回顾：排列与组合

- 设集合 S 包含n个不同的元素
  - S的排列的个数：$n!$
  - S的r 组合的个数：$\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- 设集合 S 包含重数分别为$n_1, \ldots, n_t$的 t 类元素, $n= n_1+\ldots+ n_t$
  - S的排列的个数：$\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_t!}$
  - S的r 组合的个数（ $n_i \geq r, i=1, 2, \ldots, t$ ）：$\binom{r+t-1}{r}$

如果存在i, 使得$n_i < r$， 怎么计算？

第六章 容斥原理及应用

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理

6.2 带重复的组合

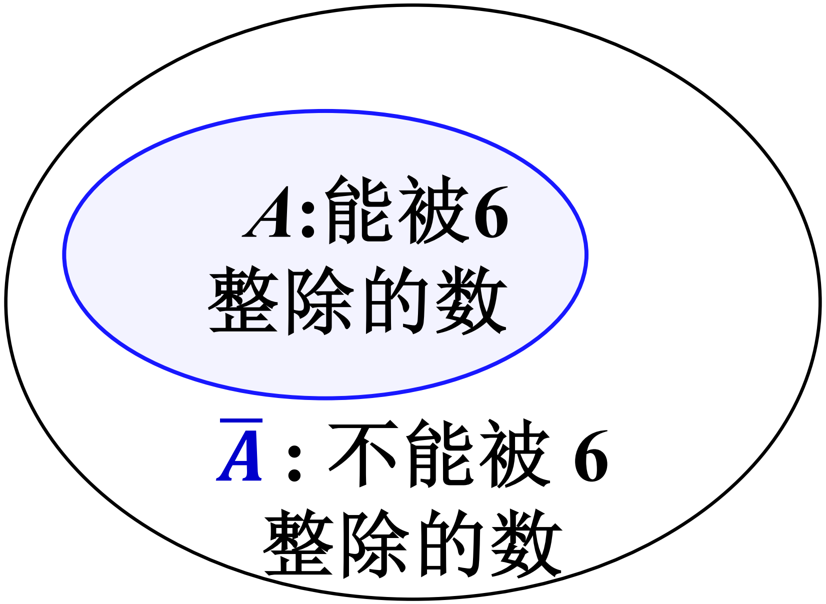
6.3 错位排列

6.4 带有禁止位置的排列

6.5 另一个禁止位置问题

例1. (1) 计算1到600中不能被6整除的整数个数。

(2)计算1到600中不能被6或5整除的整数个数？



$S=\{1, 2, \ldots, 600\}$

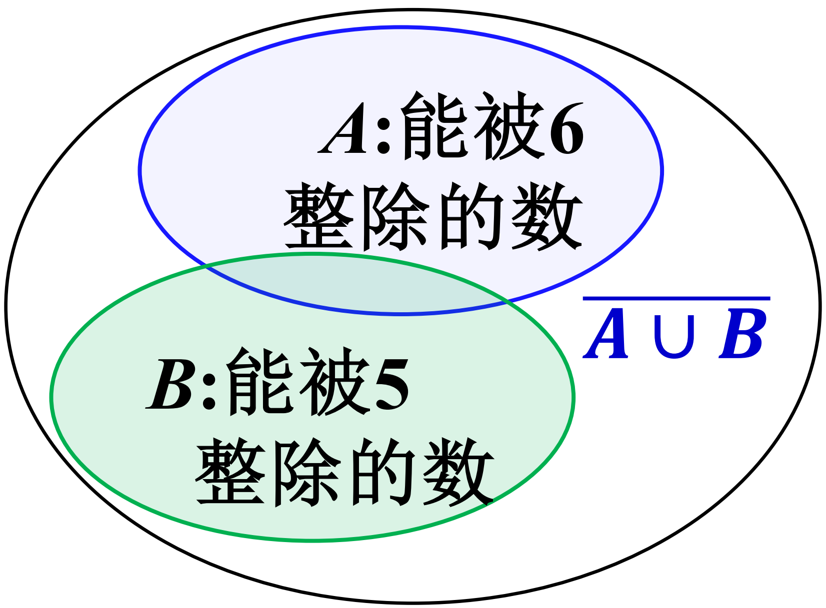
解：(1) 1到600中能被6整除的整数个数是 $\left\lfloor \frac{600}{6} \right\rfloor$ =100个。

因此，1到600中不能被6整除的整数个数是

600−100=500个。

例1. (1) 计算1到600中不能被6整除的整数个数。

(2)计算1到600中不能被6或5整除的整数个数？



$S=\{1, 2, \ldots, 600\}$

$$|\overline{A\cup B}| = |S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

解：(2) 1到600中能被6整除的整数个数是 $\left\lfloor \frac{600}{6} \right\rfloor=100$个，

能被5整除的整数个数是

$$\left\lfloor \frac{600}{5} \right\rfloor=120$$

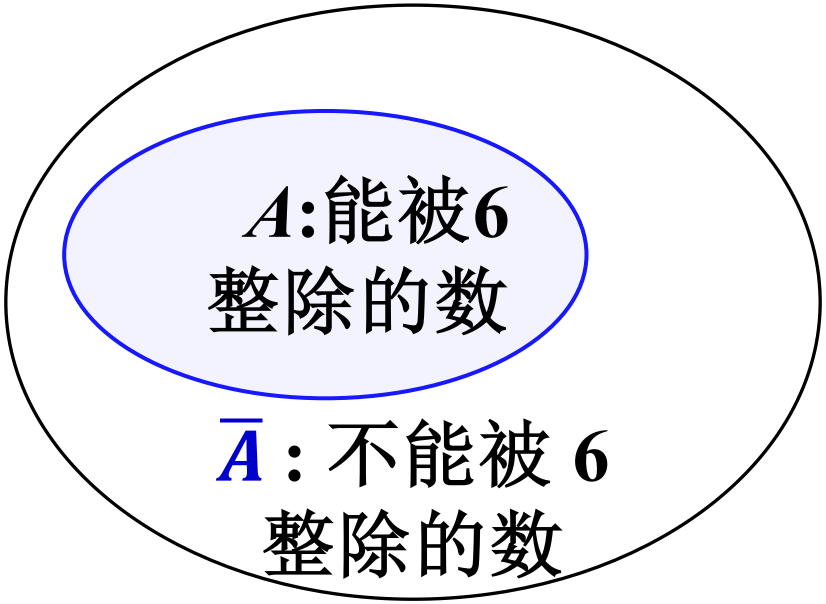
既能被6整除又能被5整除的整数个数是$\left\lfloor \frac{600}{30} \right\rfloor=5$。

因此，不能被6或5整除的整数个数是

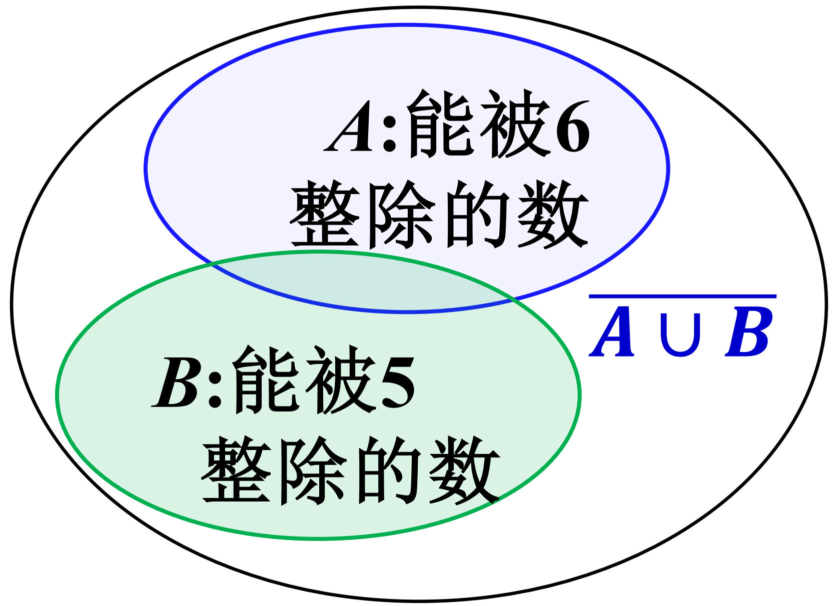
$600-100-120+5=385$个。

例1. (1) 计算1到600中不能被6整除的整数个数。

(2)计算1到600中不能被6或5整除的整数个数？



S={1, 2, …, 600}



S={1, 2, …, 600}

互斥

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

$|A \cup B| \neq |A| + |B|$

知识点　Inclusive-exclusion principle

$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| =$
$\Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$
$+ \ldots + (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| =$
$|S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$
$+ \ldots + (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

多重集$\{n_1 \cdot a_1, \ldots, n_t \cdot a_t\}$的组合数, $n_1 + \ldots + n_t = r$

$\exists n_i < r$

容斥原理

$\{1, \ldots, n\}$的带有约束排列数

错位排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$
$i_j \neq j, j = 1, 2, \ldots n$

带有禁止位置的排列
$i_1 i_2 \ldots i_n$, $i_j \notin X_j$, $j=1,\ldots,n$

广义容斥原理

生成函数（第7章）
（每种元素出现次数带有约束）

$\binom{r+t-1}{r}$,
$n_i \geq r, i = 1, 2, \ldots, t$

带有相对禁止位置的排列
$i_1 i_2 \ldots i_n$, 无 12, 23, …,$(n\text{-}1)n$

线性排列

循环排列

回顾：加法原理

两两互斥

- 基本计数原理：加法原理

$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$， $S_i \cap S_j = \varnothing$， $i \neq j$

则： $|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_m|$

问题：如果存在重叠，即 $S_i \cap S_j \neq \varnothing$， 如何计数?

- 容斥原理：解决具有重叠集合的并集的计数原理。

容斥原理：特例

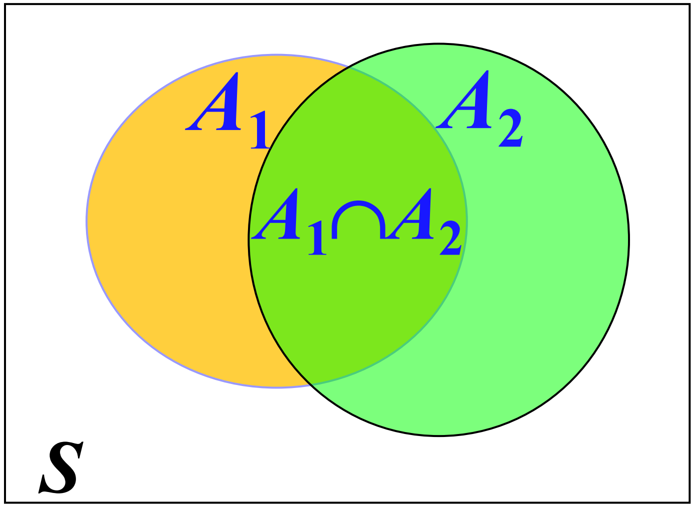
例3：A_1和A_2分别是S中具有性质P_1和P_2的元素的集合，求S中既不具有性质P_1也不具有性质P_2的元素个数。

$\overline{A_1}$: S中不具有性质P_1的元素的集合

$\overline{A_2}$: S中不具有性质P_2的元素的集合

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$: S中既不具有性质P_1也不具有性质P_2的元素的集合

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S - (A_1 \cup A_2)|$$
$$= |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$



$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}| = |S-(A_1\cup A_2)| = |S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|$$

证明：定义一个计数函数：$\sigma_x(A)=\begin{cases}1, \text{当 } x\in A\\ 0, \text{当 } x\notin A\end{cases}$ $\boxed{\text{特征函数 } \sigma_A(x)}$

则有，$|A|=\Sigma_{x\in S}\sigma_x(A)$。

因此，只需证明：

$$\sum_{x\in S}\sigma_x(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})$$

$$=\sum_{x\in S}\sigma_x(S)-\sum_{x\in S}\sigma_x(A_1)-\sum_{x\in S}\sigma_x(A_2)+\sum_{x\in S}\sigma_x(A_1\cap A_2)$$

$$=\sum_{x\in S}(\sigma_x(S)-\sigma_x(A_1)-\sigma_x(A_2)+\sigma_x(A_1\cap A_2))$$

因此，只需证明：对$\forall x\in S$, 下式成立

$$\sigma_x(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})=\sigma_x(S)-\sigma_x(A_1)-\sigma_x(A_2)+\sigma_x(A_1\cap A_2)$$

$$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \sigma_x(S) - \sigma_x(A_1) - \sigma_x(A_2) + \sigma_x(A_1 \cap A_2)$$

S中的元素可分为 4 种情况:

(1) x不属于 A_1和 A_2: 左边=1; 右边=1−0−0+0=1

(2) x属于 A_1且不属于 A_2: 左边=0; 右边=1−1−0+0=0

(3) x属于 A_2, 不属于 A_1: 左边=0;右边=1−0−1+0=0

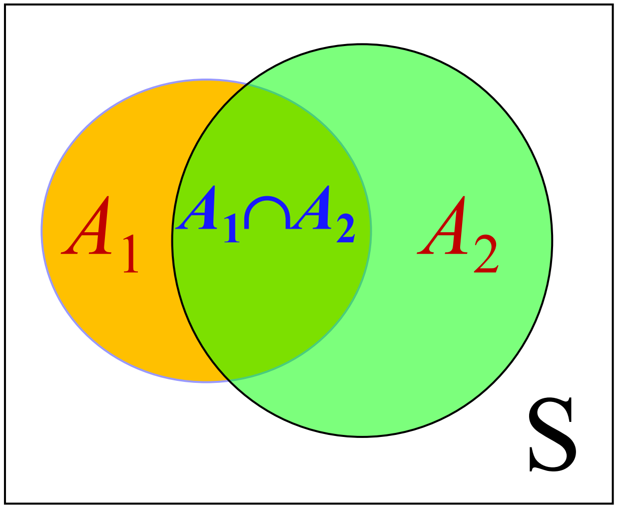
(4) x属于 A_1, 又属于 A_2: 左边=0;右边=1−1−1+1=0

因此：对于$\forall x \in S$

$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) =$

$\sigma_x(S) - \sigma_x(A_1) - \sigma_x(A_2) + \sigma_x(A_1 \cap A_2)$

得 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$



容斥原理：一般形式

定理6.1.1 集合 S 不具有性质$P_1,P_2,\ldots,P_m$的物体的个数：

$$|\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_m}| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i\cap A_j| - \Sigma|A_i\cap A_j\cap A_k| + \ldots + (-1)^m|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$$

其中，第一个和对$\{1, 2, \ldots, m\}$的所有的 1 子集 $\{i\}$ 进行，第二个和对$\{1, 2, \ldots, m\}$的所有的 2 集合$\{i, j\}$进行，依此类推.

$m=2$: $$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1\cap A_2|$$

$m=3$: $$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = |S| - (|A_1|+|A_2|+|A_3|) + (|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|) - |A_1\cap A_2\cap A_3|$$

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

证明：验证每个元素在等式两边计数相等。

(1) 设 $x \in S$ 不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$， 左边计数为：

$$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}) = 1$$

右边计数为：$1-0+0-0+\ldots+(-1)^m 0=1$

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

(2) 设 $y \in S$ 具有其中 $n\ (\geq 1)$个性质，

左边计数为：$\sigma_y(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}) = 0$

右边计数：$\sigma_y(S) = 1 = \binom{n}{0}$（因为：$y \in S$）

$\sum_{i=1}^{m} \sigma_y(A_i) = n = \binom{n}{1}$（因为$A_1, \ldots, A_m$中有$n$个包含了$y$）

$$\sum_{\{i,j\}\text{是}\{1,..,m\}\text{的2-组合}} \sigma_y(A_i \cap A_j) = \binom{n}{2}$$

因为$\sigma_y(A_i \cap A_j) = 1$ 当且仅当 $y \in A_i$ 且 $y \in A_j$，因此，上式左边等于从n个物体取出 2个的组合个数。

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

一直继续下去，式子右边最后一项：

$$\sigma_y(A_1 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_m) = \binom{n}{m}$$

因此，右边等于：

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{n} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{m}$$

$$n \le m$$

$$= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{n}$$

$$= (1-1)^n = 0$$

证毕。

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

$$\|$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m}|$$

因此，$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |S| - |\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m|$

推论6.1.2 集合S中至少具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$之一的元素的个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

容斥原理

- 设集合A_i是集合S中满足性质 P_i 的所有物体的子集，$i = 1, 2, \ldots, m$, 则

集合 S 不具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$的物体的个数为

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

集合 S 中至少有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$之一的物体的个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

例: 求 1 到1000不能被 5, 6或8整除 的数的个数.

解： 设A_1, A_2和A_3分别是1到1000中能被 5, 6和8整除的数集合， 那么1到1000不能被5, 6或8整除的数的个数为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$。

有 $|A_1| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200$

$$|A_2| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$$

$$|A_3| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$$

$$|A_1 \cap A_2| = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$$

$$|A_1 \cap A_3| = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$$

$$|A_2 \cap A_3| = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$$

由容斥原理得,

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$$

例：字母M, A,T,H, I, S, F, U, N存在多少排列使得单词**MATH**, **IS**和**FUN**都不出现？

解：设 S 为 9个字母组成所有排列的集合，

A_1是**MATH**出现的排列集合；A_2是**IS**出现的排列集合；

A_3是**FUN**出现的排列集合。

则使得单词**MATH, IS**和**FUN**都不出现的排列个数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|。$$

有 $|S|=9!$，$|A_1|=6!$，$|A_2|=8!$，$|A_3|=7!$

$|A_1 \cap A_2|=5!$，$|A_1 \cap A_3|=4!$，$|A_2 \cap A_3|=6!$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=3!$,

由容斥原理计算可得（略）。

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

特殊情况：任意k个集合的交包含相等个数的元素，$k=1,2,\ldots,n$

若$\alpha_1=|A_1|=|A_2|=\ldots=|A_m|$

$\alpha_2=|A_1 \cap A_2|=\ldots=|A_{m-1} \cap A_m|$

$\alpha_3=|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=\ldots=|A_{m-2} \cap A_{m-1} \cap A_m|$

…

$\alpha_k=|A_1 \cap \ldots \cap A_k|=\ldots=|A_{m-k+1} \cap \ldots \cap A_m|$

…

$\alpha_m=|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

则，$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = \alpha_0 - \binom{m}{1}\alpha_1 + \binom{m}{2}\alpha_2 - \binom{m}{3}\alpha_3 + \ldots + (-1)^k \binom{m}{k}\alpha_k + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}\alpha_m$$

例. 从 0到 99999中有多少同时含有数字2, 5和8的整数。

解：设A_1，A_2和A_3分别是不包含数字2, 5和8的集合，需要计算$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$。

0 到 99999 的整数个数：$\alpha_0=10^5$

$$\alpha_1=|A_1|=|A_2|=|A_3|=9^5$$

$$\alpha_2=|A_1 \cap A_2|=|A_1 \cap A_3|=|A_2 \cap A_3|=8^5$$

$$\alpha_3=|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=7^5$$

因此，由鸽巢原理，满足题意的整数个数为

$$10^5-3\times9^5+3\times8^5-7^5。$$

例：确定$S=\{1, 2,\ldots, 8\}$的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数

自然位置	1	2	3	4	5	6	7	8
自然排列	1	2	3	4	5	6	7	8
排列2 √	2	1	4	3	6	5	8	7
排列3	1	2	4	3	6	5	8	7

每个数都在其自然位置

每个数都不在其自然位置

例：确定$S=\{1, 2,\ldots, 8\}$的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数

自然位置	1	2	3	4	5	6	7	8
自然排列	1	2	3	4	5	6	7	8
排列2 √	2	1	4	3	6	5	8	7
排列3 ×	1	2	4	3	6	5	8	7

每个数都在其自然位置

每个数都不在其自然位置

例：确定S={1, 2,…, 8}的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数

解：设A_1, A_2, A_3, A_4分别为偶数 2，4，6，8在其自然位置上的排列够成的集合，因此 S 的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数为 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$ 。

$|A_1|=7! =|A_2|=|A_3|=|A_4|$

$|A_1 \cap A_2| =6! \quad = |A_i \cap A_j|, i, j=1, 2, 3, 4, i \neq j$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| =5! \quad = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| =$

$|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$;

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4!$。

因此$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = 8!-4\cdot 7!+6\cdot 6! - 4\cdot 5!+4!$

例：确定$S=\{1,2,\ldots, 8\}$的排列中至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数。

解：设A_1, A_2, A_3, A_4分别为奇数1，3，5，7在其自然位置上的排列够成的集合，则S中至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数为 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$。

有 $|A_1| = 7! = |A_i|, i=2,3,4$

$|A_1 \cap A_2| = 6! = |A_i \cap A_j|, i, j=1,2,3,4, i \neq j$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5! = |A_i \cap A_j \cap A_k|, i, j, k=1,2,3,4, i \neq j \neq k$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4!$

因此S中至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数为 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$（略）。

例：把 $n+m$ 件不同的物品$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ 分给n个不同的人$p_1, p_2, \ldots, p_n$，要求a_i不能分给 p_i，$i=1, 2, \ldots, n$，且每人至少分得一件物品，共有多少种分法？

解：令 S 是把 物品$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ 分给$p_1, p_2, \ldots, p_n$，且a_i不能分给 p_i（$i=1, 2, \ldots, n$）的分法集合，则

$$|S| = (n-1)^n n^m。$$

设 A_i 为把 物品$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ 分给$p_1, p_2, \ldots, p_n$，且a_i不能分给 p_i（$i=1, 2, \ldots, n$），并且p_i没有分到物品的方法集合，则有

$$M=|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|。$$

解：（续）设 A_i 为把 物品 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ 分给 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，且 a_i 不能分给 p_i（i=1, 2, …, n），并且 p_i 没有分到物品的方法集合，则有 $M=|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$。

对任意的 k 个正整数 $i_1, i_2, \ldots, i_k$，且 $1 \le i_1 < i_2 < \ldots, < i_k \le n$，

$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ 表示把物品 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ 分给 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，且 a_i 不能分给 p_i（i=1, 2, …, n），并且

$p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ 都没有分到物品的方法数，则

(a)对任意 a_i，$a_i \notin \{ a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \}$，$a_i$ 有 $(n-k-1)$ 种分法，

这种 a_i 有 $n-k$ 个，则所有这种 a_i 共有 $(n-k-1)^{n-k}$ 种分法；

(b) 对 $a_i \in \{ a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \}$，$a_i$ 有 $n-k$ 种分法，

这种 a_i 共有 $(n-k)^k$ 种分法；

(c) 对任意 b_i，有 $n-k$ 种分法，共有 $(n-k)^m$ 种分法。

解：（续）综上得

$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$

$=(n\text{-}k\text{-}1)^{n\text{-}k}\,(n\text{-}k)^{k}\,(n\text{-}k)^{m} = (n\text{-}k)^{k+m}(n\text{-}k\text{-}1)^{n\text{-}k}$。

由容斥原理得，所求分法数为：

$$(n\text{-}1)^{n} n^{m} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (n-k)^{k+m} (n-k-1)^{n-k}$$

小结

- 容斥原理
  - 用于重叠集合的并集计数
  - 也用于重叠集合的补集的交集计数
- 用容斥原理解决更复杂的计数问题
  - 带重复的组合
  - 错位排列
  - 带有绝对/相对禁止位置的排列
  - 几何问题