高等代数 I 习题课讲义 (2025 秋)

龚诚欣
gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 9 月 12 日

目录

1 第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法

1.1 问题

1. 是否存在二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 其图像经过下述 4 个点: $A(1,2),Q(-1,3),M(-4,5),N(0,2)$?

2. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合: $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4 &= 4 \\ x_2-x_3+x_4 &= -3 \\ x_1+3x_2-4x_4 &= 1 \\ -7x_2+3x_3+x_4 &= -3 \end{cases}$.

3. 某食品厂有四种原料 A,B,C,D. 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

4. a 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1 \\ -x_1+11x_2-x_3=3 \\ 3x_1-5x_2+7x_3=a \end{cases}$ 有解? 当有解时, 求出它的所有解.

5. 解下述线性方程组: $\begin{cases} (1+a_1)x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=b_1 \\ x_1+(1+a_2)x_2+x_3+\cdots+x_n=b_2 \\ \cdots \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+(1+a_n)x_n=b_n \end{cases}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$, 且 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\neq -1$.

6. (1) 求复矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$; (2) 求齐次方程组 $AX=0$ 在复数域上的解集合; (3) 求齐次方程组 $AX=0$ 在实数域上的解集合; (4) 当 y_1,y_2,y_3 满足什么关系时, 方程组 $AX=(y_1,y_2,y_3)^T$ 有解?

7. 设 $\alpha_1=(1,1,4),\alpha_2=(-2,1,5),\alpha_3=(a,2,10),\beta=(1,b,-1)$. 当 a,b 取何值时, 向量 β 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

8. 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, $\beta=\sum\limits_{j=1}^{s} b_j\alpha_j$. 如果 $b_i\neq 0$, 证明用 β 替换 α_i 得到的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 也线性无关.

9. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出某个向量 β 的方式唯一 (不唯一), 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表出任何向量–如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

10. 求单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上的所有直线.

11. 用 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 表示从全体有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{3}$ 生成的数域. (1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$; (2) 数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的每个数写成 $a+b\sqrt{3},a,b\in\mathbb{Q}$ 的方式唯一.

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

1.2 解答

1. 直接代入求解 $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=3 \\ 16a-4b+c=5 \\ c=2 \end{cases}$, 发现无解.

2. $\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-4&1\\0&-7&3&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{③-=①}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&0&-3\\0&-7&3&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{③-=5*②\\④+=7*②}}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&-4&8&-24\end{bmatrix}\xrightarrow{④+=2*③}$
$\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix}\Rightarrow(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-8,3,6,0).$

3. 注意 A,B,C,D 的比例和为 1, 因此 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\8&6&3&2&5\\5&25&10&15&12\\15&5&20&10&15\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{②-=8*①\\③-=5*①\\④-=15*①}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&20&5&10&7\\0&-10&5&-5&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{③+=10*②\\④-=5*②}}$
$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&30&25&15\end{bmatrix}\xrightarrow{④+=\frac{2}{3}*③}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-2&-5&-6&-3\\0&0&-45&-50&-23\\0&0&0&-\frac{25}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, 因此解是 $(\frac{7}{25},\frac{16}{75},\frac{7}{15},\frac{1}{25})$.

4. $\begin{bmatrix}1&-4&2&-1\\-1&11&-1&3\\3&-5&7&a\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{②+=①\\③-=3*①}}\begin{bmatrix}1&-4&2&-1\\0&7&1&2\\0&7&1&a+3\end{bmatrix}$. 因此有解当且仅当 $a=-1$, 通解是 $\begin{cases}x_1=-\frac{18}{7}x_3+\frac{1}{7}\\x_2=-\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}\end{cases}$.

5. 令 $y=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 原方程组改写为 $\begin{cases}y+a_1x_1=b_1\\y+a_2x_2=b_2\\\cdots\\y+a_nx_n=b_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{b_1-y}{a_1}\\x_2=\frac{b_2-y}{a_2}\\\cdots\\x_n=\frac{b_n-y}{a_n}\end{cases}$. 全部相加得到关于 y 的一元一次方程, 解得 $y=\dfrac{1}{1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{b_i}{a_i}$. 代入上式得到原线性方程组的解.

6. (1) $\begin{bmatrix}1&-i&-1\\2&2&-2\\i&1+i&-i\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{②-=2*①\\③-=i*①}}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&i&0\end{bmatrix}\xrightarrow{③-=\frac{i}{2+2i}*②}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&2+2i&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{②*=\frac{1}{2+2i}}\begin{bmatrix}1&-i&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.
(2) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{R}\}$. (3) $(x_1,x_2,x_3)=\{(t,0,t):t\in\mathbb{C}\}$. (4) 将 A 变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是 $(y_1,\frac{y_2-2y_1}{2+2i},y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1)$, 因此只有当 $y_3-\frac{1+i}{4}y_2+\frac{1-i}{2}y_1=0$ 时才有解.

7. $\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\1&1&2&b\\4&5&10&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{②-=①\\③-=4*①}}\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\0&3&2-a&b-1\\0&13&10-4a&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{③-=\frac{13}{3}*②}\begin{bmatrix}1&-2&a&1\\0&3&2-a&b-1\\0&0&\frac{4}{3}+\frac{1}{3}a&-\frac{13}{3}b-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$. 因此, 当 $a\neq-4$ 或 $a=-4,b=-\frac{13}{2}$ 时, β 能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

8. 设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i\beta+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s=0\Leftrightarrow k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i(b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s)+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s=0\Leftrightarrow(k_1+k_ib_1)\alpha_1+\cdots+(k_{i-1}+k_ib_{i-1})\alpha_{i-1}+k_ib_i\alpha_i+(k_{i+1}+k_ib_{i+1})\alpha_{i+1}+\cdots+(k_s+k_ib_s)\alpha_s=0$. 由线性无关性知 $k_1+k_ib_1=\cdots=k_{i-1}+k_ib_{i-1}=k_ib_i=k_{i+1}+k_ib_{i+1}=\cdots=k_s+k_ib_s=0$, 由于 $b_i\neq0$, 因此 $k_i=0$, 进一步得到 $k_1=\cdots=k_s=0$, 这也意味着 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性无关.
9. 只需注意到表出某个向量 β 唯一 $\Leftrightarrow$ 表出 0 向量唯一 $\Leftrightarrow(k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_s=0)$.

10. $(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$, 因此直线可以表示形式为 $\begin{cases} x-z=k(1-y) \\ x+z=\dfrac{1}{k}(1+y) \end{cases}$, 即是 $\begin{cases} x+ky-z=k \\ kx-y+kz=1 \end{cases}$. 特别地, 当 $y=\pm 1$ 时, $z=\pm x$ 也是位于该曲面上的直线.

11. (1) 只需证明 $\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对于加减乘除封闭. (2) 只需证明 $\sqrt{3}$ 不是有理数 (因为 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\dfrac{a_1-a_2}{b_2-b_1}\in\mathbb{Q}$). 用反证法, $\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$, $\gcd(a,b)=1$, 那么 $a^2=3b^2\Rightarrow 3|a\Rightarrow 9|a^2\Rightarrow 3|b^2\Rightarrow 3|b$, 矛盾.

12. 类似可知 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})=\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\}$. 容易证明 $2+\sqrt{-5}$ 是不可约数: $2+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})\Rightarrow 9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$ 无解; 但是 $2+\sqrt{-5}|3\times 3$ 而 $2+\sqrt{-5}\nmid 3$, 因此不是素数.

2 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 秋高等代数 I 习题课 6 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.