第十四章Pólya计数

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

- 组合计数问题中的两类困难
  - 问题通解的表达式：生成函数
  - 区分所讨论的问题中哪些应该看成相同的，哪些是不同的
    - ✓ 在计算过程中避免重复或遗漏

George Poly
(1887-1985)
匈牙利裔美国数学家

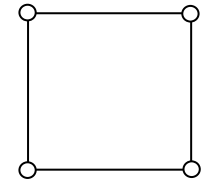
在前人研究同分异构体计数问题的基础上，波利亚在1937年以《关于群、图与化学化合物的组合计算方法》（Kombinatorische Anzahlbestimmungen fr Gruppen，Graphen und ChemischeVerbindungen）为题，发表了长达110页、在组合数学中具有深远意义的著名论文。

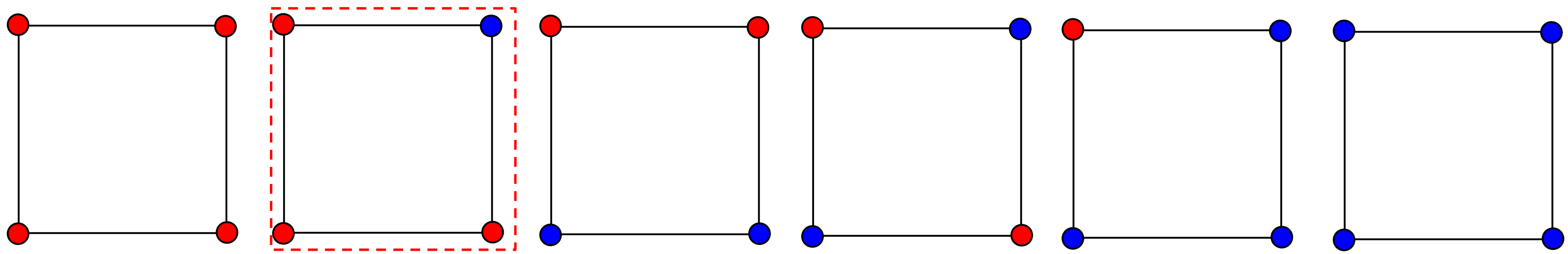
“波利亚计数定理”
（**Polya's enumeration theorem**）

例（正方形着色问题）：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

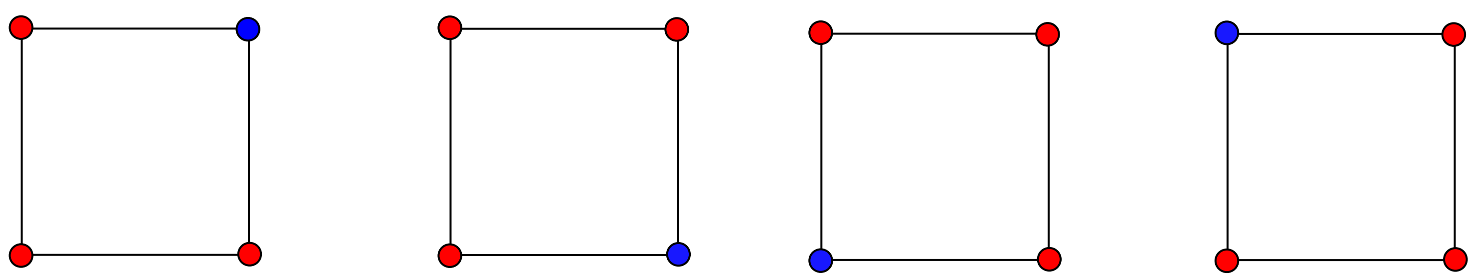
(1) 正方形位置固定：16种

(2) 允许正方形转动：6种





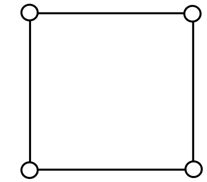
1 种　4 种　4 种

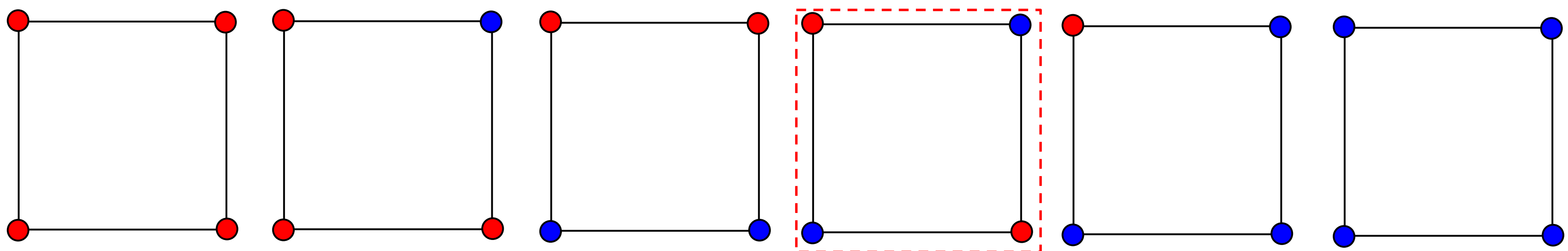


例（正方形着色问题）：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

(1) 正方形位置固定：16种

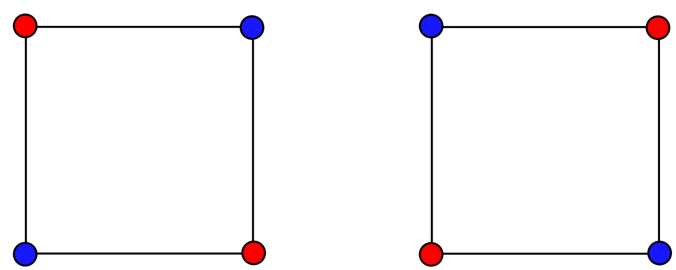
(2) 允许正方形转动：6种





1 种　4 种　4 种　2 种　4 种　1 种

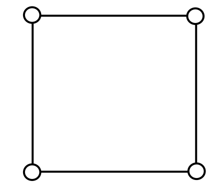
把16种方法分成 6部分，同一部分中的两种着色被视为等价

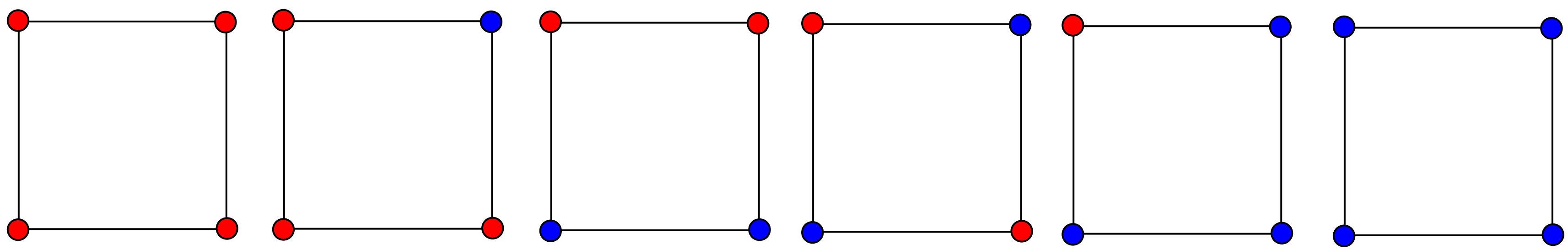


例（正方形着色问题）：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

(1) 正方形位置固定：16种

(2) 允许正方形转动：6种

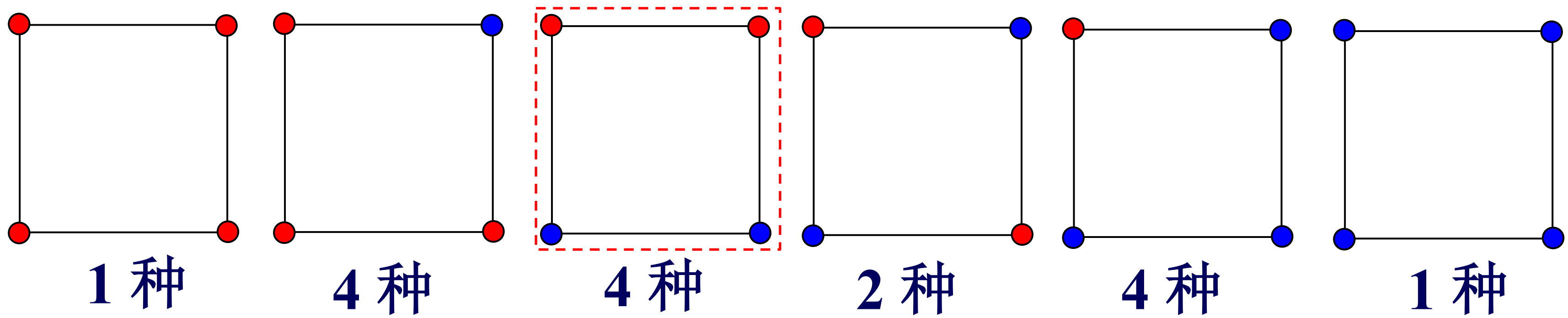


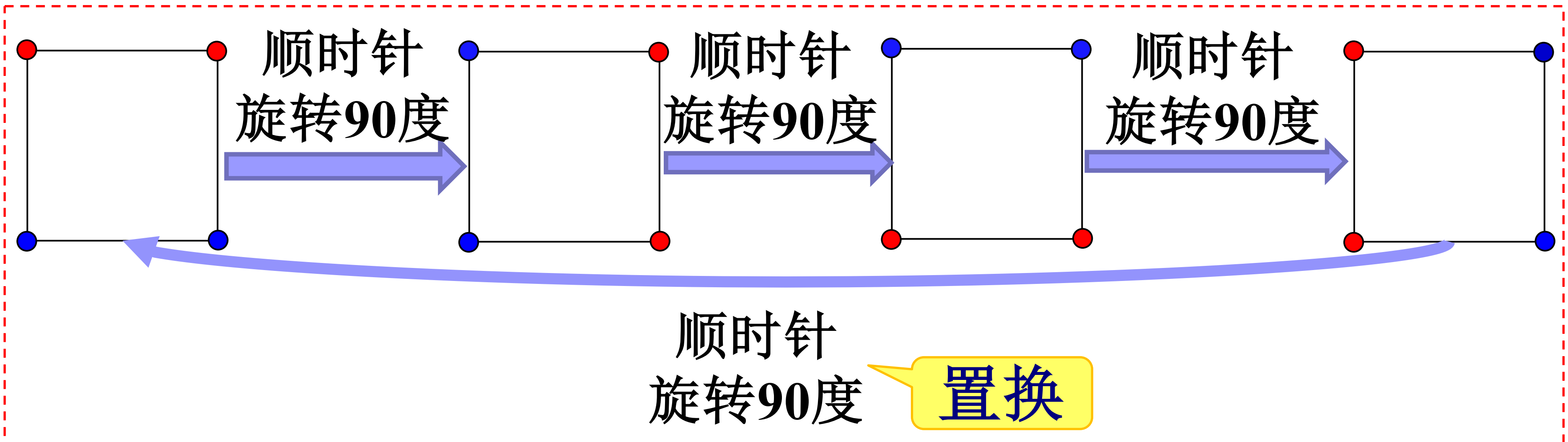


1 种　4 种　4 种　2 种　4 种　1 种

$$1 + 4 + 4 + 2 + 4 + 1 = 16 \text{ 种}$$

- 本章目的：建立和阐明在对称情形下计算非等价着色的技术
  - 明确给出两种着色方案异同的数学定义
  - 如果规定了每种颜色出现的次数，对着色方案数给出统一的表达式





- 着色c_1与c_2等价：c_1可通过一个置换转化为c_2

考虑两个着色在一个置换群下的等价性

主要内容

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

主要内容

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

群的基本知识

给定集合 G 和 G 上的二元运算“•”，如果以下四个条件满足，则称代数结构 $(G, \bullet)$ 为群：

(1) 封闭性：“•”运算在 G 上是封闭的，即

对于任意 $a, b \in G$，都有 $a \bullet b \in G$；

(2) 结合律成立：“•”运算满足结合律，即

对于任意 $a, b, c \in G$，都有 $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$。

(3) 存在单位元：存在 $e \in G$，对于任意 $a \in G$，满足

$e \bullet a = a \bullet e = a$， e 称为 G 的单位元；

(4) 存在逆元：对于任意 $a \in G$, 存在 $a^{-1} \in G$, 满足

$a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$, a^{-1} 称为 a 的逆元。

群的基本知识

- $a \bullet b$ 可简记为 ab。
- 由于结合律成立，$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$，记为$abc$；

  推广到n个元素乘积$a_1a_2\ldots a_n$，等于任意一种结合。
- 当$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ 时，$a_1a_2\ldots a_n$可简记为 a^n。

例：1. $G=\{1,-1\}$ 在乘法运算下是一个群。

2. 整数集 Z 在加法运算下是一个群。

3. 二维欧几里得空间的刚体旋转变换集合 $T=\{T_\alpha\}$ 构成群， 其中

$$T_\alpha:\ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

群的基本知识

- 有限群：如果 G 是有限集合，则称 G 为有限群。
- 群的阶：有限群 G 的元素个数称为群的阶，记为 $|G|$。
- 循环群的与生成元：在群$(G,\bullet)$中，若存在 $a\in G$，G 中任意元素 b 均可以表示成 a 的方幂，则
  - 称G为循环群，
  - a 称为该群的生成元。

置 换

- 设 X 是一个有限集 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$。
- X 的每个置换 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ 可视为 X 到其自身的一个一对一（one-to-one）的函数 $f: X \to X$（即单射），其中，$f(1) = i_1, f(2) = i_2, \ldots, f(n) = i_n$。

根据鸽巢原理，$f: X\to X$ 为满射，因此 f 为双射。

可以用如下 $2\times n$ 阵列来表示置换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

1, 2, …, n的一个排列

- 集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换个数为 $n!$。
- 将 X 的所有$n!$个置换构成的集合记为 S_n。

例：{1, 2, 3}的 3!=6个置换为:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

- S_3是由上述6个置换构成的集合
- 置换是函数，因此可以合成。

置换的合成（composition）

合成运算：设 f 和 g 为$\{1, 2, \ldots, n\}$上的两个置换：

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

f与g的合成按照先 f 后 g 的顺序放置得到一个新的置换：

$$g\circ f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

其中$(g\circ f)(k) = g(f(k)) = j_{i_k}$.

$(j_{i_1}, j_{i_2}, \ldots, j_{i_n})$是$\{1, 2, \ldots, n\}$的一个排列

- 函数的合成定义了 S_n 上的一个二元运算：

  如果 f 和 g属于S_n，则 $g\circ f$ 也属于 S_n。

- 二元运算 ∘ 的性质：
  - ✓ 满足结合律：$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
  - ✓ 通常不满足交换律

例：$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

几种特殊置换

- 自身合成运算：

$f^1=f$，$f^2=f\circ f$，$f^3=f\circ f\circ f$，…，$f^k= f\circ f\circ \ldots \circ f$ (k个f)

- 恒等置换：各整数对应到它自身的置换

$$\iota(k) = k\text{，对所有}k = 1, 2, \ldots, n$$

等价于$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ 单位元

✓ 恒等置换性质：

$\iota\circ f=f\circ\iota=f$，对 S_n中的所有置换 f 均成立。

几种特殊置换

- **逆置换：** S_n中的每个置换 f 是一对一的函数，所以存在逆函数 $f^{-1} \in S_n$，满足：

  如果 $f(s) = k$，那么 $f^{-1}(k) = s$。

逆元

例：$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

交换 $2\times n$ 矩阵的第一行与第二行

重新排列列使得第一行的整数以自然顺序 1, 2, …, n 出现

- **性质1：** 恒等置换的逆是它自身：$\iota^{-1} = \iota$。
- **性质2：** 任意置换与它的逆满足：$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \iota$。

置换群

令 S_n 为$X=\{1, 2, \ldots, n\}$的所有$n!$个置换构成的集合。

设G是S_n的非空子集，$(G, \circ)$是否是群？

如果 S_n 的非空子集 G 满足如下四个性质，则定义 G 为 X 的一个置换的群，简称置换群：

(1) 封闭性：对G中任意置换 f 与 g，$f\circ g$ 也属于G。

(2) 满足结合律：对G中任意置换 f, g, h,

$$(f\circ g)\circ h = f\circ (g\circ h)$$

(3) 存在单位元：S_n中的恒等置换 ι 属于G。

(4) 存在逆元：对G中的每一个置换f，它的逆 f^{-1} 也属于G。

置换群

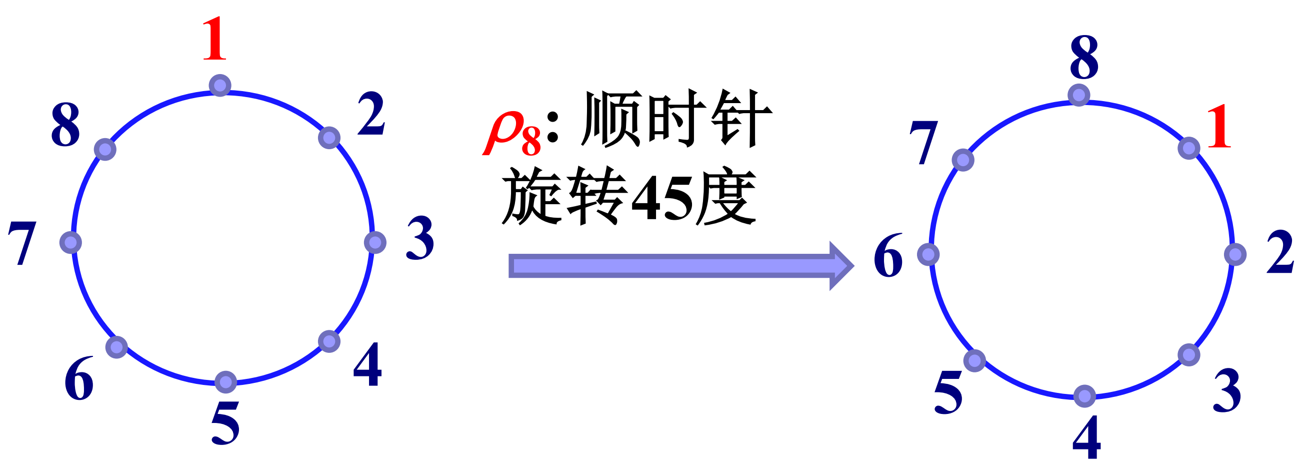
- $X=\{1, 2, \ldots, n\}$的所有置换的集合S_n是一个置换群，称为 n 阶对称群。
- 仅含恒等置换的集合$G=\{\iota\}$是一个置换群。
- 每个置换群满足消去律：$f \circ g = f \circ h$，则 $g = h$

例： 设 n 是一个正整数，ρ_n 表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换：

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

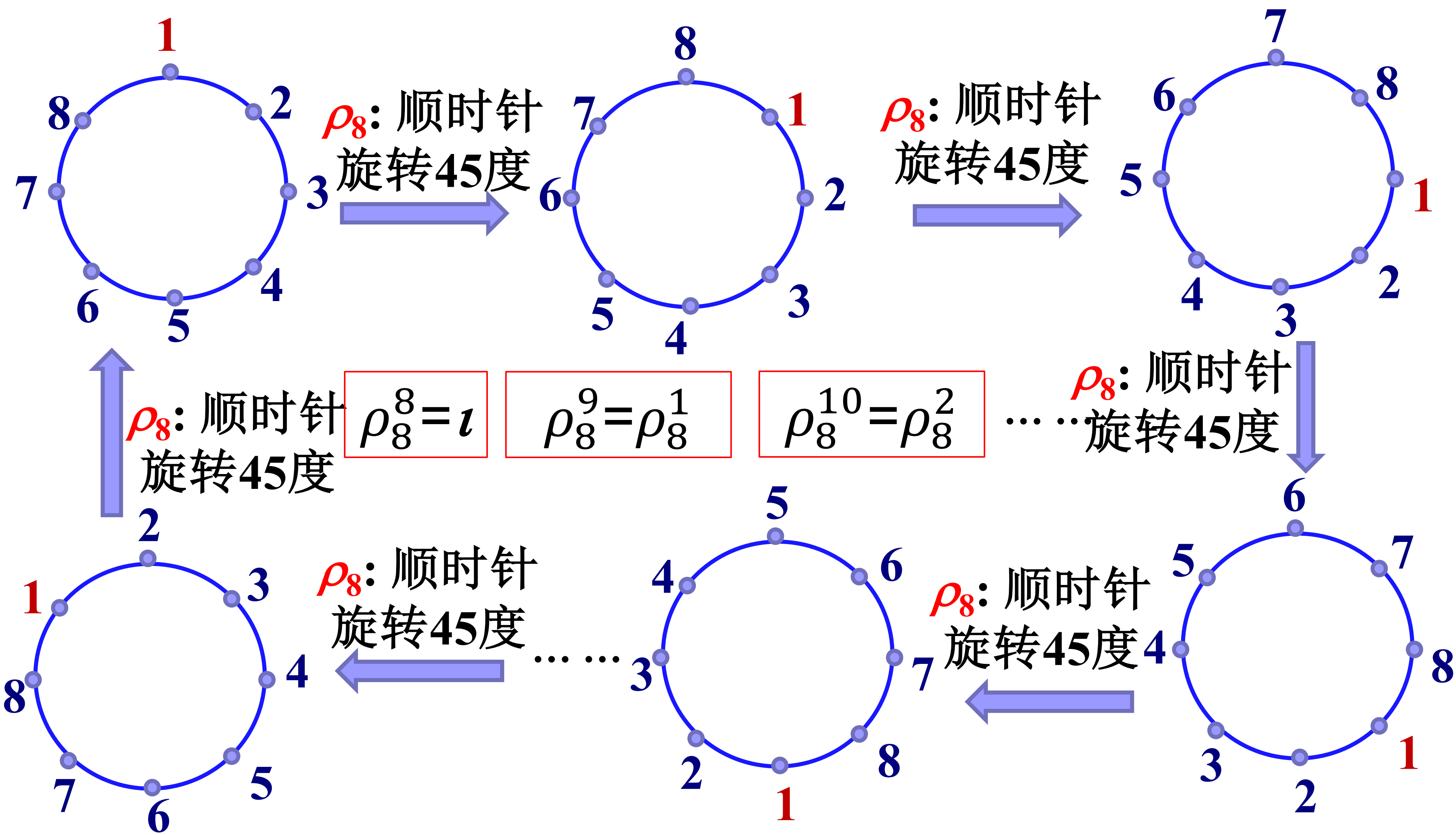
即 当 $i = 1, 2, \ldots, n-1$时，有$\rho_n(i) = i+1$且 $\rho_n(n) = 1$。

把1, 2, …, n 均等地放到圆周上或正n角形上(n=8):



- ρ_n 按照顺时针方向将各整数传到随后的整数。

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

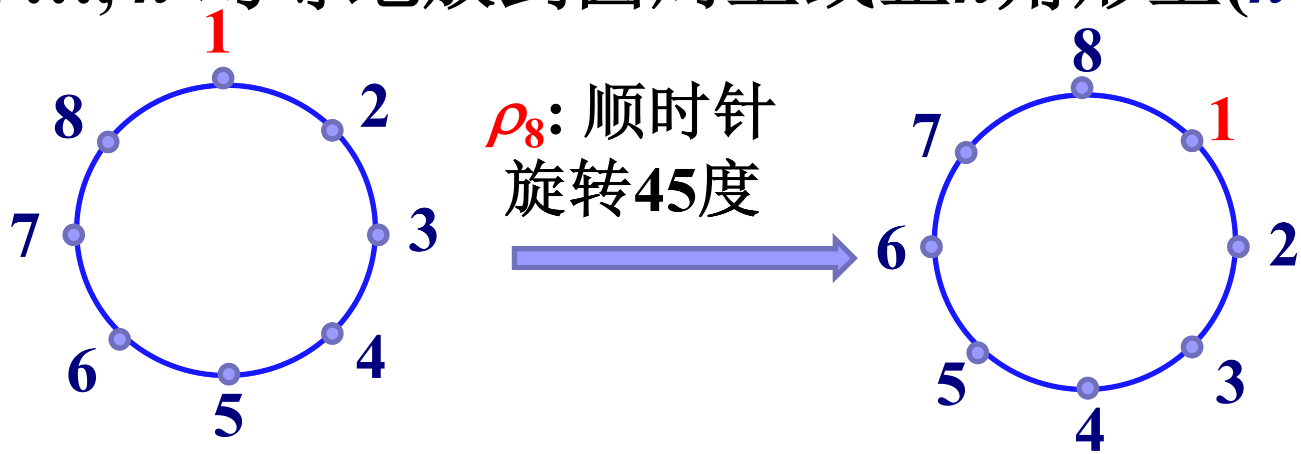


例：设 n 是一个正整数，ρ_n 表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换：

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

即 当 $i = 1, 2, \ldots, n-1$时，有$\rho_n(i) = i+1$且 $\rho_n(n) = 1$。

把1, 2, …, n 均等地放到圆周上或正n角形上(n=8):



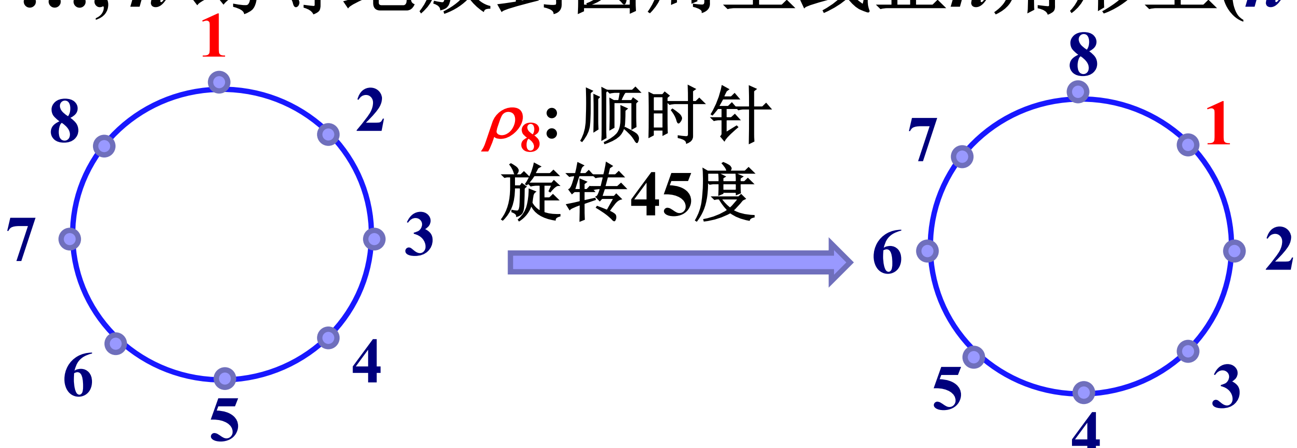
- ρ_n 按照顺时针方向将各整数传到随后的整数。
- 可将置换 ρ_n 视为圆的 360/n度 的旋转，
  ρ_n^2 视为圆的 2×(360/n) 度的旋转，…，
  ρ_n^k 视为圆的 k×(360/n)度 的旋转：

例： 设 n 是一个正整数，ρ_n 表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换：

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

即 当 $i=1, 2, \ldots, n-1$时，有$\rho_n(i) = i+1$且 $\rho_n(n) = 1$。

把1, 2, …, n 均等地放到圆周上或正n角形上(n=8):

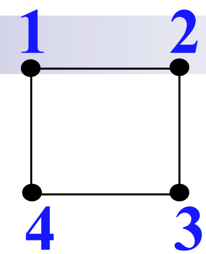


- ρ_n 按照顺时针方向将各整数传到随后的整数。
- 可将置换 ρ_n^k 视为圆的 $k\times(360/n)$度 的旋转：

$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & \ldots & k \end{pmatrix},$$

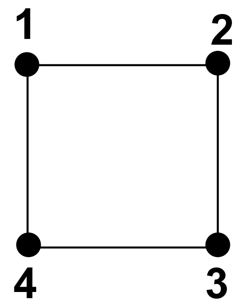
$$\rho_n^k(i) = (i+k) \bmod n$$

例如：当n=4时，有

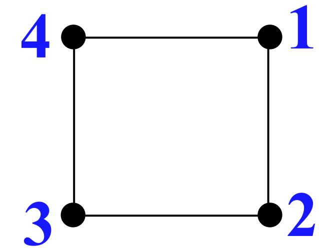


$$\rho_4^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

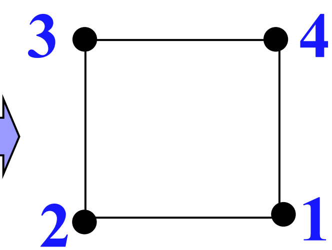
恒等置换



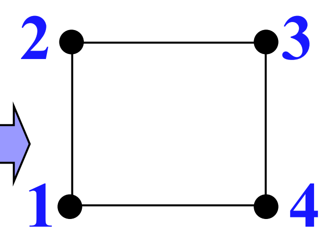
$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



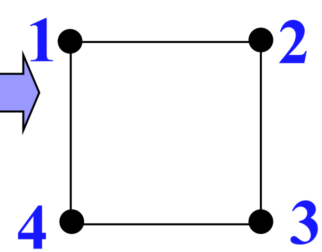
$$\rho_4^2 = \rho_4^1 \circ \rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\rho_4^3 = \rho_4^1 \circ \rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\rho_4^4 = \rho_4^1 \circ \rho_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \rho_4^0$$



$$\rho_4^4=\rho_4^1\circ\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\rho_4^0$$

$$\rho_4^5=\rho_4^1\circ\rho_4^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\rho_4^1$$

$$\rho_4^6=\rho_4^1\circ\rho_4^5=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\rho_4^2$$

$$\rho_4^7=\rho_4^1\circ\rho_4^6=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\rho_4^3$$

$$\rho_4^8=\rho_4^1\circ\rho_4^7=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\rho_4^0$$

$\boldsymbol{\rho_4^k=\rho_4^r}$, 其中 $\boldsymbol{k=r \bmod 4}$

$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & \ldots & k \end{pmatrix}$$

性质：设 $0 \le k \le n-1$, $r \ge n$, 如果 $k = r \bmod n$，则 $\rho_n^k = \rho_n^r$。

- 仅有 ρ_n 的 n 个不同的幂，即

$$\rho_n^0 = \iota, \rho_n, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}$$

- $\rho_n^k \circ \rho_n^{n-k} = \rho_n^n = \iota$，$k=0, 1, .., n-1$，得

$$(\rho_n^k)^{-1} = \rho_n^{n-k}, k = 0, 1, .., n-1$$

结论：$C_n = \{ \rho_n^0 = \iota, \rho_n^1, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1} \}$ 是一个置换群。

- ✓ C_n 是一个循环群。

$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-k & n-k+1 & \dots & n \\ k+1 & k+2 & \dots & n & 1 & \dots & k \end{pmatrix}$$

性质: $(C_n, \circ)$ 是一个置换群，其中$C_n=\{\rho_n^0= \iota, \rho_n^1, \rho_n^2, \dots, \rho_n^{n-1}\}$。

证明： 置换群的四个条件：合成运算的封闭性，满足结合律，存在单位元和逆元。

(1) 设ρ_n^i和$\rho_n^j$$(0 \le i, j \le n\text{-}1)$是$C_n$中的任意两个置换，则

有 $\rho_n^i \circ \rho_n^j = \rho_n^{i+j}$ ，

✓如果$0 \le i + j \le n\text{-}1$，则$\rho_n^{i+j} \in C_n$;

✓如果$n \le i + j$， 则一定存在k $(0 \le k \le n\text{-}1)$，满足

$k = (i+j) \bmod n$，所以， $\rho_n^{i+j} = \rho_n^k \in C_n$。

$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & \ldots & k \end{pmatrix}$$

性质: $(C_n, \circ)$ 是一个置换群，其中$C_n=\{\rho_n^0 = \iota, \rho_n^1, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}\}$。

证明：置换群的四个条件：合成运算的封闭性，满足结合律，存在单位元和逆元。

(2) 置换的合成满足结合律。

(3) $\rho_n^0 = \iota \in C_n$是单位元。

(4) 对于任意$\rho_n^k \in C_n$，$(\rho_n^k)^{-1} = \rho_n^{n-k}$。

因此，$(C_n, \circ)$ 是置换群。

小结

- 群 $(G, \bullet)$
  - 封闭性、结合律、存在单位元与逆元
- 置换 $i_1, i_2, \ldots, i_n$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$
- 置换群
  - $(C_n, \circ)$ 是一个置换群，其中 $C_n=\{\rho_n^0=\iota, \rho_n^1, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}\}$，其中 $\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & \ldots & k \end{pmatrix}$
  - 可将置换 ρ_n^k 视为圆的 $k\times(360/n)$度 的旋转
- 隐含了用于计算把 n个不同的对象安置到一个圆周上的方法数