第三章鸽巢原理

3.1 鸽巢原理的简单形式

3.2 鸽巢原理的加强形式

3.3 Ramsey定理

组合数学

- 存在性问题
  - 鸽巢原理
- 计数问题
  - 排列组合
  - 容斥原理
  - 生成函数、递推关系
  - Pólya计数
- 组合设计
- 组合优化

第三章鸽巢原理

3.1 鸽巢原理的简单形式

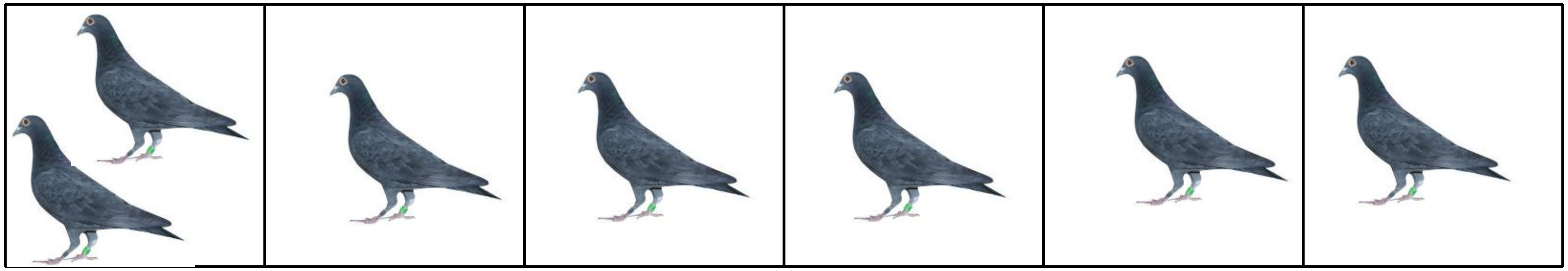
3.2 鸽巢原理的加强形式

3.3 Ramsey定理

鸽巢原理

Dirichlet，
1805—1859

- 十九世纪德国数学家狄里克雷于1834年提出鸽巢原理，当时命名为抽屉原理（Schubfachprinzip，drawer principle）
- 7个鸽子飞进6个巢里，一定有一个巢至少有2只鸽子



- 利用抽屉原理来建立有理数的理论，以后逐渐地应用到引数论、集合论、组合论等数学分支中，所以抽屉原理又称为狄里克雷原理

- 两桃杀三士
  - 《晏子春秋·内篇谏下· 第二十四》

齐景公

公孙接、田开疆、古冶子

晏子

- 宋代费衮的《梁溪漫志》中，就曾运用抽屉原理来批驳“算命”一类迷信活动的谬论

“近世士大夫多喜谭命，往往自能推步。予尝见人言日者阅人命，盖未始见年、月、日、时同者；纵有一二，必倡言于人以为异。尝略计之，若生时无同者，则一时生一人，一日生十二人，以岁记之，则有四千三百二十人；以一甲子计之，止（只）有二十五万九千二百人而已。今只从一大郡计，其户口之数尚不减数十万，况举天下之大，自五公大人以至小民何啻亿兆？虽明于数者有不能历算，则生时同者必不为少矣。其间五公大人始生之时则必有庶民同时而生者，又何贵贱贫富之不同也？”

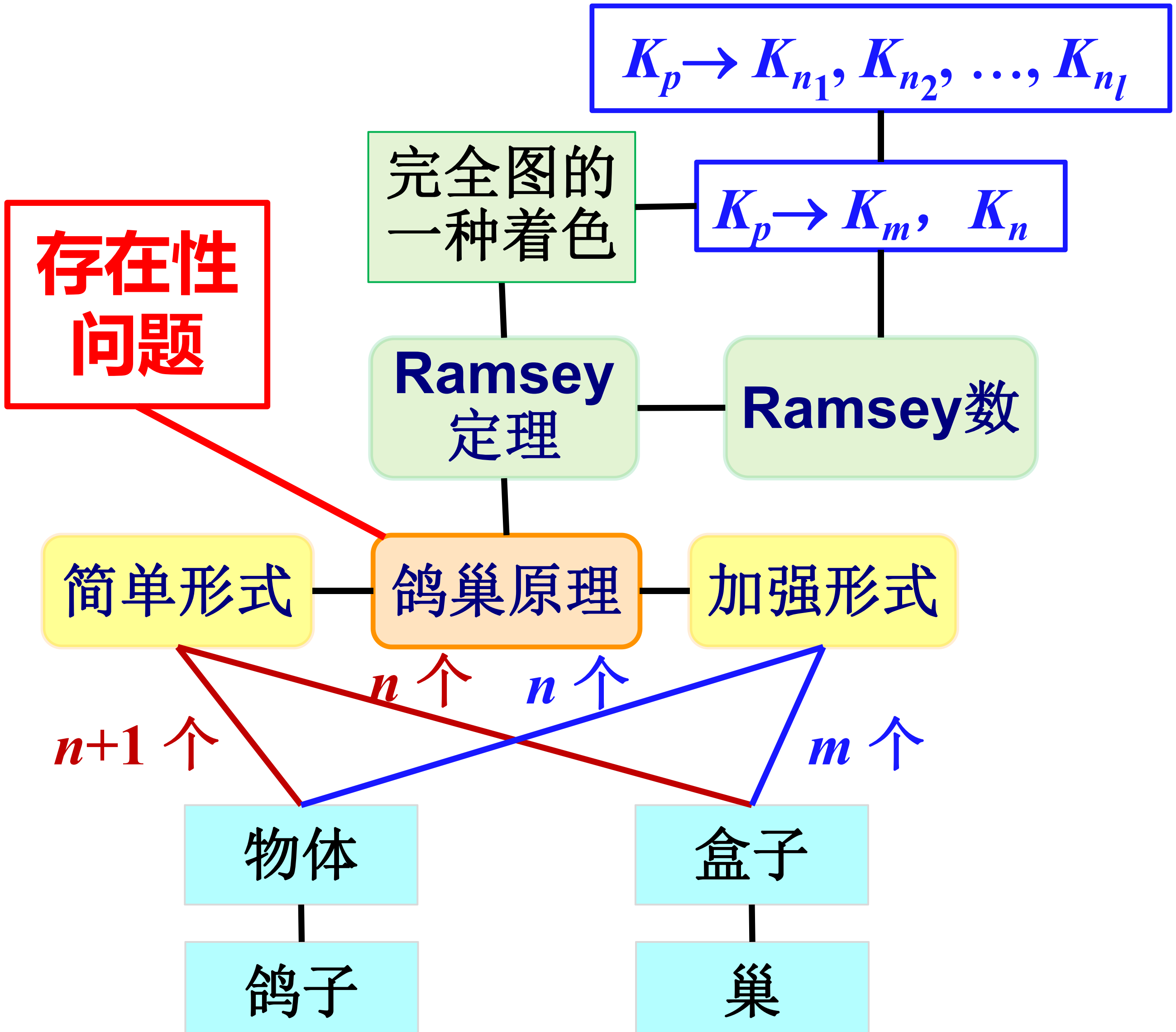
- 把一个人出生的年、月、日、时（八字）作算命的根据，把“八字”作为“抽屉”，不同的抽屉只有**12×360×60＝259200**个。以天下之人为“物品”，其数“何啻亿兆”，进入同一抽屉的人必然千千万万，因而结论是“生时同者必不为少矣”。既然“八字”相同，“又何贵贱贫富之不同也？”

举例

- 13个同学，肯定至少有两个人出生在同一月份。
- 假设有5对已婚夫妇，从中随机挑出 6 人，一定会挑出一对夫妇。
- 10位同学，每位同学至少认识其余 9 位同学中的一位，则至少有两位认识的人数相等。
- 在任意6个人中，或者有3个人两两互相认识，或者有3个人两两互相不认识（Ramsey定理）
- 月黑风高穿袜子：蓝色、黄色、红色袜子各3双，请问最少取多少只袜子，一定可以凑成一双？4只

知识点

- 数论问题
- 几何图形类问题
- 连续时间问题
- 棋盘着色
- 中国剩余定理
- 满足条件的最小物体数



鸽巢原理

定理3.1.1 如果把$n+1$个物体放进 n 个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或更多的物体。（反证法）

注意：鸽巢原理只能用于证明某种现象的存在性。

物品集 X $\xrightarrow{\text{函数 } f}$ 盒子集 Y

- 当 X，Y为有限集时
  - 如果X的元素多于Y的元素（|X|>|Y|），则 f 不是单射
  - 如果|X|=|Y|，且 f 是满射，则 f 是单射
    (如果没有一个盒子为空，则每个盒子恰好有一个物体)
  - 如果|X|=|Y|，且 f是单射，则 f 是满射

(如果没有盒子被放入多于一个物体，则每个盒子里有一个物体)

鸽巢原理→其他形式

定理3.1.1 如果把$n+1$个物体放进 n 个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或更多的物体。（反证法）

注意：鸽巢原理只能用于证明某种现象的存在性。

- 鸽巢原理的其他形式
  - n 个物体放入 n 个盒子且没有一个盒子是空的, 那么, 每个盒子正好包含一个物体.
  - n 个物体放入 n 个盒子且没有盒子被放入多于一个物体, 那么, 每个盒子有一个物体.

鸽巢原理→其他形式

定理3.1.1　如果把$n+1$个物体放进 n个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或者更多的物体。

$$\text{物体集X} \xrightarrow{f} \text{盒子集Y}$$

- n个物体放入n个盒子且没有一个是空的, 那么, 每个盒子正好包含一个物体.
- n个物体放入n个盒子且没有盒子被放入多于一个物体, 那么, 每个盒子有一个物体.

例：如果有n+1个整数，而这些整数是小于或等于2n，是否一定会有一对数是互素的？为什么？

（匈牙利大数学家厄杜斯(PaulErdous,1913 - 1996) 向当年年仅11岁的波萨 (LouisPósa) 提出这个问题，而小波萨思考了不足半分钟便能给出正确的答案。）

n个盒子：

1, 2	3, 4	5, 6	…	2n-1, 2n

从n个盒子中取出n+1个数，一定会有一个盒子中的两个数同时被取出，即一对互素数。

例：证明，如果从{1, 2, …, 2n}中选择n+1个整数，那么存在两个整数，它们之间差为1。

例：如果从$\{1, 2, \ldots, 2n\}$中选择$n+1$个不同的整数，证明一定存在两个整数，它们之间差为1。

n个盒子：

1, 2	3, 4	5, 6	…	$2n$-1, $2n$

证明：把集合 $\{1, 2, \ldots, 2n\}$划分成n个子集

$$S_1, S_2, \ldots, S_n,$$

其中，$S_i = \{2i\text{-}1, 2i\}, i = 1, 2, \ldots, n$。

由鸽巢原理知，从$\{1, 2, \ldots, 2n\}$中取出$n+1$个数，一定会有一个子集中的整数同时被取出，且这两个整数之间差为1。

例：如果有$n+1$个不同的正整数，且这些正整数是小于或等于$2n$，是否一定会有一对数是互素的？为什么？

匈牙利大数学家厄杜斯 (Paul Erdous,1913 - 1996) 向当年年仅11岁的路易·波萨 (Louis Pósa) 提出这个问题，而小波萨思考了不足半分钟便给出了正确的答案。

n个盒子： | 1, 2 | 3, 4 | 5, 6 | … | $2n$-1, $2n$ |

例：如果从$\{1, 2, \ldots, 2n\}$中选择 n+1个不同的整数，证明一定存在两个整数，它们之间差为1。

证明：设选择的n+1个整数为 $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$。

令$b_1 = a_1+1$, $b_2 = a_2+1$, …, $b_{n+1} = a_{n+1}+1$，则

$$1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_{n+1} \leq 2n+1。$$

现有$2n+2$个数：

$$a_1，a_2，\ldots，a_{n+1}，b_1，b_2，\ldots，b_{n+1}，$$

且每个数均属于$\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$。

由鸽巢原理知，这$2n+2$个数中至少有一对数相等。

由于$a_1,\ldots, a_{n+1}$互不相等，且$b_1,\ldots, b_{n+1}$互不相等，

因此存在一对 $b_j = a_j+1$与 a_k （$j \neq k$）相等，得 a_k和a_j只相差1。

鸽巢原理的集合语言表述

物体集X $\xrightarrow{f}$ 盒子集Y

令X和Y是两个有限集，f：$X\rightarrow Y$是一个由X到Y的函数。

- 如果X与Y含有相同个数的元素，且f是映上(满射)的，那么f是一对一的
- 如果X与Y含有相同个数的元素，且f是一对一的，那么f是映上的(满射)
- 如果X的元素多于Y的元素，那么f就不是一对一的

鸽巢原理:数论中的应用

例. 证明: 在m个正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_m$中, 存在$0\le k< l \le m$, 使得$a_{k+1}+ a_{k+2}+ \ldots+a_l$ 能够被 m 整除。

证：考虑m个和：

$$s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ s_3=a_1+a_2+a_3,\ \ldots,\ s_m = a_1+a_2+\ldots+a_m$$

(1) 若以上和中有一个能被 m 整除，则结论成立；

(2) 否则，设$r_1, r_2, \ldots, r_m$是$s_1, s_2\ldots, s_m$除以m的非零余数，则 $1 \le r_i \le m-1$，$i=1,\ldots, m$。

由鸽巢原理知，存在$r_l = r_k$, $l>k$，则

$a_{k+1}+a_{k+2}+ \ldots+a_l = s_l - s_k$能被 m 整除。

例. 从整数1, 2, …， 200中选取101个不同的整数。证明所选的数中存在两个整数，使得其中一个是另一个的因子。

分析:

- 任何整数可分解为一些素数的乘积， 如对任何整数n, $n = 2^k \times a$， 其中，*a*为奇数，*k*≥0。
- 整数1, 2, …, 200只能有100个不同奇数，故可对101个数运用鸽巢原理。

例. 从整数1, 2, …， 200中选取101个不同的整数。证明所选的数中存在两个整数，使得其中一个是另一个的因子。

证：对于1到200间的整数n，n可写作以下形式：

$$n = 2^k \times a \qquad (1)$$

其中 a 是 1, 2, …, 200 内的奇数。

由于要选取 101 个整数，而 200 内只有 100 个奇数，由鸽巢原理知必存在两个整数 n_1 与 n_2 写作 (1) 式形式后，两个奇数相等。

假设$n_1=2^{k_1}\times b$, $n_2=2^{k_2}\times b$，其中 b 是1, 2, …, 200内的奇数，显然，当$k_1 > k_2$时, n_2 整除n_1；否则n_1整除n_2。

例：对于任意给定的52个非负整数，证明：其中必存在两个非负整数，要么两者的和能被100整除，要么两者的差能被100整除。

证：对于任意一个非负整数，其整除100的余数可能为{0, 1, 2, …, 99}中之一。
对这100个余数进行分组，构造如下51个集合：

{0}, {1, 99}, {2, 98}, {3, 97}, …, {49, 51}, {50}.

两种情况：
(1) 52个非负整数中存在两个数除以100的余数相同，显然它们的差能被100整除；
(2) 若52个非负整数除以100的余数各不相同，则必存在两个数的余数恰好构成上述两元集合中一个；此时它们的和能被100整除。

思考题：

1. 证明：在$n+2$个任选的正整数中，存在两个数，或者其差能被 $2n$ 整除，或者其和能被 $2n$ 整除。

2. 一间房屋内有10个人，他们当中没有人超过 60 岁（年龄只能以整数给出)，但又至少不低于 1 岁。证明：总能找出两组人（两组人中不含相同的人），使得年龄和相同。题中的10能换成更小的数吗？

3. 证明：对任意正整数n, 必存在由 0 和 3 组成的正整数能被 n 整除。

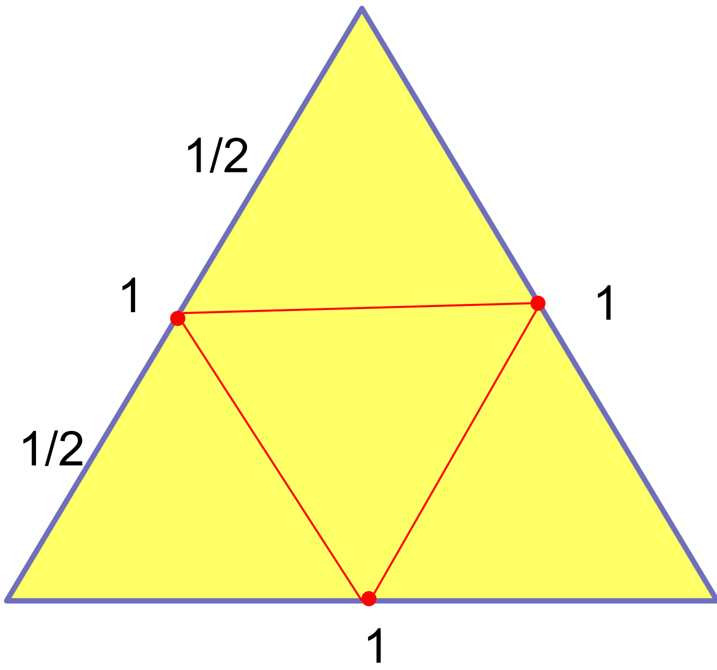
鸽巢原理:几何图形类应用

例5. 在边长为1的等边三角形内任意选择5个点。
证明：一定存在2个点，其距离至多为1/2。

证明：如图所示，将等边三角形依每边中点分成四部分。

显然落在任意一个部分中的两点之间的距离至多为1/2。

根据鸽巢原理，任意选择5个点，肯定有两个点落在同一个部分，因此这两点距离至多为1/2。



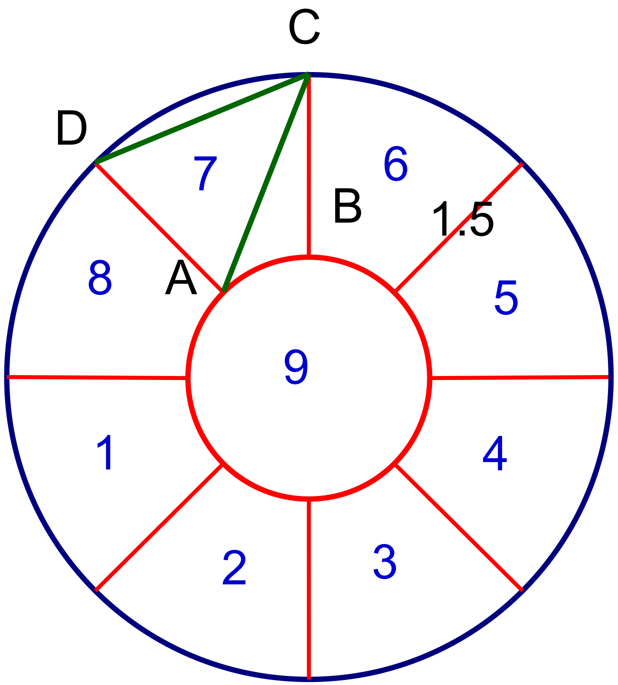
思考：

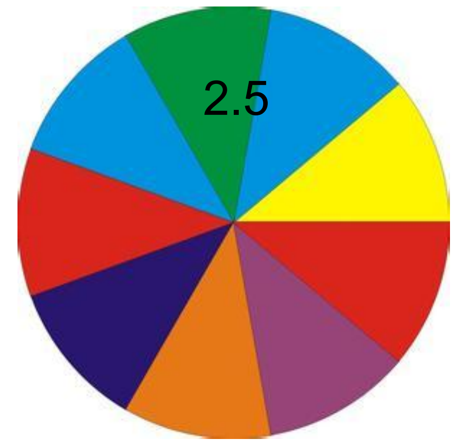
1. 证明在边长为1的等边三角形中任意选择10个点，一定存在两个点，其距离至多为1/3。

2.确定一个整数n_k，使得如果在边长为1的等边三角形中任意选择n_k个点，一定存在2个点，其距离至多为$1/k$。

3.在直径为5的圆内任意给定10个点，证明存在两点，它们之间的距离小于2。

例：在直径为5的圆内任意给定10个点，证明存在两点，它们之间的距离小于2。





用一个与已知圆同心，半径为1的小圆，再把圆环部分等分成8个部分，构成9个抽屉。

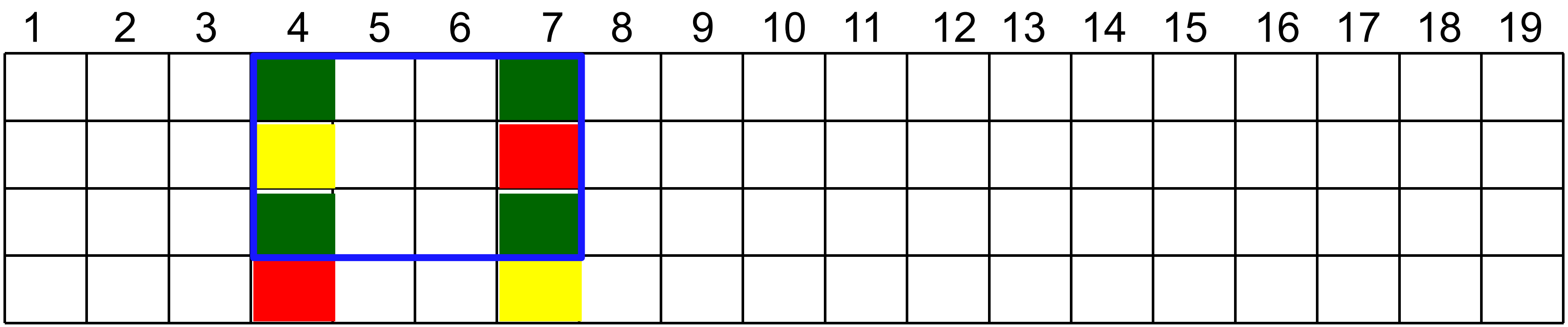
$$|CD| = \sqrt{2-\sqrt{2}}R = \sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot 5 < 1.92 < 2$$

$$|AC| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2.5^2 + 1^2 - 2\times 2.5\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}} < 1.93 < 2$$

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择，

证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。



例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择，

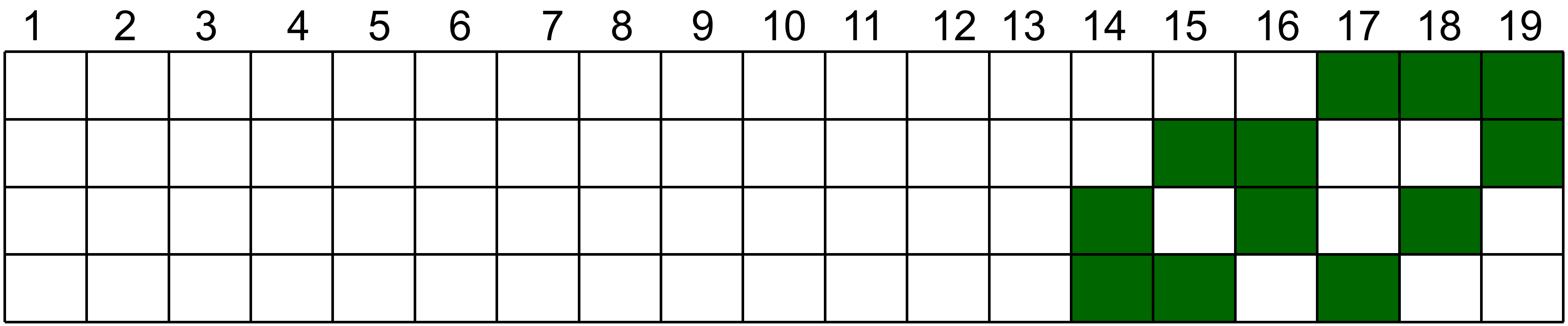
证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择，

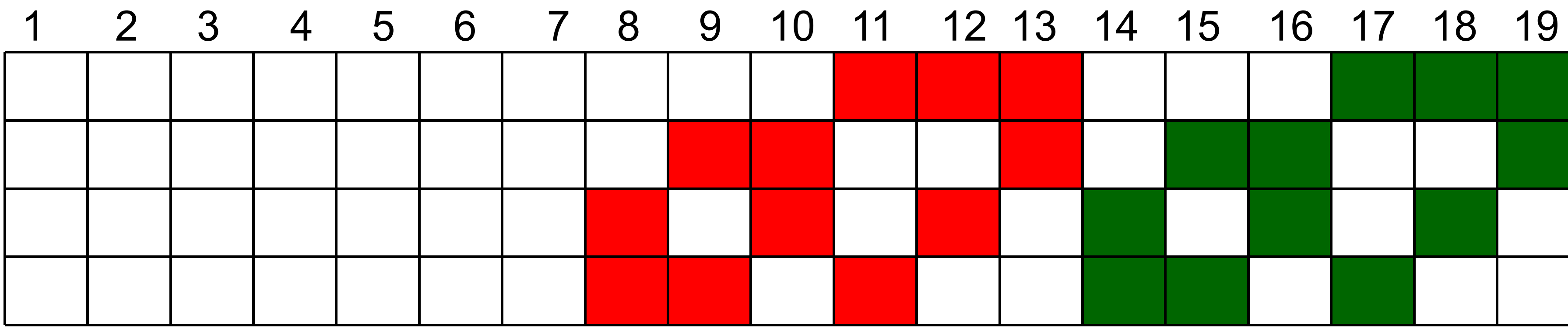
证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。



证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择，

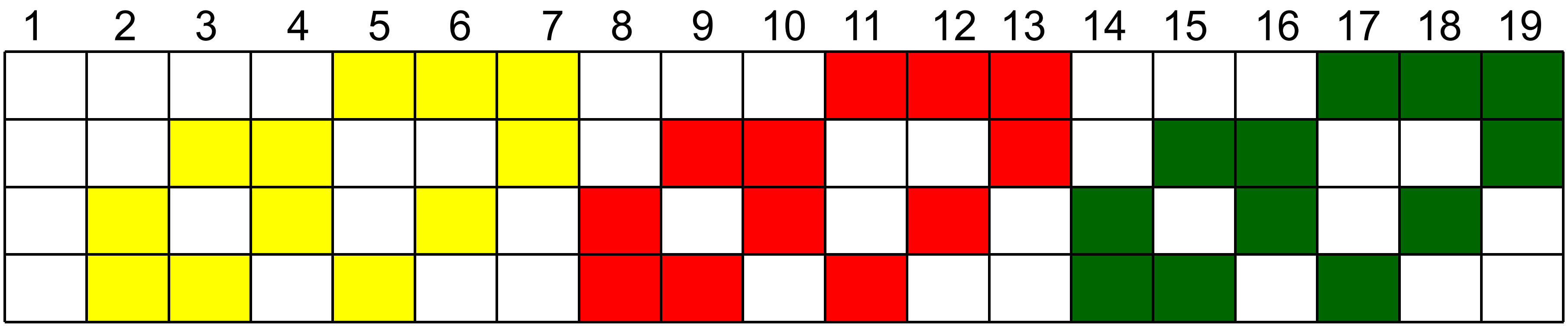
证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。



证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择，

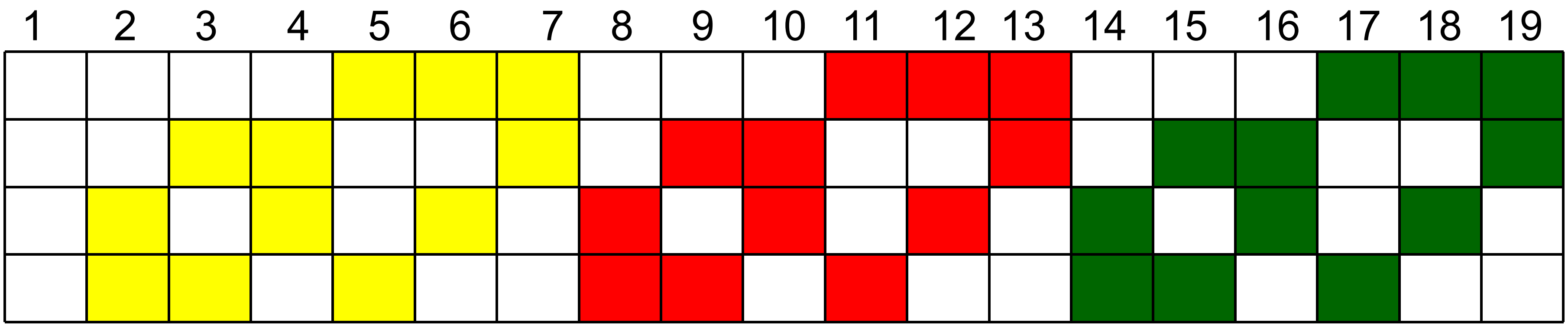
证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。



证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择，

证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。

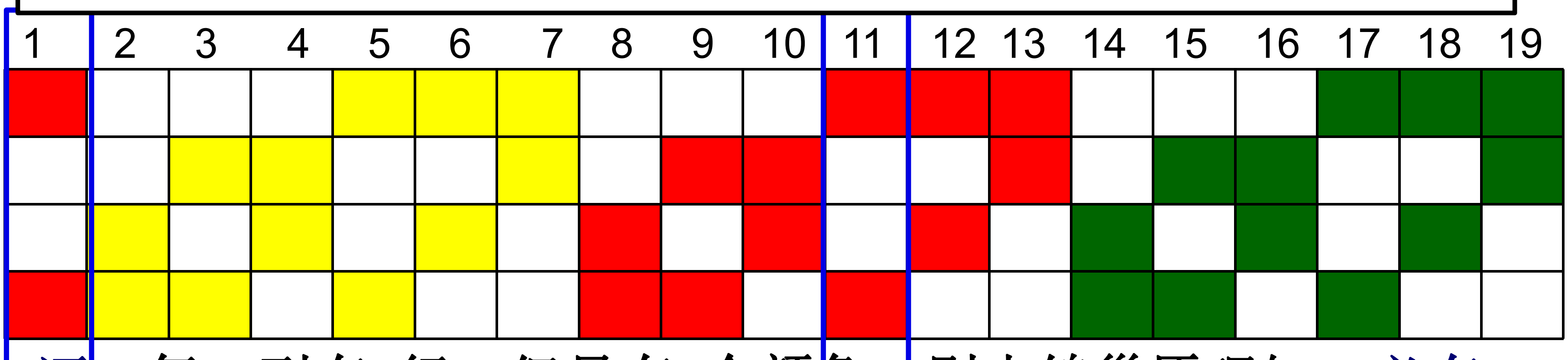


证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，则3种颜色下,一列中两个同色单元格的位置组合共有18种，而现在有19列。

因此，由鸽巢原理，必有两列的两个同色单元格位置相等且颜色相同。

例：将一个矩形分成4行19列的网格，每个单元格涂1种颜色，有3种颜色可以选择，

证明：无论怎么样涂色，其中必有一个由单元格构成的矩形的4个角上的格子被涂上同一种颜色。



证：每一列有4行，但只有3个颜色，则由鸽巢原理知，必有两个单元格的颜色相同，其不同位置的组合有C(4, 2)=6种，则3种颜色下,一列中两个同色单元格的位置组合共有18种，而现在有19列。

因此，由鸽巢原理，必有两列的两个同色单元格位置相等且颜色相同。

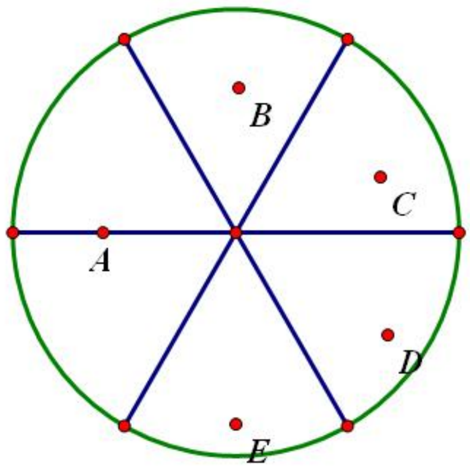
显然，这两列构成的矩形的4个角上的格子的颜色相同。证毕。

思考：随意地把一个3行9列棋盘的每个方格涂成红色或蓝色，求证：必有两列方格的涂色方式是一样的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9

思考：

（英国数学奥林匹克1975年的问题）在一个半径为1单位的圆板上钉7个钉，使得两个钉的 距离是大于或等于1，那么这7个钉一定会有一个位置恰好是在圆心上。



鸽巢原理：连续时间问题

例：某厂在五年期间的每一个月里至少试制一种新产品，每年最多试制19种新产品。
试证明：一定存在连续几个月，恰好试制24种新产品。

证：设五年间每个月新产品数分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_{59}, a_{60}$。
构造出数列 a_n 的前 n 项和的数列 $s_1, s_2, \ldots, s_{59}, s_{60}$,
则有：$1 \le a_1 = s_1 < s_2 < \ldots < s_{59} < s_{60} \le 19 \times 5 = 95$,
而序列 $s_1+24, s_2+24, \ldots, s_{59}+24, s_{60}+24$也是一个严格递增序列:

$$25 \le s_1+24 < s_2+24 < \ldots < s_{59}+24 < s_{60}+24 \le 95+24 = 119。$$

于是，这120个数s_1，s_2，$\ldots s_{59}$，s_{60} 和 s_1+24，s_2+24，$\ldots$，$s_{59}+24$，$s_{60}+24$都在区间[1，119]内。
根据鸽巢原理，必定存在两个数 相等。

鸽巢原理：连续时间问题

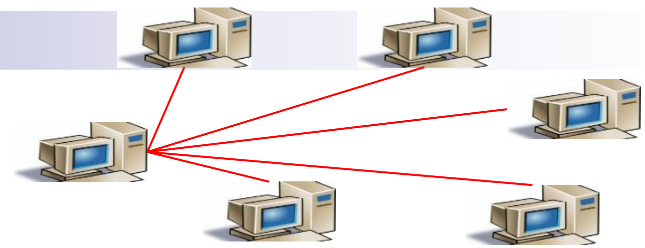
例：某厂在五年期间的每一个月里至少试制一种新产品，每年最多试制19种新产品。
试证明：一定存在连续几个月，恰好试制24种新产品。

证: (续)：由于$s_1, s_2, \ldots, s_{59}, s_{60}$与$s_1+24, s_2+24, \ldots, s_{59}+24, s_{60}+24$均为严格单调的，因此必然存在一个 i 和 j，使得

$$s_i = s_j + 24。$$

因此该厂在从第 $j+1$个月起到第 i 个月的这几个月时间里，恰好试制了24种新产品。

应用-计算机网络



例. 假设有一个由6台计算机组成的网络，证明在这样网络中至少存在两台计算机直接连接数量相同的其他计算机。

证：每台计算机的直接连接数大于等于0,小于等于5,

且0和5不能同时出现。

(1) 若一个计算机的直接连接数为0，此时其他计算机最大连接数为4

(2) 若一个计算机的直接连接数为5，则其他计算机的最小直接连接数为1

因此，计算机的直接连接数最多只能有5个数。由鸽巢原理，6台计算机中至少有两台的直接连接数相同。

中国剩余定理

- 韩信点兵传说：韩信带1500名兵士打仗，战死四五百人。命令士兵
  - ✓ 3人一排，多出2名；
  - ✓ 5人一排，多出3名；
  - ✓ 7人一排，多出2名。
  - ✓ 韩信马上说出人数：1073人。

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

- 《孙子算经》：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”
- 宋朝数学家秦九韶于1247年《数书九章》卷一、二《大衍类》对“物不知数”问题做出完整系统的解答。
- 明朝数学家程大位编成了歌决：

  三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，
  七子团圆正半月，除百零五便得知。

例6 (中国剩余定理) 令 m, n是互素的正整数，a和b分别是小于m和n的非负整数。那么，存在正整数 x，使得 x 除以m余数为a, 且除以n余数为b，即

$$x = pm + a，\ x = qn + b。$$

分析：

1）首先构造足够多“除以m余数为a”的整数

2）证明在这些数中存在“除以n余数为b”的整数。

需要多少这样的数？

例6 (中国剩余定理) 令m, n是互素的正整数，a和b分别是小于m和n的非负整数。那么，存在正整数x，使得x除以m余数为a, 且除以n余数为b，即 $x = pm+a$，$x = qn+b$。

证：考虑 n个除以m余数为a 的整数：

$$a,\ m+a,\ \ldots,\ (n-1)m+a$$

假设存在两个数 $im+a$ 和 $jm+a$ $(0 \le i \le j \le n-1)$ 除以n的余数都为r，即存在非负整数 k 和 l 使得

$$im+a = kn + r,\quad jm+a = ln + r$$

上两式相减得$(j-i)m=(l-k)n$。由于m, n互素，因此 n 是 $j-i$ 的因子。又由于$0 \le j-i \le n-1$，矛盾。

故上述 n 个整数除以 n 的余数各不相同。

由鸽巢原理，n个数 $0, 1, 2, \ldots, n-1$中都出现在这些余数集之中，因此 b 也出现。

设对应除以 n 余数为 b 的数为 $x = pm + a$ $(0 \le p \le n-1)$，同时 $x = qn+b$ $(0 \le q \le n-1)$,结论成立。

中国剩余定理一般形式

- 设$m_1, m_2, \ldots, m_k$是k个两两互素的正整数，$0 \le a_i < m_i$ (i=1,…，k)，则存在x，使得 x 除以 m_i的余数为 a_i，即$x \equiv a_i \pmod{m_i}$ (i=1,…，k) 。

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \quad \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

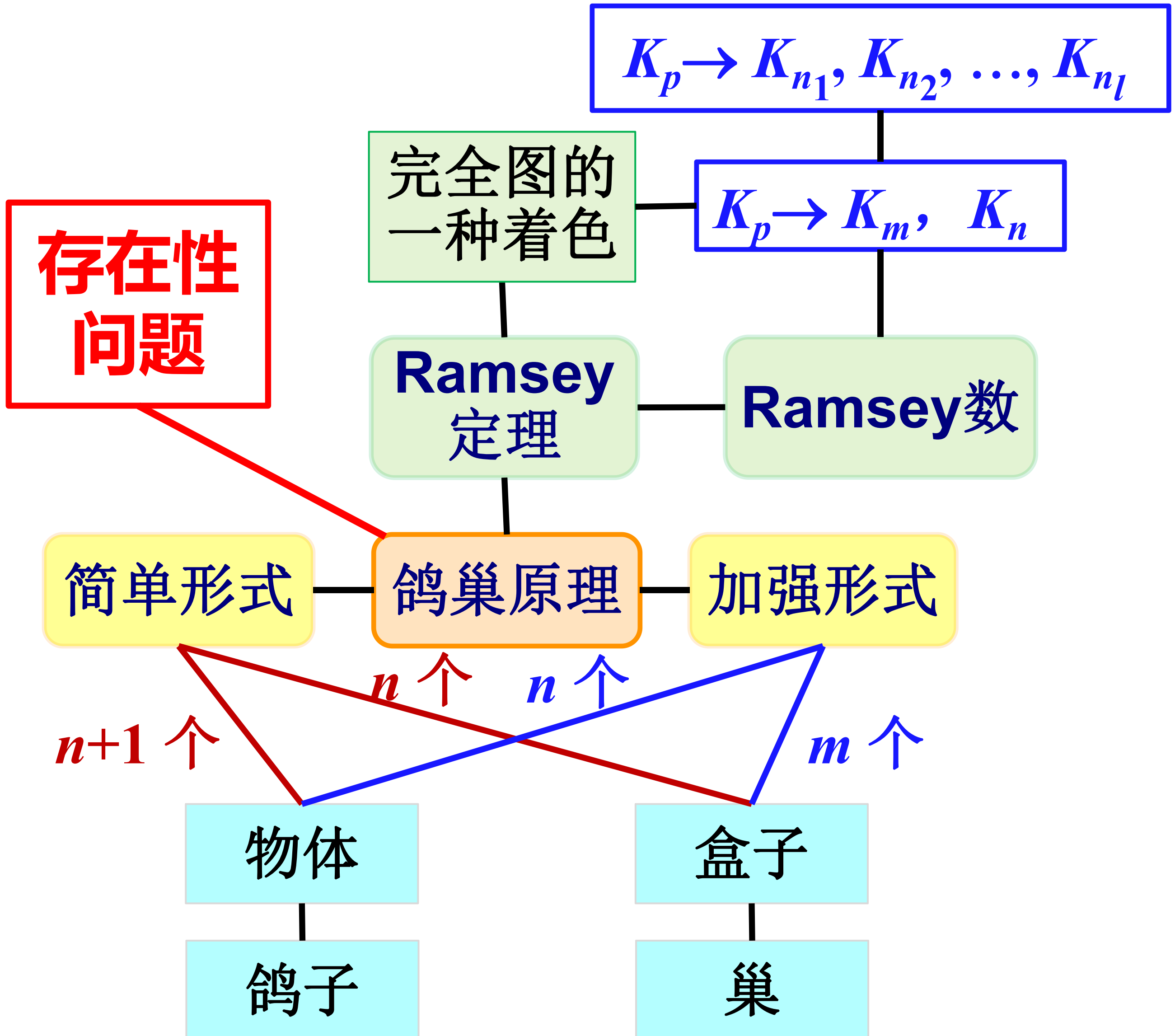
解决实际问题中的意义

- 密码问题
- 可以选取5个两两互素的整数m_i (i=1,2,…5)，每个股东秘密保存b_i, 那么存在唯一的x使得x除以m_i的余数为b_i，用x作为密钥加密机密文件。

- **注意：**鸽巢原理仅提供了存在性证明，还需要设计求x的有效算法，这需要我们学习更多数学才能解决。

知识点

- 数论问题
- 几何图形类问题
- 连续时间问题
- 棋盘着色
- 中国剩余定理
- 满足条件的最小物体数



非对称密码体制

- 非对称密码体制提供的安全性取决于难以解决的数学问题，例如，将大整数因式分解成质数。
- 公钥系统使用这样两个密钥，一个是公钥，用来加密文本，另一个是安 全持有的私钥，只能用此私钥来解密。也可以使用私钥加密某些信息，然后用公钥来解密，而公钥是大家都可以知道的，这样拿此公钥能够解密的人就知道此消息是 来自持有私钥的人，从而达到了认证作用。

Diffie-Hellman算法描述(1976)

1. Alice与Bob确定两个大素数n和g，这两个整数不保密，Alice与Bob 可以使用不安全信道确定这两个数.
2. Alice选择另一个大随机数x，并计算A如下：
   1. $A=g^x \bmod n$
3. Alice将A发给Bob
4. Bob选择另一个大随机数y，并计算B如下：
   1. $B=g^y \bmod n$
5. Bob将B发给Alice
6. 计算秘密密钥K1如下：
   1. $K1=B^x \bmod n$
7. 计算秘密密钥K2如下：
8. $K2=A^y \bmod n$

RSA算法(1977)

- 1977 年，即，Diffie-Hellman 的论文发表一年后，MIT 的三名研究人员根据这一想法开发了一种实用方法。这就是 RSA，它是以三位开发人员 — Ron Rivest、Adi Shamir 和 Leonard Adelman — 姓的首字母大写命名的，而且 RSA 可能是使用最广泛的公钥密码体制。
- 是一种块加密算法。
- 应用最广泛的公钥密码算法
- 只在美国申请专利，且已于2000年9月到期

小结

- 鸽巢原理用于证明某种结构的存在性。
- 运用鸽巢原理通常需要将问题转化。

1. 证明：在n+2个任选的正整数中，存在两个数，或者其差能被2n整除，或者其和能被2n整除。

证明：已知所有正整数除以2n的余数的取值只能为0, 1, 2, …, 2n-1。

把以上余数构造以下n+1个子集：

{1, 2n-1}, {2, 2n-2}, …, {n-1, n+1}, {n, n}, {0, 0}。

任选n+2个正整数，由鸽巢原理知，一定存两个数，其除以2n的余数来自同一个子集，设为A。

(1)若A是前n-2个子集中一个，则这两个数的和能被2n整除；

(2)若A是最后2个子集中一个，则这两个数的差能被2n整除。

9. 一间房屋内有10个人，他们当中没有人超过60岁（年龄只能以整数给出)，但又至少不低于1岁。
证明：总能找出两组人（两组人中不含相同的人），使得年龄和相同。题中的10能换成更小的数吗？

证明: (1) 10个人构成的子集一共是$2^{10}=1024$个，
去除掉空集与全集，一共1022个子集可以是找出的两组人中的一组。
由于这些子集的年龄和最小为1岁，且不超过 60*9= 540岁。
因此，由鸽巢原理知，至少有两组人的年龄和相同，
去除这两组人的相同人后，所得的两组人满足题目要求。

9. 一间房屋内有10个人，他们当中没有人超过60岁（年龄只能以整数给出)，但又至少不低于1岁。

证明：总能找出两组人（两组人中不含相同的人），使得年龄和相同。题中的10能换成更小的数吗？

证明: (2) 当考虑9 个人时，9个人构成的子集一共是$2^9=512$个，去除掉空集与全集，一共510个子集可以是找出的两组人中的一组。

又这些子集的年龄和最小为1，最大为$60*8=480$。

因此，由鸽巢原理知，至少有两组人的年龄和相同，去除这两组人的相同人后，所得的两组人满足题目要求。

例. 证明：对任意正整数 n, 必存在由0和3组成的正整数能被 n 整除。

证明：设有 $n+1$ 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, 其中 $a_i=33\ldots3$, 由 i 个 3构成 ($i=1,\ldots, n+1$)。

由于任何正整数除以 n 的余数有0, 1, …, n-1，共 n 种情况。由鸽巢原理知，一定存在两个数除以 n 后的余数相同。

假设这两个数为 a_i , a_j，且 $a_i > a_j$，则

$$a_i - a_j = 3\ldots30..0 \quad （j\text{ 个}0，i\text{-}j\text{ 个}3）$$

能被 n 整除，且是由0和3组成的正整数。