第8章 特殊计数序列

8.1 Catalan数

8.2 差分序列和Stirling数

8.3 分拆数

解决的问题

- 如何求关于 n 的 p 次多项式的前 n 项和？

  $h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_0$，求 $h_0 + h_1 + \ldots + h_n$

- 放球问题：
  - 把 p个物品的集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数（第二类Stirling数）
  - 把 p个物品的集合划分到不可区分的盒子且没有空盒的划分数（Bell数）
  - 将 p个物品排成 k个非空的循环排列方法数（第一类Stirling数）

例：对于如下序列，给出第6项合适的值？

- 1 6 15 28 45 66 91

1 6 15 28 45 66 91………

5 9 13 17 21 25 ……….

4 4 4 4 4 ……….

0 0 0 0 ………

差分原理

差分序列

设 $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$是一个序列。定义新序列：

$$\Delta h_0, \Delta h_1, \Delta h_2, \ldots, \Delta h_n, \ldots,$$

称为$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$的（一阶）差分序列，其中

$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n \, (n \geq 0)$，是序列的相邻项的差。

一阶差分序列

$$\Delta h_0 = h_1 - h_0$$
$$\Delta h_1 = h_2 - h_1$$
$$\Delta h_2 = h_3 - h_2$$
$$\cdots$$
$$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$$
$$\cdots$$

二阶差分序列

$$\Delta^2 h_0 = \Delta h_1 - \Delta h_0$$
$$\Delta^2 h_1 = \Delta h_2 - \Delta h_1$$
$$\Delta^2 h_2 = \Delta h_3 - \Delta h_2$$
$$\cdots$$
$$\Delta^2 h_n = \Delta h_{n+1} - \Delta h_n$$
$$\cdots$$

三阶
差分序列
…

差分序列的递归定义

0阶差分序列：$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots,$

1阶差分序列： $\Delta^1 h_n = h_{n+1} - h_n \ (n = 0,1,2,\ldots)$

2阶差分序列： $\Delta^2 h_n = \Delta(\Delta^1 h_n)$

$$= \Delta^1 h_{n+1} - \Delta^1 h_n = (h_{n+2} - h_{n+1}) - (h_{n+1} - h_n)$$

$$= h_{n+2} - 2h_{n+1} + h_n \ (n \geq 0)$$

k阶差分序列：

$$\Delta^k h_n = \Delta(\Delta^{k-1} h_n) = \Delta^{k-1} h_{n+1} - \Delta^{k-1} h_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

类比：微积分中导数

差分表

设序列$h_n(n=0,1,2,\ldots)$

第0行 $h_0 \quad h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4 \quad \ldots$

第1行 $\Delta^1 h_0 \quad \Delta^1 h_1 \quad \Delta^1 h_2 \quad \Delta^1 h_3 \ldots$

第2行 $\Delta^2 h_0 \quad \Delta^2 h_1 \quad \Delta^2 h_2 \ldots$

第3行 $\Delta^3 h_0 \quad \Delta^3 h_1 \ldots$

$\ldots$

- $\Delta^p h_n = \Delta^{p-1} h_{n+1} - \Delta^{p-1} h_n$
- 序列 $h_n\,(n=0,1,2,\ldots)$的差分表由第0行确定

差分表:示例

例：求序列{ h_n }的差分表，其中 $h_n = 2n^2+3n+1 (n \geq 0)$

h_n:	1	6	15	28	45	66	91	………
$\Delta^1 h_n$:	5	9	13	17	21	25		………
$\Delta^2 h_n$:	4	4	4	4	4			……….
$\Delta^3 h_n$:	0	0	0	0				………
$\Delta^4 h_n$:	0	0	0					

等差序列

如何确定
第几阶开始为0?

- 3阶差分序列全部由0组成
- 所有更高阶的差分序列也都由0组成

定理8.2.1：设序列的通项 h_n是n的p次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有：$\Delta^{p+1} h_n = 0$。

证明：对多项式的次数 p 实施数学归纳法。

(1) 当 $p = 0$ 时，$h_n = a_0$，对所有的 $n \geq 0$均为一常数，

因此，$\Delta^{p+1} h_n = \Delta^1 h_n = h_{n+1} - h_n = a_0 - a_0 = 0$，

结论成立。

(2) 假设 $p \geq 1$且当 h_n为n的最多p-1次多项式时，

定理成立，

则有$\Delta^p h_n = 0$对所有的$n \geq 0$成立。

定理8.2.1：设序列的通项 h_n是n的p次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有: $\Delta^{p+1} h_n = 0$。

证明(续)：当h_n是 n的p次多项式时，

由于

$$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$$

$$= a_p(n+1)^p + a_{p-1}(n+1)^{p-1} + \ldots + a_1(n+1) + a_0$$

$$- (a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0)$$

$$= a_p((n+1)^p - n^p) + a_{p-1}((n+1)^{p-1} - n^{p-1}) \ldots + a_1 + 0 \quad (1)$$

定理8.2.1：设序列的通项 h_n是n的p次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有：$\Delta^{p+1} h_n = 0$。

可用于求解 n次多项式的序列通项

证明(续)：

$\Delta h_n =$

最大次数为n^{p-1}

$$a_p(\,(n+1)^p - n^p) + a_{p-1}(\,(n+1)^{p-1} - n^{p-1}) \ldots + a_1 + 0 \quad (1)$$

把$(n+1)^p$按二项式定理展开后得，

$$(n+1)^p - n^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^{p-k} - n^p = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{p-k},$$

代入(1)式得，Δh_n最多为n的$p-1$次多项式，

由归纳假设知，$\Delta^p(\Delta h_n)=0$, 即$\Delta^{p+1} h_n = 0$。

定理成立。

差分表的性质

- 差分表由第 0 行上元素的值就能决定
- 差分表也可由第 0 条对角线决定

设序列$h_n(n=0,1,2,\ldots)$

第0行 h_0 h_1 h_2 h_3 h_4 …

$\Delta^1 h_0$ $\Delta^1 h_1$ $\Delta^1 h_2$ $\Delta^1 h_3$ …

$\Delta^2 h_0$ $\Delta^2 h_1$ $\Delta^2 h_2$ …

$\Delta^3 h_0$ $\Delta^3 h_1$ …

…

第 0 条对角线

首先考虑特殊情况的第0条对角线

第1条对角线：

$h_1 = \Delta h_0 + h_0$

$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$

$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$

$\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出h_n?

例：一种简单的差分表

- 若第 0条对角线全为0

$h_0 = 0$

$\Delta h_0 = 0$

$\Delta^2 h_0 = 0$

$\Delta^3 h_0 = 0$

$\Delta^4 h_0 = 0$

$\Delta^5 h_0 = 0$

第0条对角线

第1条对角线：

$h_1 = \Delta h_0 + h_0$

$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$

$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$

$\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出h_n?

例：一种简单的差分表

- 若第 0条对角线全为0

$$
\begin{array}{lllllll}
h_0= & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & \Delta h_0= 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & \Delta^2 h_0= 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & \Delta^3 h_0= 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & \Delta^4 h_0= 0 & 0 & \\
 & & & & & \Delta^5 h_0= 0 &
\end{array}
$$

第0条对角线

第1条对角线：

$h_1= \Delta h_0+h_0$

$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0+ \Delta^1 h_0$

$\Delta^2 h_1= \Delta^3 h_0+ \Delta^2 h_0$

$\Delta^3 h_1= \Delta^4 h_0+ \Delta^3 h_0$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出h_n?

例：一种简单的差分表

- 若第 0条对角线全为0

$h_0 =$ 0 0 0 0 0 0 …

$\Delta h_0 =$ 0 0 0 0 0 …

$\Delta^2 h_0 =$ 0 0 0 0 …

$\Delta^3 h_0 =$ 0 0 0 …

$\Delta^4 h_0 =$ 0 0 …

$\Delta^5 h_0 =$ 0 …

第0条对角线

第1条对角线：

$h_1 = \Delta h_0 + h_0$

$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$

$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$

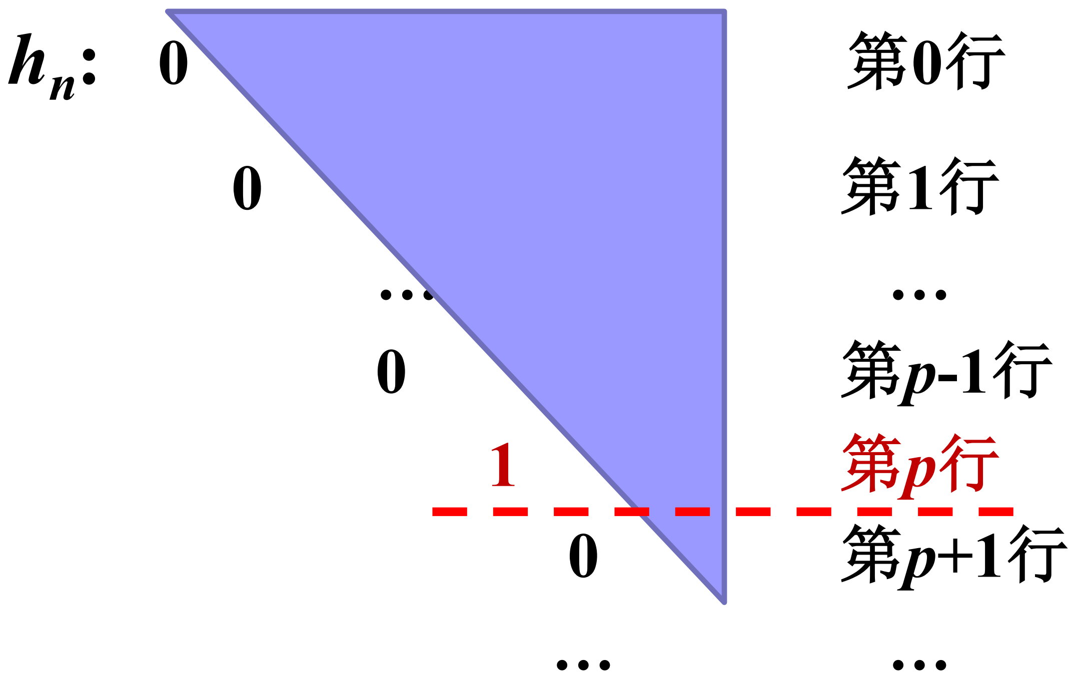
$\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出h_n?

例：一种简单的差分表

- 第0条对角线除一个1外都是0：
  - 设1在第 p行，第0条对角线的前p个元素就都为0，从$p+1$行开始的所有行的元素都是0



问题：对应的差分表及h_n是什么形式？

例：一种简单的差分表：p=4 时

- 第0条对角线上的元素是：0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, …

h_n:	0	第0行
	0	第1行
	0	第2行
	0	第3行
	1	第4行
	0	第5行
	0	第6行
	0	第7行

问题：怎么计算h_n?

例：一种简单的差分表：$p=4$ 时

- 第0条对角线上的元素是：0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, …

h_n:　0　0　0　0　1　5　15　35　第0行

0　0　0　1　4　10　20　第1行

0　0　1　3　6　10　第2行

第3行为等差序列

0　1　2　3　4　第3行

第4行全为 1

1　1　1　1　第4行

0　0　0　第5行

第5行全为0

0　0　第6行

问题：怎么计算h_n?

0　第7行

例：一种简单的差分表：$p=4$ 时

0	0	0	0	1	5	15	35
0	0	0	1	4	10	20	
0	0	1	3	6	10		
0	1	2	3	4			
1	1	1	1				
0	0	0					
0	0						
0							

设$h_n = a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n+a_0$，满足

$$\Delta^{p+1}h_n = \Delta^5 h_n = 0$$

由于$h_0=h_1=h_2= h_3=0$, $h_4=1$,

可知, 多项式 h_n有n = 0, 1, 2, 3四个根;

于是， h_n的多项式中应该有$(n-0)$, $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$这四个因子。

设待定系数c， 那么： $h_n= c\, n(n-1)(n-2)(n-3)$

将$h_4=1$ 代入：$1=c\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1= c\cdot 4!$ ，因此 $c=1/4!$,

从而，$$h_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \binom{n}{4}$$

例：一种简单的差分表：$p=4$ 时

- 第0条对角线上的元素是：0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, …

h_n:	0	第0行
	0	第1行
	0	第2行
	0	第3行
	1	第4行
	0	第5行
	0	第6行
	0	第7行

$$h_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \binom{n}{4}$$

例：一种简单的差分表

更一般的，假设对于任意的 p, 序列$\{h_n\}$差分表中第0条对角线为以下形式：

$$\underbrace{0, 0, 0, 0\ldots0}_{p\text{个}0}, 1, 0,\ldots,0,\ldots$$

则，h_n是 n的 p 次多项式，表示如下：

$$h_n=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))}{p!}=\binom{n}{p}$$

问题：如果第0条对角线为：

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, 0, \ldots \quad (\text{其中} c_p\neq 0)$$

是否有通项？通项是什么？

差分表的线性性

例：一种简单的差分表：p=4 时

- 第0条对角线上的元素是：0, 0, 0, 0, c_p, 0, 0, … ($c_p \neq 0$)

h_n:	0	第0行
	0	第1行
	0	第2行
	0	第3行
	c_p	第4行
	0	第5行
	0	第6行
	0	第7行

例：一种简单的差分表：p=4 时

- 第0条对角线上的元素是：0, 0, 0, 0, c_p, 0, 0, … ($c_p \neq 0$)

设$h_n = a_4 n^4 + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$，满足 $\Delta^{p+1} h_n = \Delta^5 h_n = 0$

由于$h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = 0$, $\boxed{h_4 = c_p}$,

可知, 多项式 h_n有n = 0, 1, 2, 3四个根;

于是， h_n的多项式中应该有$(n-0)$, $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$

这四个因子。

设待定系数c， 那么： $h_n = c\, n(n-1)(n-2)(n-3)$

将$h_4 = c_p$ 代入： $\boxed{c_p = c \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = c \cdot 4\,!}$,

因此$\boxed{c = c_p /4!.}$

$$\text{从而，}\quad h_n = c_p \frac{n(n-1)(n-2)(n-3\,)}{4\,!} = c_p \binom{n}{4}$$

例：一种简单的差分表

更一般的，假设对于任意的 p, 序列$\{h_n\}$差分表中第0条对角线为以下形式：

$$\overbrace{0, 0, 0, 0 \ldots 0}^{p\text{个}0}, c_p, 0, \ldots, 0, \ldots$$

则，h_n是 n的 p 次多项式，表示如下：

$$h_n = c_p \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))}{p!} = c_p \binom{n}{p}$$

差分表的线性性

设 g_n 和 f_n 分别是两个序列的通项，如果 $h_n = g_n + f_n$，

则 $\Delta h_n = h_{n+1} - h_n = (g_{n+1} + f_{n+1}) - (g_n + f_n)$

$$= (g_{n+1} - g_n) + (f_{n+1} - f_n) = \Delta g_n + \Delta f_n$$

对于任何常数 c, d，如果 $b_n = c\, g_n + d\, f_n$

$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = (c\, g_{n+1} + d\, f_{n+1}) - (c\, g_n + d\, f_n)$

$$= (c\, g_{n+1} - c\, g_n) + (d\, f_{n+1} - d\, f_n) = c\, \Delta g_n + d\, \Delta f_n$$

- 一般的： $\Delta^p h_n = \Delta^p g_n + \Delta^p f_n$， $p \geq 0$
- 更一般的，对于任何常数 c, d 来说，

$$\Delta^p (c\, g_n + d\, f_n) = c\, \Delta^p g_n + d\, \Delta^p f_n \quad (p \geq 0,\ n \geq 0)$$

定理8.2.2　差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, 0, \ldots, \qquad \text{其中 } c_p \neq 0$$

的序列的通项 h_n 满足：

$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \ldots + c_p\binom{n}{p}$$

的关于n的p次多项式。

证明思想：(线性性+简单差分表)

$f_k = c_k\binom{n}{k}$, $k=1, 2, \ldots, p$

$$\begin{matrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_p \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} = \begin{matrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} + \ldots + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ c_p \\ 0 \\ \cdots \end{matrix} + \ldots$$

对应h_n　　对应 f_0　　对应 f_1　　对应 f_2　　对应 f_p

p 次多项式与差分表

定理8.2.1：设序列的通项 h_n是n的p次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有：$\Delta^{p+1} h_n = 0$。

定理8.2.2　差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, 0, \ldots, \quad \text{其中} c_p \neq 0$$

的序列的通项满足：

$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \ldots + c_p\binom{n}{p}$$

可用于求序列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$,的部分和

例：考虑通项为$h_n=n^3+3n^2-2n+1(n\geq 0)$的序列。

计算差分，我们得到

$n=0$	1	3	17	49
$n=1$		2	14	32
$n=2$			12	18
$n=3$				6

$$h_n = c_0\binom{n}{0}+c_1\binom{n}{1}+c_2\binom{n}{2}+\ldots\ldots+c_p\binom{n}{p}$$

因为h_n是n的3次多项式，因此差分表的第0条对角线是： 1, 2, 12, 6, 0, 0,….

由定理8.2.2知，$h_n = 1\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+12\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}$

应用：求序列的部分和 $\sum_{k=0}^{n} h_k = h_0 + h_1 + \ldots + h_n$

例：考虑通项为$h_n=n^3+3n^2-2n+1(n\geq 0)$的序列。

已得：$h_n = 1\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 12\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$，

因此，

1	3	17	49
	2	14	32
		12	18
			6

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = h_0 + h_1 + \ldots + h_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(1\binom{k}{0} + 2\binom{k}{1} + 12\binom{k}{2} + 6\binom{k}{3}\right)$$

$$= 1\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0} + 2\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} + 12\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2} + 6\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{3}$$

$$= 1\binom{n+1}{1} + 2\binom{n+1}{2} + 12\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}。$$

(由于$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$，教材中公式5.19）

定理 8.2.3 假设序列$h_0, h_1, \ldots, h_n,\ldots$的差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, \ldots, c_p, 0, 0,\ldots$$

那么

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2}+\ldots+c_p\binom{n+1}{p+1}$$

- 差分序列的应用
  - 一般项为多项式的序列的部分和

例：求前n个正整数的4次方的和。

$\sum_{k=1}^{n} k^4$

解：设$h_n=n^4$, $n\geq 0$, 计算差分得

0	1	16	81	256
	1	15	65	175
		14	50	110
			36	60
				24

可推广到前n个正整数的p次方的和

因为h_n是4次多项式，其差分表第0条对角线是：

0, 1, 14, 36, 24, 0, 0,….

得 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=0}^{n} k^4$

$$= 1\binom{n+1}{2} + 14\binom{n+1}{3} + 36\binom{n+1}{4} + 24\binom{n+1}{5}。$$

体现了一定的组合意义

差分表的第0条对角线的组合意义：n^p的表示

对于序列 $h_n = n^p$,设其差分表中第0条对角线上的元素为 $c_0, c_1, \ldots, c_p, 0, 0, \ldots$， 引入标记：

$$c(p, 0) = c_0, c(p, 1) = c_1, \ldots, c(p, p) = c_p, 0, 0, \ldots;$$

其中$c(p, k)$是差分表中第0条对角线上的 第k个元素；

则有：

$$h_n = n^p = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + \ldots\ldots + c_p\binom{n}{p} \quad \text{（定理8.2.2 ）}$$

$$= c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \ldots\ldots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

$c(p,k)$的特殊值 $c(p,0)$： $k=0$

$$h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

1	1	1	1 …
	0	0	0 …
		0	0…
		…	

(1) 当 $p=0$ 时，则 $h_n = n^p = n^0 = 1$

是一个常数，$n \geq 0$

此时，差分表的第 0 行全为1，从第 1 行开始全为0

由 $h_n = 1 = 1\binom{n}{0} = c(0,0)\binom{n}{0}$，

得 $c(0,0)=1$。

(2) 当 $p\geq1$ 时，$h_0 = 0 = c(p,0)\binom{0}{0} = c(p,0)$，得 $c(p,0)=0$。

因此，$c(p,0) = \begin{cases} 1 & ，当 p=0 时 \\ 0 & ，当 p \geq 1 时 \end{cases}$

$c(p, k)$的特殊值$c(p, p)$：$p = k \neq 0$

$$h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p} \quad (1)$$

上式右侧中 n^p 项只出现在

$$c(p,p)\binom{n}{p} = c(p,p)\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$$中，

由(1) 式两边 n^p 项前系数相等得，$1 = \dfrac{c(p,p)}{p!}$，

因此， $c(p, p) = p!$。

例如：$h_n = n^4$ 的差分表（p=4）：

0	1	16	81	256
	1	15	65	175
		14	50	110
			36	60
				24

$c(4,4) = 24 = 4!$

$$h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

令 $[n]_k = \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-k+1), & 若\ k \geq 1 \\ 1, & 若\ k = 0 \end{cases}$

$n!/(n-k)!$

则，$[n]_k = n$个不同元素中取 k 个元素的排列数$P(n, k)$

$[n]_k$的递推关系：

$$[n]_{k+1} = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)(n-(k+1)+1)$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)(n-k)$$

$$= (n-k)[n]_k$$

$$h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

由于，$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{[n]_k}{k!}$，得

$$h_n = n^p = c(p,0)\frac{[n]_0}{0!} + c(p,1)\frac{[n]_1}{1!} + c(p,2)\frac{[n]_2}{2!}$$

$$+\ldots\ldots + c(p,p)\frac{[n]_p}{p!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} c(p,k)\frac{[n]_k}{k!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!}[n]_k$$

令 $S(p,k) = \frac{c(p,k)}{k!}$ $(0 \le k \le p)$，称为**第二类Stirling数**。

$h_n = n^p$ 的展开式就变为：$h_n = \boxed{n^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k}$

第二类Stirling数

$$\boxed{h_n = n^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!}[n]_k = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k}$$

$$S(p,0) = \frac{c(p,0)}{0!} = c(p,0) = \begin{cases} 1\text{，当}p = 0\text{时} \\ 0\text{，当}p \geq 1\text{时} \end{cases}$$

$$S(p,p) = \frac{c(p,p)}{p!} = \frac{p!}{p!} = 1\ (p \geq 1)$$

第二类Stirling的递推公式

定理8.2.4：如果$1 \le k \le p-1$ 则

$$S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$$

类比二项式公式中：

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

定理8.2.5： 第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 p 元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

定理8.2.4：如果$1\leq k\leq p-1$ 则

$$S(p,k)=k\,S(p-1,k)+S(p-1,k-1)$$

证明：已知

$$n^p=\sum_{k=0}^{p}S(p,k)[n]_k,\quad n^{p-1}=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)[n]_k$$

$$n^p=n\times n^{p-1}=n\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)[n]_k$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)n[n]_k$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)(n-k+k)[n]_k$$

$[n]_{k+1}=(n-k)[n]_k$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)(n-k)[n]_k+\sum_{k=0}^{p-1}kS(p-1,k)[n]_k$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)[n]_{k+1}+\sum_{k=0}^{p-1}kS(p-1,k)[n]_k$$

证明：(续) 已得

$$n^p = \underline{\sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k+1}} + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k \quad (1)$$

对(1)式等号右边的求和项 $\sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k+1}$，

用 k-1替换 k 后得：

$$\sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k+1} = \sum_{k=1}^{p} S(p-1,k-1)[n]_k。$$

代入(1)式得，

$$n^p = \underline{\sum_{k=1}^{p} S(p-1,k-1)[n]_k} + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k$$

$$= S(p-1,p-1)[n]_p + \underline{\sum_{k=1}^{p-1} S(p-1,k-1)[n]_k}$$

$$+ \underline{\sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k}$$

$$= S(p-1,p-1)\ [n]_p$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1}(S(p-1,k-1) + kS(p-1,k))[n]_k \quad (2)$$

证明（续）：

已得，

$$n^p = S(p-1,p-1)[n]_p + \sum_{k=1}^{p-1}\underline{(S(p-1,k-1)+kS(p-1,k))}[n]_k \quad (2)$$

又已知 $n^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k$

$$= S(p,p)[n]_p + \sum_{k=0}^{p-1}\underline{S(p,k)}[n]_k \quad (3)$$

对于$1\le k \le p$-1 的每一个k，比较(2)式与(3)式中$[n]_k$的系数，得

$$S(p,k) = k\,S(p\text{-}1,k) + S(p\text{-}1,k\text{-}1)$$

第二类Stirling数的类Pascal三角形

$S(p, k) = k\, S(p-1,k) + S(p-1, k-1),\ 1 \le k \le p-1$

直接上方的元素乘以k再加上其左上方的元素

$25=6\cdot 3+7$

$S(p,1)=1 \quad (p \geqslant 1)$

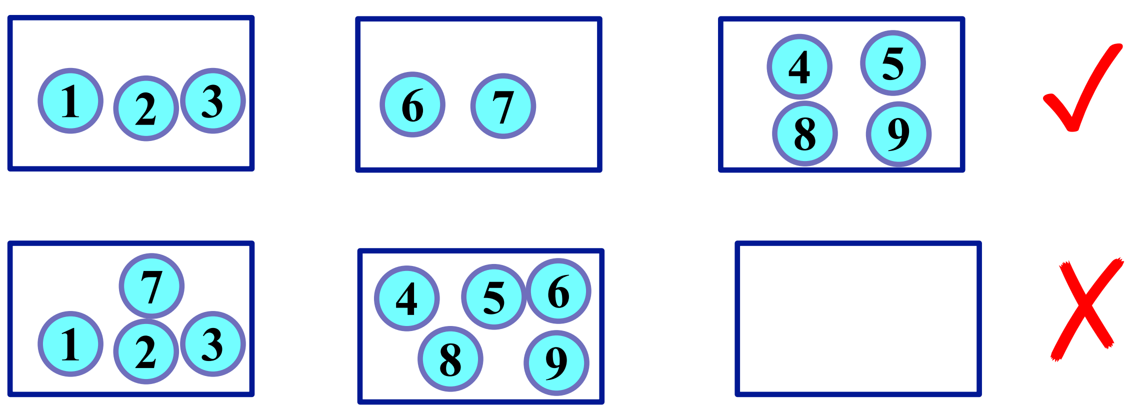
$S(p,2)=2^{p-1}-1 \quad (p \geqslant 2)$

$S(p,p-1)=\binom{p}{2} \quad (p \geqslant 1)$

$p \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	⋯
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

第二类Stirling数的组合解释：投球入盒

定理8.2.5：　第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。



第二类Stirling数的组合解释：投球入盒

定理8.2.5： 第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

定理2.4.3 设 $n, n_1, n_2, \ldots, n_k$是正整数，且

盒子可区分

$$n = n_1+n_2+\ldots+ n_k。$$

将 n个元素集合划分成 k 个有标签的盒子$B_1, B_1,\ldots, B_k$，其中B_i含有n_i个元素（i=1, 2,…, k），则划分方法数为

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k}$$

若盒子无标号，划分数为 $\dfrac{n!}{k!n_1!n_2!\ldots n_k}$

定理8.2.5：　第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

证明：令 $S^*(p, k)$ 是将p元素的集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

下面证明：　$S^*(p, k) = S(p, k)$。

$S(p, k)$：

如果$1 \le k \le p-1$ 则 $S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$

（定理8.2.4）

$$S(p,0) = c(p,0) = \begin{cases} 1, & \text{当}p = 0\text{时} \\ 0, & \text{当}p \ge 1\text{时} \end{cases}$$

$$S(p, p) = \frac{c(p,p)}{p!} = \frac{p!}{p!} = 1 \ (p \ge 1)$$

定理8.2.5：第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 p 元素集合划分到 k 个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

证明：令 $S^*(p, k)$ 是将 p 元素的集合划分到 k 个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

下面证明：$S^*(p, k) = S(p, k)$。

显然 $S^*(p, p) = 1$ $(p \geq 0)$ 而且 $S^*(p, 0) = 0$ $(p \geq 1)$。

下面只需证明 $S^*(p, k)$ 满足递推式

$$S^*(p, k) = kS^*(p-1, k) + S^*(p-1, k-1), \quad 1 \leq k \leq p-1.$$

把 $\{1, 2, \ldots p\}$ 分到 k 个非空且不可区分的盒子有两种类型：

(1) p 独占一个盒子的划分；或者

(2) p 不独占一个盒子的划分。此时该盒子元素多于1个；

定理8.2.5： 第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

证明(续)： (1) 当 p 独占一个盒子时，

剩下的$\{1, 2, \ldots, p\text{-}1\}$划分到$k$-1个非空且不可区分的盒子，

因此，存在$S^*(p\text{-}1, k\text{-}1)$ 种对$\{1, 2, \ldots, p\}$满足条件的划分。

(2) 当 p 不独占一个盒子时，

相当于先将$\{1, 2,\ldots, p\text{-}1\}$ 放到 k 个盒子，不允许空盒，

共有$S^*(p\text{-}1, k)$ 种方案，然后将 p 放进其中一盒，

由乘法原理得方案数为 $kS^*(p\text{-}1, k)$ 。

因此，由加法原理得，

$$S^*(p, k) = kS^*(p\text{-}1, k) + S^*(p\text{-}1, k\text{-}1)，1 \le k \le p\text{-}1。$$

例：将红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里，且无空盒，共有多少种不同方案？

解：满足题意的方案数为第二类 Stirling数 $S(5, 2)$。

由递推关系 $S(p, k) = kS(p\text{-}1, k) + S(p\text{-}1, k\text{-}1)$得：

$$S(5, 2) = 2S(4, 2) + S(4,1)$$
$$= 2(2S(3, 2) + S(3, 1)) + 1$$
$$= 2(2\times3+1) + 1 = 15$$

因此，共有15种不同方案。

问题：1. 如果2个盒子颜色有区别，方案数是多少？

$2!\,S(5, 2)$

2. 如果盒子无区别，允许有空盒的方案数是多少？

Bell 数