_k}{p_n} = S_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} = (S_n - S) - \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} + S \frac{p_1}{p_n}. \end{aligned}$$

当 n 充分大时, $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{6}, \left| S \frac{p_1}{p_n} \right| < \frac{\varepsilon}{6}$. 对于第二项, 设 $|S_n| \leq M$, 由极限定义, $\exists N_1 > 1, \text{s.t.} \forall n \geq N_1, |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而有估计

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \right| \leq 2M \sum_{k=1}^{N_1} \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N_1+1}^{n-1} \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \leq 2M \frac{p_{N_1+1} - p_1}{p_n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由极限定义, $\exists N_2 > N_1, \text{s.t.} \forall n \geq N_2, \frac{p_{N_1+1} - p_1}{p_n} < \frac{\varepsilon}{12M}$. 此时 $\left| \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S) \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n} \right| < \frac{2\varepsilon}{3}$, 从而有 $\left| \frac{\sum_{k=1}^n p_k S_k}{p_n} \right| < \varepsilon$.

这表明其极限值为 0.

20. (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+k)a_{n+k}$ 收敛, $\frac{n}{n+k}$ 随 n 单调有界, 由 Abel 判别法知收敛. (2) 记 $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} k a_k$. 则

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^m n a_{n+k} \right| &= \left| \sum_{n=1}^m \frac{n}{n+k} (n+k) a_{n+k} \right| = \left| \sum_{n=1}^m \frac{n}{n+k} (R_{n+k-1} - R_{n+k}) \right| \\ &= \left| \frac{1}{k+1} R_k - \frac{m}{k+m} R_{k+m} + \sum_{n=1}^{m-1} R_{n+k} \left(\frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{k+1} |R_k| + \frac{m}{k+m} |R_{k+m}| + \sup_{k+1 \leq j \leq n+m-1} |R_j| \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{n+1}{n+k+1} - \frac{n}{n+k} \right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{k+1}|R_k| + \frac{m}{k+m}|R_{k+m}| + \sup_{j \geq k+1} |R_j| \left(\frac{m}{k+m} - \frac{1}{k+1} \right)$$

令 $m \rightarrow +\infty$, 得到 $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n+k} \right| \leq \frac{1}{k+1}|R_k| + \sup_{j \geq k+1} |R_j| \leq 2 \sup_{j \geq k} |R_j| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

21. 记 $A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k$, 则 $\sum_{k=1}^n c_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1 = A_n B + (a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1)$ (定义 $\beta_k = B_k - B := \Delta_1(n) + \Delta_2(n)$). 显然 $\Delta_1(n) \rightarrow AB$, 下证 $\Delta_2(n) \rightarrow 0$. 设 $|\beta_n| \leq \beta, \forall n \geq 1$. 由定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 3$, s.t. $\forall n > N, \forall p \geq 1, |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \right)}, \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$. 从而当 $n \geq 2N$ 时, $|\Delta_2(n)| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k \beta_{n+1-k} \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n a_k \beta_{n+1-k} \right| \leq \varepsilon$.

22. 不一定, 反例是 $a_0 = 1, a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 和 $b_0 = 1, b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ 均发散, 但 Cauchy 乘积 $c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \cdots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^1 + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 收敛.

23. (1) 不一定, 反例是 $a_n \equiv 0$ 和 $b_n \equiv 1$. 当然也不一定收敛, 如 $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = n$.

(2) 一定. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散, 则 $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \geq a_1 b_{n-1}$, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 发散.

24. 注意到

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^{n-1} f(k) - \int_m^n f(x) dx \right| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} |f(k) - f(x)| dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \int_k^x |f'(t)| dt dx \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \int_k^{k+1} |f'(t)| dx dt \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} |f'(t)| dt = \int_m^n |f'(t)| dt, \end{aligned}$$

因此由 Cauchy 收敛准则知广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 同敛散.

25. 易知 a_n 单调递减, 且 $a_{n+1} - a_n = -a_{n+1} a_n^p \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^p} < \frac{a_n - a_{n+1}}{\xi_n^p} \stackrel{\text{微分中值定理}}{=} \frac{1}{1-p} (a_n^{1-p} - a_{n+1}^{1-p})$. 然后两边累加得到收敛性.

$$26. \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{+\infty} (1 + x^{2^i(2n-1)}) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1})^{-1}.$$

27. 注意到 $\sin[(2n+1)\phi]$ 可展开为 $\sin \phi$ 的 $2n+1$ 次多项式, 且只含奇次幂项, 因此 $\sin[(2n+1)\phi] = \sin \phi P(\sin^2 \phi)$, 其中 $P(\cdot)$ 是 n 次多项式. 由极限关系知 $P(0) = 2n+1$, 且 LHS 全部零点为 $x_k = \frac{k\pi}{2n+1}, k = 1, \cdots, n$, 因此

$$\begin{aligned} P(t) &= (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right) \\ \Rightarrow \sin[(2n+1)\phi] &= (2n+1) \sin \phi \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right) \\ \Rightarrow \sin x &= (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right). \end{aligned}$$

现在, 问题变为求 RHS 在 $n \rightarrow +\infty$ 时的极限. 记

$$U_m = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right), V_m = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right).$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_m = x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right),$$

$$1 > V_m \geq \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\left(\frac{x}{2n+1}\right)^2}{\frac{4}{\pi^2} \frac{k^2 \pi^2}{(2n+1)^2}} \right) = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{x^2}{4k^2} \right) > \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2} \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1.$$

因此由夹逼原理, $\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2} \right).$

28. 主要难点在于如何写成通式.

$$\begin{aligned} P_n &= 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{(2^{k-1}-1)!!(2^k)!!}{(2^{k-1})} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2^k}} \stackrel{(2^n-1)!! = \frac{(2^n)!}{2^{2^{n-1}}(2^{n-1})!}}{=} 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2^{2^{k-2}}(2^{k-2})!}{2^{2^{k-2}}(2^{k-2})!} \cdot \frac{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!}{2^{2^{k-1}}(2^{k-1})!} \right]^{\frac{1}{2^{k-1}}} \\ &= 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[2^{2^{k-1}-\frac{1}{2}} \frac{((2^{k-1})!)^3}{((2^{k-2})!)^2(2^k)!} \right]^{\frac{1}{2^{k-1}}} = 2\sqrt{2} \prod_{k=2}^n \left[2^{1-\frac{1}{2^k}} \frac{\left(\frac{(2^{k-1})!}{(2^k)!}\right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}}{\left(\frac{(2^{k-2})!}{(2^{k-1})!}\right)^{\frac{1}{2^{k-2}}}} \right] = 2\sqrt{2} \cdot 2^{n-1-\sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k}} \frac{1}{\frac{1}{2}} \left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^{\frac{1}{2^{n-1}}} \\ &= 2 \cdot 2^{n+\frac{1}{2^n}} \left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^{\frac{1}{2^{n-1}}} = 2 \left\{ 2^{n2^n+1} \left[\frac{(2^{n-1})!}{(2^n)!} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2^n}} \stackrel{\text{Stirling}}{\sim} 2 \left[2^{n2^n+1} \frac{2\pi 2^{n-1} \left(\frac{2^{n-1}}{e}\right)^{2^n}}{2\pi 2^n \left(\frac{2^n}{e}\right)^{2^{n+1}}} \right]^{\frac{1}{2^n}} \rightarrow e. \end{aligned}$$

7 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学信息科学技术学院 22 级本科生吴明睿同学, 他提供了很多 \LaTeX 排版的建议. 感谢选修 2025 春数学分析 II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.