

数学分析 II 习题课讲义 (2025 春)

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 3 月 13 日

目录

1	定积分的基本概念与可积性	2
1.1	问题	2
1.2	解答	2
2	定积分的性质与计算	4
2.1	问题	4
2.2	解答	4
3	定积分中值定理, 定积分的应用 (1)	6
3.1	问题	6
3.2	解答	7
4	定积分的应用 (2)	9
4.1	问题	9
4.2	解答	9
5	致谢	11

1 定积分的基本概念与可积性

1.1 问题

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1, \alpha > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.
 2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 试证明 $f(x) \in R[a, b]$ 的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists [a, b]$ 上满足以下条件的连续函数 $g(x)$ 和 $h(x)$: (1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b]$; (2) $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon$.
 3. 函数 $g(x) \in R[a, b], f(u) \in C[A, B]$, 这里 A, B 分别是 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的上下确界. 证明 $f(g(x)) \in R[a, b]$.
 4. 函数 $f(x) \in R[a, b]$, 证明存在点 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x)$ 在 x_0 处连续.
 5. 函数 $f(x) \in R[a, b]$, 且 $\forall x \in [a, b]$ 有 $f(x) > 0$. 证明 $\int_a^b f(x)dx > 0$.
 6. 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积. 证明对于任意的 $[a, b], \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx = 0$.
 7. (Hölder 不等式). 非负函数 $f(x), g(x) \in R[a, b], p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$.
(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p \|g\|_q \geq \|fg\|_1$.)
[一个简单应用, 留作思考题] $0 < q \leq p \leq s \leq \infty$, 那么存在 $\theta \in [0, 1]$ 使得 $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}$. 证明 $\|f\|_p \leq \|f\|_q^\theta \|f\|_s^{1-\theta}$.
 8. (Minkowski 不等式). 同上题条件, 证明 $\left(\int_a^b (f+g)^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$.
(编者注: 本题实际上是 $\|f\|_p + \|g\|_p \geq \|f+g\|_p$, 这表明 L_p 空间是赋范线性空间.)
- 自由选讲.
9. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的每一点处的极限都是 0, 证明 $f(x) \in R[a, b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$.
 10. 已知 $(0, 1)$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 问是否有 $f(x) \in R[0, 1]$?
 11. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \cdots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}}$.
 12. $n \in \mathbb{N}_+, f(x) \in C[a, b], \int_a^b x^k f(x)dx = 0, k = 0, 1, \cdots, n$. 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个零点.

1.2 解答

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\varepsilon) < a_n < n^\alpha(1+\varepsilon)$. 从而当 n 足够大时, $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + N^\alpha) < \varepsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) < \varepsilon, \left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \cdots + (a_n - n^\alpha)]\right| \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha + \cdots + n^\alpha] \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha \leq \varepsilon \int_0^1 x^\alpha dx + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\alpha+1} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$. 这意味着 $\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i^\alpha\right)\right| \leq 4\varepsilon \Rightarrow$ 原极限 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$.
2. 必要性: $f(x) \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ s.t. $\sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$ 阶梯函数 $s_1(x), s_2(x)$ 满足 $s_1(x) \leq f(x) \leq s_2(x)$ 且 $\int_a^b [s_2(x) - s_1(x)]dx < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$ 连续函数 $g(x), h(x)$ 满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 且 $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon$.
充分性: $g(x)$ 连续, $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ s.t. $\sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\sum_{i=1}^n w_i^g(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. 在此分割下, $\sum_{i=1}^n w_i^f(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} + w_i^g \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

3. 用 Lebesgue 定理显然. 如不用 Lebesgue 定理, 则 $\forall \delta > 0, \exists \tau > 0$ s.t. $\forall |x - x'| < \tau, |f(x) - f(x')| < \delta$. 从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ s.t. $\sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$. 因为 $\{[x_{i-1}, x_i] : w_i^{f \circ g} > \delta\} \subset \{[x_{i-1}, x_i] : w_i^g > \tau\}$, 从而

而 $\sum_{w_i^{f \circ g} > \delta} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$, 即 $f \circ g$ 可积.

4. 由 $f(x) \in R[a, b]$ 知存在 $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, 使得 $w_{[a_1, b_1]}^f < 1$. 同样的道理, 由 $f(x) \in R[a_1, b_1]$ 知存在 $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ 使得 $w_{[a_2, b_2]}^f < \frac{1}{2}$. 依此类推, 存在一系列闭区间套满足 $w_{[a_n, b_n]}^f < \frac{1}{n}$, 只需取 $x_0 \in \cap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$ 即可.

5. 由 4 题知存在连续点 $x_0 \in (a, b)$, 因此 $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx \geq f(x_0)\delta > 0$.

6. $\forall \varepsilon > 0$, 存在连续函数 $g(x)$ 满足 $\int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b [f(x+h) - f(x)] dx \right| &\leq \left| \int_a^b [f(x+h) - g(x+h)] dx \right| + \left| \int_a^b [g(x+h) - g(x)] dx \right| + \left| \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq 2 \int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)| dx. \end{aligned}$$

由一致连续性知 $\exists H > 0$ s.t. $\forall x, x' \in [a-1, b+1], |x - x'| < H, |g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 取 $h < H$ 知 RHS $< \varepsilon$. 这意味着原极限为 0.

7. WLOG $\left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = 1$, 则原命题的结论可改写为 $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq 1$. 由 $\ln x$ 的凹性, 我们

有 $\alpha \ln a + (1-\alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1-\alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$. 令 $\alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b \left(\frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} \right) dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.)

8. 由 Hölder 不等式, $\int_a^b (f+g)^p dx = \int_a^b (f+g)^{p-1} f dx + \int_a^b (f+g)^{p-1} g dx \leq \left(\int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b g^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right)$. 消去 $\left(\int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}}$ 得到原不等式.

(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Minkowski 不等式.)

9. 由聚点原理知有界性, 即 $|f(x)| \leq M$. 其次 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$, s.t. $\omega_{U_0(x, \delta_x)} < \varepsilon$. 开覆盖 $\cup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x) \supset [a, b]$, 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖 $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$. 不妨设 $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$. 取分割点 $y_0 = a, y_{3i+1} = x_i - \frac{\varepsilon}{4nM}, y_{3i+2} = x_i + \frac{\varepsilon}{4nM}, y_{3i+3} \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1}), y_{3n} = b, i = 1, 2, \dots, n-1$.

对此分割, $\sum_{i=1}^{3n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon(b-a+1)$, 因此有可积性. 由于 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sum_{i=1}^{3n} \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)| dx \leq \varepsilon(b-a+1)$,

由 ε 的任意性知 $\int_a^b f(x) dx = 0$.

10. 考虑 $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, 但是 $\int_0^1 f(x) dx$ 不存在.

11. 原式 $= 2^{\alpha-\beta} \frac{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha + \frac{2}{n} \left(\frac{3}{n}\right)^\alpha + \cdots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha \right]^{\beta+1}}{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^\beta + \frac{2}{n} \left(\frac{4}{n}\right)^\beta + \cdots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n}{n}\right)^\beta \right]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{定积分定义}} 2^{\alpha-\beta} \frac{\left(\int_0^2 x^\alpha dx \right)^{\beta+1}}{\left(\int_0^2 x^\beta dx \right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$.

12. $\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 1 个零点, 记为 x_1 . $\int_a^b (x-x_1)f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 2 个零点, 记另一个为 x_2 . 依此类推, $\int_a^b \left[\prod_{i=1}^n (x-x_i) \right] f(x) dx = 0 \Rightarrow$ 存在至少 $n+1$ 个零点.

2 定积分的性质与计算

2.1 问题

1. $f(x) \in C[-1, 1]$, 证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$.

2. (Riemann-Lebesgue 引理). 设函数 $f(x), g(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, $g(x+T) = g(x)$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)g(nx)dx = \int_a^b f(x)dx \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx.$$

3. 设函数 $f(x) \in C^1[a, b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: (1) $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)dx$; (2) 若 $\int_a^b f^2(x)dx = 1$, 则 $\int_a^b [f'(x)]^2 dx \int_a^b [xf(x)]^2 dx \geq \frac{1}{4}$.

■ 自由选讲.

4. $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负连续. (1) 若 $f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(s)ds$, 证明 $f(t) \leq 1 + t$. (2) 若 $f(t) \leq K + \int_0^t f(s)g(s)ds$, 其中 $K \geq 0$ 是常数, 证明 $f(1) \leq K \exp\left(\int_0^1 g(s)ds\right)$.

5. 试构造 $f(x) \in D[0, 1]$ 但 $f'(x) \notin R[0, 1]$ 的例子. 如果额外加上 $f'(x)$ 有界条件呢?

6. 试构造可积函数 f 和连续函数 g 使得 $f \circ g$ 不可积. 如果额外要求 g 是 C^∞ 函数呢?

7. 设函数 $f(x), g(x) \in R[a, b]$, 记 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 的一个分割, $\lambda(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\}$.

任取 $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 证明 $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

8. $f(x) \in C[a, b]$, 且 $\exists \delta > 0, M > 0$, s.t. $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 成立 $\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| \leq M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$. 证明 $f(x) \equiv 0$.

9. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明 $f(x) = xf(1)$.

10. 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x dx$.

11. 求积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx$, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

12. 求积分 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx$.

2.2 解答

1. 往证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = 0$.

设 $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \leq M$. 由连续性知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} &= \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{\delta}^1 (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

其中, $|I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n \varepsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \varepsilon$,

$$|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n \varepsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} \left(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} \right)^n.$$

由于 $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$, 从而可取足够大的 n 使得 $|I_2| < \varepsilon$. 类似放缩 I_3 . 此时 $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\varepsilon$.

2. WLOG 设 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 否则考虑 $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$.

$\forall \varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 $s_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq x_m = b \end{cases}$ 使得 $\int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$. 设 $M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$. 则

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - s_\varepsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\varepsilon(x)g(nx)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|g(nx)dx + \left| \sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx \right| \\ &\leq M\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \leq M\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT. \end{aligned}$$

其中最后一个等式利用了 $\int_0^T g(x)dx = 0$, 这也意味着 $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \dots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$ (设 $c + kT \leq d < c + (k+1)T$) $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \leq MT$, 对于 $\forall c, d \in \mathbb{R}$.

选择一个足够大的 n , 使得 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \varepsilon$. 从而 $\left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| \leq (M+1)\varepsilon$. 由极限定义立得结论.

3. (1) 由分部积分,

$$\begin{aligned} \int_a^b xf(x)f'(x)dx &= xf^2(x)|_a^b - \int_a^b f(x)[xf(x)]'dx = - \int_a^b f^2(x)dx - \int_a^b xf(x)f'(x)dx \\ \Rightarrow \int_a^b xf(x)f'(x)dx &= -\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)dx. \end{aligned}$$

(2) 由 Cauchy 不等式立得.

$$\begin{aligned} 4. (1) \text{ 原条件等价于 } \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds}} &\leq 1 \xrightarrow{\text{两边积分}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds}}dt \leq \int_0^x 1dt \xrightarrow{\text{原函数}} \sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds} \Big|_0^x \leq x \Rightarrow \\ \sqrt{1+2\int_0^x f(s)ds} &\leq 1+x \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{1+2\int_0^x f(s)ds} \leq 1+x. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t f(s)g(s)ds \exp \left(- \int_0^t g(s)ds \right) \right]' &= f(t)g(t) \exp \left(- \int_0^t g(s)ds \right) - g(t) \int_0^t f(s)g(s)ds \exp \left(- \int_0^t g(s)ds \right) \\ &\leq Kg(t) \exp \left(- \int_0^t g(s)ds \right) = \left[K - K \exp \left(- \int_0^t g(s)ds \right) \right]', \end{aligned}$$

两边积分得到

$$\int_0^1 f(s)g(s)ds \exp \left(- \int_0^1 g(s)ds \right) \leq K - K \exp \left(- \int_0^1 g(s)ds \right) \Rightarrow f(1) \leq K + K \int_0^1 f(s)g(s)ds \leq K \exp \left(\int_0^1 g(s)ds \right).$$

(请大家在积分时注意从相同起点开始积分, 这里补上常数 K 也是为了保证两边在 $t=0$ 处都取 0. 这个题有微分方程背景, 可以先看懂答案, 再试图理解.)

5. 可以验证 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \in D[0, 1]$, 但 $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $[0, 1]$ 上无界. 若额外

有 $f'(x)$ 有界, 可参考 Volterra's function.

6. 设 \mathcal{C} 是 fat cantor set. 考虑 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, $g(x) = 1 - \text{dist}(x, \mathcal{C})$, 但 $f(g(x)) = 1_{x \in \mathcal{C}}$ 在正测集 \mathcal{C} 上不连续. 若

额外有 $g(x) \in C^\infty$, 可使用光滑版本的 Urysohn 引理.

7. $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(\eta_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i := S_1 + S_2$. 显然 $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} S_1 = \int_a^b f(x)g(x)dx$. 记

$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| = M_f$. 由 $g(x)$ 的可积性, 知 $|S_2| \leq \sum_{i=1}^n M_f \omega_g([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i = M_f [\overline{S}_g(\Delta) - \underline{S}_g(\Delta)] \xrightarrow{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} 0$.

8. 不妨设 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0) > 0$. 由连续性, $\exists \kappa > 0$, s.t. $\forall x \in (x_0 - \kappa, x_0 + \kappa), f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而 $\forall [\alpha, \beta] \subset (x_0 - \kappa, x_0 + \kappa)$, 成立 $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$ (最后一个大于号成立只需令 $\beta - \alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$), 矛盾.

9. 只需证明对无理数点成立. 考察 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 由有理数点的稠密性, $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \frac{\alpha^2}{2}f(1)$. 由集合 $\{q\alpha : q \in \mathbb{Q}\}$ 的稠密性且 $f(q\alpha) = qf(\alpha)$, $\int_0^{\alpha} f(x)dx = f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$. 因此 $f(\alpha)\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$.

10. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d(1 - \cos x) \stackrel{\text{分部积分}}{=} (1 - \cos x) \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) d(\ln \sin x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) dx = [\cos x - \ln(1 + \cos x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - 1$.

11. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x] \cos 2x + \sin[(2n-2)x] \sin 2x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x](1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x]}{2 \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x \cos[(2n-2)x] + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x] \cos x dx = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

由于 $I_1 = 1$, 因此 $I_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}$.

12. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1 + e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

3 定积分中值定理, 定积分的应用 (1)

3.1 问题

1. 证明对于 $\forall x > 0$, 存在唯一的 $\xi_x > 0$ 使得 $\int_0^x e^{t^2} dt = xe^{\xi_x^2}$ 成立, 并求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\xi_x}{x}$.

2. 证明 $\left| \int_a^b \sin x^2 dx \right| \leq \frac{1}{a}$, 其中 $0 < a < b$.

3. 函数 $f(x) \in D[0, 1]$, 且 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x} f(x) dx$. 证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = f'(\xi)$.

4. 求由下列曲线所围成的平面图形的面积: (1) $y^2 = x^2(1 - x^2)$; (2) $y^2 = x, x^2 + y^2 = 1$ (在第一、四象限的部分).

■ 自由选讲.

5. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凸函数. 证明 $f(x) \in R[0, x], \forall x \in (0, +\infty)$, 且 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ 也是 $(0, +\infty)$ 上的凸函数.

6. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 定义 $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$. 证明若 $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) \equiv 0$.

7. $f(x) \in R[0, 1], 0 < m \leq f(x) \leq M$, 求证 $\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$. (编者注: 本题比较 tricky.)

8. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义且内闭可积, $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$, 求 $f(x)$.

9. 求积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

10. 求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^{2025} x} dx$.
11. 求积分 $I = \int_0^1 [\sqrt[7]{1-x^3} - \sqrt[3]{1-x^7}] dx$.
12. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 证明 $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$. (能试着用定积分第二中值定理吗?)
13. $f(x) \in C[a, b]$, 且对任意 $g(x) \in C^\infty[a, b]$ 满足 $g(a) = g(b) = 0$ 都有 $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$. 证明 $f(x) \equiv 0$.
14. (Dirichlet 判别法). 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. $\forall A \geq a, g(x) \in R[a, A]$ 且 $\left| \int_a^A g(x) dx \right| \leq M$ 恒成立. 证明极限 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) g(x) dx$ 存在.
15. 试求由抛物线 $y^2 = 2x$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

3.2 解答

1. 第一问由定积分第一中值定理和函数 e^{t^2} 的单调性显然. 其次

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\xi_x}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\ln \int_0^x e^{t^2} dt - \ln x}}{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \int_0^x e^{t^2} dt - \ln x}{x^2}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2} dt} - \frac{1}{x}}{2x}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x e^{x^2} - \int_0^x e^{t^2} dt}{2x^2 \int_0^x e^{t^2} dt}}{2x^2 e^{x^2} + 4x \int_0^x e^{t^2} dt}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 e^{x^2}}{2x^2 e^{x^2} + 4x \int_0^x e^{t^2} dt}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{x^2}}{x e^{x^2} + 2 \int_0^x e^{t^2} dt}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 + 1)e^{x^2}}{(2x^2 + 3)e^{x^2}}} = 1. \end{aligned}$$

2. $\left| \int_a^b \sin x^2 dx \right| \stackrel{t=x^2}{=} \left| \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \right|$. 由于 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 非负单调递减, 因此由定积分第二中值定理, 原积分 $= \frac{1}{2a} \left| \int_{a^2}^{\xi} \sin t dt \right| \leq \frac{1}{a}$.

3. 由定积分第一中值定理, $\exists \xi \in [0, \frac{1}{2}]$, s.t. $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x} f(x) dx = e^{1-\xi} f(\xi)$, 这也意味着对于函数 $g(x) = e^{-x} f(x)$ 成立 $g(1) = g(\xi)$. 由 Rolle 微分中值定理知存在 $g'(\zeta) = 0 \Rightarrow f'(\zeta) = f(\zeta)$.

4. (1) $S = 4 \int_0^1 \sqrt{x^2(1-x^2)} dx \stackrel{x=\sin \theta}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = -\frac{4 \cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$.

- (2) 先解出交点, 然后用原函数直接计算 $S = 2 \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{x} dx + 2 \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. 凸函数开区间上连续 \Rightarrow 闭区间上可积. 由 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f\left(\frac{t}{x} \cdot x\right) d\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux) du \Rightarrow F\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = \int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i (ux_i)\right) du \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n t_i f(ux_i) du = \sum_{i=1}^n t_i F(x_i)$ 知 $F(x)$ 凸.

6. 构造 $G(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2$, $G'(x) = g(x)$ 单调递减, $g(0) = 0$. 因此 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增. 又因为 $G(0) = 0, G(x) \geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow G(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

7. 显然有 $(M - f(x)) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m} \right) \leq 0$, 因此 $\int_0^1 (M - f(x)) \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m} \right) dx \leq 0 \Leftrightarrow M \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{m} \int_0^1 f(x) dx \leq 1 + \frac{M}{m}$. 利用均值不等式, $\text{LHS} \geq 2\sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$.

8. 等式左右两边对 x 积分, 得到 $\int_y^{x+y} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + x f(y) + \frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y^2}{2}$. 类似有 $\int_x^{x+y} f(t) dt = \int_0^y f(t) dt + y f(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2}$. 两式相减得 $x f(y) + \frac{x^3 y}{3} = y f(x) + \frac{xy^3}{3}$, 即是 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$. 从而 $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^3}{3} \equiv C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$. 经验证符合题意.

9. 作代换 $x = \tan t$ 得 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt$. 再作代换 $t = \frac{\pi}{4} - t$ 得 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

10. 记 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot^{2025} x} dx$. 作换元 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 知 $I = J$. 而 $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, 因此 $I = J = \frac{\pi}{4}$.

11. $\int_0^1 \sqrt[7]{1-x^3} dx \stackrel{y=\sqrt[7]{1-x^3}}{=} \int_0^1 y dx \stackrel{\text{几何意义}}{=} \int_0^1 x dy = \int_0^1 \sqrt[3]{1-y^7} dy \Rightarrow I = \int_0^1 \sqrt[3]{1-y^7} dy - \int_0^1 \sqrt[3]{1-x^7} dx = 0$.

12. $f(x)$ 单调, 并考虑 $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$. 由定积分第二中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx &= f(a) \int_a^\xi \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + f(b) \int_\xi^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= f(a) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + (f(b) - f(a)) \int_\xi^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = (f(b) - f(a)) \frac{1}{2} (b - \xi)(\xi - a) \geq 0. \end{aligned}$$

13. 用反证法. WLOG 设 $f(x_0) > 0$, 由连续性知 $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 从而定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \\ 0, & x \in [a, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, b], \\ C^\infty \text{连接}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

此时 $\int_a^b f(x)g(x) dx \geq \int_{x_0 - \frac{\delta}{2}}^{x_0 + \frac{\delta}{2}} \frac{f^2(x_0)}{4} dx > 0$, 矛盾.

14. $\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$, s.t. $\forall x \geq X, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$. 从而 $\forall A', A'' \geq X, \left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x) dx \right| \stackrel{\text{定积分第二中值定理}}{\leq} \left| f(A') \int_{A'}^\xi g(x) dx + f(A'') \int_\xi^{A''} g(x) dx \right| \leq 2M(|f(A')| + |f(A'')|) \leq \varepsilon$. 然后由柯西收敛定理知极限存在.

15. 设弦方程为 $x - \frac{1}{2} = ky$, 与抛物线交点纵坐标为 y_1, y_2 , 则围成区域的面积 $S = \int_{y_1}^{y_2} \left(ky + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_1y_2 + y_1^2)$. 联立直线与抛物线, 由韦达定理知 $y_1 + y_2 = 2k, y_1y_2 = -1$. 则 $S = \frac{2}{3}(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$. 因此 $k = 0$ 时面积最小, 为 $\frac{2}{3}$.

补充 (不要求掌握)

等周问题: 长为 L 的曲线何时围成区域面积最大? 答案: 圆 (一年级小学生皆可猜出).

证明: 设 D 为凸区域 (D 中任意两点连线都在 D 内). 设 $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0, L]$, 此处选

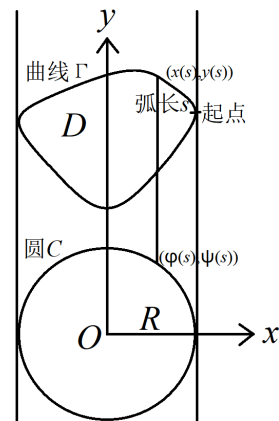
择 Γ 的弧长为参数, 则 $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, 且 D 的面积为 $A = \int_0^L x dy = \int_0^L x(s)y'(s) ds$. 设

$C: \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$ 是以 O 为中心, R 为半径的圆, 此处选择 Γ 的弧长为参数, 则 C 的面

积为 $\pi R^2 = - \int_0^L y dx = - \int_0^L \psi(s)x'(s) ds$. 从而 $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s)) ds \leq$

$\int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2} ds \leq \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)} ds = RL$. 因此成立 $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq A + \pi R^2 \leq$

$RL \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{4\pi}$. 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是 $(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)$. 用右边减去左边得到 $(x(s)x'(s) + \psi(s)y'(s))^2 = 0$. 由于 $x(s)^2 + \psi(s)^2 = R^2$, 两边求导得 $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = y'(s), \psi(s) = y(s) + y_0$, 即 Γ 方程为 $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, 圆也!



4 定积分的应用 (2)

4.1 问题

■ 自由选讲.

1. 半径为 R 的球正好有一半沉入水中, 球的密度为 1. 现将球从水中匀速取出, 需要做多少功?
2. 证明 π 是无理数. 可以按照以下步骤: (1) 设 $\pi = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, 定义 $f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$, 证明 $\forall i \in \mathbb{N}_+$, $f^{(i)}(0), f^{(i)}(\pi)$ 都是整数. (2) 证明定积分 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ 也是整数. (3) 证明 $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 1$, 得到矛盾.
3. $f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$, 证明 $\int_0^1 [f''(x)]^2 dx \geq 4$, 取等号当且仅当 $f(x) = x^3 - x^2$.
4. 求质量分布均匀的对数螺旋线 $r = e^\theta$ 在 $(r, \theta) = (1, 0)$ 和 $(r, \theta) = (e^\phi, \phi)$ 之间一段的重心坐标.
5. 求双扭线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ 绕轴 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 旋转一周所得的曲面的面积.
6. 证明极坐标下曲线 $r = r(\theta)$ 与 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围平面图形绕极轴旋转一周所得立体体积为 $V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin \theta d\theta$.
7. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t |\sin t| dt}{x^2}$.
8. $f(x) \in C^1[0, 1], f(x) \in [0, 1], f(0) = f(1) = 0, f'(x)$ 单调递减. 证明曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的弧长不大于 3.
9. 求圆的渐伸线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ 上 $A(a, 0), B(a, -2\pi a)$ 之间部分与直线 \overline{AB} 围成图形的面积.
10. $f(x) \in C^2[a, b]$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$.
11. $f(x) \in D[0, 1], f'(x) \in R[0, 1], |f'(x)| \leq M$. 定义 $A_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. (1) 证明 $|A_n| \leq \frac{M}{2n}$. (你可以推广到高阶和高维吗? 答案是 $O(n^{-\frac{1}{d}})$.) (2) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n$.
12. (Jensen 不等式). 凸函数 $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ 可积且 $\int_a^b p(x) dx > 0$. 证明对于任意 $f(x) \in R[a, b]$,
$$\varphi\left(\frac{\int_a^b f(x)p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}\right) \leq \frac{\int_a^b \varphi(f(x))p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}.$$
13. 推导重力场中粒子数量密度的分布率 $n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$, 其中 T 是温度, k_B 是玻尔兹曼常量.

4.2 解答

1. 球心向上移动距离 h 时, 球位于水外的体积为 $V(h) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_0^h \pi (\sqrt{R^2 - z^2})^2 dz = \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi \left(R^2 h - \frac{1}{3} h^3\right)$. 对应位移 $[h, h+dh]$ 所做的微功 $dW = gV(h)\rho dh$. 从而 $W = g \int_0^R V(h) dh = g \left(\frac{2}{3} \pi R^4 + \frac{5}{12} \pi R^4\right) = \frac{13}{12} g \pi R^4$.
2. (1) $f(x)$ 是一个次数从 n 到 $2n$ 的多项式. 至于 $f^{(i)}(0)$ 是不是整数, 我们只需讨论求导后的非零常数项. 此时 $i \geq n$, 求导后得到的非零常数值是 $i!c$, 且 c 是整数除以 $n!$ 得到的有理数, 从而 $i!c$ 是整数. 由于 $f(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f^{(i)}(\pi) = (-1)^n f^{(i)}(0)$, 因此 $f^{(i)}(\pi)$ 也是整数.
(2) 由分部积分, $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(x)(-\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx = f(0) + f(\pi) + f'(x) \sin x|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - \int_0^\pi f''(x) \sin x dx$. $f(x)$ 是 $2n$ 此多项式, 重复以上过程, 最后的结果是 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = f(0) + f(\pi) - f''(0) - f''(\pi) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0) + (-1)^n f^{(2n)}(\pi)$, 因此是整数.
- (3) 在区间 $[0, \pi]$ 上成立 $0 \leq a - bx = b(\pi - x) \leq a$, 因此 $0 \leq f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$, 从而 $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \int_0^\pi f(x) dx < \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$. 当 n 足够大时, $\frac{\pi^{n+1} a^n}{n!} < 1$.
3. 令 $p(x) = x^3 - x^2$, 从而有 $\int_0^1 [(f''(x))^2 - (p''(x))^2] dx = \int_0^1 [f''(x) - p''(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 f''(x)p''(x) dx - 2 \int_0^1 [p''(x)]^2 dx \geq 0 + 2f'(x)p''(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 f'(x)p'''(x) dx - 8 = 2f'(1)p''(1) - 2f(x)p'''(x)|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x)p''''(x) dx - 8 = 0$.

$$4. \bar{x} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \cos \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(\sin \phi + 2 \cos \phi) - 2}{5(e^\phi - 1)}, \bar{y} = \frac{\int_0^\phi e^{2\theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\phi e^\theta d\theta} = \frac{e^{2\phi}(2 \sin \phi - \cos \phi) + 1}{5(e^\phi - 1)}.$$

5. 原命题等价于 $r^2 = 2a^2 \sin 2\theta$ 绕极轴旋转一周所得的曲面的面积. 改写成平面坐标系 $\begin{cases} x = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \cos \theta \\ y = a\sqrt{2 \sin 2\theta} \sin \theta \end{cases}$, 则

$$\text{面积 } S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(\theta) \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = 8\pi a^2.$$

6. 对应 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的扇形面积 $dS = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$, 其质心位于 $\frac{2}{3}r(\theta)$ 处. 由 Guldin 第二定理, 此扇形绕极轴旋转体体积为 $dV = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta 2\pi \frac{2}{3}r(\theta) \sin \theta = \frac{2\pi}{3}r^3(\theta) \sin \theta d\theta$. 两边积分得到结果.

$$7. \text{原式} \stackrel{t=xt}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 xt |\sin(xt)| d(xt)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 t |\sin(xt)| dt \stackrel{\text{R-L Lemma}}{=} \int_0^1 t dt \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{1}{\pi}.$$

$$8. \text{设 } x_0 = \arg \max_{x \in [0,1]} f(x) \in (0,1), \text{ 则 } f'(x_0) = 0, \text{ 且弧长 } s = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \leq \int_0^1 (1 + |f'(x)|) dx = 1 + \int_0^{x_0} f'(x) dx - \int_{x_0}^1 f'(x) dx = 1 + 2f(x_0) \leq 3.$$

$$9. \text{直线 } AB \text{ 的参数方程是 } \begin{cases} x = \phi(t) = a \\ y = \psi(t) = t \end{cases}, t \in [-2\pi a, 0]. \text{ 故 } S = - \int_0^{2\pi} y(t) dx(t) - \int_{-2\pi a}^0 \psi(t) d\phi(t) = - \int_0^{2\pi} a(\sin t - t \cos t) a(t \cos t) dt + 0 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 + \pi a^2.$$

10. 由分部积分和定积分第一中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) d(x-a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(x) d\frac{(x-a)^2}{2} \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} f''(x) dx \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(x-a)^2}{2} dx. \end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^2}{8} + f''(\xi_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(x-b)^2}{2} dx.$$

$$\text{两式相加得 } \int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) + (f''(\xi_1) + f''(\xi_2)) \frac{(b-a)^3}{48} \stackrel{\text{Darboux}}{=} f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) + f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{24}.$$

11. (1) 直接计算即可:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left(\frac{k}{n} - x \right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2} + \frac{1}{2n} (f(0) - f(1)) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2n} \right) + \frac{1}{2n} (f(0) - f(1)). \end{aligned}$$

利用分部积分,

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) d\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) = f(x) \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) \Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x) dx := \frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2n} - B_n^k,$$

其中

$$\begin{aligned} B_n^k &= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x) dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x) dx + \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) f'(x) dx \\ &= f'(\xi_{k,1}) \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) dx + f'(\xi_{k,2}) \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) dx = -\frac{f'(\xi_{k,1})}{8n^2} + \frac{f'(\xi_{k,2})}{8n^2}. \end{aligned}$$

综上所述, 我们有

$$\begin{aligned} nA_n &= \sum_{k=1}^n \frac{f'(\xi_{k,2}) - f'(\xi_{k,1})}{8n} + \frac{f(0) - f(1)}{2} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n &= \frac{1}{8} \left(\int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 f'(x) dx \right) + \frac{f(0) - f(1)}{2} = \frac{f(0) - f(1)}{2}. \end{aligned}$$

12. WLOG $\int_a^b p(x) dx = 1$, 并设 $\int_a^b f(x)p(x) dx = c$, 任取 $k \in [\varphi'_-(c), \varphi'_+(c)]$, 构造“切”直线 $l: y = k(x-c) + \varphi(c)$. 由凸函数性质知 $\varphi(x) \geq l(x)$ 恒成立. 从而 $\varphi(c) = l(c) = k \left(\int_a^b f(x)p(x) dx - c \right) + \varphi(c) = \int_a^b [k(f(x)-c) + \varphi(c)] p(x) dx = \int_a^b l(f(x)) p(x) dx \leq \int_a^b \varphi(f(x)) p(x) dx$.

13. 由二力平衡, 压力差 dF 托起了单位体积内的粒子重力 dG . 从而 $dF + dG = 0 \Rightarrow Sdp + \rho g S dz = 0 \Rightarrow dp + nmg dz = 0$. 由 $p = nk_B T$ 知 $dp = k_B T dn \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_B T} dz$. 两边积分知 $\log n(z) - \log n(0) = \frac{-mgz}{k_B T} \Rightarrow n(z) = n(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$.

5 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学信息科学技术学院 22 级本科生吴明睿同学, 他提供了很多 L^AT_EX 排版的建议. 感谢选修 2025 春数学分析 II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.