高等代数 I 习题课讲义 (2025 秋)

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 11 月 25 日

目录

1 第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 是否存在二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 其图像经过下述 4 个点: $A(1,2), Q(-1,3), M(-4,5), N(0,2)$?

2. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4 &= 4 \\ x_2-x_3+x_4 &= -3 \\ x_1+3x_2-4x_4 &= 1 \\ -7x_2+3x_3+x_4 &= -3 \end{cases}$.

3. 某食品厂有四种原料 A,B,C,D. 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

4. a 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1 \\ -x_1+11x_2-x_3=3 \\ 3x_1-5x_2+7x_3=a \end{cases}$ 有解? 当有解时, 求出它的所有解.

5. 解下述线性方程组: $\begin{cases} (1+a_1)x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=b_1 \\ x_1+(1+a_2)x_2+x_3+\cdots+x_n=b_2 \\ \cdots \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+(1+a_n)x_n=b_n \end{cases}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$, 且 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\neq -1$.

6. (1) 求复矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX=0$ 在复数域上的解集合; (3) 求齐次方程组 $AX=0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1,y_2,y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX=(y_1,y_2,y_3)^T$ 有解?

7. 设 $\alpha_1=(1,1,4), \alpha_2=(-2,1,5), \alpha_3=(a,2,10), \beta=(1,b,-1)$. 当 a,b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

8. 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, $\beta=\sum_{j=1}^{s} b_j\alpha_j$. 如果 $b_i\neq 0$, 证明用 β 替换 α_i 得到的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 也线性无关.

9. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表出任何向量–如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

10. 求单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上的所有直线.

11. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}: a,b\in\mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a+b\sqrt{3}, a,b\in\mathbb{Q}$ 的方式唯一.

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

1.2 解答

1. 直接代入求解 $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=3 \\ 16a-4b+c=5 \\ c=2 \end{cases}$, 发现无解.

2. $\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-4&1\\0&-7&3&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{③-=①}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&0&-3\\0&-7&3&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[④+=7*②]{③-=5*②}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&-4&8&-24\end{bmatrix}\xrightarrow{④+=2*③}$
$\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix}\Rightarrow(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-8,3,6,0).$

3. 注意 A,B,C,D 的比例和为 1, 因此 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\8&6&3&2&5\\5&25&10&15&12\\15&5&20&10&15\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{②-=8*①\\③-=5*①\\④-=15*①}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&20&5&10&7\\0&-10&5&-5&0\end{bmatrix}\xrightarrow[④-=5*②]{③+=10*②}$
$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&30&25&15\end{bmatrix}\xrightarrow{④+=\frac{2}{3}*③}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&0&-\frac{25}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, 因此解是 $(\frac{7}{25},\frac{16}{75},\frac{7}{15},\frac{1}{25})$.

4. $\begin{bmatrix}1&-4&2&-1\\-1&11&-1&3\\3&-5&7&a\end{bmatrix}\xrightarrow[③-=3*①]{②+=①}\begin{bmatrix}1&-4&2&-1\\0&7&1&2\\0&7&1&a+3\end{bmatrix}$. 因此有解当且仅当 $a=-1$, 通解是 $\begin{cases}x_1=-\frac{18}{7}x_3+\frac{1}{7}\\x_2=-\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}\end{cases}$.

5. 令 $y=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 原方程组改写为 $\begin{cases}y+a_1x_1=b_1\\y+a_2x_2=b_2\\\cdots\\y+a_nx_n=b_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{b_1-y}{a_1}\\x_2=\frac{b_2-y}{a_2}\\\cdots\\x_n=\frac{b_n-y}{a_n}\end{cases}$. 全部相加得到关于 y 的一元一次方程, 解得 $y=\dfrac{1}{1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}$. 代入上式得到原线性方程组的解.

6. (1) $\begin{bmatrix}1&-i&-1\\2&2&-2\\i&1+i&-i\end{bmatrix}\xrightarrow[③-=i*①]{②-=2*①}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&i&0\end{bmatrix}\xrightarrow{③-=\frac{i}{2+2i}*②}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{②*=\frac{1}{2+2i}}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.
(2) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{C}\}$. (3) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{R}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1,\frac{y_2-2y_1}{2+2i},y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1=0$ 时才有解.

7. $\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\1&1&2&b\\4&5&10&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[③-=4*①]{②-=①}\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\0&3&2-a&b-1\\0&13&10-4a&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{③-=\frac{13}{3}*②}\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\0&3&2-a&b-1\\0&0&\frac{4}{3}+\frac{1}{3}a&-\frac{13}{3}b-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$. 因此, 当 $a\neq-4$ 或 $a=-4,b=-\frac{2}{13}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

8. 设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i\beta+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s=0\Leftrightarrow k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i(b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s)+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s=0\Leftrightarrow(k_1+k_ib_1)\alpha_1+\cdots+(k_{i-1}+k_ib_{i-1})\alpha_{i-1}+k_ib_i\alpha_i+(k_{i+1}+k_ib_{i+1})\alpha_{i+1}+\cdots+(k_s+k_ib_s)\alpha_s=0$. 由线性无关性知 $k_1+k_ib_1=\cdots=k_{i-1}+k_ib_{i-1}=k_ib_i=k_{i+1}+k_ib_{i+1}=\cdots=k_s+k_ib_s=0$, 由于 $b_i\neq0$, 因此 $k_i=0$, 进一步得到 $k_1=\cdots=k_s=0$, 这也意味着 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性无关.
9. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow$ 表出 0 向量唯一 $\Leftrightarrow(k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_s=0)$.

10. $(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x-z=k(1-y) \\ x+z=\dfrac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x+ky-z=k \\ kx-y+kz=1 \end{cases}$. 特别地, 当 $y=\pm 1$ 时, $z=\pm x$ 也是位于该曲面上的直线.
11. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{3}=\dfrac{a_1-a_2}{b_2-b_1}\in\mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$, $\gcd(a,b)=1$, 那么 $a^2=3b^2\Rightarrow 3|a\Rightarrow 9|a^2\Rightarrow 3|b^2\Rightarrow 3|b$, 矛盾.
12. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})=\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})\Rightarrow 9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5}|3\times 3$ 而 $2+\sqrt{-5}\nmid 3$, 因此不是素数.

2 线性相关性, 秩

2.1 问题

1. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.
2. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
3. 作初等行变换将矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求 A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a,b 取何值时, 向量 $(3,a,b,b,3)$ 属于 A 的行空间?
4. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$; (2) $\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3+\alpha_4$; (3) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$; (4) $\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+8\alpha_4,\alpha_2+5\alpha_3+\alpha_4,3\alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$.
5. 证明: 若向量组 I 能线性表出向量组 II, 且 rank(I) = rank(II), 则向量组 II 也能表出向量组 I.
6. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 并且有 $\beta_i=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r,\forall i=1,2,\cdots,s$. 证明若矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times r}$ 列向量线性无关, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 也能线性表出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$.
7. 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,\forall 1\le i\le n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明主对角占优矩阵满秩.
8. 证明秩等式 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$ 和秩不等式 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\ge\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.
9. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$, $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.
10. 设 $W=\{f(x)|f(1)=0,f(x)\in\mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.
11. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.

2.2 解答

1. 显然矩阵 A 的秩至少为 2(第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2, 因此 $\lambda=0$, 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4

列线性表出. 综上, $\lambda=0$ 时秩为 2, 否则为 3.
2. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1+3\alpha_2=\alpha_3$, $-5\alpha_1-4\alpha_2=\alpha_4$;
(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\dfrac{3}{2}\beta_2-\dfrac{1}{2}\beta_3=\beta_1$.
3. A 的简化阶梯型矩阵是 $A=\begin{bmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&-1&0&5\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$. (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是 β_1,β_2,β_4, 且 $\beta_3=2\beta_1-\beta_2,\beta_5=3\beta_1+5\beta_2-\beta_4$. (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$, 且 $\alpha_3=-\dfrac{31}{9}\alpha_1-\dfrac{55}{9}\alpha_2+\dfrac{17}{9}\alpha_4,\alpha_5=-\dfrac{20}{9}\alpha_1-\dfrac{23}{9}\alpha_2+\dfrac{22}{9}\alpha_4$. (3) 仔细计算即可. $a=4,b=2$.
4. (1) 线性相关; $(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$. (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这有五个向量却只有四个自由度.
5. 设 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量 α, 由于组 I 能表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$, 从而 $\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha)\le s$, 即 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$ 线性相关. 由于 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 因此它们能表出 α.
6. 只需证明能表出 α_1. 利用高斯消元法去解方程 $\beta_{i1}=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r$, 由于 B 列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成 $\begin{bmatrix}I_{r\times r}\\0_{(s-r)\times r}\end{bmatrix}$(可用递推法或归纳法证明之), 从而 α_1 能被 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表出.
7. 反证法. 假设 A 的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$. 我们不妨设在这 n 个系数里面 k_1 的绝对值最大, 那么就有 $k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n}=0$. 但是 $|k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n}|\ge|k_1a_{11}|-|k_2a_{12}|-\cdots-|k_na_{1n}|\ge|k_1a_{11}|-|k_1|(|a_{12}|+\cdots+|a_{1n}|)>0$, 矛盾. 因此 A 满秩.
8. (1) 设 A 的一个列极大线性无关组是 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$, B 的一个列极大线性无关组是 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}$. 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix}\alpha_{i_1}\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\alpha_{i_r}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\beta_{j_1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\\beta_{j_s}\end{pmatrix}$ 线性无关, 且可以分别用对应小矩阵 A,B 的相同系数表出其他大矩阵的列向量, 因此这是一个大矩阵的列极大线性无关组, 有第一个秩等式.
(2) 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix}\alpha_{i_1}\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\alpha_{i_r}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma_{j_1}\\\beta_{j_1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\gamma_{j_s}\\\beta_{j_s}\end{pmatrix}$ 线性无关, 其中 γ_{j_k} 是矩阵 C 对应于 j_k 的列向量, 因此大矩阵的秩至少是 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$, 有第二个秩不等式. 这里我们无法判断这是不是一个大矩阵的列极大线性无关组, 因此可以严格取到大于号. 一个例子是 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 其中 $A=(0),B=(0),C=(1)$.
9. 由矩阵满秩知 $(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$ 和 $(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$ 线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证 $x_3+k(x_1-x_2)=x_1+t(x_2-x_3),x=a,b,c$ 对于 k,t 是否有解. 由于矩阵满秩, 合并同类项知该方程系数必须满足 $t+1=k-1=t+k=0$, 因此 $t=-1,k=1$. 从而两直线相交.
10. (1) 容易证明对 $\forall f(x),g(x)\in W\Rightarrow af(x)+bg(x)\in W$, 因此是线性子空间. (2) 令 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$, $f(1)=0\Rightarrow a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=0$, 因此 $f(x)=a_1(x-1)+a_2(x^2-1)+\cdots+a_{n-1}(x^{n-1}-1)$. 下面我们只需证明 $x-1,x^2-1,\cdots,x^{n-1}-1$ 确实是 W 的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以 $\dim W=n-1$.
11. 注意到 $W_i=\{X\in K^n:(a_{i1},\cdots,a_{in})X=0\},i=1,2,\cdots,n$ 都是 K^n 的 $n-1$ 维子空间, 由于有限个 $n-1$ 维子空间张不满 n 维全空间, 从而存在 $X_0\in K^n\backslash(W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_n)$, 此时 AX_0 的每个分量都不为零.

3　线性方程组解的结构

3.1　问题

1. 已知矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5]$ 与 $\begin{bmatrix}2&1&2&5&3\\2&2&4&8&7\\3&1&2&6&3\end{bmatrix}$ 的行向量组等价, 且 $\alpha_2=(2,1,2,1)^T,\alpha_5=(7,3,7,3)^T$. 又知方程组 $AX=\beta$ 的一个解为 $X=(1,1,-1,0,1)^T$, 这里 $\beta=(7,5,7,4)^T$. (1) 写出矩阵 A 及其行简化阶梯形矩阵 J; (2) 求 A 行空间的一组基, 并确定当 a,b 为何值时, $(5,3,6,a,b)$ 落在 A 的行空间里; (3) 求方程组 $AX=\beta$ 的解空间.

2. 讨论下列方程组的解空间: (1) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=0 \\ x_{n-1}+x_n=0 \end{cases}$.

3. 讨论下列方程组的解空间: (1) $\begin{cases} 8x_1+6x_2+3x_3+2x_4=5 \\ -12x_1-3x_2-3x_3+3x_4=-6 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4=3 \\ \lambda x_1+4x_2+x_3+4x_4=2 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} -6x_1+8x_2-5x_3-x_4=9 \\ -2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1 \\ -3x_1+5x_2+4x_3+2x_4=3 \\ -3x_1+7x_2+17x_3+7x_4=\lambda \end{cases}$.

4. A 是 $m\times n$ 矩阵, b 是 $m\times 1$ 矩阵. 证明线性方程组 $A^TAx=A^Tb$ 总有解.

5. A,B 都是 $m\times n$ 矩阵, 线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解. 问 A,B 的列向量组是否等价、行向量组是否等价.

6. 证明: $AX=0$ 有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.

7. 设线性方程组 $AX=b$ 中矩阵 A 的秩等于矩阵 $B=\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.

8. 设 A,B 是数域 K 上的 n 阶方阵, $AX=0, BX=0$ 分别有 l,m 个线性无关的解向量. 证明: (1) $(AB)X=0$ 至少有 $\max(l,m)$ 个线性无关的解向量; (2) 如果 $l+m>n$, 那么 $(A+B)X=0$ 必有非零解; (3) 如果 $AX=0$ 和 $BX=0$ 没有公共的非零解向量, 且 $l+m=n$, 那么 K^n 中的任一向量 α 都可以唯一的分解为 $\alpha=\beta+\gamma$, 其中 β,γ 分别是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的解向量.

9. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha\neq 0, A^k\alpha=0$, 那么 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\operatorname{rank}(A^n)=\operatorname{rank}(A^{n+1})$.

10. 判断方的整系数线性方程组如果模任一素数的意义下都有解, 那么它是否在整数环上有解.

11. 给定复系数线性方程组 $AX=b$, 其中 A 满秩. 假设矩阵 $I+A$ 的每行元素的模的和小于 q, 其中 $0<q<1$. 设 X_0 是 $\mathbb{C}^n$ 中任一向量, 归纳定义 $X_{m+1}=(A+I)X_m-b$. 证明序列 X_m 收敛到方程组 $AX=b$ 的解.

12. 已知矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等. 记 A 的解空间为 W, B 的列空间为 V. 证明 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(AB)$ 当且仅当 $V\cap W=\{0\}$.

3.2 解答

1. (1) 容易得到 $\alpha_1-\alpha_3=(-2,1,-2,0)^T$, 并求出题给定的矩阵行空间一组基是 $(1,0,0,1,0),(0,1,2,3,0),(0,0,0,0,1)$. 考虑其前三个分量, 由能被这组基表出知 $\alpha_3=2\alpha_2=(4,2,4,2)^T$, $\alpha_1=(2,3,2,2)^T$, 从而 $\alpha_4=(8,6,8,3)$. 因此

$$A=\begin{bmatrix} 2&2&4&8&7 \\ 3&1&2&6&3 \\ 2&2&4&8&7 \\ 2&1&2&5&3 \end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix} 1&0&0&1&0 \\ 0&1&2&3&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

(2) 一组基为 $(1,0,0,1,0),(0,1,2,3,0),(0,0,0,0,1)$. 考察各系数, 知当 $a=14, b\in\mathbb{R}$ 时, 该向量落在 A 的行空间里.

(3) 先求出 $AX=0$ 的解, 即 $(\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5)X=0$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 线性无关. 通解为 $(t_1,3t_1-2t_2,t_2,-t_1,0)^T$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ 是自由变元. 因此 $AX=\beta$ 的通解是 $(t_1+1,3t_1-2t_2+1,t_2-1,-t_1,1)^T$, 写成解空间是 $\{t_1(1,3,0,-1,0)^T+t_2(0,-2,1,0,0)^T+(1,1,-1,0,1)^T : t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$.

2. (1) 通解是 $x_1=8x_3-7x_4, x_2=-6x_3+5x_4$, 写成解空间是 $\{k_1(8,-6,1,0)^T+k_2(-7,5,0,1)^T : k_1,k_2\in\mathbb{R}\}$.

(2) $n=3m$ 或 $3m+1$ 时只有零解. $n=3m+2$ 时有非零解, 通解是 $x_{3i}=0, x_{3i+1}=-x_n, x_{3i+2}=x_n, i=1,2,\cdots,m$, 写成解空间是 $\{k(-1,1,0,-1,1,0,\cdots,0,-1,1) : k\in\mathbb{R}\}$.

3. (1) 利用高斯消元得到 $\begin{cases} 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4=3 \\ 4x_2+x_3+4x_4=1 \\ -3\lambda x_3+8\lambda x_4=16-7\lambda \end{cases}$, 因此 $\lambda\neq 0$ 时有解, 通解是 $x_1=\dfrac{1}{\lambda}, x_3=\dfrac{9\lambda-16}{5\lambda}-\dfrac{8}{5}x_2, x_4=$

$\dfrac{4-\lambda}{5\lambda}-\dfrac{3}{5}x_2$, 写成解空间是 $\{k(0,5,-8,-3)^T+\left(\dfrac{1}{\lambda},0,\dfrac{9\lambda-16}{5\lambda},\dfrac{4-\lambda}{5\lambda}\right)^T:k\in\mathbb{R}\}$.

(2) 利用高斯消元得到 $\begin{cases}-2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1\\-2x_2-13x_3-5x_4=3\\0=2\lambda\end{cases}$, 因此 $\lambda=0$ 时有解, 通解是 $x_1=-\dfrac{1}{2}(7+19x_3+7x_4), x_2=-\dfrac{1}{2}(3+13x_3+5x_4)$, 写成解空间是 $\{k_1(-19,-13,2,0)^T+k_2(-7,-5,0,2)^T+\left(-\dfrac{7}{2},-\dfrac{3}{2},0,0\right)^T:k_1,k_2\in\mathbb{R}\}$.

4. 先证明 $\operatorname{rank}(A^TA)=\operatorname{rank}(A)$. 首先显然 $\operatorname{rank}(A^TA)\le\operatorname{rank}(A)$, 其次 $A^TAx=0\Rightarrow x^TA^TAx=0\Rightarrow\|Ax\|_2^2=0\Rightarrow Ax=0\Rightarrow\operatorname{Ker}(A^TA)\subset\operatorname{Ker}(A)\Rightarrow\operatorname{rank}(A^TA)\ge\operatorname{rank}(A)$. 接着, 由于 $\operatorname{rank}(A^TA)\le\operatorname{rank}(A^TA,A^Tb)\le\operatorname{rank}(A^T)=\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^TA)$ 知系数矩阵和增广矩阵秩相等, 因此方程有解.

5. 第 1 个结论不对, 比如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$. 第 2 个结论对. 若解空间 0 维, 则 A,B 均列满秩, 也都可以通过初等行列变换得到其简化阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix}I_{n\times n}\\0_{(m-n)\times n}\end{pmatrix}$, 因此等价. 其余情况, 设解空间 $r\ge1$ 维, 任取 $AX=0$ 的一个基础解系 $X_1,\cdots,X_r$ 构成 $n\times r$ 矩阵 C. 考虑线性方程组 $C^TX=0$, 其解空间维数为 $n-r=\operatorname{rank}(A)$. 由于 $C^TA^T=0$, 因此 A 的行空间是该解空间的一个子空间. 由于它们维数相等, 因此 A 的行空间就是该解空间. 同理 B 的行空间也是该解空间.

6. 必要性. 设 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 是强非零解, 则 $\alpha_i=\sum_{k\ne i}\left(-\dfrac{x_k}{x_i}\right)\alpha_k,\forall i=1,\cdots,n$.

充分性. 不妨设 $\alpha_i=\sum_{k\ne i}t_{ki}\alpha_k,\forall i=1,\cdots,n$, 则记 $T=\begin{pmatrix}1&-t_{12}&-t_{13}&\cdots&-t_{1,n-1}&-t_{1,n}\\-t_{21}&1&-t_{23}&\cdots&-t_{2,n-1}&-t_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-t_{n-1,1}&-t_{n-1,2}&-t_{n-1,3}&\cdots&1&-t_{n-1,n}\\-t_{n1}&-t_{n2}&-t_{n3}&\cdots&-t_{n,n-1}&1\end{pmatrix}$, 从而 $AT=0$. 由于 T 的任一主对角元均不为零, 从而存在 X_0 使得 TX_0 每个分量都不为零, 此即该强非零解.

7. (1) $\operatorname{rank}(A)\le\operatorname{rank}(A,b)\le\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A&b\\b^T&0\end{bmatrix}=\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(A)$, 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.

(2) 不成立, 考虑 $\begin{cases}x_1+2x_2=1\\3x_1+4x_2=3\end{cases}$, $\operatorname{rank}(A)=2$, 而 $\operatorname{rank}(B)=3$.

8. (1) $n-\operatorname{rank}(AB)\ge\max(n-\operatorname{rank}(A),n-\operatorname{rank}(B))\ge\max(l,m)$.

(2) $\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\le n-l+n-m<n$, 因此 $(A+B)X=0$ 必有非零解.

(3) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 分别是 $AX=0,BX=0$ 线性无关的解. 考虑方程 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_l\alpha_l+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_m\beta_m=0$, 则 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_l\alpha_l=-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_m\beta_m$ 是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解. 由题意知其必然为零向量, 又由 $\{\alpha_i\}_{i=1}^l,\{\beta_j\}_{j=1}^m$ 线性无关性知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_l=\mu_1=\cdots=\mu_m=0$. 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 整体线性无关. 又由于 $l+m=n$, 因此他们是 K^n 一组基, 从而任一向量都可唯一被它们线性表出, 相应的被表出的两部分也就对应了 β 和 γ. 唯一性可由 $\alpha=\beta_1+\gamma_1=\beta_2+\gamma_2\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\gamma_2-\gamma_1$ 是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解 $\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\gamma_2-\gamma_1=0$ 得到.

9. (1) 设 $\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1=0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2=0$, 以此类推知线性无关.

(2) 显然 $A^nX=0\Rightarrow A^{n+1}X=0$. 若存在 $A^{n+1}\alpha=0$ 但 $A^n\alpha\ne0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^n\alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\operatorname{rank}(A^n)=\operatorname{rank}(A^{n+1})$.

10. 不一定, 一个反例是 $4x=2$.

11. 记 $\|X\|$ 为向量 X 元素模的最大值 (l_∞ 范数). 则 $\|X_n-X_m\|=\|(A+I)X_{n-1}-(A+I)X_{m-1}\|=\|(A+I)(X_{n-1}-X_{m-1})\|<q\|X_{n-1}-X_{m-1}\|$, 因此由 Cauchy 收敛原理知 X_n 在 l_∞ 范数意义下收敛 (有限维线性空间所有范数等价). 记极限值为 X_∞, 两边求极限知 $X_\infty=(A+I)X_\infty-b\Leftrightarrow AX_\infty=b$.

12. 注意到 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(AB)\Leftrightarrow\operatorname{Ker}(B)=\operatorname{Ker}(AB)$.

"$\Rightarrow$": 考虑 $x\in V\cap W$, 则可设 $x=By$. 由于 $ABy=Ax=0$, 因此 $y\in\operatorname{Ker}(AB)=\operatorname{Ker}(B)\Rightarrow By=0\Rightarrow x=0$.

“$\Leftarrow$”: 显然 $\mathrm{rank}(AB)\le\mathrm{rank}(B)$. 若 $\mathrm{rank}(AB)<\mathrm{rank}(B)$, 则 $\mathrm{Ker}(AB)\ne\mathrm{Ker}(B)$, 即 $\exists x\in\mathrm{Ker}(AB)$ 但 $x\notin\mathrm{Ker}(B)$, 此时 $Bx\ne 0$, 但是 $Bx\in V\cap W$.

4 行列式 (1)

4.1 问题

1. 计算行列式: (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2\\ 2 & x+1 & -4\\ -2 & -4 & x+1\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 0\\ -12 & -4 & 3 & 4\\ 3 & x & 5 & 7\end{vmatrix}$.

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$.

3. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & \cos\phi_1 & \cos 2\phi_1 & \cdots & \cos(n-1)\phi_1\\ 1 & \cos\phi_2 & \cos 2\phi_2 & \cdots & \cos(n-1)\phi_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cos\phi_n & \cos 2\phi_n & \cdots & \cos(n-1)\phi_n\end{vmatrix}$.

4. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta\\ & & & \gamma & \alpha\end{vmatrix}\in\det(\mathbb{R}^{n\times n})$, 其中 $\alpha^2-4\beta\gamma>0$.

5. (1) 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b\\ c & a & b & \cdots & b\\ c & c & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c & c & c & \cdots & a\end{vmatrix}$; (2) 计算行列式 $E_n=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b\\ c & a_2 & b & \cdots & b\\ c & c & a_3 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c & c & c & \cdots & a_n\end{vmatrix}$.

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}$.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n\end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n\ne 0$.

8. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}\in\det(\mathbb{R}^{n\times n})$.

9. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n\times n})$.

4.2 解答

1. (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2+16+16-4(x+1)-16(x-2)-4(x+1) = x^3-27x+54$;

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

2. 用第一列减去第 i 列的 b_i 倍, $i=2,3,\cdots,n$, 得到 $\begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^n a_ib_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1-\sum\limits_{i=2}^n a_ib_i.$

3. 由高中三角函数知识知 $\cos k\theta = 2^{k-1}\cos^k\theta + P_{k-2}(\cos\theta)$, 其中 P_{k-2} 是 $k-2$ 次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cos\phi_1 & \cos^2\phi_1 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_1 \\ 1 & \cos\phi_2 & \cos^2\phi_2 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\phi_n & \cos^2\phi_n & \cdots & \cos^{n-1}\phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1\le j<i\le n}(\cos\phi_i-\cos\phi_j).$$

4. 若 $\beta\gamma=0$, 则行列式为 α^n. 对于一般情形, 按第一行展开得到 $D_n=\alpha D_{n-1}-\beta\gamma D_{n-2}$, 且有初值条件 $D_1=\alpha, D_2=\alpha^2-\beta\gamma$, 然后用数列的特征值和特征公式设 $D_n = A\left(\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}\right)^n + B\left(\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}{2}\right)^n$, 代入 $n=1,2$ 解出 A 和 B, 得到 $D_n = \dfrac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}}$.

5. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c-a & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a & a-b \end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知 $D_n = b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1}+(a-b)D_{n-1}$. 初始条件是 $D_1=a$, 因此知 $D_n = \dfrac{b(a-c)^n-c(a-b)^n}{b-c}$.

(2) 按第 n 列拆项, 得 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & a_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b+(a_n-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + (a_n-b)E_{n-1} = b(a_1-c)(a_2-$

$c)\cdots(a_{n-1}-c)+(a_n-b)E_{n-1}$; 按第 n 列拆项 (或由对称性), 得 $E_n=c(a_1-b)(a_2-b)\cdots(a_{n-1}-b)+(a_n-c)E_{n-1}$. 两式联立得 $E_n=\dfrac{bf(c)-cf(b)}{b-c}$, 其中 $f(x)=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$.

6. 法 1(拆项法): $\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}+$ $\begin{vmatrix}x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}$, 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五项: $\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}x_1^2&0&0&0\\x_2x_1&1&0&0\\x_3x_1&0&1&0\\x_4x_1&0&0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&x_1x_2&0&0\\0&x_2^2&0&0\\0&x_3x_2&1&0\\0&x_4x_2&0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0&x_3x_1&0\\0&1&x_3x_2&0\\0&0&x_3^2&0\\0&0&x_3x_4&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0&0&x_4x_1\\0&1&0&x_4x_2\\0&0&1&x_4x_3\\0&0&0&x_4^2\end{vmatrix}$, 原行列式是 $1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

法 2(加边法): $\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4\\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4\\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4\\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2\end{vmatrix}$, 然后用第 $i+1$ 行减去第 1 行的 x_i 倍, $i=1,2,3,4$, 得到 $\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

7. 采用第 6 题的法 1(拆项法), 最后剩下 $n+1$ 项: $\begin{vmatrix}-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0\\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}-a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n\end{vmatrix}$, $\cdots$, 它们分别是 $(-1)^na_1a_2\cdots a_n,(-1)^{n-1}x_1a_2\cdots a_n,(-1)^{n-1}a_1x_2\cdots a_n,\cdots$, 整理得到原行列式为 $(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n\left[\left(\sum_{i=1}^n\dfrac{x_i}{a_i}\right)-1\right]$.

8. 先计算 $n=1$ 时, $D_1=\cos\alpha$; $n=2$ 时, $D_2=\cos 2\alpha$; 因此可以猜测 $D_n=\cos n\alpha$. 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 $D_{n+1}=2\cos\alpha D_n-D_{n-1}=\cos(n+1)\alpha$, 知该假设成立.

9. 法 1: 将第 1 行至第 $n-1$ 行减去第 n 行, 并提出各行和各列公因子, 得

$$D_n=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix};$$

再将第 1 列至第 $n-1$ 列减去第 n 列, 并提出各行和各列的公因子, 得

$$D_n=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

按第 n 行展开得到递推式 $D_n=\dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)}D_{n-1}$, 并直接计算出 D_2, 得

$$D_n=\frac{\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}.$$

法 2: 若 $a_i=a_j$ 或 $b_i=b_j(i\neq j)$, 即两行 (或两列) 相同, 则 $D_n=0$. 因此 D_n 含有因子 $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$. 将 D_n 的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得 $D_n=\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}D_n'$. 显然 D_n' 也含有上述因子. 另一方面, 由于 D_n' 的 (i,j) 元为 $\prod\limits_{k\neq j}(a_i+b_k)$, 所以每一个 a_i 在 D_n' 的展开式中的次数均为 $n-1$, 因此可设 $D_n=\lambda\prod\limits_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$. 为确定常数 λ, 我们不妨令 $a_i=-b_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 此时 D_n' 为对角行列式, 且 $D_n=\prod\limits_{i\neq j}(a_i-a_j)=\prod\limits_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\Rightarrow\lambda=1$. 因此可得一样的结果.

5 行列式 (2)

5.1 问题

1. 当 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2=7\\ 5x_1+(4+\lambda)x_2=6\end{cases}$ 有唯一解, 此时用 Cramer 法则求解之.

2. 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 且对于任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数. 证明或否定: (1) $f(x)$ 系数都是有理数; (2) $f(x)$ 系数都是整数.

3. 设数域 K 上 $m\times n$ 矩阵 H 的列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 证明: H 的任意 $s(s\le\min(m,n))$ 列都线性无关当且仅当齐次线性方程组 $HX=0$ 的任一非零解的非零分量数目大于 s.

4. 设 $n\ge 3, f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是次数 $\le n-2$ 的多项式, 证明: 对 $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, 行列式 $\begin{vmatrix}f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1)\\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n)\end{vmatrix}\equiv 0$, 并举例说明条件 "次数 $\le n-2$" 不可去.

5. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量组, 其中 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关. 证明存在无穷多个实数 k, 使得向量组 $\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_r+k\beta_r$ 线性无关.

6. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1\end{vmatrix}$. 你能求出行列式 $E_n=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1\end{vmatrix}$ 的通式吗?

7. 计算行列式 $D_1=\begin{vmatrix}0 & a & b & c\\ -a & 0 & d & e\\ -b & -d & 0 & f\\ -c & -e & -f & 0\end{vmatrix}$ 和 $D_2=\begin{vmatrix}0 & 741 & 886 & 114 & 514\\ -741 & 0 & 1919 & 810 & 2002\\ -886 & -1919 & 0 & 520 & 1314\\ -114 & -810 & -520 & 0 & 220\\ -514 & -2002 & -1314 & -220 & 0\end{vmatrix}$.

8. 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,\forall 1\le i\le n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明若 $a_{ii}>0,\forall 1\le i\le n$, 则 $\det(A)>0$.
9. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 (1) $a_{ii}>0,\forall 1\le i\le n$; (2) $a_{ij}<0,\forall 1\le i\neq j\le n$; (3) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=0,\forall 1\le j\le n$. 求矩阵 A 的秩.
10. 计算矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&2&6&3\\2&2&4&8&7\\2&2&4&8&7\\2&1&2&5&3\end{pmatrix}$ 的秩 r, 并计算其 r 阶非零子式的个数.
11. 试确定所有 3 阶 $(0,1)$ 行列式 (即所有元素只能是 0 或 1) 的最大值, 并给出证明和取到最大值的一个构造.
12. 设 W 是矩阵空间 $M_n(K)$ 的一个子空间. 证明: 若 $\dim(W)\ge n^2-n+1$, 则 W 中至少包含一个满秩的矩阵.

5.2 解答

1. 由 Cramer 法则, $\begin{vmatrix}2&-3\\5&4+\lambda\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq-\dfrac{23}{2}$ 时有唯一解. $x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}7&-3\\6&4+\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-3\\5&4+\lambda\end{vmatrix}}=\dfrac{7\lambda+46}{2\lambda+23},x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}2&7\\5&6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-3\\5&4+\lambda\end{vmatrix}}=\dfrac{-23}{2\lambda+23}$.

2. (1) 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m(a_m\neq 0)$. 取 $x_k=k$ 代入, 得到线性方程组 $\begin{cases}a_0+a_1x_0+\cdots+a_mx_0^m=f(x_0),\\a_0+a_1x_1+\cdots+a_mx_1^m=f(x_1),\\\cdots\\a_0+a_1x_m+\cdots+a_mx_m^m=f(x_m).\end{cases}$,
其系数行列式是 Vandermonde 行列式不为 0, 因此由 Cramer 法则其有唯一解 $a_i=\dfrac{D_i}{D},i=0,1,\cdots,m$. 由于 D_i 的元素均为整数, 因此 a_i 是有理数. (2) 结论不对, 反例是 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$.
3. 必要性. 若存在非零解 $(0,\cdots,0,c_{i_1},0,\cdots,0,c_{i_l},0,\cdots,0)$, 其中 $c_{i_1},\cdots,c_{i_l}$ 不全为 0 且 $l\le s$, 则意味着 $c_{i_1}\alpha_{i_1}+\cdots+c_{i_l}\alpha_{i_l}=0$, 从而他们线性相关, 矛盾.
充分性. 若存在 $l(l\le s)$ 列 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_l}$ 线性相关, 即存在不全为 0 的数 $c_{i_1},\cdots,c_{i_l}$ 使得 $c_{i_1}\alpha_{i_1}+\cdots+c_{i_l}\alpha_{i_l}=0$, 则 $(0,\cdots,0,c_{i_1},0,\cdots,0,c_{i_l},0,\cdots,0)$ 是一个非零分量数不大于 s 的非零解, 矛盾.
4. 不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同. 考虑 $F(x)=\begin{vmatrix}f_1(x)&f_2(x)&\cdots&f_n(x)\\f_1(a_2)&f_2(a_2)&\cdots&a_n(a_2)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f_1(a_n)&f_2(a_n)&\cdots&f_n(a_n)\end{vmatrix}$, 这是一个至多 $n-2$ 次多项式, 有至少 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 这 $n-1$ 个不同的根, 因此必恒等于 0. 若删去条件 "次数 $\le n-2$", 则可令 $f_k(x)=x^{k-1}$, 此时原行列式构成 Vandermonde 行列式, 只要 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不同就不为 0.
5. 将 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$, 并任意选择 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$. 行列式 $|(\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_n+k\beta_n)|$ 是一个关于 k 的至多 n 次多项式, 其等于零至多只有 n 个解 (令 $k\to\infty$ 知此多项式不恒为零), 且在该行列式不等于零时 $\alpha_1+k\beta_1,\cdots,\alpha_r+k\beta_r$ 线性无关, 因此存在无穷多个实数 k.
6. 把后 $n-1$ 列加到第一列, 提出公因子 $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, 用第 $(1,1)$ 元消去同列其他元素, 再按第一列展开得到 $n-1$ 阶行列式:

$$D_n=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&4&5&\cdots&1&2\\1&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\0&-1&-1&\cdots&-1&-1\\0&n-2&-2&\cdots&-2&-2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&2&2&\cdots&2-n&2-n\\0&1&1&\cdots&1&1-n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\end{vmatrix}.$$

用所得 $n-1$ 阶行列式的第 $(1,1)$ 元消去同行的其他元素, 再按第一行展开得到 $n-2$ 阶上三角行列式:

$$D_n=\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}-n & \cdots & -n & -n\\ & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & -n & -n\\ & & & -n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

7. 前者是偶数阶斜对称矩阵. 若 $a=0$. 则按第 1、2 行展开, 得到 $D_1=(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix}b & c\\ d & e\end{vmatrix}*\begin{vmatrix}-b & -d\\ -c & -e\end{vmatrix}=(be-cd)^2$. 若 $a\neq 0$, 则将第 1 行的 $\dfrac{d}{a}$ 倍和第 2 行的 $\dfrac{b}{a}$ 倍加到第 3 行上, 将第 1 行的 $\dfrac{e}{a}$ 倍和第 2 行的 $\dfrac{c}{a}$ 倍加到第 4 行上, 得到 $D_2=\begin{vmatrix}0 & a & b & c\\ -a & 0 & d & e\\ 0 & 0 & 0 & f+\dfrac{cd}{a}-\dfrac{be}{a}\\ 0 & 0 & -f+\dfrac{be}{a}-\dfrac{cd}{a} & 0\end{vmatrix}$. 然后按第 1、2 行展开, 得到 $D_1=(af-be+cd)^2$.
后者是奇数阶斜对称矩阵, 因此行列式为 $D_2=0$ (因为 $|D_2|=|D_2^T|=|-D_2|=(-1)^{2k+1}|D_2|\Rightarrow|D_2|=0$).

8. 我们已经知道主对角占优矩阵满秩. 考虑函数 $A(t)=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t\\ a_{21}t & a_{22} & a_{23}t & \cdots & a_{2n}t\\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33} & \cdots & a_{3n}t\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$. 那么任意 $t\in[0,1]$, $A(t)$ 都是主对角阵占优矩阵, 因此 $\det(A(t))\neq 0$. 由于 $\det(A(0))>0$, 由函数连续性知 $\det(A(1))>0$, 此即原命题.

9. 首先由条件 (3) 知 $|A|=0$, 因此 $\operatorname{rank}(A)\le n-1$. 其次考虑 A 中元素 a_{11} 的余子式 M_{11}, 由条件 (1)(2) 知其严格主对角占优, 因此 $M_{11}>0$. 这意味着 $\operatorname{rank}(A)=n-1$.

10. 先求出其行简化阶梯矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 知其秩为 3, 且有 5 个列极大线性无关组 (第 5 列必选, 第 2 列、第 3 列至多选一个, 其余随意); 观察原矩阵易知有 2 个行极大无关组 (第 2 行、第 3 行至多选一个, 其余随意); 因此有 $2\times 5=10$ 个 3 阶非零子式.

11. 按第 1 行展开, 得到 $D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix}a_{23} & a_{21}\\ a_{33} & a_{31}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\le 3$. 下面证明 $D\neq 3$. 若不然, 则必有 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=1$, 且 $\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{23} & a_{21}\\ a_{33} & a_{31}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=1$. 前两个行列式为 1 可以得到 $a_{22}=a_{33}=1, a_{23}=a_{31}=1$, 而此时 $\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}=a_{21}a_{32}-1\le 0$, 矛盾. 因此 $D\le 2$, 一个构造是 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2$.

12. 将 $M_n(K)$ 的矩阵平铺开看成是 n^2 维的行向量, 并取该子空间的一组基 $A_1,\cdots,A_r$. 把这 r 个行向量在 $\text{axis}=0$ 方向拼成 $r\times n^2$ 的矩阵, 并可得到其简化阶梯型矩阵 J. 注意到 J 的行向量 $B_1,\cdots,B_r$ 也是该子空间的一组基, 这组基的线性组合能使得矩阵在某 r 个位置取到任意的值. 下面用归纳法证明: 任取 $n\times n$ 矩阵 A 中的 n^2-n+1 个位置,

我们总可以在这些位置填上 0 或 1, 使得不管矩阵 A 其余的 $n-1$ 个位置填什么数, A 的行列式总为 ± 1. 假设命题对 $n-1$ 级的方阵成立, 考察 n 阶方阵. 由抽屉原理, 总有一行 (不妨设是第 i 行), 该行的 n 个元素都可任意填选. 再选一列 (不妨设是第 j 列), 该列中存在某个位置不能任意填选. 取 (i,j) 元为 1, $(i,\neq j)$ 元为 0, 那么在 (i,j) 元的余子式中最多只有 $n-2$ 个元素不能任选, 由归纳假设知总可在子阵中能任意填选的地方填上 0 或 1, 使得 (i,j) 元的余子式取 ± 1. 在此填法下, n 阶方阵 A 的行列式是 (i,j) 元的代数余子式, 即 ± 1. 由数学归纳法知命题得证.

6 期中复习, 矩阵乘法

6.1 问题

1. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个线性无关组. 证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关当且仅当 $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\{0\}$.

2. 求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

3. A 是 n 阶矩阵, $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$ 是 n 维列向量, 且 $|A|=a, |A-\alpha\alpha^T|=b$, 求 $|A+2\alpha\alpha^T|$.

4. 设 A_{ij} 是行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中 (i,j) 元的代数余子式. 证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n & y \end{vmatrix}=Dy-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j$.

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{N}_+$, 证明 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 能被 $2!3!\cdots(n-1)!$ 整除.

6. 设数域 K 上的 n 阶方阵 A 的第 (i,j) 元是 a_i-b_j. 求 $\det(A)$, 并计算当 $n\geq 2$ 且 $a_1\neq a_2, b_1\neq b_2$ 时 $AX=0$ 的解空间维数和一组基.

7. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 且 $|a_{ii}a_{jj}|>\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\sum_{l\neq j}|a_{jl}|$ 对任意 $1\leq i\neq j\leq n$ 成立. 证明 $\det(A)\neq 0$.

8. 设 A,B 是幂等矩阵 (即 $A^2=A, B^2=B$), 且 $I-A-B$ 满秩, 证明 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

9. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha\neq 0, A^k\alpha=0$, 那么 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\mathrm{rank}(A^n)=\mathrm{rank}(A^{n+1})$.

10. 记矩阵 $H=(a_{ij})$ 中 a_{ij} 表示从城市 i 到 j 的航班数. (1) 解释 H^k 的 (i,j) 元的含义; (2) 设 $H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?

11. 求 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 A, 其中 $a_{ij}=\dfrac{\alpha_i^n-\beta_j^n}{\alpha_i-\beta_j}, i,j=1,2,\cdots,n$.

12. 设矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 非平凡. 证明: 若矩阵 A 的每一个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=a_{ij}$, 则 $|A|^{n-2}=1$.

13. 设已知 $|\overrightarrow{OA}|=2, |\overrightarrow{OB}|=3, |\overrightarrow{OC}|=4, |\overrightarrow{AB}|=2, |\overrightarrow{BC}|=3, |\overrightarrow{AC}|=4$, 求混合积的绝对值 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|$.

6.2 解答

1. "$\Rightarrow$": 若 $x=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=\mu_1\beta_1+\cdots+\beta_s\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle$, 则 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_s\beta_s=0\Rightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_r=\mu_1=\cdots=\mu_s=0\Rightarrow x=0$.

"$\Leftarrow$": 考虑 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots+\beta_s=0$, 这意味着 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_s\beta_s\in\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle\cap\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\{0\}\Rightarrow\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0, \mu_1\beta_1+\cdots+\mu_s\beta_s=0$. 由两组向量 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r, \{\beta_j\}_{j=1}^s$ 各自内部的线性无关性知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=\mu_1=\cdots=\mu_s=0$, 因此整体也线性无关.

2. 利用拆项大法, 注意若有两列成比例则行列式为 0. 从而最后只会剩下 $n+1$ 个行列式: $\begin{vmatrix} x_1y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3y_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \cdots,$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1y_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1}y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_ny_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 相加得到原行列式为 $1+\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$.

3. 考虑函数 $f(x)=|A+x\alpha\alpha^T| = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}$, 因此是线性函数. 由 $f(0)=a, f(-1)=b$ 知 $f(x)=a+(a-b)x$, 因此 $f(2)=3a-2b$.

4. 按最后一行展开, 得到 $\text{LHS} = Dy + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i+1}x_iD_i$, 其中 D_i 是把 D 中第 i 列删去, 最后一列补上 $(x_1,\cdots,x_n)^T$ 得到的行列式. 再按最后一列对所有 D_i 展开, 得到 $D_i = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}(-1)^{i+j}A_{ij}x_j$, 直接代入得到 RHS.

5. 注意到 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1-1) & \cdots & a_1(a_1-1)\cdots(a_1-n+2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & \cdots & a_2(a_2-1)\cdots(a_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n(a_n-1) & \cdots & a_n(a_n-1)\cdots(a_n-n+2) \end{vmatrix}$(利用初等列变换, 用后面的列加减前面的列), 再将第 k 列提取公因子 $(k-1)!, k=3,4,\cdots,n$ 即可.

6. (1) $n=1$ 时 $|A|=a_1-b_1$, $n=2$ 时 $|A|=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$. $n>2$ 时由于 $A = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$, 因此 $\text{rank}(A) \le 2$, 从而 $|A|=0$.

(2) $n=2$ 时 $|A| \ne 0$, 因此解空间只有零解, 维数为 0, 基是空集. $n>2$ 时, 由于 $\text{rank}(A) \le 2$ 且显然 $A\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} \ne 0$, 因此 $\text{rank}(A)=2$, 解空间维数是 $n-2$. 因此只需解方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} X = 0$ 即可 (这个分解后的系数矩阵秩也为 2, 因此同解). 直接计算得到一组基为 $\eta_i = \left(\frac{b_i-b_2}{b_2-b_1}, \frac{b_1-b_i}{b_2-b_1}, 0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{\text{第}i\text{个}}, 0\cdots, 0\right)^T, i=3,4,\cdots,n$.

7. 反证法. 假设 $\det(A)=0$, $AX=0$ 有非零解 $(c_1,\cdots,c_n)^T$. 若仅有 $c_i \ne 0$, 则 A 的第 i 列全零, 与条件矛盾. 下设第 i,j 个分量不为 0, 且 $|c_i| \ge |c_j| \ge |c_k|, \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}\backslash\{i,j\}$. 考察第 i 个和第 j 个等式, 有 $|a_{ii}c_i|\cdot|a_{jj}c_j| = |\sum_{k\ne i} a_{ik}c_k| \cdot |\sum_{l \ne j} a_{jl}c_l| \le |c_j||\sum_{k\ne i} a_{ik}| \cdot |c_i| \sum_{l\ne j}|a_{jl}| \Rightarrow |a_{ii}a_{jj}| \le \sum_{k\ne i}|a_{ik}| \sum_{l \ne j}|a_{jl}|$, 矛盾.

8. $A(I-A-B)=-AB$, 因此 $\text{rank}(A)=\text{rank}(A(I-A-B))=\text{rank}(AB)$, 同理 $\text{rank}(B)=\text{rank}(AB)$.

9. (1) 设 $\lambda_1\alpha + \lambda_2 A\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1 = 0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2=0$, 以此类推知线性无关.
(2) 显然 $A^nX=0 \Rightarrow A^{n+1}X=0$. 若存在 $A^{n+1}\alpha=0$ 但 $A^n\alpha \ne 0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^n\alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\text{rank}(A^n)=\text{rank}(A^{n+1})$.

10. (1) 从 $a_{ij}^2 = \sum_s a_{is}a_{sj}$ 可以看出 H^k 的 (i,j) 元表示从 i 到 j 乘坐恰 k 次航班有多少种乘坐方式. (2) $1\to3, 1\to4, 2\to1, 2\to5, 3\to2, 3\to4, 4\to1, 5\to2, 5\to3$, 分别有 $1,1,1,3,1,3,3,1,2$ 种航班选择; $2\to4, 4\to2$ 都要倒 3 次, 是最多的.

11. 利用 $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$ 及行列式乘法规则 $|AB|=|A||B|$, 知

$$|A|=\begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_1^2&\cdots&\alpha_1^{n-1}\\1&\alpha_2&\alpha_2^2&\cdots&\alpha_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\alpha_n&\alpha_n^2&\cdots&\alpha_n^{n-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_1^{n-1}&\beta_2^{n-1}&\cdots&\beta_n^{n-1}\\\beta_1^{n-2}&\beta_2^{n-2}&\cdots&\beta_n^{n-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\beta_1&\beta_2&\cdots&\beta_n\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le j<i\le n}(\alpha_i-\alpha_j)(\beta_i-\beta_j).$$

12. 首先容易看出 $|A|=\sum\limits_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}=\sum\limits_{i=1}^n a_{ij}^2>0$. 其次 $|A|^2=|AA^T|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix}|A|&0&\cdots&0\\0&|A|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&|A|\end{vmatrix}=|A|^n\Rightarrow|A|^{n-2}=1.$

13. $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|=\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}^T\\\overrightarrow{OB}^T\\\overrightarrow{OC}^T\end{vmatrix}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}^T\\\overrightarrow{OB}^T\\\overrightarrow{OC}^T\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}&\overrightarrow{OB}&\overrightarrow{OC}\end{vmatrix}}=\sqrt{\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OA}&\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OB}&\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OC}\\\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OA}&\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OB}&\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OC}\\\overrightarrow{OC}^T\overrightarrow{OA}&\overrightarrow{OC}^T\overrightarrow{OB}&\overrightarrow{OC}^T\overrightarrow{OC}\end{vmatrix}}$. 由题意 $\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OA}=4,\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OB}=9,\overrightarrow{OC}\overrightarrow{OC}=16,\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}[\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^T(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{AB}^2)=\frac{9}{2},\overrightarrow{OA}^T\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{AC}^2)=2,\overrightarrow{OB}^T\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{BC}^2)=8$, 从而 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$.

7 可逆矩阵, 分块矩阵

7.1 问题

1. 证明可逆的上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵.

2. 计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&\cdots&n\\&1&2&\cdots&n-1\\&&1&\cdots&n-2\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&1\end{bmatrix}$ 的逆.

3. A 是 n 阶可逆矩阵, α,β 是 n 维列向量, 且矩阵 $A+\alpha\beta^T$ 可逆, 证明 $(A+\alpha\beta^T)^{-1}=A^{-1}-\dfrac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}$.

4. 计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1+a_n\end{bmatrix}$ 的逆, 其中 $a_i>0,\forall i=1,2,\cdots,n$.

5. A 是 n 阶方阵, 试根据 $\mathrm{rank}(A)$ 的取值讨论 $\mathrm{rank}(A^*)$, 其中 A^* 是它的伴随矩阵.

6. 求与任意可逆矩阵乘法可交换的矩阵构成的集合.

7. A 是 n 阶方阵 $(n\ge3)$, $A^3=O$, 证明矩阵 $M=\begin{bmatrix}I&A\\A&I\end{bmatrix}$ 可逆, 并求其逆.

8. 已知 $I_{m\times m}-A_{m\times n}B_{n\times m}$ 可逆, 证明 $I_{n\times n}-B_{n\times m}A_{m\times n}$ 也可逆并求其逆矩阵. 进一步, 证明两者行列式相等.

9. 矩阵 $A_{m\times m},B_{m\times n},C_{n\times m},D_{n\times n}$ 满足 A 和 $E:=D-CA^{-1}B$ 可逆. 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ 也可逆并求其逆.

10. A 是 n 阶方阵, 证明 $\mathrm{rank}(A-I)+\mathrm{rank}(A^2+A+I)=n$ 当且仅当 $A^3=I$.

11. A,B 是 n 阶方阵, 且满足 $\mathrm{rank}(I-AB)+\mathrm{rank}(I+BA)=n$, 证明或否定: A 是可逆矩阵.

12. A,B,C,D 都是 n 阶方阵, $AC=CA$, $AD=CB$, 且 A 可逆. 求矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的秩.

7.2 解答

1. 将单位矩阵拼在原矩阵右边, 其行变换只需不断用上面的行加减下面的行, 此操作只会将单位矩阵变成上三角矩阵.

2. 记 $J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A=I+2J+\cdots+nJ^{n-1}$. 由于 $A(I-2J+J^2)=0$, 因此 $A^{-1}=I-2J+J^2$.

3. 注意到 $A+\alpha\beta^T=A(I+A^{-1}\alpha\beta^T)$, 因此 $(A+\alpha\beta^T)^{-1}=(I+A^{-1}\alpha\beta^T)^{-1}A^{-1}=(I-A^{-1}\alpha(1+\beta^TA^{-1}\alpha)^{-1}\beta^T)A^{-1}=A^{-1}-\dfrac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}$.

4. 利用上第 3 题结论,

$$A=\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_n)(I_n+\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix})$$

$$\Rightarrow A^{-1}=(I_n-(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix})\operatorname{diag}(\frac{1}{a_1},\cdots,\frac{1}{a_n}).$$

5. 当 $\operatorname{rank}(A)=n$ 时, 由于 $AA^*=|A|I$, 从而 A^* 可逆, 因此 $\operatorname{rank}(A^*)=n$. 当 $\operatorname{rank}(A)=n-1$ 时, 由于 $AA^*=0$, 且 $\dim(\operatorname{Ker}(A))=n-\operatorname{rank}(A)=1$, 又有 A 中存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 不全零, $\operatorname{rank}(A^*)=1$. 当 $\operatorname{rank}(A)\le n-2$ 时, A 中不存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 全零, 从而 $\operatorname{rank}(A^*)=0$.

6. 先验证初等矩阵 $P(j,i(1))$, 即 $AP(j,i(1))=P(j,i(1))A$, 两边同时减去矩阵 A 得到 $AE_{ij}=E_{ij}A\Rightarrow a_{ii}=a_{jj},a_{ij}=0,\forall i\neq j$, 因此只能是数量矩阵, 其与所有矩阵都可交换.

7. 设 $P=\begin{bmatrix} I & O \\ -A & I \end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix}$, 从而 $PMQ=\begin{bmatrix} I & O \\ O & I-A^2 \end{bmatrix}$. $A^3=O\Rightarrow(PMQ)^{-1}=\begin{bmatrix} I & O \\ O & I+A^2 \end{bmatrix}\Rightarrow M^{-1}=Q\begin{bmatrix} I & O \\ O & I+A^2 \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} I+A^2 & -A \\ -A & I+A^2 \end{bmatrix}$.

8. $(I-BA)(I+B(I-AB)^{-1}A)=I-BA+B(I-AB)^{-1}A-BAB(I-AB)^{-1}A=I-BA+B(I-AB)(I-AB)^{-1}A=I$, 因此 $(I-BA)^{-1}=I+B(I-AB)^{-1}A$.

由于 $\begin{pmatrix} I-AB & A \\ O & I \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} I & A \\ O & I-BA \end{pmatrix}$, 两边取行列式知 $|I-AB|=|I-BA|$.

9. $\begin{pmatrix} A & B & I & O \\ C & D & O & I \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} A & B & I & O \\ O & D-CA^{-1}B & -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} I & A^{-1}B & A^{-1} & O \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}$ $\begin{pmatrix} I & O & A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} I & O & A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & I & -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}$.

10. 由裴蜀定理 (辗转相除法), 存在多项式 f,g 使得 $f(x)(x-1)+g(x)(x^2+x+1)=1$, 即 $f(A)(A-I)+g(A)(A^2+A+I)=I$. 从而利用分块初等行列变换,

$$\begin{bmatrix} A-I & O \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} A-I & f(A)(A-I) \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ I-A^3 & O \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} O & I \\ A^3-I & O \end{bmatrix}.$$

从而 $\operatorname{rank}(A-I)+\operatorname{rank}(A^2+A+I)=n+\operatorname{rank}(A^3-I)$, 因此原命题成立.

11. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & O \\ O & I+BA \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I+AB & O \\ O & I \end{bmatrix},$$

从而知 $\operatorname{rank}(I+BA)=\operatorname{rank}(I+AB)$. 因此原条件等价于 $\operatorname{rank}(I-AB)+\operatorname{rank}(I+AB)=n$, 由上一小题的类似结论知 $(I-AB)(I+AB)=0 \Rightarrow (AB)^2=I$, 因此 A 可逆.

12. 利用分块初等变换, 得 $\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$. 由于 $\operatorname{rank}(D-CA^{-1}B)=\operatorname{rank}(A(D-CA^{-1}B))=0$, 因此 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)=n$.

8 正交矩阵, 线性映射

8.1 问题

1. 记 $A_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, B_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, 试证明 $A_\theta A_\omega=A_{\theta+\omega}, B_\theta B_\omega=A_{\theta-\omega}, A_\theta B_\omega=B_{\theta+\omega}=B_\omega A_{-\theta}$, 并解释 A_θ, B_θ 作为 $\mathbb{R}^2$ 上线性变换的几何含义.

2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的 QR 分解.

3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\operatorname{Im}A$ 和 $\operatorname{Ker}A$ 的一个基和维数.

4. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 所有顺序主子式都大于 0, 所有非主对角元都小于 0. 证明 A^{-1} 的每个元素都大于 0.

5. 秩为 $r(>0)$ 的对称矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 证明 A 至少有一个 r 阶主子式不为 0, 且所有不等于 0 的 r 阶主子式都同号.

6. (1) $ABCD$ 是中心为原点、边与坐标轴平行的单位正方形. 求所有 $\mathbb{R}^2$ 上所有保持该正方形不变的线性变换, 写出它们的矩阵, 并证明它们可被两个变换生成. (2) 试求出保持中心为原点的正十二面体不变的线性变换的个数.

7. 设 $\alpha_1=(1,0,1,0)^T, \alpha_2=(1,1,0,1)^T, \alpha_3=(0,1,0,2)^T$. (1) 求 α_3 在 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 上的正交投影; (2) 求 α_3 到 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 的距离; (3) 求到 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ 的正交投影算子 (用矩阵表示).

8. $\beta\in\mathbb{R}^n$ 是单位向量 ($\|\beta\|_2=1$), $P=I-\beta\beta^T$, $A=I-2\beta\beta^T$. (1) 证明 P 是幂等对称矩阵; (2) 证明 A 是实对称正交矩阵, 且满足 $A^2=I$; 计算 $\det(A)$, 并探究 A 的几何性质.

9. A,B 是 n 维线性空间上的线性变换, $AB=BA$, 证明或否定 $\operatorname{rank}A^2+\operatorname{rank}B^2\geq 2\operatorname{rank}(AB)$.

10. A,B 是幂等变换, 证明 $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Ker}B$ 当且仅当 $AB=A, BA=B$.

11. A 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明存在 $r\in\mathbb{N}$ 使得对于 $\forall s\in\mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}A^r=\operatorname{Ker}A^{r+s}$.

12. V_1,V_2,V_3 都是数域 F 上的有限维线性空间, $\varphi: V_1\to V_2$, $\psi: V_1\to V_3$ 是两个线性映射. 证明 ψ 可以写成 $\psi=\sigma\varphi$, 其中 $\sigma: V_2\to V_3$ 是线性映射的充要条件是 $\operatorname{Ker}\varphi\subset\operatorname{Ker}\psi$.

8.2 解答

1. A_θ 是逆时针旋转 θ 角, B_θ 是按逆时针方向的 $\dfrac{\theta}{2}$ 角做镜面反射. 有了几何含义, 验证这些矩阵乘法也就很简单了.

2. 直接利用 Schmidt 正交化得到 $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{7\sqrt{102}}{102} & -\frac{19\sqrt{119}}{357} & \frac{\sqrt{7}}{21}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{102}}{102} & \frac{\sqrt{119}}{51} & -\frac{\sqrt{7}}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{102}}{17} & \frac{25\sqrt{119}}{357} & \frac{2\sqrt{7}}{21}\\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{2\sqrt{102}}{51} & \frac{2\sqrt{119}}{119} & \frac{\sqrt{7}}{7}\end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix}\sqrt{6} & \frac{5\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{102}}{6} & \frac{3\sqrt{102}}{34} & \frac{3\sqrt{102}}{34}\\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{119}}{17} & \frac{4\sqrt{119}}{119}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{7}}{7}\end{pmatrix}$.

3. 利用行变换求简化阶梯型得 $A\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&4\\0&1&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 可以看出 $\mathrm{Im}A$ 的一个基是前两列, 维数是 2. $AX=0$ 的一个基础解系是 $\eta_1=(1,1,-1,0)^T,\eta_2=(1,4,0,-1)^T$, 这是 $\mathrm{Ker}A$ 的一个基, 维数是 2.

4. 用数学归纳法. $n=1$ 时显然成立. 假设 $n-1$ 时命题为真, 那么现在来看 $A_n=\begin{pmatrix}A_{n-1}&\alpha\\ \beta^T&a_{nn}\end{pmatrix}$. 由顺序主子式大于 0 知 A_{n-1} 可逆, 且由 $\begin{pmatrix}I_{n-1}&0\\-\beta^TA_{n-1}^{-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{n-1}&\alpha\\ \beta^T&a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{n-1}&\alpha\\0&a_{nn}-\beta^TA_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}$ 知 $a_{nn}-\beta^TA_{n-1}^{-1}\alpha>0$. 计算得到 $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{n-1}^{-1}+A_{n-1}^{-1}\alpha(a_{nn}-\beta^TA_{n-1}^{-1}\alpha)^{-1}\beta^TA_{n-1}^{-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha(a_{nn}-\beta^TA_{n-1}^{-1}\alpha)^{-1}\\ -(a_{nn}-\beta^TA_{n-1}^{-1}\alpha)^{-1}\beta^TA_{n-1}^{-1} & (a_{nn}-\beta^TA_{n-1}^{-1}\alpha)^{-1}\end{pmatrix}$. 依次验证: $a_{nn}-\beta^TA_{n-1}^{-1}\alpha>0$, 并利用归纳假设知 A_{n-1}^{-1} 每个元素大于 0, $A_{n-1}^{-1}\alpha$ 和 $\beta^TA_{n-1}^{-1}$ 每个元素小于 0. 定睛一看, A^{-1} 每个元素也都大于 0 了.

5. (1) 取 A 的某个列极大线性无关组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$, 对应的行极大线性无关组为 $\alpha_{i_1}^T,\cdots,\alpha_{i_r}^T$. 下证 $A\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_r\\i_1,\cdots,i_r\end{pmatrix}\neq 0$. 这是因为矩阵 $(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r})$ 的秩也是 r, 而其第 $i_1,\cdots,i_r$ 行作为 $\alpha_{i_1}^T,\cdots,\alpha_{i_r}^T$ 的缩短组可以表出该矩阵的其他所有行向量, 因此构成一个极大行线性无关组.

(2) 存在可逆矩阵 P,Q 使得 $A=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$. 由于 A 对称, 因此 $A=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}=Q^T\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}P^T$, 即是

$$P^{-1}Q^T\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}QP^{-T}.$$

对应分块 $P^{-1}Q^T=\begin{pmatrix}H_1&H_2\\H_3&H_4\end{pmatrix}$, 代入得到 $H_1^T=H_1,H_3=O$, 从而 $Q=P\begin{pmatrix}H_1&H_2\\O&H_4\end{pmatrix}$, $A=P\begin{pmatrix}H_1&O\\O&O\end{pmatrix}P^T$, 且 H_1 是对称满秩矩阵. 因此由 Binet-Cauchy 定理,

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}k_1,\cdots,k_r\\k_1,\cdots,k_r\end{pmatrix}&=\sum_{1\le v_1<\cdots<v_r\le n}P\begin{pmatrix}k_1,\cdots,k_r\\v_1,\cdots,v_r\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}H_1&O\\O&O\end{pmatrix}P^T\right]\begin{pmatrix}v_1,\cdots,v_r\\k_1,\cdots,k_r\end{pmatrix}\\&=\sum_{1\le v_1<\cdots<v_r\le n}P\begin{pmatrix}k_1,\cdots,k_r\\v_1,\cdots,v_r\end{pmatrix}\sum_{1\le\mu_1<\cdots<\mu_r\le n}\begin{pmatrix}H_1&O\\O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1,\cdots,v_r\\\mu_1,\cdots,\mu_r\end{pmatrix}P^T\begin{pmatrix}\mu_1,\cdots,\mu_r\\k_1,\cdots,k_r\end{pmatrix}\\&=\sum_{1\le v_1<\cdots<v_r\le n}P\begin{pmatrix}k_1,\cdots,k_r\\v_1,\cdots,v_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_1&O\\O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1,\cdots,v_r\\1,\cdots,r\end{pmatrix}P^T\begin{pmatrix}1,\cdots,r\\k_1,\cdots,k_r\end{pmatrix}\\&=P\begin{pmatrix}k_1,\cdots,k_r\\1,\cdots,r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_1&O\\O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,\cdots,r\\1,\cdots,r\end{pmatrix}P^T\begin{pmatrix}1,\cdots,r\\k_1,\cdots,k_r\end{pmatrix}\\&=\left[P\begin{pmatrix}k_1,\cdots,k_r\\1,\cdots,r\end{pmatrix}\right]^2|H_1|,\end{aligned}$$

于是所有不为 0 的主子式都与 $|H_1|$ 同号.

6. (1) 只需确定基的像. e_1 可以有 4 种选择, e_2 在 e_1 的基础上有 2 种选择, 因此有 8 种: $\begin{bmatrix}\pm1&0\\0&\pm1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&\pm1\\\pm1&0\end{bmatrix}$. 它们可由逆时针旋转 90° 和关于 y 轴的反射这两个变换生成, 即 $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

(2) 只需确定其中任意三个点 (对应的向量) 的像, 这里我们考虑共面的某三个点. 因为有 20 个顶点, 每个顶点又有 3 个邻结点, 和这 2 个点具有原始度量关系的点又有 2 个, 因此有 $20 \times 3 \times 2 = 120$ 个线性变换.

7. $\text{span}\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ 的一组标准正交基是 $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ 和 $\beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$. (1) 投影是 $= (\alpha_3, \beta_1)\beta_1 + (\alpha_3, \beta_2)\beta_2 = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$. (2) 距离是 $|(0,1,0,2) - (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5})| = |(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})| = \frac{\sqrt{35}}{5}$. (3) 向量 $\alpha = (x, y, z, w)$ 的投影是 $(\alpha, \beta_1)\beta_1 + (\alpha, \beta_2)\beta_2 = (\frac{3x+y+2z+w}{5}, \frac{x+2y-z+2w}{5}, \frac{2x-y+3z-w}{5}, \frac{x+2y-z+2w}{5})$, 因此算子是

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. (1) $P^2 = (I - \beta\beta^T)(I - \beta\beta^T) = I - 2\beta\beta^T + \beta(\beta^T\beta)\beta^T = I - \beta\beta^T = P$, 对称性显然.

(2) 对称性显然, 且 $A^TA = A^2 = I - 4\beta\beta^T + 4\beta\beta^T\beta\beta^T = 1$, 因此正交. $|A| = |I - 2\beta\beta^T| = 1 - 2\beta^T\beta = -1$. 注意到 P 是在 $\langle\beta\rangle^\perp$ 上的投影, 因此 A 是关于 $\langle\beta\rangle^\perp$ 作镜面反射.

9. 结论不对. 可取 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} J & \\ & J \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} J & I \\ O & J \end{pmatrix}$. $A^2 = O, B^2 = \begin{pmatrix} O & 2J \\ O & O \end{pmatrix}, AB = BA = \begin{pmatrix} O & J \\ O & O \end{pmatrix}$.

10. “$\Rightarrow$”: $\forall\alpha$, $A(A\alpha - \alpha) = 0 \Rightarrow B(A\alpha - \alpha) = 0 \Rightarrow BA = B$. 同理 $AB = A$.

“$\Leftarrow$”: $\forall\alpha \in \text{Ker}A$, $B\alpha = BA\alpha = 0 \Rightarrow \text{Ker}A \subset \text{Ker}B$. 同理 $\text{Ker}B \subset \text{Ker}A$.

11. 先证明存在 $r \in \mathbb{N}$ 使得 $\text{Ker}A^r = \text{Ker}A^{r+1}$. 显然有无穷递升链 $\dim(\text{Ker}A) \le \dim(\text{Ker}A^2) \le \dim(\text{Ker}A^3) \le \cdots$, 注意到这条链有上界 n, 因此必然存在 r 使得 $\dim(\text{Ker}A^r) = \dim(\text{Ker}A^{r+1})$, 这意味着 $\text{Ker}A^r = \text{Ker}A^{r+1}$. 现在开始推广到 $r+s$: 由于 $A^{r+2}\alpha = 0 \Leftrightarrow A^{r+1}(A\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^r(A\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^{r+1}\alpha = 0$, 以此类推知 $\text{Ker}A^{r+s} = \text{Ker}A^r, \forall s \in \mathbb{N}$.

12. 必要性是显然的, 下面证明充分性. 取 $\text{Ker}\varphi$ 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 并扩充成 $\text{Ker}\psi$ 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$, 又再扩充成 V_1 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s, \gamma_1, \cdots, \gamma_t$. 显然 $\varphi(\beta_1), \cdots, \varphi(\beta_s), \varphi(\gamma_1), \cdots, \varphi(\gamma_t)$ 是 $\text{Im}\varphi$ 的一组基, 并又可扩充成 V_2 的一组基 $\varphi(\beta_1), \cdots, \varphi(\beta_s), \varphi(\gamma_1), \cdots, \varphi(\gamma_t), \delta_1, \cdots, \delta_l$. 现在, 对于任意 $\beta = \sum_{i=1}^{s} a_i\varphi(\beta_i) + \sum_{j=1}^{t} b_j\varphi(\gamma_j) + \sum_{k=1}^{l} c_k\delta_k \in V_2$, 只需定义 $\sigma(\beta) = \sum_{j=1}^{t} b_j\psi(\gamma_j)$ 即可.

9 特征值, 特征向量

9.1 问题

1. 矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 诱导了 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 A. (1) 写出 A 在基 $\alpha_1 = (1,1)^T, \alpha_2 = (1,-1)^T$ 下的矩阵; (2) 求在变换 A 下保持不动的直线; (3) $\alpha = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2$, 求 $A\alpha$ 在基 α_1, α_2 下的坐标.

2. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量. 你能求出任意一个三阶矩阵的特征值和特征向量吗?

3. 3 阶矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 对应的特征向量是 $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (-1,0,1)^T$, 求 A^m. 你能推广到 e^A 吗?

4. A, B 是 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵. 证明 AB 与 BA 有相同的非零特征值, 且这些特征值的几何重数和代数重数也相同.

5. 利用矩阵方法求出斐波拉契数列的通项公式.

6. A 是第一类 3 阶正交矩阵. (1) 证明 $\lambda = 1$ 是 A 的一个特征值. (2) 设 α_1 是 $\lambda = 1$ 的一个单位特征向量, 将其扩充为一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 证明 $\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 仍是一组标准正交基. (3) 已知 $A\alpha_2 = (\cos\theta)\alpha_2 + (\sin\theta)\alpha_3$, 求 $A\alpha_3$. (4) 探究 A 的几何性质.

7. A 是第二类 3 阶正交矩阵. (1) 证明 $\lambda = -1$ 是 A 的一个特征值. (2) 设 α_1 是 $\lambda = -1$ 的一个单位特征向量, 将其扩充为一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 证明 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. (3) 探究 A 的几何性质.

8. 证明任一复矩阵一定相似于一个上三角矩阵.

9. 求 n 阶循环矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ 的行列式.
10. A,B,C 分别是 $n\times n, m\times m, n\times m$ 矩阵, 其中 $n>m$, $\mathrm{rank}(C)=m$, 且 $AC=CB$. 证明 $|\lambda I_m-B|$ 整除 $|\lambda I_n-A|$.
11. A,B 分别是 m,n 阶方阵, 且无公共特征值. 求解矩阵方程 $AX=XB$(你可以设定一些自由变元来表示答案).
12. n 维空间 V 上的线性变换 A 有 $n+1$ 个特征向量, 且其中任意 n 个线性无关. 求所有可能的 A 构成的集合.
13. A,B 是二阶实方阵, 且满足 $A^2+B^2=O$. 证明 $\det(AB-BA)\le 0$.

9.2 解答

1. (1) 矩阵是 $(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. (2) 保持不动的直线即特征向量, 先解 $|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda=1,4$, 然后求得特征向量分别是 $\beta_1=(1,-1)^T,\beta_2=(2,1)^T$, 即这两个向量所对应的直线保持不变. (3) 根据 (1), 坐标为 $(4y_1,y_1+y_2)$.
2. 先解 $|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda=1$(重根)$,10$, 对应的特征向量分别是 $(2,-1,0)^T,(2,0,1)^T,(1,2,-2)^T$. 一元三次实方程在实数范围内必有解, 剩下两个解要么都是实数要么是共轭复数.
3. $A^m=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \lambda_3^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0 & \lambda_1^m-\lambda_3^m\\ 0 & \lambda_2^m & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^m\end{pmatrix}$.
4. WLOG $m\ge n$. 由 $|I-AB|=|I-BA|$ 知 $|\lambda I-AB|=\lambda^m|I-\lambda^{-1}AB|=\lambda^m|I-\lambda^{-1}BA|=\lambda^{m-n}|\lambda I-BA|$, 因此非零特征值的代数重数相同. 另一方面, 若 $AB\mu=\lambda\mu$ 对于某个特征值 λ 有解空间 $\langle\mu_1,\cdots,\mu_d\rangle$(基), 则 $\langle B\mu_1,\cdots,B\mu_d\rangle$ 属于 $BAX=\lambda X$ 的解空间, 且它们线性无关 $(k_1B\mu_1+\cdots+k_dB\mu_d=0\Rightarrow k_1\mu_1+\cdots+k_d\mu_d\in\mathrm{Ker}B\Rightarrow\lambda(k_1\mu_1+\cdots+k_d\mu_d)=AB(k_1\mu_1+\cdots+k_d\mu_d)=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_d=0)$. 同理反过来也成立, 因此它们的解空间维数相同, 即非零特征值的几何重数相同.
5. 先写出递推公式 $\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ a_{n-2}\end{pmatrix}$, 做特征值分解 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2} & \\ & \frac{1-\sqrt5}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{-1}$, 由于 $\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\ a_0\end{pmatrix}$, 利用特征值分解可推导 $a_n=A(\frac{1+\sqrt5}{2})^n+B(\frac{1-\sqrt5}{2})^n$. 代入 $n=0,1$ 知 $A=\frac{1}{\sqrt5},B=-\frac{1}{\sqrt5}$, 因此 $a_n=\frac{1}{\sqrt5}(\frac{1+\sqrt5}{2})^n-\frac{1}{\sqrt5}(\frac{1-\sqrt5}{2})^n$.
6. (1) $|I-A|=-|A-I|=-|A||I-A^{-1}|=-|I-A^T|=-|I-A|\Rightarrow|I-A|=0$.
(2) 正交矩阵诱导等距同构, 因此 $\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$(即 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$) 仍是标准正交基.
(3) 原题可转化为已知 A 的前两列为 $(1,0,0)^T,(0,\cos\theta,\sin\theta)^T$, 去补全第三列. 显然是 $(0,-\sin\theta,\cos\theta)^T$, 因此 $A\alpha_3=-(\sin\theta)\alpha_2+(\cos\theta)\alpha_3$.
(4) 绕过原点、线向为 α_1 的直线旋转 θ 角.
7. (1) $|I+A|=|A||I+A^{-1}|=-|I+A^T|=-|I+A|\Rightarrow|-I-A|=0$.
(2) 原题可转化为已知 A 的前两列为 $(-1,0,0)^T,(0,\cos\theta,\sin\theta)^T$, 去补全第三列. 过程与 6(3) 类似.
(3) 绕过原点、线向为 α_1 的直线旋转 θ 角, 再关于平面 $\langle\alpha_1\rangle^\perp$ 作镜面反射.
8. 对矩阵级数用数学归纳法. $n=1$ 时显然为真. 假设 $n-1$ 阶复矩阵必然相似于一个上三角矩阵, 考虑 n 阶矩阵 A. 设 λ_1 是某个特征值, α_1 是对应的某个特征向量. 将 α_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 并记 $P_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. 那么

$$P_1^{-1}AP_1=(P_1^{-1}A\alpha_1,\cdots,P_1^{-1}A\alpha_n)=(\lambda_1P_1^{-1}\alpha_1,\cdots,P_1^{-1}A\alpha_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha^T\\ 0 & B\end{pmatrix},$$

其中 $\alpha\in\mathbb{C}^{n-1}$, B 是 $n-1$ 级复矩阵. 由归纳假设, 存在 P_2 使得 $P_2^{-1}BP_2$ 是上三角矩阵. 定义 $P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}$, 易

知 P 可逆, 且满足

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2^{-1}\end{pmatrix}P_1^{-1}AP_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha^TP_2\\ 0 & P_2^{-1}BP_2\end{pmatrix},$$

此时 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵.

9. 记 $J=\begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\\ 1 & & & & \end{pmatrix}$, 则 $A=a_1I+a_2J+a_3J^2+\cdots+a_nJ^{n-1}$. 注意到 J 的特征多项式是 λ^n-1, 因此其特征值为 $w_k=e^{\frac{2k\pi i}{n}},k=0,1,\cdots,n-1$, 从而 A 的特征值是 $\sum\limits_{i=1}^n a_iw_k^{i-1}$, 这意味着 $|A|=\prod\limits_{k=1}^n(\sum\limits_{i=1}^n a_iw_k^{i-1})$.

10. 由于 C 列满秩, 因此存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $C=P\begin{pmatrix}I_m\\ O\end{pmatrix}$, 从而 $AC=CB$ 可写为 $(P^{-1}AP)P^{-1}C=P^{-1}CB$. 对 $P^{-1}AP$ 作分块 $\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$, 其中 A_1 是 m 阶方阵, 代入上式知 $A_1=B,A_3=O$. 于是 $|\lambda I_n-A|=|\lambda I_n-P^{-1}AP|=\begin{vmatrix}\lambda I_m-B & -A_2\\ O & \lambda I_{n-m}-A_4\end{vmatrix}=|\lambda I_m-B||\lambda I_{n-m}-A_4|$, 此即整除关系.

11. 方程只有零解. 假设存在 $AC=CB$, 并且 $\mathrm{rank}(C)=r\geq 1$. 则存在 m,n 阶可逆矩阵 P,Q 使得 $PCQ=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$. 由 $AC=CB$ 知 $(PAP^{-1})(PCQ)=(PCQ)(Q^{-1}BQ)$, 并作分块 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix},Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$, 代入计算得到 $A_1=B_1,B_2=O,A_3=O$. 因此 A,B 的特征多项式分别为 $|\lambda I_m-A|=|\lambda I_m-PAP^{-1}|=|\lambda I_r-A_1||\lambda I_{m-r}-A_4|,|\lambda I_n-B|=|\lambda I_n-Q^{-1}BQ|=|\lambda I_r-A_1||\lambda I_{n-r}-B_4|$. 这与无公共特征值矛盾.

12. A 只能是数乘变换. 考虑特征向量 $\eta_0,\cdots,\eta_n$ 对应于特征值 $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$. 考虑 $\eta_0=a_1\eta_1+\cdots+a_n\eta_n$, 显然 $a_1,\cdots,a_n$ 均不为 0(否则剔除它对应的 η_i 后剩余的 n 个向量线性相关). 两边同时左乘 A 知 $a_1(\lambda_1-\lambda_0)\eta_1+\cdots+a_n(\lambda_n-\lambda_0)\eta_n=0\Rightarrow a_1(\lambda_1-\lambda_0)=\cdots=a_n(\lambda_n-\lambda_0)=0\Rightarrow\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_n$. 这表明其是数乘变换.

13. 注意到 $(A+\mathrm{i}B)(A-\mathrm{i}B)=A^2+B^2-\mathrm{i}(AB-BA)$, 因此 $\det(AB-BA)=-\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)$. 若 $A+\mathrm{i}B$ 有特征值 λ_1,λ_2, 则 $A-\mathrm{iB}$ 有特征值 $\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2}$(两边取共轭), 从而 $-\det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)=-\lambda_1\lambda_2\overline{\lambda_1\lambda_2}=-|\lambda_1\lambda_2|^2\leq 0$.

10 矩阵的相似与对角化

10.1 问题

1. 对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$, 找到正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $A=PDP^T$.

2. 分块矩阵 $\begin{bmatrix}A & C\\ O & B\end{bmatrix}$ 可对角化, 其中 A,B 是方阵. 问是否有 A,B 都可对角化?

3. 方阵 A,B 可对角化，问是否有 AB 可对角化? 若加上 A,B 可交换条件呢?

4. 证明: 在复数域上, (1) 若矩阵 A,B 可交换, 则 A,B 有公共的复特征向量; (2) 若矩阵 A,B 可交换, 则存在可逆复矩阵 U 使得 $U^{-1}AU$ 和 $U^{-1}BU$ 同为上三角矩阵.

5. $A=\begin{bmatrix}A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ 0 & A_2 & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_n\end{bmatrix}$ 是分块上三角矩阵, 对角块为 n_i 阶上三角矩阵 $A_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & * & \cdots & *\\ 0 & \lambda_i & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{bmatrix}$, 且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异. 证明 A 可对角化当且仅当 $A_i=\lambda_iI_{n_i}$.

6. n 阶实矩阵 A,B 在复数域上相似, 问它们是否在实数域上相似.

7. A, B 是 n 阶复矩阵, $\mathrm{rank}(AB-BA) \le 1$, 证明 A, B 可同时上三角化.
【编者注】与第 4(2) 题相比, 本题条件有所放松 (秩要求从 0 放宽到 1).
8. 考虑数域 F 上的 n 阶方阵构成的线性空间 $M_n(F)$. 定义线性运算 $\sigma(A) = A^T$, 求出它的特征值和对应的特征子空间, 并证明它可以对角化.
9. n 维向量 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)^T, \beta = (b_1, \cdots, b_n)^T$, $A = \alpha\beta^T$, 且 $a_1 b_1 \ne 0$. 证明 A 可对角化的充要条件是 $\alpha^T \beta \ne 0$.
10. n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{tr}(A)$.
11. (Roth 定理) $A_{m\times m}, B_{n\times n}, C_{m\times n}$. 证明: 若存在矩阵 $X_{m\times n}$ 使得 $AX - XB = C$, 则矩阵 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ 与矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 相似. 该命题的逆命题是否也成立?
12. 集合 S 由一些可对角化的 n 阶方阵构成, 且其中任意两个矩阵都可交换. 问是否有 S 中所有矩阵都可同时对角化.
【编者注】本题是第 3 题的一个推广.

10.2 解答

1. $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = -3$(重根),6, 对应的一组标准正交特征向量是 $(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)^T, (\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, -\frac{\sqrt{5}}{3})^T, (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$.
因此 $D = \mathrm{diag}(-3,-3,6), P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.
2. 由题意, 存在可逆分块矩阵 $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}$ 使得 $A\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & D_2 \end{bmatrix}$, 其中 D_1, D_2 是对角矩阵. 这得到 $BU_3 = U_3 D_1, BU_4 = U_4 D_2$. 取一个 $[U_3, U_4]$ 的列极大线性无关组知 B 可对角化. 对于 A, 注意到只需证明 A^T 可对角化, 对原矩阵取转置然后类似证明即可.
3. (1) 有反例 $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(2) 可以对角化. 不妨设 A 是对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1 I_1, \cdots, \lambda_s I_s)$, 并将 B 按照这种格式分块 $\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{ss} \end{bmatrix}$, 计算 $AB = BA$ 知 $B_{ij} = 0, \forall i \ne j$. 由第二题结论知 B 可对角化 $\Rightarrow$ 每个 B_{ii} 均可对角化, 因此 AB 可对角化.
【编者注】本题也说明了 A, B 可同时对角化. 因为可将 B_{ii} 对角化时对应的基矩阵 U_{ii} 按对角线拼接成大矩阵 U, 在此矩阵对应的基下 A, B 都是对角阵.
4. (1) 记 A 对应于特征值 λ 的特征子空间为 V_λ. $\forall \alpha \in V_\lambda$, $AB\alpha = BA\alpha = \lambda B\alpha \Rightarrow B\alpha$ 也是 A 属于 λ 的特征向量 $\Rightarrow V_\lambda$ 是 B 的不变子空间. 从而只需取 $B|_{V_\lambda}$ 的一个特征向量即可.
(2) 对空间维数用数学归纳法. 考虑 A, B 的某个公共单位特征向量 α_1, 扩充成一组标准正交基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 在这组基下 A, B 的矩阵分别是 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_1 & D_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$. 它们可交换, 因此 A_1, B_1 也可交换. 可定义 $\tilde{A}_1 = P_{\langle \alpha_2, \cdots, \alpha_n \rangle} A_1|_{\langle \alpha_2, \cdots, \alpha_n \rangle}$, 其中 $P_{\langle \alpha_2, \cdots, \alpha_n \rangle}$ 是平行于 $\langle \alpha_1 \rangle$ 的投影算子, 然后类似定义 $\tilde{B}_1$. 因此由归纳假设存在 $\langle \alpha_2, \cdots, \alpha_n \rangle$ 上的一组基 $\beta_2, \cdots, \beta_n$ 使得 A_1, B_1 为上三角矩阵. 此时, 在基 $\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下, A, B 都是上三角矩阵.
5. 容易验证特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 每个特征值分别为 n_i 重. 由于 A 可对角化当且仅当特征值的对应几何重数也为 n_i 重, 而这当且仅当 $A_i = \lambda_i I_{n_i}$(考虑 $\mathrm{rank}(\lambda_i I_{n_1+n_2+\cdots+n_n} - A)$ 即可).
6. 是. 设 $(Q_1 + \mathrm{i}Q_2)A = B(Q_1 + \mathrm{i}Q_2)$, 且它们都是实矩阵. 那么 $Q_1 A = BQ_1, Q_2 A = BQ_2$. 由于 $|Q_1 + \lambda Q_2| = 0$ 至多只有有限多个解 ($Q_2 = 0$ 是平凡情形), 从而存在 λ_0 使得 $Q_0 := Q_1 + \lambda_0 Q_2$ 可逆, 此时 $A = Q_0^{-1} B Q_0$, 因此实相似.
7. 只需找到公共的低维不变子空间, 剩下的可对维数归纳. 不妨设 $\det A = 0$, 否则只需将 A 换成 $A - \lambda_A I$, 其中 λ_A 是 A 的某个特征值. 若 $\mathrm{Ker}A$ 不是 B 的不变子空间, 则存在 $\alpha \in \mathrm{Ker}A$ 使得 $B\alpha \notin \mathrm{Ker}A$. 此时 $(AB - BA)\alpha = AB\alpha \ne 0$, 这也意味着 $\mathrm{Im}(AB - BA) = \mathrm{span}\{AB\alpha\}$. 从而 $\forall \beta \in \mathbb{C}^n$, $(AB - BA)\beta = \lambda_\beta AB\alpha \Rightarrow BA\beta = AB(\beta - \lambda_\beta \alpha)$, 这表明 $\mathrm{Im}A$ 是 B 的不变子空间. 因此 $\mathrm{Ker}A, \mathrm{Im}A$ 中必有 B 的不变子空间, 由 $\det A = 0$ 知除非 $A = 0$, 否则此问题已降维.

8. 注意到 $\sigma^2(A)=A$. 从而有 2 个特征值 ±1, 对应的特征子空间为 $\mathrm{span}\{E_{11},\cdots,E_{nn},E_{ij}+E_{ji},\cdots\}(1\le i\ne j\le n)$ 和 $\mathrm{span}\{E_{ij}-E_{ji},\cdots\}(1\le i\ne j\le n)$. 它们维数加起来是 n^2, 因此可以对角化.
9. 容易验证 $\mathrm{rank}(A)=n-1$, 且 $|\lambda I-A|=\lambda^{n-1}|\lambda*1-\alpha^T\beta|\Rightarrow A$ 有特征值 $0((n-1)$重$)$ 和 $\alpha^T\beta$, 且特征值 0 的几何重数是 $n-1$. 因此若 $\alpha^T\beta\ne0$, 正好有 n 个特征向量; 若 $\alpha^T\beta=0$, 只有 $n-1$ 个特征向量.
10. 注意到 $A^2-A=O$, 用类似于第 9 次习题课第 5 题的办法知 A 可对角化且有特征值 $0,1$. 因此 A 相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(I_r,O_{n-r})$. 由于相似矩阵具有相同的秩和迹, 因此 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{tr}(A)$.
11. (1) $\begin{bmatrix}I&X\\O&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&C\\O&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&-X\\O&I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}$.
(2) 成立. 记 $V=F^{(m+n)\times(m+n)}$, 构造 V 上的线性变换 $\varphi_1(Y):=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}Y-Y\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$, $\varphi_2(Y):=\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}Y-Y\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$. 由于 $\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}$ 相似, 因此存在可逆矩阵 $T\in V$ 使得 $T^{-1}\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$. 简单计算得 $\varphi_2(Y)=T\varphi_1(T^{-1}Y)$, 这表明 $Y\in\mathrm{Ker}\varphi_2\Leftrightarrow T^{-1}Y\in\mathrm{Ker}\varphi_1$, 即 $\dim(\mathrm{Ker}\varphi_1)=\dim(\mathrm{Ker}\varphi_2)$. 将 Y 分块为 $\begin{pmatrix}P&Q\\R&S\end{pmatrix}$, 计算可知

$$\mathrm{Ker}\varphi_1=\left\{\begin{pmatrix}P&Q\\R&S\end{pmatrix}:AP=PA,AQ=QB,BR=RA,BS=SB\right\},$$
$$\mathrm{Ker}\varphi_2=\left\{\begin{pmatrix}P&Q\\R&S\end{pmatrix}:AP+CR=PA,AQ+CS=QB,BR=RA,BS=SB\right\}.$$

再构造线性映射 $\mu_i:\mathrm{Ker}\varphi_i\to F^{n\times(m+n)}$, $\mu_i\begin{pmatrix}P&Q\\R&S\end{pmatrix}=(R,S), i=1,2$. 由于

$$\mathrm{Ker}\mu_1=\mathrm{Ker}\mu_2=\left\{\begin{pmatrix}P&Q\\O&O\end{pmatrix}:AP=PA,AQ=QB\right\},\mathrm{Im}\mu_2\subset\mathrm{Im}\mu_1=\{(R,S):BR=RA,BS=SB\},$$

因此由维数关系知 $\mathrm{Im}\mu_1=\mathrm{Im}\mu_2$. 注意到 $\begin{pmatrix}O&O\\O&-I\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}\varphi_1$, 因此 $(O,-I)\in\mathrm{Im}\varphi_1=\mathrm{Im}\varphi_2$, 从而必然存在某个 P,Q 使得 $\begin{pmatrix}P&Q\\O&-I\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}\varphi_2$, 此时 $AQ-QB=C$.

【编者注】Roth 定理的另一部分: $AX-YB=C$ 有解 X,Y 的充要条件是 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}$. 有兴趣的读者可以试着自己探究证明, 利用分块矩阵的行列变换技巧.
12. 考虑集合 $M=\{\phi_i\in\mathrm{End}_K(V):\phi_i\phi_j=\phi_j\phi_i,\text{且}\phi_i\text{可对角化},\forall i,j\in I\}$, 然后对维数用数学归纳法. $n=1,2$ 时结论显然成立. 假设对一切维数小于 n 的线性空间成立, 下面考虑 n 维空间. 任取某非数乘变换 $\phi_0\in M$, 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是其特征值, 对应重数为 $n_1,\cdots,n_s$, 且 $\sum_{j=1}^s n_j=n$, 特征子空间为 $V_1,\cdots,V_s$. 与该分块单位矩阵可交换的矩阵必然也是相应的分块对角矩阵 (即 V_j 都是 ϕ_i 的不变子空间), 且所有 ϕ_i 在 V_j 上的限制都可交换. 因此由归纳假设, 存在 V_j 的一组基 $\xi_{j1},\cdots,\xi_{j,n_j}$ 使得 $\phi_i|_{V_j}$ 在这组基下的矩阵都是对角阵. 然后把这 s 组基按顺序拼接起来即可.

11 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 秋高等代数 I 习题课 6 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.