

高等代数 I 习题课讲义 (2025 秋)

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 11 月 25 日

目录

1 第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法	3
1.1 问题	3
1.2 解答	3
2 线性相关性, 秩	5
2.1 问题	5
2.2 解答	5
3 线性方程组解的结构	6
3.1 问题	6
3.2 解答	7
4 行列式 (1)	9
4.1 问题	9
4.2 解答	10
5 行列式 (2)	12
5.1 问题	12
5.2 解答	13
6 期中复习, 矩阵乘法	15
6.1 问题	15
6.2 解答	15
7 可逆矩阵, 分块矩阵	17
7.1 问题	17
7.2 解答	18
8 正交矩阵, 线性映射	19
8.1 问题	19
8.2 解答	19
9 特征值, 特征向量	21
9.1 问题	21
9.2 解答	22

10 矩阵的相似与对角化	23
10.1 问题	23
10.2 解答	24
11 致谢	25

1 第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 是否存在二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 其图像经过下述 4 个点: $A(1, 2), Q(-1, 3), M(-4, 5), N(0, 2)$?

2. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

3. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D . 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

4. a 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$ 有解? 当有解时, 求出它的所有解.

5. 解下述线性方程组: $\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_1 \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n \end{cases}$, 其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 且 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq -1$.

6. (1) 求复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 rref(A); (2) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集合;

(3) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1, y_2, y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解?

7. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-2, 1, 5), \alpha_3 = (a, 2, 10), \beta = (1, b, -1)$. 当 a, b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

8. 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\beta = \sum_{j=1}^s b_j \alpha_j$. 如果 $b_i \neq 0$, 证明用 β 替换 α_i 得到的向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 也线性无关.

9. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 表出任何向量-如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

10. 求单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线.

11. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$ 的方式唯一.

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

1.2 解答

1. 直接代入求解 $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a - b + c = 3 \\ 16a - 4b + c = 5 \\ c = 2 \end{cases}$, 发现无解.

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=7*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=2*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$

$$\textcircled{2}-=8*\textcircled{1}$$

$$3. \text{ 注意 } A, B, C, D \text{ 的比例和为 1, 因此} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=5*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}-=15*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}+=10*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}-=5*\textcircled{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=\frac{2}{3}*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ 因此解是 } (\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25}).$$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}+=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{bmatrix}. \text{ 因此有解当且仅当 } a=-1, \text{ 通解是 } \begin{cases} x_1 = -\frac{18}{7}x_3 + \frac{1}{7} \\ x_2 = -\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7} \end{cases}.$$

$$5. \text{ 令 } y = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \text{ 原方程组改写为} \begin{cases} y + a_1x_1 = b_1 \\ y + a_2x_2 = b_2 \\ \dots \\ y + a_nx_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - y}{a_1} \\ x_2 = \frac{b_2 - y}{a_2} \\ \dots \\ x_n = \frac{b_n - y}{a_n} \end{cases}. \text{ 全部相加得到关于 } y \text{ 的一元}$$

一次方程, 解得 $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}$. 代入上式得到原线性方程组的解.

$$6. (1) \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=2*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=i*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{i}{2+2i}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}*\frac{1}{2+2i}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}$. (3) $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1, \frac{y_2 - 2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$ 时才有解.

$$7. \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{13}{3}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} + \frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b - \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \text{ 因此,}$$

当 $a \neq -4$ 或 $a = -4, b = -\frac{2}{13}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

8. 设 $k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i\beta + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i(b_1\alpha_1 + \dots + b_s\alpha_s) + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow (k_1 + k_ib_1)\alpha_1 + \dots + (k_{i-1} + k_ib_{i-1})\alpha_{i-1} + k_ib_i\alpha_i + (k_{i+1} + k_ib_{i+1})\alpha_{i+1} + \dots + (k_s + k_ib_s)\alpha_s = 0$. 由线性无关性知 $k_1 + k_ib_1 = \dots = k_{i-1} + k_ib_{i-1} = k_ib_i = k_{i+1} + k_ib_{i+1} = \dots = k_s + k_ib_s = 0$, 由于 $b_i \neq 0$, 因此 $k_i = 0$, 进一步得到 $k_1 = \dots = k_s = 0$, 这也意味着 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

9. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 \Leftrightarrow 表出 0 向量唯一 $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_s = 0)$.

10. $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x-z = k(1-y) \\ x+z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x+ky-z = k \\ kx-y+kz = 1 \end{cases}$. 特别地, 当 $y = \pm 1$ 时, $z = \pm x$ 也是位于该曲面上的直线.

11. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \in \mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, $\gcd(a, b) = 1$, 那么 $a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3|a^2 \Rightarrow 3|b^2 \Rightarrow 3|b$, 矛盾.

12. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5}) = \{a+b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5} = (a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5}) \Rightarrow 9 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5}) = (a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5}) = (a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5}|3 \times 3$ 而 $2+\sqrt{-5} \nmid 3$, 因此不是素数.

2 线性相关性, 秩

2.1 问题

1. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.

2. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

3. 作初等行变换将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求 A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a, b 取何值时, 向量 $(3, a, b, b, 3)$ 属于 A 的行空间?

4. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$; (2) $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4$; (3) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$; (4) $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 8\alpha_4, \alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4, 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3$.

5. 证明: 若向量组 I 能线性表出向量组 II, 且 $\text{rank}(I) = \text{rank}(II)$, 则向量组 II 也能表出向量组 I.

6. 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 能线性表出 β_1, \dots, β_s , 并且有 $\beta_i = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r, \forall i = 1, 2, \dots, s$. 证明若矩阵 $B = (b_{ij})_{s \times r}$ 列向量线性无关, 则 β_1, \dots, β_s 也能线性表出 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

7. 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \leq i \leq n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明主对角占优矩阵满秩.

8. 证明秩等式 $\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ 和秩不等式 $\text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

9. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$, $\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.

10. 设 $W = \{f(x) | f(1) = 0, f(x) \in \mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 \mathbb{R} 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.

11. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.

2.2 解答

1. 显然矩阵 A 的秩至少为 2(第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2, 因此 $\lambda = 0$, 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4

列线性表出. 综上, $\lambda = 0$ 时秩为 2, 否则为 3.

2. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3, -5\alpha_1 - 4\alpha_2 = \alpha_4$;

(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\frac{3}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 = \beta_1$.

3. A 的简化阶梯型矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是 $\beta_1, \beta_2, \beta_4$, 且 $\beta_3 = 2\beta_1 - \beta_2, \beta_5 = 3\beta_1 + 5\beta_2 - \beta_4$. (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, 且 $\alpha_3 = -\frac{31}{9}\alpha_1 - \frac{55}{9}\alpha_2 + \frac{17}{9}\alpha_4, \alpha_5 = -\frac{20}{9}\alpha_1 - \frac{23}{9}\alpha_2 + \frac{22}{9}\alpha_4$. (3) 仔细计算即可. $a = 4, b = 2$.

4. (1) 线性相关; $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$. (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这有五个向量却只有四个自由度.

5. 设 β_1, \dots, β_s 是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量 α , 由于组 I 能表出 $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$, 从而 $\text{rank}(\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha) \leq s$, 即 $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$ 线性相关. 由于 β_1, \dots, β_s 线性无关, 因此它们能表出 α .

6. 只需证明能表出 α_1 . 利用高斯消元法去解方程 $\beta_{i1} = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r$, 由于 B 列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成 $\begin{bmatrix} I_{r \times r} \\ 0_{(s-r) \times r} \end{bmatrix}$ (可用递推法或归纳法证明之), 从而 α_1 能被 β_1, \dots, β_s 线性表出.

7. 反证法. 假设 A 的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$. 我们不妨设在这 n 个系数里面 k_1 的绝对值最大, 那么就有 $k_1a_{11} + k_2a_{12} + \dots + k_na_{1n} = 0$. 但是 $|k_1a_{11} + k_2a_{12} + \dots + k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_2a_{12}| - \dots - |k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_1|(|a_{12}| + \dots + |a_{1n}|) > 0$, 矛盾. 因此 A 满秩.

8. (1) 设 A 的一个列极大线性无关组是 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$, B 的一个列极大线性无关组是 $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_s}$. 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$ 线性无关, 且可以分别用对应小矩阵 A, B 的相同系数表出其他大矩阵的列向量, 因此这是一个大矩阵的列极大线性无关组, 有第一个秩等式.

(2) 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{j_1} \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \gamma_{j_s} \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$ 线性无关, 其中 γ_{j_k} 是矩阵 C 对应于 j_k 的列向量, 因此大矩阵的秩至少是 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$, 有第二个秩不等式. 这里我们无法判断这不是一个大矩阵的列极大线性无关组, 因此可以严格取到大于号. 一个例子是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $A = (0), B = (0), C = (1)$.

9. 由矩阵满秩知 $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ 和 $(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$ 线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证 $x_3 + k(x_1 - x_2) = x_1 + t(x_2 - x_3), x = a, b, c$ 对于 k, t 是否有解. 由于矩阵满秩, 合并同类项知该方程系数必须满足 $t + 1 = k - 1 = t + k = 0$, 因此 $t = -1, k = 1$. 从而两直线相交.

10. (1) 容易证明对 $\forall f(x), g(x) \in W \Rightarrow af(x) + bg(x) \in W$, 因此是线性子空间. (2) 令 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, $f(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = 0$, 因此 $f(x) = a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + \dots + a_{n-1}(x^{n-1}-1)$. 下面我们只需证明 $x-1, x^2-1, \dots, x^{n-1}-1$ 确实是 W 的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以 $\dim W = n-1$.

11. 注意到 $W_i = \{X \in K^n : (a_{i1}, \dots, a_{in})X = 0\}, i = 1, 2, \dots, n$ 都是 K^n 的 $n-1$ 维子空间, 由于有限个 $n-1$ 维子空间张不满 n 维全空间, 从而存在 $X_0 \in K^n \setminus (W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n)$, 此时 AX_0 的每个分量都不为零.

3 线性方程组解的结构

3.1 问题

1. 已知矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5]$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ 的行向量组等价, 且 $\alpha_2 = (2, 1, 2, 1)^T, \alpha_5 = (7, 3, 7, 3)^T$. 又知方程组 $AX = \beta$ 的一个解为 $X = (1, 1, -1, 0, 1)^T$, 这里 $\beta = (7, 5, 7, 4)^T$. (1) 写出矩阵 A 及其行简化阶梯形矩阵 J ; (2) 求 A 行空间的一组基, 并确定当 a, b 为何值时, $(5, 3, 6, a, b)$ 落在 A 的行空间里; (3) 求方程组 $AX = \beta$ 的解空间.

2. 讨论下列方程组的解空间: (1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$.

3. 讨论下列方程组的解空间: (1) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 7x_4 = \lambda \end{cases}$.

4. A 是 $m \times n$ 矩阵, b 是 $m \times 1$ 矩阵. 证明线性方程组 $A^T A x = A^T b$ 总有解.
 5. A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解. 问 A, B 的列向量组是否等价、行向量组是否等价.
 6. 证明: $AX = 0$ 有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.

7. 设线性方程组 $AX = b$ 中矩阵 A 的秩等于矩阵 $B = \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.
 8. 设 A, B 是数域 K 上的 n 阶方阵, $AX = 0, BX = 0$ 分别有 l, m 个线性无关的解向量. 证明: (1) $(AB)X = 0$ 至少有 $\max(l, m)$ 个线性无关的解向量; (2) 如果 $l + m > n$, 那么 $(A + B)X = 0$ 必有非零解; (3) 如果 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 没有公共的非零解向量, 且 $l + m = n$, 那么 K^n 中的任一向量 α 都可以唯一的分解为 $\alpha = \beta + \gamma$, 其中 β, γ 分别是 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的解向量.
 9. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha \neq 0, A^k\alpha = 0$, 那么 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$.
 10. 判断方的整系数线性方程组如果模任一素数的意义下都有解, 那么它是否在整数环上有解.
 11. 给定复系数线性方程组 $AX = b$, 其中 A 满秩. 假设矩阵 $I + A$ 的每行元素的模的和小于 q , 其中 $0 < q < 1$. 设 X_0 是 \mathbb{C}^n 中任一向量, 归纳定义 $X_{m+1} = (A + I)X_m - b$. 证明序列 X_m 收敛到方程组 $AX = b$ 的解.
 12. 已知矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等. 记 A 的解空间为 W , B 的列空间为 V . 证明 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$ 当且仅当 $V \cap W = \{0\}$.

3.2 解答

1. (1) 容易得到 $\alpha_1 - \alpha_3 = (-2, 1, -2, 0)^T$, 并求出题给定的矩阵行空间一组基是 $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$. 考虑其前三个分量, 由能被这组基表出知 $\alpha_3 = 2\alpha_2 = (4, 2, 4, 2)^T, \alpha_1 = (2, 3, 2, 2)^T$, 从而 $\alpha_4 = (8, 6, 8, 3)$. 因此

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (2) 一组基为 $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$. 考察各系数, 知当 $a = 14, b \in \mathbb{R}$ 时, 该向量落在 A 的行空间里.
 (3) 先求出 $AX = 0$ 的解, 即 $(\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_5)X = 0$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 线性无关. 通解为 $(t_1, 3t_1 - 2t_2, t_2, -t_1, 0)^T, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 是自由变元. 因此 $AX = \beta$ 的通解是 $(t_1 + 1, 3t_1 - 2t_2 + 1, t_2 - 1, -t_1, 1)^T$, 写成解空间是 $\{t_1(1, 3, 0, -1, 0)^T + t_2(0, -2, 1, 0, 0)^T + (1, 1, -1, 0, 1)^T : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$.
 2. (1) 通解是 $x_1 = 8x_3 - 7x_4, x_2 = -6x_3 + 5x_4$, 写成解空间是 $\{k_1(8, -6, 1, 0)^T + k_2(-7, 5, 0, 1)^T : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$.
 (2) $n = 3m$ 或 $3m + 1$ 时只有零解. $n = 3m + 2$ 时有非零解, 通解是 $x_{3i} = 0, x_{3i+1} = -x_n, x_{3i+2} = x_n, i = 1, 2, \dots, m$, 写成解空间是 $\{k(-1, 1, 0, -1, 1, 0, \dots, 0, -1, 1) : k \in \mathbb{R}\}$.

3. (1) 利用高斯消元得到 $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ -3\lambda x_3 + 8\lambda x_4 = 16 - 7\lambda \end{cases}$, 因此 $\lambda \neq 0$ 时有解, 通解是 $x_1 = \frac{1}{\lambda}, x_3 = \frac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_2, x_4 =$

$\frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}x_2$, 写成解空间是 $\{k(0, 5, -8, -3)^T + \left(\frac{1}{\lambda}, 0, \frac{9\lambda-16}{5\lambda}, \frac{4-\lambda}{5\lambda}\right)^T : k \in \mathbb{R}\}$.

(2) 利用高斯消元得到 $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_2 - 13x_3 - 5x_4 = 3 \\ 0 = 2\lambda \end{cases}$, 因此 $\lambda = 0$ 时有解, 通解是 $x_1 = -\frac{1}{2}(7 + 19x_3 + 7x_4)$, $x_2 = -\frac{1}{2}(3 + 13x_3 + 5x_4)$, 写成解空间是 $\{k_1(-19, -13, 2, 0)^T + k_2(-7, -5, 0, 2)^T + \left(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 0\right)^T : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$.

4. 先证明 $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$. 首先显然 $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A)$, 其次 $A^T A x = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker}(A) \Rightarrow \text{rank}(A^T A) \geq \text{rank}(A)$. 接着, 由于 $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A^T A, A^T b) \leq \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A)$ 知系数矩阵和增广矩阵秩相等, 因此方程有解.

5. 第 1 个结论不对, 比如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 第 2 个结论对. 若解空间 0 维, 则 A, B 均列满秩, 也都可以通过初等行列变换得到其简化阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}$, 因此等价. 其余情况, 设解空间 $r \geq 1$ 维, 任取 $AX = 0$ 的一个基础解系 X_1, \dots, X_r 构成 $n \times r$ 矩阵 C . 考虑线性方程组 $C^T X = 0$, 其解空间维数为 $n - r = \text{rank}(A)$. 由于 $C^T A^T = 0$, 因此 A 的行空间是该解空间的一个子空间. 由于它们维数相等, 因此 A 的行空间就是该解空间. 同理 B 的行空间也是该解空间.

6. 必要性. 设 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ 是强非零解, 则 $\alpha_i = \sum_{k \neq i} \left(-\frac{x_k}{x_i}\right) \alpha_k, \forall i = 1, \dots, n$.

充分性. 不妨设 $\alpha_i = \sum_{k \neq i} t_{ki} \alpha_k, \forall i = 1, \dots, n$, 则记 $T = \begin{pmatrix} 1 & -t_{12} & -t_{13} & \cdots & -t_{1,n-1} & -t_{1,n} \\ -t_{21} & 1 & -t_{23} & \cdots & -t_{2,n-1} & -t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t_{n-1,1} & -t_{n-1,2} & -t_{n-1,3} & \cdots & 1 & -t_{n-1,n} \\ -t_{n1} & -t_{n2} & -t_{n3} & \cdots & -t_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, 从而

$AT = 0$. 由于 T 的任一主对角元均不为零, 从而存在 X_0 使得 TX_0 每个分量都不为零, 此即该强非零解.

7. (1) $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A, b) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}(B) = \text{rank}(A)$, 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.

(2) 不成立, 考虑 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$, $\text{rank}(A) = 2$, 而 $\text{rank}(B) = 3$.

8. (1) $n - \text{rank}(AB) \geq \max(n - \text{rank}(A), n - \text{rank}(B)) \geq \max(l, m)$.

(2) $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n - l + n - m < n$, 因此 $(A + B)X = 0$ 必有非零解.

(3) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ 与 β_1, \dots, β_m 分别是 $AX = 0, BX = 0$ 线性无关的解. 考虑方程 $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_l\alpha_l + \mu_1\beta_1 + \dots + \mu_m\beta_m = 0$, 则 $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_l\alpha_l = -\mu_1\beta_1 - \dots - \mu_m\beta_m$ 是 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的公共解. 由题意知其必然为零向量, 又由 $\{\alpha_i\}_{i=1}^l, \{\beta_j\}_{j=1}^m$ 线性无关性知 $\lambda_1 = \dots = \lambda_l = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$. 因此 $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_m$ 整体线性无关. 又由于 $l + m = n$, 因此他们是 K^n 一组基, 从而任一向量都可唯一被它们线性表出, 相应的被表出的两部分也就对应了 β 和 γ . 唯一性可由 $\alpha = \beta_1 + \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1$ 是 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 的公共解 $\Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1 = 0$ 得到.

9. (1) 设 $\lambda_1\alpha + \lambda_2A\alpha + \dots + \lambda_kA^{k-1}\alpha = 0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1 = 0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2 = 0$, 以此类推知线性无关.

(2) 显然 $A^n X = 0 \Rightarrow A^{n+1} X = 0$. 若存在 $A^{n+1}\alpha = 0$ 但 $A^n\alpha \neq 0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha, A\alpha, \dots, A^n\alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$.

10. 不一定, 一个反例是 $4x = 2$.

11. 记 $\|X\|$ 为向量 X 元素模的最大值 (l_∞ 范数). 则 $\|X_n - X_m\| = \|(A + I)X_{n-1} - (A + I)X_{m-1}\| = \|(A + I)(X_{n-1} - X_{m-1})\| < q\|X_{n-1} - X_{m-1}\|$, 因此由 Cauchy 收敛原理知 X_n 在 l_∞ 范数意义下收敛 (有限维线性空间所有范数等价). 记极限值为 X_∞ , 两边求极限知 $X_\infty = (A + I)X_\infty - b \Leftrightarrow AX_\infty = b$.

12. 注意到 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB) \Leftrightarrow \text{Ker}(B) = \text{Ker}(AB)$.

“ \Rightarrow ”: 考虑 $x \in V \cap W$, 则可设 $x = By$. 由于 $ABy = Ax = 0$, 因此 $y \in \text{Ker}(AB) = \text{Ker}(B) \Rightarrow By = 0 \Rightarrow x = 0$.

“ \Leftarrow ”: 显然 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$. 若 $\text{rank}(AB) < \text{rank}(B)$, 则 $\text{Ker}(AB) \neq \text{Ker}(B)$, 即 $\exists x \in \text{Ker}(AB)$ 但 $x \notin \text{Ker}(B)$, 此时 $Bx \neq 0$, 但是 $Bx \in V \cap W$.

4 行列式 (1)

4.1 问题

1. 计算行列式: (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

3. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos 2\phi_1 & \cdots & \cos(n-1)\phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos 2\phi_2 & \cdots & \cos(n-1)\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos 2\phi_n & \cdots & \cos(n-1)\phi_n \end{vmatrix}$.

4. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n \times n})$, 其中 $\alpha^2 - 4\beta\gamma > 0$.

5. (1) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$; (2) 计算行列式 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$.

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2 \cdots a_n \neq 0$.

8. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n \times n})$.

9. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n \times n}).$

4.2 解答

1. (1) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2 + 16 + 16 - 4(x+1) - 16(x-2) - 4(x+1) = x^3 - 27x + 54;$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

2. 用第一列减去第 i 列的 b_i 倍, $i = 2, 3, \dots, n$, 得到 $\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i.$

3. 由高中三角函数知识知 $\cos k\theta = 2^{k-1} \cos^k \theta + P_{k-2}(\cos \theta)$, 其中 P_{k-2} 是 $k-2$ 次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos^2 \phi_1 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos^2 \phi_2 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos^2 \phi_n & \cdots & \cos^{n-1} \phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\cos \phi_i - \cos \phi_j).$$

4. 若 $\beta\gamma = 0$, 则行列式为 α^n . 对于一般情形, 按第一行展开得到 $D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}$, 且有初值条件 $D_1 = \alpha, D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma$, 然后用数列的特征值和特征公式设 $D_n = A \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n + B \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n$, 代入 $n=1, 2$ 解出 A 和 B , 得到 $D_n = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}$.

5. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c-a & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a & a-b \end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知 $D_n = b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}$. 初始条件是 $D_1 = a$, 因此知 $D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

(2) 按第 n 列拆项, 得 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & a_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b+(a_n-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + (a_n-b)E_{n-1} = b(a_1-c)(a_2-$

$c) \cdots (a_{n-1} - c) + (a_n - b)E_{n-1}$; 按第 n 列拆项 (或由对称性), 得 $E_n = c(a_1 - b)(a_2 - b) \cdots (a_{n-1} - b) + (a_n - c)E_{n-1}$.
两式联立得 $E_n = \frac{bf(c) - cf(b)}{b - c}$, 其中 $f(x) = (a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_n - x)$.

$$\text{6. 法 1(拆项法): } \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五}$$

$$\text{项: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4x_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3x_4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_4x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 原行列式是 } 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

$$\text{法 2(加边法): } \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 然后用第 } i+1 \text{ 行减去第 1 行}$$

$$\text{的 } x_i \text{ 倍, } i = 1, 2, 3, 4, \text{ 得到 } \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

$$\text{7. 采用第 6 题的法 1(拆项法), 最后剩下 } n+1 \text{ 项: } \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \dots, \text{ 它们分别是 } (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} x_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} a_1 x_2 \cdots a_n, \dots, \text{ 整理得到原}$$

$$\text{行列式为 } (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \right) - 1 \right].$$

8. 先计算 $n = 1$ 时, $D_1 = \cos \alpha$; $n = 2$ 时, $D_2 = \cos 2\alpha$; 因此可以猜测 $D_n = \cos n\alpha$. 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到 $D_{n+1} = 2 \cos \alpha D_n - D_{n-1} = \cos(n+1)\alpha$, 知该假设成立.

9. 法 1: 将第 1 行至第 $n-1$ 行减去第 n 行, 并提出各行和各列公因子, 得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \frac{1}{a_{n-1} + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

再将第 1 列至第 $n - 1$ 列减去第 n 列, 并提出各行和各列的公因子, 得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第 n 行展开得到递推式 $D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} D_{n-1}$, 并直接计算出 D_2 , 得

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

法 2: 若 $a_i = a_j$ 或 $b_i = b_j (i \neq j)$, 即两行 (或两列) 相同, 则 $D_n = 0$. 因此 D_n 含有因子 $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$. 将 D_n 的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得 $D_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)} D'_n$. 显然 D'_n 也含有上述因子. 另一方面, 由于 D'_n 的 (i, j) 元为 $\prod_{k \neq j} (a_i + b_k)$, 所以每一个 a_i 在 D'_n 的展开式中的次数均为 $n - 1$, 因此可设 $D_n = \lambda \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$. 为确定常数 λ , 我们不妨令 $a_i = -b_i, i = 1, 2, \dots, n$. 此时 D'_n 为对角行列式, 且 $D_n = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \Rightarrow \lambda = 1$. 因此可得一样的结果.

5 行列式 (2)

5.1 问题

1. 当 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 5x_1 + (4 + \lambda)x_2 = 6 \end{cases}$ 有唯一解, 此时用 Cramer 法则求解之.
2. 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 且对于任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数. 证明或否定: (1) $f(x)$ 系数都是有理数; (2) $f(x)$ 系数都是整数.
3. 设数域 K 上 $m \times n$ 矩阵 H 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 证明: H 的任意 $s (s \leq \min(m, n))$ 列都线性无关当且仅当齐次线性方程组 $HX = 0$ 的任一非零解的非零分量数目大于 s .
4. 设 $n \geq 3, f_1, f_2, \dots, f_n$ 是次数 $\leq n-2$ 的多项式, 证明: 对 $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, 行列式 $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} \equiv 0$, 并举例说明条件 “次数 $\leq n - 2$ ” 不可去.
5. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_r 是 \mathbb{R}^n 中的两个向量组, 其中 β_1, \dots, β_r 线性无关. 证明存在无穷多个实数 k , 使得向量组 $\alpha_1 + k\beta_1, \dots, \alpha_r + k\beta_r$ 线性无关.

6. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. 你能求出行列式 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$ 的通式吗?

7. 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ 和 $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 741 & 886 & 114 & 514 \\ -741 & 0 & 1919 & 810 & 2002 \\ -886 & -1919 & 0 & 520 & 1314 \\ -114 & -810 & -520 & 0 & 220 \\ -514 & -2002 & -1314 & -220 & 0 \end{vmatrix}$.

8. 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \leq i \leq n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明若 $a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i \leq n$, 则 $\det(A) > 0$.

9. 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 (1) $a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i \leq n$; (2) $a_{ij} < 0, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$; (3) $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j \leq n$. 求矩阵 A 的秩.

10. 计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩 r , 并计算其 r 阶非零子式的个数.

11. 试确定所有 3 阶 $(0, 1)$ 行列式 (即所有元素只能是 0 或 1) 的最大值, 并给出证明和取到最大值的一个构造.

12. 设 W 是矩阵空间 $M_n(K)$ 的一个子空间. 证明: 若 $\dim(W) \geq n^2 - n + 1$, 则 W 中至少包含一个满秩的矩阵.

5.2 解答

1. 由 Cramer 法则, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4+\lambda \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -\frac{23}{2}$ 时有唯一解. $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4+\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4+\lambda \end{vmatrix}} = \frac{7\lambda + 46}{2\lambda + 23}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4+\lambda \end{vmatrix}} = \frac{-23}{2\lambda + 23}$.

2. (1) 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m (a_m \neq 0)$. 取 $x_k = k$ 代入, 得到线性方程组 $\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_mx_0^m = f(x_0), \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_1^m = f(x_1), \\ \dots \\ a_0 + a_1x_m + \cdots + a_mx_m^m = f(x_m). \end{cases}$

其系数行列式是 Vandermonde 行列式不为 0, 因此由 Cramer 法则其有唯一解 $a_i = \frac{D_i}{D}, i = 0, 1, \dots, m$. 由于 D_i 的元素均为整数, 因此 a_i 是有理数. (2) 结论不对, 反例是 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

3. 必要性. 若存在非零解 $(0, \dots, 0, c_{i_1}, 0, \dots, 0, c_{i_l}, 0, \dots, 0)$, 其中 c_{i_1}, \dots, c_{i_l} 不全为 0 且 $l \leq s$, 则意味着 $c_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + c_{i_l}\alpha_{i_l} = 0$, 从而他们线性相关, 矛盾.

充分性. 若存在 $l (l \leq s)$ 列 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l}$ 线性相关, 即存在不全为 0 的数 c_{i_1}, \dots, c_{i_l} 使得 $c_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + c_{i_l}\alpha_{i_l} = 0$, 则 $(0, \dots, 0, c_{i_1}, 0, \dots, 0, c_{i_l}, 0, \dots, 0)$ 是一个非零分量数不大于 s 的非零解, 矛盾.

4. 不妨设 a_1, a_2, \dots, a_n 互不相同. 考虑 $F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & a_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$, 这是一个至多 $n-2$ 次多项式, 有至少 a_2, a_3, \dots, a_n 这 $n-1$ 个不同的根, 因此必恒等于 0. 若删去条件 “次数 $\leq n-2$ ”, 则可令 $f_k(x) = x^{k-1}$, 此时原行列式构成 Vandermonde 行列式, 只要 a_1, a_2, \dots, a_n 两两不同就不为 0.

5. 将 β_1, \dots, β_r 扩充为 \mathbb{R}^n 的一组基 β_1, \dots, β_n , 并任意选择 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$. 行列式 $|(a_1 + k\beta_1, \dots, \alpha_n + k\beta_n)|$ 是一个关于 k 的至多 n 次多项式, 其等于零至多只有 n 个解 (令 $k \rightarrow \infty$ 知此多项式不恒为零), 且在该行列式不等于零时 $\alpha_1 + k\beta_1, \dots, \alpha_r + k\beta_r$ 线性无关, 因此存在无穷多个实数 k .

6. 把后 $n-1$ 列加到第一列, 提出公因子 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 用第 (1, 1) 元消去同列其他元素, 再按第一列展开得到 $n-1$ 阶行列式:

$$D_n = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

用所得 $n-1$ 阶行列式的第 (1,1) 元消去同行的其他元素, 再按第一行展开得到 $n-2$ 阶上三角行列式:

$$D_n = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -n & \cdots & -n & -n \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & -n & -n & -n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.$$

7. 前者是偶数阶斜对称矩阵. 若 $a = 0$. 则按第 1、2 行展开, 得到 $D_1 = (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -b & -d \\ -c & -e \end{vmatrix} = (be - cd)^2$.

若 $a \neq 0$, 则将第 1 行的 $\frac{d}{a}$ 倍和第 2 行的 $\frac{b}{a}$ 倍加到第 3 行上, 将第 1 行的 $\frac{e}{a}$ 倍和第 2 行的 $\frac{c}{a}$ 倍加到第 4 行上, 得到

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f + \frac{cd}{a} - \frac{be}{a} \\ 0 & 0 & -f + \frac{be}{a} - \frac{cd}{a} & 0 \end{vmatrix}. \text{ 然后按第 1、2 行展开, 得到 } D_1 = (af - be + cd)^2.$$

后者是奇数阶斜对称矩阵, 因此行列式为 $D_2 = 0$ (因为 $|D_2| = |D_2^T| = |-D_2| = (-1)^{2k+1}|D_2| \Rightarrow |D_2| = 0$).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & a_{23}t & \cdots & a_{2n}t \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33} & \cdots & a_{3n}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

是主对角占优矩阵, 因此 $\det(A(t)) \neq 0$. 由于 $\det(A(0)) > 0$, 由函数连续性知 $\det(A(1)) > 0$, 此即原命题.

9. 首先由条件 (3) 知 $|A| = 0$, 因此 $\text{rank}(A) \leq n-1$. 其次考虑 A 中元素 a_{11} 的余子式 M_{11} , 由条件 (1)(2) 知其严格主对角占优, 因此 $M_{11} > 0$. 这意味着 $\text{rank}(A) = n-1$.

10. 先求出其行简化阶梯矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 知其秩为 3, 且有 5 个列极大线性无关组 (第 5 列必选, 第 2 列、第 3 列至多选一个, 其余随意); 观察原矩阵易知有 2 个行极大无关组 (第 2 行、第 3 行至多选一个, 其余随意); 因此有 $2 \times 5 = 10$ 个 3 阶非零子式.

11. 按第 1 行展开, 得到 $D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \leq 3$. 下面证明 $D \neq 3$. 若不然, 则必有

$a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$, 且 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 1$. 前两个行列式为 1 可以得到 $a_{22} = a_{33} = 1, a_{23} =$

$a_{31} = 1$, 而此时 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = a_{21}a_{32} - 1 \leq 0$, 矛盾. 因此 $D \leq 2$, 一个构造是 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

12. 将 $M_n(K)$ 的矩阵平铺看成是 n^2 维的行向量, 并取该子空间的一组基 A_1, \dots, A_r . 把这 r 个行向量在 $\text{axis} = 0$ 方向拼成 $r \times n^2$ 的矩阵, 并可得到其简化阶梯型矩阵 J . 注意到 J 的行向量 B_1, \dots, B_r 也是该子空间的一组基, 这组基的线性组合能使得矩阵在某 r 个位置取到任意的值. 下面用归纳法证明: 任取 $n \times n$ 矩阵 A 中的 $n^2 - n + 1$ 个位置,

我们总可以在这些位置填上 0 或 1, 使得不管矩阵 A 其余的 $n - 1$ 个位置填什么数, A 的行列式总为 ± 1 . 假设命题对 $n - 1$ 级的方阵成立, 考察 n 阶方阵. 由抽屉原理, 总有一行 (不妨设是第 i 行), 该行的 n 个元素都可任意填选. 再选一列 (不妨设是第 j 列), 该列中存在某个位置不能任意填选. 取 (i, j) 元为 1, $(i, \neq j)$ 元为 0, 那么在 (i, j) 元的余子式中最多只有 $n - 2$ 个元素不能任选, 由归纳假设知总可在子阵中能任意填选的地方填上 0 或 1, 使得 (i, j) 元的余子式取 ± 1 . 在此填法下, n 阶方阵 A 的行列式是 (i, j) 元的代数余子式, 即 ± 1 . 由数学归纳法知命题得证.

6 期中复习, 矩阵乘法

6.1 问题

1. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与 β_1, \dots, β_s 是 \mathbb{R}^n 中的两个线性无关组. 证明 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ 线性无关当且仅当 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle = \{0\}$.

2. 求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}.$$

3. A 是 n 阶矩阵, $\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$ 是 n 维列向量, 且 $|A| = a, |A - \alpha\alpha^T| = b$, 求 $|A + 2\alpha\alpha^T|$.

4. 设 A_{ij} 是行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中 (i, j) 元的代数余子式. 证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n & y \end{vmatrix} = Dy - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_i x_j$.

5. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}_+$, 证明 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 能被 $2!3!\cdots(n-1)!$ 整除.

6. 设数域 K 上的 n 阶方阵 A 的第 (i, j) 元是 $a_i - b_j$. 求 $\det(A)$, 并计算当 $n \geq 2$ 且 $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$ 时 $AX = 0$ 的解空间维数和一组基.

7. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 且 $|a_{ii}a_{jj}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$ 对任意 $1 \leq i \neq j \leq n$ 成立. 证明 $\det(A) \neq 0$.

8. 设 A, B 是幂等矩阵 (即 $A^2 = A, B^2 = B$), 且 $I - A - B$ 满秩, 证明 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

9. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha \neq 0, A^k\alpha = 0$, 那么 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$.

10. 记矩阵 $H = (a_{ij})$ 中 a_{ij} 表示从城市 i 到 j 的航班数. (1) 解释 H^k 的 (i, j) 元的含义; (2) 设 $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?

11. 求 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式 A , 其中 $a_{ij} = \frac{\alpha_i^n - \beta_j^n}{\alpha_i - \beta_j}, i, j = 1, 2, \dots, n$.

12. 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 非平凡. 证明: 若矩阵 A 的每一个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = a_{ij}$, 则 $|A|^{n-2} = 1$.

13. 设已知 $|\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 3, |\overrightarrow{OC}| = 4, |\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{BC}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 4$, 求混合积的绝对值 $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}|$.

6.2 解答

1. “ \Rightarrow ”: 若 $x = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r = \mu_1\beta_1 + \dots + \beta_s \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle$, 则 $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r - \mu_1\beta_1 - \dots - \mu_s\beta_s = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0 \Rightarrow x = 0$.

- “ \Leftarrow ”: 考虑 $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r + \mu_1\beta_1 + \dots + \beta_s = 0$, 这意味着 $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r = -\mu_1\beta_1 - \dots - \mu_s\beta_s \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle = \{0\} \Rightarrow \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r = 0, \mu_1\beta_1 + \dots + \mu_s\beta_s = 0$. 由两组向量 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r, \{\beta_j\}_{j=1}^s$ 各自内部的线性无关性知 $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0$, 因此整体也线性无关.

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3y_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \dots,$$

2. 利用拆项大法, 注意若有两列成比例则行列式为 0. 从而最后只会剩下 $n+1$ 个行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1y_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1}y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_ny_n \end{vmatrix},$$

, 相加得到原行列式为 $1 + \sum_{i=1}^n x_iy_i$.

$$3. \text{ 考虑函数 } f(x) = |A + x\alpha\alpha^T| = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \cdots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \cdots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix}, \text{ 因此}$$

是线性函数. 由 $f(0) = a, f(-1) = b$ 知 $f(x) = a + (a - b)x$, 因此 $f(2) = 3a - 2b$.

4. 按最后一行展开, 得到 $LHS = Dy + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i+1}x_iD_i$, 其中 D_i 是把 D 中第 i 列删去, 最后一列补上 $(x_1, \dots, x_n)^T$

得到的行列式. 再按最后一列对所有 D_i 展开, 得到 $D_i = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j}(-1)^{i+j}A_{ij}x_j$, 直接代入得到 RHS.

$$5. \text{ 注意到 } D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1 - 1) & \cdots & a_1(a_1 - 1) \cdots (a_1 - n + 2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2 - 1) & \cdots & a_2(a_2 - 1) \cdots (a_2 - n + 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n(a_n - 1) & \cdots & a_n(a_n - 1) \cdots (a_n - n + 2) \end{vmatrix} \text{ (利用初等列变换, 用后面的列加减前面的列),}$$

再将第 k 列提取公因子 $(k-1)!$, $k = 3, 4, \dots, n$ 即可.

$$6. (1) n=1 \text{ 时 } |A| = a_1 - b_1, n=2 \text{ 时 } |A| = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2). n > 2 \text{ 时由于 } A = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}, \text{ 因}$$

此 $\text{rank}(A) \leq 2$, 从而 $|A| = 0$.

$$(2) n=2 \text{ 时 } |A| \neq 0, \text{ 因此解空间只有零解, 维数为 } 0, \text{ 基是空集. } n > 2 \text{ 时, 由于 } \text{rank}(A) \leq 2 \text{ 且显然 } A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ 因}$$

此 $\text{rank}(A) = 2$, 解空间维数是 $n-2$. 因此只需解方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} X = 0$ 即可 (这个分解后的系数矩阵秩也为

$$2, \text{ 因此同解). 直接计算得到一组基为 } \eta_i = \left(\frac{b_i - b_2}{b_2 - b_1}, \frac{b_1 - b_i}{b_2 - b_1}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{第 } i \text{ 个}}, 0, \dots, 0 \right)^T, i = 3, 4, \dots, n.$$

7. 反证法. 假设 $\det(A) = 0$, $AX = 0$ 有非零解 $(c_1, \dots, c_n)^T$. 若仅有 $c_i \neq 0$, 则 A 的第 i 列全零, 与条件矛盾. 下设第 i, j 个分量不为 0, 且 $|c_i| \geq |c_j| \geq |c_k|, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$. 考察第 i 个和第 j 个等式, 有 $|a_{ii}c_i| \cdot |a_{jj}c_j| = |\sum_{k \neq i} a_{ik}c_k| \cdot |\sum_{l \neq j} a_{jl}c_l| \leq |c_j| \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \cdot |c_i| \sum_{l \neq j} |a_{jl}| \Rightarrow |a_{ii}a_{jj}| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$, 矛盾.

8. $A(I - A - B) = -AB$, 因此 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A(I - A - B)) = \text{rank}(AB)$, 同理 $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$.

9. (1) 设 $\lambda_1\alpha + \lambda_2A\alpha + \cdots + \lambda_kA^{k-1}\alpha = 0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1 = 0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2 = 0$, 以此类推知线性无关.

(2) 显然 $A^nX = 0 \Rightarrow A^{n+1}X = 0$. 若存在 $A^{n+1}\alpha = 0$ 但 $A^n\alpha \neq 0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha, A\alpha, \dots, A^n\alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$.

10. (1) 从 $a_{ij}^2 = \sum_s a_{is}a_{sj}$ 可以看出 H^k 的 (i, j) 元表示从 i 到 j 乘坐恰 k 次航班有多少种乘坐方式. (2) $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3$, 分别有 $1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 2$ 种航班选择; $2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$ 都要倒 3 次, 是最多的.

11. 利用 $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ 及行列式乘法规则 $|AB| = |A||B|$, 知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \\ \beta_1^{n-2} & \beta_2^{n-2} & \cdots & \beta_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j).$$

$$12. \text{首先容易看出 } |A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 > 0. \text{ 其次 } |A|^2 = |AA^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n \Rightarrow |A|^{n-2} = 1.$$

$$13. |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}| = \left\| \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA}^T \\ \overrightarrow{OB}^T \\ \overrightarrow{OC}^T \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} \overrightarrow{OA}^T \\ \overrightarrow{OB}^T \\ \overrightarrow{OC}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OC} \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OC}^T \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OC}^T \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OC}^T \overrightarrow{OC} \end{pmatrix}}. \text{ 由题意 } \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OA} =$$

$$4, \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OB} = 9, \overrightarrow{OC}^T \overrightarrow{OC} = 16, \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^T(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})] = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{9}{2}, \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{AC}^2) = 2, \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{BC}^2) = 8, \text{ 从而 } |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}| = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

7 可逆矩阵, 分块矩阵

7.1 问题

1. 证明可逆的上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & & 1 & \cdots & n-2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

2. 计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \cdots & n-2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ 的逆.

3. A 是 n 阶可逆矩阵, α, β 是 n 维列向量, 且矩阵 $A + \alpha\beta^T$ 可逆, 证明 $(A + \alpha\beta^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1 + \beta^TA^{-1}\alpha}$.

4. 计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix}$ 的逆, 其中 $a_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

5. A 是 n 阶方阵, 试根据 $\text{rank}(A)$ 的取值讨论 $\text{rank}(A^*)$, 其中 A^* 是它的伴随矩阵.

6. 求与任意可逆矩阵乘法可交换的矩阵构成的集合.

7. A 是 n 阶方阵 ($n \geq 3$), $A^3 = O$, 证明矩阵 $M = \begin{bmatrix} I & A \\ A & I \end{bmatrix}$ 可逆, 并求其逆.

8. 已知 $I_{m \times m} - A_{m \times n}B_{n \times m}$ 可逆, 证明 $I_{n \times n} - B_{n \times m}A_{m \times n}$ 也可逆并求其逆矩阵. 进一步, 证明两者行列式相等.

9. 矩阵 $A_{m \times m}, B_{m \times n}, C_{n \times m}, D_{n \times n}$ 满足 A 和 $E := D - CA^{-1}B$ 可逆. 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 也可逆并求其逆.

10. A 是 n 阶方阵, 证明 $\text{rank}(A - I) + \text{rank}(A^2 + A + I) = n$ 当且仅当 $A^3 = I$.

11. A, B 是 n 阶方阵, 且满足 $\text{rank}(I - AB) + \text{rank}(I + BA) = n$, 证明或否定: A 是可逆矩阵.

12. A, B, C, D 都是 n 阶方阵, $AC = CA$, $AD = CB$, 且 A 可逆. 求矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的秩.

7.2 解答

1. 将单位矩阵拼在原矩阵右边, 其行变换只需不断用上面的行加减下面的行, 此操作只会将单位矩阵变成上三角矩阵.

2. 记 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A = I + 2J + \cdots + nJ^{n-1}$. 由于 $A(I - 2J + J^2) = 0$, 因此 $A^{-1} = I - 2J + J^2$.

3. 注意到 $A + \alpha\beta^T = A(I + A^{-1}\alpha\beta^T)$, 因此 $(A + \alpha\beta^T)^{-1} = (I + A^{-1}\alpha\beta^T)^{-1}A^{-1} = (I - A^{-1}\alpha(1 + \beta^TA^{-1}\alpha)^{-1}\beta^T)A^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1 + \beta^TA^{-1}\alpha}$.

4. 利用上第 3 题结论,

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(a_1, \dots, a_n)(I_n + \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{a_1}{a_2} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}) \\ \Rightarrow A^{-1} &= (I_n - (1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}))^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{a_1}{a_2} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{diag}(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}). \end{aligned}$$

5. 当 $\text{rank}(A) = n$ 时, 由于 $AA^* = |A|I$, 从而 A^* 可逆, 因此 $\text{rank}(A^*) = n$. 当 $\text{rank}(A) = n-1$ 时, 由于 $AA^* = 0$, 且 $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rank}(A) = 1$, 又有 A 中存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 不全零, $\text{rank}(A^*) = 1$. 当 $\text{rank}(A) \leq n-2$ 时, A 中不存在 $n-1$ 阶非零子式, 因此 A^* 全零, 从而 $\text{rank}(A^*) = 0$.

6. 先验证初等矩阵 $P(j, i(1))$, 即 $AP(j, i(1)) = P(j, i(1))A$, 两边同时减去矩阵 A 得到 $AE_{ij} = E_{ij}A \Rightarrow a_{ii} = a_{jj}, a_{ij} = 0, \forall i \neq j$, 因此只能是数量矩阵, 其与所有矩阵都可交换.

7. 设 $P = \begin{bmatrix} I & O \\ -A & I \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix}$, 从而 $PMQ = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I - A^2 \end{bmatrix}$. $A^3 = O \Rightarrow (PMQ)^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I + A^2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = Q \begin{bmatrix} I & O \\ O & I + A^2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} I + A^2 & -A \\ -A & I + A^2 \end{bmatrix}$.

8. $(I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) = I - BA + B(I - AB)^{-1}A - BAB(I - AB)^{-1}A = I - BA + B(I - AB)(I - AB)^{-1}A = I$, 因此 $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$.

由于 $\begin{pmatrix} I - AB & A \\ O & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & A \\ O & I - BA \end{pmatrix}$, 两边取行列式知 $|I - AB| = |I - BA|$.

9. $\begin{pmatrix} A & B & I & O \\ C & D & O & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} A & B & I & O \\ O & D - CA^{-1}B & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B & A^{-1} & O \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & O & A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & O & A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & I & -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}$.

10. 由裴蜀定理(辗转相除法), 存在多项式 f, g 使得 $f(x)(x-1)+g(x)(x^2+x+1)=1$, 即 $f(A)(A-I)+g(A)(A^2+A+I)=I$. 从而利用分块初等行列变换,

$$\begin{bmatrix} A-I & O \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} A-I & f(A)(A-I) \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ I-A^3 & O \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} O & I \\ A^3-I & O \end{bmatrix}.$$

从而 $\text{rank}(A-I) + \text{rank}(A^2+A+I) = n + \text{rank}(A^3-I)$, 因此原命题成立.

11. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I+BA \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I+AB & O \\ O & I \end{bmatrix},$$

从而知 $\text{rank}(I+BA) = \text{rank}(I+AB)$. 因此原条件等价于 $\text{rank}(I-AB) + \text{rank}(I+AB) = n$, 由上一小题的类似结论知 $(I-AB)(I+AB) = 0 \Rightarrow (AB)^2 = I$, 因此 A 可逆.

12. 利用分块初等变换, 得 $\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$. 由于 $\text{rank}(D-CA^{-1}B) = \text{rank}(A(D-CA^{-1}B)) = 0$, 因此 $\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{rank}(A) = n$.

8 正交矩阵, 线性映射

8.1 问题

1. 记 $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $B_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, 试证明 $A_\theta A_\omega = A_{\theta+\omega}$, $B_\theta B_\omega = A_{\theta-\omega}$, $A_\theta B_\omega = B_{\theta+\omega} = B_\omega A_{-\theta}$, 并解释 A_θ, B_θ 作为 \mathbb{R}^2 上线性变换的几何含义.

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的 QR 分解.

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\text{Im}A$ 和 $\text{Ker}A$ 的一个基和维数.

4. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 所有顺序主子式都大于 0, 所有非主对角元都小于 0. 证明 A^{-1} 的每个元素都大于 0.

5. 秩为 $r (> 0)$ 的对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 证明 A 至少有一个 r 阶主子式不为 0, 且所有不等于 0 的 r 阶主子式都同号.

6. (1) $ABCD$ 是中心为原点、边与坐标轴平行的单位正方形. 求所有 \mathbb{R}^2 上所有保持该正方形不变的线性变换, 写出它们的矩阵, 并证明它们可被两个变换生成. (2) 试求出保持中心为原点的正十二面体不变的线性变换的个数.

7. 设 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, 0, 2)^T$. (1) 求 α_3 在 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 上的正交投影; (2) 求 α_3 到 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 的距离; (3) 求到 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ 的正交投影算子(用矩阵表示).

8. $\beta \in \mathbb{R}^n$ 是单位向量 ($\|\beta\|_2 = 1$), $P = I - \beta\beta^T$, $A = I - 2\beta\beta^T$. (1) 证明 P 是幂等对称矩阵; (2) 证明 A 是实对称正交矩阵, 且满足 $A^2 = I$; 计算 $\det(A)$, 并探究 A 的几何性质.

9. A, B 是 n 维线性空间上的线性变换, $AB = BA$, 证明或否定 $\text{rank}A^2 + \text{rank}B^2 \geq 2\text{rank}(AB)$.

10. A, B 是幂等变换, 证明 $\text{Ker}A = \text{Ker}B$ 当且仅当 $AB = A, BA = B$.

11. A 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明存在 $r \in \mathbb{N}$ 使得对于 $\forall s \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}A^r = \text{Ker}A^{r+s}$.

12. V_1, V_2, V_3 都是数域 F 上的有限维线性空间, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, $\psi : V_1 \rightarrow V_3$ 是两个线性映射. 证明 ψ 可以写成 $\psi = \sigma\varphi$, 其中 $\sigma : V_2 \rightarrow V_3$ 是线性映射的充要条件是 $\text{Ker}\varphi \subset \text{Ker}\psi$.

8.2 解答

1. A_θ 是逆时针旋转 θ 角, B_θ 是按逆时针方向的 $\frac{\theta}{2}$ 角做镜面反射. 有了几何含义, 验证这些矩阵乘法也就很简单了.

$$2. \text{ 直接利用 Schmidt 正交化得到 } Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{7\sqrt{102}}{102} & -\frac{19\sqrt{119}}{357} & \frac{\sqrt{7}}{21} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{102}{\sqrt{102}} & \frac{357}{\sqrt{119}} & -\frac{\sqrt{7}}{21} \\ \frac{6}{6} & \frac{102}{\sqrt{102}} & \frac{51}{25\sqrt{119}} & \frac{3}{2\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{17}{2\sqrt{102}} & \frac{357}{2\sqrt{119}} & \frac{21}{\sqrt{7}} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{51}{119} & \frac{119}{7} & \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{5\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{102}}{6} & \frac{3\sqrt{102}}{34} & \frac{3\sqrt{102}}{4\sqrt{119}} \\ 0 & 0 & \frac{17}{3\sqrt{119}} & \frac{119}{4\sqrt{119}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{7}}{7} \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ 利用行变换求简化阶梯型得 } A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 可以看出 } \text{Im}A \text{ 的一个基是前两列, 维数是 } 2.$$

4. 用数学归纳法. $n = 1$ 时显然成立. 假设 $n - 1$ 时命题为真, 那么现在来看 $A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix}$. 由顺序主子式大于 0 知 A_{n-1} 可逆, 且由

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\beta^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix} \text{ 知 } a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha > 0. \text{ 计算得到 } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1} \alpha (a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha)^{-1} \beta^T A_{n-1}^{-1} & -A_{n-1}^{-1} \alpha (a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha)^{-1} \\ -(a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha)^{-1} \beta^T A_{n-1}^{-1} & (a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha)^{-1} \end{pmatrix}. \text{ 依次验证: } a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha > 0,$$

并利用归纳假设知 A_{n-1}^{-1} 每个元素大于 0, $A_{n-1}^{-1} \alpha$ 和 $\beta^T A_{n-1}^{-1}$ 每个元素小于 0. 定睛一看, A^{-1} 每个元素也都大于 0 了.

5. (1) 取 A 的某个列极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$, 对应的行极大线性无关组为 $\alpha_{i_1}^T, \dots, \alpha_{i_r}^T$. 下证 $A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ i_1, \dots, i_r \end{pmatrix} \neq 0$.

这是因为矩阵 $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r})$ 的秩也是 r , 而其第 i_1, \dots, i_r 行作为 $\alpha_{i_1}^T, \dots, \alpha_{i_r}^T$ 的缩短组可以表出该矩阵的其他所有行向量, 因此构成一个极大行线性无关组.

(2) 存在可逆矩阵 P, Q 使得 $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$. 由于 A 对称, 因此 $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^T$, 即是

$$P^{-1} Q^T \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q P^{-T}.$$

对应分块 $P^{-1} Q^T = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}$, 代入得到 $H_1^T = H_1, H_3 = O$, 从而 $Q = P \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ O & H_4 \end{pmatrix}, A = P \begin{pmatrix} H_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^T$, 且 H_1 是对称满秩矩阵. 因此由 Binet-Cauchy 定理,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} &= \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_r \leq n} P \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} H_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^T \right] \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_r \leq n} P \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_r \leq n} \begin{pmatrix} H_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_r \\ \mu_1, \dots, \mu_r \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} \mu_1, \dots, \mu_r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_r \leq n} P \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} \\ &= \left[P \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} \right]^2 |H_1|, \end{aligned}$$

于是所有不为 0 的主子式都与 $|H_1|$ 同号.

6. (1) 只需确定基的像. e_1 可以有 4 种选择, e_2 在 e_1 的基础上有 2 种选择, 因此有 8 种: $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$. 它

们可由逆时针旋转 90° 和关于 y 轴的反射这两个变换生成, 即 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 只需确定其中任意三个点 (对应的向量) 的像, 这里我们考虑共面的某三个点. 因为有 20 个顶点, 每个顶点又有 3 个邻结点, 和这 2 个点具有原始度量关系的点又有 2 个, 因此有 $20 \times 3 \times 2 = 120$ 个线性变换.

7. $\text{span}\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ 的一组标准正交基是 $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ 和 $\beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$. (1) 投影是 $= (\alpha_3, \beta_1)\beta_1 + (\alpha_3, \beta_2)\beta_2 = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$. (2) 距离是 $|((0, 1, 0, 2) - (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5}))| = |(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})| = \frac{\sqrt{35}}{5}$. (3) 向量 $\alpha = (x, y, z, w)$ 的投影是 $(\alpha, \beta_1)\beta_1 + (\alpha, \beta_2)\beta_2 = (\frac{3x+y+2z+w}{5}, \frac{x+2y-z+2w}{5}, \frac{2x-y+3z-w}{5}, \frac{x+2y-z+2w}{5})$, 因此算子是

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. (1) $P^2 = (I - \beta\beta^T)(I - \beta\beta^T) = I - 2\beta\beta^T + \beta(\beta^T\beta)\beta^T = I - \beta\beta^T = P$, 对称性显然.

(2) 对称性显然, 且 $A^T A = A^2 = I - 4\beta\beta^T + 4\beta\beta^T\beta\beta^T = 1$, 因此正交. $|A| = |I - 2\beta\beta^T| = 1 - 2\beta^T\beta = -1$. 注意到 P 是在 $\langle\beta\rangle^\perp$ 上的投影, 因此 A 是关于 $\langle\beta\rangle^\perp$ 作镜面反射.

9. 结论不对. 可取 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} J & \\ & J \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} J & I \\ O & J \end{pmatrix}$. $A^2 = O$, $B^2 = \begin{pmatrix} O & 2J \\ O & O \end{pmatrix}$, $AB = BA = \begin{pmatrix} O & J \\ O & O \end{pmatrix}$.

10. “ \Rightarrow ”: $\forall \alpha, A(A\alpha - \alpha) = 0 \Rightarrow B(A\alpha - \alpha) = 0 \Rightarrow BA = B$. 同理 $AB = A$.

“ \Leftarrow ”: $\forall \alpha \in \text{Ker } A$, $B\alpha = BA\alpha = 0 \Rightarrow \text{Ker } A \subset \text{Ker } B$. 同理 $\text{Ker } B \subset \text{Ker } A$.

11. 先证明存在 $r \in \mathbb{N}$ 使得 $\text{Ker } A^r = \text{Ker } A^{r+1}$. 显然有无穷递升链 $\dim(\text{Ker } A) \leq \dim(\text{Ker } A^2) \leq \dim(\text{Ker } A^3) \leq \dots$, 注意到这条链有上界 n , 因此必然存在 r 使得 $\dim(\text{Ker } A^r) = \dim(\text{Ker } A^{r+1})$, 这意味着 $\text{Ker } A^r = \text{Ker } A^{r+1}$. 现在开始推广到 $r+s$: 由于 $A^{r+2}\alpha = 0 \Leftrightarrow A^{r+1}(A\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^r(A\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^{r+1}\alpha = 0$, 以此类推知 $\text{Ker } A^{r+s} = \text{Ker } A^r, \forall s \in \mathbb{N}$.

12. 必要性是显然的, 下面证明充分性. 取 $\text{Ker } \varphi$ 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, 并扩充成 $\text{Ker } \psi$ 的基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$, 又再扩充成 V_1 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_t$. 显然 $\varphi(\beta_1), \dots, \varphi(\beta_s), \varphi(\gamma_1), \dots, \varphi(\gamma_t)$ 是 $\text{Im } \varphi$ 的一组基, 并又可扩充成 V_2 的一组基 $\varphi(\beta_1), \dots, \varphi(\beta_s), \varphi(\gamma_1), \dots, \varphi(\gamma_t), \delta_1, \dots, \delta_l$. 现在, 对于任意 $\beta = \sum_{i=1}^s a_i \varphi(\beta_i) + \sum_{j=1}^t b_j \varphi(\gamma_j) + \sum_{k=1}^l c_k \delta_k \in V_2$, 只需定义 $\sigma(\beta) = \sum_{j=1}^t b_j \psi(\gamma_j)$ 即可.

9 特征值, 特征向量

9.1 问题

1. 矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 诱导了 \mathbb{R}^2 上的线性变换 A . (1) 写出 A 在基 $\alpha_1 = (1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -1)^T$ 下的矩阵; (2) 求在变换 A 下保持不动的直线; (3) $\alpha = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2$, 求 $A\alpha$ 在基 α_1, α_2 下的坐标.

2. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量. 你能求出任意一个三阶矩阵的特征值和特征向量吗?

3. 3 阶矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 对应的特征向量是 $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$, 求 A^m . 你能推广到 e^A 吗?

4. A, B 是 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵. 证明 AB 与 BA 有相同的非零特征值, 且这些特征值的几何重数和代数重数也相同.

5. 利用矩阵方法求出斐波拉契数列的通项公式.

6. A 是第一类 3 阶正交矩阵. (1) 证明 $\lambda = 1$ 是 A 的一个特征值. (2) 设 α_1 是 $\lambda = 1$ 的一个单位特征向量, 将其扩充为一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 证明 $\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 仍是一组标准正交基. (3) 已知 $A\alpha_2 = (\cos \theta)\alpha_2 + (\sin \theta)\alpha_3$, 求 $A\alpha_3$. (4) 探究 A 的几何性质.

7. A 是第二类 3 阶正交矩阵. (1) 证明 $\lambda = -1$ 是 A 的一个特征值. (2) 设 α_1 是 $\lambda = -1$ 的一个单位特征向量, 将其扩充为一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 证明 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. (3) 探究 A 的几何性质.

8. 证明任一复矩阵一定相似于一个上三角矩阵.

9. 求 n 阶循环矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ 的行列式.

10. A, B, C 分别是 $n \times n, m \times m, n \times m$ 矩阵, 其中 $n > m$, $\text{rank}(C) = m$, 且 $AC = CB$. 证明 $|\lambda I_m - B|$ 整除 $|\lambda I_n - A|$.
11. A, B 分别是 m, n 阶方阵, 且无公共特征值. 求解矩阵方程 $AX = XB$ (你可以设定一些自由变元来表示答案).
12. n 维空间 V 上的线性变换 A 有 $n+1$ 个特征向量, 且其中任意 n 个线性无关. 求所有可能的 A 构成的集合.
13. A, B 是二阶实方阵, 且满足 $A^2 + B^2 = O$. 证明 $\det(AB - BA) \leq 0$.

9.2 解答

1. (1) 矩阵是 $(\alpha_1, \alpha_2)^{-1} A (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (2) 保持不动的直线即特征向量, 先解 $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 4$, 然后求得特征向量分别是 $\beta_1 = (1, -1)^T, \beta_2 = (2, 1)^T$, 即这两个向量所对应的直线保持不变. (3) 根据 (1), 坐标为 $(4y_1, y_1 + y_2)$.
2. 先解 $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (重根), 10, 对应的特征向量分别是 $(2, -1, 0)^T, (2, 0, 1)^T, (1, 2, -2)^T$. 一元三次实方程在实数范围内必有解, 剩下两个解要么都是实数要么是共轭复数.

$$3. A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \lambda_3^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \lambda_1^m - \lambda_3^m \\ 0 & \lambda_2^m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^m \end{pmatrix}.$$

4. WLOG $m \geq n$. 由 $|I - AB| = |I - BA|$ 知 $|\lambda I - AB| = \lambda^m |I - \lambda^{-1} AB| = \lambda^m |I - \lambda^{-1} BA| = \lambda^{m-n} |\lambda I - BA|$, 因此非零特征值的代数重数相同. 另一方面, 若 $AB\mu = \lambda\mu$ 对于某个特征值 λ 有解空间 $\langle \mu_1, \dots, \mu_d \rangle$ (基), 则 $\langle B\mu_1, \dots, B\mu_d \rangle$ 属于 $BAX = \lambda X$ 的解空间, 且它们线性无关 ($k_1 B\mu_1 + \dots + k_d B\mu_d = 0 \Rightarrow k_1\mu_1 + \dots + k_d\mu_d \in \text{Ker } B \Rightarrow \lambda(k_1\mu_1 + \dots + k_d\mu_d) = AB(k_1\mu_1 + \dots + k_d\mu_d) = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_d = 0$). 同理反过来也成立, 因此它们的解空间维数相同, 即非零特征值的几何重数相同.

5. 先写出递推公式 $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$, 做特征值分解 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \\ & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$,

由于 $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$, 利用特征值分解可推导 $a_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. 代入 $n = 0, 1$ 知 $A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, 因此 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

6. (1) $|I - A| = -|A - I| = -|A||I - A^{-1}| = -|I - A^T| = -|I - A| \Rightarrow |I - A| = 0$.

(2) 正交矩阵诱导等距同构, 因此 $\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ (即 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$) 仍是标准正交基.

- (3) 原题可转化为已知 A 的前两列为 $(1, 0, 0)^T, (0, \cos \theta, \sin \theta)^T$, 去补全第三列. 显然是 $(0, -\sin \theta, \cos \theta)^T$, 因此 $A\alpha_3 = -(\sin \theta)\alpha_2 + (\cos \theta)\alpha_3$.

(4) 绕过原点、线向为 α_1 的直线旋转 θ 角.

7. (1) $|I + A| = |A||I + A^{-1}| = -|I + A^T| = -|I + A| \Rightarrow |I - A| = 0$.

(2) 原题可转化为已知 A 的前两列为 $(-1, 0, 0)^T, (0, \cos \theta, \sin \theta)^T$, 去补全第三列. 过程与 6(3) 类似.

(3) 绕过原点、线向为 α_1 的直线旋转 θ 角, 再关于平面 $\langle \alpha_1 \rangle^\perp$ 作镜面反射.

8. 对矩阵级数用数学归纳法. $n = 1$ 时显然为真. 假设 $n - 1$ 阶复矩阵必然相似于一个上三角矩阵, 考虑 n 阶矩阵 A . 设 λ_1 是某个特征值, α_1 是对应的某个特征向量. 将 α_1 扩充为 \mathbb{C}^n 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 并记 $P_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. 那么

$$P_1^{-1} AP_1 = (P_1^{-1} A\alpha_1, \dots, P_1^{-1} A\alpha_n) = (\lambda_1 P_1^{-1} \alpha_1, \dots, P_1^{-1} A\alpha_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha^T \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha \in \mathbb{C}^{n-1}$, B 是 $n - 1$ 级复矩阵. 由归纳假设, 存在 P_2 使得 $P_2^{-1} BP_2$ 是上三角矩阵. 定义 $P = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$, 易

知 P 可逆, 且满足

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix} P_1^{-1}AP_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha^T P_2 \\ 0 & P_2^{-1}BP_2 \end{pmatrix},$$

此时 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵.

9. 记 $J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A = a_1I + a_2J + a_3J^2 + \cdots + a_nJ^{n-1}$. 注意到 J 的特征多项式是 $\lambda^n - 1$, 因此其特征值为 $w_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, 从而 A 的特征值是 $\sum_{i=1}^n a_i w_k^{i-1}$, 这意味着 $|A| = \prod_{k=1}^n (\sum_{i=1}^n a_i w_k^{i-1})$.

10. 由于 C 列满秩, 因此存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $C = P \begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}$, 从而 $AC = CB$ 可写为 $(P^{-1}AP)P^{-1}C = P^{-1}CB$.

对 $P^{-1}AP$ 作分块 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, 其中 A_1 是 m 阶方阵, 代入上式知 $A_1 = B, A_3 = O$. 于是 $|\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - P^{-1}AP| = |\lambda I_m - B - A_2| = |\lambda I_m - B||\lambda I_{n-m} - A_4|$, 此即整除关系.

11. 方程只有零解. 假设存在 $AC = CB$, 并且 $\text{rank}(C) = r \geq 1$. 则存在 m, n 阶可逆矩阵 P, Q 使得 $PCQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

由 $AC = CB$ 知 $(PAP^{-1})(PCQ) = (PCQ)(Q^{-1}BQ)$, 并作分块 $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 代入计算得到 $A_1 = B_1, B_2 = O, A_3 = O$. 因此 A, B 的特征多项式分别为 $|\lambda I_m - A| = |\lambda I_m - PAP^{-1}| = |\lambda I_r - A_1||\lambda I_{m-r} - A_4|, |\lambda I_n - B| = |\lambda I_n - Q^{-1}BQ| = |\lambda I_r - A_1||\lambda I_{n-r} - B_4|$. 这与无公共特征值矛盾.

12. A 只能是数乘变换. 考虑特征向量 η_0, \dots, η_n 对应于特征值 $\lambda_0, \dots, \lambda_n$. 考虑 $\eta_0 = a_1\eta_1 + \cdots + a_n\eta_n$, 显然 a_1, \dots, a_n 均不为 0(否则剔除它对应的 η_i 后剩余的 n 个向量线性相关). 两边同时左乘 A 知 $a_1(\lambda_1 - \lambda_0)\eta_1 + \cdots + a_n(\lambda_n - \lambda_0)\eta_n = 0 \Rightarrow a_1(\lambda_1 - \lambda_0) = \cdots = a_n(\lambda_n - \lambda_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. 这表明其是数乘变换.

13. 注意到 $(A+iB)(A-iB) = A^2 + B^2 - i(AB - BA)$, 因此 $\det(AB - BA) = -\det(A+iB)\det(A-iB)$. 若 $A+iB$ 有特征值 λ_1, λ_2 , 则 $A-iB$ 有特征值 $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2$ (两边取共轭), 从而 $-\det(A+iB)\det(A-iB) = -\lambda_1\lambda_2\overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2 = -|\lambda_1\lambda_2|^2 \leq 0$.

10 矩阵的相似与对角化

10.1 问题

1. 对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 找到正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $A = PDP^T$.

2. 分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ 可对角化, 其中 A, B 是方阵. 问是否有 A, B 都可对角化?

3. 方阵 A, B 可对角化, 问是否有 AB 可对角化? 若加上 A, B 可交换条件呢?

4. 证明: 在复数域上, (1) 若矩阵 A, B 可交换, 则 A, B 有公共的复特征向量; (2) 若矩阵 A, B 可交换, 则存在可逆复矩阵 U 使得 $U^{-1}AU$ 和 $U^{-1}BU$ 同为上三角矩阵.

5. $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_2 & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$ 是分块上三角矩阵, 对角块为 n_i 阶上三角矩阵 $A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$, 且 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 互异. 证明 A 可对角化当且仅当 $A_i = \lambda_i I_{n_i}$.

6. n 阶实矩阵 A, B 在复数域上相似, 问它们是否在实数域上相似.

7. A, B 是 n 阶复矩阵, $\text{rank}(AB - BA) \leq 1$, 证明 A, B 可同时上三角化.

【编者注】与第 4(2) 题相比, 本题条件有所放松 (秩要求从 0 放宽到 1).

8. 考虑数域 F 上的 n 阶方阵构成的线性空间 $M_n(F)$. 定义线性运算 $\sigma(A) = A^T$, 求出它的特征值和对应的特征子空间, 并证明它可以对角化.

9. n 维向量 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, \dots, b_n)^T, A = \alpha\beta^T$, 且 $a_1b_1 \neq 0$. 证明 A 可对角化的充要条件是 $\alpha^T\beta \neq 0$.

10. n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明 $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$.

11. (Roth 定理) $A_{m \times m}, B_{n \times n}, C_{m \times n}$. 证明: 若存在矩阵 $X_{m \times n}$ 使得 $AX - XB = C$, 则矩阵 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ 与矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 相似. 该命题的逆命题是否也成立?

12. 集合 S 由一些可对角化的 n 阶方阵构成, 且其中任意两个矩阵都可交换. 问是否有 S 中所有矩阵都可同时对角化.

【编者注】本题是第 3 题的一个推广.

10.2 解答

1. $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = -3(\text{重根}), 6$, 对应的一组标准正交特征向量是 $(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)^T, (\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, -\frac{\sqrt{5}}{3})^T, (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$.

因此 $D = \text{diag}(-3, -3, 6), P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{0}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

2. 由题意, 存在可逆分块矩阵 $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}$ 使得 $A \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & D_2 \end{bmatrix}$, 其中 D_1, D_2 是对角矩阵. 这得到 $BU_3 = U_3D_1, BU_4 = U_4D_2$. 取一个 $[U_3, U_4]$ 的列极大线性无关组知 B 可对角化. 对于 A , 注意到只需证明 A^T 可对角化, 对原矩阵取转置然后类似证明即可.

3. (1) 有反例 $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 可以对角化. 不妨设 A 是对角矩阵 $\text{diag}(\lambda_1 I_1, \dots, \lambda_s I_s)$, 并将 B 按照这种格式分块 $\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{ss} \end{bmatrix}$, 计算 $AB = BA$ 知 $B_{ij} = 0, \forall i \neq j$. 由第二题结论知 B 可对角化 \Rightarrow 每个 B_{ii} 均可对角化, 因此 AB 可对角化.

【编者注】本题也说明了 A, B 可同时对角化. 因为可将 B_{ii} 对角化时对应的基矩阵 U_{ii} 按对角线拼接成大矩阵 U , 在此矩阵对应的基下 A, B 都是对角阵.

4. (1) 记 A 对应于特征值 λ 的特征子空间为 V_λ . $\forall \alpha \in V_\lambda, AB\alpha = BA\alpha = \lambda B\alpha \Rightarrow B\alpha$ 也是 A 属于 λ 的特征向量 $\Rightarrow V_\lambda$ 是 B 的不变子空间. 从而只需取 $B|_{V_\lambda}$ 的一个特征向量即可.

(2) 对空间维数用数学归纳法. 考虑 A, B 的某个公共单位特征向量 α_1 , 扩充成一组标准正交基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. 在这组基下 A, B 的矩阵分别是 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_1 & D_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$. 它们可交换, 因此 A_1, B_1 也可交换. 可定义 $\tilde{A}_1 = P_{\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle} A_1 |_{\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle}$, 其中 $P_{\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle}$ 是平行于 $\langle \alpha_1 \rangle$ 的投影算子, 然后类似定义 \tilde{B}_1 . 因此由归纳假设存在 $\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ 上的一组基 β_2, \dots, β_n 使得 A_1, B_1 为上三角矩阵. 此时, 在基 $\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下, A, B 都是上三角矩阵.

5. 容易验证特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 每个特征值分别为 n_i 重. 由于 A 可对角化当且仅当特征值的对应几何重数也为 n_i 重, 而这当且仅当 $A_i = \lambda_i I_{n_i}$ (考虑 $\text{rank}(A)$ 即可, 取其主子式).

6. 设 $(Q_1 + iQ_2)A = B(Q_1 + iQ_2)$, 且它们都是实矩阵. 那么 $Q_1 A = B Q_1, Q_2 A = B Q_2$. 由于 $|Q_1 + iQ_2| = 0$ 至多只有有限多个解 ($Q_2 = 0$ 是平凡情形), 从而存在 λ_0 使得 $Q_0 := Q_1 + \lambda_0 Q_2$ 可逆, 此时 $A = Q_0^{-1} B Q_0$, 因此实相似.

7. 只需找到公共的低维不变子空间, 剩下的可对维数归纳. 不妨设 $\det A = 0$, 否则只需将 A 换成 $A - \lambda_A I$, 其中 λ_A 是 A 的某个特征值. 若 $\text{Ker}A$ 不是 B 的不变子空间, 则存在 $\alpha \in \text{Ker}A$ 使得 $B\alpha \notin \text{Ker}A$. 此时 $(AB - BA)\alpha = AB\alpha \neq 0$, 这也意味着 $\text{Im}(AB - BA) = \text{span}\{AB\alpha\}$. 从而 $\forall \beta \in \mathbb{C}^n, (AB - BA)\beta = \lambda_B AB\alpha \Rightarrow BA\beta = AB(\beta - \lambda_B \alpha)$, 这表明 $\text{Im}A$ 是 B 的不变子空间. 因此 $\text{Ker}A, \text{Im}A$ 中必有 B 的不变子空间, 由 $\det A = 0$ 知除非 $A = 0$, 否则此问题已降维.

8. 注意到 $\sigma^2(A) = A$. 从而有 2 个特征值 ± 1 , 对应的特征子空间为 $\text{span}\{E_{11}, \dots, E_{nn}, E_{ij} + E_{ji}, \dots\}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$) 和 $\text{span}\{E_{ij} - E_{ji}, \dots\}$ ($1 \leq i \neq j \leq n$). 它们维数加起来是 n^2 , 因此可以对角化.
9. 容易验证 $\text{rank}(A) = n - 1$, 且 $|\lambda I - A| = \lambda^{n-1} |\lambda * 1 - \alpha^T \beta| \Rightarrow A$ 有特征值 0(($n - 1$ 重) 和 $\alpha^T \beta$, 且特征值 0 的几何重数是 $n - 1$. 因此若 $\alpha^T \beta \neq 0$, 正好有 n 个特征向量; 若 $\alpha^T \beta = 0$, 只有 $n - 1$ 个特征向量.
10. 注意到 $A^2 - A = O$, 用类似于第 9 次习题课第 5 题的办法知 A 可对角化且有特征值 0, 1. 因此 A 相似于对角矩阵 $\text{diag}(I_r, O_{n-r})$. 由于相似矩阵具有相同的秩和迹, 因此 $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$.

11. (1) $\begin{bmatrix} I & X \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}.$

(2) 成立. 记 $V = F^{(m+n) \times (m+n)}$, 构造 V 上的线性变换 $\varphi_1(Y) := \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, $\varphi_2(Y) := \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. 由于 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 相似, 因此存在可逆矩阵 $T \in V$ 使得 $T^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. 简单计算得 $\varphi_2(Y) = T\varphi_1(T^{-1}Y)$, 这表明 $Y \in \text{Ker}\varphi_2 \Leftrightarrow T^{-1}Y \in \text{Ker}\varphi_1$, 即 $\dim(\text{Ker}\varphi_1) = \dim(\text{Ker}\varphi_2)$. 将 Y 分块为 $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$, 计算可知

$$\begin{aligned} \text{Ker}\varphi_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} : AP = PA, AQ = QB, BR = RA, BS = SB \right\}, \\ \text{Ker}\varphi_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} : AP + CR = PA, AQ + CS = QB, BR = RA, BS = SB \right\}. \end{aligned}$$

再构造线性映射 $\mu_i : \text{Ker}\varphi_i \rightarrow F^{n \times (m+n)}$, $\mu_i \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = (R, S)$, $i = 1, 2$. 由于

$$\text{Ker}\mu_1 = \text{Ker}\mu_2 = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ O & O \end{pmatrix} : AP = PA, AQ = QB \right\}, \text{Im}\mu_2 \subset \text{Im}\mu_1 = \{(R, S) : BR = RA, BS = SB\},$$

因此由维数关系知 $\text{Im}\mu_1 = \text{Im}\mu_2$. 注意到 $\begin{pmatrix} O & O \\ O & -I \end{pmatrix} \in \text{Ker}\varphi_1$, 因此 $(O, -I) \in \text{Im}\varphi_1 = \text{Im}\varphi_2$, 从而必然存在某个 P, Q 使得 $\begin{pmatrix} P & Q \\ O & -I \end{pmatrix} \in \text{Ker}\varphi_2$, 此时 $AQ - QB = C$.

【编者注】Roth 定理的另一部分: $AX - YB = C$ 有解 X, Y 的充要条件是 $\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$. 有兴趣的读者可以试着自己探究证明, 利用分块矩阵的行列变换技巧.

12. 考虑集合 $M = \{\phi_i \in \text{End}_K(V) : \phi_i \phi_j = \phi_j \phi_i, \text{且 } \phi_i \text{ 可对角化}, \forall i, j \in I\}$, 然后对维数用数学归纳法. $n = 1, 2$ 时结论显然成立. 假设对一切维数小于 n 的线性空间成立, 下面考虑 n 维空间. 任取某非数乘变换 $\phi_0 \in M$, 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 是其特征值, 对应重数为 n_1, \dots, n_s , 且 $\sum_{j=1}^s n_j = n$, 特征子空间为 V_1, \dots, V_s . 与该分块单位矩阵可交换的矩阵必然也是相应的分块对角矩阵 (即 V_j 都是 ϕ_i 的不变子空间), 且所有 ϕ_i 在 V_j 上的限制都可交换. 因此由归纳假设, 存在 V_j 的一组基 $\xi_{j1}, \dots, \xi_{jn_j}$ 使得 $\phi_i|_{V_j}$ 在这组基下的矩阵都是对角阵. 然后把这 s 组基按顺序拼接起来即可.

11 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 秋高等代数 I 习题课 6 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.