第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理
6.2 带重复的组合
6.3 错位排列
6.4 带有禁止位置的排列
6.5 另一个禁止位置问题

多重集的组合

- n个不同元素的集合的r子集的数目为$\binom{n}{r}$.
- 令S是多重集，包含k个不同的元素，每个元素都有无限重复次数，那么，S的r子集个数为$\binom{r+k-1}{r}$.
- 假设$n_i \geq r$ $(i=1,\ldots,k)$，则$T=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$的 r 组合数目等于$T'=\{r\cdot a_1, r\cdot a_2,\ldots, r\cdot a_k\}$的 r 子集数目，等于 $\binom{r+k-1}{r}$.

如果存在i, 使得$n_i < r$，怎么计算？

容斥原理在多重集组合的应用

例1: 确定多重集$T=\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$的10子集的个数.

每个10子集中的元素不会多于3个a，不会多于4个b，且不会多于5个c。

解：令多重集$T^*=\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c\}$的所有10子集的集合为$S$,

设：

A_1是S中包含多于3个a的10子集的集合,

A_2是S中包含多于4个b的10子集的集合,

A_3是S中包含多于5个c的10子集的集合,

那么，T的10-组合数等于$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|$

例1: 确定多重集$T=\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$的10子集的个数.

解(续)：应用容斥原理，计算：

$$|S| = \binom{10+3-1}{10} = 66$$

A_1中的每个子集中a至少出现4次,剩下6个元素可以是 T^* 的任何一个6组合，

因此，$|A_1| = \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = 28$

A_2中的每个子集中b 至少出现5次，剩下5个元素可以是T^*的任何一个5组合，

因此，$|A_2| = \binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$

A_3中的每个子集中c 至少出现6次，剩下4个元素可以是T^*的任何4组合，得 $|A_3| = \binom{4+3-1}{4} = 15$。

例1: 确定多重集$T=\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$的10子集的个数.

解(续)： $A_1\cap A_2$中的每个子集中 a 至少出现4次同时 b 至少出现5次，剩下1个元素可是T^*的任何1子集，得

$$|A_1\cap A_2| = \binom{1+3-1}{1} = 3.$$

$A_1\cap A_3$中的每个子集中 a 至少出现4次，同时 c 至少出现6次，得 $|A_1\cap A_3|=1$.

$A_2\cap A_3$中的每个子集中 b 至少出现5次同时 c 至少出现6次，得 $|A_2\cap A_3|=0$.

$A_1\cap A_2\cap A_3$中的每个子集中a 至少出现4次，b 至少出现5次，且c 至少出现6次，得 $|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$.

应用容斥原理:

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = 66-28-21-15+3+1+0-0=6.$$

多重集组合与方程整数解个数

令$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2,\ldots, \infty\cdot a_k\}$，则 S 的一个r组合具有形式 $\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2,\ldots, x_k\cdot a_k\}$，满足

$$x_1+x_2+\ldots+x_k = r\ ,$$

其中，x_i是非负整数，即$x_i \geq 0$, i=1, 2, …, k。

以上方程的任何一个解确定 S 的一个r组合，反之亦然，因此 S的 r组合个数等于以上方程解的个数。

多重集$T=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$的 r组合数等于方程

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=r,\quad 0\leq x_1\leq n_1,\ 0\leq x_2\leq n_2,\ \ldots,\ 0\leq x_k\leq n_k$$

的整数解的个数。

例2: 求满足$1\le x_1 \le 5$, $-2\le x_2 \le 4$, $0\le x_3 \le 5$, $3\le x_4 \le 9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解:作变量替换 $y_1=x_1-1$, $y_2=x_2+2$, $y_3=x_3$, $y_4=x_4-3$得到方程:

$$y_1+y_2+y_3+y_4=16 \qquad (*)$$

且关于x_i 的不等式成立当且仅当

$$0\le y_1 \le 4,\ 0 \le y_2 \le 6,\ 0\le y_3 \le 5,\ 0\le y_4 \le 6。\qquad (**)$$

因此满足题意的整数解个数等于当条件（**）满足时，方程（*）的整数解的个数。

令A_1, A_2, A_3, A_4分别表示方程（*）在$y_1 \ge 5$， $y_2 \ge 7$，$y_3 \ge 6$， $y_4 \ge 7$时的整数解的个数，则条件（**）满足时，方程（*）的整数解的个数为 $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4|$。

例2: 求满足$1\le x_1\le 5$, $-2\le x_2\le 4$, $0\le x_3\le 5$, $3\le x_4\le 9$的方程$x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解:（续）设S是方程(*)的非负整数解的集合，则$|S|$等于方程$y_1+y_2+y_3+y_4=16$ 的非负整数解的个数，得

$$|S|=\binom{16+4-1}{16}=\binom{19}{16}=969$$

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$
$y_1\ge 0$, $y_2\ge 0$,
$y_3\ge 0$, $y_4\ge 0$

例2: 求满足$1\le x_1 \le 5$, $-2\le x_2 \le 4$, $0\le x_3 \le 5$, $3\le x_4 \le 9$的方程$x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解:（续）设S是方程(*)的非负整数解的集合，则$|S|$等于方程$y_1+y_2+y_3+y_4=16$ 的非负整数解的个数，得

$$|S|=\binom{16+4-1}{16}=\binom{19}{16}=969$$

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$
$y_1 \ge 5$, $y_2 \ge 0$,
$y_3 \ge 0$, $y_4 \ge 0$

令 $z_1=y_1-5$, $z_2=y_2$, $z_3=y_3$, $z_4=y_4$,

那么, $|A_1|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=11$ 的非负整数解个数相等,

得$|A_1|=\binom{11+4-1}{11}=\binom{14}{11}=364$

例2: 求满足$1\le x_1\le 5$, $-2\le x_2\le 4$, $0\le x_3\le 5$, $3\le x_4\le 9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解:（续）设S是方程(*)的非负整数解的集合，则$|S|$等于方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=16$ 的非负整数解的个数，得

$$|S|=\binom{16+4-1}{16}=\binom{19}{16}=969$$

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$

$y_1\ge 0$, $y_2\ge 7$,

$y_3\ge 0$, $y_4\ge 0$

令 $z_1=y_1-5$, $z_2=y_2$, $z_3=y_3$, $z_4=y_4$,

那么, $|A_1|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=11$ 的非负整数解个数相等,

$$得|A_1|=\binom{11+4-1}{11}=\binom{14}{11}=364$$

令 $z_1=y_1$, $z_2=y_2-7$, $z_3=y_3$, $z_4=y_4$,

则$|A_2|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=9$ 的非负整数解个数相等，得

$$|A_2|=\binom{9+4-1}{9}=\binom{12}{9}=220$$

例2: 求满足$1\le x_1\le 5$, $-2\le x_2\le 4$, $0\le x_3\le 5$, $3\le x_4\le 9$的方程$x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$
$y_1\ge 0$, $y_2\ge 0$,
$y_3\ge 6$, $y_4\ge 0$

解:（续）

令 $z_1=y_1$, $z_2=y_2$, $z_3=y_3-6$, $z_4=y_4$, 那么, $|A_3|$与方程$z_1+z_2+z_3+z_4=10$ 的非负整数解个数相等，得

$$|A_3|=\binom{10+4-1}{10}=\binom{13}{10}=286$$

。

例2: 求满足$1\le x_1 \le 5$, $-2\le x_2 \le 4$, $0\le x_3 \le 5$, $3\le x_4 \le 9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$
$y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$,
$y_3 \ge 0$, $y_4 \ge 0$

解:（续）

令 $z_1=y_1$, $z_2=y_2$, $z_3=y_3-6$, $z_4=y_4$, 那么, $|A_3|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=10$ 的非负整数解个数相等，得

$$|A_3|=\binom{10+4-1}{10}=\binom{13}{10}=286$$

令 $z_1=y_1$, $z_2=y_2$, $z_3=y_3$, $z_4=y_4-7$,

则 $|A_4|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=9$ 的非负整数解个数相等，得

$$|A_4|=\binom{9+4-1}{9}=\binom{12}{9}=220$$

例2: 求满足$1\le x_1 \le 5$, $-2\le x_2 \le 4$, $0\le x_3 \le 5$, $3\le x_4 \le 9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解：（续）令 $z_1 = y_1 -5$, $z_2 = y_2-7$, $z_3 = y_3$, $z_4 = y_4$, 得 $|A_1\cap A_2|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4 = 4$ 的非负整数解个数相等，得

$y_1 + y_2+y_3+y_4=16$
$y_1 \ge 5, y_2 \ge 7$,
$y_3 \ge 0, y_4 \ge 0$

$$|A_1\cap A_2|= \binom{4+4-1}{4}= \binom{7}{4}=35。$$

同理可得，

$$|A_1\cap A_3|=\binom{5+4-1}{5}= \binom{8}{5}=56,\ |A_1\cap A_4|=\binom{4+4-1}{4}= \binom{7}{4}=35$$

$$|A_2\cap A_3|= \binom{3+4-1}{3}= \binom{6}{3}=20,\ |A_2\cap A_4|= \binom{2+4-1}{2}= \binom{5}{2}=10$$

$$|A_3\cap A_4|= \binom{3+4-1}{3}= \binom{6}{3}=20。$$

又集合A_1, A_2, A_3, A_4中任意三个的交都是空集，包含元素个数为0。应用容斥原理可得结论（略）。

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理
6.2 带重复的组合
6.3 错位排列
6.4 带有禁止位置的排列
6.5 另一个禁止位置问题

6.3 错位排列(Derangement)-概念

例：1. 四位厨师聚餐时各做了一道拿手菜。现在要求每人去品尝一道菜，但不能尝自己做的那道菜。问共有几种不同的尝法？

2. 假设同学们做课堂测试，每位同学选择一位同学给其评分（不能给自己评分），问有多少种不同的选择方法？

定义1：设 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$, 它的排列用$i_1 i_2 \ldots i_n$表示。错位排列是使得 $i_1 \neq 1, i_2 \neq 2, \ldots, i_n \neq n$ 的排列。
用D_n表示错位排列个数。

错位排列-概念与示例

定义1：设 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$，它的排列用 $i_1\ i_2 \ldots\ i_n$ 表示。错位排列是使得 $i_1 \neq 1, i_2 \neq 2, \ldots, i_n \neq n$ 的排列。用 D_n 表示错位排列个数。

n=1时，X有1个排列： 1 $D_1=0$

n=2时，X有2个排列：12，$\boxed{21}$ $D_2=1$

n=3时，X有6个有排列：123,132, 213, $\boxed{231}$, $\boxed{312}$, 321 $D3=2$

n=4时，X共有 24 个排列；错位排列为：

2143， 3142， 4123， 2341， 3412，

4312， 2413， 3421， 4321

$D_4 = 9$

用容斥原理求解D_n

设 S是全部排列$i_1\ i_2\ldots\ i_n$的集合，而 A_j是 $i_j=j$ 的排列集合，

则 $D_n=|\bar{A}_1\cap\cdots\cap\bar{A}_m|$

j 在第 j 个位置上

- 对于任意 $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$，A_i是第 i个位置为 i 的排列的集合，因此 $|A_i|=(n-1)!$
- 对于任意 $i,j\in\{1, 2, \ldots, n\}$，且 $i\neq j$，$A_i\cap A_j$是第 i个位置为 i，第 j个位置为 j的排列的集合，因此

$$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$$

- 对于任意两两不同的 $i_1,\ldots,i_k\in\{1, 2, \ldots, n\}$，

$A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_1}$是第 i_j个位置为 j (j=1,…, k) 的排列的集合，因此，$|A_{i1}\cap\ldots\cap A_{ik}|=(n-k)!$，$1\leq k\leq n$

用容斥原理求解D_n

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

定理6.3.1 对$n \geq 1$，

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

计算可得：$D_5 = 44$, $D_6 = 265$, $D_7 = 1854$, $D_8 = 14833$

例1：在一次聚会上，有n位男士和n位女士。

(1)这n位女士能够有多少种方法选择男舞伴开始跳第一支舞？ $n!$

(2) 如果每人必须要换舞伴，那么第二支舞又有多少种选择方法？ D_n

例：设上述聚会中,男士和女士在跳舞前存放他/她们的帽子.

(1) 在聚会结束时随机地返回他/她们这些帽子，有多少种方法？ $(2n)!$

(2) 如果每位男士得到一顶男帽，每位女士得到一顶女帽，有多少种方法？ $n!n!$

(3) 如果每位男士得到一顶男帽，每位女士得到一顶女帽，但又都不是他/她们自己曾经存放的那顶帽子，有多少种方法？ $D_n D_n$

例2：在一次聚会上，7位绅士存放他们的帽子。有多少种方法使得他们的帽子返还时满足

(1) 没有绅士收到他自己的帽子?

(2) 至少一位绅士收到他自己的帽子?

(3) 至少两位绅士收到他们自己的帽子?

解: (1) D_7

(2) $7! - D_7$

(3) $7! - D_7 - 7D_6$

例3：确定{1, 2,…, 8}的排列中恰有四个整数在它们的自然位置上的排列数。

解：任选四个整数在自然位置上：$\binom{8}{4}$

剩下四个整数不在其自然位置上：D_4

因此，恰有四个整数在它们的自然位置上的排列数为

$$\binom{8}{4}D_4$$

错位排列的递推关系

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

D_n 满足如下递推关系:

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}), \quad (n=3,4,\ldots)$$

初始值 $D_2=1$; $D_1=0$

- 设d_n为第一个位置为 2的错位排列个数

$i_j \neq j,\ j=1,\ldots,n$

$i_1 i_2 \ldots i_n$

错位排列

$D_n=(n-1)d_n$

$i_1 \neq 1$

$2 i_2 \ldots i_n$ d_n

$3 i_2 \ldots i_n$ d_n

…

$n i_2 \ldots i_n$ d_n

错位排列

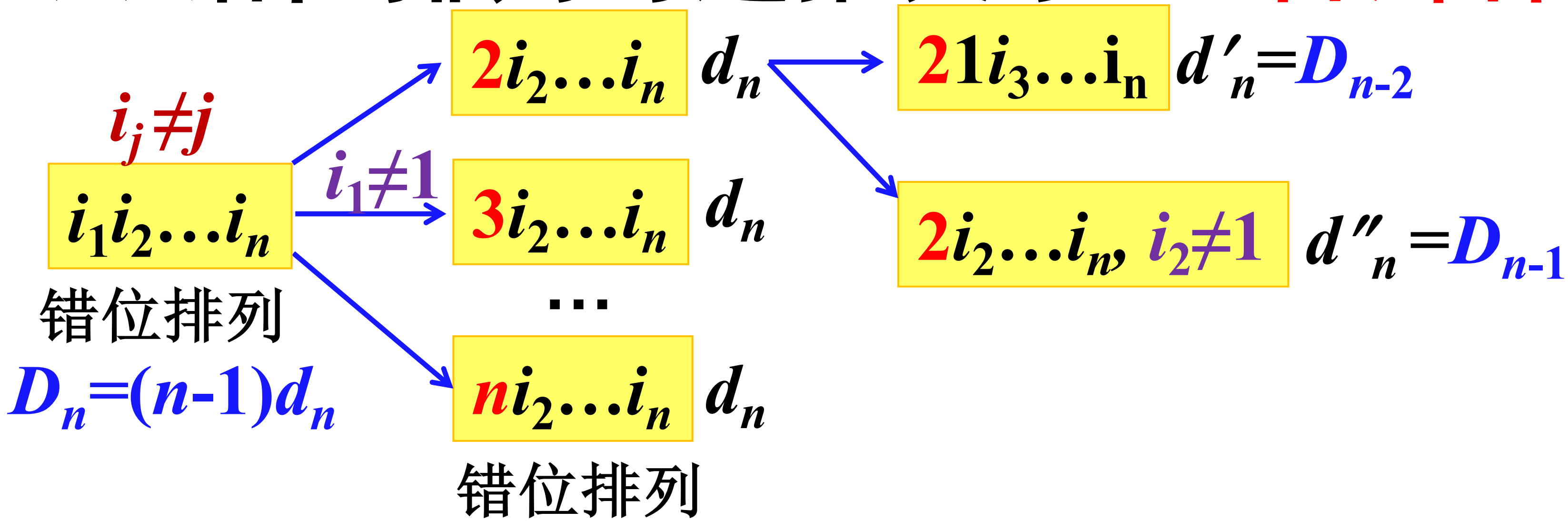
$2 1 i_3 \ldots i_n$ $d'_n = D_{n-2}$

$2 i_2 \ldots i_n,\ i_2 \neq 1$ $d''_n = D_{n-1}$

相当于{1, 3, 4, …, n}的错位排列

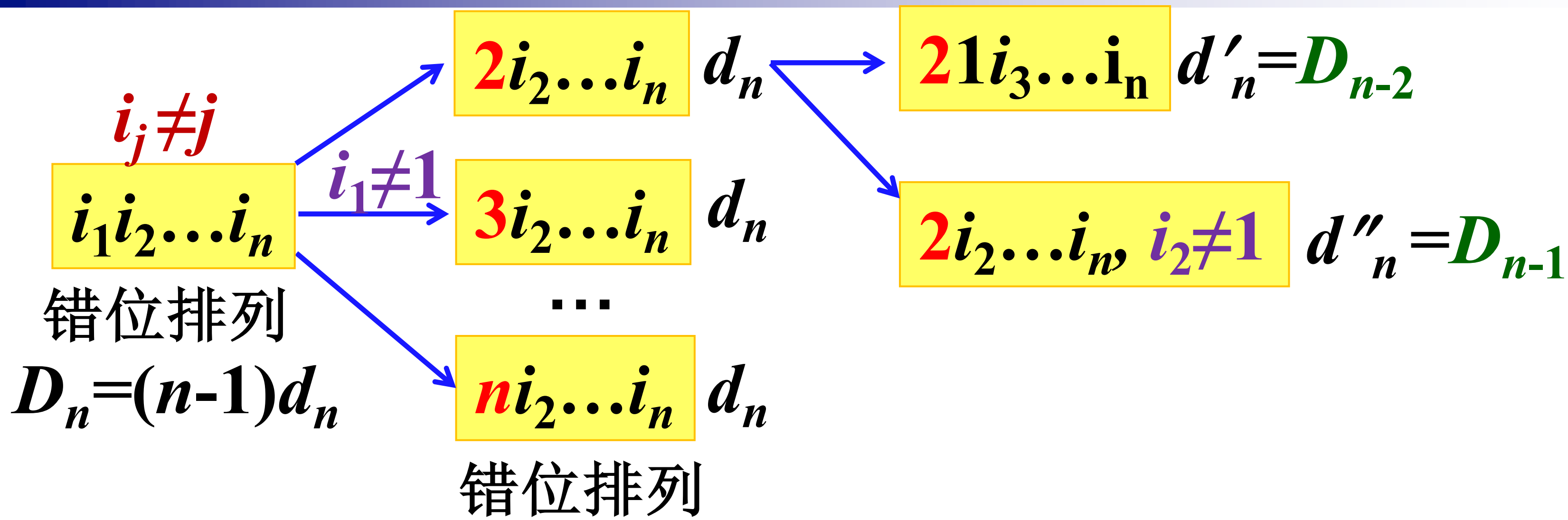
$$D_n = (n-1)d_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$$

(3) 错位排列的递推关系：组合解释



- D_n是集合$\{1, 2, \ldots, n\}$的错位排列数。
  - 第1位可以是2,…,n的任一个，划分为$n-1$个部分：$i_1 i_2 \ldots i_n$，$i_1 \in \{2,\ldots,n\}$ $i_2 \neq 2, \ldots, i_n \neq n$
- 设 d_n是2在第1位的错位排列数，

则$D_n=(n-1)d_n$



- 排列$2i_2,\ldots,i_n$可进一步划分两种情况：

$$2\ 1\ i_3 \ldots i_n, \qquad i_3 \neq 3, \ldots, i_n \neq n,$$

$$2\ i_2\ i_3 \ldots i_n, \qquad i_2 \neq 1, i_3 \neq 3, \ldots, i_n \neq n$$

设d'_n是第1种排列数,与集合$\{3, 4, \ldots, n\}$ 错位排列相等，即

$$d'_n = D_{n-2};$$

设d''_n是第2种排列数,与集合$\{1, 3, 4, \ldots, n\}$错位排列相等，即

$$d''_n = D_{n-1};$$

(3) 错位排列的其他递推关系

D_n 满足如下递推关系:

- $D_n = (n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$, $(n=3,4,\ldots)$
  初始值 $D_2=1$; $D_1=0$
- $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$

利用递推关系推导:

$$
\begin{aligned}
D_n-nD_{n-1} &= -[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}] \\
&= (-1)^2[D_{n-2}-(n-2)D_{n-3}] \\
&\cdots \\
&= (-1)^{n-2}(D_2-2D_1)
\end{aligned}
$$

由 $D_1=0$，$D_2=1$进一步得到：$D_n = nD_{n-1}+(-1)^n$

用递推关系计算错位排列

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

- $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_3 = 2$, $D_4 = 9$,

  $D_5 = 5 \times 9 + (-1)^5 = 44$,

  $D_6 = 6 \times 44 + (-1)^6 = 265$

  $D_7 = 7 \times 265 + (-1)^7 = 1854$

  $D_8 = 8 \times 1854 + (-1)^8 = 14833$

  …… ……

- 证明：D_n是偶数当且仅当 n是奇数?

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理
6.2 带重复的组合
6.3 错位排列
6.4 带有禁止位置的排列
6.5 另一个禁止位置问题

6.4 带有禁止位置的排列

设$X=\{1, 2,\ldots, n\}$，它的排列用$i_1i_2\ldots i_n$表示，错位排列是使得 $i_1\neq 1, i_2\neq 2,\ldots,$ 且$i_n\neq n$ 的排列。

$i_1\notin\{1\}, i_2\notin\{2\},\ldots, i_n\notin\{n\}$

- 扩展：有禁止位置的排列

令$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是$\{1, 2, \ldots, n\}$的子集 (可以为空集)，用 $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 表示$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列 $i_1i_2\ldots i_n$的集合，使得：$i_1\notin X_1$， $i_2\notin X_2$， …， 且 $i_n\notin X_n$

记 $p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |P(X_1, X_2, \ldots, X_n)|$，表示$P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 中排列的个数。

例：$X_1=\{1,2\}, X_2=\{2,3\}, X_3=\{3,4\}, X_4=\{4,1\}$是$\{1,2,3,4\}$的子集，求$p(X_1, X_2, X_3, X_4)$。

解： 设集合$\{1,2,3,4\}$的一个排列为$i_1 i_2 i_3 i_4$，

A_j表示$i_j \in X_j$的 排列的集合，$j=1,2,3,4$，则

$$p(X_1, X_2, X_3, X_4) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|。$$

令S表示$\{1,2,3,4\}$的所有排列的集合，则$|S|=4!$。

$|A_1|=\binom{2}{1}3! \quad =|A_2|=|A_3|=|A_4|$，

$|A_1 \cap A_2|=(2+1)2! \ =|A_1 \cap A_4|=|A_2 \cap A_3|=|A_3 \cap A_4|$

$|A_1 \cap A_3|=\binom{2}{1}\binom{2}{1}2!=|A_2 \cap A_4|$。

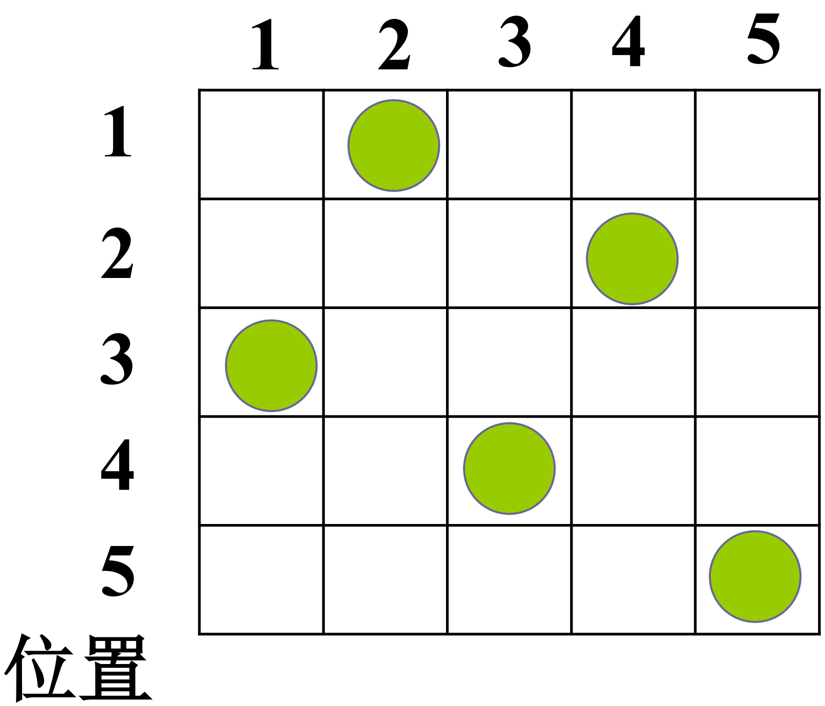
$|A_i \cap A_j \cap A_k|=\ldots$（略）。

应用：带禁止位置的“非攻击型车”

$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 对应于棋盘上以方格

$$(1, i_1), (2, i_2), \ldots, (n, i_n)$$

为坐标的n个车的位置



n个车位于不同的行与不同的列

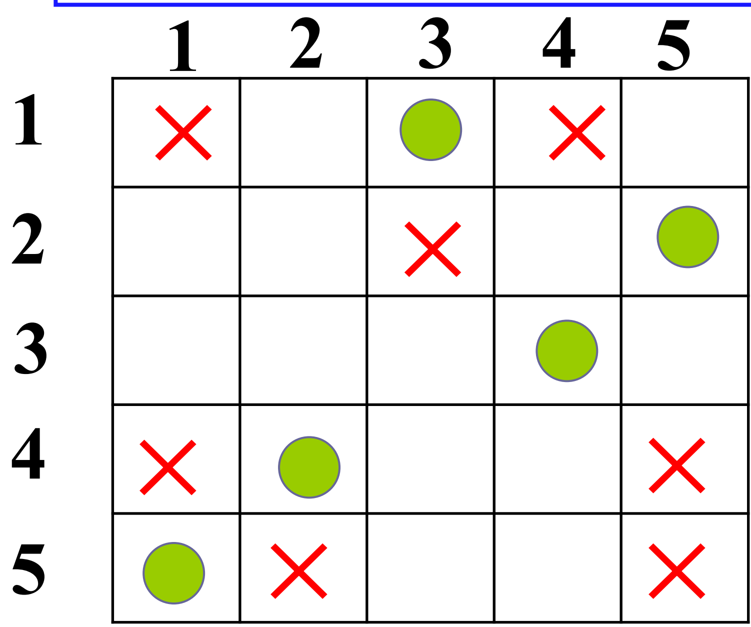
2 4 1 3 5

应用：带禁止位置的“非攻击型车”

$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 对应于棋盘上以方格

$$(1, i_1), (2, i_2), \ldots, (n, i_n)$$

为坐标的n个车的位置



设 $n=5$, $X_1=\{1, 4\}$, $X_2=\{3\}$, $X_3=\emptyset$, $X_4=\{1, 5\}$, $X_5=\{2, 5\}$,
则 $P(X_1, X_2, \ldots, X_5)$中的排列与左图所示的在棋盘上有禁止位置的5个非攻击型车的放置一一对应。

⟹ 3 5 4 2 1

- 问题：满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2, 3, 4, 5，共有多少种放置非攻击型车的方法？

问题：满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2,…, n，共有多少种放置非攻击型车的方法？

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

因此，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$。

(1) $|A_j| = |X_j|\,(n-1)!$ $(j=1, 2, \ldots, n)$

$\Sigma\,|A_j| = (|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_n|)\,(n-1)!$

令 $r_1 = (|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_n|)$

则$\Sigma\,|A_j| = r_1\,(n-1)!$

问题：满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2,…, n，共有多少种放置非攻击型车的方法？

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

因此，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$。

(2)考虑 $A_i \cap A_j$：在第 i、j 行，车分别放入了 X_i 和 X_j 所给出的禁止位置中。

$|A_i \cap A_j| = |X_i|\cdot|X_j|$ ？

X_i 和 X_j 可能相交不为空

问题：满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2,…, n，共有多少种放置非攻击型车的方法？

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

因此，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ \ldots \ \cap \overline{A_n}|$。

(2)考虑 $A_i \cap A_j$：在第 i、j 行，车分别放入了 X_i 和 X_j 所给出的禁止位置中。

设 r_2 是把两个非攻击型车放到棋盘禁止位置上的方法数，

则 $\Sigma\,|A_i \cap A_j| = r_2\,(n - 2)!$

问题：满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2,…, n，共有多少种放置非攻击型车的方法？

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

因此，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$。

(3) 令 r_k 为把所有任意 k 个非攻击型车放到棋盘的禁止放置的位置上（由 X_{i_k} 给出）的方法数（$k \le n$），则

$$\sum |A_{i_1} \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = r_k(n-k)!$$

定理6.4.1 将n个非攻击型不可区分的车放到带有禁止位置的$n \times n$的棋盘中，放法总数等于：

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\ldots+(-1)^k r_k(n-k)!+\ldots+(-1)^n r_n$$

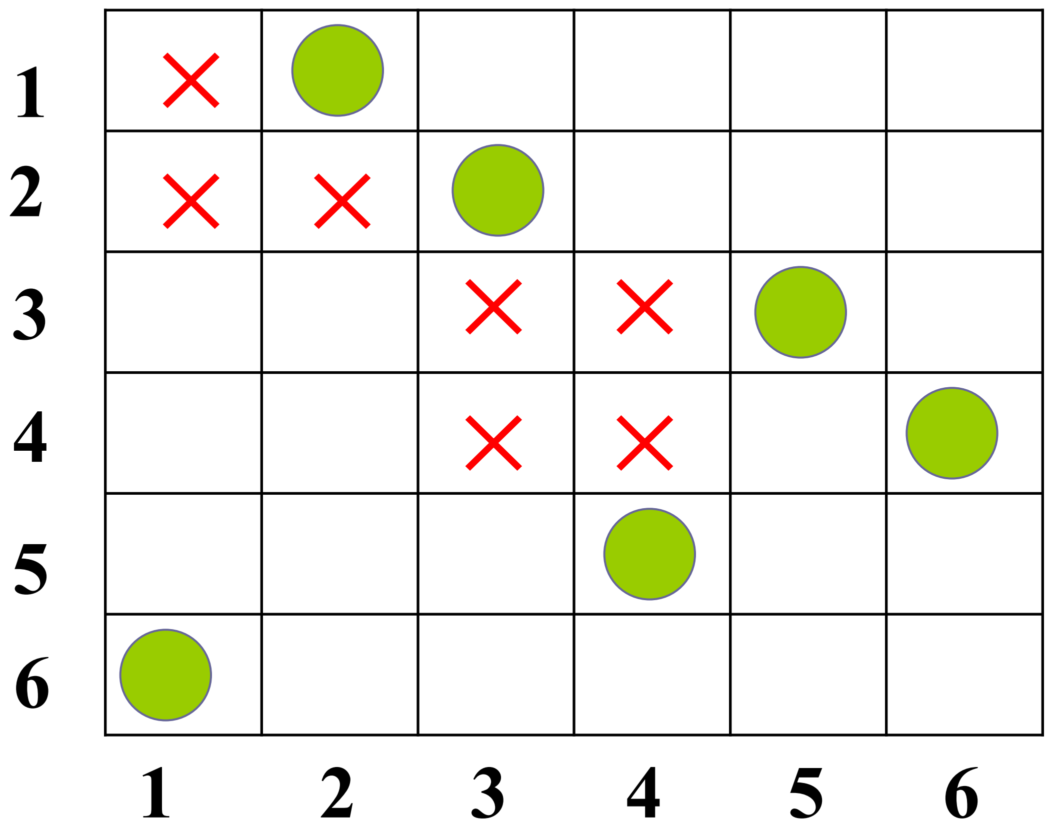
应用：带禁止位置的“非攻击型车”

定理6.4.1 将n个非攻击型不可区分的车放到带有禁止位置的$n*n$的棋盘中，放法总数等于：

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\ldots+(-1)^k r_k(n-k)!+\ldots+(-1)^n r_n$$

- 任意两个车不在同一行或同一列
- r_k：所有的k个车放置在其禁止位置上的放置方法数，
  $k=1, 2, \ldots, n$
- r_k 的计算不考虑剩下的$n-k$个车的放置

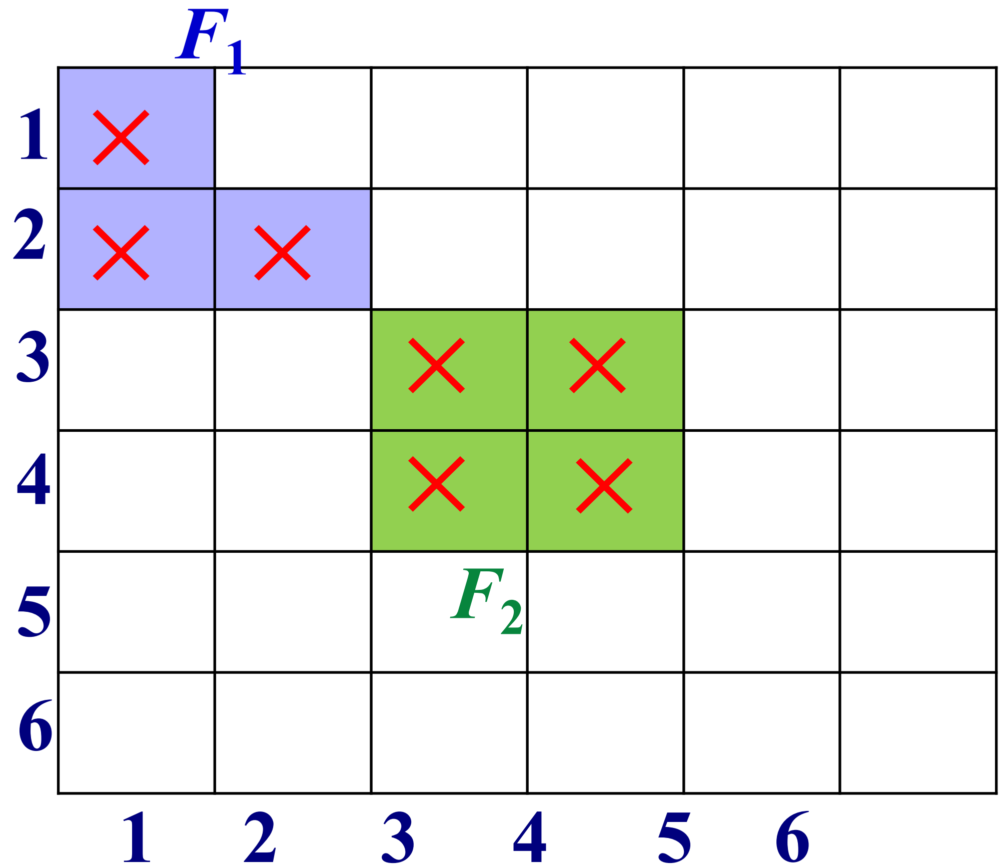
例：以下带禁止位置的非攻击型车的摆放有多少种方法？



求 r_k

- r_1：所有1个非攻击车放入禁止位置的可能数
  - $r_1=1+2+2+2=7$
- r_2：所有2个非攻击车放入禁放位置的方法数 (分F_1, $F2$讨论)
  - F_1中放入两个：1
  - F_2中放入两个：2
  - F_1，F_2中分别放入一个：$3\cdot4=12$

因此，$r_2=1+2+12=15$。

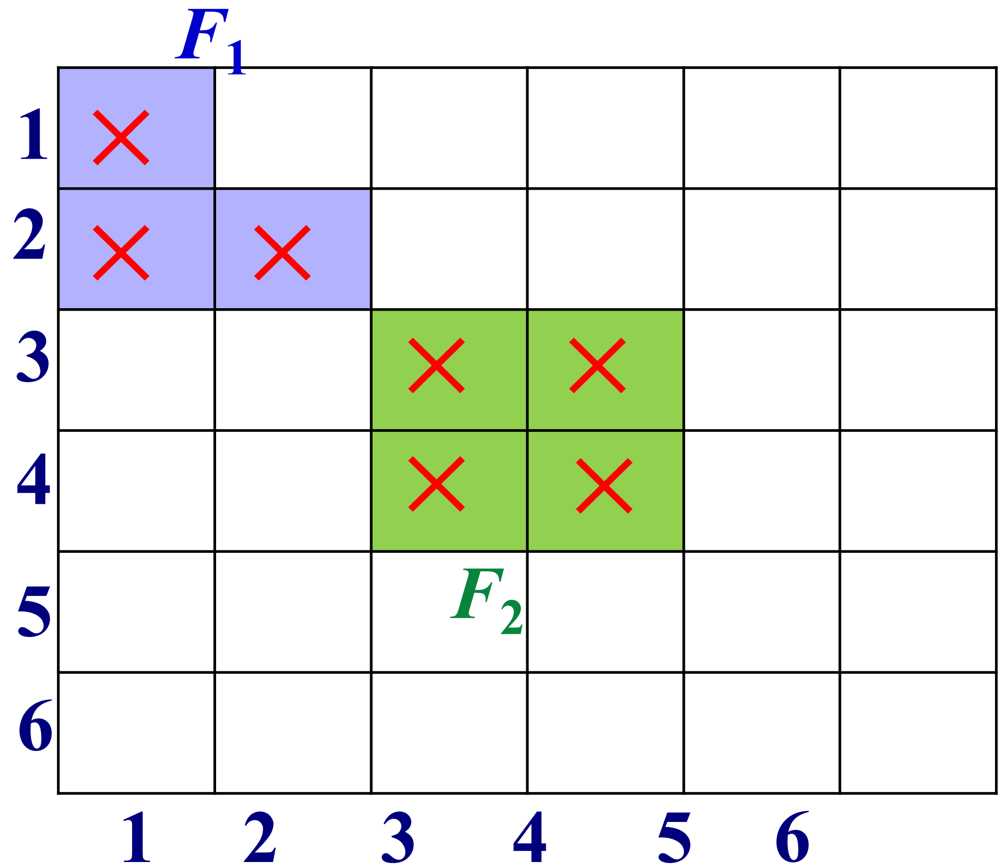


r_3： 3个非攻击车放入禁放位置的可能数

(分F_1, F_2讨论)

- F_1中放1个，F_2中放2个： $3 \cdot 2 = 6$
- F_1中放2个，F_2中放1个： $1 \cdot 4 = 4$

因此， $r_3 = 6 + 4 = 10$。



r_4： 只能F_1与F_2中各放 2个： $1 \cdot 2 = 2$

$r_5 = r_6 = 0$

由定理6.4.1，所求摆放方法数等于：

$$6! - 7 \cdot 5! + 15 \cdot 4! - 10 \cdot 3 + 2 \cdot 2! = 226$$

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理

6.2 带重复的组合

6.3 错位排列

6.4 带有禁止位置的排列

6.5 另一个禁止位置问题

6.5 另一个禁止位置问题

例：设一个班级 8个学生每天练习走步。这些学生站成一列纵队前行，第二天重新排队，使得没有一个学生前面的学生与第一天在他前面的学生是同一个人。他们有多少种方法交换位置？

第一天： 1 2 3 4 5 6 7 8

第二天： 3 1 4 5 8 2 7 6 ×

确定 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} 的排列中不会出现 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78的那些排列的数量。

存在相对禁止位置的排列的计数问题

3 2 1 4 8 5 7 6 √

相对禁止位置排列计数Q_n

Q_n： $\{1, 2, \ldots, n\}$的排列中没有12, 23, …, $(n-1)n$ 这些模式出现的排列的个数

$n=1$： 1 $\qquad Q_1=1$

$n=2$： 12, $\boxed{21}$ $\qquad Q_2=1$

$n=3$: 123, $\boxed{132}$, $\boxed{213}$, 231, 312, $\boxed{321}$ $\qquad Q_3=3$

$n=3$： $Q_4=11$

用容斥原理计算Q_n

令 S 为{1, 2, …, n}的全部排列,

Q_n是S中没有12, 23, …, (n-1)n 这些模式的排列的个数。

令 A_i是 i (i+1) 出现的排列的集合，i=1, 2,.., n-1，则有

$$Q_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}|$$

$$= |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}|$$

令 A_i是 $i\ (i+1)$ 出现的排列的集合，$i=1,2,..,n-1$

计算A_i: A_1可看作 12, 3, …, n 的所有排列的集合，因此 $|A_1|=(n-1)!$。

显然，由对称性，对任意 i，都有$|A_i|=(n-1)!$。

计算$A_i \cap A_j$：讨论两种情况：

(1) $A_i \cap A_{i+1}$ 可看作1, 2, …, $(i, i+1, i+2)$, $i+3$, …, n 的所有排列的集合，因此 $|A_i \cap A_{i+1}|=(n-2)!$。

(2) $A_i \cap A_j$ $(j>i+1)$ 可看作 1, 2,…, $(i, i+1)$, $i+2$, …, $(j, j+1)$, …, n 的所有排列的集合，因此 $|A_i \cap A_j|=(n-2)!$。

由对称性，对任意 i, j，都有$|A_i \cap A_j|=(n-2)!$。

同理可证，对于每个k子集$\{i_1,\ldots, i_k\}$，有

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

用容斥原理计算Q_n

令 S 为$\{1, 2, \ldots, n\}$的全部排列,

Q_n 是 S 中没有12, 23, …, $(n\text{-}1)n$ 这些模式的排列的个数。

令A_i是 $i(i+1)$ 出现的排列的集合，$i=1, 2,\ldots, n\text{-}1$，则有

$$Q_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}|$$

$$= |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

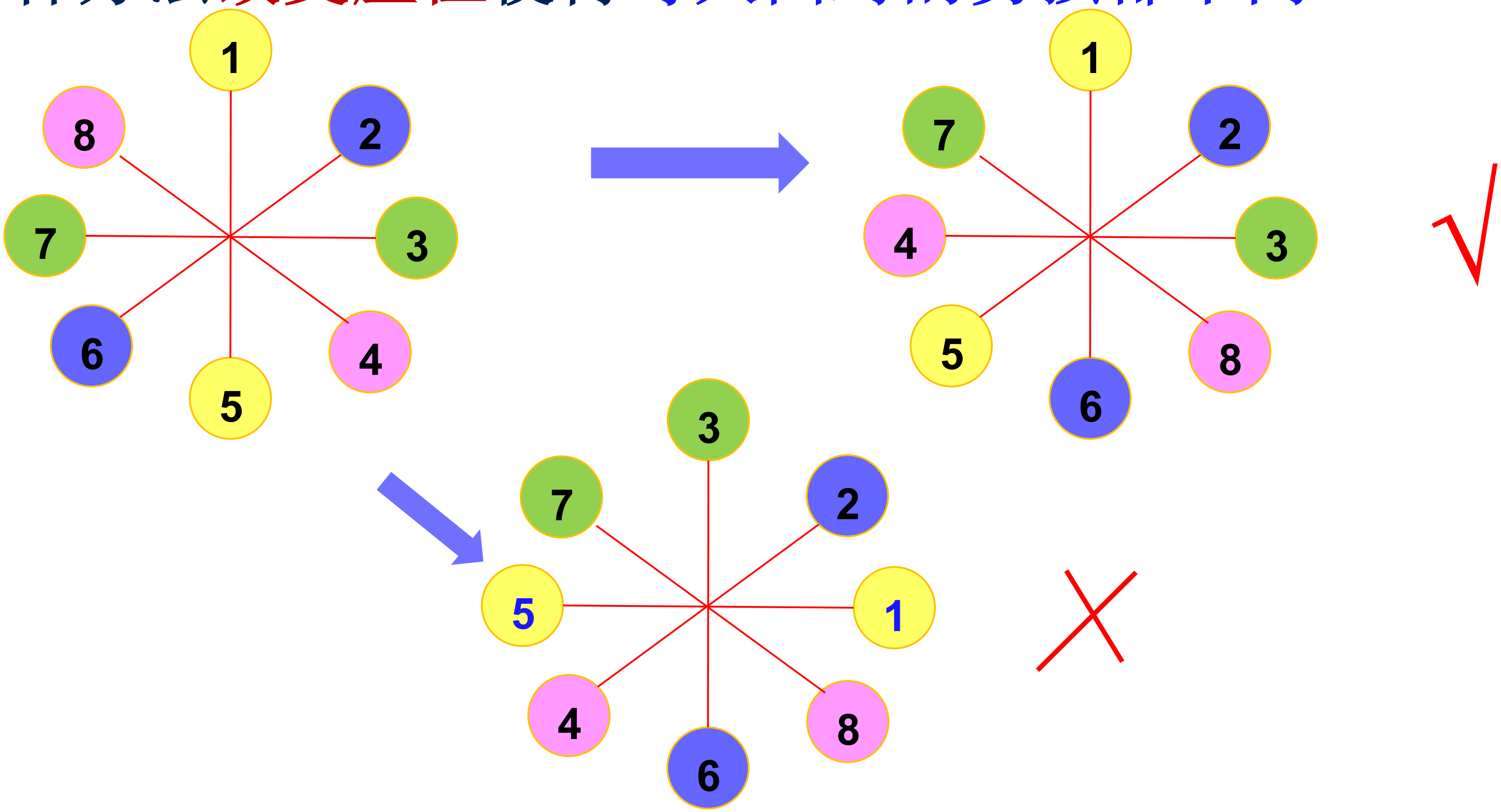
$$+ \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}|$$

定理 6.5.1 对于$n \geq 1$,

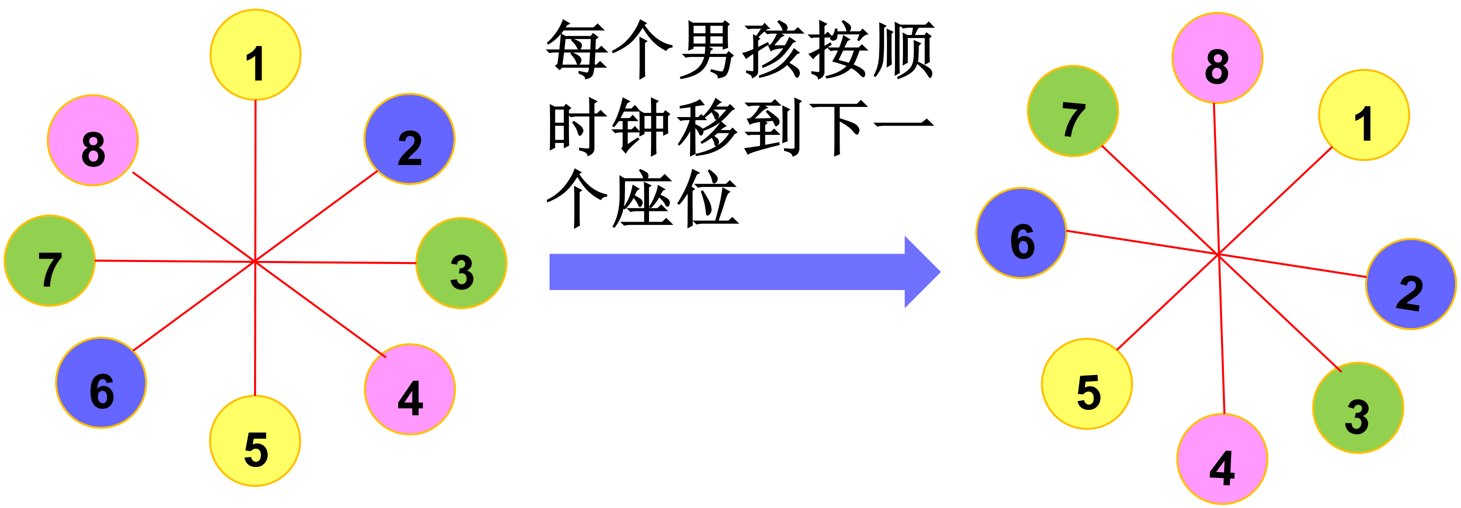
$$Q_n = n! + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!$$

$$= n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

例1：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？

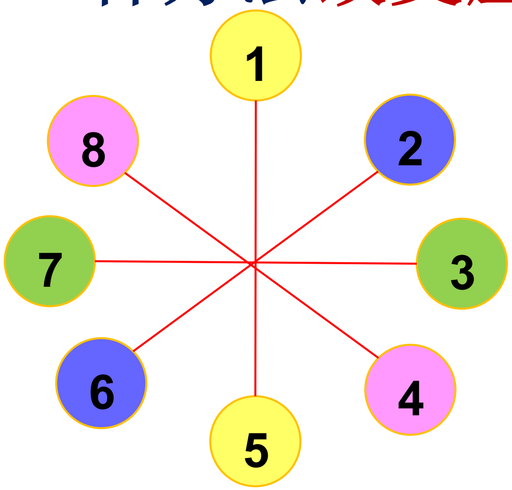


例1：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



问题：两者是否是同一种坐法？不是

例1：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



解：应用容斥原理

假设 8个男孩分成了四对：

(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)。

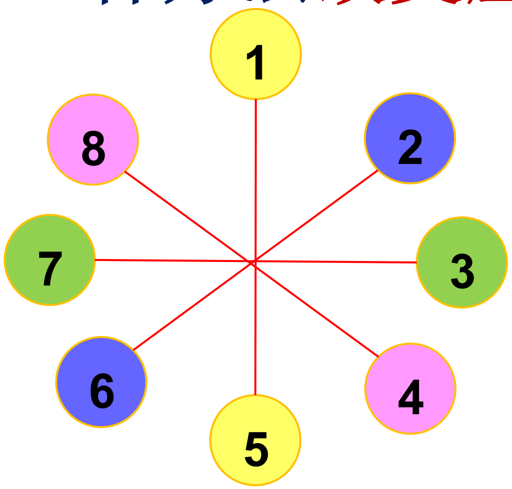
假设A_1, A_2, A_3, A_4分别表示仍然有(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)出现的坐法的集合。

则使得每人面对的男孩都不同的坐法的数目为：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$$

由于每个座位代表一种不同的动物， 8位男孩的排列总数为 8!。

例1：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



解：（续）计算$|A_1|$：

因为每个座位都代表一种不同的动物，

因此 $|A_1|= 8*6!$

显然，由于对称性，

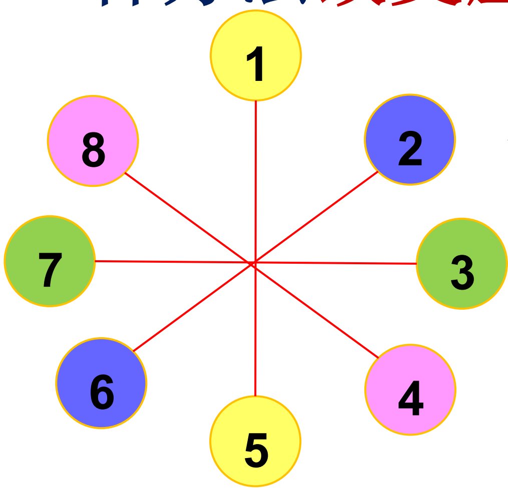
$$|A_i|= 8*6!, i=1, 2, 3, 4.$$

计算$|A_1 \cap A_2|= 8*6*4!=48*4!$，

同样，由于对称性，

$$|A_i \cap A_j|=48*4!, i, j =1, 2, 3, 4, i \neq j.$$

例1：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



解：（续）计算$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 8 \times 6 \times 4 \times 2!$,

同样，由于对称性，

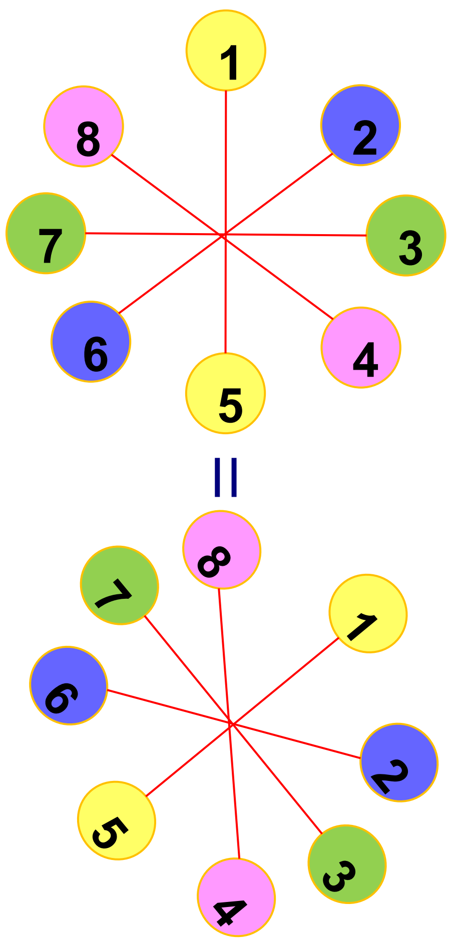
$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 192 \times 2!,$$

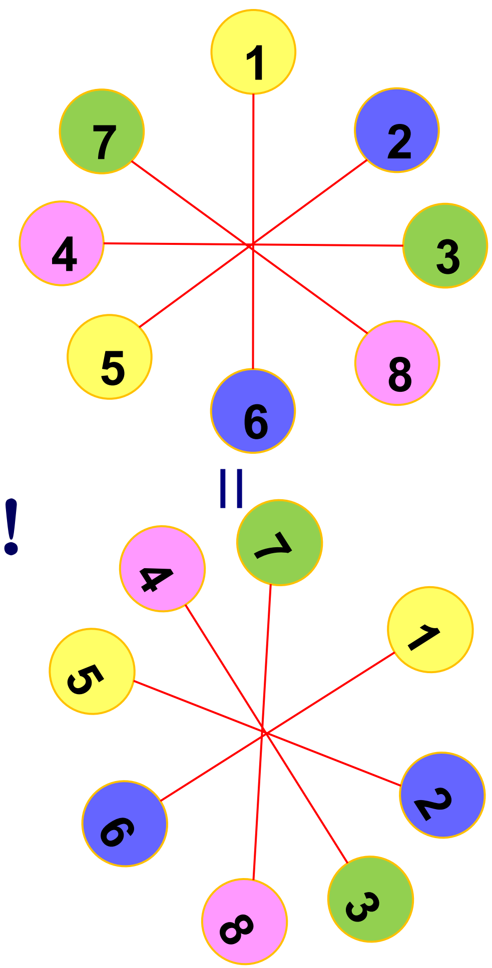
$$i, j, k = 1, 2, 3, 4, i \neq j \neq k.$$

计算$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 8 \times 6 \times 4 \times 2$。

由容斥原理可得（略）。

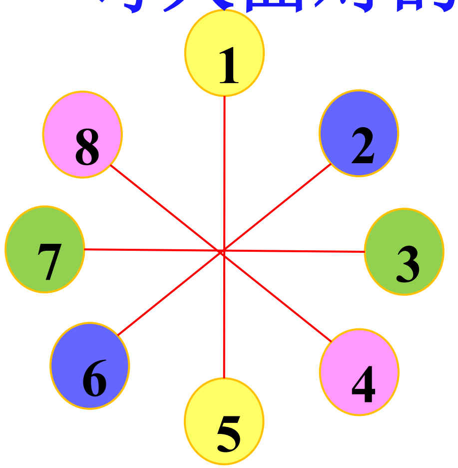
例2：旋转木马有8个座8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。假设所有的座位都是一样，有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？





循环排列！

例2：旋转木马有8个座8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。假设所有的座位都是一样，有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



解：假设8个男孩分成了四对：

(1,5), (2,6), (3,5), (4,8)。

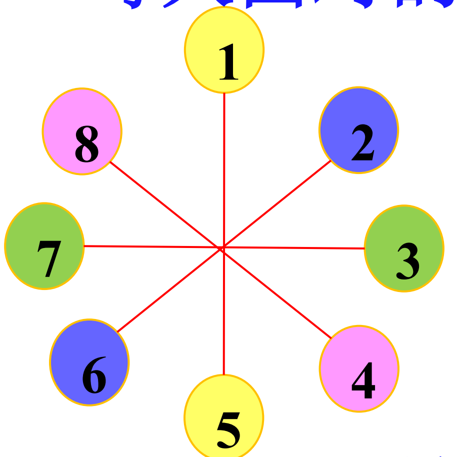
假设A_1, A_2, A_3, A_4分别表示仍然有(1, 5), (2,6), (3,7), (4,8)出现的座法的集合。

则使得每人面对的男孩都不同的坐法的数目为：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|。$$

由于所有座位都是一样，因此8位男孩的排列总数为 7!

例2：旋转木马有8个座8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。假设所有的座位都是一样，有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



解：(续）计算$|A_1|$：因为每个座位都是一样的，因此 $|A_1| = 6!$ 。

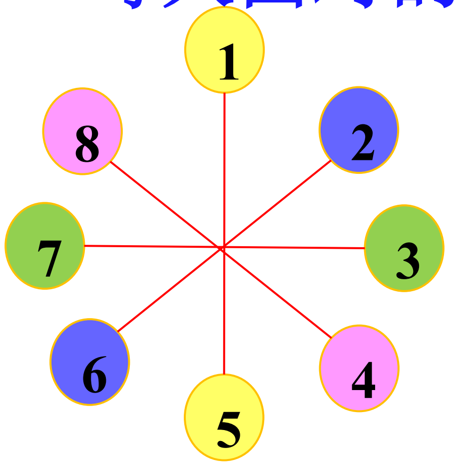
显然，由于对称性，$|A_i| = 6!,\ i=1,2,3,4.$

计算$|A_1 \cap A_2| = 6 \times 4!$，

同样，由于对称性，

$$|A_i \cap A_j| = 6*4!,\ i, j = 1, 2, 3, 4,\ i \neq j.$$

例2：旋转木马有8个座8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。假设所有的座位都是一样，有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



解：（续）计算$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 6\times4\times2! = 24\times2!$，同样，由于对称性，

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 24\times2!$, $i, j, k = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j \neq k$.

计算$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 6\times4\times2 = 48$。

由容斥原理可得（略）。

(3)相对禁止位Q_n与 错位排列D_n的关系

- $D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$
- $Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! + \ldots$

  $+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$

结论： $Q_n = D_n + D_{n-1}$

小结

- 容斥原理
- 带重复的组合
- 错位排列
- 带有（绝对）禁止位置的排列
- 带有（相对）禁止位置的排列

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

知识谱系 Inclusive-exclusion principle

$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| =$
$\Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| =$
$|S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

容斥原理

多重集$\{n_1 \cdot a_1, \ldots, n_t \cdot a_t\}$的组合数, $n_1+\ldots+n_t=r$

$\exists n_i < r$

$\{1, \ldots, n\}$的排列数

错位排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$
$i_j \neq j, j = 1, 2, \ldots n$

带有禁止位置的排列
$i_1 i_2 \ldots i_n$, $i_j \notin X_j$, $j=1,\ldots,n$

? 广义容斥原理

生成函数（第7章）
（每种元素出现次数带有约束）

$\binom{r+t-1}{r}$,
$n_i \geq r, i = 1, 2, \ldots, t$

带有相对禁止位置的排列
$i_1 i_2 \ldots i_n$, 无 12, 23, …,$(n-1)n$

线性排列

循环排列

小结

- 容斥原理
- 带重复的组合
- 错位排列
- 带有（绝对）禁止位置的排列
- 带有（相对）禁止位置的排列
- 莫比乌斯反演

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$