

# 数学分析 II 习题课讲义 (2025 春)

龚诚欣

[gongchengxin@pku.edu.cn](mailto:gongchengxin@pku.edu.cn)

2025 年 3 月 6 日

## 目录

<b>1</b>	<b>定积分的基本概念与可积性</b>	<b>2</b>
1.1	问题	2
1.2	解答	2
<b>2</b>	<b>定积分的性质与计算</b>	<b>4</b>
2.1	问题	4
2.2	解答	4
<b>3</b>	<b>定积分中值定理, 定积分的应用 (1)</b>	<b>6</b>
3.1	问题	6
3.2	解答	7
<b>4</b>	<b>致谢</b>	<b>9</b>

# 1 定积分的基本概念与可积性

## 1.1 问题

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 1, \alpha > 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ .
  2. 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有界, 试证明  $f(x) \in R[a, b]$  的充要条件是:  $\forall \varepsilon > 0, \exists [a, b]$  上满足以下条件的连续函数  $g(x)$  和  $h(x)$ : (1)  $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b]$ ; (2)  $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon$ .
  3. 函数  $g(x) \in R[a, b], f(u) \in C[A, B]$ , 这里  $A, B$  分别是  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  的上下确界. 证明  $f(g(x)) \in R[a, b]$ .
  4. 函数  $f(x) \in R[a, b]$ , 证明存在点  $x_0 \in (a, b)$  使得  $f(x)$  在  $x_0$  处连续.
  5. 函数  $f(x) \in R[a, b]$ , 且  $\forall x \in [a, b]$  有  $f(x) > 0$ . 证明  $\int_a^b f(x)dx > 0$ .
  6. 函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义, 且在任何有限闭区间上可积. 证明对于任意的  $[a, b], \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b [f(x+h) - f(x)]dx = 0$ .
  7. (Hölder 不等式). 非负函数  $f(x), g(x) \in R[a, b], p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 证明  $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$ .  
(编者注: 本题实际上是  $\|f\|_p \|g\|_q \geq \|fg\|_1$ .)  
[一个简单应用, 留作思考题]  $0 < q \leq p \leq s \leq \infty$ , 那么存在  $\theta \in [0, 1]$  使得  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{s}$ . 证明  $\|f\|_p \leq \|f\|_q^\theta \|f\|_s^{1-\theta}$ .
  8. (Minkowski 不等式). 同上题条件, 证明  $\left(\int_a^b (f+g)^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$ .  
(编者注: 本题实际上是  $\|f\|_p + \|g\|_p \geq \|f+g\|_p$ , 这表明  $L_p$  空间是赋范线性空间.)
- 自由选讲.
9.  $f(x)$  在  $[a, b]$  的每一点处的极限都是 0, 证明  $f(x) \in R[a, b]$  且  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .
  10. 已知  $(0, 1)$  上的单调函数  $f(x)$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$  存在, 问是否有  $f(x) \in R[0, 1]$ ?
  11. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[1^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta + 4^\beta + \cdots + (2n)^\beta]^{\alpha+1}}$ .
  12.  $n \in \mathbb{N}_+, f(x) \in C[a, b], \int_a^b x^k f(x)dx = 0, k = 0, 1, \cdots, n$ . 证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至少有  $n+1$  个零点.

## 1.2 解答

1.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, n^\alpha(1-\varepsilon) < a_n < n^\alpha(1+\varepsilon)$ . 从而当  $n$  足够大时,  $\frac{1}{n^{1+\alpha}}(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + N^\alpha) < \varepsilon, \frac{1}{n^{1+\alpha}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) < \varepsilon, \left|\frac{1}{n^{1+\alpha}}[(a_{N+1} - (N+1)^\alpha) + \cdots + (a_n - n^\alpha)]\right| \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}}[(N+1)^\alpha + \cdots + n^\alpha] \leq \frac{\varepsilon}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha \leq \varepsilon \int_0^1 x^\alpha dx + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\alpha+1} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ . 这意味着  $\left|\frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i^\alpha\right)\right| \leq 4\varepsilon \Rightarrow$  原极限  $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n i^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$ .
2. 必要性:  $f(x) \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$  分割  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  s.t.  $\sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$  阶梯函数  $s_1(x), s_2(x)$  满足  $s_1(x) \leq f(x) \leq s_2(x)$  且  $\int_a^b [s_2(x) - s_1(x)]dx < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists$  连续函数  $g(x), h(x)$  满足  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  且  $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon$ .  
充分性:  $g(x)$  连续,  $\int_a^b [h(x) - g(x)]dx < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \exists$  分割  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  s.t.  $\sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$  且  $\sum_{i=1}^n w_i^g(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ . 在此分割下,  $\sum_{i=1}^n w_i^f(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \left[ \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \{h(x) - g(x)\} + w_i^g \right] (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

3. 用 Lebesgue 定理显然. 如不用 Lebesgue 定理, 则  $\forall \delta > 0, \exists \tau > 0$  s.t.  $\forall |x - x'| < \tau, |f(x) - f(x')| < \delta$ . 从而  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  分割  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  s.t.  $\sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$ . 因为  $\{[x_{i-1}, x_i] : w_i^{f \circ g} > \delta\} \subset \{[x_{i-1}, x_i] : w_i^g > \tau\}$ , 从而

而  $\sum_{w_i^{f \circ g} > \delta} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{w_i^g > \tau} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$ , 即  $f \circ g$  可积.

4. 由  $f(x) \in R[a, b]$  知存在  $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ , 使得  $w_{[a_1, b_1]}^f < 1$ . 同样的道理, 由  $f(x) \in R[a_1, b_1]$  知存在  $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$  使得  $w_{[a_2, b_2]}^f < \frac{1}{2}$ . 依此类推, 存在一系列闭区间套满足  $w_{[a_n, b_n]}^f < \frac{1}{n}$ , 只需取  $x_0 \in \cap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$  即可.

5. 由 4 题知存在连续点  $x_0 \in (a, b)$ , 因此  $\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ . 从而  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx \geq f(x_0)\delta > 0$ .

6.  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在连续函数  $g(x)$  满足  $\int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$ . 因此

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b [f(x+h) - f(x)] dx \right| &\leq \left| \int_a^b [f(x+h) - g(x+h)] dx \right| + \left| \int_a^b [g(x+h) - g(x)] dx \right| + \left| \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq 2 \int_{a-1}^{b+1} |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x+h) - g(x)| dx. \end{aligned}$$

由一致连续性知  $\exists H > 0$  s.t.  $\forall x, x' \in [a-1, b+1], |x - x'| < H, |g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ . 取  $h < H$  知 RHS  $< \varepsilon$ . 这意味着原极限为 0.

7. WLOG  $\left( \int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = 1$ , 则原命题的结论可改写为  $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq 1$ . 由  $\ln x$  的凹性, 我们

有  $\alpha \ln a + (1-\alpha) \ln b \leq \ln(\alpha a + (1-\alpha)b) \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$ . 令  $\alpha = \frac{1}{p}, 1-\alpha = \frac{1}{q}, a = x^p, b = y^q \Rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b \left( \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} \right) dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Hölder 不等式.)

8. 由 Hölder 不等式,  $\int_a^b (f+g)^p dx = \int_a^b (f+g)^{p-1} f dx + \int_a^b (f+g)^{p-1} g dx \leq \left( \int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b (f+g)^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_a^b g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \left( \int_a^b f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)$ . 消去  $\left( \int_a^b (f+g)^p dx \right)^{\frac{1}{q}}$  得到原不等式.

(编者注: 本题也可将积分离散化后使用离散版本的 Minkowski 不等式.)

9. 由聚点原理知有界性, 即  $|f(x)| \leq M$ . 其次  $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta_x > 0$ , s.t.  $\omega_{U_0(x, \delta_x)} < \varepsilon$ . 开覆盖  $\cup_{x \in [a, b]} (x - \delta_x, x + \delta_x) \supset [a, b]$ , 因此存在两两无包含关系的有限子覆盖  $\cup_{i=1}^n (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \supset [a, b]$ . 不妨设  $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$ . 取分割点  $y_0 = a, y_{3i+1} = x_i - \frac{\varepsilon}{4nM}, y_{3i+2} = x_i + \frac{\varepsilon}{4nM}, y_{3i+3} \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap (x_{i+1} - \delta_{i+1}, x_{i+1} + \delta_{i+1}), y_{3n} = b, i = 1, 2, \dots, n-1$ .

对此分割,  $\sum_{i=1}^{3n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon(b-a+1)$ , 因此有可积性. 由于  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sum_{i=1}^{3n} \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(x)| dx \leq \varepsilon(b-a+1)$ ,

由  $\varepsilon$  的任意性知  $\int_a^b f(x) dx = 0$ .

10. 考虑  $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ , 但是  $\int_0^1 f(x) dx$  不存在.

11. 原式  $= 2^{\alpha-\beta} \frac{\left[ \frac{2}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha + \frac{2}{n} \left(\frac{3}{n}\right)^\alpha + \cdots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha \right]^{\beta+1}}{\left[ \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^\beta + \frac{2}{n} \left(\frac{4}{n}\right)^\beta + \cdots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n}{n}\right)^\beta \right]^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{定积分定义}} 2^{\alpha-\beta} \frac{\left( \int_0^2 x^\alpha dx \right)^{\beta+1}}{\left( \int_0^2 x^\beta dx \right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha-\beta} \frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$ .

12.  $\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow$  存在至少 1 个零点, 记为  $x_1$ .  $\int_a^b (x-x_1)f(x) dx = 0 \Rightarrow$  存在至少 2 个零点, 记另一个为  $x_2$ . 依此类推,  $\int_a^b \left[ \prod_{i=1}^n (x-x_i) \right] f(x) dx = 0 \Rightarrow$  存在至少  $n+1$  个零点.

## 2 定积分的性质与计算

### 2.1 问题

1.  $f(x) \in C[-1, 1]$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$ .

2. (Riemann-Lebesgue 引理). 设函数  $f(x), g(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义且内闭可积,  $g(x+T) = g(x)$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)g(nx)dx = \int_a^b f(x)dx \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx.$$

3. 设函数  $f(x) \in C^1[a, b]$  且  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明: (1)  $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)dx$ ; (2) 若  $\int_a^b f^2(x)dx = 1$ , 则  $\int_a^b [f'(x)]^2 dx \int_a^b [xf(x)]^2 dx \geq \frac{1}{4}$ .

■ 自由选讲.

4.  $f(x), g(x)$  在  $[0, 1]$  上非负连续. (1) 若  $f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(s)ds$ , 证明  $f(t) \leq 1 + t$ . (2) 若  $f(t) \leq K + \int_0^t f(s)g(s)ds$ , 其中  $K \geq 0$  是常数, 证明  $f(1) \leq K \exp\left(\int_0^1 g(s)ds\right)$ .

5. 试构造  $f(x) \in D[0, 1]$  但  $f'(x) \notin R[0, 1]$  的例子. 如果额外加上  $f'(x)$  有界条件呢?

6. 试构造可积函数  $f$  和连续函数  $g$  使得  $f \circ g$  不可积. 如果额外要求  $g$  是  $C^\infty$  函数呢?

7. 设函数  $f(x), g(x) \in R[a, b]$ , 记  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  为  $[a, b]$  的一个分割,  $\lambda(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\}$ .

任取  $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 证明  $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx$ .

8.  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $\exists \delta > 0, M > 0$ , s.t.  $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$  成立  $\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| \leq M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$ . 证明  $f(x) \equiv 0$ .

9.  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义且内闭可积, 且  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . 证明  $f(x) = xf(1)$ .

10. 求积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x dx$ .

11. 求积分  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx$ , 并求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n}$ .

12. 求积分  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx$ .

### 2.2 解答

1. 往证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = 0$ .

设  $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \leq M$ . 由连续性知  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , s.t.  $\forall x \in (-\delta, \delta), |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ .

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n f(x) dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} &= \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} + \frac{\int_{\delta}^1 (1-x^2)^n [f(x) - f(0)] dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

其中,  $|I_1| \leq \frac{\int_{-\delta}^{\delta} (1-x^2)^n \varepsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq \varepsilon$ ,

$$|I_2| \leq 2M \frac{\int_{-1}^{-\delta} (1-x^2)^n \varepsilon dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \leq 2M \frac{(1-\delta)(1-\delta^2)^n}{\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1-x^2)^n dx} \leq 2M(1-\delta) \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 2M \frac{1-\delta}{\delta} \left( \frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} \right)^n.$$

由于  $\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2} < 1$ , 从而可取足够大的  $n$  使得  $|I_2| < \varepsilon$ . 类似放缩  $I_3$ . 此时  $|I_1 + I_2 + I_3| < 3\varepsilon$ .

2. WLOG 设  $\int_0^T g(x)dx = 0$ , 否则考虑  $h(x) = g(x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx$ .

$\forall \varepsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $s_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_1 & a = x_0 \leq x < x_1 \\ C_2 & x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ C_m & x_{m-1} \leq x \leq x_m = b \end{cases}$  使得  $\int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$ . 设  $M = \sup_{x \in [0, T]} |g(x)|$ . 则

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - s_\varepsilon(x))g(nx)dx + \int_a^b s_\varepsilon(x)g(nx)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - s_\varepsilon(x)|g(nx)dx + \left| \sum_{i=1}^m C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(nx)dx \right| \\ &\leq M\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i \int_{nx_{i-1}}^{nx_i} g(x)dx \leq M\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT. \end{aligned}$$

其中最后一个等式利用了  $\int_0^T g(x)dx = 0$ , 这也意味着  $\int_c^d g(x)dx = \int_c^{c+T} g(x)dx + \int_{c+T}^{c+2T} g(x)dx + \dots + \int_{c+kT}^d g(x)dx$  (设  $c + kT \leq d < c + (k+1)T$ )  $= \int_{c+kT}^d g(x)dx \leq MT$ , 对于  $\forall c, d \in \mathbb{R}$ .

选择一个足够大的  $n$ , 使得  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m C_i MT < \varepsilon$ . 从而  $\left| \int_a^b f(x)g(nx)dx \right| \leq (M+1)\varepsilon$ . 由极限定义立得结论.

3. (1) 由分部积分,

$$\begin{aligned} \int_a^b x f(x) f'(x) dx &= x f^2(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) [x f(x)]' dx = - \int_a^b f^2(x) dx - \int_a^b x f(x) f'(x) dx \\ \Rightarrow \int_a^b x f(x) f'(x) dx &= -\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx. \end{aligned}$$

(2) 由 Cauchy 不等式立得.

$$\begin{aligned} 4. (1) \text{ 原条件等价于 } \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds}} &\leq 1 \xrightarrow{\text{两边积分}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds}} dt \leq \int_0^x 1 dt \xrightarrow{\text{原函数}} \sqrt{1+2\int_0^t f(s)ds} \Big|_0^x \leq x \Rightarrow \\ \sqrt{1+2\int_0^x f(s)ds} &\leq 1+x \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{1+2\int_0^x f(s)ds} \leq 1+x. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^t f(s)g(s)ds \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) \right]' &= f(t)g(t) \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) - g(t) \int_0^t f(s)g(s)ds \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) \\ &\leq K g(t) \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) = \left[ K - K \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) \right]', \end{aligned}$$

两边积分得到

$$\int_0^1 f(s)g(s)ds \exp\left(-\int_0^1 g(s)ds\right) \leq K - K \exp\left(-\int_0^1 g(s)ds\right) \Rightarrow f(1) \leq K + K \int_0^1 f(s)g(s)ds \leq K \exp\left(\int_0^1 g(s)ds\right).$$

(请大家在积分时注意从相同起点开始积分, 这里补上常数  $K$  也是为了保证两边在  $t=0$  处都取 0. 这个题有微分方程背景, 可以先看懂答案, 再试图理解.)

5. 可以验证  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \in D[0, 1]$ , 但  $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $[0, 1]$  上无界. 若额外

有  $f'(x)$  有界, 可参考 Volterra's function.

6. 设  $\mathcal{C}$  是 fat cantor set. 考虑  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ ,  $g(x) = 1 - \text{dist}(x, \mathcal{C})$ , 但  $f(g(x)) = 1_{x \in \mathcal{C}}$  在正测集  $\mathcal{C}$  上不连续. 若

额外有  $g(x) \in C^\infty$ , 可使用光滑版本的 Urysohn 引理.

7.  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(\eta_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i := S_1 + S_2$ . 显然  $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} S_1 = \int_a^b f(x)g(x)dx$ . 记

$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| = M_f$ . 由  $g(x)$  的可积性, 知  $|S_2| \leq \sum_{i=1}^n M_f \omega_g([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i = M_f [\overline{S}_g(\Delta) - \underline{S}_g(\Delta)] \xrightarrow{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} 0$ .

8. 不妨设  $\exists x_0$  s.t.  $f(x_0) > 0$ . 由连续性,  $\exists \kappa > 0$ , s.t.  $\forall x \in (x_0 - \kappa, x_0 + \kappa), f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ . 从而  $\forall [\alpha, \beta] \subset (x_0 - \kappa, x_0 + \kappa)$ , 成立  $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \right| > \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > M(\beta - \alpha)^{1+\delta}$  (最后一个大于号成立只需令  $\beta - \alpha < \left(\frac{f(x_0)}{2M}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ ), 矛盾.

9. 只需证明对无理数点成立. 考察  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . 由有理数点的稠密性,  $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \frac{\alpha^2}{2}f(1)$ . 由集合  $\{q\alpha : q \in \mathbb{Q}\}$  的稠密性且  $f(q\alpha) = qf(\alpha)$ ,  $\int_0^{\alpha} f(x)dx = f(\alpha)\frac{\alpha}{2}$ . 因此  $f(\alpha)\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}f(1) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha f(1)$ .

10.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d(1 - \cos x) \stackrel{\text{分部积分}}{=} (1 - \cos x) \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) d(\ln \sin x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\sin x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) dx = [\cos x - \ln(1 + \cos x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - 1$ .

11. 利用三角函数公式,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2nx)}{2 \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x] \cos 2x + \sin[(2n-2)x] \sin 2x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x](1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos[(2n-2)x]}{2 \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x \cos[(2n-2)x] + 2 \sin[(2n-2)x] \sin x \cos x}{2 \sin x} dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos[(2n-2)x] + \sin[(2n-2)x] \cos x dx = I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n-1} \cos[(2n-1)x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I_{n-1} + \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

由于  $I_1 = 1$ , 因此  $I_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1}$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i}}{\ln n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\ln n} = \frac{1}{2}$ .

12.  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(-x)}{1 + e^x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ .

### 3 定积分中值定理, 定积分的应用 (1)

#### 3.1 问题

1. 证明对于  $\forall x > 0$ , 存在唯一的  $\xi_x$  使得  $\int_0^x e^{t^2} dt = xe^{\xi_x^2}$  成立, 并求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\xi_x}{x}$ .

2. 证明  $\left| \int_a^b \sin x^2 dx \right| \leq \frac{1}{a}$ , 其中  $0 < a < b$ .

3. 函数  $f(x) \in D[0, 1]$ , 且  $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x} f(x) dx$ . 证明存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f(\xi) = f'(\xi)$ .

4. 求由下列曲线所围成的平面图形的面积: (1)  $y^2 = x^2(1 - x^2)$ ; (2)  $y^2 = x, x^2 + y^2 = 1$  (在第一、四象限的部分).

■ 自由选讲.

5.  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是凸函数. 证明  $f(x) \in R[0, x], \forall x \in (0, +\infty)$ , 且  $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$  也是  $(0, +\infty)$  上的凸函数.

6.  $f(x) \in C(\mathbb{R})$ , 定义  $g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$ . 证明若  $g(x)$  单调递减, 则  $f(x) \equiv 0$ .

7.  $f(x) \in R[0, 1], 0 < m \leq f(x) \leq M$ , 求证  $\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$ . (编者注: 本题比较 tricky.)

8.  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义且内闭可积,  $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$ , 求  $f(x)$ .

9. 求积分  $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ .

10. 求积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^{2025} x} dx$ .
11.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增, 证明  $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$ .
12.  $f(x) \in C[a, b]$ , 且任意  $g(x) \in C[a, b]$  满足  $g(a) = g(b) = 0$  都有  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , 证明  $f(x) \equiv 0$ .
13. (Dirichlet 判别法). 设  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上单调,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  $\forall A \geq a, g(x) \in R[a, A]$  且  $\left| \int_a^A g(x)dx \right| \leq M$  恒成立. 证明极限  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)g(x)dx$  存在.
14. 试求由抛物线  $y^2 = 2x$  与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

## 3.2 解答

1. 第一问由定积分第一中值定理和函数  $e^{t^2}$  的单调性显然. 其次

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\xi_x}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\ln \int_0^x e^{t^2} dt - \ln x}}{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \int_0^x e^{t^2} dt - \ln x}{x^2}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2} dt} - \frac{1}{x}}{2x}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x e^{x^2} - \int_0^x e^{t^2} dt}{\int_0^x e^{t^2} dt}}{2x^2}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 e^{x^2}}{2x^2 e^{x^2} + 4x \int_0^x e^{t^2} dt}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{x^2}}{x e^{x^2} + 2 \int_0^x e^{t^2} dt}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 + 1)e^{x^2}}{(2x^2 + 3)e^{x^2}}} = 1. \end{aligned}$$

2.  $\left| \int_a^b \sin x^2 dx \right| \stackrel{t=x^2}{=} \left| \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \right|$ . 由于  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  非负单调递减, 因此由定积分第二中值定理, 原积分  $= \frac{1}{2a} \left| \int_{a^2}^{\xi} \sin t dt \right| \leq \frac{1}{a}$ .

3. 由定积分第一中值定理,  $\exists \xi \in [0, \frac{1}{2}]$ , s.t.  $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x} f(x) dx = e^{1-\xi} f(\xi)$ , 这也意味着对于函数  $g(x) = e^{-x} f(x)$  成立  $g(1) = g(\xi)$ . 由 Rolle 微分中值定理知存在  $g'(\zeta) = 0 \Rightarrow g'(\zeta) = g(\zeta)$ .

4. (1)  $S = 4 \int_0^1 \sqrt{x^2(1-x^2)} dx \stackrel{x=\sin \theta}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = -\frac{4 \cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$ .

- (2) 先解出交点是  $\left( \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right)$ , 然后利用原函数直接计算  $S = 2 \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{x} dx + 2 \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

5. 凸函数开区间上连续  $\Rightarrow$  闭区间上可积. 由  $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f\left(\frac{t}{x} \cdot x\right) d\frac{t}{x} = \int_0^1 f(ux) du \Rightarrow F\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = \int_0^1 f\left(\sum_{i=1}^n t_i(ux_i)\right) du \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n t_i f(ux_i) du = \sum_{i=1}^n t_i F(x_i)$  知  $F(x)$  凸.

6. 构造  $G(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2$ ,  $G'(x) = g(x)$  单调递减,  $g(0) = 0$ . 因此  $G(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 在  $(-\infty, 0)$  上单调递增. 又因为  $G(0) = 0, G(x) \geq 0$  恒成立  $\Rightarrow G(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ .

7. 显然有  $(M-f(x)) \left( \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m} \right) \leq 0$ , 因此  $\int_0^1 (M-f(x)) \left( \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{m} \right) dx \leq 0 \Leftrightarrow M \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{m} \int_0^1 f(x) dx \leq 1 + \frac{M}{m}$ . 利用均值不等式,  $\text{LHS} \geq 2\sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}$ .

8. 等式左右两边对  $x$  积分, 得到  $\int_y^{x+y} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + x f(y) + \frac{x^3 y}{3} + \frac{x^2 y^2}{2}$ . 类似有  $\int_x^{x+y} f(t) dt + \int_0^y f(t) dt + y f(x) + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2}$ . 两式相减得  $x f(y) + \frac{x^3 y}{3} = y f(x) + \frac{xy^3}{3}$ , 即是  $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^2}{3} = \frac{f(y)}{y} - \frac{y^2}{3}$ . 从而  $\frac{f(x)}{x} - \frac{x^3}{3} \equiv C \Rightarrow$

$f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$ . 经验证符合题意.

9. 作代换  $x = \tan t$  得  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt$ . 再作代换  $t = \frac{\pi}{4} - t$  得  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .

10. 记  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot^{2025} x} dx$ . 作换元  $t = \frac{\pi}{2} - x$  知  $I = J$ . 而  $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$ , 因此  $I = J = \frac{\pi}{4}$ .

11.  $f(x)$  单调, 并考虑  $g(x) = x - \frac{a+b}{2}$ . 由定积分第二中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx &= f(a) \int_a^{\xi} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + f(b) \int_{\xi}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= f(a) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + (f(b) - f(a)) \int_{\xi}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = (f(b) - f(a)) \frac{1}{2} (b - \xi)(\xi - a) \geq 0. \end{aligned}$$

12. 用反证法. WLOG 设  $f(x_0) > 0$ , 由连续性知  $\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b], f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ . 从而定义

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \\ 0, & x \in [a, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, b], \\ \text{linear}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

此时  $\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_{x_0 - \frac{\delta}{2}}^{x_0 + \frac{\delta}{2}} f^2(x)dx > 0$ , 矛盾.

13.  $\forall \varepsilon > 0, \exists X > a$ , s.t.  $\forall x \geq X, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$ . 从而  $\forall A', A'' \geq X, \left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| \stackrel{\text{定积分第二中值定理}}{\leq} \left| f(A') \int_{A'}^{\xi} g(x)dx + f(A'') \int_{\xi}^{A''} g(x)dx \right| \leq 2M(|f(A')| + |f(A'')|) \leq \varepsilon$ . 然后由柯西收敛定理知极限存在.

14. 设弦方程为  $x - \frac{1}{2} = ky$ , 与抛物线交点纵坐标为  $y_1, y_2$ , 则围成区域的面积  $S = \int_{y_1}^{y_2} \left(ky + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_1y_2 + y_1^2)$ . 联立直线与抛物线, 由韦达定理知  $y_1 + y_2 = 2k, y_1y_2 = -1$ . 则  $S = \frac{2}{3}(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ . 因此  $k = 0$  时面积最小, 为  $\frac{2}{3}$ .

## 补充 (不要求掌握)

等周问题: 长为  $L$  的曲线何时围成区域面积最大? 答案: 圆 (一年级小学生皆可猜出).

证明: 设  $D$  为凸区域 ( $D$  中任意两点连线都在  $D$  内). 设  $\Gamma: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \in C^1[0, L]$ , 此处选

择  $\Gamma$  的弧长为参数, 则  $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ , 且  $D$  的面积为  $A = \int_0^L x dy = \int_0^L x(s)y'(s)ds$ . 设

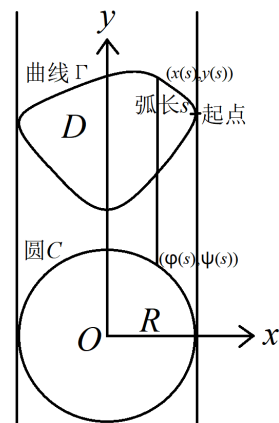
$C: \begin{cases} x = \varphi(s) = x(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}$  是以  $O$  为中心,  $R$  为半径的圆, 此处选择  $\Gamma$  的弧长为参数, 则  $C$  的面

积为  $\pi R^2 = - \int_0^L y dx = - \int_0^L \psi(s)x'(s)ds$ . 从而  $A + \pi R^2 = \int_0^L (x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))ds \leq$

$\int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2} ds \leq \int_0^L \sqrt{(x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)} ds = RL$ . 因此成立  $2\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq A + \pi R^2 \leq$

$RL \Rightarrow A \leq \frac{L^2}{4\pi}$ . 其中等号成立当且仅当以上每步相等, 尤其是  $(x(s)y'(s) - \psi(s)x'(s))^2 = (x'(s)^2 + y'(s)^2)(x(s)^2 + \psi(s)^2)$ .

用右边减去左边得到  $(x(s)x'(s) + \psi(s)y'(s))^2 = 0$ . 由于  $x(s)^2 + \psi(s)^2 = R^2$ , 两边求得  $x(s)x'(s) + \psi(s)\psi'(s) = 0 \Rightarrow \psi'(s) = y'(s), \psi(s) = y(s) + y_0$ , 即  $\Gamma$  方程为  $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ , 圆也!





## 4 致谢

感谢北京大学数学科学学院的王冠香教授和刘培东教授, 他们教会了笔者数学分析的基本知识, 他们的课件和讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢北京大学信息科学技术学院 22 级本科生吴明睿同学, 他提供了很多  $\text{\LaTeX}$  排版的建议. 感谢选修 2025 春数学分析 II 习题课 9 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.