第十四章Pólya计数

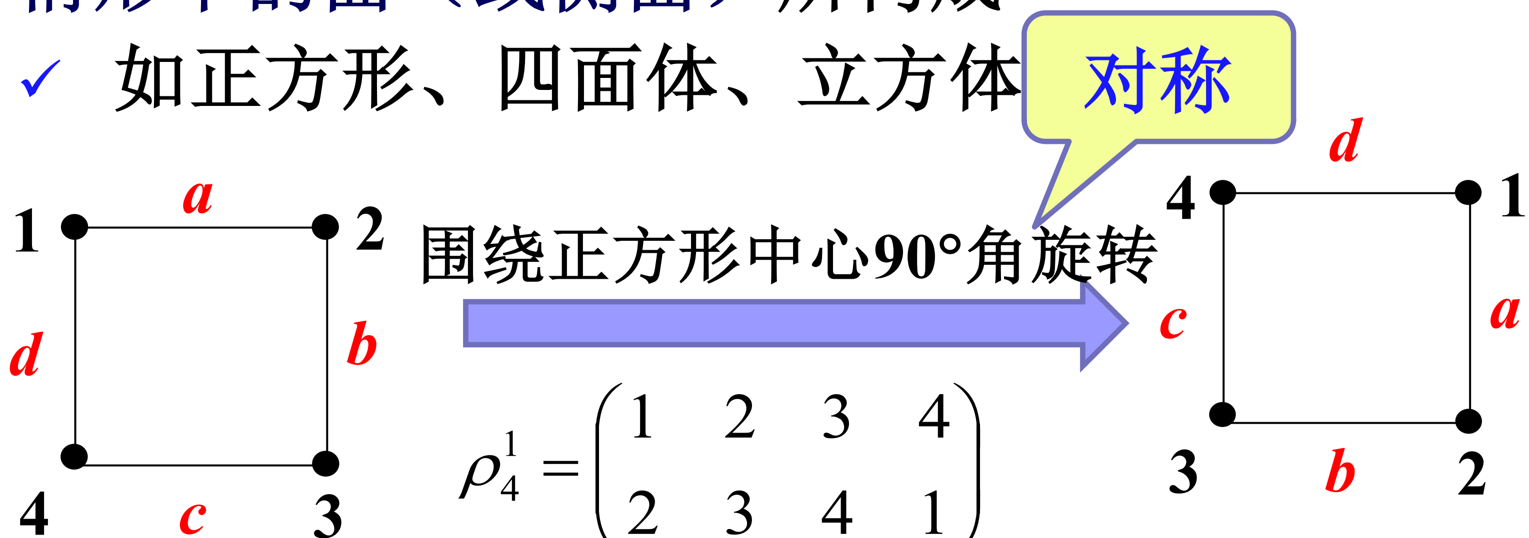
4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω到它自身的一个(几何)运动（**motion**）或全等（**congruence**）称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体



$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω到它自身的一个(几何)运动（**motion**）或全等（**congruence**）称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体等
- 每个对称可以看作是顶点、边以及三维情形下的面上的一个置换。
  - ✓ 两个对称的合成仍得一个对称
  - ✓ 一个对称的逆也是一个对称
  - ✓ 使所有对象固定不动的运动也是一个对称，即恒等对称

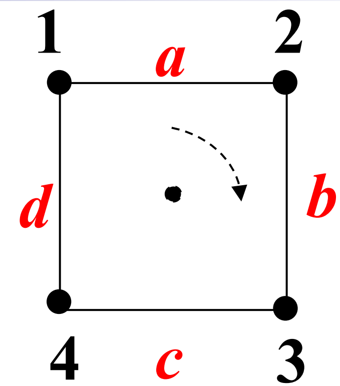
几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω 到它自身的一个(几何)运动（**motion**）或全等（**congruence**）称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体等
- 对称构成置换群，称为Ω的对称群
  - ✓ 顶点对称群：Ω的角点上的置换群G_C
  - ✓ 边对称群：Ω的边上的置换群G_E
  - ✓ 面对称群：Ω是三维情形下的面上的置换群G_F

例：考虑如右图所示正方形 Ω：

角点：1, 2, 3, 4

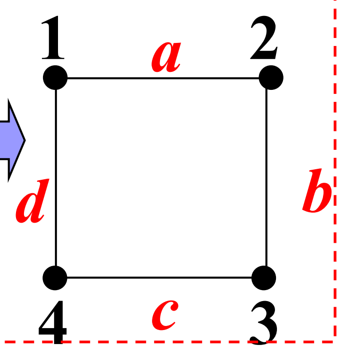
边：*a*, *b*, *c*, *d*



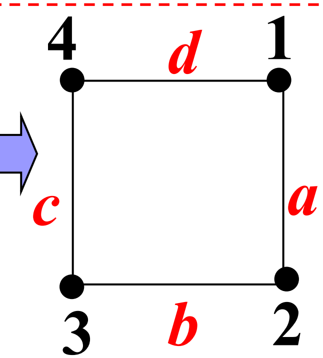
Ω的对称：两种类型

(1) 4个平面对称: 围绕正方形中心 **0°, 90°, 180 °, 270 °**角的4个旋转

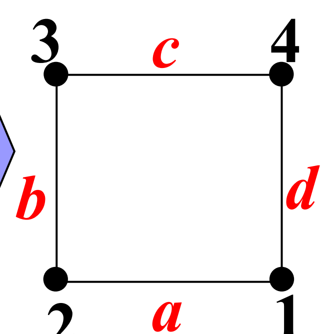
$$\rho_4^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



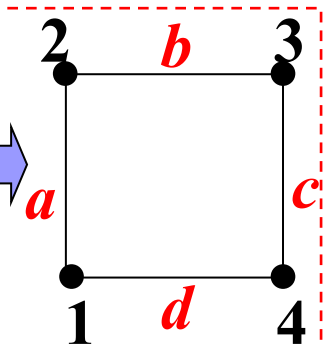
$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



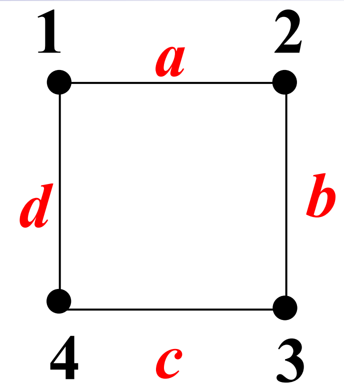
$$\rho_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



例：考虑如右图所示正方形 Ω：

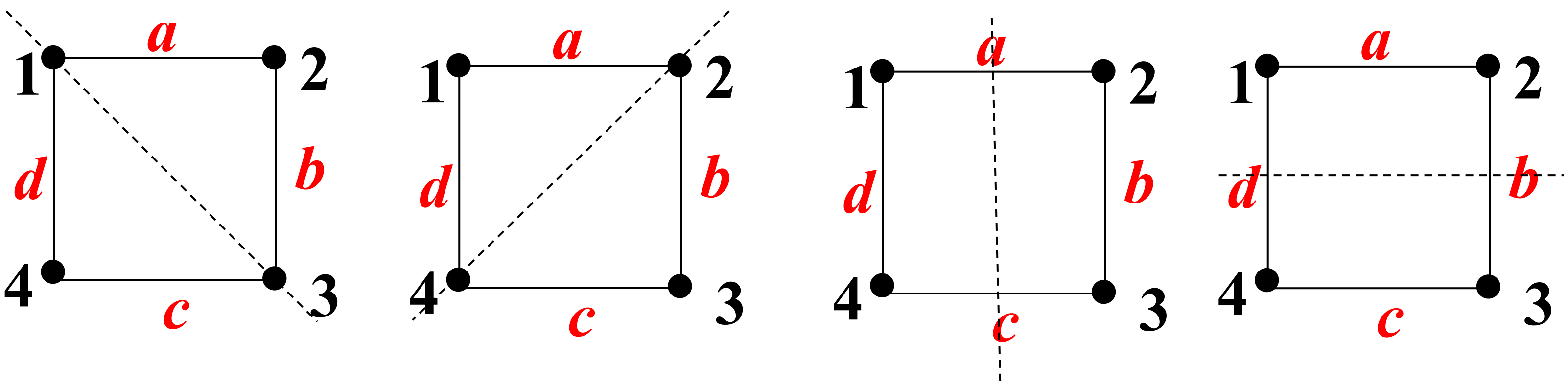
角点：1, 2, 3, 4

边：*a*, *b*, *c*, *d*



Ω的对称： 两种类型

(2) 4个反射：对角点连线 (2个)、对边中点连线 (2个)

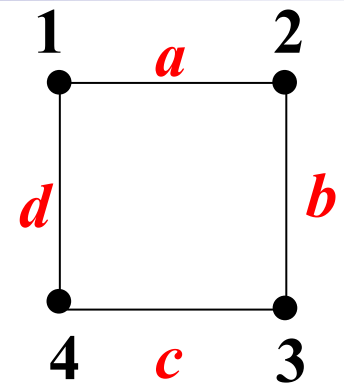


- 依连线进行“翻转”；
- 运动是在空间进行，“翻转”正方形需要离开它所在的平面。

例：考虑如右图所示正方形 Ω：

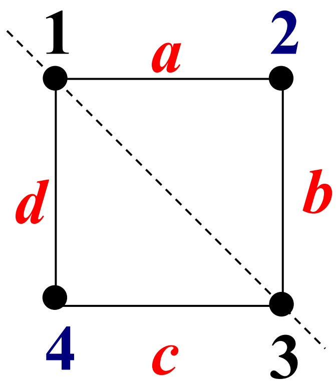
角点：**1, 2, 3, 4**

边：***a, b, c, d***

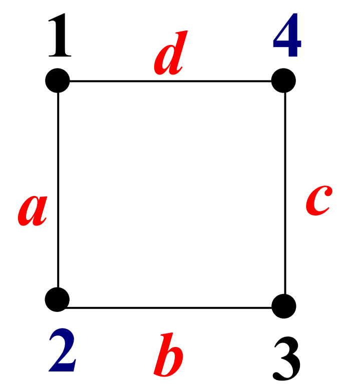


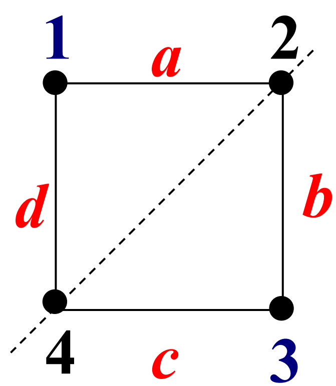
Ω的对称： 两种类型

(2) 4个反射：对角点连线 (2个)、对边中点连线 (2个)

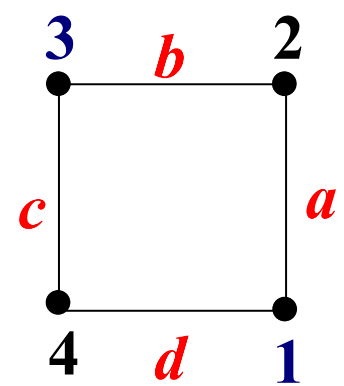


$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$





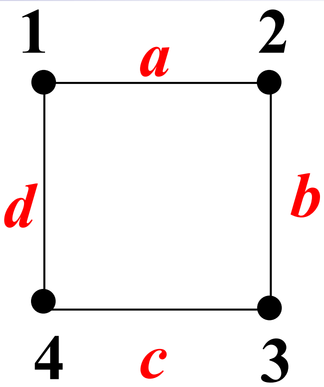
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



例：考虑如右图所示正方形 Ω：

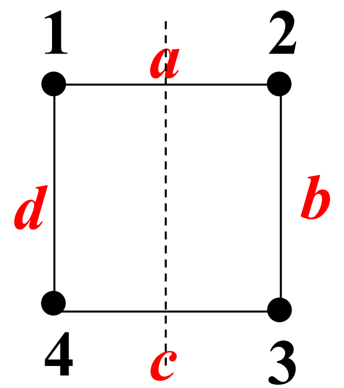
角点：1, 2, 3, 4

边：*a*, *b*, *c*, *d*

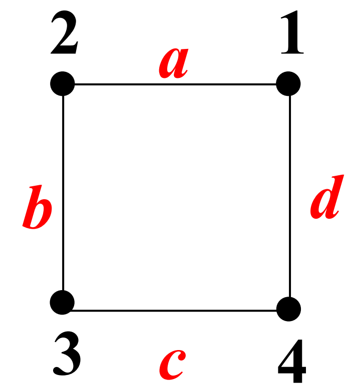


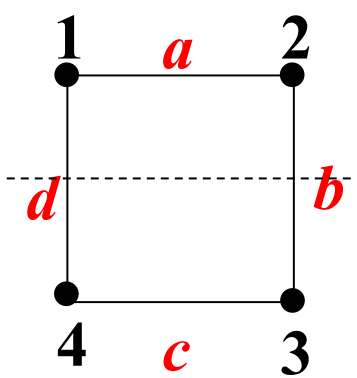
Ω的对称： 两种类型

(2) 4个反射：对角点连线 (2个)、对边中点连线 (2个)

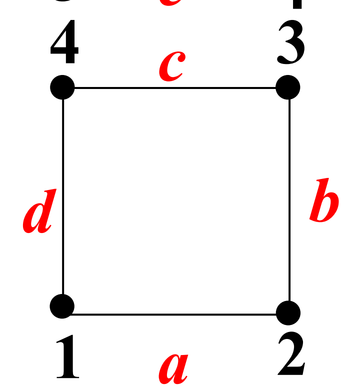


$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$



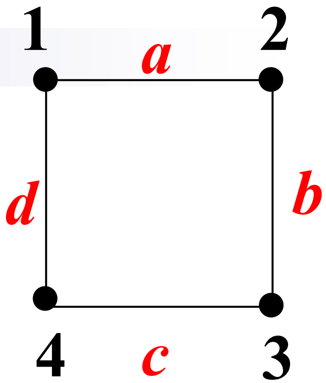


$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 a, b, c, d。



作用在角点上的两类对称：

(1) 4个平面对称：

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad \rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\quad \rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad \rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

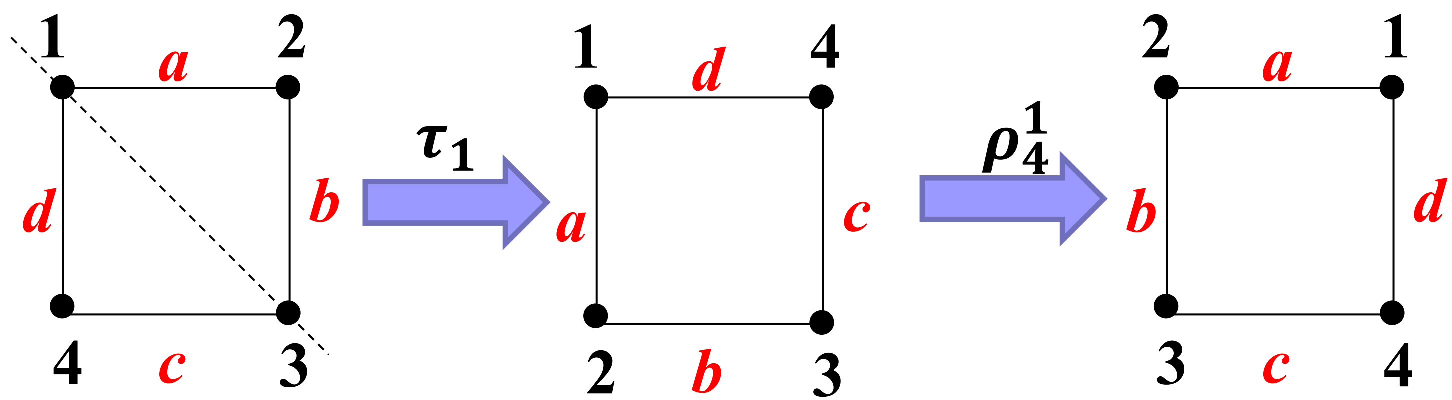
(2) 4个反射：

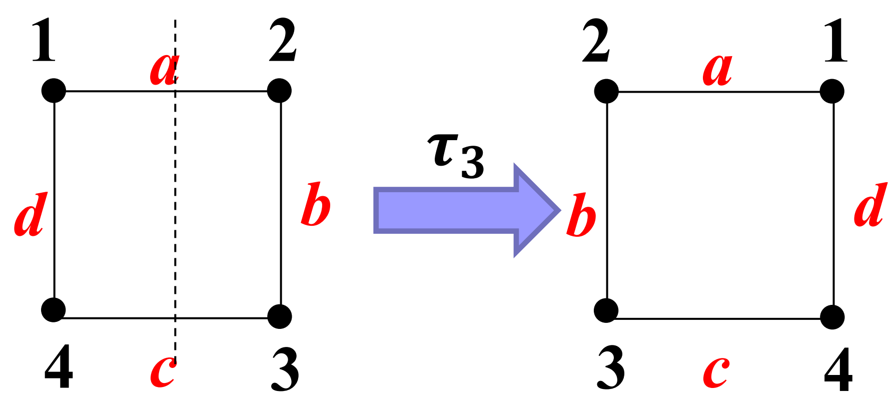
$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\quad \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\quad \tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad \tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

- 以上8个对称定义了顶点对称群 G_c
  - 封闭性、结合律、存在单位元和逆元
- $G_c=\{\rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$称为Ω的顶点对称群

Ω的顶点对称群：$G_c = \{ \rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \}$

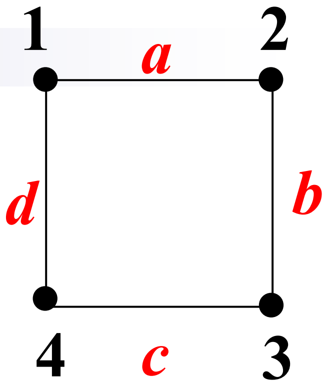
- 可验证：$\tau_3 = \rho_4^1 \circ \tau_1$， $\tau_2 = \rho_4^2 \circ \tau_1$， $\tau_4 = \rho_4^3 \circ \tau_1$





因此，$G_c = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \rho_4^2 \circ \tau_1, \rho_4 \circ \tau_1, \rho_4^3 \circ \tau_1\}$

■ 正方形的顶点对称群：

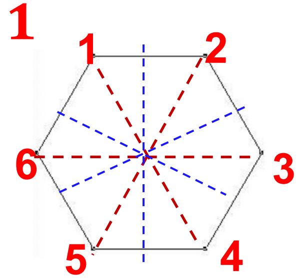


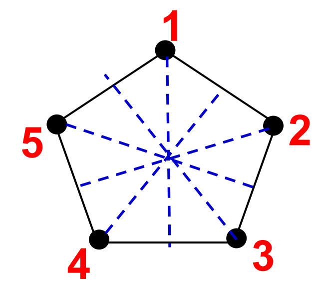
$$G_c = \{\ \rho_4^0 = \iota,\ \rho_4^1,\ \rho_4^2,\ \rho_4^3,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4\ \}$$

例：推广至任意正 n 角形对称群 ($n \geq 3$)

(1) n个旋转： $\rho_n^0 = \iota,\ \rho_n,\ \rho_n^2,\ \ldots,\ \rho_n^{n-1}$

(2) n个反射：$\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_n$





- n为偶数：$\frac{n}{2}$个关于对角点的反射

  $\frac{n}{2}$个关于对边中点连线的反射

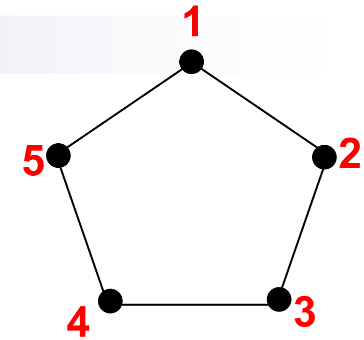
- n为奇数：n个关于角点与其对边中点的连线的反射

所以，关于$\{1, 2, \ldots, n\}$的$2n$个置换形成的群：

$$D_n = \{\rho_4^0 = \iota,\ \rho_n^1,\ \rho_n^2,\ \ldots,\ \rho_n^{n-1},\ \tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_n\}$$

是一个阶为 $2n$ 的二面体群的一个实例。

例（10阶二面体群）：考虑顶点标以1，2，3，4，5的正五角形。



它的（角点）对称群 D_5 包含5个旋转和5个反射。

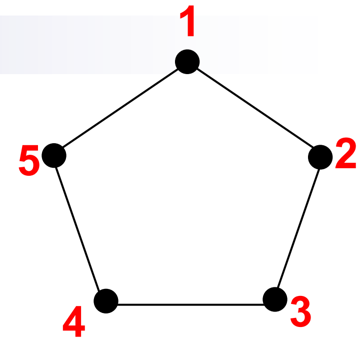
- **5个旋转：**

$$\rho_5^0 = \iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\quad \rho_5^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rho_5^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & \mathbf{2} \end{pmatrix},\quad \rho_5^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

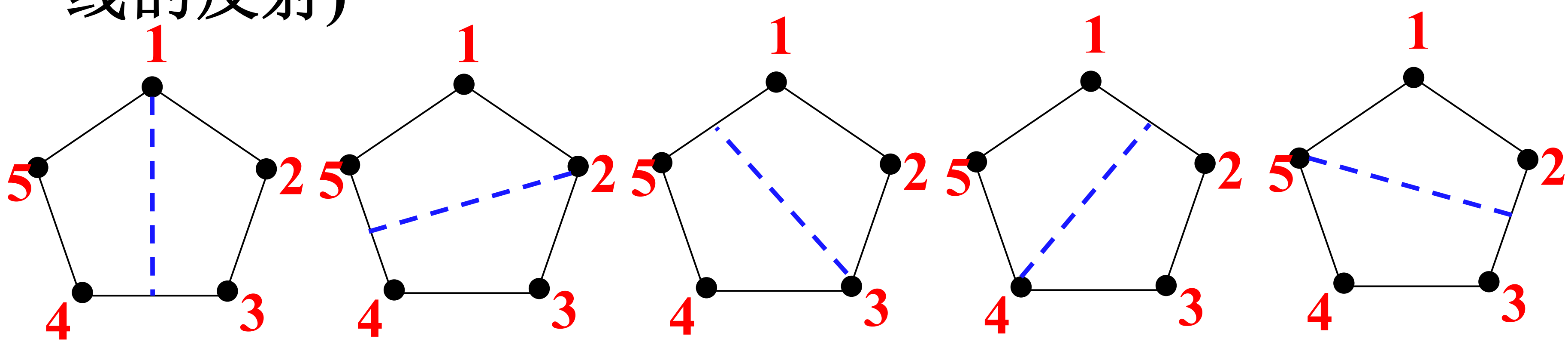
$$\rho_5^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

例（10阶二面体群）：考虑顶点标以1，2，3，4，5的正五角形。



它的（角点）对称群 D_5 包含5个旋转和5个反射。

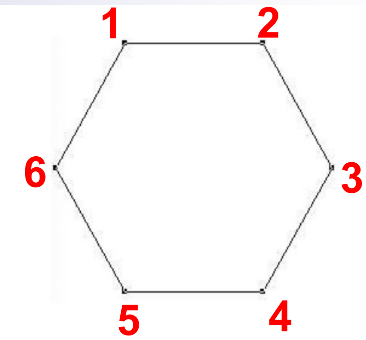
- 5个反射 (5为奇数：5个关于角点与其对边中点的连线的反射)



$$\tau_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\quad \tau_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix}\quad \tau_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

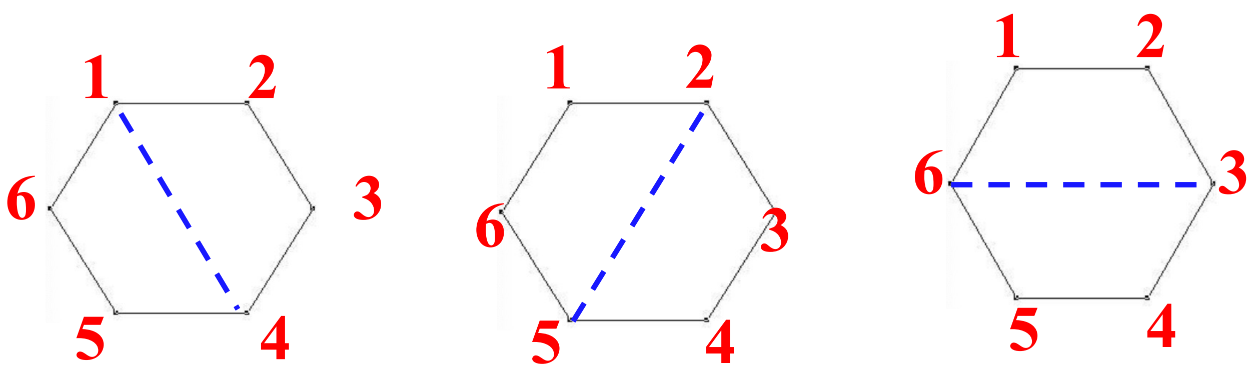
$$\tau_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3\end{pmatrix}\quad \tau_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

例：12阶二面体群：考虑顶点标以1，2，3，4，5，6的正六角形。



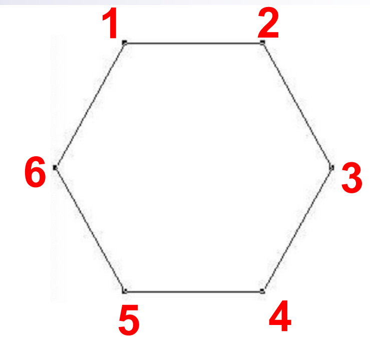
它的（角点）对称群 D_5 包含6个旋转和6个反射。

- 6个反射：3个关于对角点的反射



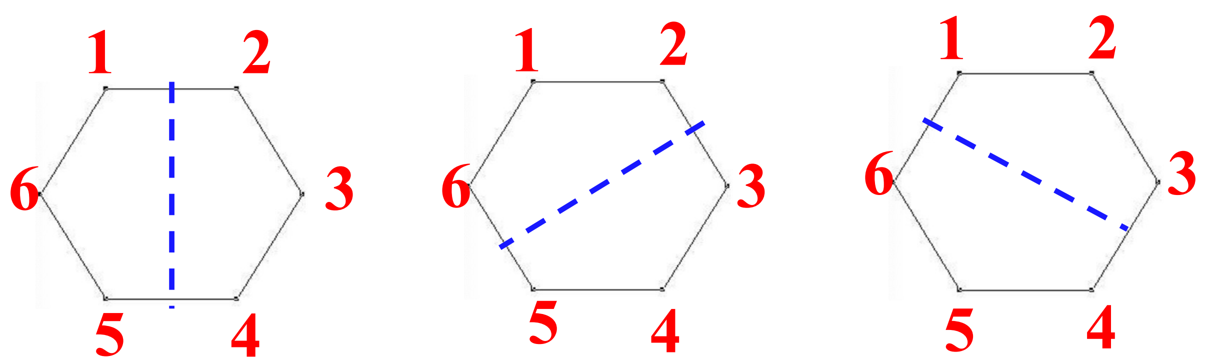
$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

例：12阶二面体群：考虑顶点标以1，2，3，4，5，6的正六角形。



它的（角点）对称群 D_5 包含6个旋转和6个反射。

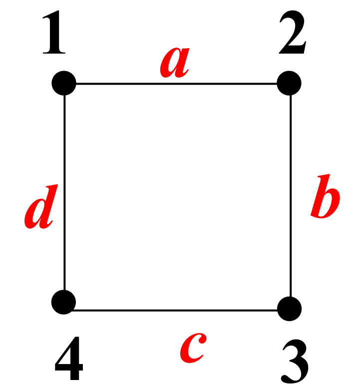
- 6个反射：3个关于对边中点连线的反射



$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,1\,6\,5\,4\,3 \end{pmatrix} \quad \tau_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,3\,2\,1\,6\,5 \end{pmatrix} \quad \tau_6 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}$$

例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 *a*, *b*, *c*, *d*。



作用在边上的两类对称：

(1) 4个平面对称：

$$\rho_4^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

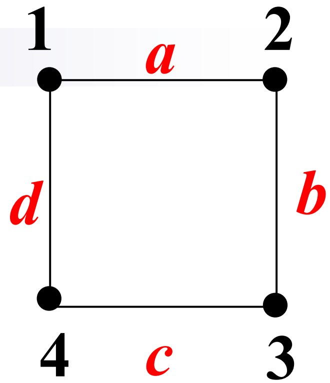
$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

$$\rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

$$\rho_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$

例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 ***a*, *b*, *c*, *d***。



作用在边上的两类对称：

(2) 4个反射：

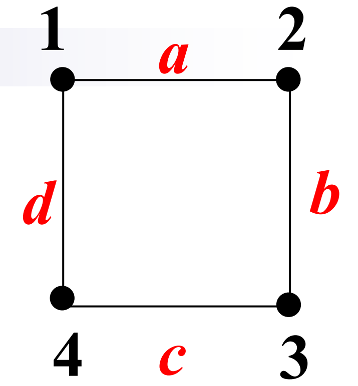
$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\qquad \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\qquad \tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\qquad \tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&c&b&a\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&d&c&b\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&b&a&d\end{pmatrix}$$

例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 a, b, c, d。



作用在边上的两类对称：

(1) 4个平面对称：

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$

(2) 4个反射：

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$$

- 以上8个置换关于合成构成了一个转换群，称为Ω的边对称群，记为 G_E 。

小结

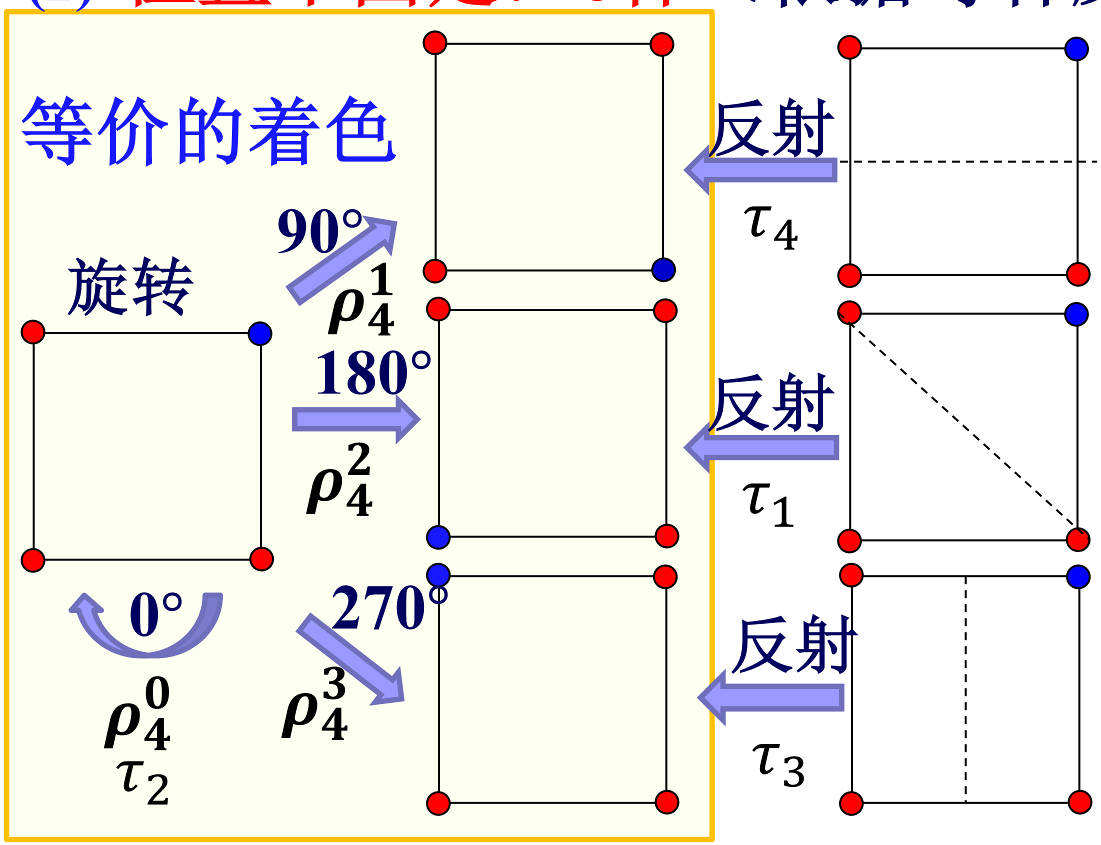
- 几何图形的对称构成的置换群
- 正 n 角形角点对称群
  - n个旋转、n个反射
  - n 分奇偶

置换群与着色

例：用红、蓝两种颜色给正方形的顶点着色，有多少种着色方法？

(1) 位置固定：$2^4=16$种

(2) 位置不固定：6种（依据每种颜色的顶点个数判断）



- “不同”着色实际是等价的
- 一个着色可由一个对称（即置换）得到与其等价的另一个着色

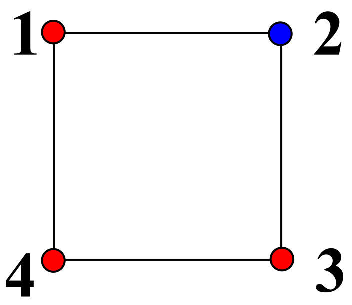
Ω的顶点对称群：

$$G_c=\{\rho_4^0=\iota,\ \rho_4^1,\ \rho_4^2,\ \rho_4^3,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4\}$$

置换群与着色

假设集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$， 及 X 的置换群 G,

- X的一种着色 c 是对 X 的每一个元素指定一种颜色的方案
- 令 c 表示 X 的一种着色，$c(i)$ 表示 i 的颜色 ($i=1, 2, \ldots, n$)



$c(1)=$ “红色”
$c(2)=$ “蓝色”
$c(3)=$ “红色”
$c(4)=$ “红色”

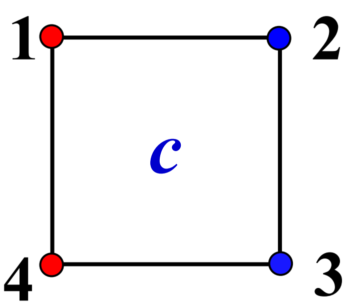
假设集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$， 及 X 的置换群 G。
令 C 表示 X 的所有着色的集合。
要求 G 按以下方法把 C 中一种着色对应到 C 中另一种着色：令 $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & k & & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 是 G 中的一个置换，
定义 $f*c$ 是使 i_k 具有颜色 $c(k)$ 的着色，

即 $(f*c)(i_k) = c(k)$，$(k=1, 2, \ldots, n)$ (1)

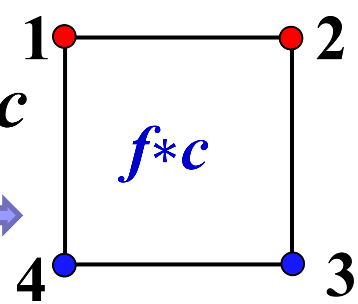
即：f 将 k 变 到 i_k, 则 k的颜色$c(k)$ 移到 $f(k)=i_k$ 并且成为 i_k 的颜色。

$$k \xrightarrow{f} i_k \xrightarrow{c} c(i_k) = c(k),\ k\in X$$

$c(1)=$ R
$c(2)=$ B
$c(3)=$ B
$c(4)=$ R



$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} *c$$



$f*c(1)=$ R
$f*c(2)=$ R
$f*c(3)=$ B
$f*c(4)=$ B

假设集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$， 及 X 的置换群 G。

令 C 表示 X 的所有着色的集合。

要求 G 按以下方法把 C 中一种着色对应到 C 中另一种着色：令 $f=\begin{pmatrix}1 & 2 \ldots & k & & n\\ i_1 & i_2 \ldots & i_k & \cdots & i_n\end{pmatrix}$ 是 G 中的一个置换，

定义 $f*c$ 是使 i_k 具有颜色 $c(k)$ 的着色，

即 $(f*c)(i_k) = c(k)$，$(k=1, 2, \ldots, n)$ (1)

即：f 将 k 变 到 i_k, 则 k的颜色$c(k)$ 移到 $f(k)=i_k$ 并且成为 i_k 的颜色。

$$k \xrightarrow{f} i_k \xrightarrow{c} \quad c(i_k) = c(k),\ k\in X$$

- 若 $i_k = l$， 则$k = f^{-1}(l)$，式 (1)可写作：

$$(f*c)(l) = c(f^{-1}(l))$$

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}\in \boldsymbol{G},\ \boldsymbol{c}\in \boldsymbol{C},\ (\boldsymbol{f}*\boldsymbol{c})(\boldsymbol{i_k})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{k}),\ (\boldsymbol{k}=1,2,\dots,\boldsymbol{n})$$

- 着色集 C 需要具备如下性质：

对于G中任意置换 f 和 C 中任意着色 c，$f*c$仍属于 C。
即：f把 C中的每一个着色移动到C中的另一种着色（可以是相同的着色）

例如：令 C 是相对于给定的颜色集，对集合X 的所有着色的集合。

如用红色和蓝色对集合 $X=\{1, 2, \dots, n\}$进行着色，则共有 2^n 种着色。

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in G,\ c \in C,\ (f*c)(i_k) = c(k),\ (k = 1, 2, \dots, n)$$

- 结论： $(g \circ f)*c = g*(f*c)$

证明： 对任意的 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$，

$(g \circ f)*c(k)$ 是用 k 的颜色对 $(g \circ f)(k)$进行着色，

而 $g*(f*c)\ (k)$ 是用 k 的颜色给$f(k)$进行着色，

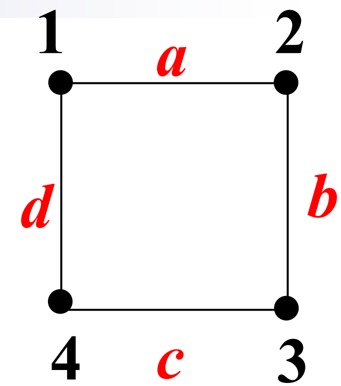
然后再用 $f(k)$ 的颜色给 $g(f(k))$ 进行着色，

即用 k 的颜色给$g(f(k))$ 进行着色。

由合成运算的定义，有 $(g \circ f)(k) = g(f(k))$，

所以， $(g \circ f) * c = g * (f * c)$。

例：用红、蓝两种颜色给右图所示的正方形 Ω 的4个顶点着色。考虑置换群：

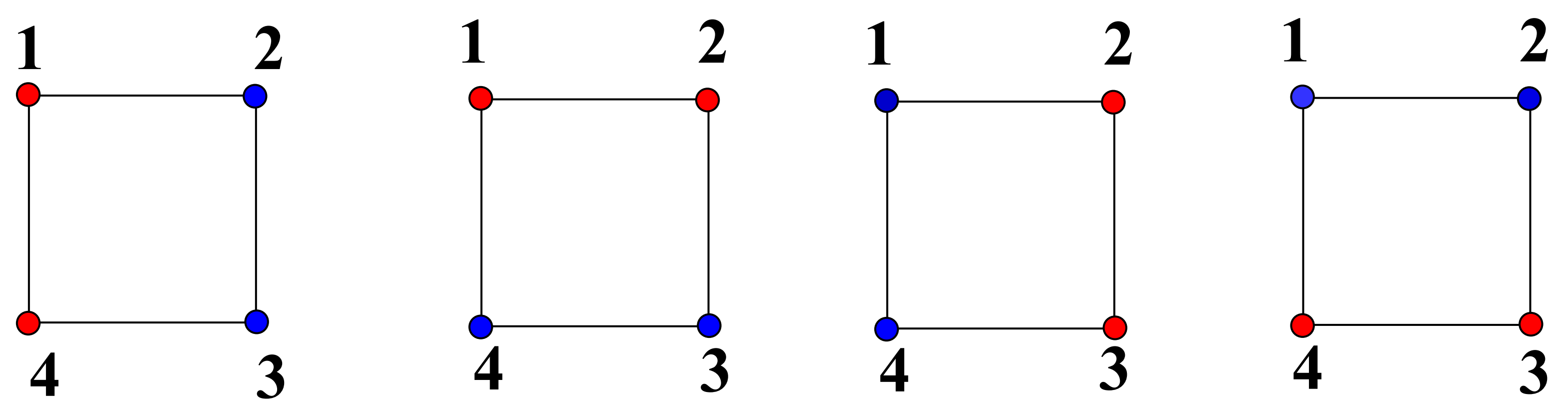


$G_c=\{\rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$是Ω的顶点对称群，

C是 Ω的角点1, 2, 3, 4 颜色为红色或蓝色的所有着色的集合，此时， $|G_C|=8$, $|C|=16$

问题：有多少种“非等价”的着色方法数？

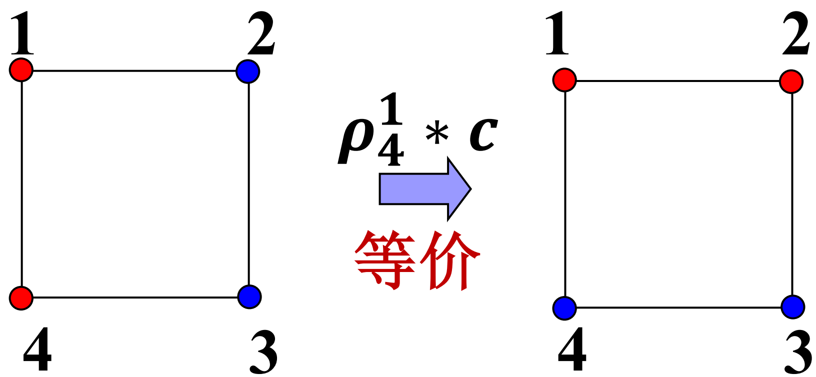
例如：4个“等价”的着色：



Ω的顶点对称群： $G_c = \{ \rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \}$

问题：有多少种“不等价”的着色方法数？

例如：



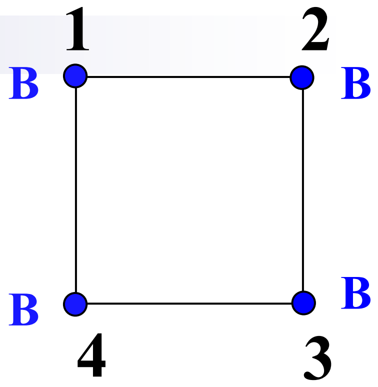
使 i_k 具有颜色 $c(k)$

$$\rho_4^1 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} k \\ i_k \end{array}$$

c=(R, B, B, R) $\rho_4^1 * \mathbf{c} =$ (R, R, B, B)

- 置换不会改变一个着色中各颜色的角点个数。
  - ✓ 正方形中红色的角点个数可以为：0，1，2，3，4
- 两种着色等价的一个必要条件是它们包含相同数目的红色角点和相同数目的蓝色角点。
  - ✓ 但一般情况下不是充分条件

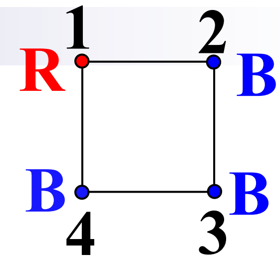
$$G_c = \{ \rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \}$$

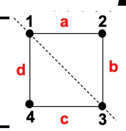
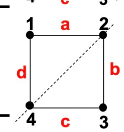
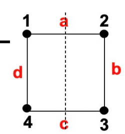
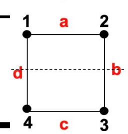


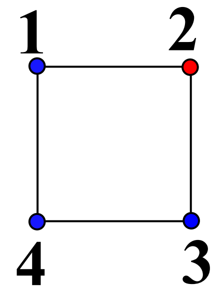
G_C中的置换	作用在着色(B, B, B, B)上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(B, B, B, B)
ρ_4^1	(B, B, B, B)
ρ_4^2	(B, B, B, B)
ρ_4^3	(B, B, B, B)
τ_1	(B, B, B, B)
τ_2	(B, B, B, B)
τ_3	(B, B, B, B)
τ_4	(B, B, B, B)

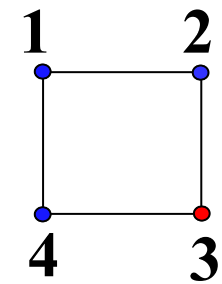
1种着色，出现8次

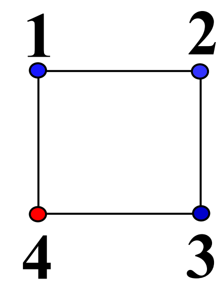
$G_c=\{\ \rho_4^0=\iota,\ \rho_4^1,\ \rho_4^2,\ \rho_4^3,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4\ \}$



G_C中的置换	作用在着色(R, B, B, B)上的结果
$\rho_4^0=\iota$	(R, B, B, B)
ρ_4^1	(B, R, B, B)
ρ_4^2	(B, B, R, B)
ρ_4^3	(B, B, B, R)
 τ_1	(R, B, B, B)
 τ_2	(B, B, R, B)
τ_3 	(B, R, B, B)
τ_4 	(B, B, B, R)

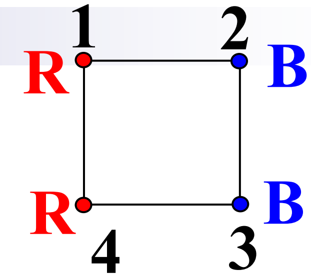


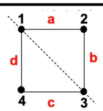
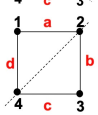
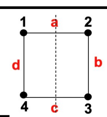
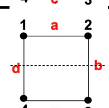


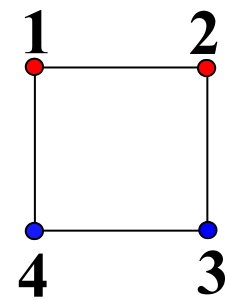


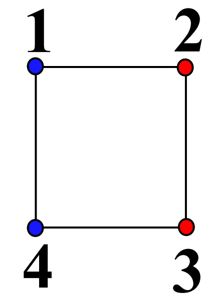
- 4种着色，每种出现2次
- 这4种着色是等价的

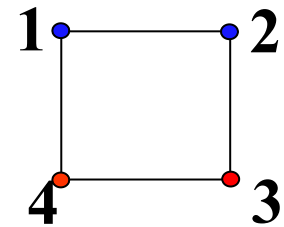
$G_c = \{\ \rho_4^0 = \iota,\ \rho_4^1,\ \rho_4^2,\ \rho_4^3,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4\ \}$



G_C中的置换	作用在着色(R, B, B, R)上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(R, B, B, R)
ρ_4^1	(R, R, B, B)
ρ_4^2	(B, R, R, B)
ρ_4^3	(B, B, R, R)
 τ_1	(R, R, B, B)
 τ_2	(B, B, R, R)
τ_3 	(B, R, R, B)
τ_4 	(R, B, B, R)

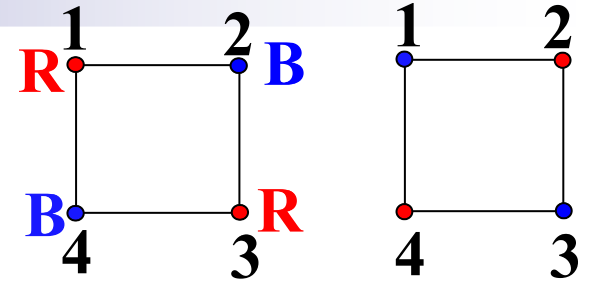


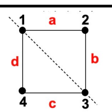
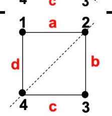
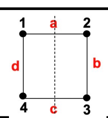
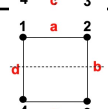




- ✓ **4种着色，每种出现两次**
- ✓ **这4种着色是等价的**

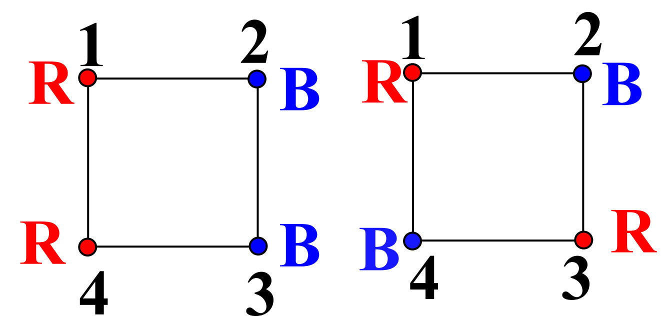
G_c ={ ρ_4^0= ι, ρ_4^1, ρ_4^2, ρ_4^3, τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 }



G_C中的置换	作用在着色(R, B, R, B)上的结果
$\rho_4^0=\iota$	(R, B, R, B)
ρ_4^1	(B, R, B, R)
ρ_4^2	(R, B, R, B)
ρ_4^3	(B, R, B, R)
 τ_1	(R, B, R, B)
 τ_2	(R, B, R, B)
τ_3 	(B, R, B, R)
τ_4 	(B, R, B, R)

✓ 2种着色，每种出现四次

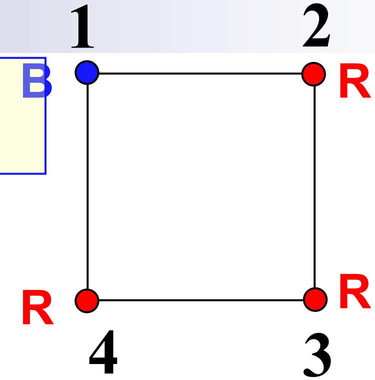
✓ 这2种着色是等价的

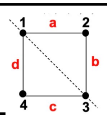
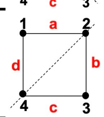
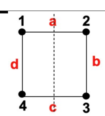
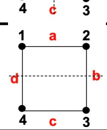


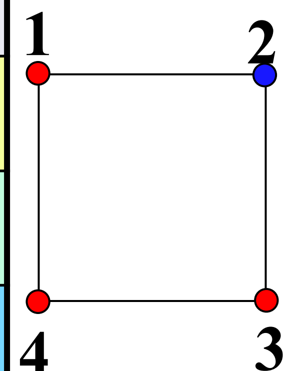
是否等价？

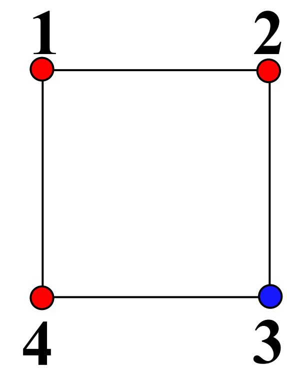
不等价：不存在G_C中的置换使得其中一个变为另一个

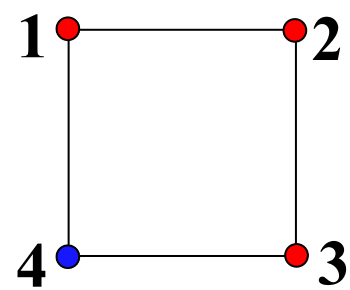
G_c ={ ρ_4^0= ι, ρ_4^1, ρ_4^2, ρ_4^3, τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 }



G_C中的置换	作用在着色(B, R, R, R)上的结果
ρ_4^0 =ι	(B, R, R, R)
ρ_4^1	(R, B, R, R)
ρ_4^2	(R, R, B, R)
ρ_4^3	(R, R, R, B)
 τ_1	(B, R, R, R)
 τ_2	(R, R, B, R)
τ_3 	(R, B, R, R)
τ_4 	(R, R, R, B)



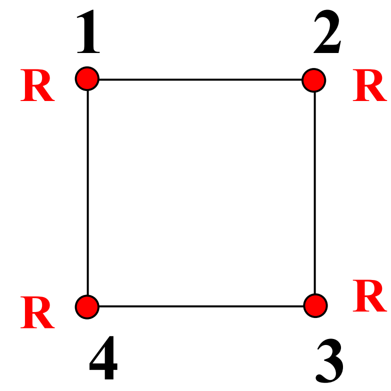




✓ 4种着色，每种出现2次

✓ 这4种着色是等价的

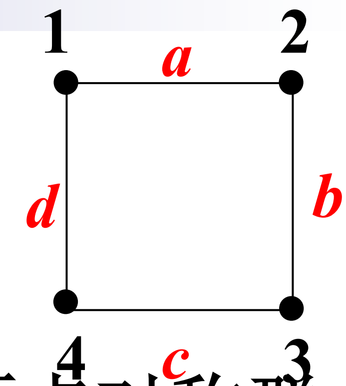
G_c ={ $\rho_4^0 = \iota$, ρ_4^1, ρ_4^2, ρ_4^3, τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 }



G_C中的置换	作用在着色(R, R, R, R)上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(R, R, R, R)
ρ_4^1	(R, R, R, R)
ρ_4^2	(R, R, R, R)
ρ_4^3	(R, R, R, R)
τ_1	(R, R, R, R)
τ_2	(R, R, R, R)
τ_3	(R, R, R, R)
τ_4	(R, R, R, R)

✓ 1种着色，出现8次

例：用红、蓝两种颜色给右图所示的正方形 Ω 的4个顶点着色。



已知：

$G_c=\{\rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$是Ω的顶点对称群，

C是 Ω的角点1, 2, 3, 4 颜色为红色或蓝色的所有着色的集合，此时， $|G_C|=8$, $|C|=16$

在G_c作用下，用两种颜色对Ω进行着色，非等价的着色方法共有 6 种：

等价类

红色顶点数	0	1	2		3	4	总数
非等价着色方法数	1	1	2		1	1	6
代表的着色方法数	1	4	4	2	4	1	16

着色等价关系

令 G 是作用在集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$上的一个置换群，C 为 X 的一个着色集合，使得对于 G 中的任意置换 f 和 C 中任意着色 c，X 的着色 $f*c$ 仍属于C。

- 定义C中的关系 ～：设c_1与c_2是C中的任意两种着色，
  - ✓如果存在G中的一个置换 f，使得 $f*c_1 = c_2$，则称 c_1 等价于c_2，记为$c_1 \sim c_2$; 反之，则称 c_1与c_2不等价
- 关系～ 满足：
  - ✓ 自反性：对于任意c，$c \sim c$。
  - ✓ 对称性：如果$c_1 \sim c_2$，则$c_2 \sim c_1$。
  - ✓ 传递性：如果$c_1 \sim c_2$， $c_2 \sim c_3$，则$c_1 \sim c_3$。

～是C上的等价关系

着色等价关系

令 G 是作用在集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$上的一个置换群，C 为 X 的一个着色集合，使得对于 G 中的任意置换 f 和 C 中任意着色 c，X 的着色 $f*c$ 仍属于C。

- 定义C中的关系 ～：设c_1与c_2是C中的任意两种着色，
  - ✓如果存在G中的一个置换 f，使得 $f*c_1 = c_2$，则称 c_1 等价于c_2，记为$c_1 \sim c_2$; 反之，则称 c_1与c_2不等价
- ～是 C 上的等价关系
  - ✓ C 关于～的每个等价类是 C 的一个由等价着色构成的子集。

等价类$[c]_\sim$：与 c 等价的着色集合 $\{f*c \mid f\in G\}$

问题：如何计算非等价的着色数？

Burnside定理、Polya计算公式

第十四章Pólya计数

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

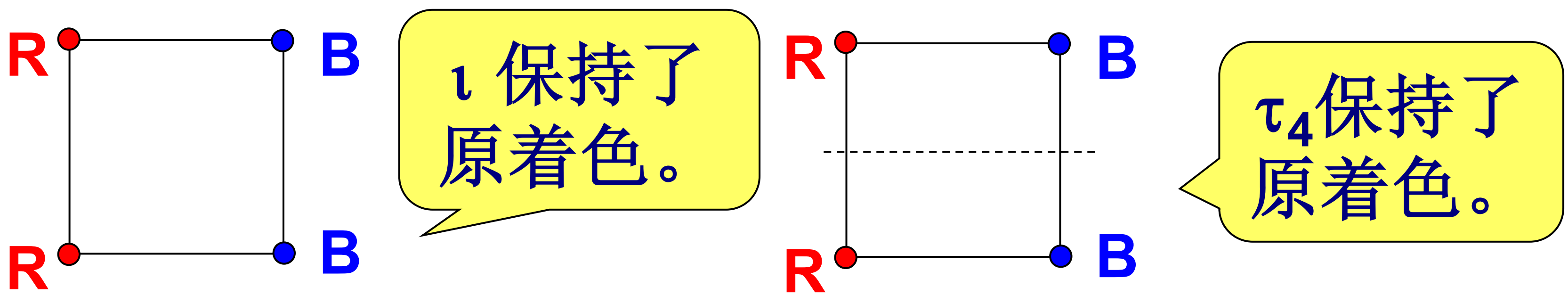
Burnside定理

- 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G 作用在C上，满足：对于 G 中任意置换 f 与 C 中任意着色 c，$f*c \in C$
- 在集合X 的置换群G的作用下，计算 X 的非等价着色数的Burnside公式

稳定核与不变着色集

- 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G 作用在C上，满足：对于 G 中任意置换 f 与 C 中任意着色 c， $f*c \in C$

例：



保持原着色的置换构成该着色的稳定核。

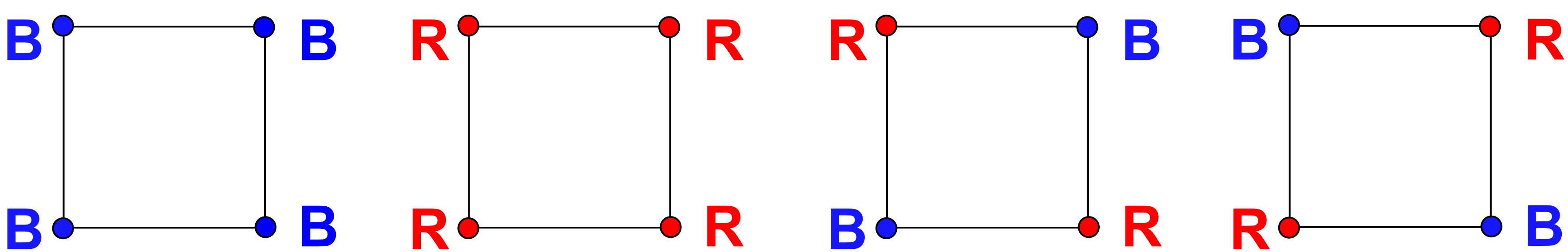
稳定核与不变着色集

- 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G 作用在C上，满足：对于 G 中任意置换 f 与 C 中任意着色 c，$f*c \in C$

例：

$$\rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

以下 4种着色在ρ_4^2作用下保持不变



在一个置换作用下保持不变的着色构成该置换的不变着色集。

稳定核与不变着色集

设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

- 使着色 c 保持不变的G中所有置换的集合

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f * c = c \}, \quad c \in C$$

称为 c 的稳定核。

$G(c) \subseteq G$

结论：任何着色 c 的稳定核也形成一个置换群。

- 在置换 f 作用下保持不变的C中所有着色的集合：

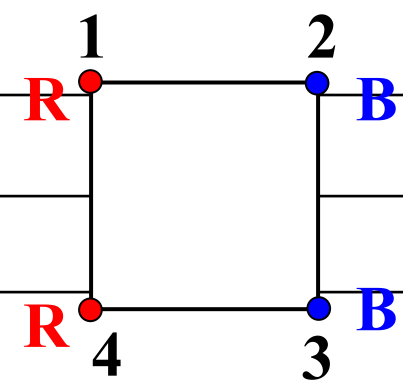
$$C(f) = \{ c \mid c \in C, f * c = c \}, f \in G$$

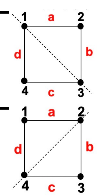
称为 f 的不变着色集。

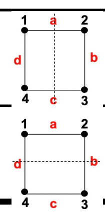
$C(f) \subseteq C$

例：

G_C中的置换	作用在着色 $c=$ (R, B, B, R) 上的结果
$\rho_4^0=\iota$	$\boxed{\text{(R, B, B, R)}}$
ρ_4^1	(R, R, B, B)
ρ_4^2	(B, R, R, B)
ρ_4^3	(B, B, R, R)
τ_1	(R, R, B, B)
τ_2	(B, B, R, R)
τ_3	(B, R, R, B)
τ_4	$\boxed{\text{(R, B, B, R)}}$







着色 $c=$ (R, B, B, R) 的稳定核 $G(c)=\{\rho_4^0=\iota, \tau_4\}$。

(1) $\iota\circ\tau_4=\tau_4\circ\iota=\tau_4$， $\iota\circ\iota=\iota$， $\tau_4\circ\tau_4=\iota$ (合成运算封闭性)

(2) $\iota\in G(c)$ (单位元)； (3) $\iota^{-1}=\iota$, $\tau_4^{-1}=\tau_4$ (存在逆元)

(4) 显然有结合律。因此，$G(c)$是置换群。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f\in G, f*c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，

$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1}\circ g \in G(c)$。

证明：(1) 置换群的四个条件：合成运算的封闭性，满足结合律，存在单位元和逆元。

(a)设$f, g\in G(c)$，则$(g\circ f)*c=g*(f*c)=g*c=c$，

所以$g\circ f \in G(c)$，即在合成运算下，$G(c)$具有封闭性。

(b)由于置换的合成满足结合律，因此，$G(c)$关于合成满足结合律。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，

$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1} \circ g \in G(c)$。

证明： (1) 置换群的四个条件：合成运算的封闭性，满足结合律，存在单位元和逆元。

(c) 由于对任意$k \in X$，$\iota*c(k)=c(k)$，得 $\iota *c = c$。

因此，$\iota \in G(c)$， ι 为单位元。

(d) 设$f \in G(c)$，有$f*c= c$，

则 $f^{-1}* c = f^{-1}* f(c)= (f^{-1} \circ f)(c)= \iota (c)=c$，得$f^{-1} \in G(c)$，

因此，$G(c)$对逆元具有封闭性。

综上，$G(c)$是一个置换群。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G作用在C上。 $G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \}$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，

$(f^{-1} \circ g)*c = c$

$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1} \circ g \in G(c)$。

证明：(2) ($\Rightarrow$) 如果 $g*c = f*c$，则

$(f^{-1} \circ g)*c = f^{-1}*(g*c) = f^{-1}*(f*c) = (f^{-1} \circ f)*c = \iota*c = c$。

所以 $f^{-1} \circ g$ 使 c 不变，因此，$f^{-1} \circ g \in G(c)$。

($\Leftarrow$) 如果 $f^{-1} \circ g \in G(c)$，则$(f^{-1} \circ g)*c = c$，

所以 $g*c = ((f \circ f^{-1}) \circ g)*c = (f \circ (f^{-1} \circ g))*c$

$= f*((f^{-1} \circ g)*c) = f*c$。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，

$$g*c = f*c \text{ 当且仅当 } f^{-1}\circ g \in G(c)。$$

问题：如何求在置换群 G 作用下的与 c 等价的着色数？

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数$|\{f*c \mid f \in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \dfrac{|G|}{|G(c)|}$。

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数$|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数, 即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \dfrac{|G|}{|G(c)|}$ 。

证明：由定理14.2.1知，

$g*c = f*c \iff (f^{-1}\circ g) *c = c \iff f^{-1}\circ g \in G(c)$

$\iff \exists\ h \in G(c)$, 使得 $f^{-1}\circ g = h$, 即 $g = f\circ h$。

因此，与 f 作用在 c 上有同样效果的置换集合为：

$$\{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \}\subseteq \{ f\circ h \mid h\in G(c)\}。$$

对任意 $f\circ h$, 其中$h\in G(c)$， 由于

$$(f\circ h)*c = f*(h * c) =f *c,$$

因此 $f\circ h\in \{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \}$,

得$\{ f\circ h \mid h\in G(c)\} \subseteq \{ g \mid g \in G,\ g * c=f * c \}$,

所以有$\{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \} = \{ f\circ h \mid h\in G(c)\}$。

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于 G 的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，即 $|\{f*c \mid f\in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}$。

证明（续）：已证 $\{g \mid g\in G,\ g*c=f*c\} = \{f\circ h \mid h\in G(c)\}$。

对任意的 $h, h' \in G(c)$，若 $f\circ h = f\circ h'$，

由消去律知 $h = h'$，得 $|\{f\circ h \mid h\in G(c)\}| = |G(c)|$。

因此，$|\{g \mid g\in G,\ g*c=f*c\}| = |\{f\circ h \mid h\in G(c)\}| = |G(c)|$。

从而，对于每个置换 f，恰好存在 $|G(c)|$ 个置换，这些置换作用在 c 上与 f 有同样的效果。

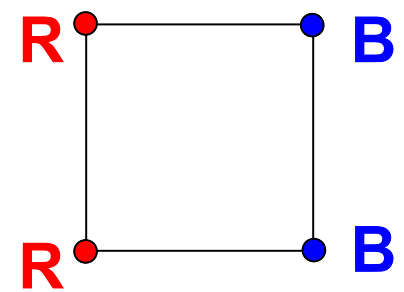
而总共有 $|G|$ 个置换，所以，与 c 等价的着色数为

$$|\{f*c \mid f\in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}。$$

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数$|\{f*c \mid f\in G\}|$等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数, 即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \dfrac{|G|}{|G(c)|}$。

例：与 c_1=(R, B, B, R)等价的着色：

(R, B, B, R)、(R, R, B, B)、(B, R, R, B)、(B, B, R, R),



即等价数目为4。

G_c ={ $\rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ }

$G_c(c_1) = \{\iota, \tau_4\}$

在G_c作用下，与c_1等价等价的着色数为

$$\frac{|G_c|}{G_c(c_1)} = \frac{8}{2} = 4$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中 $C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$

- 设 $G=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$，则 $N(G, C) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|C(f_i)|$。

证明思想：（组合证明） 采用两种不同方式进行计数，然后使计数相等。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中 $C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$

证明：计数使 f 保持c不变（即$f * c=c$）的对偶 (f, c)的个数。存在两种计数方式：

- f 是保持 c 不变的置换
- c 是在置换f 作用下保持不变的着色

$f * c=c \Leftrightarrow c \in C(f)$

$\Leftrightarrow f \in G(c)$

$$|\sum_{f\in G, c\in C(f)}(f, c)| = |\sum_{c\in C, f\in G(c)}(f, c)|$$

$$\sum_{f\in G}|C(f)| = \sum_{c\in C}|G(c)|$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为： $N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中 $C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$

证明：计数使 f 保持c不变（即$f * c=c$）的对偶 (f, c)的个数。存在两种计数方式：

(1)方式1：考察G中每个 f，计算 f 保持不变的着色数，然后相加，得对偶数为 $\sum_{f\in G}|C(f)|$。

(2)方式2：考察C中的每个c，计算满足$f * c=c$的置换数，然后相加，得对偶数为 $\sum_{c\in C}|G(c)|$。

则有 $\sum_{f\in G}|C(f)| = \sum_{c\in C}|G(c)|$。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中 $C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$

证明：由推论14.2.2得 $|G(c)| = \dfrac{|G|}{|\{f*c \mid f \in G\}|}$，

其中，$|\{f * c \mid f \in G\}|$是与着色c等价的着色数。

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数$|\{f*c \mid f\in G \}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数, 即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \dfrac{|G|}{|G(c)|}$。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中 $C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$

证明：由推论14.2.2得 $|G(c)| = \dfrac{|G|}{|\{f*c \mid f \in G\}|}$，

因此，$\sum_{c\in C}|G(c)| = \sum_{c\in C}\dfrac{|G|}{|\{f*c \mid f \in G\}|}$

$$= |G|\times\sum_{c\in C}\frac{1}{|\{f*c \mid f \in G\}|}。$$

证明（续）：已证：$\sum_{c\in C}|G(c)| = |G|\times \boxed{\sum_{c\in C}\frac{1}{|\{f*c\mid f\in G\}|}}$.

由于非等价着色数 $N(G, C)$等于等价着色构成的等价类个数，令 $C_1, \ldots, C_{N(G,C)}$ 为 C 的所有等价类，

则有 $\boxed{\sum_{c\in C}\frac{1}{|\{f*c\mid f\in G\}|}} = \sum_{i=1}^{N(G,C)}\sum_{c\in C_i}\frac{1}{|\{f*c\mid f\in G\}|}$。

$$= \sum_{i=1}^{N(G,C)}\sum_{c\in C_i}\frac{1}{|C_i|}$$

$$= \sum_{i=1}^{N(G,C)} 1 = N(G, C)$$

$|\{f*c\mid f\in G\}|$是与着色c等价的着色数

得 $\sum_{c\in C}|G(c)| = |G|\times N(G, C)$，从而有

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{c\in C}|G(c)| = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|。$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为： $N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中 $C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$

- 计数非等价的着色数$N(G, C)$的步骤：
  1. 确定置换群G;
  2. 确定着色集C;
  3. 计数G中每个置换的不变着色集（或每个着色的稳定核）的大小;
  4. 使用Burnside公式 $N(G, C) = \frac{\sum_{f\in G}|C(f)|}{|G|} = \frac{\sum_{c\in C}|G(c)|}{|G|}$

例：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

解：正方形的顶点对称群为

$$D_4=\{ \rho_4^0= \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1,\tau_2,\tau_3, \tau_4 \}。$$

令正方形的角点的着色集为C，有$|C|=2^4=16$。

(1) 单位元ι使所有着色保持不变，即$C(\iota)= C$，

得$|C(\iota)|=16$。

(2) 旋转ρ_4和ρ_4^3各自保持 2 种着色，即所有顶点为红色和所有顶点为蓝色的着色不变，因此

$$C(\rho_4)=\{(R, R, R, R), (B, B, B, B)\},$$

$$C(\rho_4^3) =\{(R, R, R, R), (B, B, B, B)\},$$

得$|C(\rho_4)|=|C(\rho_4^3)|=2$。

例：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

解（续）：正方形的顶点对称群为

$$D_4=\{ \rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1,\tau_2,\tau_3, \tau_4 \}。$$

令正方形的角点的着色集为C，有$|C|=2^4=16$。

(3) 旋转ρ_4^2保持4种着色，即所有顶点为相同颜色以及红和蓝间隔出现的着色不变，

因此$C(\rho_4^2)$ ={(R, R, R, R),(B, B, B, B), (R, B, R, B),(B, R, B,R)}，

得 $|C(\rho_4^2)|=4$

解（续）：(4) 为了使在反射τ_1作用下着色保持不变，顶点1和3可以选择任何颜色，顶点2和4必须具有相同颜色。

所以，在τ_1的作用下保持着色不变的方法为：

对顶点1选择一种颜色（2种选择），

对顶点3选择一种颜色（2种选择），

对顶点2和4选择一种颜色（2种选择）。

所以，在τ_1的作用下保持着色不变的着色数是

$|C(\tau_1)|=2\times2\times2=8$。

(5) 类似地，在τ_2的作用下保持着色不变的着色数是

$|C(\tau_2)|= 2\times2\times2=8$。

解（续）：(6) 为了使在反射τ_3作用下着色保持不变，顶点1和2必须具有相同颜色，顶点3和4必须具有相同颜色。所以，在τ_3的作用下保持着色不变的方法：

对顶点1和2选择一种颜色（2种选择），

对顶点3和4选择一种颜色（2种选择）。

因此，在τ_3的作用下保持着色不变的着色数是

$$|C(\tau_3)| = 2\times2=4。$$

(7) 类似地，在τ_4的作用下保持着色不变的着色数是

$$|C(\tau_4)| = 2\times2=4。$$

根据Burnside定理，总的着色方法数为：

$$N(C, D) = \frac{1}{8}(16 + 2 + 4 + 2 + 8 + 8 + 4 + 4)=6$$

例：(循环排列计数) 把n个不同的对象放在一个圆上，有多少种放法？$(n-1)!$

解：相当于用n种不同颜色对正n角形 Ω 的顶点进行着色。

令$G=\{\rho_n^0, \rho_n^1, \ldots, \rho_n^{n-1}\}$，且$C$ 是对 Ω 的n个顶点进行着色且每种颜色只出现一次的所有着色集合，则$|C|= n!$。

则放法数为着色集C在置换群G下的非等价着色数。

显然，G 的恒等变换ρ_n^0保持 C中所有$n!$种着色不变，即$c(\rho_n^0)=n!$。

因为在C的着色中，每个顶点有不同的颜色，因此且C中其他置换都不保持 C中的任意着色不变，即$c(\rho_n^i)=0$，$i=1,\ldots, n-1$。

由定理14.2.3得非等价着色数为：

$$N(G, C) = \frac{1}{n}(n!+0+\ldots+0) = (n-1)!$$

例（项链计数问题）用$n\geq 3$种不同颜色的珠子组成一条项链，问有多少种方法？$(n-1)!/2$

解：相当于用n种不同的颜色对正n角形 Ω 的顶点进行着色，此时，放法数为 Ω 的正n角形的顶点对称群的非等价着色数。

令C 是对 Ω 的n个顶点进行着色且每种颜色只出现一次的着色集合，则$|C|= n!$。

令作用在C上的$2n$阶的二面体群

$$D_n=\{\rho_n^0, \rho_n^1, \ldots, \rho_n^{n-1}, \tau_1, \ldots, \tau_n\}\text{。}$$

显然，D_n的恒等变换保持 C中所有$n!$种着色不变，即 $c(\rho_n^0)=n!$

因为在C的着色中，每个顶点有不同的颜色，因此且D_n中其他置换都不保持 C中的任意着色不变，即$c(\rho_n^i)=0$，$i=1,\ldots, n-1$，$c(\tau_j)=0$，$j=1,\ldots, n$。

由定理14.2.3得非等价着色数为：

$$N(G,C)=\frac{1}{2n}(n!+0+\ldots+0)=\frac{1}{2}(n-1)!\text{。}$$

- 利用Burnside定理计数不等价的着色数的关键：
  1. 确定置换群G;
  2. 确定着色集C;
  3. 计数G中每个置换f的不变着色集$C(f)$的大小。
  4. 使用Burnside公式
- 缺点：第3步的计数过程比较复杂

为了使该计数过程变得更加容易，仅考虑置换的循环结构，并引入有向圈概念。**Pólya定理**