高等代数 I 习题课讲义 (2025 秋)

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 9 月 24 日

目录

1 第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 是否存在二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 其图像经过下述 4 个点: $A(1,2), Q(-1,3), M(-4,5), N(0,2)$?

2. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 & = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 & = -3 \end{cases}$.

3. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D. 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

4. a 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$ 有解? 当有解时, 求出它的所有解.

5. 解下述线性方程组: $\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_1 \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n \end{cases}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$, 且 $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} \neq -1$.

6. (1) 求复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集合; (3) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1, y_2, y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解?

7. 设 $\alpha_1 = (1,1,4), \alpha_2 = (-2,1,5), \alpha_3 = (a,2,10), \beta = (1,b,-1)$. 当 a, b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

8. 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, $\beta = \sum_{j=1}^{s} b_j\alpha_j$. 如果 $b_i \neq 0$, 证明用 β 替换 α_i 得到的向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 也线性无关.

9. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 表出任何向量–如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

10. 求单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线.

11. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$ 的方式唯一.

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

1.2 解答

1. 直接代入求解 $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a - b + c = 3 \\ 16a - 4b + c = 5 \\ c = 2 \end{cases}$, 发现无解.

2. $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1\\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow{③-=①} \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3\\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow[④+=7*②]{③-=5*②} \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12\\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24\end{bmatrix} \xrightarrow{④+=2*③}$
$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$

3. 注意 A, B, C, D 的比例和为 1, 因此 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5\\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12\\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②-=8*①\\ ③-=5*①\\ ④-=15*①}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3\\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7\\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[④-=5*②]{③+=10*②}$
$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3\\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23\\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15\end{bmatrix} \xrightarrow{④+=\frac{2}{3}*③} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3\\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, 因此解是 $(\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25})$.

4. $\begin{bmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ -1 & 11 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 7 & a\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②+=①\\ ③-=3*①}} \begin{bmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 0 & 7 & 1 & 2\\ 0 & 7 & 1 & a+3\end{bmatrix}$. 因此有解当且仅当 $a=-1$, 通解是 $\begin{cases} x_1 = -\frac{18}{7}x_3 + \frac{1}{7}\\ x_2 = -\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}\end{cases}$.

5. 令 $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 原方程组改写为 $\begin{cases} y + a_1x_1 = b_1\\ y + a_2x_2 = b_2\\ \cdots\\ y + a_nx_n = b_n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - y}{a_1}\\ x_2 = \dfrac{b_2 - y}{a_2}\\ \cdots\\ x_n = \dfrac{b_n - y}{a_n}\end{cases}$. 全部相加得到关于 y 的一元一次方程, 解得 $y = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{b_i}{a_i}$. 代入上式得到原线性方程组的解.

6. (1) $\begin{bmatrix}1 & -i & -1\\ 2 & 2 & -2\\ i & 1+i & -i\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②-=2*①\\ ③-=i*①}} \begin{bmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 2+2i & 0\\ 0 & i & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{③-=\frac{i}{2+2i}*②} \begin{bmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 2+2i & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{②*=\frac{1}{2+2i}} \begin{bmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.
(2) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}$. (3) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1, \frac{y_2 - 2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$ 时才有解.

7. $\begin{bmatrix}1 & -2 & a & 1\\ 1 & 1 & 2 & b\\ 4 & 5 & 10 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{②-=①\\ ③-=4*①}} \begin{bmatrix}1 & -2 & a & 1\\ 0 & 3 & 2-a & b-1\\ 0 & 13 & 10-4a & -5\end{bmatrix} \xrightarrow{③-=\frac{13}{3}*②} \begin{bmatrix}1 & -2 & a & 1\\ 0 & 3 & 2-a & b-1\\ 0 & 0 & \frac{4}{3}+\frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b - \frac{2}{3}\end{bmatrix}$. 因此, 当 $a \neq -4$ 或 $a = -4, b = -\frac{2}{13}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

8. 设 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i\beta + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i(b_1\alpha_1 + \cdots + b_s\alpha_s) + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow (k_1 + k_ib_1)\alpha_1 + \cdots + (k_{i-1} + k_ib_{i-1})\alpha_{i-1} + k_ib_i\alpha_i + (k_{i+1} + k_ib_{i+1})\alpha_{i+1} + \cdots + (k_s + k_ib_s)\alpha_s = 0$. 由线性无关性知 $k_1 + k_ib_1 = \cdots = k_{i-1} + k_ib_{i-1} = k_ib_i = k_{i+1} + k_ib_{i+1} = \cdots = k_s + k_ib_s = 0$, 由于 $b_i \neq 0$, 因此 $k_i = 0$, 进一步得到 $k_1 = \cdots = k_s = 0$, 这也意味着 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

9. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow$ 表出 0 向量唯一 $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \cdots k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_s = 0)$.

10. $(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x-z=k(1-y) \\ x+z=\dfrac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x+ky-z=k \\ kx-y+kz=1 \end{cases}$. 特别地, 当 $y=\pm 1$ 时, $z=\pm x$ 也是位于该曲面上的直线.
11. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{3}=\dfrac{a_1-a_2}{b_2-b_1}\in\mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$, $\gcd(a,b)=1$, 那么 $a^2=3b^2\Rightarrow 3|a\Rightarrow 9|a^2\Rightarrow 3|b^2\Rightarrow 3|b$, 矛盾.
12. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})=\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})\Rightarrow 9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5}|3\times 3$ 而 $2+\sqrt{-5}\not|3$, 因此不是素数.

2 线性相关性, 秩

2.1 问题

1. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.
2. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
3. 作初等行变换将矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求 A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a,b 取何值时, 向量 $(3,a,b,b,3)$ 属于 A 的行空间?
4. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$; (2) $\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3+\alpha_4$; (3) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$; (4) $\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+8\alpha_4,\alpha_2+5\alpha_3+\alpha_4,3\alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$.
5. 证明: 若向量组 I 能线性表出向量组 II, 且 $\mathrm{rank}(\mathrm{I})=\mathrm{rank}(\mathrm{II})$, 则向量组 II 也能表出向量组 I.
6. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 并且有 $\beta_i=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r,\forall i=1,2,\cdots,s$. 证明若矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times r}$ 列向量线性无关, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 也能线性表出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$.
7. 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,\forall 1\le i\le n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明主对角占优矩阵满秩.
8. 证明秩等式 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$ 和秩不等式 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\ge\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$.
9. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{x-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{x-c_3}{c_1-c_2}$, $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.
10. 设 $W=\{f(x)|f(1)=0,f(x)\in\mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.
11. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.

2.2 解答

1. 显然矩阵 A 的秩至少为 2(第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2, 因此 $\lambda=0$, 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4

列线性表出. 综上, $\lambda = 0$ 时秩为 2, 否则为 3.

2. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3$, $-5\alpha_1 - 4\alpha_2 = \alpha_4$;
(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\dfrac{3}{2}\beta_2 - \dfrac{1}{2}\beta_3 = \beta_1$.

3. A 的简化阶梯型矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$, 且 $\beta_3 = 2\beta_1 - \beta_2, \beta_5 = 3\beta_1 + 5\beta_2 - \beta_4$. (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, 且 $\alpha_3 = -\dfrac{31}{9}\alpha_1 - \dfrac{55}{9}\alpha_2 + \dfrac{17}{9}\alpha_4, \alpha_5 = -\dfrac{20}{9}\alpha_1 - \dfrac{23}{9}\alpha_2 + \dfrac{22}{9}\alpha_4$. (3) 仔细计算即可. $a = 4, b = 2$.

4. (1) 线性相关; $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$. (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这有五个向量却只有四个自由度.

5. 设 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量 α, 由于组 I 能表出 $\beta_1, \cdots, \beta_s, \alpha$, 从而 $\operatorname{rank}(\beta_1, \cdots, \beta_s, \alpha) \le s$, 即 $\beta_1, \cdots, \beta_s, \alpha$ 线性相关. 由于 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性无关, 因此它们能表出 α.

6. 只需证明能表出 α_1. 利用高斯消元法去解方程 $\beta_{i1} = b_{i1}\alpha_1 + \cdots + b_{ir}\alpha_r$, 由于 B 列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成 $\begin{bmatrix} I_{r\times r} \\ 0_{(s-r)\times r} \end{bmatrix}$(可用递推法或归纳法证明之), 从而 α_1 能被 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性表出.

7. 反证法. 假设 A 的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$. 我们不妨设在这 n 个系数里面 k_1 的绝对值最大, 那么就有 $k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n} = 0$. 但是 $|k_1a_{11} + k_2a_{12} + \cdots + k_na_{1n}| \ge |k_1a_{11}| - |k_2a_{12}| - \cdots - |k_na_{1n}| \ge |k_1a_{11}| - |k_1|(|a_{12}| + \cdots + |a_{1n}|) > 0$, 矛盾. 因此 A 满秩.

8. (1) 设 A 的一个列极大线性无关组是 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$, B 的一个列极大线性无关组是 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_s}$. 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$ 线性无关, 且可以分别用对应小矩阵 A, B 的相同系数表出其他大矩阵的列向量, 因此这是一个大矩阵的列极大线性无关组, 有第一个秩等式.
(2) 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{j_1} \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \gamma_{j_s} \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$ 线性无关, 其中 γ_{j_k} 是矩阵 C 对应于 j_k 的列向量, 因此大矩阵的秩至少是 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$, 有第二个秩不等式. 这里我们无法判断这是不是一个大矩阵的列极大线性无关组, 因此可以严格取到大于号. 一个例子是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $A = (0), B = (0), C = (1)$.

9. 由矩阵满秩知 $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ 和 $(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$ 线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证 $x_3 + k(x_1 - x_2) = x_1 + t(x_2 - x_3), x = a, b, c$ 对于 k, t 是否有解. 由于矩阵满秩, 合并同类项知该方程系数必须满足 $t + 1 = k - 1 = t + k = 0$, 因此 $t = -1, k = 1$. 从而两直线相交.

10. (1) 容易证明对 $\forall f(x), g(x) \in W \Rightarrow af(x) + bg(x) \in W$, 因此是线性子空间. (2) 令 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, $f(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0$, 因此 $f(x) = a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + \cdots + a_{n-1}(x^{n-1}-1)$. 下面我们只需证明 $x - 1, x^2 - 1, \cdots, x^{n-1} - 1$ 确实是 W 的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以 $\dim W = n - 1$.

11. 注意到 $W_i = \{X \in K^n : (a_{i1}, \cdots, a_{in})X = 0\}, i = 1, 2, \cdots, n$ 都是 K^n 的 $n-1$ 维子空间, 由于有限个 $n-1$ 维子空间张不满 n 维全空间, 从而存在 $X_0 \in K^n \backslash (W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n)$, 此时 AX_0 的每个分量都不为零.

3 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 秋高等代数 I 习题课 6 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.