

数学分析 II 习题课讲义 (2025 春)

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 2 月 26 日

目录

1	第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性	2
1.1	问题	2
1.2	解答	2
2	致谢	3

1 第 1 次习题课: 定积分的基本概念与可积性

1.1 问题

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1, \alpha > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.
 2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 试证明 $f(x) \in R[a, b]$ 的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists [a, b]$ 上满足以下条件的连续函数 $g(x)$ 和 $h(x)$: (1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b]$; (2) $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon$.
 3. 函数 $g(x) \in R[a, b], f(u) \in C[A, B]$, 这里 A, B 分别是 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的上下确界. 证明 $f(g(x)) \in R[a, b]$.
 4. 函数 $f(x) \in R[a, b]$, 证明存在点 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x)$ 在 x_0 处连续.
 5. 函数 $f(x) \in R[a, b]$, 且 $\forall x \in [a, b]$ 有 $f(x) > 0$. 证明 $\int_a^b f(x)dx > 0$.
 6. 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积. 证明对于任意的 $[a, b], \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx = 0$.
 7. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x), g(x) \in R[a, b], p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$.
(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p \|g\|_q \geq \|fg\|_1$.)
[一个简单应用, 留作思考题] $0 < q \leq p \leq s \leq \infty$, 那么存在 $\theta \in [0, 1]$ 使得 $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}$. 证明 $\|f\|_p \leq \|f\|_q^\theta \|f\|_s^{1-\theta}$.
 8. (Minkowski 不等式). 同上题条件, 证明 $\left(\int_a^b (f+g)^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$.
(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p + \|g\|_p \geq \|f+g\|_p$, 这表明 L_p 空间是赋范线性空间.)
- 自由选讲.
9. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x) \in R[a, b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$.
 10. 已知 $(0, 1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 问是否有 $f(x) \in R[0, 1]$?
 11. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \cdots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
 12. $n \in \mathbb{N}_+, f(x) \in C[a, b], \int_a^b x^k f(x)dx = 0, k = 0, 1, \cdots, n$. 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个零点.

1.2 解答

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\varepsilon) < a_n < n^\alpha(1+\varepsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + N^\alpha) < \varepsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) < \varepsilon, \left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \cdots + (a_n - n^\alpha)]\right| \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha + \cdots + n^\alpha] \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha \leq \varepsilon \int_0^1 x^\alpha dx + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\alpha+1} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$. 这意味着 $\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i^\alpha\right)\right| \leq 4\varepsilon \Rightarrow$ 原极限 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$.
2. 必要性: $f(x) \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ s.t. $\sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$ 阶梯函数 $s_1(x), s_2(x)$ 满足 $s_1(x) \leq f(x) \leq s_2(x)$ 且 $\int_a^b [s_2(x) - s_1(x)]dx < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$ 连续函数 $g(x), h(x)$ 满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 且 $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon$.
充分性: $g(x)$ 连续, $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ s.t. $\sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\sum_{i=1}^n w_i^g(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. 在此分割下, $\sum_{i=1}^n w_i^f(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} + w_i^g \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

3. 用 Lebesgue 定理显然. 如不用 Lebesgue 定理, 则 $\forall \delta > 0, \exists \tau > 0$ s.t. $\forall |x - x'| < \tau, |f(x) - f(x')| < \delta$. 从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ s.t. $\sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$. 因为 $\{[x_{i-1}, x_i] : w_i^{f \circ g} > \delta\} \subset \{[x_{i-1}, x_i] : w_i^g > \tau\}$, 从而

而 $\sum_{w_i^{f \circ g} > \delta} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$, 即 $f \circ g$ 可积.

4. 由 $f(x) \in R[a, b]$ 知存在 $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, 使得 $w_{[a_1, b_1]}^f < 1$. 同样的道理, 由 $f(x) \in R[a_1, b_1]$ 知存在 $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ 使得 $w_{[a_2, b_2]}^f < \frac{1}{2}$. 依此类推, 存在一系列闭区间套满足 $w_{[a_n, b_n]}^f < \frac{1}{n}$, 只需取 $x_0 \in \cap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$ 即可.

5. 由 4 题知存在连续点 $x_0 \in (a, b)$, 因此 $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx \geq f(x_0)\delta > 0$.

6. $\forall \varepsilon > 0$, 存在连续函数 $g(x)$ 满足 $\int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$. 因此 $\left| \int_a^b [f(x+h) - f(x)] dx \right| \leq \left| \int_a^b [f(x+h) - g(x+h)] dx \right| + \left| \int_a^b [g(x+h) - g(x)] dx \right| + \left| \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \right| \leq 2 \int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)| dx$. 由一致连续性知 $\exists H > 0$ s.t. $\forall x, x' \in [a-1, b+1], |x - x'| < H, |g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 取 $h < H$ 知 RHS $< \varepsilon$. 这意味着原极限为 0.

7. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = 1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们有 $\alpha \ln a + (1 - \alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1 - \alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$. 令 $\alpha = \frac{1}{p}, 1 - \alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b \left(\frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} \right) dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.)

8. 由 Hölder 不等式, $\int_a^b (f+g)^p dx = \int_a^b (f+g)^{p-1} f dx + \int_a^b (f+g)^{p-1} g dx \leq \left(\int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)$. 然后消去相同因子.

9. 由聚点原理知 $f(x)$ 有界. 其次 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$, s.t. $\omega_{U_0(x, \delta_x)} < \varepsilon$. 开覆盖 $\cup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x) \supset [a, b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$. 不妨设 $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$. 取分割点 $y_0 = a, y_i \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1}), y_n = b$. 对于这个分割 (修改 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 处的值), $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon(b-a)$,

因此有可积性. 由于 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)| dx \leq \varepsilon(b-a)$, 由 ε 的任意性知 $\int_a^b f(x) dx = 0$.

10. 考虑 $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, 但是 $\int_0^1 f(x) dx$ 不存在.

11. 原式 $= 2^{\alpha-\beta} \frac{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha + \frac{2}{n} \left(\frac{3}{n}\right)^\alpha + \cdots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha \right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^\beta + \frac{2}{n} \left(\frac{4}{n}\right)^\beta + \cdots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n}{n}\right)^\beta \right]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{定积分定义}} 2^{\alpha-\beta} \frac{\left(\int_0^2 x^\alpha dx \right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta dx \right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$.

12. $\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 1 个零点, 记为 x_1 . $\int_a^b (x - x_1) f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 2 个零点, 记另一个为 x_2 . 依此类推, $\int_a^b \left[\prod_{i=1}^n (x - x_i) \right] f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 $n+1$ 个零点.

2 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 春数学分析 II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.