高等代数 I 习题课讲义 (2025 秋)

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 9 月 26 日

目录

1 第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 是否存在二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 其图像经过下述 4 个点: $A(1,2), Q(-1,3), M(-4,5), N(0,2)$?

2. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{cases}$.

3. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D. 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

4. a 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$ 有解? 当有解时, 求出它的所有解.

5. 解下述线性方程组: $\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_1 \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n \end{cases}$, 其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 且 $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} \neq -1$.

6. (1) 求复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集合; (3) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1, y_2, y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解?

7. 设 $\alpha_1 = (1,1,4), \alpha_2 = (-2,1,5), \alpha_3 = (a,2,10), \beta = (1,b,-1)$. 当 a, b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

8. 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, $\beta = \sum_{j=1}^{s} b_j \alpha_j$. 如果 $b_i \neq 0$, 证明用 β 替换 α_i 得到的向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 也线性无关.

9. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 表出任何向量–如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

10. 求单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线.

11. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$ 的方式唯一.

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

1.2 解答

1. 直接代入求解 $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a - b + c = 3 \\ 16a - 4b + c = 5 \\ c = 2 \end{cases}$, 发现无解.

2. $\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-4&1\\0&-7&3&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\textcircled{3}-=\textcircled{1}}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&0&-3\\0&-7&3&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\textcircled{3}-=5*\textcircled{2}\\ \textcircled{4}+=7*\textcircled{2}}}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&-4&8&-24\end{bmatrix}\xrightarrow{\textcircled{4}+=2*\textcircled{3}}$
$\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix}\Rightarrow(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-8,3,6,0).$

3. 注意 A,B,C,D 的比例和为 1, 因此 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\8&6&3&2&5\\5&25&10&15&12\\15&5&20&10&15\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\textcircled{2}-=8*\textcircled{1}\\ \textcircled{3}-=5*\textcircled{1}\\ \textcircled{4}-=15*\textcircled{1}}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&20&5&10&7\\0&-10&5&-5&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\textcircled{3}+=10*\textcircled{2}\\ \textcircled{4}-=5*\textcircled{2}}}$
$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&30&25&15\end{bmatrix}\xrightarrow{\textcircled{4}+=\frac{2}{3}*\textcircled{3}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&0&-\frac{25}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, 因此解是 $(\frac{7}{25},\frac{16}{75},\frac{7}{15},\frac{1}{25})$.

4. $\begin{bmatrix}1&-4&2&-1\\-1&11&-1&3\\3&-5&7&a\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\textcircled{2}+=\textcircled{1}\\ \textcircled{3}-=3*\textcircled{1}}}\begin{bmatrix}1&-4&2&-1\\0&7&1&2\\0&7&1&a+3\end{bmatrix}$. 因此有解当且仅当 $a=-1$, 通解是 $\begin{cases}x_1=-\frac{18}{7}x_3+\frac{1}{7}\\ x_2=-\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}\end{cases}$.

5. 令 $y=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 原方程组改写为 $\begin{cases}y+a_1x_1=b_1\\ y+a_2x_2=b_2\\ \cdots\\ y+a_nx_n=b_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1-y}{a_1}\\ x_2=\dfrac{b_2-y}{a_2}\\ \cdots\\ x_n=\dfrac{b_n-y}{a_n}\end{cases}$. 全部相加得到关于 y 的一元一次方程, 解得 $y=\dfrac{1}{1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{b_i}{a_i}$. 代入上式得到原线性方程组的解.

6. (1) $\begin{bmatrix}1&-i&-1\\2&2&-2\\i&1+i&-i\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\textcircled{2}-=2*\textcircled{1}\\ \textcircled{3}-=i*\textcircled{1}}}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&i&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{i}{2+2i}*\textcircled{2}}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\textcircled{2}*=\frac{1}{2+2i}}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.
(2) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{C}\}$. (3) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{R}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1,\frac{y_2-2y_1}{2+2i},y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1=0$ 时才有解.

7. $\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\1&1&2&b\\4&5&10&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\textcircled{2}-=\textcircled{1}\\ \textcircled{3}-=4*\textcircled{1}}}\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\0&3&2-a&b-1\\0&13&10-4a&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{13}{3}*\textcircled{2}}\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\0&3&2-a&b-1\\0&0&\frac{4}{3}+\frac{1}{3}a&-\frac{13}{3}b-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$. 因此, 当 $a\neq-4$ 或 $a=-4,b=-\frac{2}{13}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

8. 设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i\beta+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s=0\Leftrightarrow k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i(b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s)+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s=0\Leftrightarrow(k_1+k_ib_1)\alpha_1+\cdots+(k_{i-1}+k_ib_{i-1})\alpha_{i-1}+k_ib_i\alpha_i+(k_{i+1}+k_ib_{i+1})\alpha_{i+1}+\cdots+(k_s+k_ib_s)\alpha_s=0$. 由线性无关性知 $k_1+k_ib_1=\cdots=k_{i-1}+k_ib_{i-1}=k_ib_i=k_{i+1}+k_ib_{i+1}=\cdots=k_s+k_ib_s=0$, 由于 $b_i\neq0$, 因此 $k_i=0$, 进一步得到 $k_1=\cdots=k_s=0$, 这也意味着 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性无关.
9. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow$ 表出 0 向量唯一 $\Leftrightarrow(k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_s=0)$.

10. $(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x-z=k(1-y) \\ x+z=\dfrac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x+ky-z=k \\ kx-y+kz=1 \end{cases}$. 特别地, 当 $y=\pm 1$ 时, $z=\pm x$ 也是位于该曲面上的直线.
11. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}\Leftrightarrow \sqrt{3}=\dfrac{a_1-a_2}{b_2-b_1}\in\mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$, $\gcd(a,b)=1$, 那么 $a^2=3b^2\Rightarrow 3|a\Rightarrow 9|a^2\Rightarrow 3|b^2\Rightarrow 3|b$, 矛盾.
12. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})=\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})\Rightarrow 9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5}|3\times 3$ 而 $2+\sqrt{-5}\not|3$, 因此不是素数.

2 线性相关性, 秩

2.1 问题

1. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.
2. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
3. 作初等行变换将矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求 A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a,b 取何值时, 向量 $(3,a,b,b,3)$ 属于 A 的行空间?
4. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$; (2) $\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3+\alpha_4$; (3) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$; (4) $\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+8\alpha_4,\alpha_2+5\alpha_3+\alpha_4,3\alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$.
5. 证明: 若向量组 I 能线性表出向量组 II, 且 $\mathrm{rank}(\mathrm{I})=\mathrm{rank}(\mathrm{II})$, 则向量组 II 也能表出向量组 I.
6. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 并且有 $\beta_i=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r,\forall i=1,2,\cdots,s$. 证明若矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times r}$ 列向量线性无关, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 也能线性表出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$.
7. 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,\forall 1\le i\le n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明主对角占优矩阵满秩.
8. 证明秩等式 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$ 和秩不等式 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\ge\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$.
9. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$, $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.
10. 设 $W=\{f(x)|f(1)=0,f(x)\in\mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.
11. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.

2.2 解答

1. 显然矩阵 A 的秩至少为 2(第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2, 因此 $\lambda=0$, 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4

列线性表出. 综上, $\lambda=0$ 时秩为 2, 否则为 3.

2. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1+3\alpha_2=\alpha_3$, $-5\alpha_1-4\alpha_2=\alpha_4$;

(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\frac{3}{2}\beta_2-\frac{1}{2}\beta_3=\beta_1$.

3. A 的简化阶梯型矩阵是 $A=\begin{bmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&-1&0&5\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$. (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是 β_1,β_2,β_4, 且 $\beta_3=2\beta_1-\beta_2,\beta_5=3\beta_1+5\beta_2-\beta_4$. (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$, 且 $\alpha_3=-\frac{31}{9}\alpha_1-\frac{55}{9}\alpha_2+\frac{17}{9}\alpha_4,\alpha_5=-\frac{20}{9}\alpha_1-\frac{23}{9}\alpha_2+\frac{22}{9}\alpha_4$. (3) 仔细计算即可. $a=4,b=2$.

4. (1) 线性相关; $(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$. (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这有五个向量却只有四个自由度.

5. 设 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量 α, 由于组 I 能表出 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$, 从而 $\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha)\le s$, 即 $\beta_1,\cdots,\beta_s,\alpha$ 线性相关. 由于 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 因此它们能表出 α.

6. 只需证明能表出 α_1. 利用高斯消元法去解方程 $\beta_{i1}=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r$, 由于 B 列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成 $\begin{bmatrix}I_{r\times r}\\0_{(s-r)\times r}\end{bmatrix}$(可用递推法或归纳法证明之), 从而 α_1 能被 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性表出.

7. 反证法. 假设 A 的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$. 我们不妨设在这 n 个系数里面 k_1 的绝对值最大, 那么就有 $k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n}=0$. 但是 $|k_1a_{11}+k_2a_{12}+\cdots+k_na_{1n}|\ge|k_1a_{11}|-|k_2a_{12}|-\cdots-|k_na_{1n}|\ge|k_1a_{11}|-|k_1|(|a_{12}|+\cdots+|a_{1n}|)>0$, 矛盾. 因此 A 满秩.

8. (1) 设 A 的一个列极大线性无关组是 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$, B 的一个列极大线性无关组是 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}$. 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix}\alpha_{i_1}\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\alpha_{i_r}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\beta_{j_1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\\beta_{j_s}\end{pmatrix}$ 线性无关, 且可以分别用对应小矩阵 A,B 的相同系数表出其他大矩阵的列向量, 因此这是一个大矩阵的列极大线性无关组, 有第一个秩等式.

(2) 利用线性无关的定义可以验证 $\begin{pmatrix}\alpha_{i_1}\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\alpha_{i_r}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma_{j_1}\\\beta_{j_1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\gamma_{j_s}\\\beta_{j_s}\end{pmatrix}$ 线性无关, 其中 γ_{j_k} 是矩阵 C 对应于 j_k 的列向量, 因此大矩阵的秩至少是 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$, 有第二个秩不等式. 这里我们无法判断这是不是一个大矩阵的列极大线性无关组, 因此可以严格取到大于号. 一个例子是 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 其中 $A=(0),B=(0),C=(1)$.

9. 由矩阵满秩知 $(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$ 和 $(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$ 线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证 $x_3+k(x_1-x_2)=x_1+t(x_2-x_3),x=a,b,c$ 对于 k,t 是否有解. 由于矩阵满秩, 合并同类项知该方程系数必须满足 $t+1=k-1=t+k=0$, 因此 $t=-1,k=1$. 从而两直线相交.

10. (1) 容易证明对 $\forall f(x),g(x)\in W\Rightarrow af(x)+bg(x)\in W$, 因此是线性子空间. (2) 令 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$, $f(1)=0\Rightarrow a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=0$, 因此 $f(x)=a_1(x-1)+a_2(x^2-1)+\cdots+a_{n-1}(x^{n-1}-1)$. 下面我们只需证明 $x-1,x^2-1,\cdots,x^{n-1}-1$ 确实是 W 的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以 $\dim W=n-1$.

11. 注意到 $W_i=\{X\in K^n:(a_{i1},\cdots,a_{in})X=0\},i=1,2,\cdots,n$ 都是 K^n 的 $n-1$ 维子空间, 由于有限个 $n-1$ 维子空间张不满 n 维全空间, 从而存在 $X_0\in K^n\backslash(W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_n)$, 此时 AX_0 的每个分量都不为零.

3 线性方程组解的结构

3.1 问题

1. 已知矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5]$ 与 $\begin{bmatrix}2&1&2&5&3\\2&2&4&8&7\\3&1&2&6&3\end{bmatrix}$ 的行向量组等价, 且 $\alpha_2=(2,1,2,1)^T,\alpha_5=(7,3,7,3)^T$. 又知方程组 $AX=\beta$ 的一个解为 $X=(1,1,-1,0,1)^T$, 这里 $\beta=(7,5,7,4)^T$. (1) 写出矩阵 A 及其行简化阶梯形矩阵 J; (2) 求 A 行空间的一组基, 并确定当 a,b 为何值时, $(5,3,6,a,b)$ 落在 A 的行空间里; (3) 求方程组 $AX=\beta$ 的解空间.

2. 讨论下列方程组的解空间: (1) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-2}+x_{n-1}+x_n=0 \\ x_{n-1}+x_n=0 \end{cases}$.

3. 讨论下列方程组的解空间: (1) $\begin{cases} 8x_1+6x_2+3x_3+2x_4=5 \\ -12x_1-3x_2-3x_3+3x_4=-6 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4=3 \\ \lambda x_1+4x_2+x_3+4x_4=2 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} -6x_1+8x_2-5x_3-x_4=9 \\ -2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1 \\ -3x_1+5x_2+4x_3+2x_4=3 \\ -3x_1+7x_2+17x_3+7x_4=\lambda \end{cases}$.

4. A 是 $m\times n$ 矩阵, b 是 $m\times 1$ 矩阵. 证明线性方程组 $A^TAx=A^Tb$ 总有解.

5. A,B 都是 $m\times n$ 矩阵, 线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解. 问 A,B 的列向量组是否等价、行向量组是否等价.

6. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha\neq 0, A^k\alpha=0$, 那么 $\alpha, A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\operatorname{rank}(A^n)=\operatorname{rank}(A^{n+1})$.

7. 证明: $AX=0$ 有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.

8. 设线性方程组 $AX=b$ 中矩阵 A 的秩等于矩阵 $B=\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.

9. 设 A,B 是数域 K 上的 n 阶方阵, $AX=0, BX=0$ 分别有 l,m 个线性无关的解向量. 证明: (1) $(AB)X=0$ 至少有 $\max(l,m)$ 个线性无关的解向量; (2) 如果 $l+m>n$, 那么 $(A+B)X=0$ 必有非零解; (3) 如果 $AX=0$ 和 $BX=0$ 没有公共的非零解向量, 且 $l+m=n$, 那么 K^n 中的任一向量 α 都可以唯一的分解为 $\alpha=\beta+\gamma$, 其中 β,γ 分别是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的解向量. [若不清楚矩阵乘法定义, 第一问可不做.]

10. 判断方的整系数线性方程组如果模任一素数都有解, 那么它是否在整数环上有解.

11. 给定复系数线性方程组 $AX=b$, 其中 A 满秩. 假设矩阵 $I+A$ 的每行元素的模的和小于 q, 其中 $0<q<1$. 设 X_0 是 $\mathbb{C}^n$ 中的任一向量, 归纳定义 $X_{m+1}=(A+I)X_m-b$. 证明序列 X_m 收敛到方程组 $AX=b$ 的解.

12. 已知矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等. 记 A 的解空间为 W, B 的列空间为 V. 证明 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(AB)$ 当且仅当 $V\cap W=\{0\}$.

3.2 解答

1. (1) 容易得到 $\alpha_1-\alpha_3=(-2,1,-2,0)^T$, 并求出题给定的矩阵行空间一组基是 $(1,0,0,1,0),(0,1,2,3,0),(0,0,0,0,1)$. 考虑其前三个分量, 由能被这组基表出知 $\alpha_3=2\alpha_2=(4,2,4,2)^T$, $\alpha_1=(2,3,2,2)^T$, 从而 $\alpha_4=(8,6,8,3)$. 因此

$$A=\begin{bmatrix} 2&2&4&8&7 \\ 3&1&2&6&3 \\ 2&2&4&8&7 \\ 2&1&2&5&3 \end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix} 1&0&0&1&0 \\ 0&1&2&3&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

(2) 一组基为 $(1,0,0,1,0),(0,1,2,3,0),(0,0,0,0,1)$. 考察各系数, 知当 $a=14, b\in\mathbb{R}$ 时, 该向量落在 A 的行空间里.
(3) 先求出 $AX=0$ 的解, 即 $(\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5)X=0$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 线性无关. 通解为 $(t_1,3t_1-2t_2,t_2,-t_1,0)^T$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ 是自由变元. 因此 $AX=\beta$ 的通解是 $(t_1+1,3t_1-2t_2+1,t_2-1,-t_1,1)^T$, 写成解空间是 $\{t_1(1,3,0,-1,0)^T+t_2(0,-2,1,0,0)^T+(1,1,-1,0,1)^T: t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$.

2. (1) 通解是 $x_1=8x_3-7x_4, x_2=-6x_3+5x_4$, 写成解空间是 $\{k_1(8,-6,1,0)^T+k_2(-7,5,0,1)^T: k_1,k_2\in\mathbb{R}\}$.
(2) $n=3m$ 或 $3m+1$ 时只有零解. $n=3m+2$ 时有非零解, 通解是 $x_{3i}=0, x_{3i+1}=-x_n, x_{3i+2}=x_n, i=1,2,\cdots,m$, 写成解空间是 $\{k(-1,1,0,-1,1,0,\cdots,0,-1,1): k\in\mathbb{R}\}$.

3. (1) 利用高斯消元得到 $\begin{cases} 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4=3 \\ 4x_2+x_3+4x_4=1 \\ -3\lambda x_3+8\lambda x_4=16-7\lambda \end{cases}$, 因此 $\lambda\neq 0$ 时有解, 通解是 $x_1=\dfrac{1}{\lambda}, x_3=\dfrac{9\lambda-16}{5\lambda}-\dfrac{8}{5}x_2, x_4=$

$\frac{4-\lambda}{5\lambda}-\frac{3}{5}x_2$, 写成解空间是 $\{k(0,5,-8,-3)^T+\left(\frac{1}{\lambda},0,\frac{9\lambda-16}{5\lambda},\frac{4-\lambda}{5\lambda}\right)^T: k\in\mathbb{R}\}$.

(2) 利用高斯消元得到 $\begin{cases}-2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1\\ -2x_2-13x_3-5x_4=3\\ 0=2\lambda\end{cases}$, 因此 $\lambda=0$ 时有解, 通解是 $x_1=-\frac{1}{2}(7+19x_3+7x_4), x_2=-\frac{1}{2}(3+13x_3+5x_4)$, 写成解空间是 $\{k_1(-19,-13,2,0)^T+k_2(-7,-5,0,2)^T+\left(-\frac{7}{2},-\frac{3}{2},0,0\right)^T: k_1,k_2\in\mathbb{R}\}$.

4. 先证明 $\mathrm{rank}(A^TA)=\mathrm{rank}(A)$. 首先显然 $\mathrm{rank}(A^TA)\le\mathrm{rank}(A)$, 其次 $A^TAx=0\Rightarrow x^TA^TAx=0\Rightarrow\|Ax\|_2^2=0\Rightarrow Ax=0\Rightarrow\mathrm{Ker}(A^TA)\subset\mathrm{Ker}(A)\Rightarrow\mathrm{rank}(A^TA)\ge\mathrm{rank}(A)$. 接着, 由于 $\mathrm{rank}(A^TA)\le\mathrm{rank}(A^TA,A^Tb)\le\mathrm{rank}(A^T)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^TA)$ 知系数矩阵和增广矩阵秩相等, 因此方程有解.

5. 第 1 个结论不对, 比如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$. 第 2 个结论对. 若解空间 0 维, 则 A,B 均列满秩, 也都可以通过初等行列变换得到其简化阶梯形矩阵 $\begin{pmatrix}I_{n\times n}\\0_{(m-n)\times n}\end{pmatrix}$, 因此等价. 其余情况, 设解空间 $r\ge1$ 维, 任取 $AX=0$ 的一个基础解系 $X_1,\cdots,X_r$ 构成 $n\times r$ 矩阵 C. 考虑线性方程组 $C^TX=0$, 其解空间维数为 $n-r=\mathrm{rank}(A)$. 由于 $C^TA^T=0$, 因此 A 的行空间是该解空间的一个子空间. 由于它们维数相等, 因此 A 的行空间就是该解空间. 同理 B 的行空间也是该解空间.

6. (1) 设 $\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$, 两边左乘 A^{k-1} 知 $\lambda_1=0$, 再左乘 A^{k-2} 知 $\lambda_2=0$, 以此类推知线性无关.
(2) 显然 $A^nX=0\Rightarrow A^{n+1}X=0$. 若存在 $A^{n+1}\alpha=0$ 但 $A^n\alpha\ne0$, 则根据 (1) 结论知 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^n\alpha$ 线性无关, 这是 n 维空间是不可能的. 因此 A^{n+1} 和 A^n 解空间相同, 从而 $\mathrm{rank}(A^n)=\mathrm{rank}(A^{n+1})$.

7. 必要性. 设 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 是强非零解, 则 $\alpha_i=\sum_{k\ne i}\left(-\frac{x_k}{x_i}\right)\alpha_k, \forall i=1,\cdots,n$.

充分性. 不妨设 $\alpha_i=\sum_{k\ne i}t_{ki}\alpha_k, \forall i=1,\cdots,n$, 则记 $T=\begin{pmatrix}1&-t_{12}&-t_{13}&\cdots&-t_{1,n-1}&-t_{1,n}\\-t_{21}&1&-t_{23}&\cdots&-t_{2,n-1}&-t_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-t_{n-1,1}&-t_{n-1,2}&-t_{n-1,3}&\cdots&1&-t_{n-1,n}\\-t_{n1}&-t_{n2}&-t_{n3}&\cdots&-t_{n,n-1}&1\end{pmatrix}$, 从而 $AT=0$. 由于 T 的任一主对角元均不为零, 从而存在 X_0 使得 TX_0 每个分量都不为零, 此即该强非零解.

8. (1) $\mathrm{rank}(A)\le\mathrm{rank}(A,b)\le\mathrm{rank}\begin{bmatrix}A&b\\b^T&0\end{bmatrix}=\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(A)$, 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.

(2) 不成立, 考虑 $\begin{cases}x_1+2x_2=1\\3x_1+4x_2=3\end{cases}$, $\mathrm{rank}(A)=2$, 而 $\mathrm{rank}(B)=3$.

9. (1) $n-\mathrm{rank}(AB)\ge\max(n-\mathrm{rank}(A),n-\mathrm{rank}(B))\ge\max(l,m)$.
(2) $\mathrm{rank}(A+B)\le\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le n-l+n-m<n$, 因此 $(A+B)X=0$ 必有非零解.
(3) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 分别是 $AX=0,BX=0$ 线性无关的解. 考虑方程 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_l\alpha_l+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_m\beta_m=0$, 则 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_l\alpha_l=-\mu_1\beta_1-\cdots-\mu_m\beta_m$ 是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解. 由题意知其必然为零向量, 又由 $\{\alpha_i\}_{i=1}^l,\{\beta_j\}_{j=1}^m$ 线性无关性知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_l=\mu_1=\cdots=\mu_m=0$. 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 整体线性无关. 又由于 $l+m=n$, 因此他们是 K^n 一组基, 从而任一向量都可唯一被它们线性表出, 相应的被表出的两部分也就对应了 β 和 γ. 唯一性可由 $\alpha=\beta_1+\gamma_1=\beta_2+\gamma_2\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\gamma_2-\gamma_1$ 是 $AX=0$ 和 $BX=0$ 的公共解 $\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\gamma_2-\gamma_1=0$ 得到.

10. 不一定, 一个反例是 $4x=2$.

11. 记 $\|X\|$ 为向量 X 元素模的最大值 (l_∞ 范数). 则 $\|X_n-X_m\|=\|(A+I)X_{n-1}-(A+I)X_{m-1}\|=\|(A+I)(X_{n-1}-X_{m-1})\|<q\|X_{n-1}-X_{m-1}\|$, 因此由 Cauchy 收敛原理知 X_n 在 l_∞ 范数意义下收敛 (有限维线性空间所有范数等价). 记极限值为 X_∞, 两边求极限知 $X_\infty=(A+I)X_\infty-b\Leftrightarrow AX_\infty=b$.

12. 注意到 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(AB)\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(B)=\mathrm{Ker}(AB)$.
"$\Rightarrow$": 考虑 $x\in V\cap W$, 则可设 $x=By$. 由于 $ABy=Ax=0$, 因此 $y\in\mathrm{Ker}(AB)=\mathrm{Ker}(B)\Rightarrow By=0\Rightarrow x=0$.

“$\Leftarrow$”: 显然 $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(B)$. 若 $\mathrm{rank}(AB) < \mathrm{rank}(B)$, 则 $\mathrm{Ker}(AB) \neq \mathrm{Ker}(B)$, 即 $\exists x \in \mathrm{Ker}(AB)$ 但 $x \notin \mathrm{Ker}(B)$, 此时 $Bx \neq 0$, 但是 $Bx \in V \cap W$.

4 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 秋高等代数 I 习题课 6 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.