# 第2章 排列与组合

2.1 四个基本的计数原理

2.2 集合的排列

2.3 集合的组合（子集）

2.4 多重集合的排列

2.5 多重集合的组合

# 组合数学主要内容

- 排列与组合（基础）
- 鸽巢原理（存在性）
- 生成排列和组合（生成算法）
- 二项式系数
- 容斥原理
- 递推关系和生成函法（ 重要工具）
- 特殊计数序列：**Catalan**数、**Stirling**数、分拆数
- 图匹配、互异代表系统
- 波利亚计数

# 基本计数问题

- 选取问题
  - 排列组合模型
  - 加法法则与乘法法则
  - 二项式定理和组合恒等式
  - 多项式定理
- 方程非负整数求解问题
- 投球入盒问题

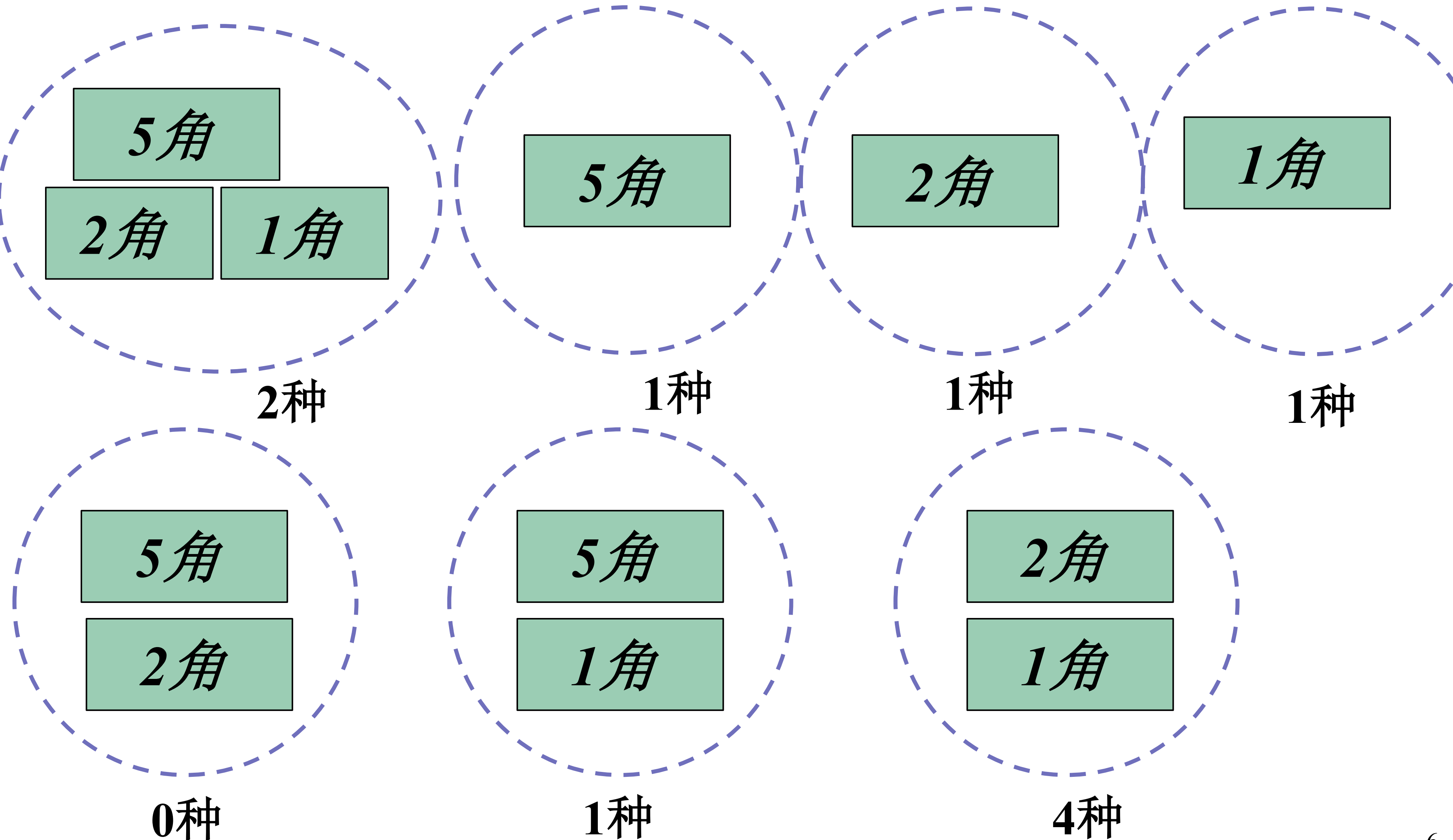
# 几个问题

- 用1角、2角和 5 角的三种人民币（每种的张数没有限制）组成1元钱，有多少种方法？
- 4位同学和2位老师排成一排照相，规定老师站在两边有多少种排法？
- 有多少个取自{1，2，…，9}的各位互异的7位数，使得5和6不以任何顺序相继出现？
- 一本书从第 1页开始编排页码，共用数字2355个，那么这本书共有多少页？

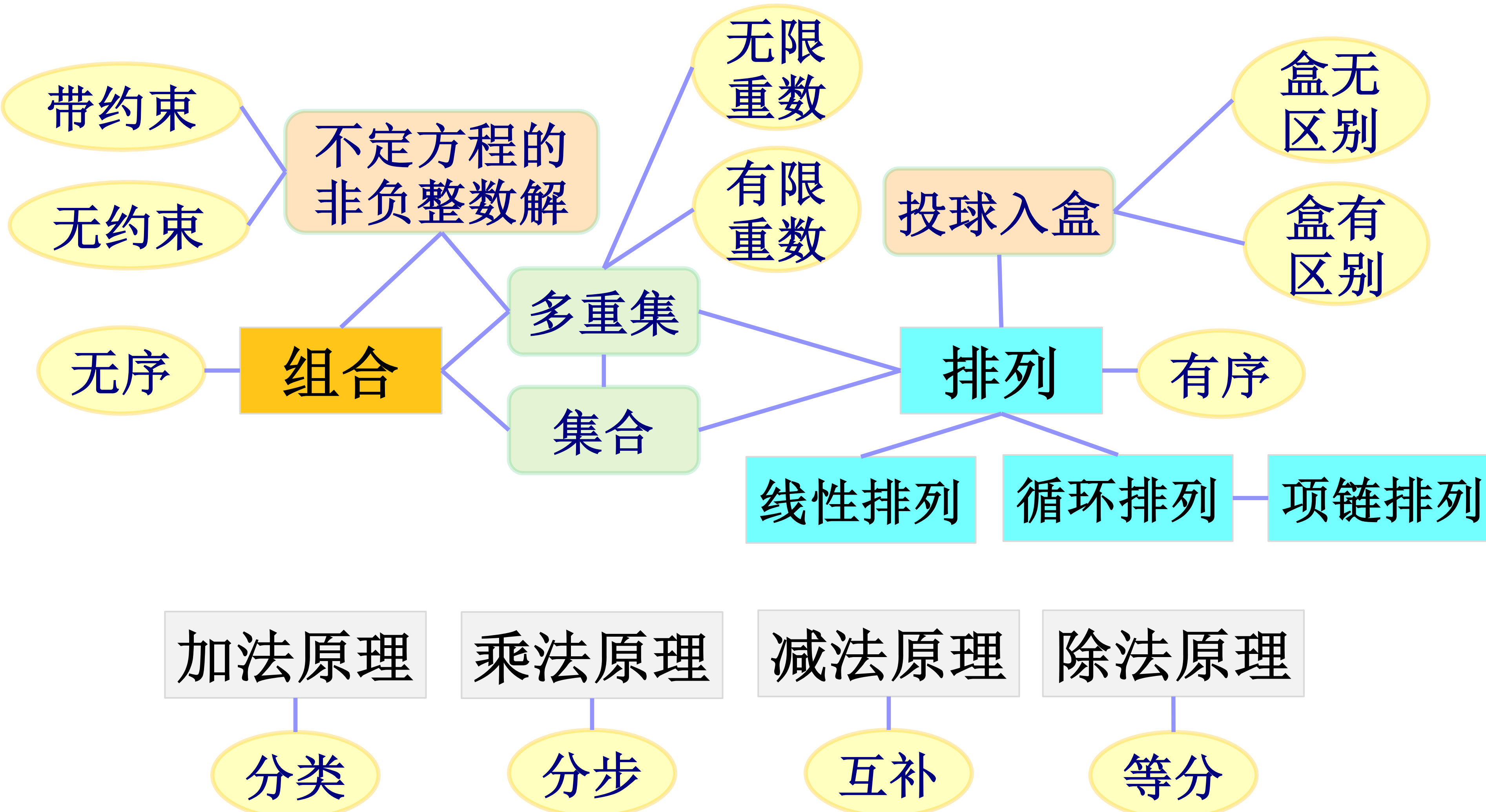
# 几个问题

- 将数字1，2，…，15 放入一个 4×4 的方阵中，问共有多少种摆放方法？若放入6×6的方阵中，共有多少种摆放方法
- 数字1, 1, 1, 3, 8可以构造出多少个不同的 5 位数？

1. 用1角、2角和5角的三种人民币（每种的张数没有限制）组成1元钱，有多少种方法？



# 知识图谱



带约束
无约束
不定方程的非负整数解
无限重数
有限重数
投球入盒
盒无区别
盒有区别
无序
组合
多重集
集合
排列
有序
线性排列
循环排列
项链排列
加法原理
乘法原理
减法原理
除法原理
分类
分步
互补
等分

# 第2章 排列与组合

2.1 四个基本的计数原理

2.2 集合的排列

2.3 集合的组合（子集）

2.4 多重集合的排列

2.5 多重集合的组合

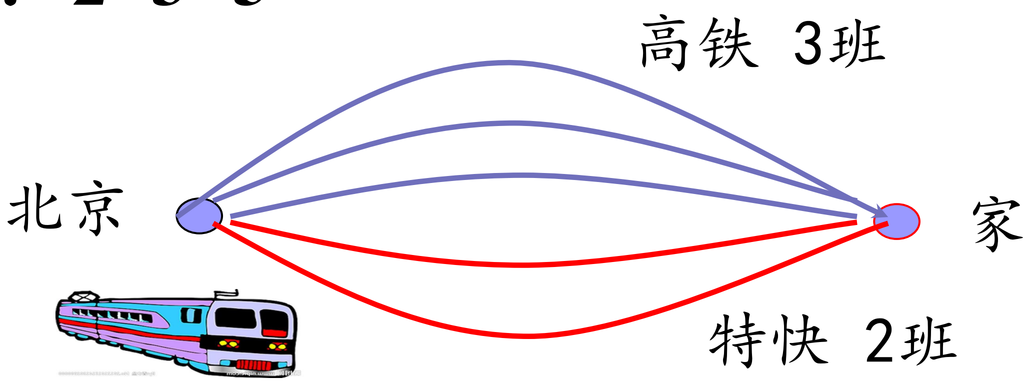
# 主要内容

- **2.1基本计数原理**
  - 加法原理
  - 乘法原理
  - 减法原理
  - 除法原理

# 例1：寒假回家

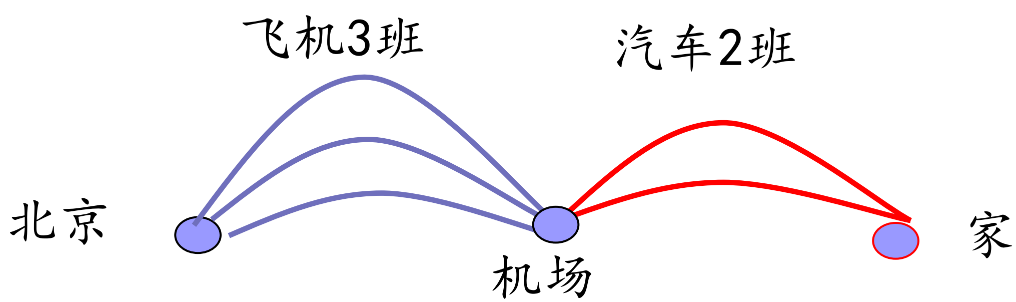
- 例子：寒假坐火车回家
  - 特快 2 班
  - 高铁 3 班

- 问题：一共有多少种回家的方式？
- 答案：**2+3=5**




# 例1：寒假回家

- 例子：寒假坐飞机回家，但无法直达。
  - 飞机3班
  - 汽车2班
- 问题：一共有多少种回家的方式?
- 答案：3*2=6

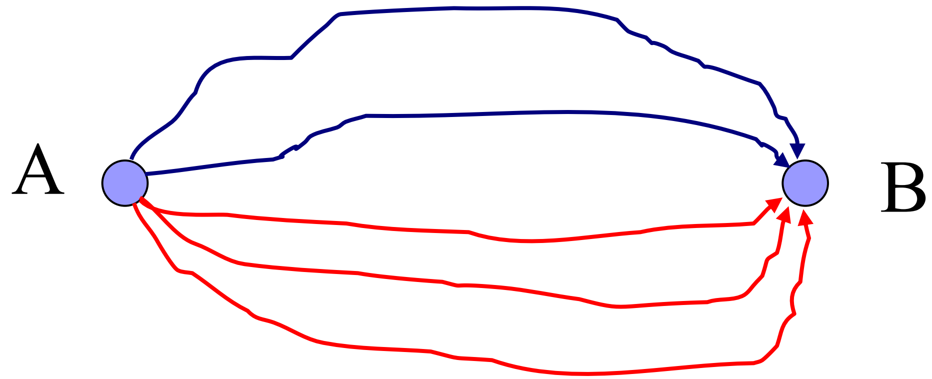



# 两种原理比较

分类

加法原理：

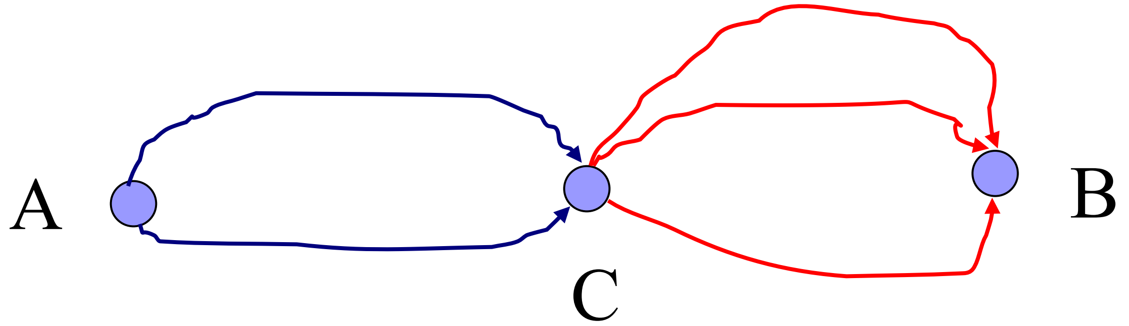
2＋3




分步

乘法原理：

2×3



# 加法原理

- **自然语言叙述:**
  - 设事件 $A$ 有 $p$ 种产生方式，事件$B$有 $q$ 种产生方式，则事件 $A$ 或 $B$ 之一有 $p+q$ 种产生方式。

$$|A|+|B|$$

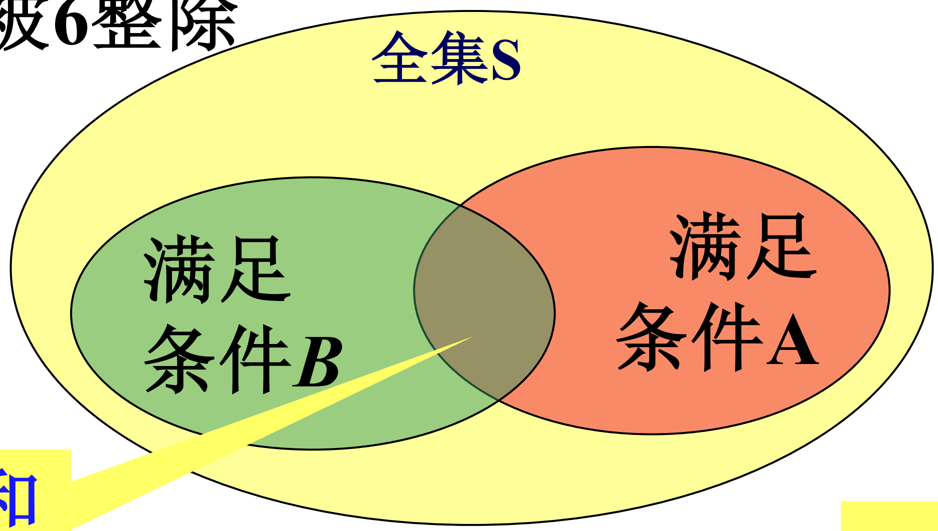
- **集合论描述：**
  - 设集合 $S$ 划分为 $S_1, S_2,\ldots, S_m$（即$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$，$S_i \cap S_j = \varnothing$，$i \neq j$）。则：

$$|S|=|S_1|+|S_2|+\ldots+|S_m|$$

- 注意（1）集合的一个划分是指：该集合由一些互不相交的子集并集构成。（2）若这些子集存在重叠，则需要其他原理计数。

# 非独立集合：容斥原理（第6章）

条件$A$: 能被5整除
条件$B$: 能被6整除




容斥

$A\cap$B:能被5和6整除的数

S={1, 2,…, 600}

$|A\cup B|\neq|A|+|B|$

$|\overline{A\cup B}|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$

# 乘法原理

- **自然语言叙述:**
  - 设事件 $A$ 有 $p$ 种产生方式，事件 $B$ 有 $q$ 种产生方式，则事件$A$与$B$一共有$p\times q$种产生方式。

$$|A|\times|B|$$

- **集合论描述:**
  - 设 $S$是 $P$ 和 $Q$ 的笛卡尔积（即$S=P\times Q$），则

$$|S|=|P|\times|Q|$$

# 举例：班干部推选

例：假设计算机学院某小班有男生 **25**名，女生 **5**名。

- 问题一：如果选取 **1**名男生担任班长，**1**名女生担任团支书，一共有多少种组合?

  答案：$25 \times 5=125$

- 问题二：问题一中不同时选中双胞胎兄妹男同学*A*和女同学*B*，一共有多少种组合？

# 举例：班干部推选

例：假设计算机学院某小班有男生 25名，女生 5名。

- 问题二：问题一中不同时选中双胞胎兄妹男同学*A*和女同学*B*，一共有多少种组合？
  - 加法原理
    - 类别1：选 *A*当班长，女生选择有4种。
    - 类别2：不选 *A* 当班长，男生选择24种，女生选择 5种。$24\times5=120$

  答案：$4+24\times5=124$

  更简便的方法

- 减法原理
  - 不满足情况1种，$125-1=124$。

# 减法原理 Subtraction Principle

- 减法原理

  令集合$A \subseteq U$, $\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$是 $A$在 $U$中的补集。

那么，$|A| = |U| - |\overline{A}|$.

- 注意：
  - 集合 $U$ 通常是包含讨论中所有对象的某个自然集合
  - 只有当计算 $U$ 与 $\overline{A}$ 的元素个数更容易时，使用减法原理才会有效。

例：计算机密码是由取自于数字 0, 1, …, 9的数字和取自小写字母 $a, b, \ldots, z$ 的 26个英文字母组成的长度为 6的字符串。问：有多少个有重复字符的计算机密码？

# 除法原理 Division Principle

例: 30个学生分成 5 组，每个组学生数?

- 除法原理：令 $S$ 是一个有限集合，把 $S$ 划分成 $k$ 个部分，使得每个部分包含的元素数目相同，设为$n$，那么，

$$k = \frac{|S|}{n}$$

# 应用例子3:

- 例. 下面代码执行后$k$的值?

$k$=0

for $i_1$=1 to $n_1$

  $k$ :=$k$+1

for $i_2$=1 to $n_2$

  $k$ :=$k$+1

  ⋮

for $i_m$=1 to $n_m$

  $k$ :=$k$+1

解： $k$的初值为0。第$i$个循环被执行$n_i$次，循环分别进行，运用加法原理，即得到

$$k=n_1+n_2+\ldots+n_m$$

**如果是嵌套循环呢?**

# 应用例子4:

- 例. 有多少个不同的7位二进制串？

- 例. 一个实验室有32台微机，每台微机有24个端口。这个实验室有多少个不同的单机端口？

# 应用例子5:

例. 确定数$3^4\times5^2\times11^7\times 13^8$的正整数因子的个数。

要点：它的每个因子具有形式

$$3^i\times 5^j\times11^k\times 13^l,$$

其中，$0\le i\le 4, 0\le j\le 2, 0\le k\le7, 0\le l\le8.$

由乘法原理得，因子总数为 $5\times3\times8\times9.$

# 应用例子6：

例：有6个桔子和9个苹果，要求篮子中至少有一个水果，问可以装配成多少种不同的水果篮？

解法 (1) 先设包括空的情形，那么，

- 选择桔子方法有7种（0, 1, 2, 3, 4, 5, 6个），
- 选择苹果方法有10种，

由乘法原理知，共有70种，

由减法原理，除去空的情况有69种。

# 应用例子6：

例：有6个桔子和9个苹果，要求篮子中至少有一个水果，问可以装配成多少种不同的水果篮？

解法 (2)考查划分为两个部分$S_1$和$S_2$，其中

- $S_1$表示没有桔子的组成方式，
- $S_2$表示至少有1个桔子的组成方式，

那么 $|S_1| = 9$, 而 $|S_2| = 6\times 10 = 60$，

由加法原理知，共有69种。

注：这里认为桔子之间没有区别，若对桔子间编号，计数方式复杂得多。

# 小练习

例. 在1000和9999之间有多少具有不同数字的奇数?

解：满足条件的数字是 4个数字的有序排列，其中

- 个位数只能是奇数，即属于{1, 3, 5, 7, 9},
- 千位数不能为0,
- 十位数和百位数可是任一个数字,

先排个位数，再排千位数，最后排十、百位数：

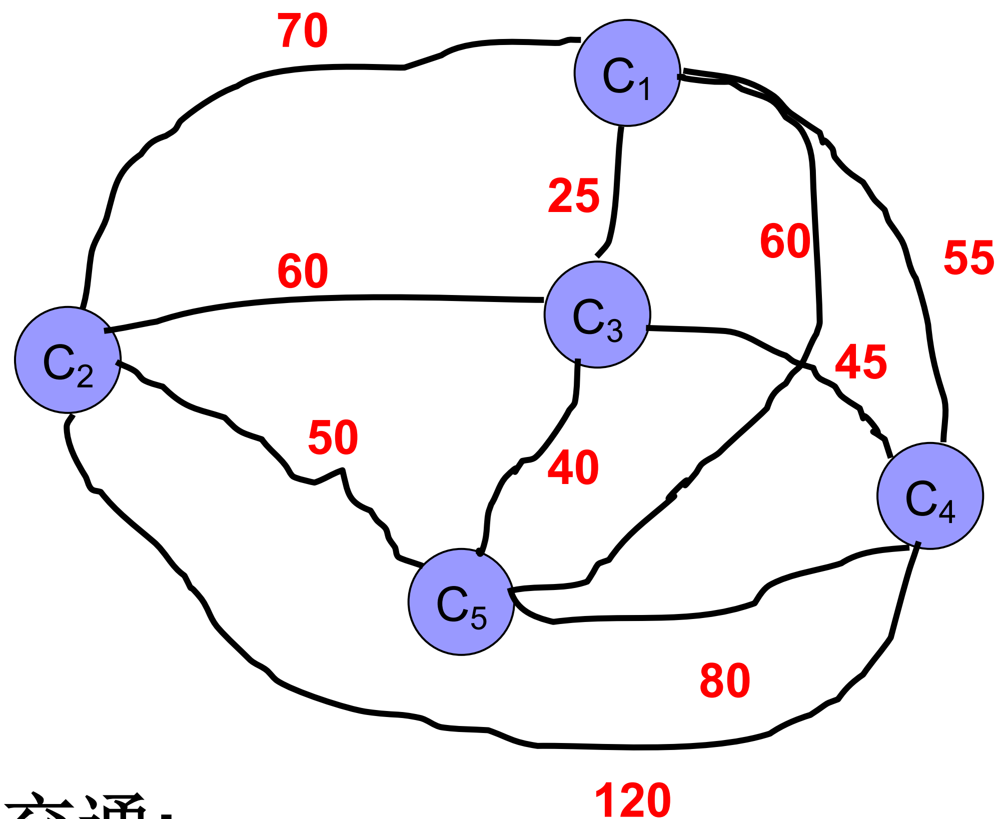
个位数：5 种选择；千位数：8 种选择

十位数：8 种选择；百位数：7 种选择

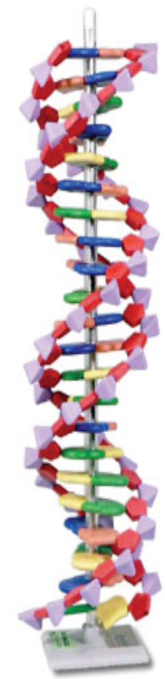
由乘法原理，$5\times 8\times 8\times 7=2240$

# 排列计数的广泛应用

经验：集合重复计算问题，对有约束条件的位置计数




交通:
多少可能不同的巡回路径?



生物:
多少种DNA链?

# 计数模型

- 投球入盒问题
- 选取问题
- 不定方式非负整数求解
- 路径问题
- 整数拆分问题
- …

# 第2章 排列与组合

2.1 四个基本的计数原理

2.2 集合的排列

2.3 集合的组合（子集）

2.4 多重集合的排列

2.5 多重集合的组合

# 几个问题

- 数字1, 3, 8放入 5个不同盒子，多少种方法?
- 数字1, 3, 8（无限重复）可以构造出多少个五位数?
- 数字1, 1, 1, 3, 8可构造出多少个不同的5位数？
- 将数字1，2，…，15
  - 放入4×4的方阵中，共有多少种摆放方法？
  - 放入6×6的方阵中，共有多少种摆放方法?
- 如何理解？

$$P(n, r)=n\times P(n-1, r-1)$$

$$P(n, r)=P(n-1, r) + rP(n-1, r-1)$$

$$C(n, r)C(r, k) = C(n, k)C(n-k, r-k)$$

# 例子：排列与组合

- 编号为 1、2、3、4的四个乒乓球，取出3个。
  - 如果考虑顺序关系，

    则称之为排列数 $P(4, 3) = 4\times3\times2 = 24$

  - 如果不考虑顺序关系，

    则称之为组合数 $\binom{4}{3}$=4!/3!=4

(无重复排列、无重复组合）

# 区分两种不同的计数类型

- 对元素的有序摆放数或选择数的计数。
  - 没有重复的元素
  - 有重复的元素（无限重复或有限重复）
- 对元素的无序摆放数或选择数的计数。
  - 没有重复的元素
  - 有重复的元素（无限重复或有限重复）
- 定义：
  - 与顺序有关的摆放或选择称 排列(**Permutation**)。
  - 与顺序无关的摆放或选择称 组合(**Combination**)。

# 两种排列方式

- 线性排列

- 循环排列

# 集合的线性排列

- 从 $n$个不同元素中取出 $r$ 个元素有序摆放，称为 $n$元素集合的 $r$ 排列。
  - 用$P(n, r)$表示 $n$元素集合的全部$r$ 排列数。
  - 约定当 $r > n$时，$P(n, r) = 0$。

例：集合 $S=\{ a, b, c \}$的 2 排列包括：

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb$$

- 集合 $S$ 的一个排列是某种顺序列出 $S$ 的所有元素。（也称为全排列）

例：集合 $S=\{ a, b, c \}$的排列包括：

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

# 集合的线性排列

**定理2.2.1**：对于整数 $n$ 和 $r$，$r \le n$, 有

$$P(n, r) = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

其中，定义 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$, 约定$0!=1$

- 排列 $P(n, n) = n!$

# 集合的线性排列

定理2.2.1：对于整数 $n$ 和 $r$，$r \le n$，有

$$P(n, r) = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

其中，定义 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$，约定$0!=1$

从 $n$元集中选择第 1个元素：$n$ 种方式

选择第 2个元素：$n-1$ 种方式

… … 选择第 $k$ 个元素：$n-k+1$种方式

… … 选择第 $r$ 个元素：$n-r+1$种方式

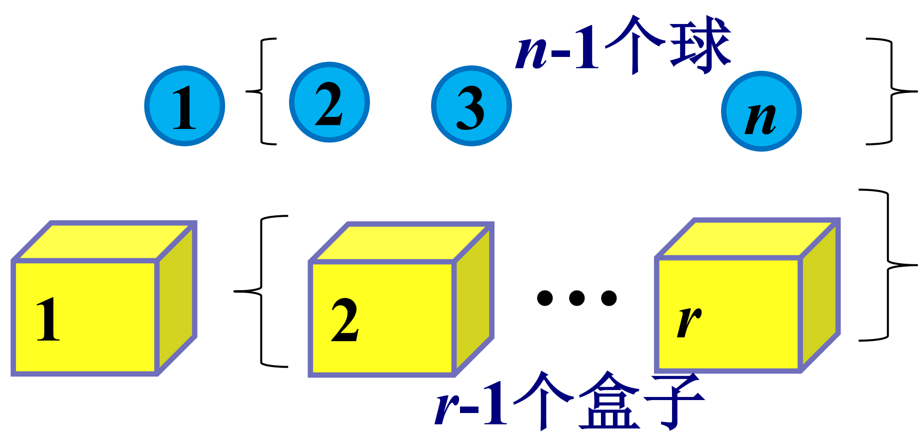
由乘法原理得，$n$元集的 $r$ 排列数为

$$P(n, r) = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)$$

# 排列$P(n, r)$的递推关系

$$P(n, r) = n \times P(n-1, r-1)$$

- 分步递推
  1. 选择1号盒子，放入一个乒乓球
     - $n$种选择
  2. 从$n$-1个球中选出$r$-1个放入$r$-1个盒子排列
     - $P(n-1, r-1)$

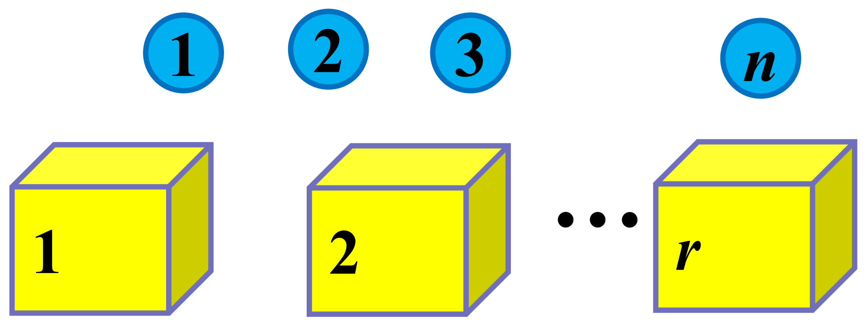



投球入盒：一个盒子装一个球

# 排列$P(n, r)$的递推关系

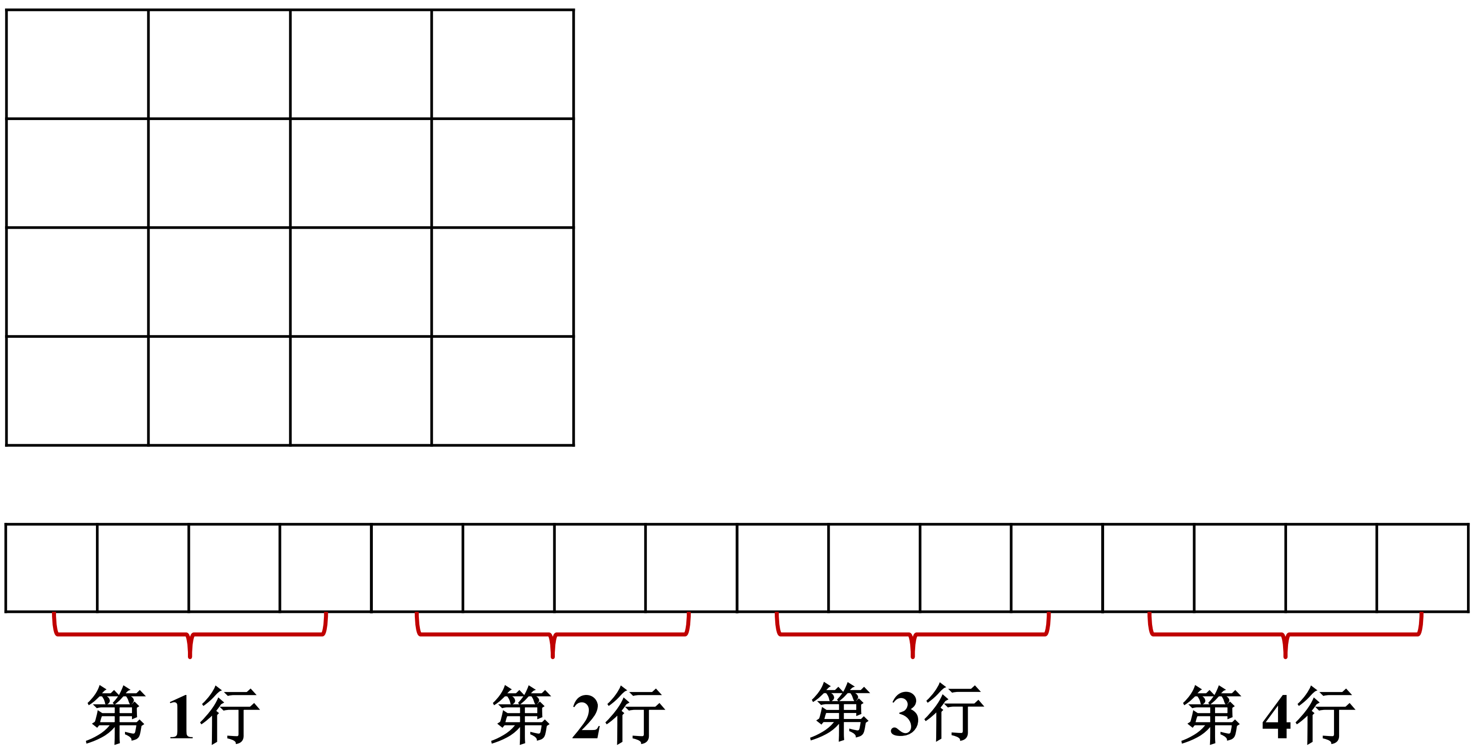
$$P(n, r)=P(n-1, r) + rP(n-1,r-1)$$

- 分类递推
  - 不选第一个球
    - $P(n-1, r)$种选择
  - 选择第一个球
    - $rP(n-1, r-1)$




投球入盒：一个盒子装一个球

例：将数字1, 2, …, 15 放入一个 4×4 的方阵中，问共有多少种摆放方法？若放入 6×6的方阵中，共有多少种摆放方法？



例：将数字1, 2, …, 15 放入一个 4×4 的方阵中，问共有多少种摆放方法？若放入 6×6的方阵中，共有多少种摆放方法？

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 15 | 14 | 5 |
| 4 | 7 | 2 | 13 |
| 0 | 8 | 1 | 10 |
| 6 | 12 | 3 | 11 |

相当于 0, 1, 2, …, 15 的排列数：$P(16, 16) = 16\,!$

例：将数字1, 2, …, 15 放入一个 4×4 的方阵中，问共有多少种摆放方法？若放入 6×6的方阵中，共有多少种摆放方法？

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

例：将数字1, 2, …, 15 放入一个 4×4 的方阵中，问共有多少种摆放方法？若放入 6×6的方阵中，共有多少种摆放方法？

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | 1 | | | 5 |
| | 9 | | | | |
| | | 2 | | | 8 |
| 10 | 11 | 7 | 12 | 6 | 13 |
| 14 | 15 | 3 | | | 4 |

例：将数字1, 2, …, 15 放入一个 4×4 的方阵中，问共有多少种摆放方法？若放入 6×6的方阵中，共有多少种摆放方法？

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 8 |
| 10 | 11 | 7 | 12 | 6 | 13 |
| 14 | 15 | 3 | 0 | 0 | 4 |

依次摆放1, 2,…, 15号方块，相当于36个中选取15个的任意排列：$P(36, 15)$种摆放方法。

例：将字母表的26个字母排序使得元音字母 $a, e, i, o, u$ 中任意两个都不得相继出现，这种排序的方法总数是多少？

$z \quad w \quad d \quad f\,a\,g \quad v \quad j\,o\,k \quad l\,e\,m \quad q \quad p \quad n\,i\,r \quad s\,u\,t \quad h \quad c \quad x \quad y \quad b$

$z \quad w \quad d \quad f\,a\,g \quad v \quad j\,o\,k \quad l\,e\,m \quad q \quad p \quad n\,i\,r \quad s\,u\,t \quad h \quad c \quad x \quad y \quad b$

21个位置排列21个辅音：21！种

$\mid z \mid w \mid d \mid f \mid g \mid v \mid j \mid k \mid l \mid m \mid q \mid p \mid n \mid r \mid s \mid t \mid h \mid c \mid x \mid y \mid b \mid$

5个元音插入22处空位 ：$P(22, 5)$种

由乘法原理，排序的方法总数是 $21!\,P(22, 5)$

例：有多少个取自{1, 2, …, 9}的各位互异的7位数，使得 5 和 6 不以任何顺序相继出现？

解：分4种情况：

- $S_1$ 表示 5, 6 均不出现数字集：$P(7,7)$
- $S_2$表示 5 出现但 6 不出现数字集：$P(8,7)-P(7,7)$
- $S_3$表示 6 出现但 5 不出现数字集：$P(8,7) -P(7,7)$
- $S_4$表示 5, 6 均出现数字集：

$5\times P(7,5)$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | ≠6 | | | | | |

例：有多少个取自{1, 2, …, 9}的各位互异的7位数，使得 5 和 6 不以任何顺序相继出现？

解：分4种情况：

- $S_1$ 表示 5, 6 均不出现数字集： $P(7,7)$
- $S_2$表示 5 出现但 6 不出现数字集: $P(8,7)$-$P(7,7)$
- $S_3$表示 6 出现但 5 不出现数字集: $P(8,7)$ -$P(7,7)$
- $S_4$表示 5, 6 均出现数字集:

$$5\times P(7,5)+5\times P(7,5)$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\neq 6$ | 5 |

例：有多少个取自{1, 2, …, 9}的各位互异的7位数，使得 5 和 6 不以任何顺序相继出现？

解：分4种情况：

- $S_1$ 表示 5, 6 均不出现数字集： $P(7,7)$
- $S_2$表示 5 出现但 6 不出现数字集: $P(8,7)-P(7,7)$
- $S_3$表示 6 出现但 5 不出现数字集: $P(8,7)-P(7,7)$
- $S_4$表示 5, 6 均出现数字集:

$$5\times P(7,5)+5\times P(7,5)+5\times 4\times P(7,5)$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\neq 6$ | 5 | $\neq 6$ | | | | |

例：有多少个取自{1, 2, …, 9}的各位互异的7位数，使得 5 和 6 不以任何顺序相继出现？

解：分4种情况：

- $S_1$ 表示 5, 6 均不出现数字集：$P(7,7)$
- $S_2$表示 5 出现但 6 不出现数字集：$P(8,7)-P(7,7)$
- $S_3$表示 6 出现但 5 不出现数字集：$P(8,7) -P(7,7)$
- $S_4$表示 5, 6 均出现数字集：

$$5\times P(7,5)+ 5\times P(7,5) + 5\times 4\times P(7,5)$$

由加法原理得，总数为 $|S_1|+|S_2|+|S_3|+|S_4|$。

例：有多少个取自{1, 2, …, 9}的各位互异的7位数，使得 5 和 6 不以任何顺序相继出现？

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 6 | 5 | 2 | 4 | 8 |
| 3 | 1 | 5 | 6 | 2 | 4 | 8 |

解法 2：(减法原理）

设 $U$ 是互异7位数字全集，则 $|U| = P(9,7)$.

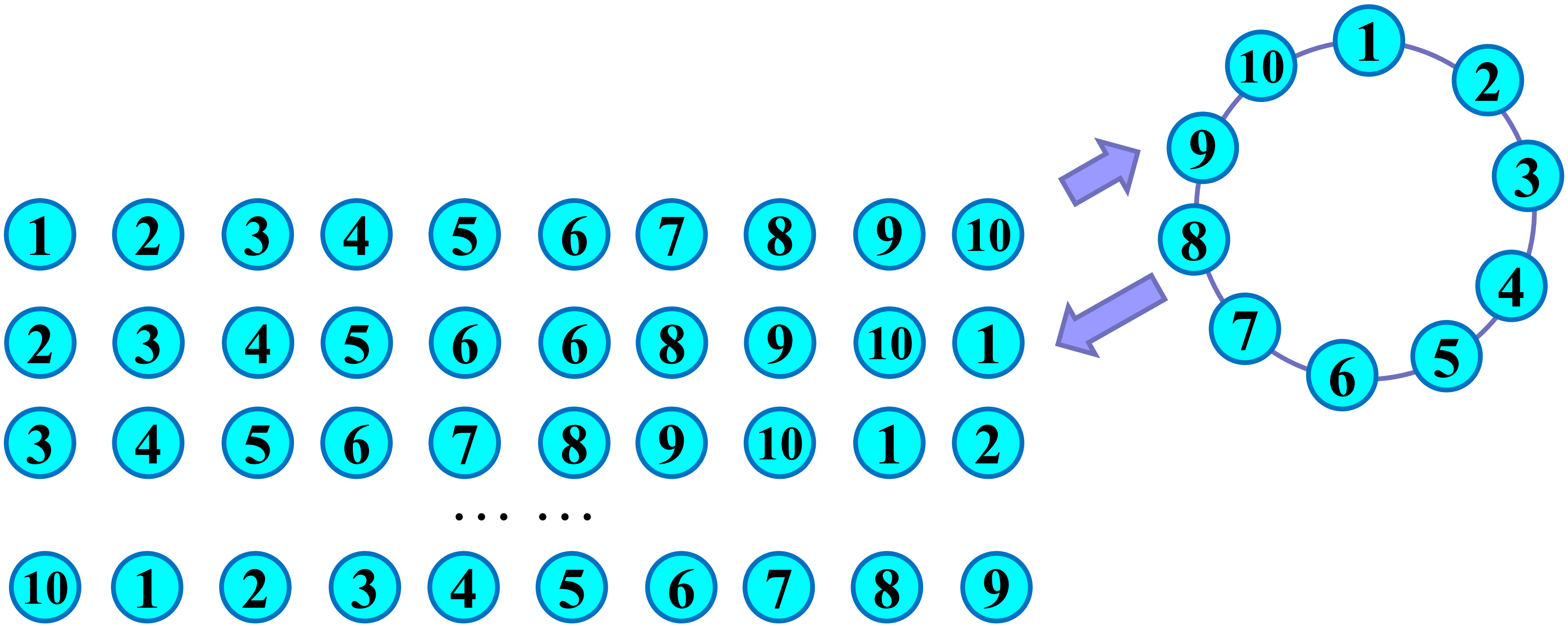
$U$ 可划分为两个子集 $S$ 和 $S$ 的补集 $\bar{S}$，其中 $S$ 表示 5和6连续出现的各位互异的7位数的集合。

那么， $|S|=2\times 6\times P(7, 5)$，则

所求7位数个数为 $|\bar{S}| =|U|-|S|=P(9,7)-2\times 6\times P(7, 5)$。

# 循环排列 *vs* 线性排列？

- 10个人排成一列，有多少种排法？




- 10个人围坐一个圆桌，问有多少种坐法？

# 循环排列 *vs* 线性排列？

例：1) 10个人排成一列，其中2个人不愿彼此相邻，有多少种排法？

2) 10个人围坐一个圆桌，其中2个人不愿彼此挨着就座，问有多少种坐法？

3) 10颗不同珠子做一个项链，其中 2颗珠子不能被串在一起，问有多少种项链构成样式？

解：1) 10个人排成一列：$P(10, 10)$，

其中，2个人彼此相邻的排法为 $2P(8, 8)P(9, 1)$。

因此，共有 $P(10, 10) - 2P(8, 8)P(9, 1)$种坐法。

# 循环排列 *vs* 线性排列？

例：2) 10个人围坐一个**圆桌**，其中**2个人不愿彼此挨着就座**，问有多少种坐法？

**假设1与10不愿彼此相邻**

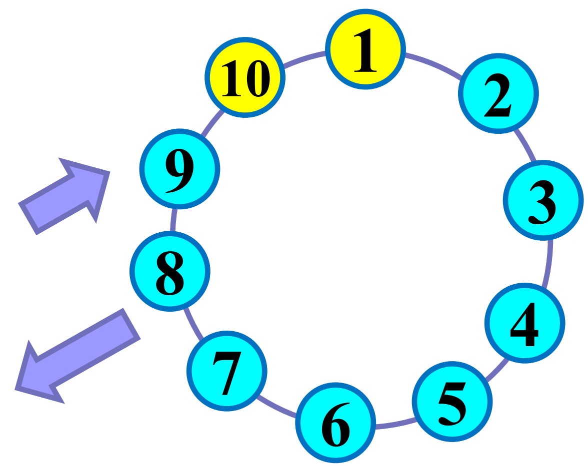
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

2 3 4 5 6 6 8 9 10 1

3 4 5 6 7 8 9 10 1 2

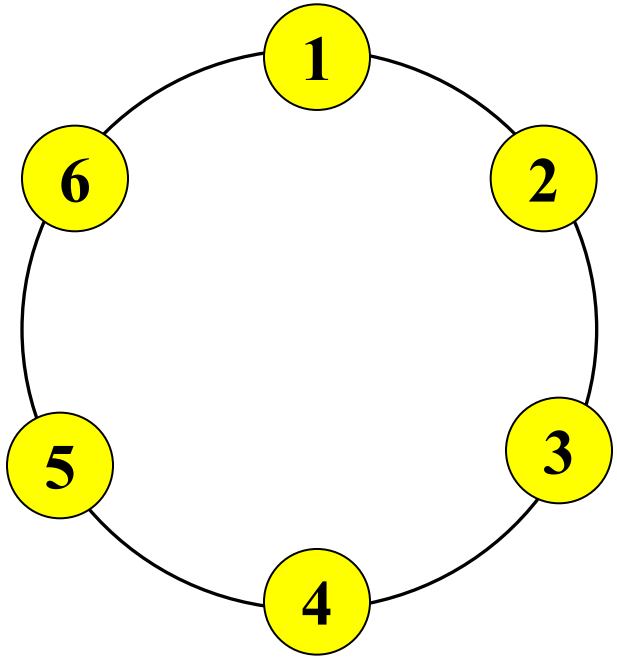
…… ……

10 1 2 3 4 5 6 7 8 9



# 循环排列

- 把元素排成首尾相连的一个圈，只考虑元素间的相对顺序的排列称循环排列。




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 |

# 循环排列计数

定理2.2.2 $n$个元素集合的循环 $r$ 排列个数为：

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}$$

特别地，$n$元素的循环排列个数为 $(n-1)!$

证明思路：利用除法原理，把线性 $r$ 排列的集合划分成若干部分。

- 思考：该问题应用除法原理的条件是什么？

# 应用

**例：10个人围坐一个圆桌，其中 2个人不愿彼此挨着就座，问有多少种坐法?**

**解法 1： 总的排列数减去不满足条件的排列数。**

**总的排列数为 $(10-1)!$**

**2个人彼此挨着就座: $2\times(9-1)!$**

**由减法原理得，所求坐法为 $9!-2\times8!=7\times8!$**

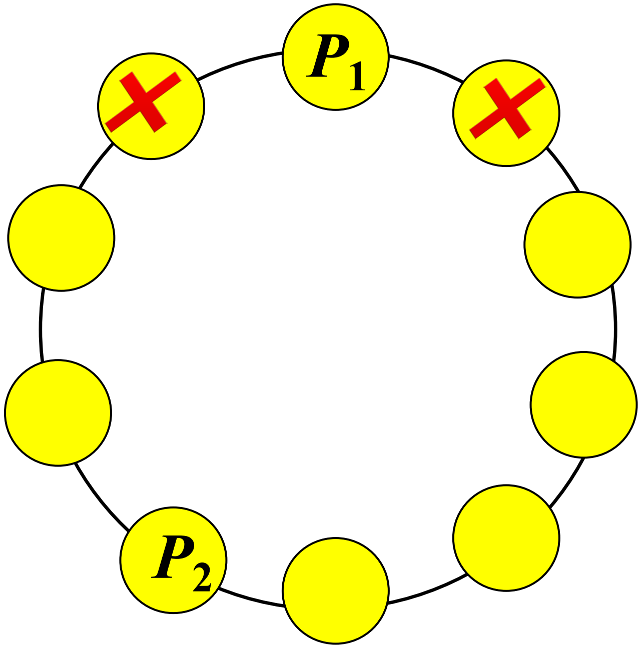
# 应用

**例：10个人围坐一个圆桌，其中 2个人不愿彼此挨着就座，问有多少种坐法?**

**解法2：设$P_1$，$P_2$不挨着坐，**

**固定其中一个$P_1$的位置，**

**那么，$P_2$可选位子是7个，**



# 应用

例：10个人围坐一个圆桌，其中 2个人不愿彼此挨着就座，问有多少种坐法？

解法2：设$P_1$，$P_2$不挨着坐，

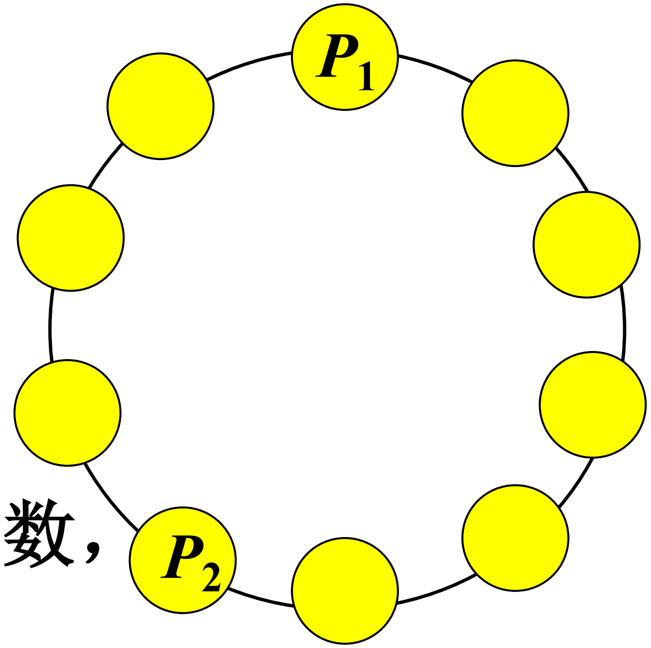
固定其中一个$P_1$的位置，

那么，$P_2$可选位子是7个，

余下8人可任意坐，坐法为 8！

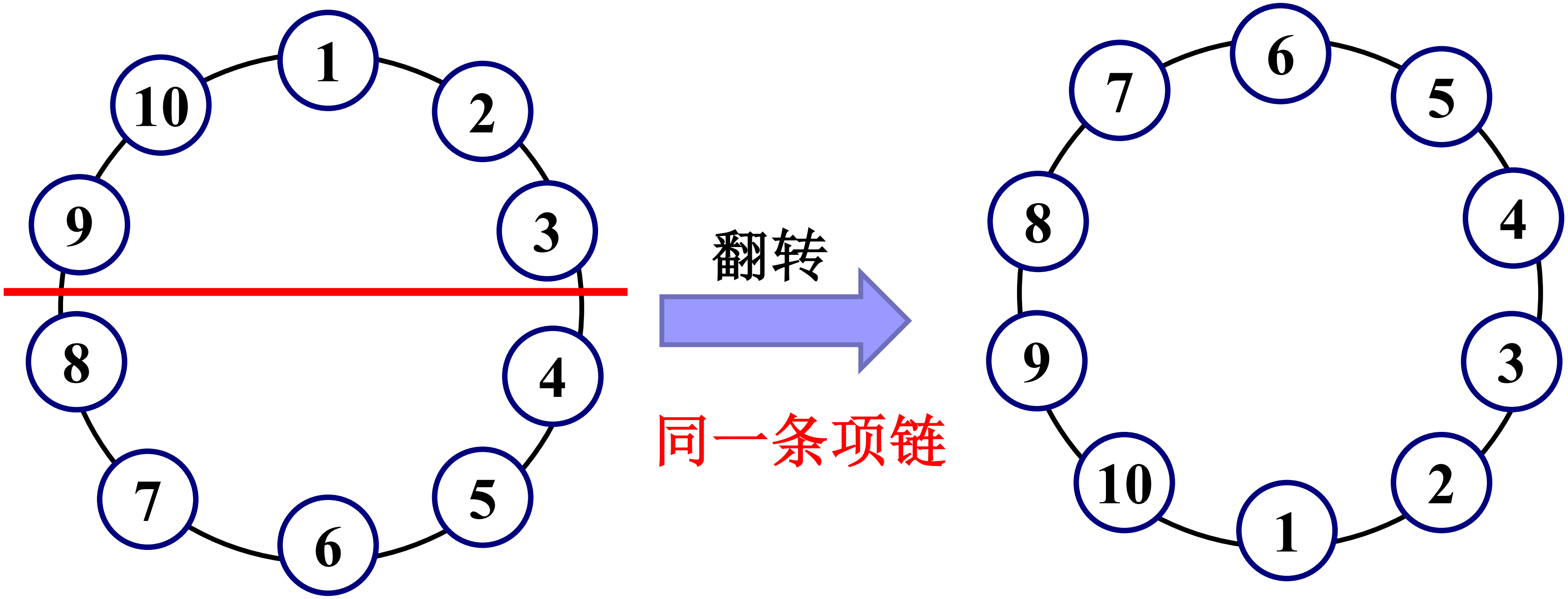
由乘法原理，按线性排列方法计数，

得坐法数为：7×8！



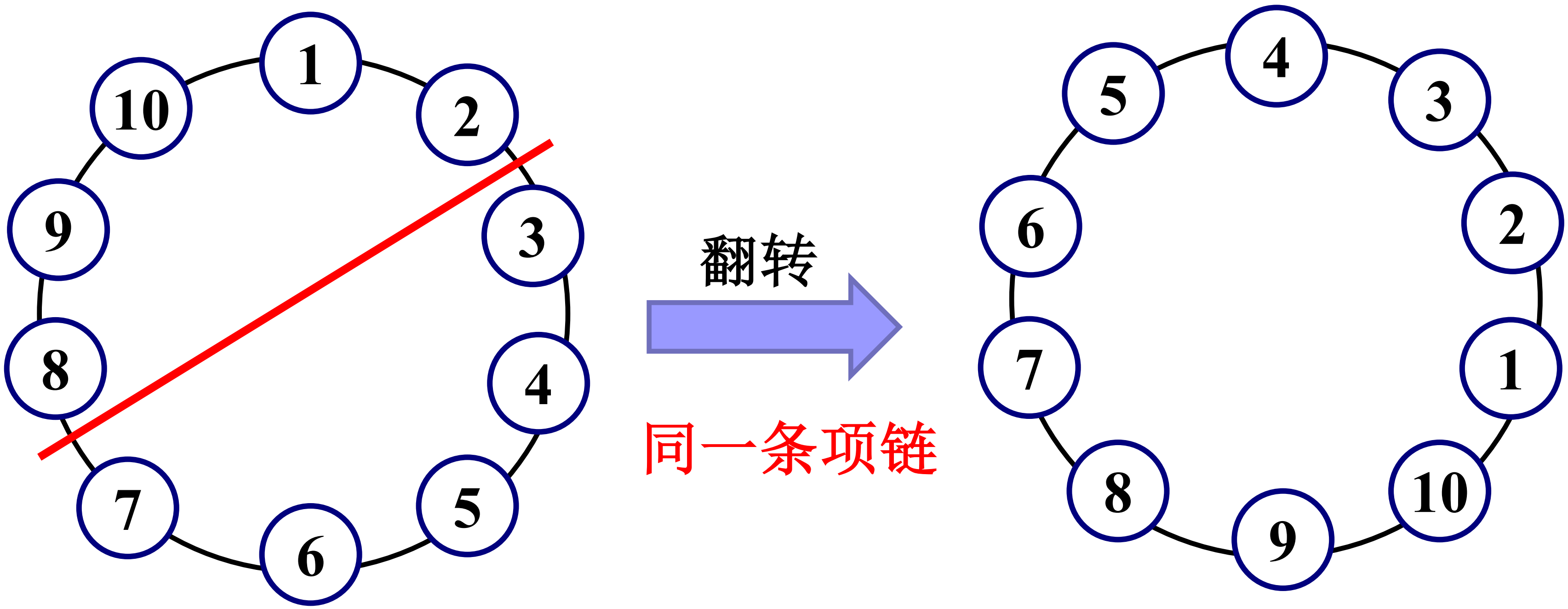
# 项链排列

例. 用50颗不同颜色的珠子串成一条项链，能够做成多少条不同的项链？



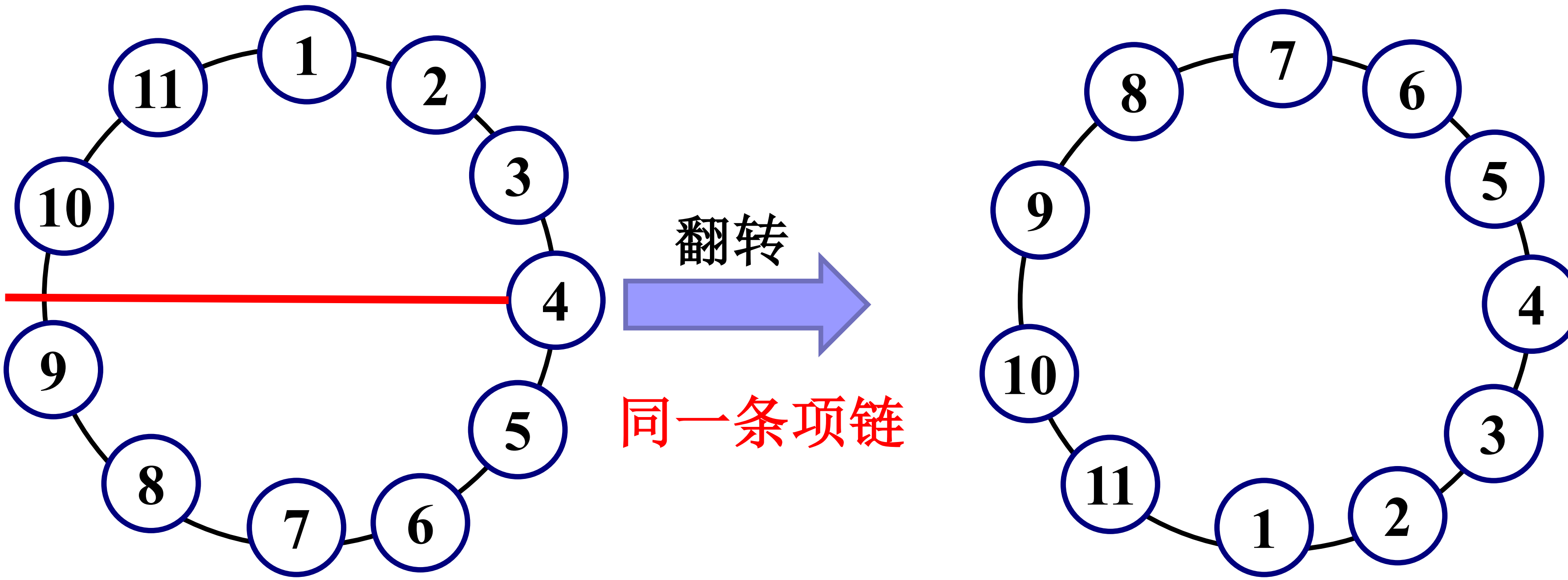
# 项链排列

例. 用50颗不同颜色的珠子串成一条项链，能够做成多少条不同的项链？



# 项链排列

例. 用50颗不同颜色的珠子串成一条项链，能够做成多少条不同的项链？




除旋转外，允许进行翻转，一共 $\frac{50!}{50\times 2}$ 条项链。

# 项链排列

- 从$n$颗不同颜色的珠子选 $r$ 颗串成项链的方法数为：

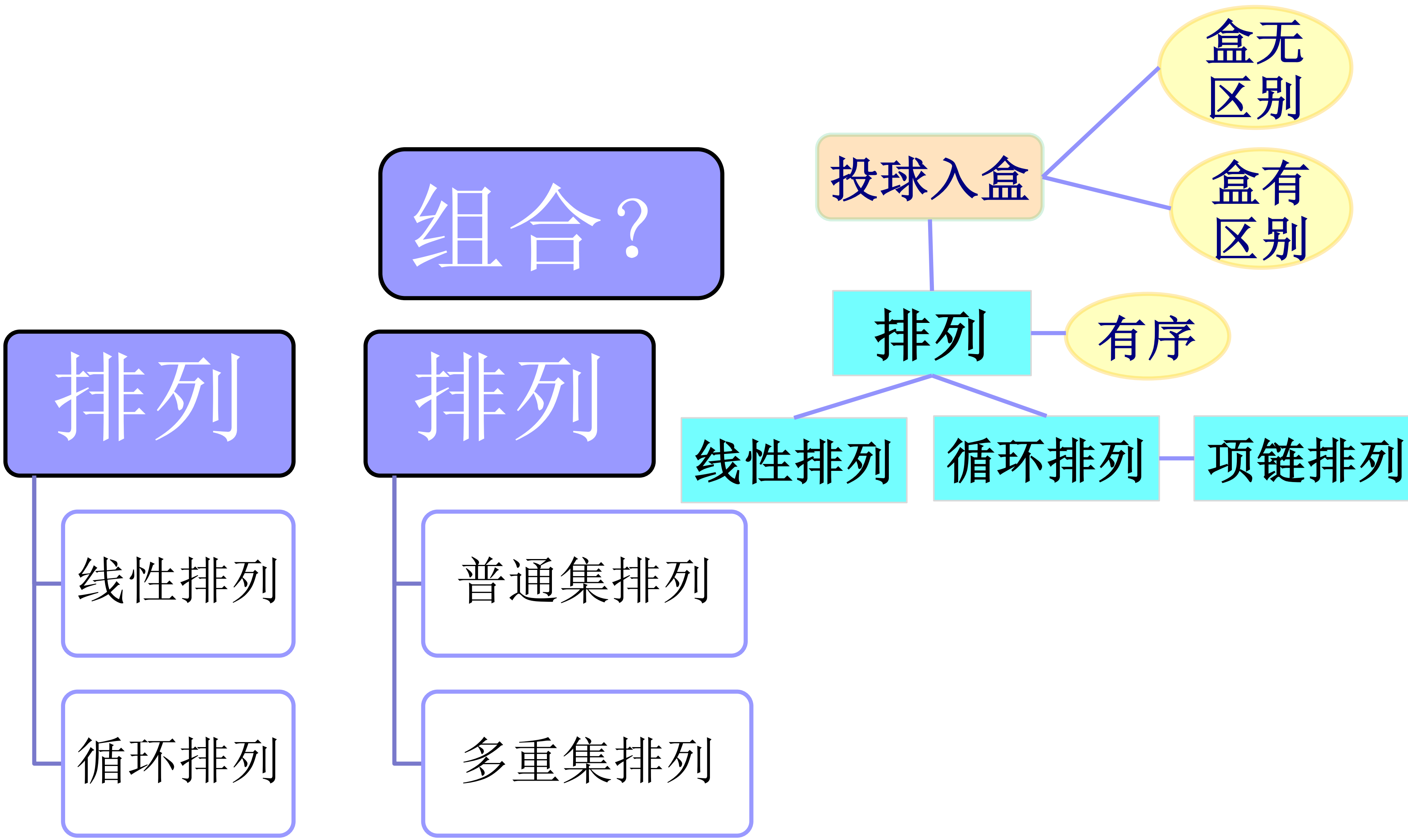
$$\frac{P(n,r)}{2r}=\frac{n!}{2r(n-r)!}$$

- $n$颗珠子的项链排列数为 $(n-1)!/2$
- 第**14**章Po´lya计数讨论更一般的对称情形下的不等价着色计数

# 排列与循环排列

| 集合{1, 2, … , $n$} | 计数 |
|---|---|
| 全排列 | $n!$ |
| $r$ 排列 | $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=n(n\text{-}1)\ldots.(n\text{-}r+1)$ |
| 循环$r$ 排列 | $\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}$ |
| 循环全排列 | $(n-1)!$ |
| 项链排列 | $\frac{(n-1)!}{2}$ |

# 多种排列类型



组合？
排列
线性排列
循环排列
排列
普通集排列
多重集排列
投球入盒
盒无区别
盒有区别
排列
有序
线性排列
循环排列
项链排列

# 第2章 排列与组合

2.1 四个基本的计数原理

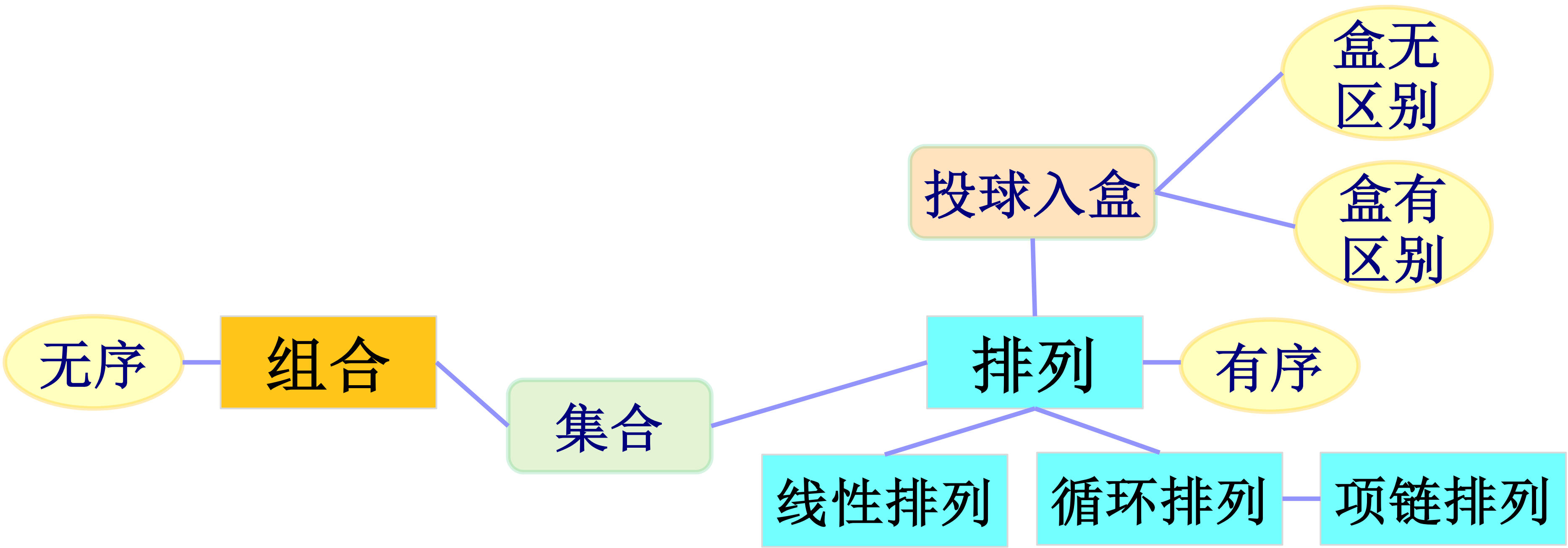
2.2 集合的排列

2.3 集合的组合（子集）

2.4 多重集合的排列

2.5 多重集合的组合

# 知识图谱



# 2.3 集合的组合

- 设 $S$是$n$元素集合。集合 $S$ 的一个组合通常表示为 $S$ 的元素的一个无序选择，选择的结果是 $S$ 的元素构成的子集。
- 设 $r$ 是非负整数，从$S$ 的 $n$个元素中选择 $r$ 个元素的一个无序选择，称为 $S$ 的一个 $r$ 组合，选择结果是 $S$的一个 $r$ 子集。
- 用$\binom{n}{r}$ 表示$n$元素集合的全部 $r$子集的数目。
- 约定：

$$\binom{n}{r}=1，\quad \binom{n}{r}=0 \text{（当}r>n\text{时）}$$

# 组合公式

**定理2.3.1**：对于整数 $n$ 和 $r$, $0 \le r \le n$, 有：

$$P(n, r) = r!\binom{n}{r}$$

即 $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

证明：对$P(n, r)$计数可分为两步：

(1) 从集合中无序选取 $r$ 个元素：$\binom{n}{r}$

(2) 对选取的元素排序计数：$r!$

由乘法原理得到：$P(n, r) = r!\binom{n}{r}$

# 组合公式

**定理2.3.1：对于整数 $n$ 和 $r$, $0 \le r \le n$, 有：**

$$P(n, r) = r!\binom{n}{r}$$

即 $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

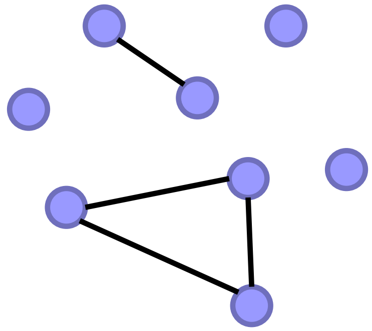
**推论2.3.1：对于整数$r$，$0 \le r \le n$，**

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

例：平面上25个点，假设不存在3点共线情况，问这些点可以组成多少条直线？多少个三角形？

解：(1) 每两个点确定一条直线: $\binom{25}{2}$

2）每三个点确定一个三角形: $\binom{25}{3}$



**例：如果每个词都包含 3、4 或 5 个元音，那么字母表中26个字母可以构造多少个 8 字母词?（每个词中的字母使用次数没有限制）**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $o$ | $b$ | $c$ | $d$ | $w$ | $x$ |

**例：如果每个词都包含 3、4 或 5 个元音，那么字母表中26个字母可以构造多少个 8 字母词？（每个词中的字母使用次数没有限制）**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $a$ | $a$ | $o$ | $b$ | $c$ | $i$ | $w$ | $x$ |

例：如果每个词都包含 3、4 或 5 个元音，那么字母表中26个字母可以构造多少个 8 字母词？（每个词中的字母使用次数没有限制）

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | *a* | *o* | *b* | *e* | *d* | *w* | *i* |

**例：如果每个词都包含 3、4 或 5 个元音，那么字母表中26个字母可以构造多少个 8 字母词?（每个词中的字母使用次数没有限制）**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $o$ | $b$ | $e$ | $d$ | $w$ | $i$ |

**解： 26个字母中一共5 个元音，21个辅音。**

**先选元音位置，再排元音，最后排辅音**

例：如果每个词都包含 3、4 或 5 个元音，那么字母表中26个字母可以构造多少个 8 字母词？（每个词中的字母使用次数没有限制）

解： 26个字母中一共5 个元音，21个辅音。

先选元音位置，再排元音，最后排辅音

(1) 只包含3个元音的 8字母词个数：$\binom{8}{3}5^3 21^5$

(2) 只包含4个元音的 8字母词个数：$\binom{8}{4}5^4 21^4$

(3) 只包含5个元音的 8字母词个数：$\binom{8}{5}5^5 21^3$

词的总数为：$\binom{8}{3}5^3 21^5+\binom{8}{4}5^4 21^4+\binom{8}{5}5^5 21^3$。

# 组合的重要性质：帕斯卡公式

定理2.3.3( 帕斯卡公式) 对于满足$1\le k \le n-1$的整数 $k$ 和 $n$, 有

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$n$-1元素集合的 $k$-1子集的数目

$n$元素集合的 $k$子集的数目

$n$-1元素集合的 $k$子集的数目

设集合 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$, $S$的$k$子集分为两类：

- ✓ 不包含1 的$k$子集 $\binom{n-1}{k}$个
- ✓ 包含1 的$k$子集 $\binom{n-1}{k-1}$个

（组合证明）

**定理2.3.3( 帕斯卡公式) 对于满足$1\leq k \leq n$-1的整数 $k$ 和 $n$, 有**

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

证明：设 $S$ 的 $k$子集的集合为$X$，那么$|X|=\binom{n}{k}$。

设 $x$是 $S$的一个元素，

令$A$是不含 $x$ 的 $k$ 子集的集合，

$B$是包含 $x$ 的 $k$ 子集的集合，

那么，$X=A\cup B$, 且$A\cap B=\varnothing$。

由加法原理，$|X|=|A|+|B|$。

计算得：$|A|=\binom{n-1}{k}$，$|B|=\binom{n-1}{k-1}$

因此，$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$。证毕。

# 组合的重要性质

**定理 2.3.4** 对于 $n\geq 0$，有

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

且等于$n$元素集合的子集数量。

证明：用两种方法证明等式两边计数了 $n$元集合 $S$ 的子集数。令 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$，

(1) $S$ 的每一个子集是相对于$r=0, 1, 2, \ldots, n$ 时的 $r$子集，而 $S$ 的$r$子集个数为$\binom{n}{r}$，由加法原理知，

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$为$S$ 的子集数量。

# 组合的重要性质

**定理 2.3.4** 对于 $n \geq 0$，有

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

且等于$n$元素集合的子集数量。

证明：用两种方法证明等式两边计数了 $n$元集合 $S$ 的子集数。令 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$，

(2) 把子集的选择分解为以下$n$ 项任务：

对于每个 $i\in S$，有两种选择：

放进子集，或不放入子集；

由乘法原理知，一共有 $2^n$ 种方法构造 $S$ 的子集。

综上，等式成立。

# 组合、排列与循环排列

| 集合$\{1, 2, \ldots, n\}$ | 计数 |
| --- | --- |
| $r$ 组合 | $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ |
| 全排列 | $n!$ |
| $r$ 排列 | $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\ldots.(n-r+1)$ |
| 循环$r$ 排列 | $\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}$ |
| 循环全排列 | $(n-1)!$ |
| 项链排列 | $\frac{(n-1)!}{2}$ |

# 小结

- 基本的计数原理
- 集合的线性、循环排列
- 集合的组合
- 注意：元素的重复计数问题
  - 一个经验：优先对有约束条件的位置计数。
- 应用：
  - **算得全：防止缺失或重复**
  - **列的准：能够准确排列或组合**