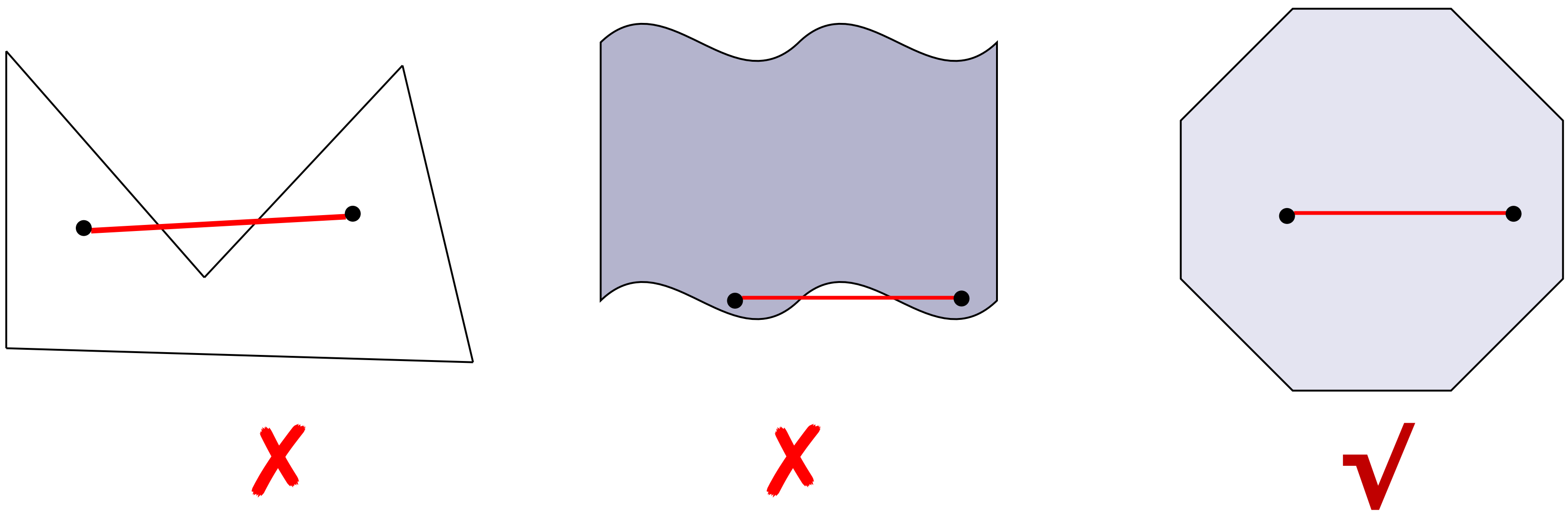
第七章 递推关系和生成函数

7.6 一个几何例子

定义1：设有平面或空间中的点集 K, 若 K中任意两点p 和 q 的连线上的所有点都在 K 内,称 K 是凸集.



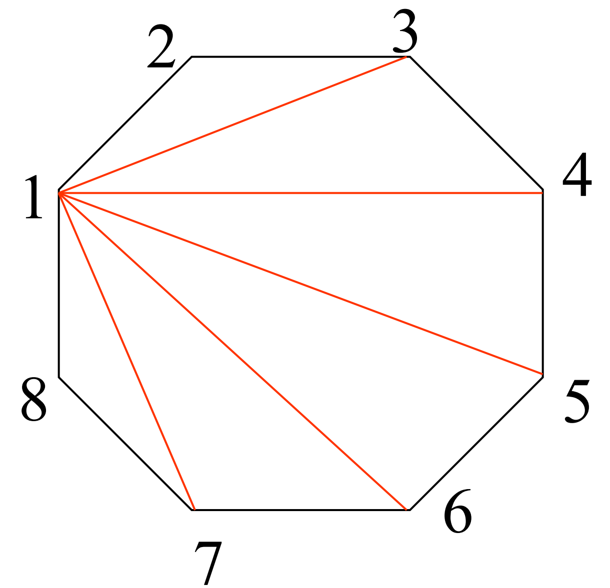
凸多边形的计数问题

- 设 K是有n条边的多边形区域，如下计数它的对角线个数：
  - 每一个顶点通过对角线与其他n-3个顶点相连；
  - 计数每一顶点处的对角线条数再求和得$n(n-3)$；
  - 每条对角线计算了两次，对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$。

另一种计算方法：

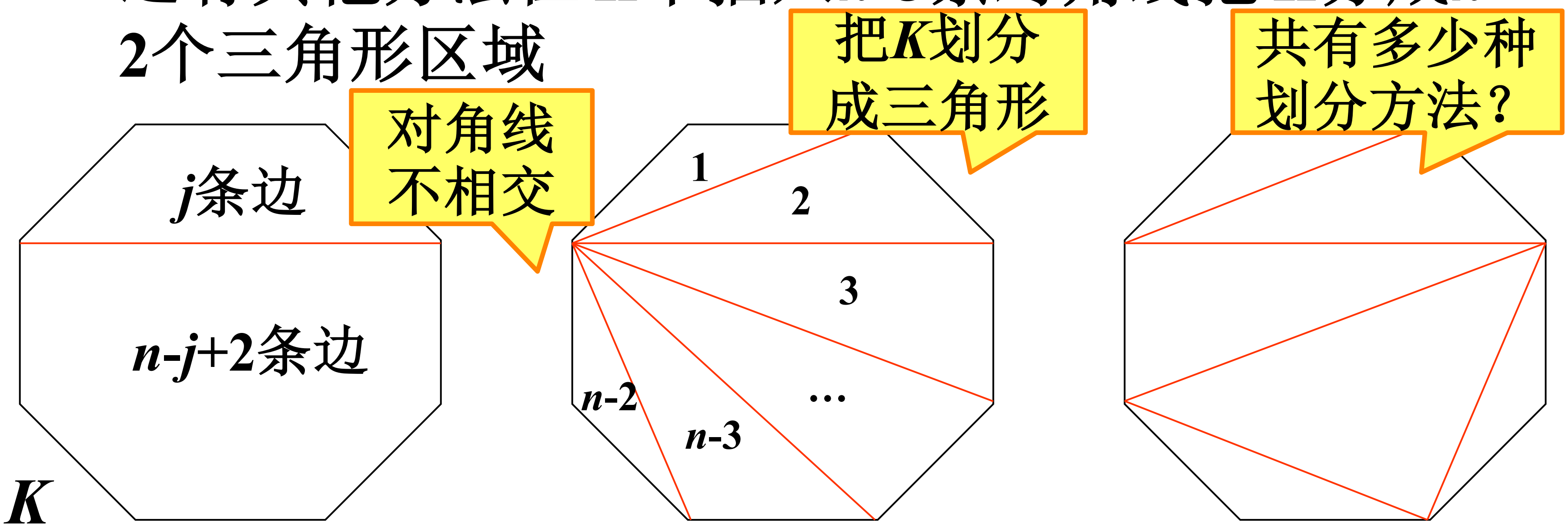
- n个顶点一共可构成$n(n-1)/2$条边
- 减去n条边，剩下的是对角线：

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$$



凸多边形的计数问题

- 设 *K*是有 *n*条边的多边形区域，
  - *K* 的每条对角线把 *K*分成两个区域：*j* 条边的凸多边形和 *n*-*j*+2条边的区域（*j*=3, 4,…, *n*-1）
  - 交于 *K*的某个顶点处的*n*-3条对角线把 *K*分成*n*-2个三角形区域
  - 还有其他方法在 *K*中插入*n*-3条对角线把 *K*分成*n*-2个三角形区域



凸多边形三角形剖分方法计数

定理7.6.1　设 h_n表示用下面方法把凸多边形区域分成三角形区域的方法数：

$n+1$个点

在有$n+1$条边的凸多边形区域内通过插入不相交的对角线，而把它分成三角形区域。

定义 $h_1=1$。

则 h_n满足如下递推关系：

$$h_n= h_1h_{n-1}+h_2h_{n-2}+\dots+ h_{n-1}h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \ (n\geq 2)$$

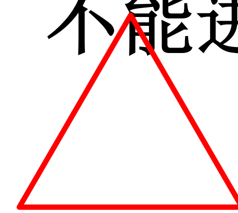
该递推关系解为： $h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ $(n=1, 2, 3,\dots)$

证明：$h_n = h_1 h_{n\text{-}1} + h_2 h_{n\text{-}2} + \ldots + h_{n\text{-}1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$

定理7.6.1证明: (1) 求递推关系。

$n=1$时，定义$h_1=1$，且把一条线段 看作是具有两侧而没有内部的多边形区域。

$n=2$时，为三角形，没有对角线，不能进一步再分，因此$h_2=1$。



由于 $\sum_{k=1}^{2-1} h_k h_{2-k} = h_1 h_1 = 1$.

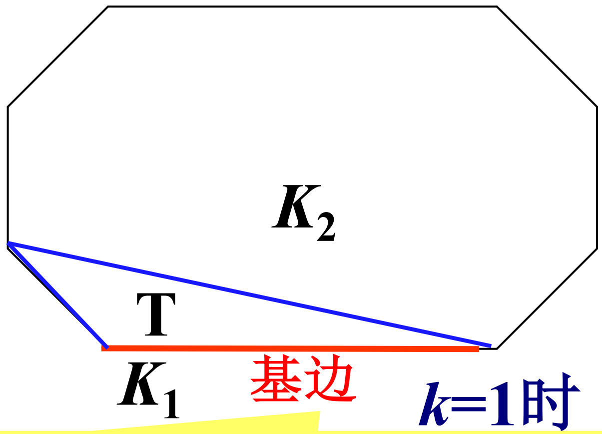
因此，$n=2$时，递推公式成立。

证明：$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$

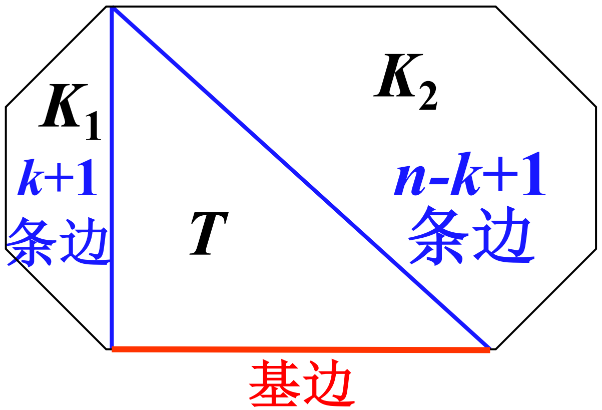
令$n \geq 3$, 考虑 $n+1$ 条边的凸多边形区域 K。

选取 K的一条边称为基边：

对每一种分法，基边所在的三角形区域 T将 K 分成两个部分K_1和K_2，其中K_1有$k+1$条边，而K_2有 $n-k+1$条边 (k=1, 2,…, n-1)。



把一条线段看作是具有两侧而没有内部的多边形区域



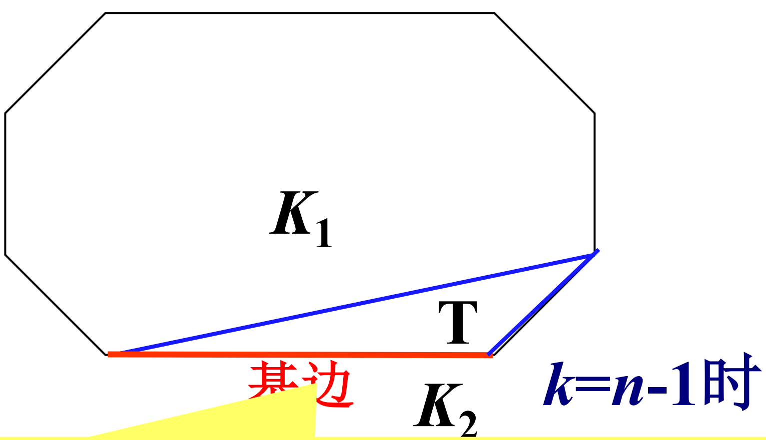
具有n+1条边的多边形区域

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$$

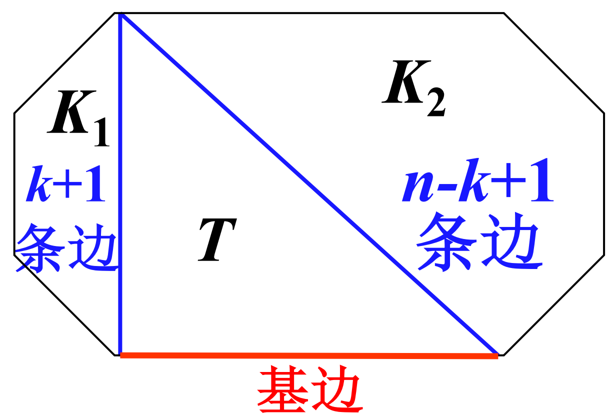
令 $n \geq 3$，考虑 $n+1$ 条边的凸多边形区域 K。

选取 K 的一条边称为基边：

对每一种分法，基边所在的三角形区域 T 将 K 分成两个部分 K_1 和 K_2，其中 K_1 有 $k+1$ 条边，而 K_2 有 $n-k+1$ 条边 $(k=1, 2, \ldots, n-1)$。



把一条线段看作是具有两侧而没有内部的多边形区域



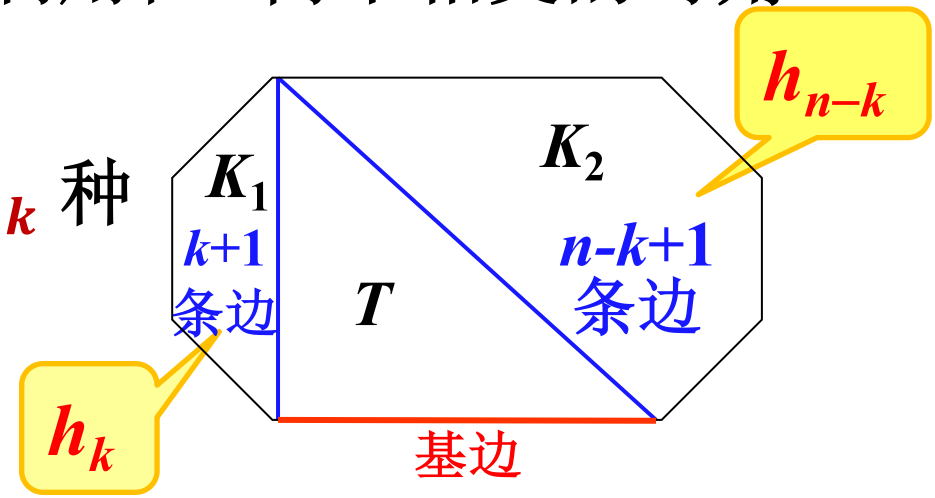
具有 $n+1$ 条边的多边形区域

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$$

通过分别在 K_1与 K_2中插入不相交的对角线，可把 K_1与 K_2划分成三角形区域，从而实现对 K 的进一步划分。

因此，对于三角形区域 T 中包含基边的一个特定的选择，存在 $h_k h_{n-k}$ 种方法利用在K内不相交的对角线把它分成三角形区域。

因此总共有 $h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}$ 种方法把 K分成三角形区域。



具有n+1条边的多边形区域

(2) 求解（非线性）递推关系。

设$h_1, h_2, \ldots, h_n \ldots$的生成函数为

$$g(x) = h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots$$

$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1$

$h_2 = h_1 h_1$

$h_3 = h_1 h_2 + h_2 h_1$

$h_4 = h_1 h_3 + h_2 h_2 + h_3 h_1$

$h_5 = h_1 h_4 + h_2 h_3 + h_3 h_2 + h_4 h_1$

则有

$(g(x))^2$

$= (h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 \ldots + h_n x^n + \ldots)(h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 \ldots + h_n x^n + \ldots)$

$= h_1^2 x^2 + (h_1 h_2 + h_2 h_1) x^3 + (h_1 h_3 + h_2 h_2 + h_3 h_1) x^4 + \ldots +$

$(h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1) x^n + \ldots$

$= h_2 x^2 + h_3 x^3 + h_4 x^4 + \ldots + h_n x^n + \ldots$

$= g(x) - h_1 x = g(x) - x$ （$h_1 = 1$）

因此 $g(x)$满足方程 $(g(x))^2 - g(x) + x = 0$。

因此 $g(x)$满足方程 $(g(x))^2-g(x)+x=0$

解方程得到：

$g(x)=h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n+\ldots$

$$g_1(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2},\quad g_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

由于 $g(0)=0$, 而 $g_1(0)=1$ 不符合条件,

$g_2(0)=0$ 符合条件

故， $$g(x)=g_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

根据牛顿二项式定理：

$$(1+x)^{1/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\times 2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

应用：求解任意精度的平方根（第5章）

$$g(x)=g_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

代入展开得到：

$$(1-4x)^{1/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\times 2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}(-1)^n 4^n x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

$$=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

代入$g(x)==\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$，得 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$

因此，$h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ Catalan数 C_{n-1}

凸多边形三角形剖分方法计数

定理7.6.1 设 h_n表示用下面方法把凸多边形区域分成三角形区域的方法数：

在有$n+1$条边的凸多边形区域内通过插入不相交的对角线，而把它分成三角形区域。

定义 $h_1=1$。

则 h_n满足如下递推关系：

$$h_n= h_1h_{n-1}+h_2h_{n-2}+\ldots+ h_{n-1}h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \ (n\geq 2)$$

该递推关系解为： $h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$

Catalan数 C_{n-1}

第8章 特殊计数序列

8.1 Catalan数
8.2 差分序列和Stirling数
8.3 分拆数

第8章 特殊计数序列

8.1 Catalan数
8.2 差分序列和Stirling数
8.3 分拆数

- 相关应用
  - 矩阵相乘的括号化问题
  - 出栈次序问题
  - 给定顶点的二叉树组成问题
  - 买票找零问题
  - 走方格问题
  - … …
- 主要内容
  - **Catalan**数的定义和必要条件
  - 一般项是**Catalan**数的计数问题

回顾

定理7.6.1 设h_n表示用下面方法把凸多边形区域分成三角形区域的方法数：

在有$n+1$条边的凸多边形区域内通过插入不相交的对角线，而把它分成三角形区域。

定义$h_1=1$。则h_n满足如下递推关系：

$$\boxed{h_n = h_1h_{n-1}+h_2h_{n-2}+\ldots+h_{n-1}h_1} = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \quad (n\geq 2)$$

该递推关系的解为：$h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$

Catalan数 C_{n-1}

- 由比利时数学家欧仁·查理·卡塔兰 (1814–1894)提出

Catalan数列

Catalan数列是序列 $C_0, C_1,\ldots, C_n,\ldots$, 其中

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ n=0,1,2,\ldots$$

是第n个Catalan数。

- 凸n+1边形被在其内部不相交的对角线划分成三角形区域的方法数$h_n = C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

$C_3=5$

Catalan数列的递推式

已知：把凸n+1多边形区域分成三角形区域的方法数h_n的递推式满足： $h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1$

由于$C_{n-1} = h_n$ ($n \geq 1$)，得

$$C_{n-1} = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \ldots + h_{n-1} h_1$$
$$= C_0 C_{n-2} + C_1 C_{n-3} + \ldots + C_{n-2} C_0$$

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ n \geq 0$$
$$C_0 = 1$$

得Catalan数列$C_0, C_1, \ldots, C_n, ..$的递推式为

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0,$$

$C_0=1$, $C_1 = 1$， $C_2 = 2$, $C_3 = 5$， …

非线性递推关系

Catalan数列的应用

- Catalan数列的递推关系

$$C_n = C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+ C_{n-1}C_0,$$

$$C_0=1,\ C_1 = 1,\ \ C_2= 2,\ C_3 = 5,\ \ \ldots$$

- 第n 个 Catalan数：

$$C_n= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ C_0=1$$

计数问题

证明满足递推关系

Catalan数

- 许多有意义的计数问题都导致这样的递推关系。

例．(括号化问题) 矩阵连乘 $P = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$，依据乘法结合律，不改变其顺序，只用括号表示成对的乘积，试问有几种括号化的方案？

思路：通过括号化，将 P 分成两个部分，然后分别对两个部分再进行括号化：$1 \le k \le n-1$

$$(M_1 \times M_2 \times \ldots M_k) \times (M_{k+1} \times \ldots \times M_n)$$

$k = 1$：$(M_1) \times (M_2 \times M_3 \ldots \times M_n)$

$k = n-1$：$(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_{n-1}) \times (M_n)$

设n个矩阵连乘的括号化方案的种数为 h_n，则

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + h_3 h_{n-3} + \ldots + h_{n-1} h_1。$$

计算开始几项，$h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 2, h_4 = 5$。

因此，h_n为第$n-1$个Catalan数，

即 $h_n = C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, n \ge 1$。

例. (出栈次序问题)一个栈(无穷大)的进栈序列为1, 2, 3, …, n, 有多少个不同的出栈序列? （后进先出）

进栈 →

			n	…	k+1	k	k-1	…	2	1
			i_1	…	i_{n-k}	i_{n-k+1}	i_{n-k+2}		i_{n-1}	i_n

← 出栈

例如： 1 1 2 3 3 2 4 5 6 6 7 7 5 4 8 9 9 8

1 2 3 3 2 4 4 5 6 7 7 8 9 9 8 6 5 1

例. (出栈次序问题)一个栈(无穷大)的进栈序列为1, 2, 3, …, n, 有多少个不同的出栈序列?（后进先出）

进栈 →

1, 2, …, k-1一定在 k 进栈前进栈

			n	…	k+1	k	k-1	…	2	1
			i_1	…	i_{n-k}	i_{n-k+1}	i_{n-k+2}		i_{n-1}	k

← 出栈

1, 2, …, k-1一定在 k进栈前出栈

解：记出栈序列数目为 h_n。

设一个出栈序列的<u>最后一个出栈元素</u>为k (1≤ k ≤ n)，则

- 元素1, 2, …, k-1的<u>进栈与出栈</u>在 k进栈前全部完成;且

例. (出栈次序问题)一个栈(无穷大)的进栈序列为1, 2, 3, …, n, 有多少个不同的出栈序列? （后进先出）

k+1, …, n 一定在 k进栈后进栈

进栈 →

			n	…	k+1	k	k-1	…	2	1
			i_1	…	i_{n-k}	i_{n-k+1}	i_{n-k+2}		i_{n-1}	k

← 出栈

k+1, …, n 一定在k出栈前出栈

解：记出栈序列数目为 h_n。

设一个出栈序列的最后一个出栈元素为k ($1\le k \le n$)，则

- 元素1, 2, …, k-1的进栈与出栈在 k进栈前全部完成;且
- 元素 k+1, …, n的进栈与出栈在k进栈后直至 k 出栈前全部完成。

例. (出栈次序问题)一个栈(无穷大)的进栈序列为1, 2, 3, …, n, 有多少个不同的出栈序列?（后进先出）

→ 进栈

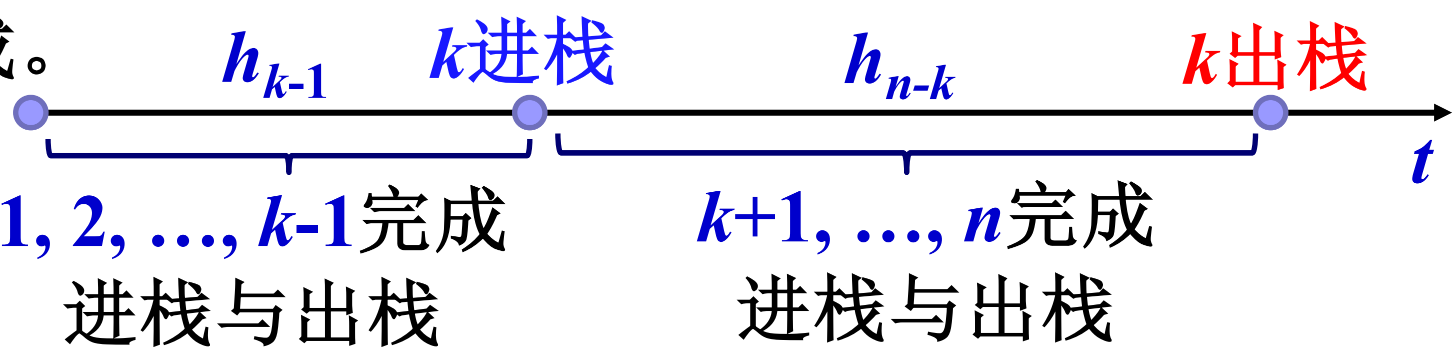
			n	…	k+1	k	k-1	…	2	1
			i_1	…	i_{n-k}	i_{n-k+1}	i_{n-k+2}		i_{n-1}	k

← 出栈

解：记出栈序列数目为 h_n。

设一个出栈序列的最后一个出栈元素为k ($1\le k \le n$)，则

- 元素1, 2, …, k-1的进栈与出栈在 k进栈前全部完成;且
- 元素 k+1, …, n的进栈与出栈在k进栈后直至 k 出栈前全部完成。



例. (出栈次序问题)一个栈(无穷大)的进栈序列为1, 2, 3, …, n, 有多少个不同的出栈序列? （后进先出）

进栈 →

			n	…	k+1	k	k-1	…	2	1
			i_1	…	i_{n-k}	i_{n-k+1}	i_{n-k+2}		i_{n-1}	k

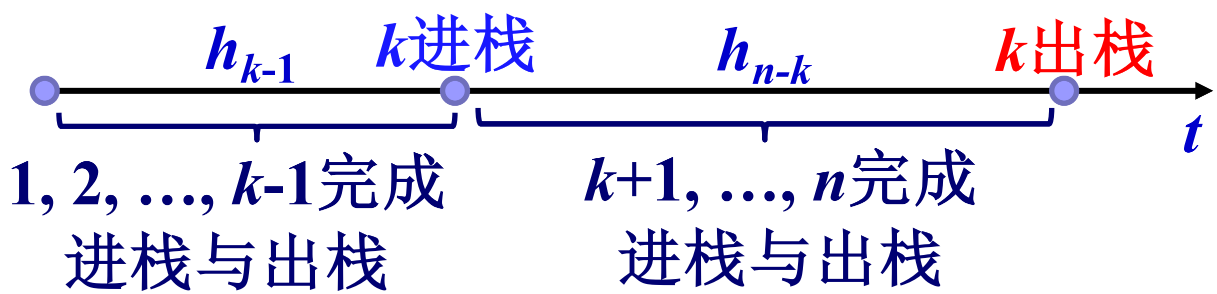
← 出栈

解：由乘法原理，最后一个出栈元素为 k 的出栈序列的个数为 $h_{k-1}h_{n-k}$。

由加法原理得，$h_n = \sum_{k=1}^{n} h_{k-1}h_{n-k}$.

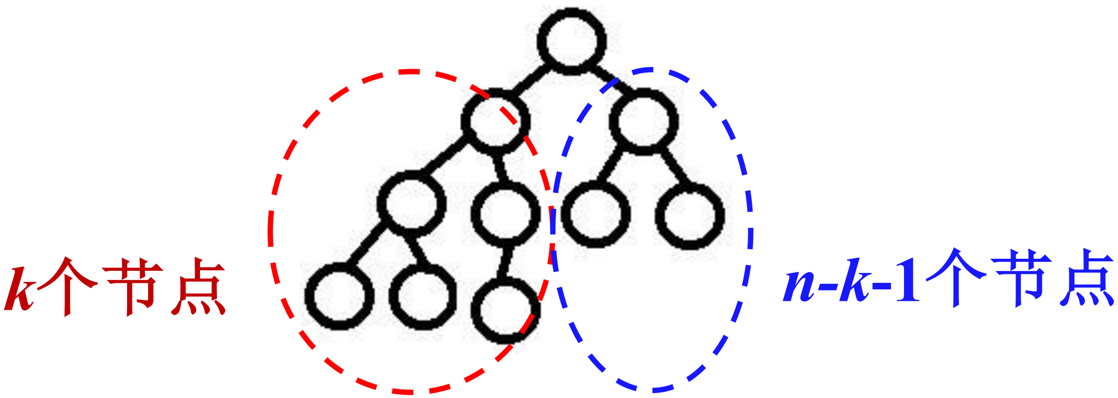
令h_0=1, 且知 h_1=1, h_2=2， 由递推关系知

$$h_n = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, n\geq 0。$$



例：n个节点构成的二叉树，共有多少种情形？

思路：考虑左右子树的分布情况



设 n个节点构成二叉树的情形有 h_n 种。

则有 $h_n = h_0 h_{n-1} + h_1 h_{n-2} + ...+ h_{n-2} h_1 + h_{n-1} h_0$

令$h_0 = 1$，有$h_1 = 1, h_2 = 2, h_3 = 5$。

结合递推式，知 $h_n = C_n$。

Catalan数列的应用

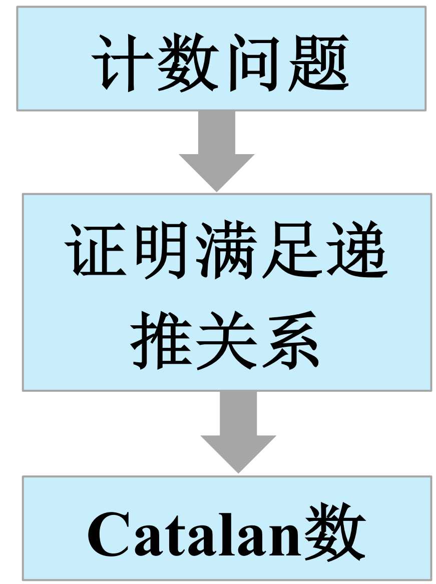
- Catalan数列的递推关系

$$C_n = C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+C_{n-1}C_0,$$

$$C_0=1,\ C_1=1,\ C_2=2,\ C_3=5,\ \ldots$$

- 第n 个 Catalan数：

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ C_0=1$$



- **问题**：是否还有其他判断Catalan数列的方法？

定理8.1.1. 考虑由n个+1和n个-1构成的$2n$项序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2n},$$

其部分和总满足：

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0\ (k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

的序列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$$

- 可解决的问题
  - 买票找零问题
  - 走方格问题

定理8.1.1. 考虑由n个+1和n个-1构成的$2n$项序列

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n},$$

其部分和总满足：

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0 \ (k = 1, 2, \dots, 2n)$$

的序列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n\geq 0)$$

证明：设由n个+1和n个-1构成的$2n$项序列中满足条件的序列称为可接受的，其个数记为A_n；否则称为不可接受的，其个数记为U_n。

由n个+1和n个-1构成的序列的总数为

$$A_n + U_n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n\cdot(2n-1)\dots(n+1)}{n!} = \binom{2n}{n}。$$

下面计算U_n，从而得到A_n。

定理8.1.1. 考虑由n个+1和n个-1构成的$2n$项$a_1, a_2, \dots, a_{2n}$，其部分和满足：$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \dots, 2n)$ 的数列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n\geq 0)$$

假设序列 $S=a_1, a_2, \dots, a_{2n}$是不可接受的

令S_k是第一个为负的和式, 即k是满足$S_k<0$的最小的k，

则$S_{k-1}=0$，k一定为奇数且$a_k= -1$；

$S_k= a_1+\dots+ a_k$, k =1, 2,…, $2n$

S							
	a_1	a_2	a_3	….	a_k	a_{k+1}	…	a_{2n}

$\frac{k-1}{2}$个+1，$\frac{k+1}{2}$个-1　$\frac{2n-k+1}{2}$个+1，$\frac{2n-k-1}{2}$个-1

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	…	a_{k-2}	a_{k-1}	a_k
1与-1的个数相同									-1
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	…	S_{k-2}	S_{k-1}	S_k
								0	-1

定理8.1.1. 考虑由n个+1和n个-1构成的$2n$项 $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$，其部分和满足：$a_1+a_2+\cdots+a_k \geq 0$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ 的数列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n\geq 0)$$

假设序列 $S=a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$是不可接受的

$S_k=a_1+\ldots+a_k,\ k=1, 2,\ldots, 2n$

令S_k是第一个为负的和式, 即k是满足$S_k<0$的最小的k，

则$S_{k-1}=0$，k一定为奇数且$a_k=-1$

$$S: \quad \underbrace{\overbrace{\boxed{a_1}\boxed{a_2}\boxed{a_3}\boxed{\ldots}\boxed{a_k}}^{S_k}}_{\frac{k-1}{2}\text{个}+1,\ \frac{k+1}{2}\text{个}-1}\ \underbrace{\boxed{a_{k+1}}\boxed{\ldots}\boxed{a_{2n}}}_{\frac{2n-k+1}{2}\text{个}+1,\ \frac{2n-k-1}{2}\text{个}-1}$$

把S的前k项中的+1和 -1相替换，得到S'

$$S': \quad \underbrace{\boxed{-a_1}\boxed{-a_2}\boxed{-a_3}\boxed{\ldots}\boxed{-a_k}}_{\frac{k+1}{2}\text{个}+1,\ \frac{k-1}{2}\text{个}-1}\ \underbrace{\boxed{a_{k+1}}\boxed{\ldots}\boxed{a_{2n}}}_{\frac{2n-k+1}{2}\text{个}+1,\ \frac{2n-k-1}{2}\text{个}-1}$$

得S'有n+1个1和 n-1个-1, 且S'_k是S'的第一个为正的和式。

因此，由n个+1和n个-1构成的不可接受的序列S对应一个由n+1个1和 n-1个-1构成的序列S'。

反之是否成立？

定理8.1.1. 考虑由n个+1和n个-1构成的$2n$项 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$，其部分和满足：$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \dots, 2n)$ 的数列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n\geq 0)$$

假设序列 $S= a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 是由n+1个1 和 n-1和 -1 构成的序列，且 S_k是第一个为正的子序列和，则k为奇数, S_{k-1}=0, 且 a_k为+1

$s_k= \overbrace{a_1+\dots+ a_k}$, k=1, 2,…, $2n$

S	a_1	a_2	a_3	….	a_k	a_{k+1}	…	a_{2n}

$\underbrace{a_1 \dots a_k}_{\frac{k-1}{2}个-1,\ \frac{k+1}{2}个+1}$ $\underbrace{a_{k+1} \dots a_{2n}}_{\frac{2n-k-1}{2}个-1,\ \frac{2n-k+1}{2}个+1}$

把 S 的前 k项+1和-1相替换，得到S'

S'	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	…	$-a_k$	a_{k+1}	…	a_{2n}

$\underbrace{-a_1 \dots -a_k}_{\frac{k-1}{2}个+1,\ \frac{k+1}{2}个-1}$ $\underbrace{a_{k+1} \dots a_{2n}}_{\frac{2n-k-1}{2}个-1,\ \frac{2n-k+1}{2}个1}$

得S'中有n个1和 n个-1，且S'_k = -1<0, 即S'为不可接受的。

因此，由n+1个1和 n-1个-1构成的序列对应一个由n个+1和n个-1构成的不可接受的序列。

定理8.1.1. 考虑由n个+1和n个-1构成的$2n$项$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$，其部分和满足：$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ 的数列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$$

因此，由n个+1和n个-1构成的不可接受序列的个数U_n与由n+1个+1和n-1个-1构成的序列的个数相等，

即 $U_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$。

得 $A_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!} - U_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。

因此，定理得证。

例. (购票找零钱问题) 有$2n$个人排成一对进电影院，门票 50元，$2n$个人中的n个人有50元纸币，n个人有100元纸币。电影院设置售票点，假设未备有零钱，有多少种排队方法使得只要有100元的人买票，售票处就有50元的纸币找零？

情况1：若把$2n$个人看成不可区分的, 将50元用 +1表示，100元用-1表示。

则满足条件的排队序列$a_1,\ldots, a_{2n}$一定满足 $a_1+\ldots+a_k \geq 0$, k=1, …, $2n$。

否则，假设$a_1,\ldots, a_k$是最短的一个$a_1+\ldots+a_k < 0$的序列，则k为奇数，且$a_k = -1$，则第k个人付款100时，无法找零。

因此满足条件的排队方法数为第n个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n\geq 0)$$

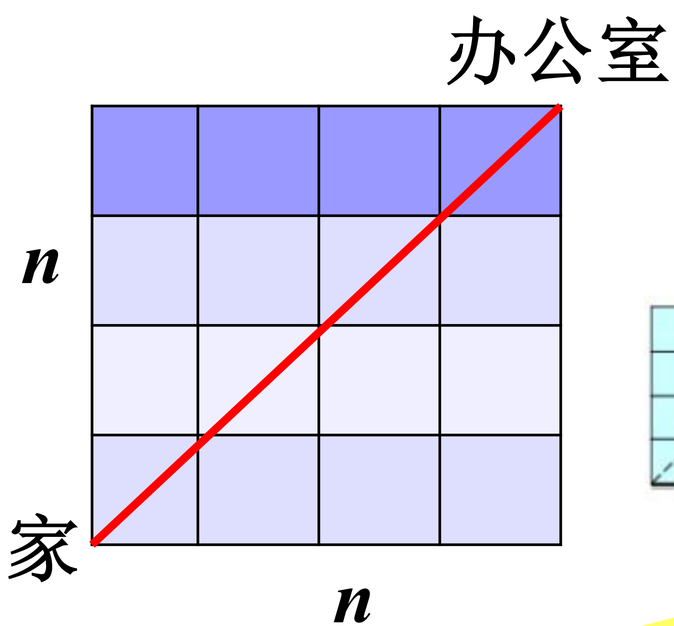
例. (购票找零钱问题) 有$2n$个人排成一对进电影院，门票 50元，$2n$个人中的n个人有50元纸币，n个人有100元纸币。电影院设置售票点，假设未备有零钱，有多少种排队方法使得只要有100元的人买票，售票处就有50元的纸币找零？

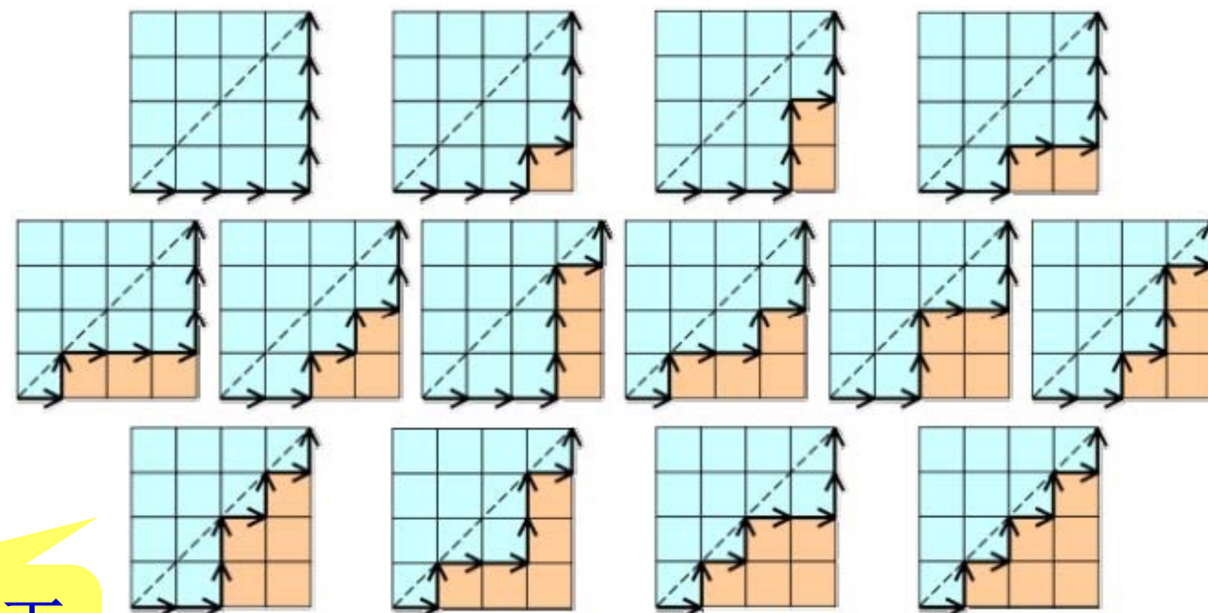
情况2：若把$2n$个人看成可区分的,

则需要考虑n个有50元纸币的人的排列，以及n个有100元纸币的人的排列。

因此排队方法数为 $(n!\,n!)\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ $(n\geq 0)$

例. (城市穿越问题) 一位大城市的律师在她住所以北n个街区和以东n个街区处工作。每天她走$2n$个街区上班。如果她不穿越从家到办公室的对角线，有多少可能的道路?

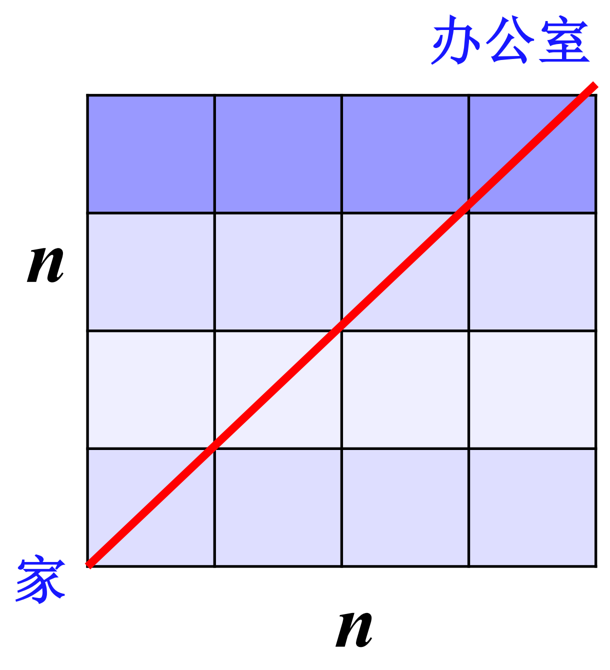




全在对角线下方的路径

例. (城市穿越问题) 一位大城市的律师在她住所以北n个街区和以东n个街区处工作。每天她走$2n$个街区上班。如果她不穿越从家到办公室的对角线，有多少可能的道路?

解：由于不穿越从家到办公室的对角线，因此一条路径要么全在对角线上方，或者全在对角线下方。记全在对角线下方的路径数为B_n，全在对角线上方的路径数为C_n，由路径的对称性，得$B_n=C_n$。



例. (城市穿越问题) 一位大城市的律师在她住所以北n个街区和以东n个街区处工作。每天她走$2n$个街区上班。如果她不穿越从家到办公室的对角线，有多少可能的道路?

解（续）：下面求B_n。

用+1表示向东，-1表示向北。

则每条路径对应一个+1, -1的序列

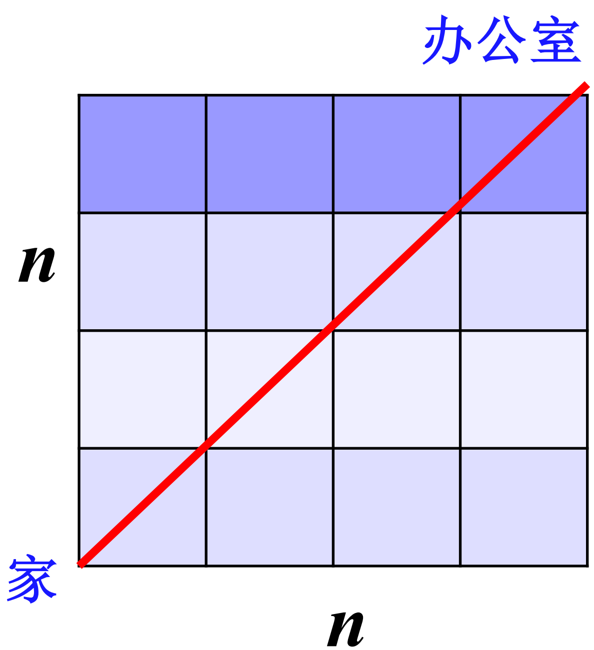
$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$。

显然，B_n为所有满足 $a_1+\ldots+a_k \geq 0$, $k=1, \ldots, 2n$，的路径条数，

否则将有路径穿越对角线。

因此, $B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ $(n\geq 0)$,

得满足条件的道路总数为 $\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}$ $(n\geq 0)$。



Catalan数的另一个递推关系

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$$

两式相除得 $\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{4n-2}{n+1}$

因此，Catalan序列递推关系和初始条件为：

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad C_0 = 1$$

另一类Cartalan数

例. (括号化问题) 矩阵连乘 $P = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$，依据乘法结合律，不改变其顺序，只用括号表示成对的乘积，试问有几种括号化的方案？

例: 令$a_1,a_2, \ldots.a_{n-1}$为n个数，这些数的乘法格式是指进行 $a_1, a_2, \ldots., a_{n-1}$ 的乘法的方案，求乘法格式的数目。

区别?

拟Catalan数（一般表达式）

定义一个新的数列：

$$C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*, \dots$$

其中, $C_n^* = n!\, C_{n-1}$, $n=1, 2, \dots, n, \dots$

$$\begin{aligned} C_n^* &= n!\, C_{n-1} \\ &= n! \cdot \frac{1}{(n-1)+1}\binom{2(n-1)}{n-1} \\ &= (n-1)!\binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

拟Catalan数（递推关系和初值）

- 将Catalan数的递推关系代入得到拟Catalan数的递推关系：

$$C_n^* = n!\,C_{n-1} = n!\frac{4(n-1)-2}{(n-1)+1}C_{n-2} = n!\frac{4n-6}{n}C_{n-2}$$

$$= (4n\text{-}6)[(n\text{-}1)!\,C_{n-2}] = (4n\text{-}6)\,C_{n-1}^*$$

因此，拟Catalan数的递推关系和初值如下：

$$C_n^* = (4n\text{-}6)\,C_{n-1}^* \ (\,n\geq 1)$$

$$C_1^* = 1$$

计数问题

↓

证明满足递推关系

↓

拟Catalan数

例:令$a_1,a_2, \ldots .a_{n-1}$为n个数，这些数的乘法格式是指进行$a_1, a_2, \ldots., a_{n-1}$的乘法的方案，求乘法格式的数目。

解：显然，一个乘法格式需要两数间的n-1次乘法，其中两个数或者是$a_1, a_2, \ldots, a_n$中的之一，或者是他们的部分乘积。

令h_n表示n个数的乘法格式的数目。

则有h_1=1。

$h_2 = 2$, 两个乘法格式为$(a_1 \times a_2)$ 和$(a_2 \times a_1)$ 。

例:令$a_1,a_2, \ldots a_{n-1}$为n个数，这些数的乘法格式是指进行$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$的乘法的方案，求乘法格式的数目。

解(续)： $h_3 = 12$ ，其中3个数的乘法格式为:

$(a_1\times(a_2\times a_3))$，$(a_1\times(a_3\times a_2))$，$((a_1\times a_3)\times a_2)$，

$((a_3\times a_1)\times a_2)$，$((a_1\times a_2)\times a_3)$，$(a_3\times(a_1\times a_2))$，

$(a_2\times(a_1\times a_3))$，$(a_2\times(a_3\times a_1))$，$((a_2\times a_3)\times a_1)$，

$(a_3\times(a_2\times a_1))$，$((a_2\times a_1)\times a_3)$，$((a_3\times a_2)\times a_1)$

观察到:

(1) 3个数的乘法格式都需要两个乘号, 每个乘号对应一组括号因子

(2) 每种乘法方案考虑了数字的顺序：对$a_1, a_2, \ldots, a_n$的每个排列插入n-1组括号，使得每一对括号都指定两个因子

例:令$a_1,a_2,\ldots a_{n-1}$为n个数，这些数的乘法格式是指进行$a_1,a_2,\ldots a_{n-1}$的乘法的方案，求乘法格式的数目。

解(续) (递归定义):

任取$a_1,a_2,\ldots a_{n-1}$的一种乘法格式，它有n-2次乘 法和n-2组括号。两种方法构造$a_1,a_2,\ldots a_n$的的乘法格式:

(1)将 a_n 插入到n-2个乘法运算中任一个×号的两个因子中的任一个因子的任一侧，一共是$(n-2)\cdot 2\cdot 2=4(n-2)$种方案;

(2) 把该乘法格式作为一个因子，把a_n插入到因子的任一侧, 一共2种方案。

$$a_1\times a_2 \Rightarrow \begin{array}{ll} (a_3\times a_1)\times a_2 & \\ (a_1\times a_3)\times a_2 & a_3\times(a_1\times a_2) \\ a_1\times(a_3\times a_2) & (a_1\times a_2)\times a_3 \\ a_1\times(a_2\times a_3) & \end{array}$$

例:令$a_1,a_2,\ldots a_{n-1}$为n个数，这些数的乘法格式是指进行$a_1,a_2,\ldots a_{n-1}$的乘法的方案，求乘法格式的数目。

解(续) (递归定义):

任取$a_1,a_2,\ldots a_{n-1}$的一种乘法格式，它有n-2次乘 法和n-2组括号。两种方法构造$a_1,a_2,\ldots a_n$的的乘法格式:

(1)将a_n插入到n-2个乘法运算中任一个×号的两个因子中的任一个因子的任一侧，一共是$(n-2)\cdot2\cdot2=4(n-2)$种方案;

(2) 把该乘法格式作为一个因子，把a_n插入到因子的任一侧, 一共2种方案。

因此，$a_1,a_2,\ldots a_{n-1}$的每个乘法格式产生 $4(n-2)+2 = 4n-6$个$a_1,a_2,\ldots a_n$ 的乘法格式，得 $h_n=(4n-6)h_{n-1}$, $n\geq2$。

由初始值h_n=1得 $h_n= C_n^* = (n-1)!\binom{2n-2}{n-1}$

总结

- Catalan数列是序列$C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$, 其中

  $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, n=0,1,2,… 是第n个Catalan数。

  $$C_n = C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+ C_{n-1}C_0$$

定理8.1.1. 考虑由n个+1和n个-1构成的2n项 $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, 其部分和满足：$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ 的数列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (n\geq 0)$$

- 拟Catalan数列是序列 $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*, \ldots$

  其中, $C_n^* = n!\, C_{n-1}$, n=1, 2,…, n,…

  $$C_n^* = (4n-6)C_{n-1}^*, n\geq 2, C_1^*=1$$