第十四章Pólya计数

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

置换循环结构

设 f 是 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的一个置换，$D_f = (X, A_f)$ 是顶点集为 X 且边集为 $A_f = \{(i, f(i)) \mid i \in X\}$ 的有向图。

- ✓ D_f 有 n 个顶点与 n 条边，
- ✓ 各顶点的入度和出度等于1。

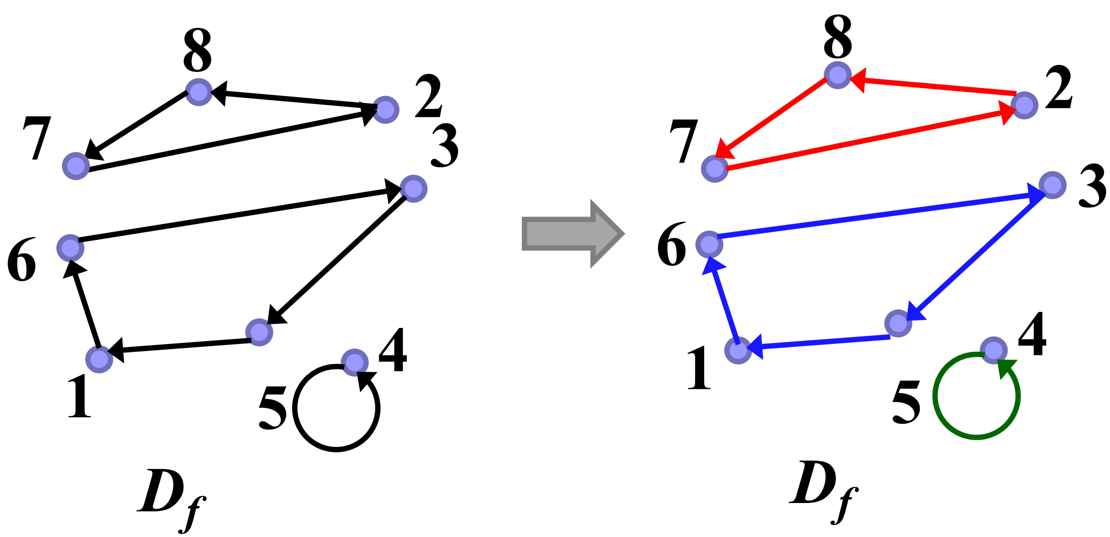
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ f(1) & f(2) & \cdots\cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

则 弧集 A_f 可以被划分为若干个有向圈，且每个顶点恰好属于一个有向圈。

置换循环结构

例：设{1, 2, …, 8}的一个置换

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$



3个有向圈:

$1 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$

$2 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 2$

$4 \rightarrow 4$

弧集 A_f 的有向圈

记对应有向圈 $1 \to 6 \to 3 \to 5 \to 1$的置换记为 $[1\ 6\ 3\ 5]$：

在{1, 2, …, 8} 上，把1变到6、6变到3、3变到5、5变到1，余下的整数保持不变。

$$[1\quad 6\quad 3\quad 5] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

循环置换

对应的有向圈：

$1 \to 6 \to 3 \to 5 \to 1$，

$2 \to 2$, $4 \to 4$, $7 \to 7$, $8 \to 8$

循环置换

- 循环置换：如果在一个置换中，某些元素以循环的方式置换且余下元素（如果有的话）保持不变，那么称这样的置换为循环置换，简称循环。
- 如果循环中的元素个数为 k，则称它为 k 循环。

例如，[1 6 3 5]是一个4 循环，

[2 8 7]是一个 3 循环，

[4]是一个 1 循环

例：设有{1, 2, …, 8}的一个置换 $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}$

$$[1\ 6\ 3\ 5]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}$$

$$[2\ 8\ 7]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}$$

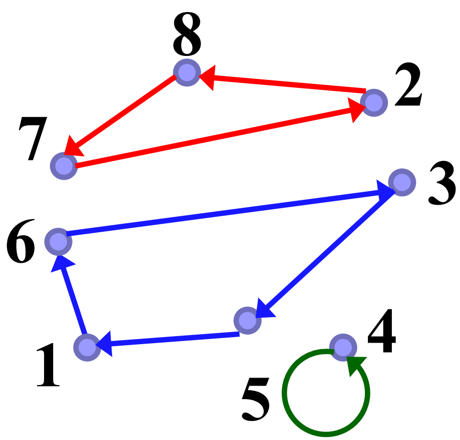
$$[4]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

$[1\ 6\ 3\ 5]\circ[2\ 8\ 7]\circ[4]$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}=f$$

例：设有{1, 2, …, 8}的一个置换 $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}$



D_f

$$[1\ 6\ 3\ 5]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}$$

$$[2\ 8\ 7]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}$$

$$[4]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}=[1\ 6\ 3\ 5\ ]\circ[2\ 8\ 7\ ]\circ[4\ ]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

循环因子分解

循环因子分解

设 f 是集合 X 的任意置换，$D_f=(X, A_f)$ 是顶点集为 X 且边集为 $A_f=\{(i,f(i)) \mid i\in X\}$的有向图，

$$[i_1\ i_2 \ldots i_p],\ [j_1\ j_2 \ldots j_q],\ \ldots,\ [l_1\ l_2 \ldots l_r]$$

为 D_f 所对应的有向圈，则 f 可以分解为：

$$f=[i_1\ i_2 \ldots i_p]\circ[j_1\ j_2 \ldots j_q]\circ \ldots \circ[l_1\ l_2 \ldots l_r],$$

称为 f 的循环因子分解。

（因为 f 中的每个整数至多属于因子分解中的一个循环）

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}=[1\ 6\ 3\ 5]\circ[2\ 8\ 7]\circ[4]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

循环因子分解

设 f 是集合 X 的任意置换，$D_f=(X, A_f)$ 是顶点集为 X 且边集为 $A_f=\{(i, f(i)) \mid i\in X\}$的有向图，

$$[\,i_1\ \ i_2 \ldots i_p\,],\ \ [\,j_1\ j_2 \ldots\ j_q\,],\ \ \ldots,\ \ [\,l_1\ \ l_2 \ldots l_r\,]$$

为 D_f 所对应的有向圈，则 f 可以分解为：

$$f=[i_1\ i_2 \ldots i_p]\circ[j_1\ j_2 \ldots j_q]\circ \ldots \circ[l_1\ l_2 \ldots l_r],$$

称为 f 的<u>循环因子分解</u>。

（因为 f 中的每个整数至多属于因子分解中的一个循环）

注意：

- ✓ 除了循环出现的次序可以任意变化外，f 的循环因子分解是唯一的。
- ✓ 1 循环就是恒等置换。
- ✓ 在 f 的循环因子分解中，X中的每个元素只出现一次

例：求8阶二面体群D_4(正方形的顶点对称群)中各置换的循环因子分解。

恒等置换：所有的循环是 1循环

$$\rho_4^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = [1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = [1\ 2\ 3\ 4]$$

$$\rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = [1\ 3]\circ[2\ 4]$$

$$\rho_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = [1\ 4\ 3\ 2]$$

例：求8阶二面体群D_4(正方形的顶点对称群)中各置换的循环因子分解。

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

正方形对角线的反射：出现两个1循环

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

连接对边中点连线的反射：两个2循环

在一个正n角形（n为偶数）的顶点对称群中，对于反射，

- 有一半有两个1-循环和 $\frac{n}{2}-1$个2循环
- 另一半有 $\frac{n}{2}$ 个2循环

例：求10阶二面体群D_5（正5角形的顶点对称群）中各置换的循环因子分解。

D_5	循环因子分解
$\rho_5^0=\iota$	[1]∘[2]∘[3]∘[4]∘[5]
ρ_5^1	[1 2 3 4 5]
ρ_5^2	[1 3 5 2 4]
ρ_5^3	[1 4 2 5 3]
ρ_5^4	[1 5 4 3 2]
τ_1	[1]∘[2 5]∘[3 4]
τ_2	[1 3]∘[2]∘[4 5]
τ_3	[1 5]∘[3]∘[2 4]
τ_4	[1 2]∘[3 5]∘[4]
τ_5	[1 4]∘[2 3]∘[5]

例：求10阶二面体群D_5（正5角形的顶点对称群）中各置换的循环因子分解。

D_5	循环因子分解
$\rho_5^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]\circ[5]$
ρ_5^1	$[1\ 2\ 3\ 4\ 5]$
ρ_5^2	$[1\ 3\ 5\ 2\ 4]$
ρ_5^3	$[1\ 4\ 2\ 5\ 3]$
ρ_5^4	$[1\ 5\ 4\ 3\ 2]$
τ_1	$[1]\circ[2\ 5]\circ[3\ 4]$
	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4\ 5]$
	$[1\ 5]\circ[3]\circ[2\ 4]$
	$[1\ 2]\circ[3\ 5]\circ[4]$
	$[1\ 4]\circ[2\ 3]\circ[5]$

在一个正n角形（n为奇数）的顶点对称群中，每个反射有一个1-循环和$\frac{n-1}{2}$个2循环

利用循环因子分解计算非等价着色问题

- 利用Burnside定理计数不等价的着色数的关键：
  1. 确定置换群G;
  2. 确定着色集C;
  3. 计数G中每个置换f的不变着色集$C(f)$的大小。
  4. 使用Burnside公式
- 缺点：第3步的计数过程比较复杂

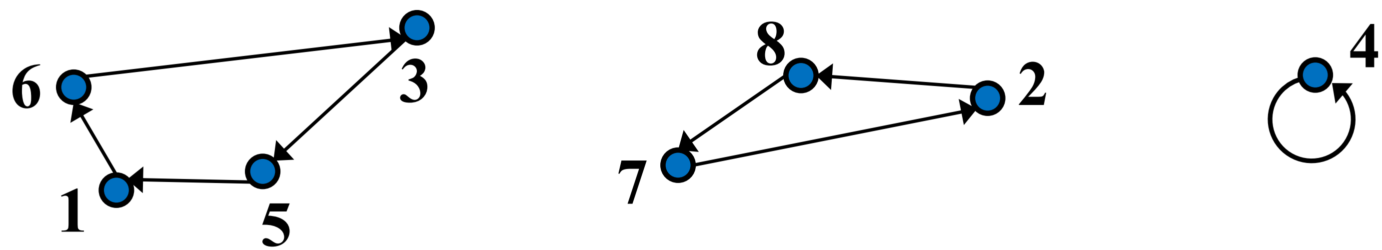
利用f的循环因子分解计算$C(f)$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。 $\boxed{(f*c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(1)$=红色，则

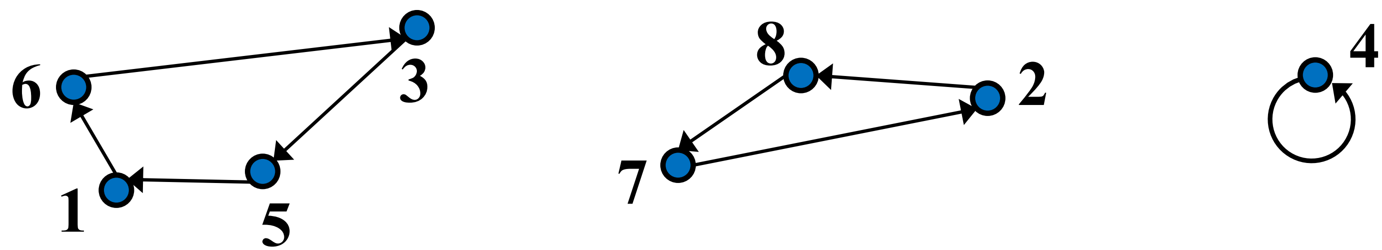
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} c(k) \\ c(i_k) \end{array}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。 $\boxed{(f*c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(1)$=红色，则

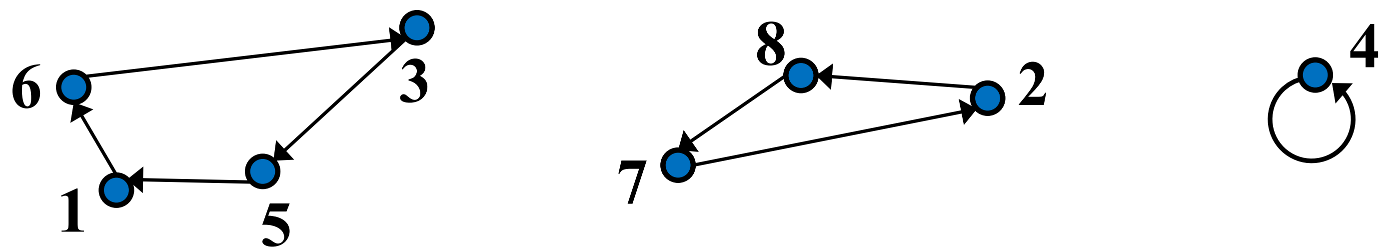
$$f = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} c(k) \\ c(i_k) \end{array} \end{array}$$

例：设 $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f{*}c = c$ 的一种着色。$\boxed{(f{*}c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(1)$=红色，则

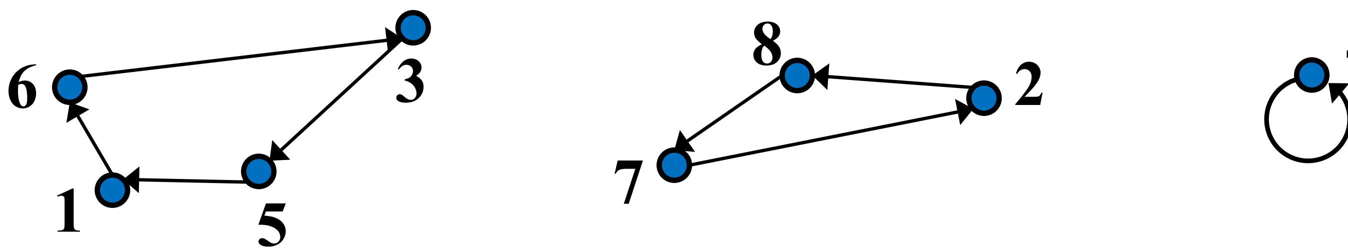
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} c(k) \\ c(i_k) \end{matrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。 $\boxed{(f*c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(1)$=红色，则

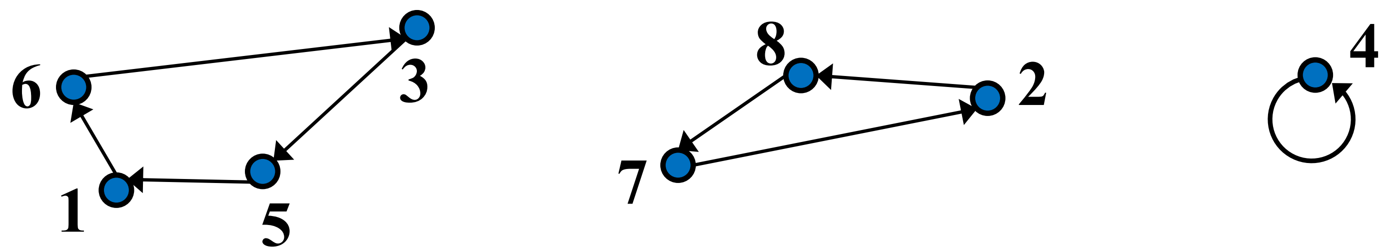
$$f = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} c(k) \\ c(i_k) \end{array}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。$\boxed{(f*c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(1)$=红色，则

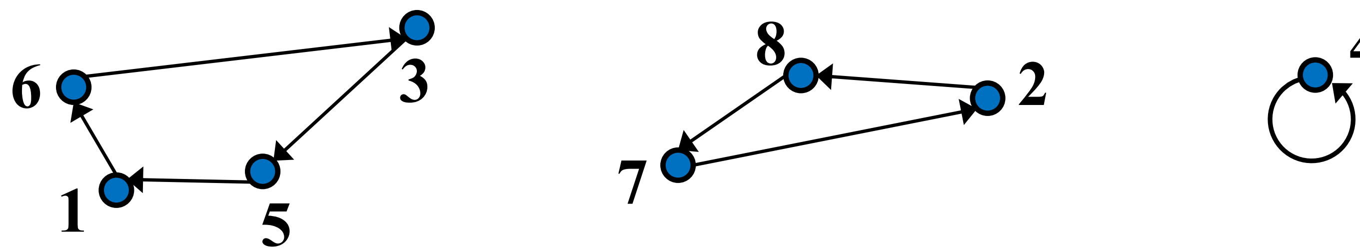
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} c(k) \\ c(i_k) \end{matrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f{*}c = c$ 的一种着色。 $\boxed{(f{*}c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(1)$=红色，则

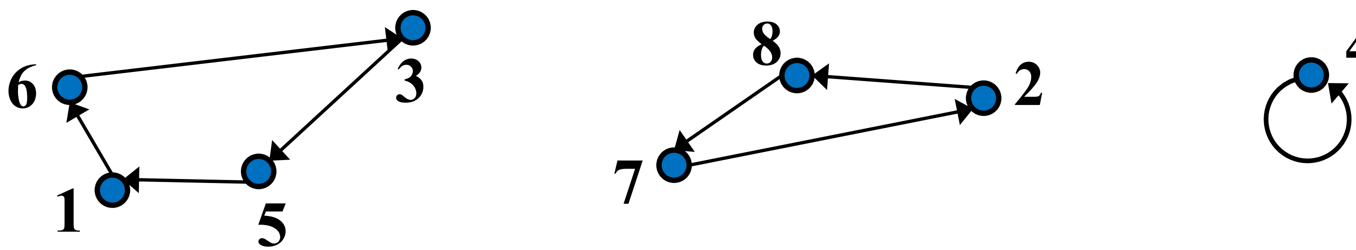
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} c(k) \\ c(i_k) \end{matrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。 $\boxed{(f*c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(1)$=红色，则

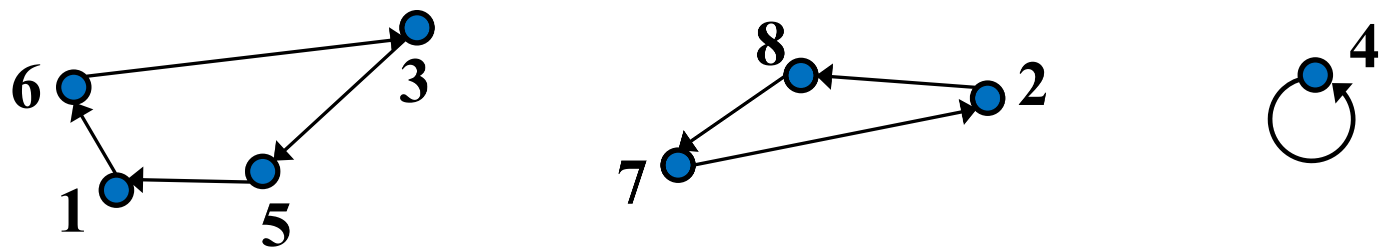
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} c(k) \\ c(i_k) \end{array}$$

例：设 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c=c$ 的一种着色。$(f*c)(i_k)=c(k)=c(i_k)$

假设 $c(1)$=红色，则

循环[1 6 3 5]中的1, 6, 3, 5颜色相同

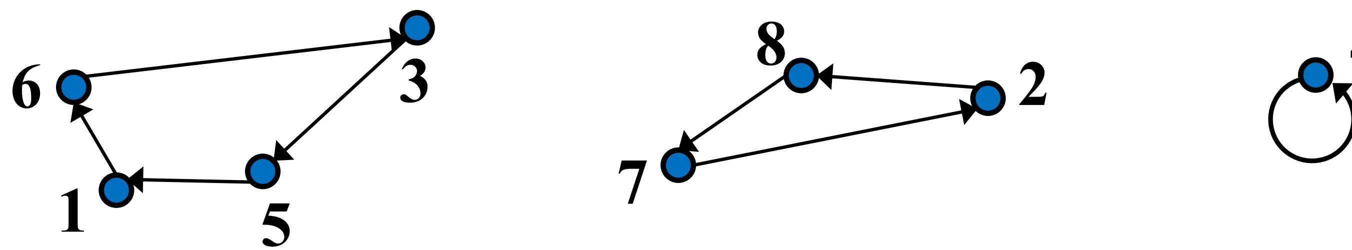
$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}\begin{matrix}c(k)\\c(i_k)\end{matrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。 $\boxed{(f*c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(2)$=蓝色，则

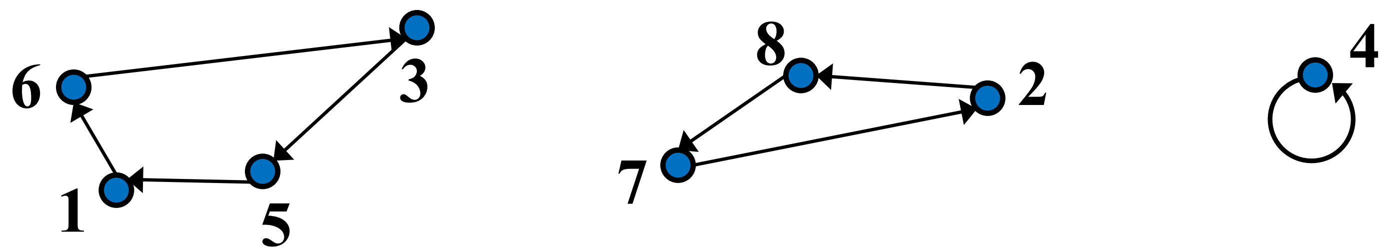
$$\begin{array}{ll} f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} c(k) \\ c(i_k) \end{array} \end{array}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f{*}c = c$ 的一种着色。 $\boxed{(f{*}c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(2)$=蓝色，则

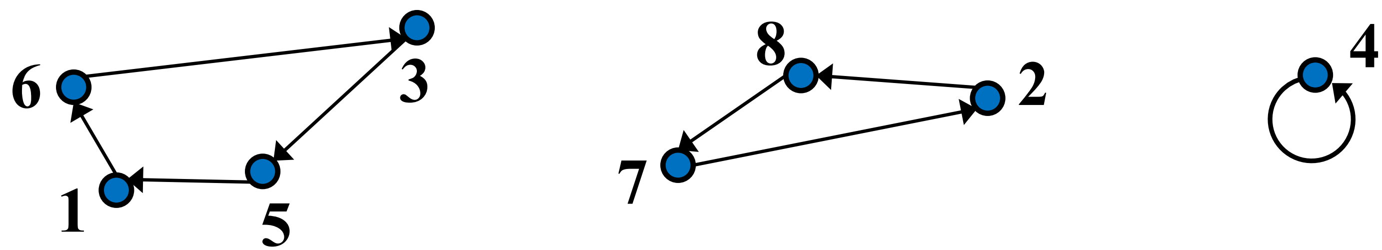
$$f = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} c(k) \\ c(i_k) \end{array}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。 $\boxed{(f*c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(2)$=蓝色，则

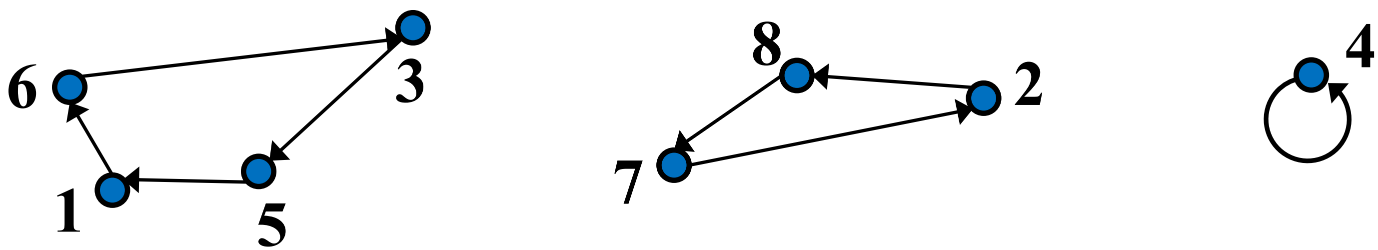
$$\begin{array}{ll} f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} c(k) \\ c(i_k) \end{array} \end{array}$$

例：设 $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$的置换 f 为：

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5]\circ[2\ 8\ 7]\circ[4]$

D_f



$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c=c$ 的一种着色。 $\boxed{(f*c)(i_k)=c(k)=c(i_k)}$

假设 $c(2)$=蓝色，则

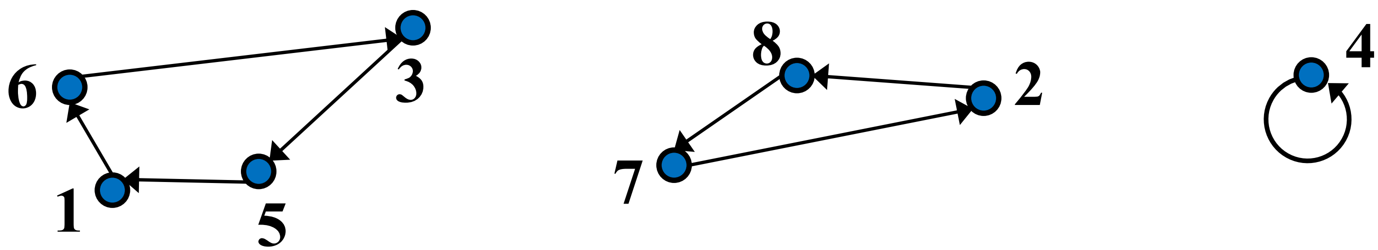
$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}\begin{matrix}c(k)\\c(i_k)\end{matrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。$\boxed{(f*c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(2)$=蓝色，则

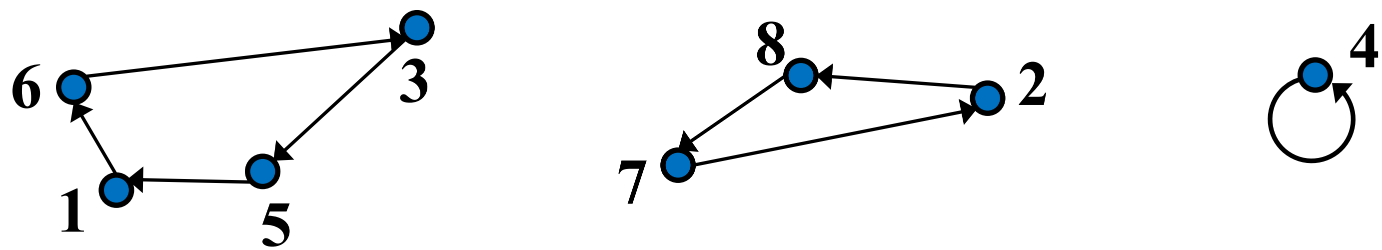
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} c(k) \\ c(i_k) \end{matrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。 $\boxed{(f*c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(2)$=蓝色，则

循环[2 8 7]中的 2, 8, 7颜色相同

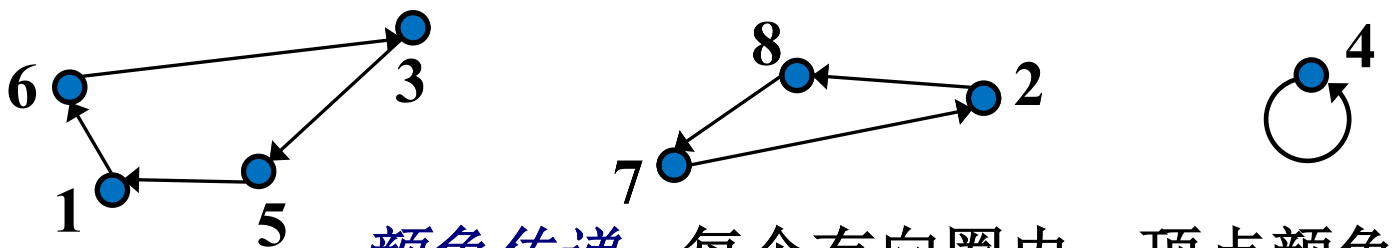
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} c(k) \\ c(i_k) \end{matrix}$$

例：设 $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



颜色传递：每个有向圈内，顶点颜色一样

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。 $\boxed{(f*c)(i_k) = c(k) = c(i_k)}$

假设 $c(4)=$ 绿色，则

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} c(k) \\ c(i_k) \end{matrix}$$

每个循环的所有元素颜色相同

例：设 $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

假设用红、绿、黄、蓝色对 X 进行着色，C 是所有着色的集合。在 f 作用下C中保持不变的着色数 $|C(f)|$ 是多少？

解：设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。

(1) 考虑 4 循环 [1 6 3 5]：

该循环用 1的颜色给 6着色，用 6的颜色给 3着色，用 3的颜色给 5着色，用 5的颜色给 1着色。

因为 f 保持着色 c不变，通过这个循环，得到

1的颜色 = 6的颜色 =3的颜色 =5的颜色，

即 1，6，3，5具有相同的颜色 。

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

假设用红、绿、黄、蓝色对 X 进行着色，C 是所有着色的集合。在 f 作用下C中保持不变的着色数 $|C(f)|$ 是多少？

解：设 c 是使得 $f{*}c = c$ 的一种着色。

(2) 同理，通过3循环[2 8 7]，得到 2, 8, 7 有相同的颜色，1循环 [4]中对4的颜色没有限制。

因此，在 f 作用下 C 中保持不变的着色 c 满足：

对{1, 6, 3, 5}、{2, 8, 7}、{4} 任意指定红、绿、黄、蓝中一种颜色。

得 $|C(f)| = 4^3 = 64$。

- **结论**：一个着色在 f 的作用下保持不变当且仅当 f 的循环因子分解中每个循环的所有元素的颜色相同。

- 记置换 f 的循环分解中的循环个数为 $\#(f)$

定理14.3.1：设 f 是集合 X 的一个置换。假如用 k 种颜色对 X 的元素进行着色。令 C 是 X 的所有着色的集合，则 f 保持 C 中着色不变的着色数为：

$$|C(f)| = k^{\#(f)}。$$

- 不变着色数 $C(f)$
  - ✓ 与颜色的数量和循环因子分解中循环个数有关，
  - ✓ 而与每个循环的阶数无关。

- 记置换 f 的循环分解中的循环个数为 $\#(f)$

> 定理14.3.1：设 f 是集合 X 的一个置换。
> 假如用 k 种颜色对 X 的元素进行着色。令 C 是 X 的所有着色的集合，则 f 保持 C 中着色不变的着色数为：
>
> $$|C(f)| = k^{\#(f)}。$$

- 提供了一种计算 $|C(f)|$ 的新方法。

> 定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于 G 中所有 f 与 C 中所有 c，$f*c$ 仍在 C 中，则 C 中非等价的着色数 $N(G, C)$ 为：$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$
> 即，C 中非等价的着色数等于在 G 中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

例：用红、蓝、绿三种颜色 对正方形的顶点进行着色，问共有多少种非等价的着色方法?

解：设 C 是用红、蓝、绿对正方形的顶点的所有着色的集合，正方形的顶点对称群是二面体群D_4。

D_4	循环因子分解	$\#(f)$	$\|C(f)\|$
$\rho_4^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$	4	$3^4=81$
ρ_4^1	$[1\ 2\ 3\ 4]$	1	$3^1=3$
ρ_4^2	$[1\ 3]\circ[2\ 4]$	2	$3^2=9$
ρ_4^3	$[1\ 4\ 3\ 2]$	1	$3^1=3$
τ_1	$[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$	3	$3^3=27$
τ_2	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$	3	$3^3=27$
τ_3	$[1\ 2]\circ[3\ 4]$	2	$3^2=9$
τ_4	$[1\ 4]\circ[2\ 3]$	2	$3^2=9$

由Burnside定理，得

$$N(D_4, C)$$

$$=\frac{1}{|D_4|}\sum_{f\in D_4}|C(f)|$$

$$=\frac{81+3+9+3+27+27+9+9}{8}$$

$$=21$$

例：1. 对一个四边形的2个点着红色，其余点着蓝色，问有多少种不等价的着色数？

2. 对一个正五角形的3个顶点着红色，对其余顶点着蓝色，问有多少种不等价的着色？

置换的生成函数

回顾:生成函数

- 多重集$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$的$n$ 组合数 h_n
  - 等于方程$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$的非负整数解$e_1, e_2, \ldots, e_k$的个数
  - 生成函数 $g(x)=\left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2}\right)\ldots\left(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k}\right)$
- n的分拆数 p_n
  - 等于方程 $na_n+(n-1)a_{n-1}+\ldots.+2a_2+a_1=n$的非负整数解 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$的个数。
  - 生成函数

    $$g(x)=\left(\sum_{a_1=0}^{\infty} x^{a_1}\right)\left(\sum_{a_2=0}^{\infty} x^{2a_2}\right)\ldots\left(\sum_{a_k=0}^{\infty} x^{ka_k}\right)\ldots$$

置换的类型

设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$为一个集合，f 为 X 上的一个置换，f 的循环因子分解中有

e_1个 1-循环, e_2个 2-循环, …， e_n个 n-循环。

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为 $[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

$e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = 1, e_4 = 1, e_5 = e_6 = e_7 = e_8 = 0$

$1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + 6e_6 + 7e_7 + 8e_8 = 8$

置换的类型

设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$为一个集合，f 为 X 上的一个置换，f 的循环因子分解中有

e_1个 1-循环, e_2 个 2-循环, …， e_n 个 n-循环。

由于 X 的各元素在 f 的循环因子分解中恰好出现在一个循环中，因此 $e_1, e_2, \ldots, e_n$满足：

$$1e_1+2e_2+\ldots+ne_n = n,$$

称 n元组 $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ 是置换 f 的类型，记为

$$\mathrm{type}(f) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)。$$

在 f 的循环因子分解中，循环数为：

$$\#(f) = e_1 + e_2+\ldots+ e_n。$$

type(f) 仅取决于循环因子分解中各阶循环的个数

- 不同的置换可以有相同的类型

问题：是否可以仅通过类型来区分置换

D_4	循环因子分解	type(*f*)	#(*f*)
$\rho_4^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$	(4, 0, 0, 0)	4
ρ_4^1	$[1\ 2\ 3\ 4]$	(0, 0, 0, 1)	1
ρ_4^2	$[1\ 3]\circ[2\ 4]$	(0, 2, 0, 0)	2
ρ_4^3	$[1\ 4\ 3\ 2]$	(0, 0, 0, 1)	1
τ_1	$[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$	(2, 1, 0, 0)	3
τ_2	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$	(2, 1, 0, 0)	3
τ_3	$[1\ 2]\circ[3\ 4]$	(0, 2, 0, 0)	2
τ_4	$[1\ 4]\circ[2\ 3]$	(0, 2, 0, 0)	2

- 问题：是否可以仅通过类型来区分置换？

置换的单项式

设 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$为一个集合，G是 X 的置换群。

引入n个变量$z_1, z_2, \ldots, z_n$，其中，z_k对应 k 循环 $(k=1, 2, \ldots, n)$.

设 f 为 X 上的一个置换，且 $\mathrm{type}(f) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$。

定义 f 的单项式为

$$\mathrm{mon}(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n},$$

则 f 的单项式的总次数 $e_1+e_2+\ldots+e_n$ 等于 f 的循环因子分解中的循环个数 $\#(f)$。

D_4	循环因子分解	$\#(f)$	类型 (e_1, e_2, e_3, e_4)	单项式
$\rho_4^0=\iota$	[1]∘[2]∘[3]∘[4]	4	(4, 0, 0, 0)	z_1^4
ρ_4^1	[1 2 3 4]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
ρ_4^2	[1 3]∘[2 4]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
ρ_4^3	[1 4 3 2]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
τ_1	[1]∘[2 4]∘[3]	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2 z_2$
τ_2	[1 3]∘[2]∘[4]	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2 z_2$
τ_3	[1 2]∘[3 4]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
τ_4	[1 4]∘[2 3]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2

置换的单项式

设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$为一个集合，G是 X 的置换群。
引入n个变量 $z_1, z_2, \ldots, z_n$，其中，z_k对应 k循环 (k=1, 2, …, n).
设 f 为 X 上的一个置换，且 type(f) = ($e_1, e_2, \ldots, e_n$)。

定义 f 的单项式为 $\mathrm{mon}(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$，
则 f 的单项式的总次数 $e_1+e_2+\ldots+e_n$ 等于 f 的循环因子分解中的循环个数 #(f)。

G 中的置换按照类型的生成函数是 G 中所有置换的单项式的和：$\sum_{f\in G} mon(f) = \sum_{f\in G} z_1{}^{e_1} z_2{}^{e_2} \ldots z_n{}^{e_n}$.

合并生成函数的同类项，$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$ 的系数等于 G 中类型为 ($e_1, e_2, \ldots, e_n$) 的置换的个数。

置换的循环指数

G的循环指数定义为其生成函数除以 G 中的置换个数 $|G|$，即$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$

例：求二面体群 D_4的循环指数。

D_4	循环因子分解	#(f)	类型 (e_1, e_2, e_3, e_4)	单项式
$\rho_4^0=\iota$	[1]∘[2]∘[3]∘[4]	4	(4, 0, 0, 0)	z_1^4
ρ_4^1	[1 2 3 4]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
ρ_4^2	[1 3]∘[2 4]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
ρ_4^3	[1 4 3 2]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
τ_1	[1]∘[2 4]∘[3]	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2 z_2$
τ_2	[1 3]∘[2]∘[4]	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2 z_2$
τ_3	[1 2]∘[3 4]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
τ_4	[1 4]∘[2 3]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2

D_4的循环指数

$$P_{D_4}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{8}(z_1^4 + 2z_4 + 3z_2^2 + 2z_1^2 z_2)$$

用循环指数计算非等价着色数

已知G的循环指数

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$$

其中，type(f) = (e_1, e_2, …, e_n)。

由定理14.3.1，f 保持C中着色不变的着色数是(k种颜色):

$$|C(f)| = k^{\#(f)} = k^{e_1+e_2+\cdots+e_n} = k^{e_1}\, k^{e_2} \ldots\, k^{e_n}$$

根据Burnside定理，非等价的着色数是:

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)| = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} k^{e_1}\, k^{e_2} \ldots\, k^{e_n}$$

$$= P_G(k, k, \ldots, k)$$

k 种颜色， e_i个 i 循环，
i=1, 2, …, n

用循环指数计算非等价着色数

定理 14.3.2 设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ 为一个集合，假设用 k 种颜色对 X 的元素进行着色。令 C 是 X 的所有 k^n 种着色的集合，G 是 X 的置换群。则非等价的着色数是用 $z_i = k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 代入 G 的循环指数 $P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ 中而得到的数，即

$$N(G, C) = P_G(k, k, \ldots, k)$$

例：用 k 种颜色对正方形的顶点进行着色，非等价着色数是多少？

解：首先求二面体群 D_4 的循环指数。

D_4	循环因子分解	#(f)	类型 (e_1, e_2, e_3, e_4)	单项式
$\rho_4^0=\iota$	[1]∘[2]∘[3]∘[4]	4	(4, 0, 0, 0)	z_1^4
ρ_4^1	[1 2 3 4]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
ρ_4^2	[1 3]∘[2 4]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
ρ_4^3	[1 4 3 2]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
τ_1	[1]∘[2 4]∘[3]	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2z_2$
τ_2	[1 3]∘[2]∘[4]	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2z_2$
τ_3	[1 2]∘[3 4]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
τ_4	[1 4]∘[2 3]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2

D_4 的循环指数为

$$P_{D_4}(z_1, z_2, z_3, z_4)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)$$

例：用 k 种颜色对正方形的顶点进行着色，非等价着色数是多少？

解：首先求二面体群D_4的循环指数。

D_4	循环因子分解	#(f)	类型 (e_1, e_2, e_3, e_4)	单项式
$\rho_4^0=\iota$	[1]∘[2]∘[3]∘[4]	4	(4, 0, 0, 0)	z_1^4
ρ_4^1	[1 2 3 4]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
ρ_4^2	[1 3]∘[2 4]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
ρ_4^3	[1 4 3 2]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
τ_1	[1]∘[2 4]∘[3]	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2 z_2$
τ_2	[1 3]∘[2]∘[4]	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2 z_2$
τ_3	[1 2]∘[3 4]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
τ_4	[1 4]∘[2 3]	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2

非等价的着色数为 $N(D_4, C)= P_{D_4}(k,k,k,k)$

$$=\frac{1}{8}(k^4+2k+3k^2+2k^2k)=\frac{1}{8}(k^4+2k^3+3k^2+2k)$$

- 问题：怎样利用G的循环指数，来确定当各颜色使用特定次数时非等价的着色数?

设 f 是集合 X 的置换，

$$\text{type}(f)=(e_1, e_2, \ldots, e_n),\quad \text{mon}(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n},$$

即 f 的循环因子分解 中有 e_i 个 i 循环，i=1, 2, …, n。

假设仅有红色与蓝色两种颜色。

令 $C_{p,q}$ 表示所有 p 个元素着红色且 $q=n-p$ 个元素着蓝色的 X 的着色集合。

- 结论： $C_{p,q}$ 中的着色在 f 的作用下保持不变当且仅当 f 的循环因子分解中每个循环的所有元素的颜色相同。

- 方法：给循环指定颜色，满足

指定的红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 $q=n-p$。

- 方法：给循环指定颜色，满足

指定的红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 $q=n-p$。

令变量 r 表示红色，b 表示蓝色，

则红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 q 的一个着色可表示为 $r^p b^q$。令 $type(f)=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$，考虑

$$(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\ldots(r^n+b^n)^{e_n} \quad (3)$$

$$=(r+b)(r+b)\ldots(r+b) \qquad (e_1\text{个})$$

$$(r^2+b^2)(r^2+b^2)\ldots(r^2+b^2) \qquad (e_2\text{个})$$

$$(r^k+b^k)(r^k+b^k)\ldots(r^k+b^k) \qquad (e_k\text{个})$$

$$(r^n+b^n)(r^n+b^n)\ldots(r^n+b^n) \qquad (e_n\text{个})$$

则红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 q 的着色个数为 (3) 中 $r^p b^q$ 的系数。

令变量 r 表示红色，b 表示蓝色，

则红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 q 的一个着色可表示为 $r^p b^q$。令 $type(f) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$，考虑

$$(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\ldots(r^n+b^n)^{e_n} \quad (3)$$

则红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 q 的着色个数为 (3) 中 $r^p b^q$ 的系数。

$$\boxed{\mathrm{mon}(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}}$$

而 (3) 式又为对 f 的单项式做以下代换得到：

$$z_1 = r + b,\ z_2 = r^2 + b^2,\ \ldots,\ z_n = r^n + b^n。$$

由于G的循环指数是G中置换 f 的单项式的平均值，即

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} mon(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\ldots(r^n+b^n)^{e_n}$$

$$= P_G(r+b, r^2+b^2, \ldots, r^n+b^n)$$

令变量 r 表示红色，b 表示蓝色，

则红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 q的一个着色可表示为 $r^p b^q$。令$type(f) =(e_1, e_2, \ldots, e_n)$，考虑

$$(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\ldots(r^n+b^n)^{e_n} \quad (3)$$

则红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 q 的着色个数为 (3) 中 $r^p b^q$ 的系数。

$$\boxed{\mathrm{mon}(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}}$$

已证：$(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\ldots(r^n+b^n)^{e_n}$

$= P_G(r+b, r^2+b^2, \ldots, r^n+b^n)$

得，$C_{p,q}$ 中非等价的着色数等于$P_G(r+b, r^2+b^2, \ldots, r^n+b^n)$ 中$r^p b^q$的系数

称$P_G(r+b, r^2+b^2, \ldots, r^n+b^n)$为$C_{p,q}$ 中每种颜色有指定元素个数的非等价着色数的二元变量生成函数。

例：用两种颜色对一个正方形的顶点着色，求它们的非等价着色数的生成函数。

解：正方形的顶点对称群 D_4的循环指数为

$$P_{D_4}(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)。$$

设两种颜色 为 r与 b，则生成函数为

$$P_{D_4}(r+b,\ r^2+b^2,\ r^3+b^3,\ r^4+b^4)$$

$$=\frac{1}{8}((r+b)^4+2(r^4+b^4)+3(r^2+b^2)^2+2(r+b)^2(r^2+b^2))$$

$$=r^4+r^3b+2r^2b^2+rb^3+b^4。$$

得：

4个红色：1

3个红色，1个蓝色：1

2个红色，2个蓝色：2

1个红色，3个蓝色：1

4个蓝色：1

Pólya定理

定理14.3.3 设 X 为一个集合，G为 X上的一个置换群，$\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$是 k种颜色的一个集合，C是 X 的任意着色集。则针对各颜色数目的C的非等价着色数的生成函数是由循环指数 $P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ 通过做变量代换

$z_j = u_1^j + u_2^j + \ldots + u_k^j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ 得到的表达式

$P_G(u_1+u_2+\ldots+u_k, u_1^2+u_2^2+\ldots+u_k^2, \ldots, u_1^n+u_2^n+\ldots+u_k^n)$，

其中，$u_1^{p_1}u_2^{p_2}\ldots u_k^{p_k}$ 的系数等于 X 中的

p_1 个元素着色成颜色 u_1，p_2 个元素着色成颜色 u_2, …, p_k 个元素着色成颜色 u_k

的非等价的着色数。

例：用3种颜色对一个正方形的顶点着色，求非等价着色数的生成函数。

解：D_4的循环指数为

$$P_{D_4}(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)。$$

设有3种颜色r, b, g，则非等价着色的生成函数为

$$P_{D_4}\left(r+b+g,r^2+b^2+g^2,r^3+b^3+g^3,r^4+b^4+g^4\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\,(r+b+g)^4+2(r^4+b^4+g^4)+3(r^2+b^2+g^2)+2(r+b+g)^2(r^2+b^2+g^2)\,\right)。$$

利用第5章中的多项式定理计算出生成函数的表达式。

例如：$r^1b^2g^1$的系数为：$\frac{1}{8}(12+0+0+4)=2$。

非等价着色总数为$\frac{1}{8}(3^4+2\cdot 3+3\cdot 3^2+2\cdot 3^2\cdot 3)=21$.

例：求各种可能边数的 4阶非同构图的个数。

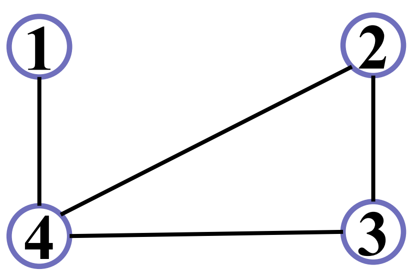
图同构：

设图 $H_1=(V_1, E_1)$， $H_2=(V_2, E_2)$ 是两个图，

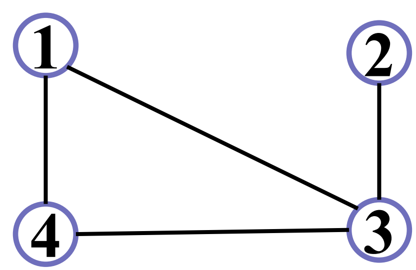
如果存在V_1 到 V_2的双射 h, 使得 对任意的顶点 $u, v \in V_1$，

$$(u, v)\in E_1 \text{ 当且仅当 } (h(u), h(v)) \in E_2$$

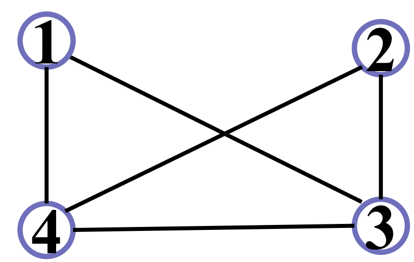
则称 H_1与H_2 同构。



H_1



H_2



H_3

$h(1) = 2, h(2) = 1,$
$h(3) = 4, h(4) = 3$

H_1 与H_2 同构

H_1 与 H_3 不同构
H_2 与 H_3 不同构

例：求各种可能边数的 4阶非同构图的个数。

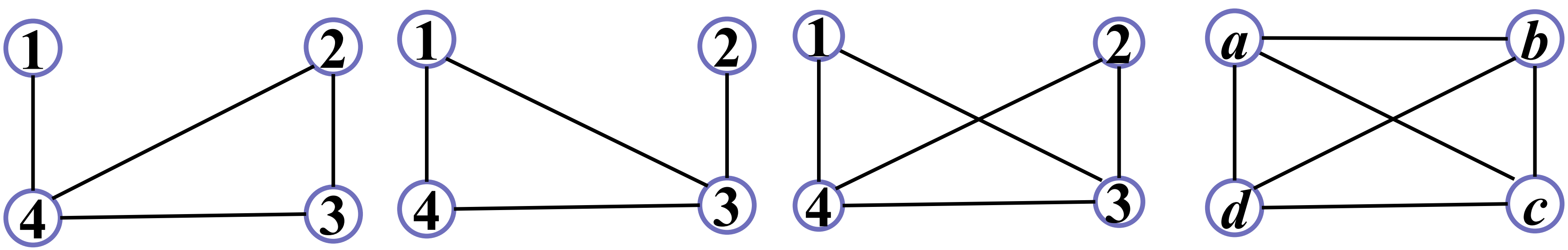
图同构：

设图 $H_1=(V_1, E_1)$， $H_2=(V_2, E_2)$ 是两个图，

如果存在V_1 到 V_2的双射 h, 使得 对任意的顶点 $u, v \in V_1$,

$$(u, v)\in E_1 \text{ 当且仅当 } (h(u), h(v)) \in E_2$$

则称 H_1与H_2 同构。



H_1 H_2 H_3 H_4

4阶完全图

- H_1, H_2, H_3 的边集均为 H_4 的边集的子集
- 问题：如何刻画为非等价着色问题？

例：求各种可能边数的 4阶非同构图的个数。

解：设 $\mathcal{H}$ 是顶点集为$V=\{1, 2, 3, 4\}$的所有4 阶图的集合，要求的是$\mathcal{H}$ 中有指定边数的非同构图个数的生成函数。

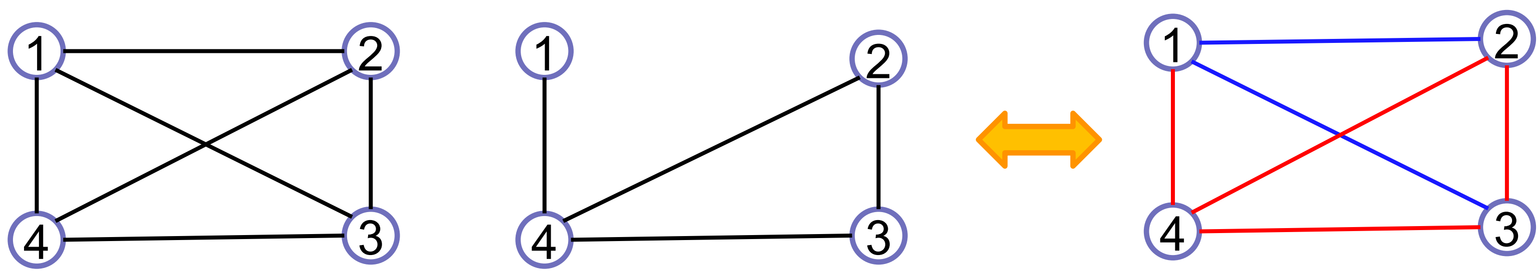
（同构的图一定有相同的边数，反之不一定成立）

由于 $\mathcal{H}$ 中任意一个图 $H_1=(V, E_1)$的边集合E 一定是

$$X=\{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

的一个子集。

将$\mathcal{H}$看成是对集合X中的边使用两种颜色 “是（y）” 与 “否(n)” 的着色，其中，E_1 中的边有颜色 y，非 E_1 中的边有颜色 n。



H_1

例：求各种可能边数的 4 阶非同构图的个数。

解（续）：设 $\mathcal{H}$ 是顶点集为V={1, 2, 3, 4}的所有4 阶图的集合，要求的是$\mathcal{H}$ 中有指定边数的非同构图个数的生成函数。

（同构的图一定有相同的边数，反之不一定成立）

由于 $\mathcal{H}$ 中任意一个图 $H_1=(V, E_1)$的边集合E一定是

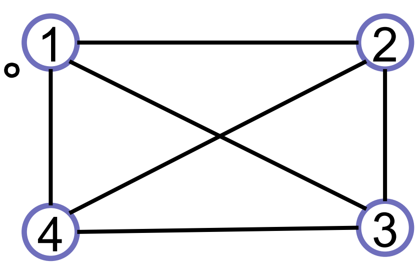
$$X=\{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

的一个子集。

将$\mathcal{H}$看成是对集合X中的边使用两种颜色“是（y）”与“否(n)”的着色，其中，E 中的边有颜色 y，非 E 中的边有颜色 n。

设 C是有 y 与 n两种颜色的 X的所有着色的集合。

因此，$\mathcal{H}$ 中的一个图恰好对应 C 中一种着色。



例：求各种可能边数的 4 阶非同构图的个数。

解（续）：设 H_1 与 $H_2=(V, E_2)$ 是$\mathcal{H}$中两一个图，则

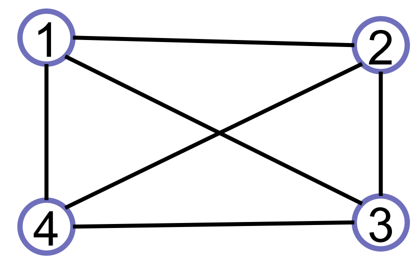
H_1与H_2同构当且仅当存在$V=\{1, 2, 3, 4\}$的置换 f，使得

(i, j) 是 E_1中的边当且仅当$(f(i), f(j))$是E_2中的边。

令S_4是 V 的所有置换的集合，则$|S_4|= 4!=24$。

显然 S_4中每个置换 f 对应 X 中边的一个置换：

$$(i, j) \longrightarrow (f(i), f(j)),\ \ i, j \in X$$



例如：$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，则 f 按以下方式置换边，得到X上的置换

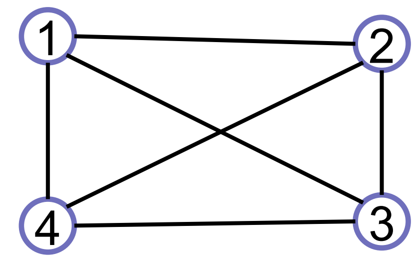
$$\begin{pmatrix} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (2,3) & (2,4) & (3,4) \\ (2,3) & (3,4) & (1,3) & (2,4) & (1,2) & (1,4) \end{pmatrix}$$

令$S_4^{(2)}$为由S_4按以上方式生成的置换群。

有 $\mathcal{H}$ 中的任意两个图是同构的当且仅当对应的X的着色是等价的。

例：求各种可能边数的 4 阶非同构图的个数。

解（续）：因此，把求各种可能边数的4阶非同构图的个数的问题转化为求着色集合C关于置换群$S_4^{(2)}$的非等价着色个数的问题。



下面计算$S_4^{(2)}$的循环指数，首先计算$S_4^{(2)}$中24个置换的类型。

例如，对于$S_4^{(2)}$中的如下置换 $f^{(2)}$：

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (2,3) & (2,4) & (3,4) \\ (2,3) & (3,4) & (1,3) & (2,4) & (1,2) & (1,4) \end{pmatrix}$$

可写作：$[\,(1,2)\ (2,3)\ (2,4)\,] \circ [(1,3)\ (3,4)\ (1,4)\,]$.

则类型 $\mathrm{type}(f^{(2)}) = (0\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,)$，单项式为$\mathrm{mon}(f)= z_3^2$。

例：求各种可能边数的4阶非同构图的个数。

解（续）：计算结果如下表：

类型	单项式	$S_4^{(2)}$的置换数
(6, 0, 0, 0, 0, 0)	z_1^6	1
(2, 2, 0, 0, 0, 0)	$z_1^2 z_2^2$	9
(0, 0, 2, 0, 0, 0)	z_3^2	8
(0, 1, 0, 1, 0, 0)	$z_2\ z_4$	6

$S_4^{(2)}$的循环指数为

$$P_{S_4^{(2)}}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \frac{1}{24}(z_1^6 + 9z_1^2 z_2^2 + 8z_3^2 + 6z_2 z_4)$$

令 $z_j = y^j + n^j$， $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

得 $P_{S_4^{(2)}}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$

$= y^6 + y^5 n + 2y^4 n^2 + 3y^3 n^3 + 2y^2 n^4 + yn^5 + n_6$

例：求各种可能边数的4阶非同构图的个数。

解（续）：得 $P_{S_4^{(2)}}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)$

$$= y^6+y^5n+2y^4n^2+3y^3n^3+2y^2n^4+yn^5+n_6$$

由于y的数目等于边的数目，得 4阶非同构图的数目如下表所示：

边数	非同构4阶图数目
6	1
5	1
4	2
3	3
2	2
1	1
0	1
共计	11

4阶非同构图总共有11个。

总结

- 非等价着色数的计算

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即，C中非等价的着色数等于在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

计算$|C(f)|$的方法：

- 直接计算
- 循环因子分解

- 各颜色使用特定次数时的非等价着色数的计算
  - 循环因子分解 → 循环指数 → 生成函数