

# 高等代数 I 习题课讲义 (2025 秋)

龚诚欣

gongchengxin@pku.edu.cn

2025 年 12 月 3 日

## 目录

<b>1 第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法</b>	<b>3</b>
1.1 问题 . . . . .	3
1.2 解答 . . . . .	3
<b>2 线性相关性, 秩</b>	<b>5</b>
2.1 问题 . . . . .	5
2.2 解答 . . . . .	5
<b>3 线性方程组解的结构</b>	<b>6</b>
3.1 问题 . . . . .	6
3.2 解答 . . . . .	7
<b>4 行列式 (1)</b>	<b>9</b>
4.1 问题 . . . . .	9
4.2 解答 . . . . .	10
<b>5 行列式 (2)</b>	<b>12</b>
5.1 问题 . . . . .	12
5.2 解答 . . . . .	13
<b>6 期中复习, 矩阵乘法</b>	<b>15</b>
6.1 问题 . . . . .	15
6.2 解答 . . . . .	15
<b>7 可逆矩阵, 分块矩阵</b>	<b>17</b>
7.1 问题 . . . . .	17
7.2 解答 . . . . .	18
<b>8 正交矩阵, 线性映射</b>	<b>19</b>
8.1 问题 . . . . .	19
8.2 解答 . . . . .	19
<b>9 特征值, 特征向量</b>	<b>21</b>
9.1 问题 . . . . .	21
9.2 解答 . . . . .	22

<b>10 矩阵的相似与对角化</b>	<b>23</b>
10.1 问题 . . . . .	23
10.2 解答 . . . . .	24
<b>11 二次型, 矩阵的合同</b>	<b>25</b>
11.1 问题 . . . . .	25
11.2 解答 . . . . .	26
<b>12 致谢</b>	<b>27</b>

# 1 第 1 次习题课: Gauss-Jordan 消元法

## 1.1 问题

1. 是否存在二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 其图像经过下述 4 个点:  $A(1, 2), Q(-1, 3), M(-4, 5), N(0, 2)$ ?

2. 用 Gauss 消元法解以下方程组, 并用向量表示解的集合:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

3. 某食品厂有四种原料  $A, B, C, D$ . 问能否用这四种原料配制含脂肪 5%, 碳水化合物 12%, 蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

4.  $a$  为何值时, 线性方程组  $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$  有解? 当有解时, 求出它的所有解.

5. 解下述线性方程组:  $\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_1 \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n \end{cases}$ , 其中  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ , 且  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq -1$ .

6. (1) 求复矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix}$  的行简化阶梯型矩阵 rref( $A$ ); (2) 求齐次方程组  $AX = 0$  在复数域上的解集合;

(3) 求齐次方程组  $AX = 0$  在实数域上的解集合; (4) 当  $y_1, y_2, y_3$  满足什么关系时, 方程组  $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$  有解?

7. 设  $\alpha_1 = (1, 1, 4), \alpha_2 = (-2, 1, 5), \alpha_3 = (a, 2, 10), \beta = (1, b, -1)$ . 当  $a, b$  取何值时, 向量  $\beta$  能被  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出? 何时表示系数唯一?

8. 向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性无关,  $\beta = \sum_{j=1}^s b_j \alpha_j$ . 如果  $b_i \neq 0$ , 证明用  $\beta$  替换  $\alpha_i$  得到的向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$  也线性无关.

9. 用向量运算的性质证明: 若一组向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表出某个向量  $\beta$  的方式唯一 (不唯一), 则  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  表出任何向量—如果能表出的话, 方式都唯一 (不唯一).

10. 求单叶双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  上的所有直线.

11. 用  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  表示从全体有理数及  $\sqrt{3}$  出发, 反复作加减乘除四则运算能得到的所有数的集合, 称为由  $\sqrt{3}$  生成的数域. (1) 证明  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ; (2) 数域  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  中的每个数写成  $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}$  的方式唯一.

12. 用  $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$  表示从全体整数及  $\sqrt{-5}$  出发, 通过加乘二则运算能得到的所有数的集合, 称为由  $\sqrt{-5}$  生成的整环. 证明在此环中, 不可约数和素数不等价.

## 1.2 解答

1. 直接代入求解  $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a - b + c = 3 \\ 16a - 4b + c = 5 \\ c = 2 \end{cases}$ , 发现无解.

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=7*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=2*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$

$$\textcircled{2}-=8*\textcircled{1}$$

$$3. \text{ 注意 } A, B, C, D \text{ 的比例和为 1, 因此} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 25 & 10 & 15 & 12 \\ 15 & 5 & 20 & 10 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=5*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}-=15*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}+=10*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 20 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}-=5*\textcircled{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 30 & 25 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4}+=\frac{2}{3}*\textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & -50 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ 因此解是 } (\frac{7}{25}, \frac{16}{75}, \frac{7}{15}, \frac{1}{25}).$$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}+=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{bmatrix}. \text{ 因此有解当且仅当 } a=-1, \text{ 通解是 } \begin{cases} x_1 = -\frac{18}{7}x_3 + \frac{1}{7} \\ x_2 = -\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7} \end{cases}.$$

$$5. \text{ 令 } y = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \text{ 原方程组改写为} \begin{cases} y + a_1x_1 = b_1 \\ y + a_2x_2 = b_2 \\ \dots \\ y + a_nx_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - y}{a_1} \\ x_2 = \frac{b_2 - y}{a_2} \\ \dots \\ x_n = \frac{b_n - y}{a_n} \end{cases}. \text{ 全部相加得到关于 } y \text{ 的一元}$$

一次方程, 解得  $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}$ . 代入上式得到原线性方程组的解.

$$6. (1) \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=2*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=i*\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{i}{2+2i}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}*\frac{1}{2+2i}} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2)  $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{C}\}$ . (3)  $(x_1, x_2, x_3) = \{(t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ . (4) 将  $A$  变换为行简化阶梯型矩阵后, 对应的常数向量是  $(y_1, \frac{y_2 - 2y_1}{2+2i}, y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1)$ , 因此只有当  $y_3 - \frac{1+i}{4}y_2 + \frac{1-i}{2}y_1 = 0$  时才有解.

$$7. \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-=\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-=\frac{13}{3}*\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} + \frac{1}{3}a & -\frac{13}{3}b - \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \text{ 因此,}$$

当  $a \neq -4$  或  $a = -4, b = -\frac{2}{13}$  时,  $\beta$  能被线性表出, 且对于前者表出系数唯一.

8. 设  $k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i\beta + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i(b_1\alpha_1 + \dots + b_s\alpha_s) + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0 \Leftrightarrow (k_1 + k_ib_1)\alpha_1 + \dots + (k_{i-1} + k_ib_{i-1})\alpha_{i-1} + k_ib_i\alpha_i + (k_{i+1} + k_ib_{i+1})\alpha_{i+1} + \dots + (k_s + k_ib_s)\alpha_s = 0$ . 由线性无关性知  $k_1 + k_ib_1 = \dots = k_{i-1} + k_ib_{i-1} = k_ib_i = k_{i+1} + k_ib_{i+1} = \dots = k_s + k_ib_s = 0$ , 由于  $b_i \neq 0$ , 因此  $k_i = 0$ , 进一步得到  $k_1 = \dots = k_s = 0$ , 这也意味着  $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$  线性无关.

9. 只需注意到表出某个向量  $\beta$  唯一  $\Leftrightarrow$  表出 0 向量唯一  $\Leftrightarrow (k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_s = 0)$ .

10.  $(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$ , 因此直线可以表示形式为  $\begin{cases} x-z = k(1-y) \\ x+z = \frac{1}{k}(1+y) \end{cases}$ , 即是  $\begin{cases} x+ky-z = k \\ kx-y+kz = 1 \end{cases}$ . 特别地, 当  $y = \pm 1$  时,  $z = \pm x$  也是位于该曲面上的直线.

11. (1) 只需证明  $\{a+b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  对于加减乘除封闭. (2) 只需证明  $\sqrt{3}$  不是有理数 (因为  $a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \in \mathbb{Q}$ ). 用反证法,  $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ,  $\gcd(a, b) = 1$ , 那么  $a^2 = 3b^2 \Rightarrow 3|a^2 \Rightarrow 3|b^2 \Rightarrow 3|b$ , 矛盾.

12. 类似可知  $\mathbb{Z}(\sqrt{-5}) = \{a+b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ . 容易证明  $2+\sqrt{-5}$  是不可约数:  $2+\sqrt{-5} = (a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5}) \Rightarrow 9 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5}) = (a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5}) = (a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$  无解; 但是  $2+\sqrt{-5}|3 \times 3$  而  $2+\sqrt{-5} \nmid 3$ , 因此不是素数.

## 2 线性相关性, 秩

### 2.1 问题

1. 对不同的  $\lambda$  取值, 讨论矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$  的秩.

2. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出其中一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1)  $A$  的列向量组; (2)  $A$  的行向量组.  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ .

3. 作初等行变换将矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$  化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求  $A$  列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出  $A$  的每个列向量. (2) 求  $A$  行空间的维数和一组基, 写出  $A$  的各个行向量在此基下的坐标. (3)  $a, b$  取何值时, 向量  $(3, a, b, b, 3)$  属于  $A$  的行空间?

4. 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性: (1)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ ; (2)  $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4$ ; (3)  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ ; (4)  $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 8\alpha_4, \alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4, 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3$ .

5. 证明: 若向量组 I 能线性表出向量组 II, 且  $\text{rank}(I) = \text{rank}(II)$ , 则向量组 II 也能表出向量组 I.

6. 设向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  能线性表出  $\beta_1, \dots, \beta_s$ , 并且有  $\beta_i = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r, \forall i = 1, 2, \dots, s$ . 证明若矩阵  $B = (b_{ij})_{s \times r}$  列向量线性无关, 则  $\beta_1, \dots, \beta_s$  也能线性表出  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ .

7. 若矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  满足  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \leq i \leq n$ , 则称  $A$  是主对角占优矩阵. 证明主对角占优矩阵满秩.

8. 证明秩等式  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$  和秩不等式  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .

9. 已知矩阵  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$  满秩, 求两直线  $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ ,  $\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$  的位置关系.

10. 设  $W = \{f(x) | f(1) = 0, f(x) \in \mathbb{R}[x]_n\}$ , 这里  $\mathbb{R}[x]_n$  表示实数域  $\mathbb{R}$  上的次数小于  $n$  的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明  $W$  是  $\mathbb{R}[x]_n$  的线性子空间; (2) 求  $W$  的维数和一组基.

11. 证明: 若数域  $K$  上的  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  的主对角元  $a_{ii}$  均不为零, 则存在向量  $X$  使得  $AX$  的每个分量都不为零.

### 2.2 解答

1. 显然矩阵  $A$  的秩至少为 2(第 1 列和第 4 列线性无关), 至多为 3. 下面考虑第 2 列和第 3 列能否被第 1 列和第 4 列线性表出. 先看第 2 列和最后两行, 知表出系数必然为 4 和 -2, 因此  $\lambda = 0$ , 此时验证第 3 列知确实能被第 1 列和第 4

列线性表出. 综上,  $\lambda = 0$  时秩为 2, 否则为 3.

2. (1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且  $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3, -5\alpha_1 - 4\alpha_2 = \alpha_4$ ;

(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且  $-\frac{3}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 = \beta_1$ .

3.  $A$  的简化阶梯型矩阵是  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . (1) 列秩是 3, 一个极大无关组是  $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ , 且  $\beta_3 = 2\beta_1 - \beta_2, \beta_5 = 3\beta_1 + 5\beta_2 - \beta_4$ . (2) 行空间维数和列秩相同, 一组基是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ , 且  $\alpha_3 = -\frac{31}{9}\alpha_1 - \frac{55}{9}\alpha_2 + \frac{17}{9}\alpha_4, \alpha_5 = -\frac{20}{9}\alpha_1 - \frac{23}{9}\alpha_2 + \frac{22}{9}\alpha_4$ . (3) 仔细计算即可.  $a = 4, b = 2$ .

4. (1) 线性相关;  $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$ . (2) 线性无关. (3) 线性无关. (4) 线性相关; 因为这有五个向量却只有四个自由度.

5. 设  $\beta_1, \dots, \beta_s$  是组 II 极大线性无关组. 任取组 I 向量  $\alpha$ , 由于组 I 能表出  $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$ , 从而  $\text{rank}(\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha) \leq s$ , 即  $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha$  线性相关. 由于  $\beta_1, \dots, \beta_s$  线性无关, 因此它们能表出  $\alpha$ .

6. 只需证明能表出  $\alpha_1$ . 利用高斯消元法去解方程  $\beta_{i1} = b_{i1}\alpha_1 + \dots + b_{ir}\alpha_r$ , 由于  $B$  列满秩, 因此其简化阶梯型矩阵必然可写成  $\begin{bmatrix} I_{r \times r} \\ 0_{(s-r) \times r} \end{bmatrix}$  (可用递推法或归纳法证明之), 从而  $\alpha_1$  能被  $\beta_1, \dots, \beta_s$  线性表出.

7. 反证法. 假设  $A$  的列向量组线性相关, 那么存在不全为 0 的系数使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$ . 我们不妨设在这  $n$  个系数里面  $k_1$  的绝对值最大, 那么就有  $k_1a_{11} + k_2a_{12} + \dots + k_na_{1n} = 0$ . 但是  $|k_1a_{11} + k_2a_{12} + \dots + k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_2a_{12}| - \dots - |k_na_{1n}| \geq |k_1a_{11}| - |k_1|(|a_{12}| + \dots + |a_{1n}|) > 0$ , 矛盾. 因此  $A$  满秩.

8. (1) 设  $A$  的一个列极大线性无关组是  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ ,  $B$  的一个列极大线性无关组是  $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_s}$ . 利用线性无关的定义可以验证  $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$  线性无关, 且可以分别用对应小矩阵  $A, B$  的相同系数表出其他大矩阵的列向量, 因此这是一个大矩阵的列极大线性无关组, 有第一个秩等式.

(2) 利用线性无关的定义可以验证  $\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{i_r} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{j_1} \\ \beta_{j_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \gamma_{j_s} \\ \beta_{j_s} \end{pmatrix}$  线性无关, 其中  $\gamma_{j_k}$  是矩阵  $C$  对应于  $j_k$  的列向量, 因此大矩阵的秩至少是  $\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ , 有第二个秩不等式. 这里我们无法判断这不是一个大矩阵的列极大线性无关组, 因此可以严格取到大于号. 一个例子是  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 其中  $A = (0), B = (0), C = (1)$ .

9. 由矩阵满秩知  $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$  和  $(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$  线性无关 (用第一列减第二列和用第二列减第三列), 因此不平行. 再检查是否相交, 只需验证  $x_3 + k(x_1 - x_2) = x_1 + t(x_2 - x_3), x = a, b, c$  对于  $k, t$  是否有解. 由于矩阵满秩, 合并同类项知该方程系数必须满足  $t + 1 = k - 1 = t + k = 0$ , 因此  $t = -1, k = 1$ . 从而两直线相交.

10. (1) 容易证明对  $\forall f(x), g(x) \in W \Rightarrow af(x) + bg(x) \in W$ , 因此是线性子空间. (2) 令  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ ,  $f(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = 0$ , 因此  $f(x) = a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + \dots + a_{n-1}(x^{n-1}-1)$ . 下面我们只需证明  $x-1, x^2-1, \dots, x^{n-1}-1$  确实是  $W$  的一组基, 而其线性无关性是显然的, 所以  $\dim W = n-1$ .

11. 注意到  $W_i = \{X \in K^n : (a_{i1}, \dots, a_{in})X = 0\}, i = 1, 2, \dots, n$  都是  $K^n$  的  $n-1$  维子空间, 由于有限个  $n-1$  维子空间张不满  $n$  维全空间, 从而存在  $X_0 \in K^n \setminus (W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n)$ , 此时  $AX_0$  的每个分量都不为零.

### 3 线性方程组解的结构

#### 3.1 问题

1. 已知矩阵  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5]$  与  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$  的行向量组等价, 且  $\alpha_2 = (2, 1, 2, 1)^T, \alpha_5 = (7, 3, 7, 3)^T$ . 又知方程组  $AX = \beta$  的一个解为  $X = (1, 1, -1, 0, 1)^T$ , 这里  $\beta = (7, 5, 7, 4)^T$ . (1) 写出矩阵  $A$  及其行简化阶梯形矩阵  $J$ ; (2) 求  $A$  行空间的一组基, 并确定当  $a, b$  为何值时,  $(5, 3, 6, a, b)$  落在  $A$  的行空间里; (3) 求方程组  $AX = \beta$  的解空间.

2. 讨论下列方程组的解空间: (1)  $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$ ; (2)  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$ .

3. 讨论下列方程组的解空间: (1)  $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$ ; (2)  $\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 7x_4 = \lambda \end{cases}$ .

4.  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $b$  是  $m \times 1$  矩阵. 证明线性方程组  $A^T A x = A^T b$  总有解.  
 5.  $A, B$  都是  $m \times n$  矩阵, 线性方程组  $AX = 0$  和  $BX = 0$  同解. 问  $A, B$  的列向量组是否等价、行向量组是否等价.  
 6. 证明:  $AX = 0$  有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是  $A$  的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.

7. 设线性方程组  $AX = b$  中矩阵  $A$  的秩等于矩阵  $B = \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$  的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.  
 8. 设  $A, B$  是数域  $K$  上的  $n$  阶方阵,  $AX = 0, BX = 0$  分别有  $l, m$  个线性无关的解向量. 证明: (1)  $(AB)X = 0$  至少有  $\max(l, m)$  个线性无关的解向量; (2) 如果  $l + m > n$ , 那么  $(A + B)X = 0$  必有非零解; (3) 如果  $AX = 0$  和  $BX = 0$  没有公共的非零解向量, 且  $l + m = n$ , 那么  $K^n$  中的任一向量  $\alpha$  都可以唯一的分解为  $\alpha = \beta + \gamma$ , 其中  $\beta, \gamma$  分别是  $AX = 0$  和  $BX = 0$  的解向量.  
 9. 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 证明: (1) 若  $A^{k-1}\alpha \neq 0, A^k\alpha = 0$ , 那么  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  线性无关; (2)  $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$ .  
 10. 判断方的整系数线性方程组如果模任一素数的意义下都有解, 那么它是否在整数环上有解.  
 11. 给定复系数线性方程组  $AX = b$ , 其中  $A$  满秩. 假设矩阵  $I + A$  的每行元素的模的和小于  $q$ , 其中  $0 < q < 1$ . 设  $X_0$  是  $\mathbb{C}^n$  中任一向量, 归纳定义  $X_{m+1} = (A + I)X_m - b$ . 证明序列  $X_m$  收敛到方程组  $AX = b$  的解.  
 12. 已知矩阵  $A$  的列数与矩阵  $B$  的行数相等. 记  $A$  的解空间为  $W$ ,  $B$  的列空间为  $V$ . 证明  $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$  当且仅当  $V \cap W = \{0\}$ .

## 3.2 解答

1. (1) 容易得到  $\alpha_1 - \alpha_3 = (-2, 1, -2, 0)^T$ , 并求出题给定的矩阵行空间一组基是  $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ . 考虑其前三个分量, 由能被这组基表出知  $\alpha_3 = 2\alpha_2 = (4, 2, 4, 2)^T, \alpha_1 = (2, 3, 2, 2)^T$ , 从而  $\alpha_4 = (8, 6, 8, 3)$ . 因此

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (2) 一组基为  $(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ . 考察各系数, 知当  $a = 14, b \in \mathbb{R}$  时, 该向量落在  $A$  的行空间里.  
 (3) 先求出  $AX = 0$  的解, 即  $(\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_5)X = 0$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$  线性无关. 通解为  $(t_1, 3t_1 - 2t_2, t_2, -t_1, 0)^T, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  是自由变元. 因此  $AX = \beta$  的通解是  $(t_1 + 1, 3t_1 - 2t_2 + 1, t_2 - 1, -t_1, 1)^T$ , 写成解空间是  $\{t_1(1, 3, 0, -1, 0)^T + t_2(0, -2, 1, 0, 0)^T + (1, 1, -1, 0, 1)^T : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ .  
 2. (1) 通解是  $x_1 = 8x_3 - 7x_4, x_2 = -6x_3 + 5x_4$ , 写成解空间是  $\{k_1(8, -6, 1, 0)^T + k_2(-7, 5, 0, 1)^T : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$ .  
 (2)  $n = 3m$  或  $3m + 1$  时只有零解.  $n = 3m + 2$  时有非零解, 通解是  $x_{3i} = 0, x_{3i+1} = -x_n, x_{3i+2} = x_n, i = 1, 2, \dots, m$ , 写成解空间是  $\{k(-1, 1, 0, -1, 1, 0, \dots, 0, -1, 1) : k \in \mathbb{R}\}$ .

3. (1) 利用高斯消元得到  $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ -3\lambda x_3 + 8\lambda x_4 = 16 - 7\lambda \end{cases}$ , 因此  $\lambda \neq 0$  时有解, 通解是  $x_1 = \frac{1}{\lambda}, x_3 = \frac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_2, x_4 =$

$\frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}x_2$ , 写成解空间是  $\{k(0, 5, -8, -3)^T + \left(\frac{1}{\lambda}, 0, \frac{9\lambda-16}{5\lambda}, \frac{4-\lambda}{5\lambda}\right)^T : k \in \mathbb{R}\}$ .

(2) 利用高斯消元得到  $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_2 - 13x_3 - 5x_4 = 3 \\ 0 = 2\lambda \end{cases}$ , 因此  $\lambda = 0$  时有解, 通解是  $x_1 = -\frac{1}{2}(7 + 19x_3 + 7x_4)$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}(3 + 13x_3 + 5x_4)$ , 写成解空间是  $\{k_1(-19, -13, 2, 0)^T + k_2(-7, -5, 0, 2)^T + \left(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 0\right)^T : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$ .

4. 先证明  $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$ . 首先显然  $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A)$ , 其次  $A^T A x = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker}(A) \Rightarrow \text{rank}(A^T A) \geq \text{rank}(A)$ . 接着, 由于  $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A^T A, A^T b) \leq \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A)$  知系数矩阵和增广矩阵秩相等, 因此方程有解.

5. 第 1 个结论不对, 比如  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . 第 2 个结论对. 若解空间 0 维, 则  $A, B$  均列满秩, 也都可以通过初等行列变换得到其简化阶梯形矩阵  $\begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}$ , 因此等价. 其余情况, 设解空间  $r \geq 1$  维, 任取  $AX = 0$  的一个基础解系  $X_1, \dots, X_r$  构成  $n \times r$  矩阵  $C$ . 考虑线性方程组  $C^T X = 0$ , 其解空间维数为  $n - r = \text{rank}(A)$ . 由于  $C^T A^T = 0$ , 因此  $A$  的行空间是该解空间的一个子空间. 由于它们维数相等, 因此  $A$  的行空间就是该解空间. 同理  $B$  的行空间也是该解空间.

6. 必要性. 设  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$  是强非零解, 则  $\alpha_i = \sum_{k \neq i} \left(-\frac{x_k}{x_i}\right) \alpha_k, \forall i = 1, \dots, n$ .

充分性. 不妨设  $\alpha_i = \sum_{k \neq i} t_{ki} \alpha_k, \forall i = 1, \dots, n$ , 则记  $T = \begin{pmatrix} 1 & -t_{12} & -t_{13} & \cdots & -t_{1,n-1} & -t_{1,n} \\ -t_{21} & 1 & -t_{23} & \cdots & -t_{2,n-1} & -t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t_{n-1,1} & -t_{n-1,2} & -t_{n-1,3} & \cdots & 1 & -t_{n-1,n} \\ -t_{n1} & -t_{n2} & -t_{n3} & \cdots & -t_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$ , 从而

$AT = 0$ . 由于  $T$  的任一主对角元均不为零, 从而存在  $X_0$  使得  $TX_0$  每个分量都不为零, 此即该强非零解.

7. (1)  $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A, b) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}(B) = \text{rank}(A)$ , 因此每一步都取等号, 从而方程组有解.

(2) 不成立, 考虑  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$ ,  $\text{rank}(A) = 2$ , 而  $\text{rank}(B) = 3$ .

8. (1)  $n - \text{rank}(AB) \geq \max(n - \text{rank}(A), n - \text{rank}(B)) \geq \max(l, m)$ .

(2)  $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n - l + n - m < n$ , 因此  $(A + B)X = 0$  必有非零解.

(3) 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  与  $\beta_1, \dots, \beta_m$  分别是  $AX = 0, BX = 0$  线性无关的解. 考虑方程  $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l + \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_m \beta_m = 0$ , 则  $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_l \alpha_l = -\mu_1 \beta_1 - \dots - \mu_m \beta_m$  是  $AX = 0$  和  $BX = 0$  的公共解. 由题意知其必然为零向量, 又由  $\{\alpha_i\}_{i=1}^l, \{\beta_j\}_{j=1}^m$  线性无关性知  $\lambda_1 = \dots = \lambda_l = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$ . 因此  $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_m$  整体线性无关. 又由于  $l + m = n$ , 因此他们是  $K^n$  一组基, 从而任一向量都可唯一被它们线性表出, 相应的被表出的两部分也就对应了  $\beta$  和  $\gamma$ . 唯一性可由  $\alpha = \beta_1 + \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2 \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1$  是  $AX = 0$  和  $BX = 0$  的公共解  $\Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1 = 0$  得到.

9. (1) 设  $\lambda_1 \alpha + \lambda_2 A\alpha + \dots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$ , 两边左乘  $A^{k-1}$  知  $\lambda_1 = 0$ , 再左乘  $A^{k-2}$  知  $\lambda_2 = 0$ , 以此类推知线性无关.

(2) 显然  $A^n X = 0 \Rightarrow A^{n+1} X = 0$ . 若存在  $A^{n+1}\alpha = 0$  但  $A^n\alpha \neq 0$ , 则根据 (1) 结论知  $\alpha, A\alpha, \dots, A^n\alpha$  线性无关, 这是  $n$  维空间是不可能的. 因此  $A^{n+1}$  和  $A^n$  解空间相同, 从而  $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$ .

10. 不一定, 一个反例是  $4x = 2$ .

11. 记  $\|X\|$  为向量  $X$  元素模的最大值 ( $l_\infty$  范数). 则  $\|X_n - X_m\| = \|(A + I)X_{n-1} - (A + I)X_{m-1}\| = \|(A + I)(X_{n-1} - X_{m-1})\| < q\|X_{n-1} - X_{m-1}\|$ , 因此由 Cauchy 收敛原理知  $X_n$  在  $l_\infty$  范数意义下收敛 (有限维线性空间所有范数等价). 记极限值为  $X_\infty$ , 两边求极限知  $X_\infty = (A + I)X_\infty - b \Leftrightarrow AX_\infty = b$ .

12. 注意到  $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB) \Leftrightarrow \text{Ker}(B) = \text{Ker}(AB)$ .

“ $\Rightarrow$ ”: 考虑  $x \in V \cap W$ , 则可设  $x = By$ . 由于  $ABy = Ax = 0$ , 因此  $y \in \text{Ker}(AB) = \text{Ker}(B) \Rightarrow By = 0 \Rightarrow x = 0$ .

“ $\Leftarrow$ ”: 显然  $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$ . 若  $\text{rank}(AB) < \text{rank}(B)$ , 则  $\text{Ker}(AB) \neq \text{Ker}(B)$ , 即  $\exists x \in \text{Ker}(AB)$  但  $x \notin \text{Ker}(B)$ , 此时  $Bx \neq 0$ , 但是  $Bx \in V \cap W$ .

## 4 行列式 (1)

### 4.1 问题

1. 计算行列式: (1)  $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$ ; (2)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$ .

2. 计算行列式  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ .

3. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos 2\phi_1 & \cdots & \cos(n-1)\phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos 2\phi_2 & \cdots & \cos(n-1)\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos 2\phi_n & \cdots & \cos(n-1)\phi_n \end{vmatrix}$ .

4. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n \times n})$ , 其中  $\alpha^2 - 4\beta\gamma > 0$ .

5. (1) 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$ ; (2) 计算行列式  $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ .

6. 计算行列式  $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$ .

7. 计算行列式  $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$ , 其中  $a_1a_2 \cdots a_n \neq 0$ .

8. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n \times n})$ .

9. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n \times n}).$

## 4.2 解答

1. (1)  $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x+1)^2 + 16 + 16 - 4(x+1) - 16(x-2) - 4(x+1) = x^3 - 27x + 54;$

(2)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1.$

2. 用第一列减去第  $i$  列的  $b_i$  倍,  $i = 2, 3, \dots, n$ , 得到  $\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i.$

3. 由高中三角函数知识知  $\cos k\theta = 2^{k-1} \cos^k \theta + P_{k-2}(\cos \theta)$ , 其中  $P_{k-2}$  是  $k-2$  次多项式. 因此通过初等列变换有

$$D_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos^2 \phi_1 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_1 \\ 1 & \cos \phi_2 & \cos^2 \phi_2 & \cdots & \cos^{n-1} \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \phi_n & \cos^2 \phi_n & \cdots & \cos^{n-1} \phi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\cos \phi_i - \cos \phi_j).$$

4. 若  $\beta\gamma = 0$ , 则行列式为  $\alpha^n$ . 对于一般情形, 按第一行展开得到  $D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}$ , 且有初值条件  $D_1 = \alpha, D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma$ , 然后用数列的特征值和特征公式设  $D_n = A \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n + B \left( \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2} \right)^n$ , 代入  $n=1, 2$  解出  $A$  和  $B$ , 得到  $D_n = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}.$

5. (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 然后用倒数第二行减去倒数第三行, 以此类推, 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c-a & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a & a-b \end{vmatrix}.$$

按最后一列展开, 知  $D_n = b(-1)^{n+1}(c-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1}$ . 初始条件是  $D_1 = a$ , 因此知  $D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$ .

(2) 按第  $n$  列拆项, 得  $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & a_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b+(a_n-b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix} + (a_n-b)E_{n-1} = b(a_1-c)(a_2 -$

$c) \cdots (a_{n-1} - c) + (a_n - b)E_{n-1}$ ; 按第  $n$  列拆项 (或由对称性), 得  $E_n = c(a_1 - b)(a_2 - b) \cdots (a_{n-1} - b) + (a_n - c)E_{n-1}$ .  
两式联立得  $E_n = \frac{bf(c) - cf(b)}{b - c}$ , 其中  $f(x) = (a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_n - x)$ .

$$\text{6. 法 1(拆项法): } \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0+x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0+x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0+x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 然后再依次拆第 2、3、4 列, 只需注意到若两列成比例则行列式为 0, 因此最后只剩下五}$$

$$\text{项: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4x_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3x_2 & 1 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_3x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3x_4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_4x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 原行列式是 } 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

$$\text{法 2(加边法): } \begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ 0 & x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}, \text{ 然后用第 } i+1 \text{ 行减去第 1 行}$$

$$\text{的 } x_i \text{ 倍, } i = 1, 2, 3, 4, \text{ 得到 } \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

$$\text{7. 采用第 6 题的法 1(拆项法), 最后剩下 } n+1 \text{ 项: } \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}, \dots, \text{ 它们分别是 } (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} x_1 a_2 \cdots a_n, (-1)^{n-1} a_1 x_2 \cdots a_n, \dots, \text{ 整理得到原}$$

$$\text{行列式为 } (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \right) - 1 \right].$$

8. 先计算  $n = 1$  时,  $D_1 = \cos \alpha$ ;  $n = 2$  时,  $D_2 = \cos 2\alpha$ ; 因此可以猜测  $D_n = \cos n\alpha$ . 然后用数学归纳法, 对第一行展开得到  $D_{n+1} = 2 \cos \alpha D_n - D_{n-1} = \cos(n+1)\alpha$ , 知该假设成立.

9. 法 1: 将第 1 行至第  $n-1$  行减去第  $n$  行, 并提出各行和各列公因子, 得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \frac{1}{a_{n-1} + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

再将第 1 列至第  $n - 1$  列减去第  $n$  列, 并提出各行和各列的公因子, 得

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第  $n$  行展开得到递推式  $D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{j=1}^n (a_n + b_j) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} D_{n-1}$ , 并直接计算出  $D_2$ , 得

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

法 2: 若  $a_i = a_j$  或  $b_i = b_j (i \neq j)$ , 即两行 (或两列) 相同, 则  $D_n = 0$ . 因此  $D_n$  含有因子  $\prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$ . 将  $D_n$  的每一行的公分母都作为公因子提到行列式符号之外, 得  $D_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)} D'_n$ . 显然  $D'_n$  也含有上述因子. 另一方面, 由于  $D'_n$  的  $(i, j)$  元为  $\prod_{k \neq j} (a_i + b_k)$ , 所以每一个  $a_i$  在  $D'_n$  的展开式中的次数均为  $n - 1$ , 因此可设  $D_n = \lambda \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$ . 为确定常数  $\lambda$ , 我们不妨令  $a_i = -b_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 此时  $D'_n$  为对角行列式, 且  $D_n = \prod_{i \neq j} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \Rightarrow \lambda = 1$ . 因此可得一样的结果.

## 5 行列式 (2)

### 5.1 问题

1. 当  $\lambda$  为何值时, 线性方程组  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 5x_1 + (4 + \lambda)x_2 = 6 \end{cases}$  有唯一解, 此时用 Cramer 法则求解之.
2. 设  $f(x)$  是复系数一元多项式, 且对于任意整数  $n$  有  $f(n)$  仍是整数. 证明或否定: (1)  $f(x)$  系数都是有理数; (2)  $f(x)$  系数都是整数.
3. 设数域  $K$  上  $m \times n$  矩阵  $H$  的列向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . 证明:  $H$  的任意  $s (s \leq \min(m, n))$  列都线性无关当且仅当齐次线性方程组  $HX = 0$  的任一非零解的非零分量数目大于  $s$ .
4. 设  $n \geq 3, f_1, f_2, \dots, f_n$  是次数  $\leq n-2$  的多项式, 证明: 对  $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , 行列式  $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} \equiv 0$ , 并举例说明条件 “次数  $\leq n - 2$ ” 不可去.
5. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \dots, \beta_r$  是  $\mathbb{R}^n$  中的两个向量组, 其中  $\beta_1, \dots, \beta_r$  线性无关. 证明存在无穷多个实数  $k$ , 使得向量组  $\alpha_1 + k\beta_1, \dots, \alpha_r + k\beta_r$  线性无关.

6. 计算行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ . 你能求出行列式  $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$  的通式吗?

7. 计算行列式  $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$  和  $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 741 & 886 & 114 & 514 \\ -741 & 0 & 1919 & 810 & 2002 \\ -886 & -1919 & 0 & 520 & 1314 \\ -114 & -810 & -520 & 0 & 220 \\ -514 & -2002 & -1314 & -220 & 0 \end{vmatrix}$ .

8. 若矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  满足  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \leq i \leq n$ , 则称  $A$  是主对角占优矩阵. 证明若  $a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i \leq n$ , 则  $\det(A) > 0$ .

9. 设矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  满足 (1)  $a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i \leq n$ ; (2)  $a_{ij} < 0, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$ ; (3)  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j \leq n$ . 求矩阵  $A$  的秩.

10. 计算矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  的秩  $r$ , 并计算其  $r$  阶非零子式的个数.

11. 试确定所有 3 阶  $(0, 1)$  行列式(即所有元素只能是 0 或 1)的最大值, 并给出证明和取到最大值的一个构造.

12. 设  $W$  是矩阵空间  $M_n(K)$  的一个子空间. 证明: 若  $\dim(W) \geq n^2 - n + 1$ , 则  $W$  中至少包含一个满秩的矩阵.

## 5.2 解答

1. 由 Cramer 法则,  $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4+\lambda \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -\frac{23}{2}$  时有唯一解.  $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4+\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4+\lambda \end{vmatrix}} = \frac{7\lambda + 46}{2\lambda + 23}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4+\lambda \end{vmatrix}} = \frac{-23}{2\lambda + 23}$ .

2. (1) 设  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m (a_m \neq 0)$ . 取  $x_k = k$  代入, 得到线性方程组  $\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_mx_0^m = f(x_0), \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_1^m = f(x_1), \\ \dots \\ a_0 + a_1x_m + \cdots + a_mx_m^m = f(x_m). \end{cases}$

其系数行列式是 Vandermonde 行列式不为 0, 因此由 Cramer 法则其有唯一解  $a_i = \frac{D_i}{D}, i = 0, 1, \dots, m$ . 由于  $D_i$  的元素均为整数, 因此  $a_i$  是有理数. (2) 结论不对, 反例是  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ .

3. 必要性. 若存在非零解  $(0, \dots, 0, c_{i_1}, 0, \dots, 0, c_{i_l}, 0, \dots, 0)$ , 其中  $c_{i_1}, \dots, c_{i_l}$  不全为 0 且  $l \leq s$ , 则意味着  $c_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + c_{i_l}\alpha_{i_l} = 0$ , 从而他们线性相关, 矛盾.

充分性. 若存在  $l (l \leq s)$  列  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l}$  线性相关, 即存在不全为 0 的数  $c_{i_1}, \dots, c_{i_l}$  使得  $c_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + c_{i_l}\alpha_{i_l} = 0$ , 则  $(0, \dots, 0, c_{i_1}, 0, \dots, 0, c_{i_l}, 0, \dots, 0)$  是一个非零分量数不大于  $s$  的非零解, 矛盾.

4. 不妨设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  互不相同. 考虑  $F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & a_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$ , 这是一个至多  $n-2$  次多项式, 有至少  $a_2, a_3, \dots, a_n$  这  $n-1$  个不同的根, 因此必恒等于 0. 若删去条件“次数  $\leq n-2$ ”, 则可令  $f_k(x) = x^{k-1}$ , 此时原行列式构成 Vandermonde 行列式, 只要  $a_1, a_2, \dots, a_n$  两两不同就不为 0.

5. 将  $\beta_1, \dots, \beta_r$  扩充为  $\mathbb{R}^n$  的一组基  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , 并任意选择  $n-r$  个向量  $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ . 行列式  $|(a_1 + k\beta_1, \dots, \alpha_n + k\beta_n)|$  是一个关于  $k$  的至多  $n$  次多项式, 其等于零至多只有  $n$  个解(令  $k \rightarrow \infty$  知此多项式不恒为零), 且在该行列式不等于零时  $\alpha_1 + k\beta_1, \dots, \alpha_r + k\beta_r$  线性无关, 因此存在无穷多个实数  $k$ .

6. 把后  $n-1$  列加到第一列, 提出公因子  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , 用第 (1, 1) 元消去同列其他元素, 再按第一列展开得到  $n-1$  阶行列式:

$$D_n = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

用所得  $n-1$  阶行列式的第 (1,1) 元消去同行的其他元素, 再按第一行展开得到  $n-2$  阶上三角行列式:

$$D_n = \frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}n(n+1) \begin{vmatrix} -n & \cdots & -n & -n \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & -n & -n & -n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2} n^{n-1}.$$

7. 前者是偶数阶斜对称矩阵. 若  $a = 0$ . 则按第 1、2 行展开, 得到  $D_1 = (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -b & -d \\ -c & -e \end{vmatrix} = (be - cd)^2$ .

若  $a \neq 0$ , 则将第 1 行的  $\frac{d}{a}$  倍和第 2 行的  $\frac{b}{a}$  倍加到第 3 行上, 将第 1 行的  $\frac{e}{a}$  倍和第 2 行的  $\frac{c}{a}$  倍加到第 4 行上, 得到

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f + \frac{cd}{a} - \frac{be}{a} \\ 0 & 0 & -f + \frac{be}{a} - \frac{cd}{a} & 0 \end{vmatrix}. \text{ 然后按第 1、2 行展开, 得到 } D_1 = (af - be + cd)^2.$$

后者是奇数阶斜对称矩阵, 因此行列式为  $D_2 = 0$  (因为  $|D_2| = |D_2^T| = |-D_2| = (-1)^{2k+1}|D_2| \Rightarrow |D_2| = 0$ ).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & a_{23}t & \cdots & a_{2n}t \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33} & \cdots & a_{3n}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

是主对角占优矩阵, 因此  $\det(A(t)) \neq 0$ . 由于  $\det(A(0)) > 0$ , 由函数连续性知  $\det(A(1)) > 0$ , 此即原命题.

9. 首先由条件 (3) 知  $|A| = 0$ , 因此  $\text{rank}(A) \leq n-1$ . 其次考虑  $A$  中元素  $a_{11}$  的余子式  $M_{11}$ , 由条件 (1)(2) 知其严格主对角占优, 因此  $M_{11} > 0$ . 这意味着  $\text{rank}(A) = n-1$ .

10. 先求出其行简化阶梯矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  知其秩为 3, 且有 5 个列极大线性无关组 (第 5 列必选, 第 2 列、第 3 列至多选一个, 其余随意); 观察原矩阵易知有 2 个行极大无关组 (第 2 行、第 3 行至多选一个, 其余随意); 因此有  $2 \times 5 = 10$  个 3 阶非零子式.

11. 按第 1 行展开, 得到  $D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \leq 3$ . 下面证明  $D \neq 3$ . 若不然, 则必有

$a_{11} = a_{12} = a_{13} = 1$ , 且  $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 1$ . 前两个行列式为 1 可以得到  $a_{22} = a_{33} = 1, a_{23} = a_{31} = 1$ , 而此时  $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = a_{21}a_{32} - 1 \leq 0$ , 矛盾. 因此  $D \leq 2$ , 一个构造是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

12. 将  $M_n(K)$  的矩阵平铺看成是  $n^2$  维的行向量, 并取该子空间的一组基  $A_1, \dots, A_r$ . 把这  $r$  个行向量在  $\text{axis} = 0$  方向拼成  $r \times n^2$  的矩阵, 并可得到其简化阶梯型矩阵  $J$ . 注意到  $J$  的行向量  $B_1, \dots, B_r$  也是该子空间的一组基, 这组基的线性组合能使得矩阵在某  $r$  个位置取到任意的值. 下面用归纳法证明: 任取  $n \times n$  矩阵  $A$  中的  $n^2 - n + 1$  个位置,

我们总可以在这些位置填上 0 或 1, 使得不管矩阵  $A$  其余的  $n - 1$  个位置填什么数,  $A$  的行列式总为  $\pm 1$ . 假设命题对  $n - 1$  级的方阵成立, 考察  $n$  阶方阵. 由抽屉原理, 总有一行 (不妨设是第  $i$  行), 该行的  $n$  个元素都可任意填选. 再选一列 (不妨设是第  $j$  列), 该列中存在某个位置不能任意填选. 取  $(i, j)$  元为 1,  $(i, \neq j)$  元为 0, 那么在  $(i, j)$  元的余子式中最多只有  $n - 2$  个元素不能任选, 由归纳假设知总可在子阵中能任意填选的地方填上 0 或 1, 使得  $(i, j)$  元的余子式取  $\pm 1$ . 在此填法下,  $n$  阶方阵  $A$  的行列式是  $(i, j)$  元的代数余子式, 即  $\pm 1$ . 由数学归纳法知命题得证.

## 6 期中复习, 矩阵乘法

### 6.1 问题

1. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \dots, \beta_s$  是  $\mathbb{R}^n$  中的两个线性无关组. 证明  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$  线性无关当且仅当  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle = \{0\}$ .

2. 求  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}.$$

3.  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$  是  $n$  维列向量, 且  $|A| = a, |A - \alpha\alpha^T| = b$ , 求  $|A + 2\alpha\alpha^T|$ .

4. 设  $A_{ij}$  是行列式  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$  中  $(i, j)$  元的代数余子式. 证明  $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n & y \end{vmatrix} = Dy - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_i x_j$ .

5. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}_+$ , 证明  $n$  阶行列式  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$  能被  $2!3!\cdots(n-1)!$  整除.

6. 设数域  $K$  上的  $n$  阶方阵  $A$  的第  $(i, j)$  元是  $a_i - b_j$ . 求  $\det(A)$ , 并计算当  $n \geq 2$  且  $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$  时  $AX = 0$  的解空间维数和一组基.

7. 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 且  $|a_{ii}a_{jj}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$  对任意  $1 \leq i \neq j \leq n$  成立. 证明  $\det(A) \neq 0$ .

8. 设  $A, B$  是幂等矩阵 (即  $A^2 = A, B^2 = B$ ), 且  $I - A - B$  满秩, 证明  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

9. 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 证明: (1) 若  $A^{k-1}\alpha \neq 0, A^k\alpha = 0$ , 那么  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  线性无关; (2)  $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$ .

10. 记矩阵  $H = (a_{ij})$  中  $a_{ij}$  表示从城市  $i$  到  $j$  的航班数. (1) 解释  $H^k$  的  $(i, j)$  元的含义; (2) 设  $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市的通行需要倒的航班次数最多?

11. 求  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  的行列式  $A$ , 其中  $a_{ij} = \frac{\alpha_i^n - \beta_j^n}{\alpha_i - \beta_j}, i, j = 1, 2, \dots, n$ .

12. 设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  非平凡. 证明: 若矩阵  $A$  的每一个元素  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij} = a_{ij}$ , 则  $|A|^{n-2} = 1$ .

13. 设已知  $|\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 3, |\overrightarrow{OC}| = 4, |\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{BC}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 4$ , 求混合积的绝对值  $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}|$ .

### 6.2 解答

1. “ $\Rightarrow$ ”: 若  $x = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r = \mu_1\beta_1 + \dots + \beta_s \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle$ , 则  $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r - \mu_1\beta_1 - \dots - \mu_s\beta_s = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0 \Rightarrow x = 0$ .

- “ $\Leftarrow$ ”: 考虑  $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r + \mu_1\beta_1 + \dots + \beta_s = 0$ , 这意味着  $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r = -\mu_1\beta_1 - \dots - \mu_s\beta_s \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle \cap \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle = \{0\} \Rightarrow \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_r\alpha_r = 0, \mu_1\beta_1 + \dots + \mu_s\beta_s = 0$ . 由两组向量  $\{\alpha_i\}_{i=1}^r, \{\beta_j\}_{j=1}^s$  各自内部的线性无关性知  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0$ , 因此整体也线性无关.

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3y_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \dots,$$

2. 利用拆项大法, 注意若有两列成比例则行列式为 0. 从而最后只会剩下  $n+1$  个行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1y_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1}y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_ny_n \end{vmatrix},$$

, 相加得到原行列式为  $1 + \sum_{i=1}^n x_iy_i$ .

$$3. \text{ 考虑函数 } f(x) = |A + x\alpha\alpha^T| = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \cdots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \cdots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix}, \text{ 因此}$$

是线性函数. 由  $f(0) = a, f(-1) = b$  知  $f(x) = a + (a - b)x$ , 因此  $f(2) = 3a - 2b$ .

4. 按最后一行展开, 得到  $\text{LHS} = Dy + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i+1}x_iD_i$ , 其中  $D_i$  是把  $D$  中第  $i$  列删去, 最后一列补上  $(x_1, \dots, x_n)^T$

得到的行列式. 再按最后一列对所有  $D_i$  展开, 得到  $D_i = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j}(-1)^{i+j}A_{ij}x_j$ , 直接代入得到 RHS.

$$5. \text{ 注意到 } D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1(a_1 - 1) & \cdots & a_1(a_1 - 1) \cdots (a_1 - n + 2) \\ 1 & a_2 & a_2(a_2 - 1) & \cdots & a_2(a_2 - 1) \cdots (a_2 - n + 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n(a_n - 1) & \cdots & a_n(a_n - 1) \cdots (a_n - n + 2) \end{vmatrix} \text{ (利用初等列变换, 用后面的列加减前面的列),}$$

再将第  $k$  列提取公因子  $(k-1)!$ ,  $k = 3, 4, \dots, n$  即可.

$$6. (1) n=1 \text{ 时 } |A| = a_1 - b_1, n=2 \text{ 时 } |A| = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2). n > 2 \text{ 时由于 } A = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}, \text{ 因}$$

此  $\text{rank}(A) \leq 2$ , 从而  $|A| = 0$ .

$$(2) n=2 \text{ 时 } |A| \neq 0, \text{ 因此解空间只有零解, 维数为 } 0, \text{ 基是空集. } n > 2 \text{ 时, 由于 } \text{rank}(A) \leq 2 \text{ 且显然 } A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ 因}$$

此  $\text{rank}(A) = 2$ , 解空间维数是  $n-2$ . 因此只需解方程  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} X = 0$  即可 (这个分解后的系数矩阵秩也为

$$2, \text{ 因此同解). 直接计算得到一组基为 } \eta_i = \left( \frac{b_i - b_2}{b_2 - b_1}, \frac{b_1 - b_i}{b_2 - b_1}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{第 } i \text{ 个}}, 0, \dots, 0 \right)^T, i = 3, 4, \dots, n.$$

7. 反证法. 假设  $\det(A) = 0$ ,  $AX = 0$  有非零解  $(c_1, \dots, c_n)^T$ . 若仅有  $c_i \neq 0$ , 则  $A$  的第  $i$  列全零, 与条件矛盾. 下设第  $i, j$  个分量不为 0, 且  $|c_i| \geq |c_j| \geq |c_k|, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ . 考察第  $i$  个和第  $j$  个等式, 有  $|a_{ii}c_i| \cdot |a_{jj}c_j| = |\sum_{k \neq i} a_{ik}c_k| \cdot |\sum_{l \neq j} a_{jl}c_l| \leq |c_j| \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \cdot |c_i| \sum_{l \neq j} |a_{jl}| \Rightarrow |a_{ii}a_{jj}| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$ , 矛盾.

8.  $A(I - A - B) = -AB$ , 因此  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A(I - A - B)) = \text{rank}(AB)$ , 同理  $\text{rank}(B) = \text{rank}(AB)$ .

9. (1) 设  $\lambda_1\alpha + \lambda_2A\alpha + \cdots + \lambda_kA^{k-1}\alpha = 0$ , 两边左乘  $A^{k-1}$  知  $\lambda_1 = 0$ , 再左乘  $A^{k-2}$  知  $\lambda_2 = 0$ , 以此类推知线性无关.

(2) 显然  $A^nX = 0 \Rightarrow A^{n+1}X = 0$ . 若存在  $A^{n+1}\alpha = 0$  但  $A^n\alpha \neq 0$ , 则根据 (1) 结论知  $\alpha, A\alpha, \dots, A^n\alpha$  线性无关, 这是  $n$  维空间是不可能的. 因此  $A^{n+1}$  和  $A^n$  解空间相同, 从而  $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1})$ .

10. (1) 从  $a_{ij}^2 = \sum_s a_{is}a_{sj}$  可以看出  $H^k$  的  $(i, j)$  元表示从  $i$  到  $j$  乘坐恰  $k$  次航班有多少种乘坐方式. (2)  $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3$ , 分别有  $1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 2$  种航班选择;  $2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$  都要倒 3 次, 是最多的.

11. 利用  $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$  及行列式乘法规则  $|AB| = |A||B|$ , 知

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \\ \beta_1^{n-2} & \beta_2^{n-2} & \cdots & \beta_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j).$$

$$12. \text{首先容易看出 } |A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 > 0. \text{ 其次 } |A|^2 = |AA^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n \Rightarrow |A|^{n-2} = 1.$$

$$13. |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}| = \left\| \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA}^T \\ \overrightarrow{OB}^T \\ \overrightarrow{OC}^T \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} \overrightarrow{OA}^T \\ \overrightarrow{OB}^T \\ \overrightarrow{OC}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OC} \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OC}^T \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OC}^T \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OC}^T \overrightarrow{OC} \end{pmatrix}}. \text{ 由题意 } \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OA} =$$

$$4, \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OB} = 9, \overrightarrow{OC}^T \overrightarrow{OC} = 16, \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^T(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})] = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{9}{2}, \overrightarrow{OA}^T \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{AC}^2) = 2, \overrightarrow{OB}^T \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{BC}^2) = 8, \text{ 从而 } |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}| = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

## 7 可逆矩阵, 分块矩阵

### 7.1 问题

1. 证明可逆的上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & & 1 & \cdots & n-2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

2. 计算矩阵  $A = \begin{bmatrix} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \cdots & n-2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$  的逆.

3.  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵,  $\alpha, \beta$  是  $n$  维列向量, 且矩阵  $A + \alpha\beta^T$  可逆, 证明  $(A + \alpha\beta^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1 + \beta^TA^{-1}\alpha}$ .

4. 计算矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix}$  的逆, 其中  $a_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

5.  $A$  是  $n$  阶方阵, 试根据  $\text{rank}(A)$  的取值讨论  $\text{rank}(A^*)$ , 其中  $A^*$  是它的伴随矩阵.

6. 求与任意可逆矩阵乘法可交换的矩阵构成的集合.

7.  $A$  是  $n$  阶方阵 ( $n \geq 3$ ),  $A^3 = O$ , 证明矩阵  $M = \begin{bmatrix} I & A \\ A & I \end{bmatrix}$  可逆, 并求其逆.

8. 已知  $I_{m \times m} - A_{m \times n}B_{n \times m}$  可逆, 证明  $I_{n \times n} - B_{n \times m}A_{m \times n}$  也可逆并求其逆矩阵. 进一步, 证明两者行列式相等.

9. 矩阵  $A_{m \times m}, B_{m \times n}, C_{n \times m}, D_{n \times n}$  满足  $A$  和  $E := D - CA^{-1}B$  可逆. 证明分块矩阵  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  也可逆并求其逆.

10.  $A$  是  $n$  阶方阵, 证明  $\text{rank}(A - I) + \text{rank}(A^2 + A + I) = n$  当且仅当  $A^3 = I$ .

11.  $A, B$  是  $n$  阶方阵, 且满足  $\text{rank}(I - AB) + \text{rank}(I + BA) = n$ , 证明或否定:  $A$  是可逆矩阵.

12.  $A, B, C, D$  都是  $n$  阶方阵,  $AC = CA$ ,  $AD = CB$ , 且  $A$  可逆. 求矩阵  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  的秩.

## 7.2 解答

1. 将单位矩阵拼在原矩阵右边, 其行变换只需不断用上面的行加减下面的行, 此操作只会将单位矩阵变成上三角矩阵.

2. 记  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $A = I + 2J + \cdots + nJ^{n-1}$ . 由于  $A(I - 2J + J^2) = 0$ , 因此  $A^{-1} = I - 2J + J^2$ .

3. 注意到  $A + \alpha\beta^T = A(I + A^{-1}\alpha\beta^T)$ , 因此  $(A + \alpha\beta^T)^{-1} = (I + A^{-1}\alpha\beta^T)^{-1}A^{-1} = (I - A^{-1}\alpha(1 + \beta^TA^{-1}\alpha)^{-1}\beta^T)A^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1 + \beta^TA^{-1}\alpha}$ .

4. 利用上第 3 题结论,

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(a_1, \dots, a_n)(I_n + \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{a_1}{a_2} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}) \\ \Rightarrow A^{-1} &= (I_n - (1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}))^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{a_1}{a_2} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{diag}(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}). \end{aligned}$$

5. 当  $\text{rank}(A) = n$  时, 由于  $AA^* = |A|I$ , 从而  $A^*$  可逆, 因此  $\text{rank}(A^*) = n$ . 当  $\text{rank}(A) = n-1$  时, 由于  $AA^* = 0$ , 且  $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rank}(A) = 1$ , 又有  $A$  中存在  $n-1$  阶非零子式, 因此  $A^*$  不全零,  $\text{rank}(A^*) = 1$ . 当  $\text{rank}(A) \leq n-2$  时,  $A$  中不存在  $n-1$  阶非零子式, 因此  $A^*$  全零, 从而  $\text{rank}(A^*) = 0$ .

6. 先验证初等矩阵  $P(j, i(1))$ , 即  $AP(j, i(1)) = P(j, i(1))A$ , 两边同时减去矩阵  $A$  得到  $AE_{ij} = E_{ij}A \Rightarrow a_{ii} = a_{jj}, a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ , 因此只能是数量矩阵, 其与所有矩阵都可交换.

7. 设  $P = \begin{bmatrix} I & O \\ -A & I \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix}$ , 从而  $PMQ = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I - A^2 \end{bmatrix}$ .  $A^3 = O \Rightarrow (PMQ)^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I + A^2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = Q \begin{bmatrix} I & O \\ O & I + A^2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} I + A^2 & -A \\ -A & I + A^2 \end{bmatrix}$ .

8.  $(I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) = I - BA + B(I - AB)^{-1}A - BAB(I - AB)^{-1}A = I - BA + B(I - AB)(I - AB)^{-1}A = I$ , 因此  $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$ .

由于  $\begin{pmatrix} I - AB & A \\ O & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & A \\ O & I - BA \end{pmatrix}$ , 两边取行列式知  $|I - AB| = |I - BA|$ .

9.  $\begin{pmatrix} A & B & I & O \\ C & D & O & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} A & B & I & O \\ O & D - CA^{-1}B & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B & A^{-1} & O \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & O & A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & E & -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} I & O & A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ O & I & -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}CA^{-1} & E^{-1} \end{pmatrix}$ .

10. 由裴蜀定理(辗转相除法), 存在多项式  $f, g$  使得  $f(x)(x-1)+g(x)(x^2+x+1)=1$ , 即  $f(A)(A-I)+g(A)(A^2+A+I)=I$ . 从而利用分块初等行列变换,

$$\begin{bmatrix} A-I & O \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} A-I & f(A)(A-I) \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ O & A^2+A+I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} A-I & I \\ I-A^3 & O \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{bmatrix} O & I \\ A^3-I & O \end{bmatrix}.$$

从而  $\text{rank}(A-I) + \text{rank}(A^2+A+I) = n + \text{rank}(A^3-I)$ , 因此原命题成立.

11. 利用分块初等变换, 得

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I+BA \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I+AB & O \\ O & I \end{bmatrix},$$

从而知  $\text{rank}(I+BA) = \text{rank}(I+AB)$ . 因此原条件等价于  $\text{rank}(I-AB) + \text{rank}(I+AB) = n$ , 由上一小题的类似结论知  $(I-AB)(I+AB) = 0 \Rightarrow (AB)^2 = I$ , 因此  $A$  可逆.

12. 利用分块初等变换, 得  $\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$ . 由于  $\text{rank}(D-CA^{-1}B) = \text{rank}(A(D-CA^{-1}B)) = 0$ , 因此  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{rank}(A) = n$ .

## 8 正交矩阵, 线性映射

### 8.1 问题

1. 记  $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ,  $B_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ , 试证明  $A_\theta A_\omega = A_{\theta+\omega}$ ,  $B_\theta B_\omega = A_{\theta-\omega}$ ,  $A_\theta B_\omega = B_{\theta+\omega} = B_\omega A_{-\theta}$ , 并解释  $A_\theta, B_\theta$  作为  $\mathbb{R}^2$  上线性变换的几何含义.

2. 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  的 QR 分解.

3. 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 求  $\text{Im}A$  和  $\text{Ker}A$  的一个基和维数.

4.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 所有顺序主子式都大于 0, 所有非主对角元都小于 0. 证明  $A^{-1}$  的每个元素都大于 0.

5. 秩为  $r (> 0)$  的对称矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 证明  $A$  至少有一个  $r$  阶主子式不为 0, 且所有不等于 0 的  $r$  阶主子式都同号.

6. (1)  $ABCD$  是中心为原点、边与坐标轴平行的单位正方形. 求所有  $\mathbb{R}^2$  上所有保持该正方形不变的线性变换, 写出它们的矩阵, 并证明它们可被两个变换生成. (2) 试求出保持中心为原点的正十二面体不变的线性变换的个数.

7. 设  $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (0, 1, 0, 2)^T$ . (1) 求  $\alpha_3$  在  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  上的正交投影; (2) 求  $\alpha_3$  到  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  的距离; (3) 求到  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  的正交投影算子(用矩阵表示).

8.  $\beta \in \mathbb{R}^n$  是单位向量 ( $\|\beta\|_2 = 1$ ),  $P = I - \beta\beta^T$ ,  $A = I - 2\beta\beta^T$ . (1) 证明  $P$  是幂等对称矩阵; (2) 证明  $A$  是实对称正交矩阵, 且满足  $A^2 = I$ ; 计算  $\det(A)$ , 并探究  $A$  的几何性质.

9.  $A, B$  是  $n$  维线性空间上的线性变换,  $AB = BA$ , 证明或否定  $\text{rank}A^2 + \text{rank}B^2 \geq 2\text{rank}(AB)$ .

10.  $A, B$  是幂等变换, 证明  $\text{Ker}A = \text{Ker}B$  当且仅当  $AB = A, BA = B$ .

11.  $A$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 证明存在  $r \in \mathbb{N}$  使得对于  $\forall s \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Ker}A^r = \text{Ker}A^{r+s}$ .

12.  $V_1, V_2, V_3$  都是数域  $F$  上的有限维线性空间,  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ ,  $\psi : V_1 \rightarrow V_3$  是两个线性映射. 证明  $\psi$  可以写成  $\psi = \sigma\varphi$ , 其中  $\sigma : V_2 \rightarrow V_3$  是线性映射的充要条件是  $\text{Ker}\varphi \subset \text{Ker}\psi$ .

### 8.2 解答

1.  $A_\theta$  是逆时针旋转  $\theta$  角,  $B_\theta$  是按逆时针方向的  $\frac{\theta}{2}$  角做镜面反射. 有了几何含义, 验证这些矩阵乘法也就很简单了.

$$2. \text{ 直接利用 Schmidt 正交化得到 } Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{7\sqrt{102}}{102} & -\frac{19\sqrt{119}}{357} & \frac{\sqrt{7}}{21} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{102}{\sqrt{102}} & \frac{357}{\sqrt{119}} & -\frac{\sqrt{7}}{21} \\ \frac{6}{6} & \frac{102}{\sqrt{102}} & \frac{51}{25\sqrt{119}} & \frac{3}{2\sqrt{7}} \\ 0 & \frac{17}{2\sqrt{102}} & \frac{357}{2\sqrt{119}} & \frac{21}{\sqrt{7}} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{51}{119} & \frac{119}{7} & \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{5\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{102}}{6} & \frac{3\sqrt{102}}{34} & \frac{3\sqrt{102}}{4\sqrt{119}} \\ 0 & 0 & \frac{17}{3\sqrt{119}} & \frac{119}{4\sqrt{119}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{7}}{7} \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ 利用行变换求简化阶梯型得 } A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 可以看出 } \text{Im}A \text{ 的一个基是前两列, 维数是 } 2.$$

4. 用数学归纳法.  $n = 1$  时显然成立. 假设  $n - 1$  时命题为真, 那么现在来看  $A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix}$ . 由顺序主子式大于 0 知  $A_{n-1}$  可逆, 且由

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\beta^T A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix} \text{ 知 } a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha > 0. \text{ 计算得到 } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + A_{n-1}^{-1} \alpha (a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha)^{-1} \beta^T A_{n-1}^{-1} & -A_{n-1}^{-1} \alpha (a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha)^{-1} \\ -(a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha)^{-1} \beta^T A_{n-1}^{-1} & (a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha)^{-1} \end{pmatrix}. \text{ 依次验证: } a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1} \alpha > 0,$$

并利用归纳假设知  $A_{n-1}^{-1}$  每个元素大于 0,  $A_{n-1}^{-1} \alpha$  和  $\beta^T A_{n-1}^{-1}$  每个元素小于 0. 定睛一看,  $A^{-1}$  每个元素也都大于 0 了.

5. (1) 取  $A$  的某个列极大线性无关组  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ , 对应的行极大线性无关组为  $\alpha_{i_1}^T, \dots, \alpha_{i_r}^T$ . 下证  $A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ i_1, \dots, i_r \end{pmatrix} \neq 0$ .

这是因为矩阵  $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r})$  的秩也是  $r$ , 而其第  $i_1, \dots, i_r$  行作为  $\alpha_{i_1}^T, \dots, \alpha_{i_r}^T$  的缩短组可以表出该矩阵的其他所有行向量, 因此构成一个极大行线性无关组.

(2) 存在可逆矩阵  $P, Q$  使得  $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ . 由于  $A$  对称, 因此  $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^T$ , 即是

$$P^{-1} Q^T \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q P^{-T}.$$

对应分块  $P^{-1} Q^T = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}$ , 代入得到  $H_1^T = H_1, H_3 = O$ , 从而  $Q = P \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ O & H_4 \end{pmatrix}, A = P \begin{pmatrix} H_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^T$ , 且  $H_1$  是对称满秩矩阵. 因此由 Binet-Cauchy 定理,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} &= \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_r \leq n} P \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} H_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^T \right] \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_r \leq n} P \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_r \leq n} \begin{pmatrix} H_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_r \\ \mu_1, \dots, \mu_r \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} \mu_1, \dots, \mu_r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_r \leq n} P \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix} \\ &= \left[ P \begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} \right]^2 |H_1|, \end{aligned}$$

于是所有不为 0 的主子式都与  $|H_1|$  同号.

6. (1) 只需确定基的像.  $e_1$  可以有 4 种选择,  $e_2$  在  $e_1$  的基础上有 2 种选择, 因此有 8 种:  $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$ . 它

们可由逆时针旋转  $90^\circ$  和关于  $y$  轴的反射这两个变换生成, 即  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(2) 只需确定其中任意三个点 (对应的向量) 的像, 这里我们考虑共面的某三个点. 因为有 20 个顶点, 每个顶点又有 3 个邻结点, 和这 2 个点具有原始度量关系的点又有 2 个, 因此有  $20 \times 3 \times 2 = 120$  个线性变换.

7.  $\text{span}\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$  的一组标准正交基是  $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$  和  $\beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}})$ . (1) 投影是  $= (\alpha_3, \beta_1)\beta_1 + (\alpha_3, \beta_2)\beta_2 = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$ . (2) 距离是  $|((0, 1, 0, 2) - (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5}))| = |(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})| = \frac{\sqrt{35}}{5}$ . (3) 向量  $\alpha = (x, y, z, w)$  的投影是  $(\alpha, \beta_1)\beta_1 + (\alpha, \beta_2)\beta_2 = (\frac{3x+y+2z+w}{5}, \frac{x+2y-z+2w}{5}, \frac{2x-y+3z-w}{5}, \frac{x+2y-z+2w}{5})$ , 因此算子是

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. (1)  $P^2 = (I - \beta\beta^T)(I - \beta\beta^T) = I - 2\beta\beta^T + \beta(\beta^T\beta)\beta^T = I - \beta\beta^T = P$ , 对称性显然.

(2) 对称性显然, 且  $A^T A = A^2 = I - 4\beta\beta^T + 4\beta\beta^T\beta\beta^T = 1$ , 因此正交.  $|A| = |I - 2\beta\beta^T| = 1 - 2\beta^T\beta = -1$ . 注意到  $P$  是在  $\langle\beta\rangle^\perp$  上的投影, 因此  $A$  是关于  $\langle\beta\rangle^\perp$  作镜面反射.

9. 结论不对. 可取  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} J & \\ & J \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} J & I \\ O & J \end{pmatrix}$ .  $A^2 = O$ ,  $B^2 = \begin{pmatrix} O & 2J \\ O & O \end{pmatrix}$ ,  $AB = BA = \begin{pmatrix} O & J \\ O & O \end{pmatrix}$ .

10. “ $\Rightarrow$ ”:  $\forall \alpha, A(A\alpha - \alpha) = 0 \Rightarrow B(A\alpha - \alpha) = 0 \Rightarrow BA = B$ . 同理  $AB = A$ .

“ $\Leftarrow$ ”:  $\forall \alpha \in \text{Ker } A$ ,  $B\alpha = BA\alpha = 0 \Rightarrow \text{Ker } A \subset \text{Ker } B$ . 同理  $\text{Ker } B \subset \text{Ker } A$ .

11. 先证明存在  $r \in \mathbb{N}$  使得  $\text{Ker } A^r = \text{Ker } A^{r+1}$ . 显然有无穷递升链  $\dim(\text{Ker } A) \leq \dim(\text{Ker } A^2) \leq \dim(\text{Ker } A^3) \leq \dots$ , 注意到这条链有上界  $n$ , 因此必然存在  $r$  使得  $\dim(\text{Ker } A^r) = \dim(\text{Ker } A^{r+1})$ , 这意味着  $\text{Ker } A^r = \text{Ker } A^{r+1}$ . 现在开始推广到  $r+s$ : 由于  $A^{r+2}\alpha = 0 \Leftrightarrow A^{r+1}(A\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^r(A\alpha) = 0 \Leftrightarrow A^{r+1}\alpha = 0$ , 以此类推知  $\text{Ker } A^{r+s} = \text{Ker } A^r, \forall s \in \mathbb{N}$ .

12. 必要性是显然的, 下面证明充分性. 取  $\text{Ker } \varphi$  的一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , 并扩充成  $\text{Ker } \psi$  的基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ , 又再扩充成  $V_1$  的一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_t$ . 显然  $\varphi(\beta_1), \dots, \varphi(\beta_s), \varphi(\gamma_1), \dots, \varphi(\gamma_t)$  是  $\text{Im } \varphi$  的一组基, 并又可扩充成  $V_2$  的一组基  $\varphi(\beta_1), \dots, \varphi(\beta_s), \varphi(\gamma_1), \dots, \varphi(\gamma_t), \delta_1, \dots, \delta_l$ . 现在, 对于任意  $\beta = \sum_{i=1}^s a_i \varphi(\beta_i) + \sum_{j=1}^t b_j \varphi(\gamma_j) + \sum_{k=1}^l c_k \delta_k \in V_2$ , 只需定义  $\sigma(\beta) = \sum_{j=1}^t b_j \psi(\gamma_j)$  即可.

## 9 特征值, 特征向量

### 9.1 问题

1. 矩阵  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  诱导了  $\mathbb{R}^2$  上的线性变换  $A$ . (1) 写出  $A$  在基  $\alpha_1 = (1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -1)^T$  下的矩阵; (2) 求在变换  $A$  下保持不动的直线; (3)  $\alpha = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2$ , 求  $A\alpha$  在基  $\alpha_1, \alpha_2$  下的坐标.

2. 求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$  的特征值和特征向量. 你能求出任意一个三阶矩阵的特征值和特征向量吗?

3. 3 阶矩阵  $A$  的特征值是  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 对应的特征向量是  $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$ , 求  $A^m$ . 你能推广到  $e^A$  吗?

4.  $A, B$  是  $m \times n$  和  $n \times m$  矩阵. 证明  $AB$  与  $BA$  有相同的非零特征值, 且这些特征值的几何重数和代数重数也相同.

5. 利用矩阵方法求出斐波拉契数列的通项公式.

6.  $A$  是第一类 3 阶正交矩阵. (1) 证明  $\lambda = 1$  是  $A$  的一个特征值. (2) 设  $\alpha_1$  是  $\lambda = 1$  的一个单位特征向量, 将其扩充为一组标准正交基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 证明  $\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$  仍是一组标准正交基. (3) 已知  $A\alpha_2 = (\cos \theta)\alpha_2 + (\sin \theta)\alpha_3$ , 求  $A\alpha_3$ . (4) 探究  $A$  的几何性质.

7.  $A$  是第二类 3 阶正交矩阵. (1) 证明  $\lambda = -1$  是  $A$  的一个特征值. (2) 设  $\alpha_1$  是  $\lambda = -1$  的一个单位特征向量, 将其扩充为一组标准正交基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 证明  $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . (3) 探究  $A$  的几何性质.

8. 证明任一复矩阵一定相似于一个上三角矩阵.

9. 求  $n$  阶循环矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$  的行列式.

10.  $A, B, C$  分别是  $n \times n, m \times m, n \times m$  矩阵, 其中  $n > m$ ,  $\text{rank}(C) = m$ , 且  $AC = CB$ . 证明  $|\lambda I_m - B|$  整除  $|\lambda I_n - A|$ .
11.  $A, B$  分别是  $m, n$  阶方阵, 且无公共特征值. 求解矩阵方程  $AX = XB$ (你可以设定一些自由变元来表示答案).
12.  $n$  维空间  $V$  上的线性变换  $A$  有  $n+1$  个特征向量, 且其中任意  $n$  个线性无关. 求所有可能的  $A$  构成的集合.
13.  $A, B$  是二阶实方阵, 且满足  $A^2 + B^2 = O$ . 证明  $\det(AB - BA) \leq 0$ .

## 9.2 解答

1. (1) 矩阵是  $(\alpha_1, \alpha_2)^{-1} A (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . (2) 保持不动的直线即特征向量, 先解  $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 4$ , 然后求得特征向量分别是  $\beta_1 = (1, -1)^T, \beta_2 = (2, 1)^T$ , 即这两个向量所对应的直线保持不变. (3) 根据 (1), 坐标为  $(4y_1, y_1 + y_2)$ .
2. 先解  $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (重根), 10, 对应的特征向量分别是  $(2, -1, 0)^T, (2, 0, 1)^T, (1, 2, -2)^T$ . 一元三次实方程在实数范围内必有解, 剩下两个解要么都是实数要么是共轭复数.

$$3. A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \lambda_3^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \lambda_1^m - \lambda_3^m \\ 0 & \lambda_2^m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^m \end{pmatrix}.$$

4. WLOG  $m \geq n$ . 由  $|I - AB| = |I - BA|$  知  $|\lambda I - AB| = \lambda^m |I - \lambda^{-1} AB| = \lambda^m |I - \lambda^{-1} BA| = \lambda^{m-n} |\lambda I - BA|$ , 因此非零特征值的代数重数相同. 另一方面, 若  $AB\mu = \lambda\mu$  对于某个特征值  $\lambda$  有解空间  $\langle \mu_1, \dots, \mu_d \rangle$ (基), 则  $\langle B\mu_1, \dots, B\mu_d \rangle$  属于  $BAX = \lambda X$  的解空间, 且它们线性无关 ( $k_1 B\mu_1 + \dots + k_d B\mu_d = 0 \Rightarrow k_1\mu_1 + \dots + k_d\mu_d \in \text{Ker } B \Rightarrow \lambda(k_1\mu_1 + \dots + k_d\mu_d) = AB(k_1\mu_1 + \dots + k_d\mu_d) = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_d = 0$ ). 同理反过来也成立, 因此它们的解空间维数相同, 即非零特征值的几何重数相同.

5. 先写出递推公式  $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$ , 做特征值分解  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \\ & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$ ,

由于  $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ , 利用特征值分解可推导  $a_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ . 代入  $n = 0, 1$  知  $A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ , 因此  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ .

6. (1)  $|I - A| = -|A - I| = -|A||I - A^{-1}| = -|I - A^T| = -|I - A| \Rightarrow |I - A| = 0$ .

(2) 正交矩阵诱导等距同构, 因此  $\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ (即  $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ ) 仍是标准正交基.

- (3) 原题可转化为已知  $A$  的前两列为  $(1, 0, 0)^T, (0, \cos \theta, \sin \theta)^T$ , 去补全第三列. 显然是  $(0, -\sin \theta, \cos \theta)^T$ , 因此  $A\alpha_3 = -(\sin \theta)\alpha_2 + (\cos \theta)\alpha_3$ .

(4) 绕过原点、线向为  $\alpha_1$  的直线旋转  $\theta$  角.

7. (1)  $|I + A| = |A||I + A^{-1}| = -|I + A^T| = -|I + A| \Rightarrow |I - A| = 0$ .

(2) 原题可转化为已知  $A$  的前两列为  $(-1, 0, 0)^T, (0, \cos \theta, \sin \theta)^T$ , 去补全第三列. 过程与 6(3) 类似.

(3) 绕过原点、线向为  $\alpha_1$  的直线旋转  $\theta$  角, 再关于平面  $\langle \alpha_1 \rangle^\perp$  作镜面反射.

8. 对矩阵级数用数学归纳法.  $n = 1$  时显然为真. 假设  $n - 1$  阶复矩阵必然相似于一个上三角矩阵, 考虑  $n$  阶矩阵  $A$ . 设  $\lambda_1$  是某个特征值,  $\alpha_1$  是对应的某个特征向量. 将  $\alpha_1$  扩充为  $\mathbb{C}^n$  的一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  并记  $P_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . 那么

$$P_1^{-1} AP_1 = (P_1^{-1} A\alpha_1, \dots, P_1^{-1} A\alpha_n) = (\lambda_1 P_1^{-1} \alpha_1, \dots, P_1^{-1} A\alpha_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha^T \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中  $\alpha \in \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $B$  是  $n - 1$  级复矩阵. 由归纳假设, 存在  $P_2$  使得  $P_2^{-1} BP_2$  是上三角矩阵. 定义  $P = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ , 易

知  $P$  可逆, 且满足

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix} P_1^{-1}AP_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha^T P_2 \\ 0 & P_2^{-1}BP_2 \end{pmatrix},$$

此时  $P^{-1}AP$  是上三角矩阵.

9. 记  $J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $A = a_1I + a_2J + a_3J^2 + \cdots + a_nJ^{n-1}$ . 注意到  $J$  的特征多项式是  $\lambda^n - 1$ , 因此其特征值为  $w_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , 从而  $A$  的特征值是  $\sum_{i=1}^n a_i w_k^{i-1}$ , 这意味着  $|A| = \prod_{k=1}^n (\sum_{i=1}^n a_i w_k^{i-1})$ .

10. 由于  $C$  列满秩, 因此存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$  使得  $C = P \begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}$ , 从而  $AC = CB$  可写为  $(P^{-1}AP)P^{-1}C = P^{-1}CB$ .

对  $P^{-1}AP$  作分块  $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ , 其中  $A_1$  是  $m$  阶方阵, 代入上式知  $A_1 = B, A_3 = O$ . 于是  $|\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - P^{-1}AP| = |\lambda I_m - B - A_2| = |\lambda I_m - B||\lambda I_{n-m} - A_4|$ , 此即整除关系.

11. 方程只有零解. 假设存在  $AC = CB$ , 并且  $\text{rank}(C) = r \geq 1$ . 则存在  $m, n$  阶可逆矩阵  $P, Q$  使得  $PCQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ .

由  $AC = CB$  知  $(PAP^{-1})(PCQ) = (PCQ)(Q^{-1}BQ)$ , 并作分块  $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ , 代入计算得到  $A_1 = B_1, B_2 = O, A_3 = O$ . 因此  $A, B$  的特征多项式分别为  $|\lambda I_m - A| = |\lambda I_m - PAP^{-1}| = |\lambda I_r - A_1||\lambda I_{m-r} - A_4|, |\lambda I_n - B| = |\lambda I_n - Q^{-1}BQ| = |\lambda I_r - A_1||\lambda I_{n-r} - B_4|$ . 这与无公共特征值矛盾.

12.  $A$  只能是数乘变换. 考虑特征向量  $\eta_0, \dots, \eta_n$  对应于特征值  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ . 考虑  $\eta_0 = a_1\eta_1 + \cdots + a_n\eta_n$ , 显然  $a_1, \dots, a_n$  均不为 0(否则剔除它对应的  $\eta_i$  后剩余的  $n$  个向量线性相关). 两边同时左乘  $A$  知  $a_1(\lambda_1 - \lambda_0)\eta_1 + \cdots + a_n(\lambda_n - \lambda_0)\eta_n = 0 \Rightarrow a_1(\lambda_1 - \lambda_0) = \cdots = a_n(\lambda_n - \lambda_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ . 这表明其是数乘变换.

13. 注意到  $(A+iB)(A-iB) = A^2 + B^2 - i(AB - BA)$ , 因此  $\det(AB - BA) = -\det(A+iB)\det(A-iB)$ . 若  $A+iB$  有特征值  $\lambda_1, \lambda_2$ , 则  $A-iB$  有特征值  $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2$ (两边取共轭), 从而  $-\det(A+iB)\det(A-iB) = -\lambda_1\lambda_2\overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2 = -|\lambda_1\lambda_2|^2 \leq 0$ .

## 10 矩阵的相似与对角化

### 10.1 问题

1. 对称矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ , 找到正交矩阵  $P$  和对角矩阵  $D$  使得  $A = PDP^T$ .

2. 分块矩阵  $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$  可对角化, 其中  $A, B$  是方阵. 问是否有  $A, B$  都可对角化?

3. 方阵  $A, B$  可对角化, 问是否有  $AB$  可对角化? 若加上  $A, B$  可交换条件呢?

4. 证明: 在复数域上, (1) 若矩阵  $A, B$  可交换, 则  $A, B$  有公共的复特征向量; (2) 若矩阵  $A, B$  可交换, 则存在可逆复矩阵  $U$  使得  $U^{-1}AU$  和  $U^{-1}BU$  同为上三角矩阵.

5.  $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_2 & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$  是分块上三角矩阵, 对角块为  $n_i$  阶上三角矩阵  $A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$ , 且  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  互异. 证明  $A$  可对角化当且仅当  $A_i = \lambda_i I_{n_i}$ .

6.  $n$  阶实矩阵  $A, B$  在复数域上相似, 问它们是否在实数域上相似.

7.  $A, B$  是  $n$  阶复矩阵,  $\text{rank}(AB - BA) \leq 1$ , 证明  $A, B$  可同时上三角化.

【编者注】与第 4(2) 题相比, 本题条件有所放松 (秩要求从 0 放宽到 1).

8. 考虑数域  $F$  上的  $n$  阶方阵构成的线性空间  $M_n(F)$ . 定义线性运算  $\sigma(A) = A^T$ , 求出它的特征值和对应的特征子空间, 并证明它可以对角化.

9.  $n$  维向量  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, \dots, b_n)^T, A = \alpha\beta^T$ , 且  $a_1b_1 \neq 0$ . 证明  $A$  可对角化的充要条件是  $\alpha^T\beta \neq 0$ .

10.  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 = A$ , 证明  $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$ .

11. (Roth 定理)  $A_{m \times m}, B_{n \times n}, C_{m \times n}$ . 证明: 若存在矩阵  $X_{m \times n}$  使得  $AX - XB = C$ , 则矩阵  $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$  与矩阵  $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$  相似. 该命题的逆命题是否也成立?

12. 集合  $S$  由一些可对角化的  $n$  阶方阵构成, 且其中任意两个矩阵都可交换. 问是否有  $S$  中所有矩阵都可同时对角化.

【编者注】本题是第 3 题的一个推广.

## 10.2 解答

1.  $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = -3$ (重根), 6, 对应的一组标准正交特征向量是  $(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)^T, (\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, -\frac{\sqrt{5}}{3})^T, (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$ .

因此  $D = \text{diag}(-3, -3, 6), P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{1}{15} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ .

2. 由题意, 存在可逆分块矩阵  $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}$  使得  $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & D_2 \end{bmatrix}$ , 其中  $D_1, D_2$  是对角矩阵. 这得到  $BU_3 = U_3D_1, BU_4 = U_4D_2$ . 取一个  $[U_3, U_4]$  的列极大线性无关组知  $B$  可对角化. 对于  $A$ , 注意到只需证明  $A^T$  可对角化, 对原矩阵取转置然后类似证明即可.

3. (1) 有反例  $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(2) 可以对角化. 不妨设  $A$  是对角矩阵  $\text{diag}(\lambda_1 I_1, \dots, \lambda_s I_s)$ , 并将  $B$  按照这种格式分块  $\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{ss} \end{bmatrix}$ , 计算  $AB = BA$  知  $B_{ij} = 0, \forall i \neq j$ . 由第二题结论知  $B$  可对角化  $\Rightarrow$  每个  $B_{ii}$  均可对角化, 因此  $AB$  可对角化.

【编者注】本题也说明了  $A, B$  可同时对角化. 因为可将  $B_{ii}$  对角化时对应的基矩阵  $U_{ii}$  按对角线拼接成大矩阵  $U$ , 在此矩阵对应的基下  $A, B$  都是对角阵.

4. (1) 记  $A$  对应于特征值  $\lambda$  的特征子空间为  $V_\lambda$ .  $\forall \alpha \in V_\lambda, AB\alpha = BA\alpha = \lambda B\alpha \Rightarrow B\alpha$  也是  $A$  属于  $\lambda$  的特征向量  $\Rightarrow V_\lambda$  是  $B$  的不变子空间. 从而只需取  $B|_{V_\lambda}$  的一个特征向量即可.

(2) 对空间维数用数学归纳法. 考虑  $A, B$  的某个公共单位特征向量  $\alpha_1$ , 扩充成一组标准正交基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . 在这组基下  $A, B$  对应的矩阵分别是  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_1 & D_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$ . 它们可交换, 因此  $A_1, B_1$  也可交换. 由归纳假设存在空间  $\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$  上的一组基  $\beta_2, \dots, \beta_n$  使得  $A_1, B_1$  为上三角矩阵 (其实是定义了变换  $\tilde{A}_1 = P_{\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle} A|_{\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle}$  和相应的  $\tilde{B}_1$ , 这里  $P$  是沿着  $\langle \alpha_1 \rangle$  在空间  $\langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$  上的投影). 此时, 在基  $\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  下,  $A, B$  都是上三角矩阵.

5. 容易验证特征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , 每个特征值分别为  $n_i$  重. 由于  $A$  可对角化当且仅当特征值的对应几何重数也为  $n_i$  重, 而这当且仅当  $A_i = \lambda_i I_{n_i}$  (考虑  $\text{rank}(\lambda_i I_{n_1+n_2+\dots+n_n} - A)$  即可).

6. 是. 设  $(Q_1 + iQ_2)A = B(Q_1 + iQ_2)$ , 且它们都是实矩阵. 那么  $Q_1 A = B Q_1, Q_2 A = B Q_2$ . 由于  $|Q_1 + \lambda Q_2| = 0$  至多只有有限多个解 ( $Q_2 = 0$  是平凡情形), 从而存在  $\lambda_0$  使得  $Q_0 := Q_1 + \lambda_0 Q_2$  可逆, 此时  $A = Q_0^{-1} B Q_0$ , 因此实相似.

7. 只需找到公共的低维不变子空间, 剩下的可对维数归纳. 不妨设  $\det A = 0$ , 否则只需将  $A$  换成  $A - \lambda_A I$ , 其中  $\lambda_A$  是  $A$  的某个特征值. 若  $\text{Ker}A$  不是  $B$  的不变子空间, 则存在  $\alpha \in \text{Ker}A$  使得  $B\alpha \notin \text{Ker}A$ . 此时  $(AB - BA)\alpha = AB\alpha \neq 0$ , 这也意味着  $\text{Im}(AB - BA) = \text{span}\{AB\alpha\}$ . 从而  $\forall \beta \in \mathbb{C}^n, (AB - BA)\beta = \lambda_B AB\alpha \Rightarrow BA\beta = AB(\beta - \lambda_B \alpha)$ , 这表明  $\text{Im}A$  是  $B$  的不变子空间. 因此  $\text{Ker}A, \text{Im}A$  中必有  $B$  的不变子空间, 由  $\det A = 0$  知除非  $A = 0$ , 否则此问题已降维.

8. 注意到  $\sigma^2(A) = A$ . 从而有 2 个特征值  $\pm 1$ , 对应的特征子空间为  $\text{span}\{E_{11}, \dots, E_{nn}, E_{ij} + E_{ji}, \dots\}$  ( $1 \leq i \neq j \leq n$ ) 和  $\text{span}\{E_{ij} - E_{ji}, \dots\}$  ( $1 \leq i \neq j \leq n$ ). 它们维数加起来是  $n^2$ , 因此可以对角化.
9. 容易验证  $\text{rank}(A) = n - 1$ , 且  $|\lambda I - A| = \lambda^{n-1} |\lambda * 1 - \alpha^T \beta| \Rightarrow A$  有特征值 0(( $n - 1$  重) 和  $\alpha^T \beta$ , 且特征值 0 的几何重数是  $n - 1$ . 因此若  $\alpha^T \beta \neq 0$ , 正好有  $n$  个特征向量; 若  $\alpha^T \beta = 0$ , 只有  $n - 1$  个特征向量.
10. 注意到  $A^2 - A = O$ , 用类似于第 9 次习题课第 5 题的办法知  $A$  可对角化且有特征值 0, 1. 因此  $A$  相似于对角矩阵  $\text{diag}(I_r, O_{n-r})$ . 由于相似矩阵具有相同的秩和迹, 因此  $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$ .

$$11. (1) \begin{bmatrix} I & X \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$

(2) 成立. 记  $V = F^{(m+n) \times (m+n)}$ , 构造  $V$  上的线性变换  $\varphi_1(Y) := \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_2(Y) := \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ . 由于  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$  相似, 因此存在可逆矩阵  $T \in V$  使得  $T^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ . 简单计算得  $\varphi_2(Y) = T\varphi_1(T^{-1}Y)$ , 这表明  $Y \in \text{Ker}\varphi_2 \Leftrightarrow T^{-1}Y \in \text{Ker}\varphi_1$ , 即  $\dim(\text{Ker}\varphi_1) = \dim(\text{Ker}\varphi_2)$ . 将  $Y$  分块为  $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ , 计算可知

$$\begin{aligned} \text{Ker}\varphi_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} : AP = PA, AQ = QB, BR = RA, BS = SB \right\}, \\ \text{Ker}\varphi_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} : AP + CR = PA, AQ + CS = QB, BR = RA, BS = SB \right\}. \end{aligned}$$

再构造线性映射  $\mu_i : \text{Ker}\varphi_i \rightarrow F^{n \times (m+n)}$ ,  $\mu_i \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = (R, S)$ ,  $i = 1, 2$ . 由于

$$\text{Ker}\mu_1 = \text{Ker}\mu_2 = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ O & O \end{pmatrix} : AP = PA, AQ = QB \right\}, \text{Im}\mu_2 \subset \text{Im}\mu_1 = \{(R, S) : BR = RA, BS = SB\},$$

因此由维数关系知  $\text{Im}\mu_1 = \text{Im}\mu_2$ . 注意到  $\begin{pmatrix} O & O \\ O & -I \end{pmatrix} \in \text{Ker}\varphi_1$ , 因此  $(O, -I) \in \text{Im}\varphi_1 = \text{Im}\varphi_2$ , 从而必然存在某个  $P, Q$  使得  $\begin{pmatrix} P & Q \\ O & -I \end{pmatrix} \in \text{Ker}\varphi_2$ , 此时  $AQ - QB = C$ .

**【编者注】**Roth 定理的另一部分:  $AX - YB = C$  有解  $X, Y$  的充要条件是  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ . 有兴趣的读者可以试着自己探究证明, 利用分块矩阵的行列变换技巧.

12. 考虑集合  $M = \{\phi_i \in \text{End}_K(V) : \phi_i \phi_j = \phi_j \phi_i, \text{且 } \phi_i \text{ 可对角化}, \forall i, j \in I\}$ , 然后对维数用数学归纳法.  $n = 1, 2$  时结论显然成立. 假设对一切维数小于  $n$  的线性空间成立, 下面考虑  $n$  维空间. 任取某非数乘变换  $\phi_0 \in M$ , 设  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  是其特征值, 对应重数为  $n_1, \dots, n_s$ , 且  $\sum_{j=1}^s n_j = n$ , 特征子空间为  $V_1, \dots, V_s$ . 与该分块单位矩阵可交换的矩阵必然也是相应的分块对角矩阵 (即  $V_j$  都是  $\phi_i$  的不变子空间), 且所有  $\phi_i$  在  $V_j$  上的限制都可交换. 因此由归纳假设, 存在  $V_j$  的一组基  $\xi_{j1}, \dots, \xi_{jn_j}$  使得  $\phi_i|_{V_j}$  在这组基下的矩阵都是对角阵. 然后把这  $s$  组基按顺序拼接起来即可.

## 11 二次型, 矩阵的合同

### 11.1 问题

1. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ . (1) 将  $f(X)$  写成  $X^T AX$  的形式, 其中  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $A$  是实对称矩阵; (2) 求正交矩阵  $P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  和对角矩阵  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , 满足  $A = PDP^T$  且  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ ; (3) 作变量的正交替换  $X = PY = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + y_3\beta_3$ , 试用  $Y$  表示  $f(X)$ ; (4) 证明  $\lambda_3 \|X\|_2^2 \leq X^T AX \leq \lambda_1 \|X\|_2^2$ , 并求出取等号条件; (5) 确定二次曲面  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  的类型和对称轴; (6) 用成对的行列变换法将  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为  $\mathbb{Q}$  上的合同标准型, 并将  $A$  写成  $UDU^T$  的形式, 其中  $U$  是  $\mathbb{Q}$  上的可逆矩阵,  $D$  是  $\mathbb{Q}$  上的对角矩阵.

2. 写出下列矩阵在实数域上的相抵分类, 相似分类和合同分类.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 证明: 线性空间  $V$  上的双线性函数  $f(\alpha, \beta)$  是反对称的充要条件是  $f(\alpha, \alpha) \equiv 0$ .

4. 已知数域  $K$  上的非平凡对称双线性函数  $f$  可以分解成两个线性函数  $f_1, f_2$  的积:  $f(\alpha, \beta) = f_1(\alpha)f_2(\beta)$ , 问是否存在线性函数  $g$  使得  $f(\alpha, \beta) = g(\alpha)g(\beta)$ ? 如果存在, 请说明理由; 如果不存在, 请举出反例, 并做适当修改使得命题成立.

5. 证明数域  $K$  上的斜对称矩阵一定合同于下述形式的分块对角矩阵:  $\text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (0), \dots, (0) \right\}$ .

6. 设  $n$  阶实对称矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ , 对应的单位正交特征向量是  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . (1) 证明: 对任意  $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$  且  $X \perp \langle \beta_1, \dots, \beta_{k-1} \rangle$ , 有  $\frac{X^TAX}{X^TX} \leq \lambda_k$ ; (2) 对任意  $n-k+1$  维子空间  $V \subset \mathbb{R}^n$ , 都有  $\max_{0 \neq X \in V} \frac{X^TAX}{X^TX} \geq \lambda_k$ . 注意到两问都是可以取等号的, 因此  $\lambda_k = \min_{V \subset \mathbb{R}^n, \dim V = n-k+1} \max_{0 \neq X \in V} \frac{X^TAX}{X^TX}$ .

【编者注】这是特征值的极小-极大刻画. 当然也有极大-极小刻画, 你能写出来吗?

7. 设  $n$  阶实对称矩阵  $A, B$  的特征值分别为  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n, \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$ . 若  $A - B \succeq 0$ , 证明  $\lambda_k - \mu_k \geq 0, \forall k$ .

8. 矩阵  $A$  有  $n$  个实特征值(计重数)  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ . 证明任意  $\lambda \in [\lambda_n, \lambda_1]$ , 存在非零向量  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  使得  $\alpha^T A \alpha = \lambda \|\alpha\|_2^2$ .

9.  $A, B$  是  $n$  阶实对称矩阵, 证明  $A, B, A+B$  的正惯性指数  $p(A), p(B), p(A+B)$  满足  $p(A) + p(B) \geq p(A+B)$ .

10.  $A_1, \dots, A_s$  都是  $n$  阶实对称矩阵,  $1 \leq s \leq n$ , 且  $A_1 + \dots + A_s = I_n$ . 证明下述两个条件等价: (1)  $A_i^2 = A_i, \forall i$ ; (2)  $\text{rank } A_1 + \dots + \text{rank } A_s = n$ .

11. 实正规矩阵  $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{bmatrix}$  (即  $AA^T = A^TA$ ), 且  $A_1, A_2$  是方阵. 证明  $A_3 = 0$ , 且  $A_1, A_2$  都实正规.

## 11.2 解答

1. (1)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . (2) 特征值是  $1, 1, -2$ , 对应单位特征向量  $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T, \beta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})^T, \beta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$ . (3)  $f(X) = Y^TDY = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2$ .

(4) 正交变换不改变矩阵的模长, 因此等价于  $\lambda_3\|Y\|^2 \leq Y^TDY \leq \lambda_1\|Y\|_2^2$ , 取等号条件分别是与  $\beta_3$  同向和与  $\beta_1$  同向.

(5) 由于特征值有两个正数和一个负数, 因此是单叶双曲面, 对称轴是  $X = t\beta_3, t \in \mathbb{R}$ .

$$(6) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①}+ = \frac{1}{2} * \text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③}+ = \frac{1}{2} * \text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③}+ = \frac{3}{2} * \text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} :=$$

$$\xrightarrow{\text{③}+ = \frac{1}{2} * \text{①}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

D. 由成对行列变换过程知  $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ .

2. 相抵分类:  $\text{rank}(A) = 2, \text{rank}(B) = 2, \text{rank}(C) = 3, \text{rank}(D) = 2$ , 因此是  $\{A, B, D\}, \{C\}$ .

相似分类:  $\sigma(A) = \{2, 1, 0\}, \sigma(B) = \{\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}, 0\}, \sigma(C) = \{1, 1, 1\}, \sigma(D) = \{2, 1, 0\}$ , 因此是  $\{A, D\}, \{B\}, \{C\}$ .

合同分类:  $\text{sgn}\sigma(A) = \{1, 1, 0\}, \text{sgn}\sigma(B) = \{1, 0, -1\}, \text{sgn}\sigma(C) = \{1, 1, 1\}, \text{sgn}\sigma(D) = \{1, 1, 0\}$ , 因此是  $\{A, D\}, \{B\}, \{C\}$ .

3. 必要性:  $f(\alpha, \alpha) = -f(\alpha, \alpha) \Rightarrow f(\alpha, \alpha) = 0$ . 充分性:  $f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) = f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) - f(\alpha, \alpha) - f(\beta, \beta) = 0$ .

4. 反例是  $K = V = \mathbb{Q}, f(\alpha, \beta) = 2\alpha\beta$ . 可做如下修改:  $\exists k \in K$  使得  $f(\alpha, \beta) = kg(\alpha)g(\beta)$ .

首先  $\exists \alpha_0, \beta_0$  使得  $f(\alpha_0, \beta_0) = f_1(\alpha_0)f_2(\beta_0) = f_1(\beta_0)f_2(\alpha_0) \neq 0 \Rightarrow f_1(\alpha_0) \neq 0, f_2(\alpha_0) \neq 0$ . 其次由对称性知  $f(\alpha_0, \beta) = f(\beta, \alpha_0) = f_1(\alpha_0)f_2(\beta) = f_1(\beta)f_2(\alpha_0) \Rightarrow f_2(\beta) = \frac{f_2(\alpha_0)}{f_1(\alpha_0)}f_1(\beta)$ , 取  $k = \frac{f_2(\alpha_0)}{f_1(\alpha_0)}, g = f_1$  即可.

5. 用数学归纳法.  $n = 1, 2$  时显然成立. 假设小于  $n$  级的斜对称矩阵都成立, 现在考虑  $n$  级.

情形 1:  $A$  的左上角的 2 级子矩阵  $A_1 \neq 0$ . 则  $A_1$  可逆, 将原矩阵  $A$  写成分块矩阵  $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2^T & A_4 \end{pmatrix}$ , 利用成对分块行列变换  $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2^T & A_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②+}} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 + A_2^T A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix}$  知两者合同, 而  $A_4 + A_2^T A_1^{-1} A_2$  是  $n-2$  级斜对称矩阵, 由归纳假设知成立.

情形 2: 若  $A_1 = 0$ , 但是  $A_2 \neq 0$ , 那么利用成对行列变换把  $A_2$  的对应列和  $-A_2^T$  的对应行加到  $A_1$  上即可.

情形 3: 若  $A_1 = 0, A_2 = 0$ , 则已退化为  $n-2$  的情形.

6. (1) 设  $X = a_k\beta_k + \dots + a_n\beta_n$  后显然. (2) 记  $U = \langle \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$ , 显然  $\forall \beta \in U$ , 有  $\frac{\beta^T A \beta}{\beta^T \beta} \geq \lambda_k$ ; 又由于  $\dim U + \dim V = n+1 > n$ , 因此必然存在  $0 \neq \gamma \in U \cap V$ , 从而  $\max_{0 \neq X \in V} \frac{X^T A X}{X^T X} \geq \frac{\gamma^T A \gamma}{\gamma^T \gamma} \geq \lambda_k$ .

7. 由  $A - B \succeq 0$  知  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha^T A \alpha \geq \alpha^T B \alpha$ . 从而

$$\lambda_k = \min_{V \subset \mathbb{R}^n, \dim V = n-k+1} \max_{0 \neq X \in V} \frac{X^T A X}{X^T X} \geq \min_{V \subset \mathbb{R}^n, \dim V = n-k+1} \max_{0 \neq X \in V} \frac{X^T B X}{X^T X} = \mu_k.$$

8. 不妨设  $\|\alpha\|_2 = 1$ , 则  $\lambda_n \leq \alpha^T A \alpha \leq \lambda_1$  且上下界不等式能取到等号. 因为  $\{\alpha : \|\alpha\|_2 = 1\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的紧集, 因此由连续性和介值性, 函数  $f(\alpha) := \alpha^T A \alpha$  能取到  $[\lambda_n, \lambda_1]$  中的所有值.

9. 若  $A, B$  均半正定, 则  $A+B$  也半正定, 从而  $p(A+B) = \text{rank}(A+B) \leq \text{rank}A + \text{rank}B = p(A) + p(B)$ . 否则, 可设  $A = C^T \text{diag}(I_p, -I_{r-p}, O_{n-r})C$ , 其中  $C$  是可逆矩阵, 并记  $A_1 = C^T \text{diag}(I_p, O_{n-p})C, A_2 = C^T \text{diag}(O_p, -I_{r-p}, O_{n-r})C$ , 那么  $p(A) = p(A_1), A = A_1 + A_2$ . 同理可以找到  $B_1, B_2$ . 那么  $A+B = (A_1+B_1)+(A_2+B_2)$ , 而  $A_1+B_1$  是半正定矩阵,  $A_2+B_2$  是半负定矩阵, 因此  $p(A+B) \leq p(A_1+B_1) \leq p(A_1)+p(B_1) = p(A)+p(B)$ .

10. (1)  $\Rightarrow$  (2):  $A_i^2 = A_i \Rightarrow A_i$  相似于对角矩阵  $\text{diag}(I_r, O)$ , 从而  $\sum_{i=1}^s \text{rank} A_i = \sum_{i=1}^s \text{tr} A_i = \text{tr}(\sum_{i=1}^s A_i) = \text{tr}(I_n) = n$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): 不妨设  $s \geq 2$ . 令  $B_i = \sum_{j \neq i} A_j$ , 则  $A_i + B_i = I_n$ .  $A_i$  是实对称矩阵, 因此存在正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T A_i Q = \text{diag}(D_i, O_{n-i})$ , 其中  $D_i = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_i})$ , 且  $\lambda_j \neq 0, r_i = \text{rank} A_i$ . 于是  $Q^T B_i Q = I - Q^T A_i Q = \text{diag}(1-\lambda_1, \dots, 1-\lambda_{r_i}, 1, \dots, 1)$ . 这表明  $\text{rank}(Q^T B_i Q) \geq n - r_i$ . 另一方面又有  $\text{rank}(Q^T B_i Q) = \text{rank} B_i \leq \sum_{j \neq i} \text{rank} A_j = n - \text{rank} A_i = n - r_i$ . 这表明  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{r_i} = 1$ , 因此  $A_i = Q^T \text{diag}(I_{r_i}, O_{n-r_i})Q \Rightarrow A_i^2 = A_i$ .

11. 比较  $AA^T = A^T A$  的左上角知  $A_1 A_1^T + A_3 A_3^T = A_1^T A_1$ . 两边取迹知  $\text{tr}(A_3 A_3^T) = 0 \Rightarrow A_3 = 0$ . 从而  $A_1$  正规, 再比较右下角知  $A_2$  也正规.

## 12 致谢

感谢北京大学数学科学学院的高峡老师、王福正老师和田青春老师, 他们教会了笔者高等代数的基本知识, 他们的讲义也成为了笔者的重要参考. 感谢选修 2025 秋高等代数 I 习题课 6 班的全体同学, 他们提供了很多有意思的做法和反馈.