高等代数 I 习题课讲义 (2025 秋)

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 11 月 5 日

目录

1 第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 是否存在二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 其图像经过下述 4 个点: $A(1,2), Q(-1,3), M(-4,5), N(0,2)$?

2. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{cases}$.

3. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D. 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

4. a 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$ 有解? 当有解时, 求出它的所有解.

5. 解下述线性方程组: $\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_1 \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n \end{cases}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$, 且 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq -1$.

6. (1) 求复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集合; (3) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1, y_2, y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解?

7. 设 $\alpha_1 = (1,1,4), \alpha_2 = (-2,1,5), \alpha_3 = (a,2,10), \beta = (1,b,-1)$. 当 a, b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

8. 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, $\beta = \sum_{j=1}^{s} b_j\alpha_j$. 如果 $b_i \neq 0$, 证明用 β 替换 α_i 得到的向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 也线性无关.

9. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 表出任何向量–如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

10. 求单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线.

11. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$ 的方式唯一.

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

1.2 解答

1. 直接代入求解 $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a - b + c = 3 \\ 16a - 4b + c = 5 \\ c = 2 \end{cases}$, 发现无解.

2. $\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-4&1\\0&-7&3&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{③-=①}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&0&-3\\0&-7&3&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[④+=7*②]{③-=5*②}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&-4&8&-24\end{bmatrix}\xrightarrow{④+=2*③}$
$\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix}\Rightarrow(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-8,3,6,0).$

3. 注意 A,B,C,D 的比例和为 1, 因此 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\8&6&3&2&5\\5&25&10&15&12\\15&5&20&10&15\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{②-=8*①\\③-=5*①\\④-=15*①}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&20&5&10&7\\0&-10&5&-5&0\end{bmatrix}\xrightarrow[④-=5*②]{③+=10*②}$
$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&30&25&15\end{bmatrix}\xrightarrow{④+=\frac{2}{3}*③}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&0&-\frac{25}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, 因此解是 $(\frac{7}{25},\frac{16}{75},\frac{7}{15},\frac{1}{25})$.

4. $\begin{bmatrix}1&-4&2&-1\\-1&11&-1&3\\3&-5&7&a\end{bmatrix}\xrightarrow[③-=3*①]{②+=①}\begin{bmatrix}1&-4&2&-1\\0&7&1&2\\0&7&1&a+3\end{bmatrix}$. 因此有解当且仅当 $a=-1$, 通解是 $\begin{cases}x_1=-\frac{18}{7}x_3+\frac{1}{7}\\x_2=-\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}\end{cases}$.

5. 令 $y=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 原方程组改写为 $\begin{cases}y+a_1x_1=b_1\\y+a_2x_2=b_2\\\cdots\\y+a_nx_n=b_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1-y}{a_1}\\x_2=\dfrac{b_2-y}{a_2}\\\cdots\\x_n=\dfrac{b_n-y}{a_n}\end{cases}$. 全部相加得到关于 y 的一元一次方程, 解得 $y=\dfrac{1}{1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{b_i}{a_i}$. 代入上式得到原线性方程组的解.

6. (1) $\begin{bmatrix}1&-i&-1\\2&2&-2\\i&1+i&-i\end{bmatrix}\xrightarrow[③-=i*①]{②-=2*①}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&i&0\end{bmatrix}\xrightarrow{③-=\frac{i}{2+2i}*②}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{②*=\frac{1}{2+2i}}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.
(2) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{C}\}$. (3) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{R}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1,\frac{y_2-2y_1}{2+2i},y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1=0$ 时才有解.

7. $\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\1&1&2&b\\4&5&10&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[③-=4*①]{②-=①}\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\0&3&2-a&b-1\\0&13&10-4a&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{③-=\frac{13}{3}*②}\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\0&3&2-a&b-1\\0&0&\frac{4}{3}+\frac{1}{3}a&-\frac{13}{3}b-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$. 因此, 当 $a\neq-4$ 或 $a=-4,b=-\frac{2}{13}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

8. 设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i\beta+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s=0\Leftrightarrow k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i(b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s)+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s=0\Leftrightarrow(k_1+k_ib_1)\alpha_1+\cdots+(k_{i-1}+k_ib_{i-1})\alpha_{i-1}+k_ib_i\alpha_i+(k_{i+1}+k_ib_{i+1})\alpha_{i+1}+\cdots+(k_s+k_ib_s)\alpha_s=0$. 由线性无关性知 $k_1+k_ib_1=\cdots=k_{i-1}+k_ib_{i-1}=k_ib_i=k_{i+1}+k_ib_{i+1}=\cdots=k_s+k_ib_s=0$, 由于 $b_i\neq0$, 因此 $k_i=0$, 进一步得到 $k_1=\cdots=k_s=0$, 这也意味着 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性无关.
9. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow$ 表出 0 向量唯一 $\Leftrightarrow(k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_s=0)$.

10. $(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x-z=k(1-y) \\ x+z=\dfrac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x+ky-z=k \\ kx-y+kz=1 \end{cases}$. 特别地, 当 $y=\pm 1$ 时, $z=\pm x$ 也是位于该曲面上的直线.
11. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{3}=\dfrac{a_1-a_2}{b_2-b_1}\in\mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$, $\gcd(a,b)=1$, 那么 $a^2=3b^2\Rightarrow 3|a\Rightarrow 9|a^2\Rightarrow 3|b^2\Rightarrow 3|b$, 矛盾.
12. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})=\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})\Rightarrow 9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5}|3\times 3$ 而 $2+\sqrt{-5}\nmid 3$, 因此不是素数.

2 线性相关性, 秩

2.1 问题

1. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.
2. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
3. 作初等行变换将矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求 A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a,b 取何值时, 向量 $(3,a,b,b,3)$ 属于 A 的行空间?
4. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$; (2) $\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3+\alpha_4$; (3) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$; (4) $\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+8\alpha_4,\alpha_2+5\alpha_3+\alpha_4,3\alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$.
5. 证明: 若向量组 I 能线性表出向量组 II, 且 $\operatorname{rank}(\mathrm{I})=\operatorname{rank}(\mathrm{II})$, 则向量组 II 也能表出向量组 I.
6. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 并且有 $\beta_i=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r,\forall i=1,2,\cdots,s$. 证明若矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times r}$ 列向量线性无关, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 也能线性表出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$.
7. 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}|>\displaystyle\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\forall 1\le i\le n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明主对角占优矩阵满秩.
8. 证明秩等式 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$ 和秩不等式 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\ge\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.
9. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$, $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.
10. 设 $W=\{f(x)|f(1)=0,f(x)\in\mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.
11. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.

2.2 解答

1. 显然矩阵 A 的秩至少为 2(第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2, 因此 $\lambda=0$, 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4

列线性表出. 综上, $\lambda=0$ 时秩为 2, 否则为 3.
2. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1+3\alpha_2=\alpha_3$, $-5\alpha_1-4\alpha_2=\alpha_4$;
(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\frac{3}{2}\beta_2-\frac{1}{2}\beta_3=\beta_1$.
3. A 的简化阶梯型矩阵是 $A=\begin{bmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&-1&0&5\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$. (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是 β_1,β_2,β_4, 且 $\beta_3=2\beta_1-\beta_2,\beta_5=3\beta_1+5\beta_2-\beta_4$. (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$, 且 $\alpha_3=-\frac{31}{9}\alpha_1-\frac{55}{9}\alpha_2+\frac{17}{9}\alpha_4,\alpha_5=-\frac{20}{9}\alpha_1-\frac{23}{9}\alpha_2+\frac{22}{9}\alpha_4$. (3) 仔细计算即可. $a=4,b=2$.
4. (1) 线性相关; $(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$. (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这有五个向量却只有四个自由度.
5. 设 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量 α, 由于组 I 能表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$, 从而 $\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha)\le s$, 即 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$ 线性相关. 由于 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 因此它们能表出 α.
6. 只需证明能表出 α_1. 利用高斯消元法去解方程 $\beta_{i1}=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r$, 由于 B 列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成 $\begin{bmatrix}I_{r\times r}\\0_{(s-r)\times r}\end{bmatrix}$(可用递推法或归纳法证明之), 从而 α_1 能被 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表出.
7. 反证法. 假设 A 的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$. 我们不妨设在这 n 个系数里面 k_1 的绝对值最大, 那么就有 $k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n}=0$. 但是 $|k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n}|\ge|k_1a_{11}|-|k_2a_{12}|-\cdots-|k_na_{1n}|\ge|k_1a_{11}|-|k_1|(|a_{12}|+\cdots+|a_{1n}|)>0$, 矛盾. 因此 A 满秩.
8. (1) 设 A 的一个列极大线性无关组是 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$, B 的一个列极大线性无关组是 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}$. 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix}\alpha_{i_1}\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\alpha_{i_r}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\beta_{j_1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\\beta_{j_s}\end{pmatrix}$ 线性无关, 且可以分别用对应小矩阵 A,B 的相同系数表出其他大矩阵的列向量, 因此这是一个大矩阵的列极大线性无关组, 有第一个秩等式.
(2) 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix}\alpha_{i_1}\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\alpha_{i_r}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma_{j_1}\\\beta_{j_1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\gamma_{j_s}\\\beta_{j_s}\end{pmatrix}$ 线性无关, 其中 γ_{j_k} 是矩阵 C 对应于 j_k 的列向量, 因此大矩阵的秩至少是 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$, 有第二个秩不等式. 这里我们无法判断这是不是一个大矩阵的列极大线性无关组, 因此可以严格取到大于号. 一个例子是 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 其中 $A=(0),B=(0),C=(1)$.
9. 由矩阵满秩知 $(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$ 和 $(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$ 线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证 $x_3+k(x_1-x_2)=x_1+t(x_2-x_3),x=a,b,c$ 对于 k,t 是否有解. 由于矩阵满秩, 合并同类项知该方程系数必须满足 $t+1=k-1=t+k=0$, 因此 $t=-1,k=1$. 从而两直线相交.
10. (1) 容易证明对 $\forall f(x),g(x)\in W\Rightarrow af(x)+bg(x)\in W$, 因此是线性子空间. (2) 令 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$, $f(1)=0\Rightarrow a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=0$, 因此 $f(x)=a_1(x-1)+a_2(x^2-1)+\cdots+a_{n-1}(x^{n-1}-1)$. 下面我们只需证明 $x-1,x^2-1,\cdots,x^{n-1}-1$ 确实是 W 的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以 $\dim W=n-1$.
11. 注意到 $W_i=\{X\in K^n:(a_{i1},\cdots,a_{in})X=0\},i=1,2,\cdots,n$ 都是 K^n 的 $n-1$ 维子空间, 由于有限个 $n-1$ 维子空间张不满 n 维全空间, 从而存在 $X_0\in K^n\backslash(W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_n)$, 此时 AX_0 的每个分量都不为零.

3 线性方程组解的结构

3.1 问题

1. 已知矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5]$ 与 $\begin{bmatrix}2&1&2&5&3\\2&2&4&8&7\\3&1&2&6&3\end{bmatrix}$ 的行向量组等价, 且 $\alpha_2=(2,1,2,1)^T,\alpha_5=(7,3,7,3)^T$. 又知方程组 $AX=\beta$ 的一个解为 $X=(1,1,-1,0,1)^T$, 这里 $\beta=(7,5,7,4)^T$. (1) 写出矩阵 A 及其行简化阶梯形矩阵 J; (2) 求 A 行空间的一组基, 并确定当 a,b 为何值时, $(5,3,6,a,b)$ 落在 A 的行空间里; (3) 求方程组 $AX=\beta$ 的解空间.

2. 讨论下列方程组的解空间: (1) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=0 \\ x_{n-1}+x_n=0 \end{cases}$.

3. 讨论下列方程组的解空间: (1) $\begin{cases} 8x_1+6x_2+3x_3+2x_4=5 \\ -12x_1-3x_2-3x_3+3x_4=-6 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4=3 \\ \lambda x_1+4x_2+x_3+4x_4=2 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} -6x_1+8x_2-5x_3-x_4=9 \\ -2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1 \\ -3x_1+5x_2+4x_3+2x_4=3 \\ -3x_1+7x_2+17x_3+7x_4=\lambda \end{cases}$.

4. A 是 $m\times n$ 矩阵, b 是 $m\times 1$ 矩阵. 证明线性方程组 $A^TAx=A^Tb$ 总有解.

5. A,B 都是 $m\times n$ 矩阵, 线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解. 问 A,B 的列向量组是否等价、行向量组是否等价.

6. 证明: $AX=0$ 有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.

7. 设线性方程组 $AX=b$ 中矩阵 A 的秩等于矩阵 $B=\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.

8. 设 A,B 是数域 K 上的 n 阶方阵, $AX=0,BX=0$ 分别有 l,m 个线性无关的解向量. 证明: (1) $(AB)X=0$ 至少有 $\max(l,m)$ 个线性无关的解向量; (2) 如果 $l+m>n$, 那么 $(A+B)X=0$ 必有非零解; (3) 如果 $AX=0$ 和 $BX=0$ 没有公共的非零解向量, 且 $l+m=n$, 那么 K^n 中的任一向量 α 都可以唯一的分解为 $\alpha=\beta+\gamma$, 其中 β,γ 分别是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的解向量.

9. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha\neq 0, A^k\alpha=0$, 那么 $\alpha, A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\mathrm{rank}(A^n)=\mathrm{rank}(A^{n+1})$.

10. 判断方的整系数线性方程组如果模任一素数的意义下都有解, 那么它是否在整数环上有解.

11. 给定复系数线性方程组 $AX=b$, 其中 A 满秩. 假设矩阵 $I+A$ 的每行元素的模的和小于 q, 其中 $0<q<1$. 设 X_0 是 $\mathbb{C}^n$ 中任一向量, 归纳定义 $X_{m+1}=(A+I)X_m-b$. 证明序列 X_m 收敛到方程组 $AX=b$ 的解.

12. 已知矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等. 记 A 的解空间为 W, B 的列空间为 V. 证明 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(AB)$ 当且仅当 $V\cap W=\{0\}$.

3.2 解答

1. (1) 容易得到 $\alpha_1-\alpha_3=(-2,1,-2,0)^T$, 并求出题给定的矩阵行空间一组基是 $(1,0,0,1,0),(0,1,2,3,0),(0,0,0,0,1)$. 考虑其前三个分量, 由能被这组基表出知 $\alpha_3=2\alpha_2=(4,2,4,2)^T$, $\alpha_1=(2,3,2,2)^T$, 从而 $\alpha_4=(8,6,8,3)$. 因此

$$A=\begin{bmatrix} 2&2&4&8&7\\ 3&1&2&6&3\\ 2&2&4&8&7\\ 2&1&2&5&3 \end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix} 1&0&0&1&0\\ 0&1&2&3&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

(2) 一组基为 $(1,0,0,1,0),(0,1,2,3,0),(0,0,0,0,1)$. 考察各系数, 知当 $a=14, b\in\mathbb{R}$ 时, 该向量落在 A 的行空间里.
(3) 先求出 $AX=0$ 的解, 即 $(\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5)X=0$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 线性无关. 通解为 $(t_1,3t_1-2t_2,t_2,-t_1,0)^T$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ 是自由变元. 因此 $AX=\beta$ 的通解是 $(t_1+1,3t_1-2t_2+1,t_2-1,-t_1,1)^T$, 写成解空间是 $\{t_1(1,3,0,-1,0)^T+t_2(0,-2,1,0,0)^T+(1,1,-1,0,1)^T : t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$.
2. (1) 通解是 $x_1=8x_3-7x_4, x_2=-6x_3+5x_4$, 写成解空间是 $\{k_1(8,-6,1,0)^T+k_2(-7,5,0,1)^T : k_1,k_2\in\mathbb{R}\}$.
(2) $n=3m$ 或 $3m+1$ 时只有零解. $n=3m+2$ 时有非零解, 通解是 $x_{3i}=0, x_{3i+1}=-x_n, x_{3i+2}=x_n, i=1,2,\cdots,m$, 写成解空间是 $\{k(-1,1,0,-1,1,0,\cdots,0,-1,1) : k\in\mathbb{R}\}$.

3. (1) 利用高斯消元得到 $\begin{cases} 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4=3 \\ 4x_2+x_3+4x_4=1 \\ -3\lambda x_3+8\lambda x_4=16-7\lambda \end{cases}$, 因此 $\lambda\neq 0$ 时有解, 通解是 $x_1=\dfrac{1}{\lambda}, x_3=\dfrac{9\lambda-16}{5\lambda}-\dfrac{8}{5}x_2, x_4=$

$\dfrac{4-\lambda}{5\lambda}-\dfrac{3}{5}x_2$, 写成解空间是 $\{k(0,5,-8,-3)^T+\left(\dfrac{1}{\lambda},0,\dfrac{9\lambda-16}{5\lambda},\dfrac{4-\lambda}{5\lambda}\right)^T:k\in\mathbb{R}\}$.

(2) 利用高斯消元得到 $\begin{cases}-2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1\\ -2x_2-13x_3-5x_4=3\\ 0=2\lambda\end{cases}$, 因此 $\lambda=0$ 时有解, 通解是 $x_1=-\dfrac{1}{2}(7+19x_3+7x_4), x_2=-\dfrac{1}{2}(3+13x_3+5x_4)$, 写成解空间是 $\{k_1(-19,-13,2,0)^T+k_2(-7,-5,0,2)^T+\left(-\dfrac{7}{2},-\dfrac{3}{2},0,0\right)^T:k_1,k_2\in\mathbb{R}\}$.

4. 先证明 $\mathrm{rank}(A^TA)=\mathrm{rank}(A)$. 首先显然 $\mathrm{rank}(A^TA)\le\mathrm{rank}(A)$, 其次 $A^TAx=0\Rightarrow x^TA^TAx=0\Rightarrow\|Ax\|_2^2=0\Rightarrow Ax=0\Rightarrow\mathrm{Ker}(A^TA)\subset\mathrm{Ker}(A)\Rightarrow\mathrm{rank}(A^TA)\ge\mathrm{rank}(A)$. 接着, 由于 $\mathrm{rank}(A^TA)\le\mathrm{rank}(A^TA,A^Tb)\le\mathrm{rank}(A^T)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^TA)$ 知系数矩阵和增广矩阵秩相等, 因此方程有解.

5. 第 1 个结论不对, 比如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$. 第 2 个结论对. 若解空间 0 维, 则 A,B 均列满秩, 也都可以通过初等行列变换得到其简化阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix}I_{n\times n}\\0_{(m-n)\times n}\end{pmatrix}$, 因此等价. 其余情况, 设解空间 $r\ge1$ 维, 任取 $AX=0$ 的一个基础解系 $X_1,\cdots,X_r$ 构成 $n\times r$ 矩阵 C. 考虑线性方程组 $C^TX=0$, 其解空间维数为 $n-r=\mathrm{rank}(A)$. 由于 $C^TA^T=0$, 因此 A 的行空间是该解空间的一个子空间. 由于它们维数相等, 因此 A 的行空间就是该解空间. 同理 B 的行空间也是该解空间.

6. 必要性. 设 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 是强非零解, 则 $\alpha_i=\sum\limits_{k\neq i}\left(-\dfrac{x_k}{x_i}\right)\alpha_k,\forall i=1,\cdots,n$.

充分性. 不妨设 $\alpha_i=\sum\limits_{k\neq i}t_{ki}\alpha_k,\forall i=1,\cdots,n$, 则记 $T=\begin{pmatrix}1&-t_{12}&-t_{13}&\cdots&-t_{1,n-1}&-t_{1,n}\\-t_{21}&1&-t_{23}&\cdots&-t_{2,n-1}&-t_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-t_{n-1,1}&-t_{n-1,2}&-t_{n-1,3}&\cdots&1&-t_{n-1,n}\\-t_{n1}&-t_{n2}&-t_{n3}&\cdots&-t_{n,n-1}&1\end{pmatrix}$, 从而 $AT=0$. 由于 T 的任一主对角元均不为零, 从而存在 X_0 使得 TX_0 每个分量都不为零, 此即该强非零解.

7. (1) $\mathrm{rank}(A)\le\mathrm{rank}(A,b)\le\mathrm{rank}\begin{bmatrix}A&b\\b^T&0\end{bmatrix}=\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(A)$, 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.

(2) 不成立, 考虑 $\begin{cases}x_1+2x_2=1\\3x_1+4x_2=3\end{cases}$, $\mathrm{rank}(A)=2$, 而 $\mathrm{rank}(B)=3$.

8. (1) $n-\mathrm{rank}(AB)\ge\max(n-\mathrm{rank}(A),n-\mathrm{rank}(B))\ge\max(l,m)$.

(2) $\mathrm{rank}(A+B)\le\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le n-l+n-m<n$, 因此 $(A+B)X=0$ 必有非零解.

(3) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 分别是 $AX=0,BX=0$ 线性无关的解. 考虑方程 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_l\alpha_l+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_m\beta_m=0$, 则 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_l\alpha_l=-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_m\beta_m$ 是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解. 由题意知其必然为零向量, 又由 $\{\alpha_i\}_{i=1}^l,\{\beta_j\}_{j=1}^m$ 线性无关性知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_l=\mu_1=\cdots=\mu_m=0$. 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 整体线性无关. 又由于 $l+m=n$, 因此他们是 K^n 一组基, 从而任一向量都可唯一被它们线性表出, 相应的被表出的两部分也就对应了 β 和 γ. 唯一性可由 $\alpha=\beta_1+\gamma_1=\beta_2+\gamma_2\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\gamma_2-\gamma_1$ 是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解 $\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\gamma_2-\gamma_1=0$ 得到.

9. (1) 设 $\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1=0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2=0$, 以此类推知线性无关.

(2) 显然 $A^nX=0\Rightarrow A^{n+1}X=0$. 若存在 $A^{n+1}\alpha=0$ 但 $A^n\alpha\neq0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^n\alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\mathrm{rank}(A^n)=\mathrm{rank}(A^{n+1})$.

10. 不一定, 一个反例是 $4x=2$.

11. 记 $\|X\|$ 为向量 X 元素模的最大值 (l_∞ 范数). 则 $\|X_n-X_m\|=\|(A+I)X_{n-1}-(A+I)X_{m-1}\|=\|(A+I)(X_{n-1}-X_{m-1})\|<q\|X_{n-1}-X_{m-1}\|$, 因此由 Cauchy 收敛原理知 X_n 在 l_∞ 范数意义下收敛 (有限维线性空间所有范数等价). 记极限值为 X_∞, 两边求极限知 $X_\infty=(A+I)X_\infty-b\Leftrightarrow AX_\infty=b$.

12. 注意到 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(AB)\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(B)=\mathrm{Ker}(AB)$.

“$\Rightarrow$”: 考虑 $x\in V\cap W$, 则可设 $x=By$. 由于 $ABy=Ax=0$, 因此 $y\in\mathrm{Ker}(AB)=\mathrm{Ker}(B)\Rightarrow By=0\Rightarrow x=0$.

“$\Leftarrow$”: 显然 $\operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(B)$. 若 $\operatorname{rank}(AB)<\operatorname{rank}(B)$, 则 $\operatorname{Ker}(AB)\neq\operatorname{Ker}(B)$, 即 $\exists x\in\operatorname{Ker}(AB)$ 但 $x\notin\operatorname{Ker}(B)$, 此时 $Bx\neq 0$, 但是 $Bx\in V\cap W$.

4 行列式 (1)

4.1 问题

1. 计算行列式: (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

3. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & \cos\phi_1 & \cos 2\phi_1 & \cdots & \cos(n-1)\phi_1 \\ 1 & \cos\phi_2 & \cos 2\phi_2 & \cdots & \cos(n-1)\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\phi_n & \cos 2\phi_n & \cdots & \cos(n-1)\phi_n \end{vmatrix}$.

4. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix}\in\det(\mathbb{R}^{n\times n})$, 其中 $\alpha^2-4\beta\gamma>0$.

5. (1) 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$; (2) 计算行列式 $E_n=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

8. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}\in\det(\mathbb{R}^{n\times n})$.

9. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n\times n})$.

4.2 解答

1. (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2+16+16-4(x+1)-16(x-2)-4(x+1) = x^3-27x+54;$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

2. 用第一列减去第 i 列的 b_i 倍, $i = 2, 3, \cdots, n$, 得到 $\begin{vmatrix} a_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} a_i b_i.$

3. 由高中三角函数知识知 $\cos k\theta = 2^{k-1}\cos^k\theta + P_{k-2}(\cos\theta)$, 其中 P_{k-2} 是 $k-2$ 次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cos\phi_1 & \cos^2\phi_1 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_1 \\ 1 & \cos\phi_2 & \cos^2\phi_2 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\phi_n & \cos^2\phi_n & \cdots & \cos^{n-1}\phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1\le j<i\le n} (\cos\phi_i - \cos\phi_j).$$

4. 若 $\beta\gamma = 0$, 则行列式为 α^n. 对于一般情形, 按第一行展开得到 $D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}$, 且有初值条件 $D_1 = \alpha, D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma$, 然后用数列的特征值和特征公式设 $D_n = A\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}\right)^n + B\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}\right)^n$, 代入 $n = 1, 2$ 解出 A 和 B, 得到 $D_n = \frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1} - (\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}$.

5. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c-a & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a & a-b \end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知 $D_n = b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}$. 初始条件是 $D_1 = a$, 因此知 $D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

(2) 按第 n 列拆项, 得 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & a_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b+(a_n-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + (a_n-b)E_{n-1} = b(a_1-c)(a_2-$

$c)\cdots(a_{n-1}-c)+(a_n-b)E_{n-1}$; 按第 n 列拆项 (或由对称性), 得 $E_n=c(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_{n-1}-b)+(a_n-c)E_{n-1}$.
两式联立得 $E_n=\dfrac{bf(c)-cf(b)}{b-c}$, 其中 $f(x)=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$.

6. 法 1(拆项法): $\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}+$ $\begin{vmatrix}x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}$, 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五项: $\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}x_1^2&0&0&0\\x_2x_1&1&0&0\\x_3x_1&0&1&0\\x_4x_1&0&0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&x_1x_2&0&0\\0&x_2^2&0&0\\0&x_3x_2&1&0\\0&x_4x_2&0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0&x_3x_1&0\\0&1&x_3x_2&0\\0&0&x_3^2&0\\0&0&x_3x_4&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0&0&x_4x_1\\0&1&0&x_4x_2\\0&0&1&x_4x_3\\0&0&0&x_4^2\end{vmatrix}$, 原行列式是 $1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

法 2(加边法): $\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}$, 然后用第 $i+1$ 行减去第 1 行的 x_i 倍, $i=1,2,3,4$, 得到 $\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

7. 采用第 6 题的法 1(拆项法), 最后剩下 $n+1$ 项: $\begin{vmatrix}-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0\\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}-a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n\end{vmatrix}$, $\cdots$, 它们分别是 $(-1)^n a_1a_2\cdots a_n, (-1)^{n-1}x_1a_2\cdots a_n, (-1)^{n-1}a_1x_2\cdots a_n, \cdots$, 整理得到原行列式为 $(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{a_i}\right)-1\right]$.

8. 先计算 $n=1$ 时, $D_1=\cos\alpha$; $n=2$ 时, $D_2=\cos 2\alpha$; 因此可以猜测 $D_n=\cos n\alpha$. 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 $D_{n+1}=2\cos\alpha D_n-D_{n-1}=\cos(n+1)\alpha$, 知该假设成立.

9. 法 1: 将第 1 行至第 $n-1$ 行减去第 n 行, 并提出各行和各列公因子, 得

$$D_n=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix};$$

再将第 1 列至第 $n-1$ 列减去第 n 列, 并提出各行和各列的公因子, 得

$$D_n=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

按第 n 行展开得到递推式 $D_n=\dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)}D_{n-1}$, 并直接计算出 D_2, 得

$$D_n=\frac{\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}.$$

法 2: 若 $a_i=a_j$ 或 $b_i=b_j(i\ne j)$, 即两行 (或两列) 相同, 则 $D_n=0$. 因此 D_n 含有因子 $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$. 将 D_n 的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得 $D_n=\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}D_n'$. 显然 D_n' 也含有上述因子. 另一方面, 由于 D_n' 的 (i,j) 元为 $\prod\limits_{k\ne j}(a_i+b_k)$, 所以每一个 a_i 在 D_n' 的展开式中的次数均为 $n-1$, 因此可设 $D_n=\lambda\prod\limits_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$. 为确定常数 λ, 我们不妨令 $a_i=-b_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 此时 D_n' 为对角行列式, 且 $D_n=\prod\limits_{i\ne j}(a_i-a_j)=\prod\limits_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\Rightarrow\lambda=1$. 因此可得一样的结果.

5 行列式 (2)

5.1 问题

1. 当 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2=7\\ 5x_1+(4+\lambda)x_2=6\end{cases}$ 有唯一解, 此时用 Cramer 法则求解之.

2. 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 且对于任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数. 证明或否定: (1) $f(x)$ 系数都是有理数; (2) $f(x)$ 系数都是整数.

3. 设数域 K 上 $m\times n$ 矩阵 H 的列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 证明: H 的任意 $s(s\le\min(m,n))$ 列都线性无关当且仅当齐次线性方程组 $HX=0$ 的任一非零解的非零分量数目大于 s.

4. 设 $n\ge 3, f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是次数 $\le n-2$ 的多项式, 证明: 对 $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, 行列式 $\begin{vmatrix}f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1)\\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n)\end{vmatrix}\equiv 0$, 并举例说明条件 “次数 $\le n-2$” 不可去.

5. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量组, 其中 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关. 证明存在无穷多个实数 k, 使得向量组 $\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_r+k\beta_r$ 线性无关.

6. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1\end{vmatrix}$. 你能求出行列式 $E_n=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1\end{vmatrix}$ 的通式吗?

7. 计算行列式 $D_1=\begin{vmatrix}0 & a & b & c\\ -a & 0 & d & e\\ -b & -d & 0 & f\\ -c & -e & -f & 0\end{vmatrix}$ 和 $D_2=\begin{vmatrix}0 & 741 & 886 & 114 & 514\\ -741 & 0 & 1919 & 810 & 2002\\ -886 & -1919 & 0 & 520 & 1314\\ -114 & -810 & -520 & 0 & 220\\ -514 & -2002 & -1314 & -220 & 0\end{vmatrix}$.

8. 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,\forall 1\leq i\leq n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明若 $a_{ii}>0,\forall 1\leq i\leq n$, 则 $\det(A)>0$.

9. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 (1) $a_{ii}>0,\forall 1\leq i\leq n$; (2) $a_{ij}<0,\forall 1\leq i\neq j\leq n$; (3) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=0,\forall 1\leq j\leq n$. 求矩阵 A 的秩.

10. 计算矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&2&6&3\\2&2&4&8&7\\2&2&4&8&7\\2&1&2&5&3\end{pmatrix}$ 的秩 r, 并计算其 r 阶非零子式的个数.

11. 试确定所有 3 阶 $(0,1)$ 行列式 (即所有元素只能是 0 或 1) 的最大值, 并给出证明和取到最大值的一个构造.

12. 设 W 是矩阵空间 $M_n(K)$ 的一个子空间. 证明: 若 $\dim(W)\geq n^2-n+1$, 则 W 中至少包含一个满秩的矩阵.

5.2 解答

1. 由 Cramer 法则, $\begin{vmatrix}2&-3\\5&4+\lambda\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq-\dfrac{23}{2}$ 时有唯一解. $x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}7&-3\\6&4+\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-3\\5&4+\lambda\end{vmatrix}}=\dfrac{7\lambda+46}{2\lambda+23},x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}2&7\\5&6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-3\\5&4+\lambda\end{vmatrix}}=\dfrac{-23}{2\lambda+23}$.

2. (1) 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m(a_m\neq 0)$. 取 $x_k=k$ 代入, 得到线性方程组 $\begin{cases}a_0+a_1x_0+\cdots+a_mx_0^m=f(x_0),\\a_0+a_1x_1+\cdots+a_mx_1^m=f(x_1),\\\cdots\\a_0+a_1x_m+\cdots+a_mx_m^m=f(x_m).\end{cases}$,
其系数行列式是 Vandermonde 行列式不为 0, 因此由 Cramer 法则其有唯一解 $a_i=\dfrac{D_i}{D},i=0,1,\cdots,m$. 由于 D_i 的元素均为整数, 因此 a_i 是有理数. (2) 结论不对, 反例是 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$.

3. 必要性. 若存在非零解 $(0,\cdots,0,c_{i_1},0,\cdots,0,c_{i_l},0,\cdots,0)$, 其中 $c_{i_1},\cdots,c_{i_l}$ 不全为 0 且 $l\leq s$, 则意味着 $c_{i_1}\alpha_{i_1}+\cdots+c_{i_l}\alpha_{i_l}=0$, 从而他们线性相关, 矛盾.
充分性. 若存在 $l(l\leq s)$ 列 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_l}$ 线性相关, 即存在不全为 0 的数 $c_{i_1},\cdots,c_{i_l}$ 使得 $c_{i_1}\alpha_{i_1}+\cdots+c_{i_l}\alpha_{i_l}=0$, 则 $(0,\cdots,0,c_{i_1},0,\cdots,0,c_{i_l},0,\cdots,0)$ 是一个非零分量数不大于 s 的非零解, 矛盾.

4. 不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同. 考虑 $F(x)=\begin{vmatrix}f_1(x)&f_2(x)&\cdots&f_n(x)\\f_1(a_2)&f_2(a_2)&\cdots&a_n(a_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_1(a_n)&f_2(a_n)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}$, 这是一个至多 $n-2$ 次多项式, 有至少 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 这 $n-1$ 个不同的根, 因此必恒等于 0. 若删去条件 "次数 $\leq n-2$", 则可令 $f_k(x)=x^{k-1}$, 此时原行列式构成 Vandermonde 行列式, 只要 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不同就不为 0.

5. 将 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$, 并任意选择 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$. 行列式 $|(\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_n+k\beta_n)|$ 是一个关于 k 的至多 n 次多项式, 其等于零至多只有 n 个解 (令 $k\to\infty$ 知此多项式不恒为零), 且在该行列式不等于零时 $\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_r+k\beta_r$ 线性无关, 因此存在无穷多个实数 k.

6. 把后 $n-1$ 列加到第一列, 提出公因子 $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, 用第 $(1,1)$ 元消去同列其他元素, 再按第一列展开得到 $n-1$ 阶行列式:

$$D_n=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&4&5&\cdots&1&2\\1&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\0&-1&-1&\cdots&-1&-1\\0&n-2&-2&\cdots&-2&-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&2&2&\cdots&2-n&2-n\\0&1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

用所得 $n-1$ 阶行列式的第 $(1,1)$ 元消去同行的其他元素, 再按第一行展开得到 $n-2$ 阶上三角行列式:

$$D_n=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} -n & \cdots & -n & -n \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & -n & -n \\ & & & -n \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

7. 前者是偶数阶斜对称矩阵. 若 $a=0$. 则按第 1、2 行展开, 得到 $D_1=(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}*\begin{vmatrix} -b & -d \\ -c & -e \end{vmatrix}=(be-cd)^2$. 若 $a\neq 0$, 则将第 1 行的 $\dfrac{d}{a}$ 倍和第 2 行的 $\dfrac{b}{a}$ 倍加到第 3 行上, 将第 1 行的 $\dfrac{e}{a}$ 倍和第 2 行的 $\dfrac{c}{a}$ 倍加到第 4 行上, 得到 $D_2=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f+\dfrac{cd}{a}-\dfrac{be}{a} \\ 0 & 0 & -f+\dfrac{be}{a}-\dfrac{cd}{a} & 0 \end{vmatrix}$. 然后按第 1、2 行展开, 得到 $D_1=(af-be+cd)^2$.
后者是奇数阶斜对称矩阵, 因此行列式为 $D_2=0$ (因为 $|D_2|=|D_2^T|=|-D_2|=(-1)^{2k+1}|D_2|\Rightarrow|D_2|=0$).

8. 我们已经知道主对角占优矩阵满秩. 考虑函数 $A(t)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & a_{23}t & \cdots & a_{2n}t \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33} & \cdots & a_{3n}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. 那么任意 $t\in[0,1]$, $A(t)$ 都是主对角阵占优矩阵, 因此 $\det(A(t))\neq 0$. 由于 $\det(A(0))>0$, 由函数连续性知 $\det(A(1))>0$, 此即原命题.

9. 首先由条件 (3) 知 $|A|=0$, 因此 $\mathrm{rank}(A)\leq n-1$. 其次考虑 A 中元素 a_{11} 的余子式 M_{11}, 由条件 (1)(2) 知其严格主对角占优, 因此 $M_{11}>0$. 这意味着 $\mathrm{rank}(A)=n-1$.

10. 先求出其行简化阶梯矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 知其秩为 3, 且有 5 个列极大线性无关组 (第 5 列必选, 第 2 列、第 3 列至多选一个, 其余随意); 观察原矩阵易知有 2 个行极大无关组 (第 2 行、第 3 行至多选一个, 其余随意); 因此有 $2\times 5=10$ 个 3 阶非零子式.

11. 按第 1 行展开, 得到 $D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\leq 3$. 下面证明 $D\neq 3$. 若不然, 则必有 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=1$, 且 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=1$. 前两个行列式为 1 可以得到 $a_{22}=a_{33}=1, a_{23}=a_{31}=1$, 而此时 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}=a_{21}a_{32}-1\leq 0$, 矛盾. 因此 $D\leq 2$, 一个构造是 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2$.

12. 将 $M_n(K)$ 的矩阵平铺开看成是 n^2 维的行向量, 并取该子空间的一组基 $A_1,\cdots,A_r$. 把这 r 个行向量在 $\mathrm{axis}=0$ 方向拼成 $r\times n^2$ 的矩阵, 并可得到其简化阶梯型矩阵 J. 注意到 J 的行向量 $B_1,\cdots,B_r$ 也是该子空间的一组基, 这组基的线性组合能使得矩阵在某 r 个位置取到任意的值. 下面用归纳法证明: 任取 $n\times n$ 矩阵 A 中的 n^2-n+1 个位置,

我们总可以在这些位置填上 0 或 1, 使得不管矩阵 A 其余的 $n-1$ 个位置填什么数, A 的行列式总为 ±1. 假设命题对 $n-1$ 级的方阵成立, 考察 n 阶方阵. 由抽屉原理, 总有一行 (不妨设是第 i 行), 该行的 n 个元素都可任意填选. 再选一列 (不妨设是第 j 列), 该列中存在某个位置不能任意填选. 取 (i,j) 元为 1, $(i,\neq j)$ 元为 0, 那么在 (i,j) 元的余子式中最多只有 $n-2$ 个元素不能任选, 由归纳假设知总可在子阵中能任意填选的地方填上 0 或 1, 使得 (i,j) 元的余子式取 ±1. 在此填法下, n 阶方阵 A 的行列式是 (i,j) 元的代数余子式, 即 ±1. 由数学归纳法知命题得证.

6 期中复习, 矩阵乘法

6.1 问题

1. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个线性无关组. 证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关当且仅当 $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\{0\}$.

2. 求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n\end{vmatrix}$.

3. A 是 n 阶矩阵, $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$ 是 n 维列向量, 且 $|A|=a, |A-\alpha\alpha^T|=b$, 求 $|A+2\alpha\alpha^T|$.

4. 设 A_{ij} 是行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ 中 (i,j) 元的代数余子式. 证明 $\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n\\ x_1 & \cdots & x_n & y\end{vmatrix}=Dy-\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j$.

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{N}_+$, 证明 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$ 能被 $2!3!\cdots(n-1)!$ 整除.

6. 设数域 K 上的 n 阶方阵 A 的第 (i,j) 元是 a_i-b_j. 求 $\det(A)$, 并计算当 $n\geq2$ 且 $a_1\neq a_2, b_1\neq b_2$ 时 $AX=0$ 的解空间维数和一组基.

7. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 且 $|a_{ii}a_{jj}|>\sum\limits_{k\neq i}|a_{ik}|\sum\limits_{l\neq j}|a_{jl}|$ 对任意 $1\leq i\neq j\leq n$ 成立. 证明 $\det(A)\neq0$.

8. 设 A,B 是幂等矩阵 (即 $A^2=A, B^2=B$), 且 $I-A-B$ 满秩, 证明 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

9. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha\neq0, A^k\alpha=0$, 那么 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\operatorname{rank}(A^n)=\operatorname{rank}(A^{n+1})$.

10. 记矩阵 $H=(a_{ij})$ 中 a_{ij} 表示从城市 i 到 j 的航班数. (1) 解释 H^k 的 (i,j) 元的含义; (2) 设 $H=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&3\\0&0&2&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}$, 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?

11. 求 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 A, 其中 $a_{ij}=\dfrac{\alpha_i^n-\beta_j^n}{\alpha_i-\beta_j}, i,j=1,2,\cdots,n$.

12. 设矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 非平凡. 证明: 若矩阵 A 的每一个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=a_{ij}$, 则 $|A|^{n-2}=1$.

13. 设已知 $|\overrightarrow{OA}|=2, |\overrightarrow{OB}|=3, |\overrightarrow{OC}|=4, |\overrightarrow{AB}|=2, |\overrightarrow{BC}|=3, |\overrightarrow{AC}|=4$, 求混合积的绝对值 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|$.

6.2 解答

1. "$\Rightarrow$": 若 $x=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=\mu_1\beta_1+\cdots+\beta_s\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle$, 则 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_s\beta_s=0\Rightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_r=\mu_1=\cdots=\mu_s=0\Rightarrow x=0$.

"$\Leftarrow$": 考虑 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots+\beta_s=0$, 这意味着 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_s\beta_s\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\{0\}\Rightarrow\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0, \mu_1\beta_1+\cdots+\mu_s\beta_s=0$. 由两组向量 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r, \{\beta_j\}_{j=1}^s$ 各自内部的线性无关性知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=\mu_1=\cdots=\mu_s=0$, 因此整体也线性无关.

2. 利用拆项大法, 注意若有两列成比例则行列式为 0. 从而最后只会剩下 $n+1$ 个行列式: $\begin{vmatrix} x_1y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3y_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \cdots,$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1y_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1}y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_ny_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 相加得到原行列式为 $1+\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$.

3. 考虑函数 $f(x) = |A + x\alpha\alpha^T| = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}$, 因此是线性函数. 由 $f(0)=a, f(-1)=b$ 知 $f(x)=a+(a-b)x$, 因此 $f(2)=3a-2b$.

4. 按最后一行展开, 得到 LHS $= Dy + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i+1}x_iD_i$, 其中 D_i 是把 D 中第 i 列删去, 最后一列补上 $(x_1,\cdots,x_n)^T$ 得到的行列式. 再按最后一列对所有 D_i 展开, 得到 $D_i = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}(-1)^{i+j}A_{ij}x_j$, 直接代入得到 RHS.

5. 注意到 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & \cdots & a_1(a_1-1)\cdots(a_1-n+2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & \cdots & a_2(a_2-1)\cdots(a_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n(a_n-1) & \cdots & a_n(a_n-1)\cdots(a_n-n+2) \end{vmatrix}$(利用初等列变换, 用后面的列加减前面的列), 再将第 k 列提取公因子 $(k-1)!, k=3,4,\cdots,n$ 即可.

6. (1) $n=1$ 时 $|A|=a_1-b_1$, $n=2$ 时 $|A|=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$. $n>2$ 时由于 $A = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$, 因此 $\text{rank}(A) \le 2$, 从而 $|A|=0$.

(2) $n=2$ 时 $|A| \neq 0$, 因此解空间只有零解, 维数为 0, 基是空集. $n>2$ 时, 由于 $\text{rank}(A) \le 2$ 且显然 $A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} \neq 0$, 因此 $\text{rank}(A)=2$, 解空间维数是 $n-2$. 因此只需解方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} X = 0$ 即可 (这个分解后的系数矩阵秩也为 2, 因此同解). 直接计算得到一组基为 $\eta_i = \left(\frac{b_i-b_2}{b_2-b_1}, \frac{b_1-b_i}{b_2-b_1}, 0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{\text{第}i\text{个}}, 0\cdots, 0\right)^T, i=3,4,\cdots,n.$

7. 反证法. 假设 $\det(A)=0$, $AX=0$ 有非零解 $(c_1,\cdots,c_n)^T$. 若仅有 $c_i \neq 0$, 则 A 的第 i 列全零, 与条件矛盾. 下设第 i,j 个分量不为 0, 且 $|c_i| \ge |c_j| \ge |c_k|, \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}\backslash\{i,j\}$. 考察第 i 个和第 j 个等式, 有 $|a_{ii}c_i| \cdot |a_{jj}c_j| = |\sum_{k\neq i} a_{ik}c_k| \cdot |\sum_{l\neq j} a_{jl}c_l| \le |c_j||\sum_{k\neq i} a_{ik}| \cdot |c_i| \sum_{l\neq j}|a_{jl}| \Rightarrow |a_{ii}a_{jj}| \le \sum_{k\neq i}|a_{ik}| \sum_{l\neq j}|a_{jl}|$, 矛盾.

8. $A(I-A-B) = -AB$, 因此 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A(I-A-B)) = \text{rank}(AB)$, 同理 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$.

9. (1) 设 $\lambda_1\alpha + \lambda_2 A\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1 = 0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2=0$, 以此类推知线性无关.
(2) 显然 $A^nX=0 \Rightarrow A^{n+1}X=0$. 若存在 $A^{n+1}\alpha=0$ 但 $A^n\alpha \neq 0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^n\alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$.

10. (1) 从 $a_{ij}^2 = \sum_s a_{is}a_{sj}$ 可以看出 H^k 的 (i,j) 元表示从 i 到 j 乘坐恰 k 次航班有多少种乘坐方式. (2) $1\to3, 1\to4, 2\to1, 2\to5, 3\to2, 3\to4, 4\to1, 5\to2, 5\to3$, 分别有 $1,1,1,3,1,3,3,1,2$ 种航班选择; $2\to4, 4\to2$ 都要倒 3 次, 是最多的.

11. 利用 $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$ 及行列式乘法规则 $|AB|=|A||B|$, 知

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1}\\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1}\\ \beta_1^{n-2} & \beta_2^{n-2} & \cdots & \beta_n^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}(\alpha_i-\alpha_j)(\beta_i-\beta_j).$$

12. 首先容易看出 $|A|=\sum\limits_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}=\sum\limits_{i=1}^n a_{ij}^2>0$. 其次 $|A|^2=|AA^T|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{vmatrix}=|A|^n\Rightarrow|A|^{n-2}=1.$

13. $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|=\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}^T\\ \overrightarrow{OB}^T\\ \overrightarrow{OC}^T\end{vmatrix}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}^T\\ \overrightarrow{OB}^T\\ \overrightarrow{OC}^T\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OC}\end{vmatrix}}=\sqrt{\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{OC}^T\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OC}^T\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OC}^T\overrightarrow{OC}\end{vmatrix}}$. 由题意 $\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OA}=4,\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OB}=9,\overrightarrow{OC}\overrightarrow{OC}=16,\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}[\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^T(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{AB}^2)=\frac{9}{2},\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{AC}^2)=2,\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{BC}^2)=8$, 从而 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|=\sqrt{104}=2\sqrt{26}.$

7 可逆矩阵, 分块矩阵

7.1 问题

1. 证明可逆的上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵.

2. 计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ & & 1 & \cdots & n-2\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & 1\end{bmatrix}$ 的逆.

3. A 是 n 阶可逆矩阵, α,β 是 n 维列向量, 且矩阵 $A+\alpha\beta^T$ 可逆, 证明 $(A+\alpha\beta^T)^{-1}=A^{-1}-\dfrac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}$.

4. 计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{bmatrix}$ 的逆, 其中 $a_i>0,\forall i=1,2,\cdots,n$.

5. A 是 n 阶方阵, 试根据 $\operatorname{rank}(A)$ 的取值讨论 $\operatorname{rank}(A^*)$, 其中 A^* 是它的伴随矩阵.

6. 求与任意可逆矩阵乘法可交换的矩阵构成的集合.

7. A 是 n 阶方阵 $(n\ge 3)$, $A^3=O$, 证明矩阵 $M=\begin{bmatrix}I & A\\ A & I\end{bmatrix}$ 可逆, 并求其逆.

8. 已知 $I_{m\times m}-A_{m\times n}B_{n\times m}$ 可逆, 证明 $I_{n\times n}-B_{n\times m}A_{m\times n}$ 也可逆并求其逆矩阵. 进一步, 证明两者行列式相等.

9. 矩阵 $A_{m\times m},B_{m\times n},C_{n\times m},D_{n\times n}$ 满足 A 和 $E:=D-CA^{-1}B$ 可逆. 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 也可逆并求其逆.

10. A 是 n 阶方阵, 证明 $\operatorname{rank}(A-I)+\operatorname{rank}(A^2+A+I)=n$ 当且仅当 $A^3=I$.

11. A,B 是 n 阶方阵, 且满足 $\operatorname{rank}(I-AB)+\operatorname{rank}(I+BA)=n$, 证明或否定: A 是可逆矩阵.

12. A,B,C,D 都是 n 阶方阵, $AC=CA$, $AD=CB$, 且 A 可逆. 求矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的秩.

7.2 解答

1. 将单位矩阵拼在原矩阵右边, 其行变换只需不断用上面的行加减下面的行, 此操作只会将单位矩阵变成上三角矩阵.

2. 记 $J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A=I+2J+\cdots+nJ^{n-1}$. 由于 $A(I-2J+J^2)=0$, 因此 $A^{-1}=I-2J+J^2$.

3. 注意到 $A+\alpha\beta^T=A(I+A^{-1}\alpha\beta^T)$, 因此 $(A+\alpha\beta^T)^{-1}=(I+A^{-1}\alpha\beta^T)^{-1}A^{-1}=(I-A^{-1}\alpha(1+\beta^TA^{-1}\alpha)^{-1}\beta^T)A^{-1}=A^{-1}-\dfrac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}$.

4. 利用上第 3 题结论,

$$A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)(I_n+\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix})$$

$$\Rightarrow A^{-1}=(I_n-(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix})\mathrm{diag}(\frac{1}{a_1},\cdots,\frac{1}{a_n}).$$

5. 当 $\mathrm{rank}(A)=n$ 时, 由于 $AA^*=|A|I$, 从而 A^* 可逆, 因此 $\mathrm{rank}(A^*)=n$. 当 $\mathrm{rank}(A)=n-1$ 时, 由于 $AA^*=0$, 且 $\dim(\mathrm{Ker}(A))=n-\mathrm{rank}(A)=1$, 又有 A 中存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 不全零, $\mathrm{rank}(A^*)=1$. 当 $\mathrm{rank}(A)\le n-2$ 时, A 中不存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 全零, 从而 $\mathrm{rank}(A^*)=0$.

6. 先验证初等矩阵 $P(j,i(1))$, 即 $AP(j,i(1))=P(j,i(1))A$, 两边同时减去矩阵 A 得到 $AE_{ij}=E_{ij}A\Rightarrow a_{ii}=a_{jj},a_{ij}=0,\forall i\neq j$, 因此只能是数量矩阵, 其与所有矩阵都可交换.

7. 设 $P=\begin{bmatrix} I & O \\ -A & I \end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix}$, 从而 $PMQ=\begin{bmatrix} I & O \\ O & I-A^2 \end{bmatrix}$. $A^3=O\Rightarrow(PMQ)^{-1}=\begin{bmatrix} I & O \\ O & I+A^2 \end{bmatrix}\Rightarrow M^{-1}=Q\begin{bmatrix} I & O \\ O & I+A^2 \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} I+A^2 & -A \\ -A & I+A^2 \end{bmatrix}$.

8. $(I-BA)(I+B(I-AB)^{-1}A)=I-BA+B(I-AB)^{-1}A-BAB(I-AB)^{-1}A=I-BA+B(I-AB)(I-AB)^{-1}A=I$, 因此 $(I-BA)^{-1}=I+B(I-AB)^{-1}A$.

由于 $\begin{pmatrix} I-AB & A \\ O & I \end{pmatrix}\xrightarrow{列}\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} I & A \\ O & I-BA \end{pmatrix}$, 两边取行列式知 $|I-AB|=|I-BA|$.

9. $\begin{pmatrix} A & B & I & O \\ C & D & O & I \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} A & B & I & O \\ O & D-CA^{-1}B & -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} I & A^{-1}B & A^{-1} & O \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\xrightarrow{行}$
$\begin{pmatrix} I & O & A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} I & O & A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & I & -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}\Rightarrow$
$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}$.

10. 由裴蜀定理 (辗转相除法), 存在多项式 f,g 使得 $f(x)(x-1)+g(x)(x^2+x+1)=1$, 即 $f(A)(A-I)+g(A)(A^2+A+I)=I$. 从而利用分块初等行列变换,

$$\begin{bmatrix} A-I & O \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} A-I & f(A)(A-I) \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ I-A^3 & O \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} O & I \\ A^3-I & O \end{bmatrix}.$$

从而 $\operatorname{rank}(A-I)+\operatorname{rank}(A^2+A+I)=n+\operatorname{rank}(A^3-I)$, 因此原命题成立.

11. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & O \\ O & I+BA \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I+AB & O \\ O & I \end{bmatrix},$$

从而知 $\operatorname{rank}(I+BA)=\operatorname{rank}(I+AB)$. 因此原条件等价于 $\operatorname{rank}(I-AB)+\operatorname{rank}(I+AB)=n$, 由上一小题的类似结论知 $(I-AB)(I+AB)=0 \Rightarrow (AB)^2=I$, 因此 A 可逆.

12. 利用分块初等变换, 得 $\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$. 由于 $\operatorname{rank}(D-CA^{-1}B)=\operatorname{rank}(A(D-CA^{-1}B))=0$, 因此 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)=n$.

8 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 秋高等代数 I 习题课 6 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.