数学分析 II 习题课讲义 (2025 春)

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 3 月 13 日

目录

1 定积分的基本概念与可积性

1.1 问题

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n^\alpha}=1,\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 试证明 $f(x)\in R[a,b]$ 的充要条件是: $\forall\varepsilon>0$, $\exists[a,b]$ 上满足以下条件的连续函数 $g(x)$ 和 $h(x)$: (1) $g(x)\le f(x)\le h(x),\forall x\in[a,b]$; (2) $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon$.

3. 函数 $g(x)\in R[a,b],f(u)\in C[A,B]$, 这里 A,B 分别是 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的上下确界. 证明 $f(g(x))\in R[a,b]$.

4. 函数 $f(x)\in R[a,b]$, 证明存在点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

5. 函数 $f(x)\in R[a,b]$, 且 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(x)>0$. 证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

6. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积. 证明对于任意的 $[a,b]$, $\displaystyle\lim_{h\to0}\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x=0$.

7. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x),g(x)\in R[a,b],p,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\left(\int_a^b f^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}}$.

(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p\|g\|_q\ge\|fg\|_1$.)

[一个简单应用, 留作思考题] $0<q\le p\le s\le\infty$, 那么存在 $\theta\in[0,1]$ 使得 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{\theta}{q}+\dfrac{1-\theta}{s}$. 证明 $\|f\|_p\le\|f\|_q^\theta\|f\|_s^{1-\theta}$.

8. (Minkowski 不等式). 同上题条件, 证明 $\displaystyle\left(\int_a^b(f+g)^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$.

(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p+\|g\|_p\ge\|f+g\|_p$, 这表明 L_p 空间是赋范线性空间.)

■ 自由选讲.

9. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x)\in R[a,b]$ 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

10. 已知 $(0,1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 问是否有 $f(x)\in R[0,1]$?

11. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.

12. $n\in\mathbb{N}_+,f(x)\in C[a,b],\displaystyle\int_a^b x^kf(x)\mathrm{d}x=0,k=0,1,\cdots,n$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个零点.

1.2 解答

1. $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,n^\alpha(1-\varepsilon)<a_n<n^\alpha(1+\varepsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+N^\alpha)<\varepsilon$, $\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1+a_2+\cdots+a_N)<\varepsilon$, $\displaystyle\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1}-(N+1)^\alpha)+\cdots+(a_n-n^\alpha)]\right|\le\frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha+\cdots+n^\alpha]\le\frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}\sum_{i=1}^n i^\alpha=\frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha\le\varepsilon\int_0^1x^\alpha\mathrm{d}x+\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\alpha+1}+\varepsilon\le2\varepsilon$. 这意味着 $\displaystyle\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}\left(\sum_{i=1}^n a_i-\sum_{i=1}^n i^\alpha\right)\right|\le4\varepsilon\Rightarrow$ 原极限 $\displaystyle=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\sum_{i=1}^n i^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$.

2. 必要性: $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists$ 分割 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\displaystyle\sum_{i=1}^n\omega_i(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\exists$ 阶梯函数 $s_1(x),s_2(x)$ 满足 $s_1(x)\le f(x)\le s_2(x)$ 且 $\displaystyle\int_a^b[s_2(x)-s_1(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\exists$ 连续函数 $g(x),h(x)$ 满足 $g(x)\le f(x)\le h(x)$ 且 $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]<\varepsilon$.

充分性: $g(x)$ 连续, $\displaystyle\int_a^b[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}\Rightarrow\exists$ 分割 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\displaystyle\sum_{i=1}^n\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{h(x)-g(x)\}(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\displaystyle\sum_{i=1}^n w_i^g(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{2}$. 在此分割下, $\displaystyle\sum_{i=1}^n w_i^f(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^n\left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}h(x)-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}g(x)\right](x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^n\left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{h(x)-g(x)\}+w_i^g\right](x_i-x_{i-1})\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

3. 用 Lebesgue 定理显然. 如不用 Lebesgue 定理, 则 $\forall\delta>0,\exists\tau>0$ s.t. $\forall|x-x'|<\tau,|f(x)-f(x')|<\delta$. 从而 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ s.t. $\sum\limits_{w_i^g>\tau}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$. 因为 $\{[x_{i-1},x_i]: w_i^{f\circ g}>\delta\}\subset\{[x_{i-1},x_i]: w_i^g>\tau\}$, 从而 $\sum\limits_{w_i^{f\circ g}>\delta}(x_i-x_{i-1})\le\sum\limits_{w_i^g>\tau}(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$, 即 $f\circ g$ 可积.

4. 由 $f(x)\in R[a,b]$ 知存在 $[a_1,b_1]\subset(a,b)$, 使得 $w_{[a_1,b_1]}^f<1$. 同样的道理, 由 $f(x)\in R[a_1,b_1]$ 知存在 $[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1)$ 使得 $w_{[a_2,b_2]}^f<\dfrac{1}{2}$. 依此类推, 存在一系列闭区间套满足于 $w_{[a_n,b_n]}^f<\dfrac{1}{n}$, 只需取 $x_0\in\cap_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]$ 即可.

5. 由 4 题知存在连续点 $x_0\in(a,b)$, 因此 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$, $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\ge f(x_0)\delta>0$.

6. $\forall\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g(x)$ 满足 $\displaystyle\int_{a-1}^{b+1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b[f(x+h)-f(x)]\mathrm{d}x\right|&\le\left|\int_a^b[f(x+h)-g(x+h)]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b[g(x+h)-g(x)]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x\right|\\&\le 2\int_{a-1}^{b+1}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由一致连续性知 $\exists H>0$ s.t. $\forall x,x'\in[a-1,b+1],|x-x'|<H,|g(x)-g(x')|<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 取 $h<H$ 知 RHS $<\varepsilon$. 这意味着原极限为 0.

7. WLOG $\left(\displaystyle\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}=1$, 则原命题的结论可改写为 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha\ln a+(1-\alpha)\ln b\le\ln(\alpha a+(1-\alpha)b)\Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha}\le\alpha a+(1-\alpha)b$. 令 $\alpha=\dfrac{1}{p},1-\alpha=\dfrac{1}{q},a=x^p,b=y^q\Rightarrow xy\le\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\Rightarrow\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b\left(\frac{f(x)^p}{p}+\frac{g(x)^q}{q}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.)

8. 由 Hölder 不等式, $\displaystyle\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x=\int_a^b(f+g)^{p-1}f\mathrm{d}x+\int_a^b(f+g)^{p-1}g\mathrm{d}x\le\left(\int_a^b(f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b f^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b(f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b g^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\int_a^b f^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right)$. 消去 $\left(\displaystyle\int_a^b(f+g)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$ 得到原不等式.

(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Minkowski 不等式.)

9. 由聚点原理知有界性, 即 $|f(x)|\le M$. 其次 $\forall\varepsilon>0,\forall x\in[a,b],\exists\delta_x>0$, s.t. $\omega_{U_0(x,\delta_x)}<\varepsilon$. 开覆盖 $\cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)\supset[a,b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\supset[a,b]$. 不妨设 $a\le x_1<\cdots<x_n\le b$. 取分割点 $y_0=a,y_{3i+1}=x_i-\dfrac{\varepsilon}{4nM},y_{3i+2}=x_i+\dfrac{\varepsilon}{4nM},y_{3i+3}\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap(x_{i+1}-\delta_{i+1},x_i+\delta_{i+1}),y_{3n}=b,i=1,2,\cdots,n-1$. 对此分割, $\displaystyle\sum_{i=1}^{3n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon(b-a+1)$, 因此有可积性. 由于 $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\le\sum_{i=1}^{3n}\int_{y_{i-1}}^{y_i}|f(x)|\mathrm{d}x\le\varepsilon(b-a+1)$, 由 ε 的任意性知 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

10. 考虑 $f(x)=\tan\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=0$, 但是 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

11. 原式 $=2^{\alpha-\beta}\dfrac{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\frac{2}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]^{\alpha+1}}\xrightarrow{\text{定积分定义}}2^{\alpha-\beta}\dfrac{\left(\int_0^2 x^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta\mathrm{d}x\right)^{\alpha+1}}=2^{\alpha-\beta}\dfrac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$.

12. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 1 个零点, 记为 x_1. $\displaystyle\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 2 个零点, 记另一个为 x_2. 依此类推, $\displaystyle\int_a^b\left[\prod_{i=1}^n(x-x_i)\right]f(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow$ 存在至少 $n+1$ 个零点.

2 定积分的性质与计算

2.1 问题

1. $f(x)\in C[-1,1]$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=f(0)$.

2. (Riemann-Lebesgue 引理). 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, $g(x+T)=g(x)$, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设函数 $f(x)\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: (1) $\displaystyle\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$; (2) 若 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$, 则 $\displaystyle\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_a^b[xf(x)]^2\mathrm{d}x\geq\frac{1}{4}$.

■ 自由选讲.

4. $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续. (1) 若 $f^2(t)\leq 1+2\displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$, 证明 $f(t)\leq 1+t$. (2) 若 $f(t)\leq K+\displaystyle\int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s$, 其中 $K\geq 0$ 是常数, 证明 $f(1)\leq K\exp\left(\displaystyle\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right)$.

5. 试构造 $f(x)\in D[0,1]$ 但 $f'(x)\notin R[0,1]$ 的例子. 如果额外加上 $f'(x)$ 有界条件呢?

6. 试构造可积函数 f 和连续函数 g 使得 $f\circ g$ 不可积. 如果额外要求 g 是 C^∞ 函数呢?

7. 设函数 $f(x),g(x)\in R[a,b]$, 记 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为 $[a,b]$ 的一个分割, $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\}$. 任取 $\xi_i,\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$, 证明 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\displaystyle\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

8. $f(x)\in C[a,b]$, 且 $\exists\delta>0,M>0,\text{s.t.}\forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]$成立 $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|\leq M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x)\equiv 0$.

9. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明 $f(x)=xf(1)$.

10. 求积分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\mathrm{d}x$.

11. 求积分 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\mathrm{d}x$, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_n}{\ln n}$.

12. 求积分 $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

2.2 解答

1. 往证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=0$.

设 $\max\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|\leq M$. 由连续性知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in(-\delta,\delta)$, $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n f(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}&=\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}+\frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\\&:=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

其中, $|I_1|\leq\dfrac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\varepsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq\varepsilon$,

$$|I_2|\leq 2M\frac{\int_{-1}^{-\delta}(1-x^2)^n\varepsilon\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M\frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leq 2M(1-\delta)\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n}=2M\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}\right)^n.$$

由于 $\dfrac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}<1$, 从而可取足够大的 n 使得 $|I_2|<\varepsilon$. 类似放缩 I_3. 此时 $|I_1+I_2+I_3|<3\varepsilon$.

2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$.

$\forall\varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 $s_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \le x < x_1 \\ C_2 & x_1 \le x < x_2 \\ \cdots \\ C_m & x_{m-1} \le x \le x_m = b \end{cases}$ 使得 $\int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$. 设 $M = \sup\limits_{x\in[0,T]} |g(x)|$. 则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b (f(x) - s_\varepsilon(x))g(nx)\mathrm{d}x + \int_a^b s_\varepsilon(x)g(nx)\mathrm{d}x\right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|g(nx)\mathrm{d}x + \left|\sum_{i=1}^m C_i\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)\mathrm{d}x\right| \\ &\le M\varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_i\int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)\mathrm{d}x \le M\varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_iMT.\end{aligned}$$

其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0$, 这也意味着 $\int_c^d g(x)\mathrm{d}x = \int_c^{c+T} g(x)\mathrm{d}x + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{c+kT}^d g(x)\mathrm{d}x$ (设 $c + kT \le d < c + (k+1)T$) $= \int_{c+kT}^d g(x)\mathrm{d}x \le MT$, 对于 $\forall c, d \in \mathbb{R}$.

选择一个足够大的 n, 使得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m C_iMT < \varepsilon$. 从而 $\left|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right| \le (M+1)\varepsilon$. 由极限定义立得结论.

3. (1) 由分部积分,

$$\begin{aligned}&\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = xf^2(x)|_a^b - \int_a^b f(x)[xf(x)]'\mathrm{d}x = -\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ \Rightarrow &\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 由 Cauchy 不等式立得.

4. (1) 原条件等价于 $\frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}} \le 1 \overset{\text{两边积分}}{\Rightarrow} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}}\mathrm{d}t \le \int_0^x 1\mathrm{d}t \overset{\text{原函数}}{\Rightarrow} \left.\sqrt{1 + 2\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\right|_0^x \le x \Rightarrow \sqrt{1 + 2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s} \le 1 + x \Rightarrow f(x) \le \sqrt{1 + 2\int_0^x f(s)\mathrm{d}s} \le 1 + x$.

(2) 注意到

$$\begin{aligned}\left[\int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\right]' &= f(t)g(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right) - g(t)\int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right) \\ &\le Kg(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right) = \left[K - K\exp\left(-\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\right]',\end{aligned}$$

两边积分得到

$$\int_0^1 f(s)g(s)\mathrm{d}s\exp\left(-\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right) \le K - K\exp\left(-\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right) \Rightarrow f(1) \le K + K\int_0^1 f(s)g(s)\mathrm{d}s \le K\exp\left(\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right).$$

(请大家在积分时注意从相同起点开始积分, 这里补上常数 K 也是为了保证两边在 $t = 0$ 处都取 0. 这个题有微分方程背景, 可以先看懂答案, 再试图理解.)

5. 可以验证 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \in D[0,1]$, 但 $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上无界. 若额外有 $f'(x)$ 有界, 可参考 Volterra's function.

6. 设 $\mathcal{C}$ 是 fat cantor set. 考虑 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, $g(x) = 1 - \mathrm{dist}(x, \mathcal{C})$, 但 $f(g(x)) = 1_{x\in\mathcal{C}}$ 在正测集 $\mathcal{C}$ 上不连续. 若额外有 $g(x) \in C^\infty$, 可使用光滑版本的 Urysohn 引理.

7. $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(\eta_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i := S_1+S_2$. 显然 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} S_1 = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 记 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)| = M_f$. 由 $g(x)$ 的可积性, 知 $|S_2| \le \sum_{i=1}^{n} M_f\omega_g([x_{i-1},x_i])\Delta x_i = M_f[\overline{S}_g(\Delta)-\underline{S}_g(\Delta)] \overset{\lambda(\Delta)\to 0}{\to} 0$.

8. 不妨设 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)>0$. 由连续性, $\exists \kappa>0$, s.t. $\forall x\in(x_0-\kappa,x_0+\kappa), f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\forall[\alpha,\beta]\subset(x_0-\kappa,x_0+\kappa)$, 成立 $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha) > M(\beta-\alpha)^{1+\delta}$(最后一个大于号成立只需令 $\beta-\alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

9. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha^2}{2}f(1)$. 由集合 $\{q\alpha : q\in\mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha)=qf(\alpha)$, $\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x = f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha)\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}f(1) \Rightarrow f(\alpha)=\alpha f(1)$.

10. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}(1-\cos x) \overset{\text{分部积分}}{=} (1-\cos x)\ln\sin x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\mathrm{d}(\ln\sin x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin x+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x = [\cos x-\ln(1+\cos x)]\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2-1$.

11. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2nx)}{2\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos[(2n-2)x]\cos 2x+\sin[(2n-2)x]\sin 2x}{2\sin x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos[(2n-2)x](1-2\sin^2 x)+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos[(2n-2)x]}{2\sin x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x\cos[(2n-2)x]+2\sin[(2n-2)x]\sin x\cos x}{2\sin x}\mathrm{d}x \\
&= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos[(2n-2)x]+\sin[(2n-2)x]\cos x\mathrm{d}x = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n-1)x\mathrm{d}x \\
&= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1}\cos[(2n-1)x]\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1}+\frac{1}{2n-1}.
\end{aligned}$$

由于 $I_1=1$, 因此 $I_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}}{\ln n} - \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}$.

12. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2(-x)}{1+e^{x}}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

3 定积分中值定理, 定积分的应用 (1)

3.1 问题

1. 证明对于 $\forall x>0$, 存在唯一的 $\xi_x>0$ 使得 $\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t = xe^{\xi_x^2}$ 成立, 并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\xi_x}{x}$.

2. 证明 $\left|\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{a}$, 其中 $0<a<b$.

3. 函数 $f(x)\in D[0,1]$, 且 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=f'(\xi)$.

4. 求由下列曲线所围成的平面图形的面积: (1) $y^2=x^2(1-x^2)$; (2) $y^2=x, x^2+y^2=1$(在第一、四象限的部分).

■ 自由选讲.

5. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x)\in R[0,x], \forall x\in(0,+\infty)$, 且 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

6. $f(x)\in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x)\equiv 0$.

7. $f(x)\in R[0,1], 0<m\le f(x)\le M$, 求证 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{(m+M)^2}{4mM}$. (编者注: 本题比较 tricky.)

8. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且内闭可积, $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$, 求 $f(x)$.

9. 求积分 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

10. 求积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{2025}x}\mathrm{d}x$.

11. 求积分 $I=\int_0^1[\sqrt[7]{1-x^3}-\sqrt[3]{1-x^7}]\mathrm{d}x$.

12. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 证明 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. (能试着用定积分第二中值定理吗?)

13. $f(x)\in C[a,b]$, 且对任意 $g(x)\in C^{\infty}[a,b]$ 满足 $g(a)=g(b)=0$ 都有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$. 证明 $f(x)\equiv 0$.

14. (Dirichlet 判别法). 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. $\forall A\geq a$, $g(x)\in R[a,A]$ 且 $\left|\int_a^A g(x)\mathrm{d}x\right|\leq M$ 恒成立. 证明极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 存在.

15. 试求由抛物线 $y^2=2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

3.2 解答

1. 第一问由定积分第一中值定理和函数 e^{t^2} 的单调性显然. 其次

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi_x}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t-\ln x}}{x}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t-\ln x}{x^2}}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}-\frac{1}{x}}{2x}}\\&=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x^2}-\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{2x^2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2e^{x^2}}{2x^2e^{x^2}+4x\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}}\\&=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x^2}}{xe^{x^2}+2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+1)e^{x^2}}{(2x^2+3)e^{x^2}}}=1.\end{aligned}$$

2. $\left|\int_a^b\sin x^2\mathrm{d}x\right|\overset{t=x^2}{=}\left|\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right|$. 由于 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 非负单调递减, 因此由定积分第二中值定理, 原积分 $=\frac{1}{2a}\left|\int_{a^2}^{\xi}\sin t\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{a}$.

3. 由定积分第一中值定理, $\exists\xi\in[0,\frac{1}{2}]$, s.t. $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=e^{1-\xi}f(\xi)$, 这也意味着对于函数 $g(x)=e^{-x}f(x)$ 成立 $g(1)=g(\xi)$. 由 Rolle 微分中值定理知存在 $g'(\zeta)=0\Rightarrow f'(\zeta)=f(\zeta)$.

4. (1) $S=4\int_0^1\sqrt{x^2(1-x^2)}\mathrm{d}x\overset{x=\sin\theta}{=}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=-\left.\frac{4\cos^3\theta}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$.

(2) 先解出交点, 然后用原函数直接计算 $S=2\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{x}\mathrm{d}x+2\int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. 凸函数开区间上连续 $\Rightarrow$ 闭区间上可积. 由 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f\left(\frac{t}{x}\cdot x\right)\mathrm{d}\frac{t}{x}=\int_0^1 f(ux)\mathrm{d}u\Rightarrow F\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right)=\int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i(ux_i)\right)\mathrm{d}u\leq\int_0^1\sum_{i=1}^n t_if(ux_i)\mathrm{d}u=\sum_{i=1}^n t_iF(x_i)$ 知 $F(x)$ 凸.

6. 构造 $G(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2$, $G'(x)=g(x)$ 单调递减, $g(0)=0$. 因此 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 又因为 $G(0)=0$, $G(x)\geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x)\equiv 0\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\equiv 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$.

7. 显然有 $(M-f(x))\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{m}\right)\leq 0$, 因此 $\int_0^1(M-f(x))\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{m}\right)\mathrm{d}x\leq 0\Leftrightarrow M\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{m}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leq 1+\frac{M}{m}$. 利用均值不等式, LHS $\geq 2\sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leq\frac{(m+M)^2}{4mM}$.

8. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(y)+\frac{x^3y}{3}+\frac{x^2y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^y f(t)\mathrm{d}t+yf(x)+\frac{xy^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}$. 两式相减得 $xf(y)+\frac{x^3y}{3}=yf(x)+\frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x}-\frac{x^2}{3}=\frac{f(y)}{y}-\frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x}-\frac{x^3}{3}\equiv C\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}+Cx$. 经验证符合题意.

9. 作代换 $x=\tan t$ 得 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$. 再作代换 $t=\frac{\pi}{4}-t$ 得 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln 2-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

10. 记 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cot^{2025}x}\mathrm{d}x$. 作换元 $t=\frac{\pi}{2}-x$ 知 $I=J$. 而 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 因此 $I=J=\frac{\pi}{4}$.

11. $\int_0^1\sqrt[7]{1-x^3}\mathrm{d}x\overset{y=\sqrt[7]{1-x^3}}{=}\int_0^1 y\mathrm{d}x\overset{\text{几何意义}}{=}\int_0^1 x\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt[3]{1-y^7}\mathrm{d}y\Rightarrow I=\int_0^1\sqrt[3]{1-y^7}\mathrm{d}y-\int_0^1\sqrt[3]{1-x^7}\mathrm{d}x=0$.

12. $f(x)$ 单调, 并考虑 $g(x)=x-\frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理,

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=f(a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+(f(b)-f(a))\int_\xi^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=(f(b)-f(a))\frac{1}{2}(b-\xi)(\xi-a)\geq 0.$$

13. 用反证法. WLOG 设 $f(x_0)>0$, 由连续性知 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b], f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$. 从而定义

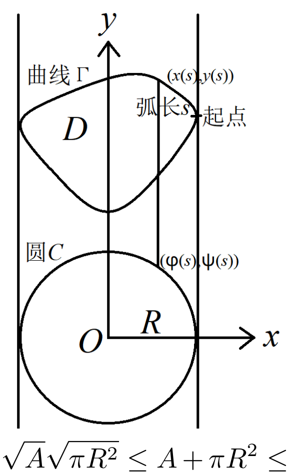
$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x_0)}{2}, & x\in[x_0-\frac{\delta}{2},x_0+\frac{\delta}{2}]\\ 0, & x\in[a,x_0-\delta]\cup[x_0+\delta,b]\\ C^\infty\text{连接}, & \text{otherwise}\end{cases},$$

此时 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\geq\int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}}\frac{f^2(x_0)}{4}\mathrm{d}x>0$, 矛盾.

14. $\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\text{s.t.}\forall x\geq X,|f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{4M}$. 从而 $\forall A',A''\geq X$, $\left|\int_{A'}^{A''}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\overset{\text{定积分第二中值定理}}{=}\left|f(A')\int_{A'}^{\xi}g(x)\mathrm{d}x+f(A'')\int_\xi^{A''}g(x)\mathrm{d}x\right|\leq 2M(|f(A')|+|f(A'')|)\leq\varepsilon$. 然后由柯西收敛定理知极限存在.

15. 设弦方程为 $x-\frac{1}{2}=ky$, 与抛物线交点纵坐标为 y_1,y_2, 则围成区域的面积 $S=\int_{y_1}^{y_2}\left(ky+\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{k}{2}(y_2-y_1)(y_2+y_1)+\frac{1}{2}(y_2-y_1)-\frac{1}{6}(y_2-y_1)(y_2^2+y_1y_2+y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1+y_2=2k,y_1y_2=-1$. 则 $S=\frac{2}{3}(k^2+1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k=0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.

补充 (不要求掌握)



等周问题: 长为 L 的曲线何时围成区域面积最大? 答案: 圆 (一年级小学生皆可猜出).

证明: 设 D 为凸区域 (D 中任意两点连线都在 D 内). 设 $\Gamma:\begin{cases}x=x(s)\\y=y(s)\end{cases}\in C^1[0,L]$, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2+y'(s)^2=1$, 且 D 的面积为 $A=\int_0^L x\mathrm{d}y=\int_0^L x(s)y'(s)\mathrm{d}s$. 设 $C:\begin{cases}x=\varphi(s)=x(s)\\y=\psi(s)\end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为半径的圆, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面积为 $\pi R^2=-\int_0^L y\mathrm{d}x=-\int_0^L\psi(s)x'(s)\mathrm{d}s$. 从而 $A+\pi R^2=\int_0^L(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))\mathrm{d}s\leq\int_0^L\sqrt{(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))^2}\mathrm{d}s\leq\int_0^L\sqrt{(x'(s)^2+y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)}\mathrm{d}s=RL$. 因此成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2}\leq A+\pi R^2\leq RL\Rightarrow A\leq\frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s)-\psi(s)x'(s))^2=(x'(s)^2+y'(s)^2)(x(s)^2+\psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s)+\psi(s)y'(s))^2=0$. 由于 $x(s)^2+\psi(s)^2=R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s)+\psi(s)\psi'(s)=0\Rightarrow\psi'(s)=y'(s),\psi(s)=y(s)+y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2+(y-y_0)^2=R^2$, 圆也!

4 定积分的应用 (2)

4.1 问题

■ 自由选讲.

1. 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?

2. 证明 π 是无理数. 可以按照以下步骤: (1) 设 $\pi=\dfrac{a}{b}, a,b\in\mathbb{Z}$, 定义 $f(x)=\dfrac{b^nx^n(\pi-x)^n}{n!}$, 证明 $\forall i\in\mathbb{N}_+, f^{(i)}(0), f^{(i)}(\pi)$ 都是整数. (2) 证明定积分 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 也是整数. (3) 证明 $0<\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x<1$, 得到矛盾.

3. $f(x)\in C^2[0,1], f(0)=f(1)=f'(0)=0, f'(1)=1$, 证明 $\displaystyle\int_0^1[f''(x)]^2\mathrm{d}x\geq 4$, 取等号当且仅当 $f(x)=x^3-x^2$.

4. 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r=e^\theta$ 在 $(r,\theta)=(1,0)$ 和 $(r,\theta)=(e^\phi,\phi)$ 之间一段的重心坐标.

5. 求双扭线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ 绕轴 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.

6. 证明极坐标下曲线 $r=r(\theta)$ 与 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为 $V=\dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

7. 计算极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t|\sin t|\mathrm{d}t}{x^2}$.

8. $f(x)\in C^1[0,1], f(x)\in[0,1], f(0)=f(1)=0, f'(x)$ 单调递减. 证明曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的弧长不大于 3.

9. 求圆的渐伸线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}, t\in[0,2\pi]$ 上 $A(a,0), B(a,-2\pi a)$ 之间部分与直线 $\overline{AB}$ 围成图形的面积.

10. $f(x)\in C^2[a,b]$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$.

11. $f(x)\in D[0,1]$, $f'(x)\in R[0,1]$, $|f'(x)|\leq M$. 定义 $A_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. (1) 证明 $|A_n|\leq\dfrac{M}{2n}$. (你可以推广到高阶和高维吗? 答案是 $O(n^{-\frac{k}{d}})$.) (2) 求 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nA_n$.

12. (Jensen 不等式). 凸函数 $\varphi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x):[a,b]\to[0,\infty)$ 可积且 $\displaystyle\int_a^b p(x)\mathrm{d}x>0$. 证明对于任意 $f(x)\in R[a,b]$, $\varphi\left(\dfrac{\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)\leq\dfrac{\int_a^b\varphi(f(x))p(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}$.

13. 推导重力场中粒子数量密度的分布率 $n(z)=n(0)e^{-\frac{mgz}{k_BT}}$, 其中 T 是温度, k_B 是玻尔兹曼常量.

4.2 解答

1. 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h)=\dfrac{1}{2}\dfrac{4}{3}\pi R^3+\displaystyle\int_0^h\pi\left(\sqrt{R^2-z^2}\right)^2\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi R^3+\pi\left(R^2h-\frac{1}{3}h^3\right)$. 对应位移 $[h,h+\mathrm{d}h]$ 所做的微功 $\mathrm{d}W=gV(h)\rho\mathrm{d}h$. 从而 $W=g\displaystyle\int_0^R V(h)\mathrm{d}h=g\left(\frac{2}{3}\pi R^4+\frac{5}{12}\pi R^4\right)=\frac{13}{12}g\pi R^4$.

2. (1) $f(x)$ 是一个次数从 n 到 $2n$ 的多项式. 至于 $f^{(i)}(0)$ 是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时 $i\geq n$, 求导后得到的非零常数值是 $i!c$, 且 c 是整数除以 $n!$ 得到的有理数, 从而 $i!c$ 是整数. 由于 $f(x)=f(\pi-x)\Rightarrow f^{(i)}(\pi)=(-1)^nf^{(i)}(0)$, 因此 $f^{(i)}(\pi)$ 也是整数.

(2) 由分部积分, $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=f(x)(-\cos x)|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x=f(0)+f(\pi)+f'(x)\sin x|_0^\pi-\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x=f(0)+f(\pi)-\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x$. $f(x)$ 是 $2n$ 此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=f(0)+f(\pi)-f''(0)-f''(\pi)+\cdots+(-1)^nf^{(2n)}(0)+(-1)^nf^{(2n)}(\pi)$, 因此是整数.

(3) 在区间 $[0,\pi]$ 上成立 $0\leq a-bx=b(\pi-x)\leq a$, 因此 $0\leq f(x)=\dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}\leq\dfrac{\pi^na^n}{n!}$, 从而 $0<\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x\leq\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x<\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$. 当 n 足够大时, $\dfrac{\pi^{n+1}a^n}{n!}<1$.

3. 令 $p(x)=x^3-x^2$, 从而有 $\displaystyle\int_0^1[(f''(x))^2-(p''(x))^2]\mathrm{d}x=\int_0^1[f''(x)-p''(x)]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1 f''(x)p''(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1[p''(x)]^2\mathrm{d}x\geq 0+2f'(x)p''(x)|_0^1-2\int_0^1 f'(x)p'''(x)\mathrm{d}x-8=2f'(1)p''(1)-2f(x)p'''(x)|_0^1+2\int_0^1 f(x)p''''(x)\mathrm{d}x-8=0$.

4. $\bar{x}=\dfrac{\int_0^\phi e^{2\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^\phi e^\theta\mathrm{d}\theta}=\dfrac{e^{2\phi}(\sin\phi+2\cos\phi)-2}{5(e^\phi-1)},\bar{y}=\dfrac{\int_0^\phi e^{2\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^\phi e^\theta\mathrm{d}\theta}=\dfrac{e^{2\phi}(2\sin\phi-\cos\phi)+1}{5(e^\phi-1)}$.

5. 原命题等价于 $r^2=2a^2\sin2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases}x=a\sqrt{2\sin2\theta}\cos\theta\\y=a\sqrt{2\sin2\theta}\sin\theta\end{cases}$, 则面积 $S=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi y(\theta)\sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta=8\pi a^2$.

6. 对应 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的扇形面积 $\mathrm{d}S=\dfrac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$, 其质心位于 $\dfrac{2}{3}r(\theta)$ 处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为 $\mathrm{d}V=\dfrac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta 2\pi\dfrac{2}{3}r(\theta)\sin\theta=\dfrac{2\pi}{3}r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$. 两边积分得到结果.

7. 原式 $\overset{t=xt}{=}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^1 xt|\sin(xt)|\mathrm{d}(xt)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 t|\sin(xt)|\mathrm{d}t\overset{\text{R-L Lemma}}{=}\int_0^1 t\mathrm{d}t\frac{1}{\pi}\int_0^\pi|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}$.

8. 设 $x_0=\underset{x\in[0,1]}{\arg\max}f(x)\in(0,1)$, 则 $f'(x_0)=0$, 且弧长 $s=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x\le\int_0^1(1+|f'(x)|)\mathrm{d}x=1+\int_0^{x_0}f'(x)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^1 f'(x)\mathrm{d}x=1+2f(x_0)\le3$.

9. 直线 AB 的参数方程是 $\begin{cases}x=\phi(t)=a\\y=\psi(t)=t\end{cases}$, $t\in[-2\pi a,0]$. 故 $S=-\displaystyle\int_0^{2\pi}y(t)\mathrm{d}x(t)-\int_{-2\pi a}^0\psi(t)\mathrm{d}\phi(t)=-\int_0^{2\pi}a(\sin t-t\cos t)a(t\cos t)\mathrm{d}t+0=\frac{4}{3}\pi^3a^2+\pi a^2$.

10. 由分部积分和定积分第一中值定理,

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}(x-a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}-\int_a^{\frac{a+b}{2}}f'(x)\mathrm{d}\frac{(x-a)^2}{2}\\&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{8}+\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{(x-a)^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x\\&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{8}+f''(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{(x-a)^2}{2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{8}+f''(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{(x-b)^2}{2}\mathrm{d}x.$$

两式相加得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))\frac{(b-a)^3}{48}\overset{\text{Darboux}}{=}f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}$.

11. (1) 直接计算即可:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|&=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\right|\\&\le\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\\&\le\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}M\left(\frac{k}{n}-x\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\frac{M}{2n^2}=\frac{M}{2n}.\end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned}A_n&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2}+\frac{1}{2n}(f(0)-f(1))\\&=\sum_{k=1}^n\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n}\right)+\frac{1}{2n}(f(0)-f(1)).\end{aligned}$$

利用分部积分,

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}(x-\frac{2k-1}{2n})=f(x)\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)\Bigg|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}-\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'(x)\mathrm{d}x:=\frac{f(\frac{k-1}{n})+f(\frac{k}{n})}{2n}-B_n^k,$$

其中

$$B_n^k=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(x-\frac{2k-1}{2n})f'(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=f'(\xi_{k,1})\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)\mathrm{d}x+f'(\xi_{k,2})\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)\mathrm{d}x=-\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2}+\frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}.$$

综上所述, 我们有

$$nA_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(\xi_{k,2})-f'(\xi_{k,1})}{8n}+\frac{f(0)-f(1)}{2}$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}nA_n=\frac{1}{8}\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)+\frac{f(0)-f(1)}{2}=\frac{f(0)-f(1)}{2}.$$

12. WLOG $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x=1$, 并设 $\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x=c$, 任取 $k\in[\varphi'_-(c),\varphi'_+(c)]$, 构造 “切” 直线 $l:y=k(x-c)+\varphi(c)$. 由凸函数性质知 $\varphi(x)\geq l(x)$ 恒成立. 从而 $\varphi(c)=l(c)=k\left(\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x-c\right)+\varphi(c)=\int_a^b[k(f(x)-c)+\varphi(c)]p(x)\mathrm{d}x=\int_a^b l(f(x))p(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b\varphi(f(x))p(x)\mathrm{d}x$.

13. 由二力平衡, 压力差 dF 托起了单位体积内的粒子重力 $\mathrm{d}G$. 从而 $\mathrm{d}F+\mathrm{d}G=0\Rightarrow S\mathrm{d}p+\rho gS\mathrm{d}z=0\Rightarrow\mathrm{d}p+nmg\mathrm{d}z=0$. 由 $p=nk_BT$ 知 $\mathrm{d}p=k_BT\mathrm{d}n\Rightarrow\frac{\mathrm{d}n}{n}=-\frac{mg}{k_BT}\mathrm{d}z$. 两边积分知 $\log n(z)-\log n(0)=\frac{-mgz}{k_BT}\Rightarrow n(z)=n(0)e^{-\frac{mgz}{k_BT}}$.

5 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学信息科学技术学院 22 级本科生吴明睿同学, 他提供了很多 LaTeX 排版的建议. 感谢选修 2025 春数学分析 II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.