回顾：差分序列

- 设序列的通项 h_n是n的p次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有：$\Delta^{p+1} h_n = 0$。（定理8.2.1）

- 差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, 0, \ldots, \qquad \text{其中} c_p \neq 0$$

的序列的通项满足：

$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \ldots + c_p\binom{n}{p} \quad \text{（定理8.2.2）}$$

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2} + \ldots + c_p\binom{n+1}{p+1}$$

（定理8.2.3）

回顾：第二类Stirling数

- 对于序列 $h_n = n^p$,设其差分表中第0条对角线上的元素为 $c_0, c_1, \ldots, c_p$, 0, 0,…,
- $n^p = \sum_{k=0}^{p} c_k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!} [n]_k$

  $= \sum_{k=0}^{p} S(p,k) [n]_k$，其中 $[n]_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- 第二类 Stirling 数

$S(p, k) = kS(p\text{-}1, k) + S(p\text{-}1, k\text{-}1),\ 1 \le k \le p\text{-}1$ （定理8.2.4）

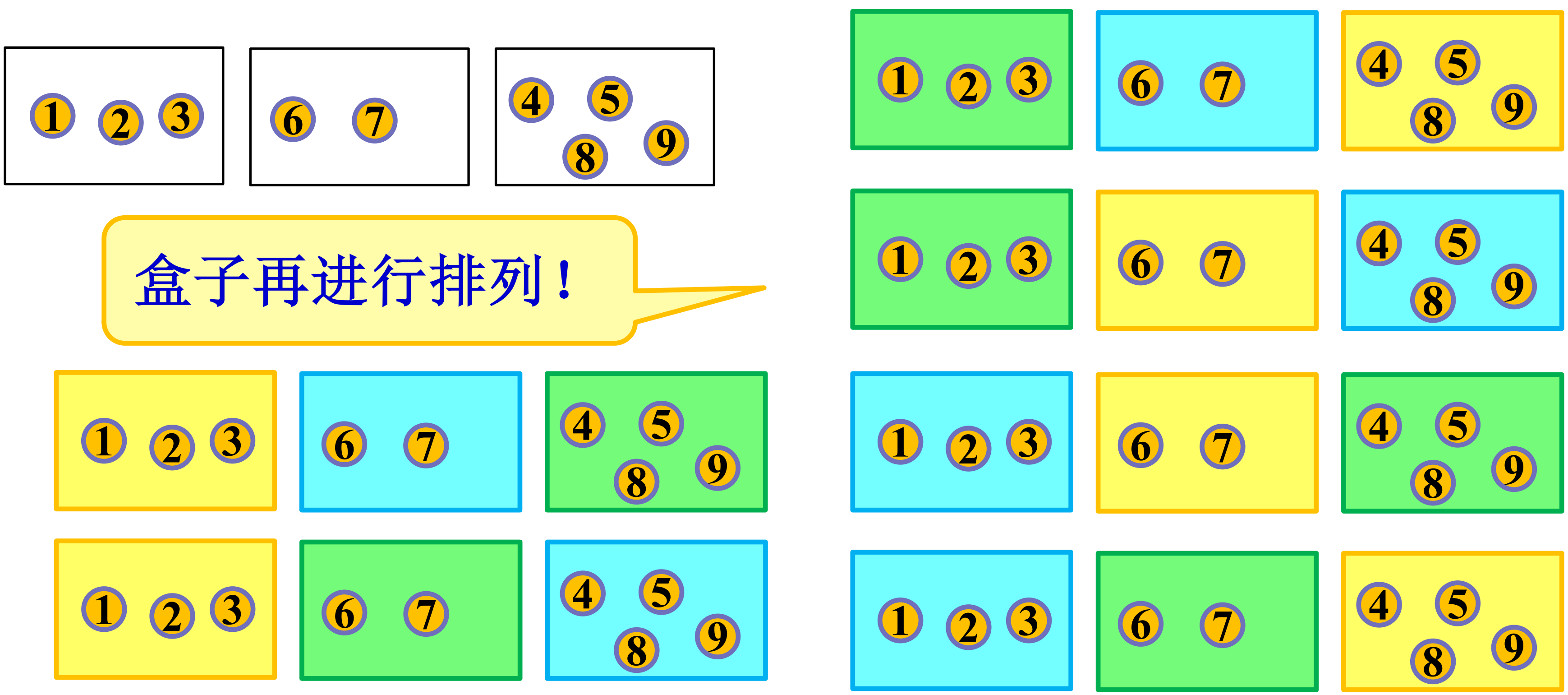
$$S(p,0) = \begin{cases} 1, & \text{当} p = 0 \text{时} \\ 0, & \text{当} p \ge 1 \text{时} \end{cases} \qquad S(p, p) = 1\ (p \ge 1)$$

$S(p, k)$ 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。(定理8.2.5)

盒子无区别&盒子有区别

令$S^{\#}(p, k)$表示把$\{1, 2, \ldots, p\}$分到 k 个可区分的盒子且无空盒的划分个数，则

$$S^{\#}(p, k) = k!\, S(p, k)。$$



定理8.2.6 对每一个满足 $0 \le k \le p$ 的整数 k，都有

$$S^{\#}(p,k)=\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^p,$$

从而 $S(p,k)=\frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^p$。

$S^{\#}(p,k)$：把$\{1, 2, \dots, p\}$分到 k 个可区分的盒子且无空盒的划分个数

证明: (容斥原理) 设 U 是把 $\{1, 2, \dots, p\}$分到 k 个可区分盒子$B_1, B_2, \dots, B_k$的所有划分的集合。

设 A_i 表示以上划分中盒子 B_i 是空盒的划分组成的子集。

则有

$$S^{\#}(p,k)=|\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_k|。$$

定理8.2.6 对每一个满足 $0 \le k \le p$的整数 k，都有

$$S^{\#}(p, k) = \sum_{t=0}^{k}(-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^p,$$

从而 $S(p, k) = \frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^p$。

$S^{\#}(p, k)$：把$\{1, 2, \ldots, p\}$分到 k 个可区分的盒子且无空盒的划分个数

证明: (续) 对任意 $0 \le t \le p$,

$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_t}|$ 是把 $\{1, 2, \ldots, p\}$ 划分到 k-t个可区分盒子的划分个数。（盒子可为空），得

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_t}| = (k\text{-}t)^p。$$

由容斥原理得 $S^{\#}(p, k) = \sum_{t=0}^{k}(-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^p$。

- p 个有区别的物品放入k个无区别的盒子，且没有空盒的放法：$S(n, k)$
- p 个有区别的物品放入k个有区别的盒子，且没有空盒的放法：$S^{\#}(p, k)=k!\,S(n, k)$

p 个物品	k 个盒子	空盒	
有区别	无区别	没有	$S(p, k)$
有区别	有区别	没有	$S^{\#}(p, k)$

- **Bell**数是将 p个元素的集合划分到不可区分的盒子且没有空盒的划分数，记为B_p

盒子数？？

Bell数（以Eric Temple Bell命名）

- Bell数是将 p个元素的集合划分到非空、不可区分的盒子的划分数，记为B_p，则

盒子数≤p

$$B_p = S(p,0)+S(p,1)+\dots+S(p,p),$$

是第二类Stirling数三角形的一行的元素和

$S(p,k)$

p \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	⋯
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

$$S(p,0) = c(p,0) = \begin{cases} 1\text{，当}p = 0\text{时} \\ 0\text{，当}p \geq 1\text{时} \end{cases}$$

定理 8.2.7（Bell数的递推式）如果$p\geq 1$，则

$$B_p = \binom{p-1}{0}B_0 + \binom{p-1}{1}B_1 + \binom{p-2}{2}B_2 \ldots + \binom{p-1}{p-1}B_{p-1}$$

证明：假设把$\{1, 2, \ldots, p\}$划分到非空且不可区分的盒子，

且包含 p的盒子还包含 $\{1, 2, \ldots, p-1\}$的子集 X（可能为空）。

假设 $|X|= t$, 则 $0\leq t \leq p-1$。

由于选择子集 X 有$\binom{p-1}{t}$种方式，

把$\{1, 2, \ldots, p-1\}$中不属于X的 $p-1-t$ 个元素划分到非空且不可区分的盒子中有B_{p-1-t}种方式，

因此有 $B_p=\sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{t}B_{p-1-t}$

$$=\sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{p-1-t}B_{p-1-t} = \sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{t}B_t。$$

小结

- p 个有区别的物品放入k个无区别的盒子且没有空盒的放法：$S(n, k)$
- p 个有区别的物品放入k个有区别的盒子且没有空盒的放法：$S^{\#}(p, k)=k!\,S(n, k)$
- p 个有区别的物品放入无区别的盒子且没有空盒的放法：$B_p = S(p, 0)+S(p, 1)+\ldots+S(p, p)$

第一类Stirling数

$$h_n = n^p = \sum_{k=0}^{p} S(n,k)\,[n]_k$$

$$[n]_k = \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-k+1), & \text{若 } k \geq 1 \\ 1, & \text{若 } k = 0 \end{cases}$$

- 第二类Stirling数 $S(n, p)$
  - 如何用$[n]_0, [n]_1, [n]_2, \ldots [n]_p$写出$n^p$。
  - 把 p个元素的集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒的划分的个数
- 第一类Stirling数 $s(n, p)$
  - 如何用$n^0, n^1, n^2, \ldots, n^p$ 写出$[n]_p$。
  - 将p个物品排成 k个非空的循环排列方法数

第一类Stirling数

由于 $[n]_p = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-(p-1))$

$= (n-0)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-(p-1))$

因此， $[n]_0 = 1$， $[n]_1 = n$

$[n]_2 = n(n-1) = n^2 - n$， $[n]_3 = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$

$[n]_4 = n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n$

……………………

一般地， $[n]_p$展开式有p个因子。

乘开后得到n的幂多项式， $n^p, n^{p-1}, \ldots\ldots, n^1, n^0$,

其系数的符号正负相间；故:

$$[n]_p = a_n^p n^p - a_n^{p-1} n^{p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{p-1} a_n^1 n^1 + (-1)^p a_n^0 n^0$$

第一类Stirling数

$[n]_p = a_n^p n^p - a_n^{p-1} n^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{p-1} a_n^1 n^1 + (-1)^p a_n^0 n^0$

n^k 前的系数 a_n^k 称为第一类Stirling数，记为 $s(p, k)$，即

$[n]_p = s(p, p)n^p - s(p, p\text{-}1)n^{p\text{-}1} + \ldots + (-1)^{p\text{-}1}s(p, 1)n^1$

$+ (-1)^p s(p, 0)\, n^0$

$= \sum_{k=0}^{p} s(p, k) n^k$

由于 $[n]_p = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3)\ldots.(n\text{-}(p\text{-}1))$

得到以下第一类Stirling数:

$s(p, 0) = 0;\ (p \geq 1) \qquad s(p, p) = 1;\ (p \geq 0)$

第二类Sterling数&第一类Stering数

已知 $[\boldsymbol{n}]_{k}=\dfrac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$

- $\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{p}}=\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k})[\boldsymbol{n}]_{\boldsymbol{k}}$
- $[\boldsymbol{n}]_{\boldsymbol{p}}=\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k})\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}$

第一类Stirling数的递推式

定理8.2.8如果 $1 \le k \le p-1$则:

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$$

- 第二类Stirling数递推关系式的区别:

$$S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$$

  - 初值一样，但递推关系不同。

定理8.2.8如果 $1 \le k \le p-1$则:

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$$

证明：已知 $[n]_p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}s(p,k)n^k \quad (*)$

用p-1代替p得，$[n]_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}s(p-1,k)n^k$

由$[n]_p$的展开形式可得出：

$[n]_p = [n]_{p-1}(n-(p-1))$

$= (n-(p-1))\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}s(p-1,k)n^k$

$= n\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}s(p-1,k)n^k$

$\quad -(p-1)\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}s(p-1,k)n^k$

$= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}s(p-1,k)n^{k+1}$

$\quad + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}(p-1)s(p-1,k)n^k$

定理8.2.8如果 $1\leq k\leq p$-1则:

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$$

证明: (续)

$$[n]_p = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}s(p-1,k)n^{k+1} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}(p-1)s(p-1,k)n^k$$

对上式中的第一项用k-1代替 k后得，

$$[n]_p = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}s(p-1,k-1)n^k + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}(p-1)s(p-1,k)n^k \quad (**)$$

把(*)与(**)中的n^k的系统作比较，得

$$s(p, k) = s(p-1, k-1) + (p-1)s(p-1, k)$$

对于所有满足$1\leq k\leq p$-1的每一个k都成立。

定理8.2.8如果 $1 \le k \le p-1$则:

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$$

证明: (续)

$$[n]_p = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}s(p-1,k)n^{k+1}$$
$$+ \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}(p-1)s(p-1,k)n^k$$

对上式中的第一项用k-1代替 k后得,

$$[n]_p = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}s(p-1,k-1)n^k$$
$$+ \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}(p-1)s(p-1,k)n^k \quad (**)$$

把(*)与(**)中的n^k的系统作比较, 得

$$s(p, k) = s(p-1, k-1) + (p-1)s(p-1, k)$$

对于所有满足$1 \le k \le p-1$的每一个k都成立。

定理8.2.9 第一类Stirling数$s(p, k)$是将p个物品排成 k个非空的循环排列的方法数。

证明：令$s^*(p, k)$是将 p个物品排成 k个非空循环排列的方法数。下面证明$s^*(p, k)= s(p, k)$

$s(p, k)$:

如果 $1\le k \le p-1$则 $s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$

$s(p, 0) = 0, \ (p\ge 1)$

$s(p, p) =1, (p\ge 0)$

定理8.2.9 第一类Stirling数$s(p, k)$是将p个物品排成 k个非空的循环排列的方法数。

证明：令$s^*(p, k)$是将 p个物品排成 k个非空循环排列的方法数。下面证明$s^*(p, k)= s(p, k)$

(1) 当$k = p$时，p个物品排成 p个非空的循环排列，每个循环排列只有一个物品，因此 $s^*(p, p) =1$ ($p \geq 0$)。

(2) 当$k = 0$时，显然 $s^*(p, 0) =0$ ($p \geq 1$)。

下面只需证明$s^*(p, k)$满足递推关系

$$s^*(p, k) = (p-1)s^*(p-1, k) + s^*(p-1, k-1)。$$

设p个物品记为 $1, 2, 3, \ldots, p$。

将$1, 2, 3, \ldots, p$ 排成 k 个圆圈有两种类型：

(1) 存在一个循环排列只有p 自己，共有$s^*(p-1, k-1)$种;

(2) p 至少和另一个物品在一个循环排列，

定理8.2.9 第一类Stirling数$s(p, k)$是将p个物品排成 k个非空的循环排列的方法数。

证明:（续）

(2) p 至少和另一个物品在一个循环排列中,

则可以通过把 1, 2, …, p-1 排成 k 个循环排列,

并把 p 放在1, 2, …, p-1任何一个物品的左边得到,

因此共有 $(p-1)\, s^*(p-1, k)$种。

综上，把 p个物品排成 k个非空的循环排列的方法数为

$$s^*(p, k) = (p-1)s^*(p-1, k) + s^*(p-1, k-1)。$$

满足$s(p, k)$的递推式。

综上所述，定理成立。

小结

p 个球	k 个盒	是否为空	方案个数
有区别	有区别	有空盒	k^p
	无区别	无空盒	$S(p, k)$
	有区别	无空盒	$k!\ S(p, k)$
	无区别	有空盒	$S(p, 1)+S(p, 2)+\ldots+S(p, k)$, $p\geq k$
			$S(p, 1)+S(p, 2)+\ldots+S(p, p)$, $p\leq k$
	k个循环排列	非空	$s(p, k)$

第8章 特殊计数序列

8.3 分拆数

举例

例: 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？ 对能称出的重量有几种可称量方案?

- 若有1克的砝码3枚，2克的砝码4枚，4克的砝码2枚，问能称出哪些重量？有几种方案?
- 设有1、 2、 4、 8、 16、32克砝码各一枚，问能称出哪些重量？ 分别有几种方案?

整数分拆

例：把整数 6 分拆成若干正整数的和的形式，

可得以下分拆方式：

6,
5+1,4+2，3+3，
4+1+1，3+2+1，
2+2+2，
3+1+1+1，2+2+1+1
2+1+1+1+1，
1+1+1+1+1+1

- 讨论对整数n的进行两种分拆的组合计数问题

（1）无限制地分拆，

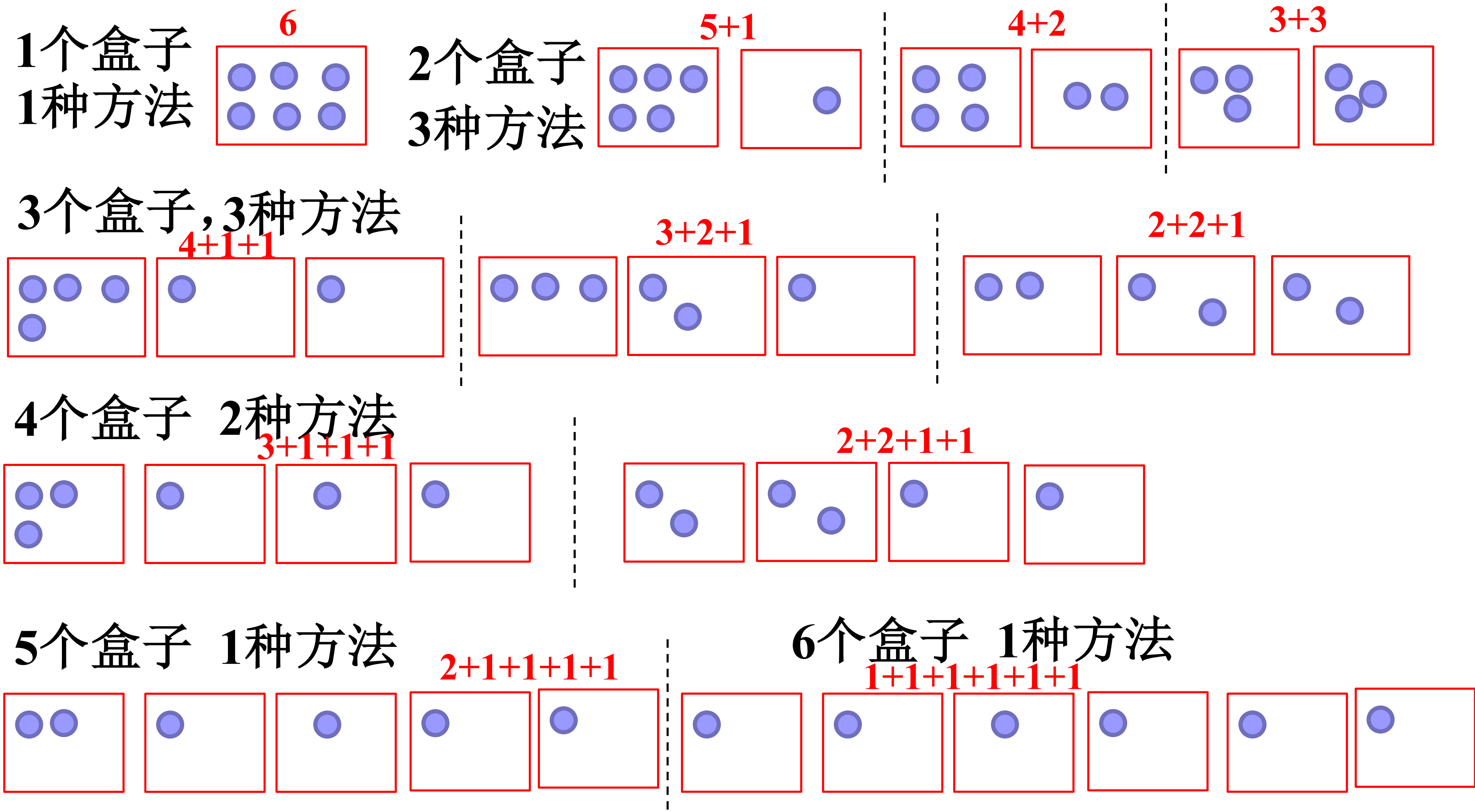
（2）限制分拆块数量的分拆。

不同分拆法的计数叫做分拆数。

整数分拆

与Bell数的区别

例：把6个无区别的球放入无区别盒子，且无空盒



分拆数

设一个正整数 n，若存在正整数集 $\{n_1, n_2,\ldots, n_k\}$ $(1\leq k \leq n，\ 1 \leq n_i\leq n)$，使得

$$n_1+n_2+\ldots+n_k=n$$

$$p_n^1+p_n^2+\cdots+p_n^n=p_n$$

则称 $\{n_1, n_2,\ldots, n_k\}$ 是n的一个分拆。

称每个 n_i 为 n的一个部分（或类）。

记 n的所有包含k个部分的不同分拆的个数为 p_n^k，

n的所有不同分拆的个数记为 p_n，称为n的分拆数。

分拆数

例：整数6的所有分拆：

{6},

{5,1}, {4, 2}, {3, 3},

{4, 1, 1},

{3, 2, 1}， {2, 2, 2},

{3, 1, 1, 1}， {2, 2, 1, 1},

{2, 1, 1, 1, 1},

{1, 1, 1, 1, 1, 1}

$p_6^1 = 1$

$p_6^2 = 3$

$p_6^3 = 3$

$p_6^4 = 2$

$p_6^5 = p_6^6 = 1$

$p_6 = 11$

- 对于 n 的分拆 $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$，
  - ✓ $1 \le n_i \le n$， $1 \le k \le n$
  - ✓ $n_1, n_2, \dots, n_k$ 中可能有重复的数

问题：分拆数的通项公式和递推公式

分拆的表示举例：整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1
6	1					
5+1		1				1
4+2			1		1	
3+3				2		
4+1+1			1		2	
3+2+1						
2+2+2						
3+1+1+1						
2+2+1+1						
2+1+1+1+1						
1+1+1+1+1+1						

分拆的表示举例:整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1	表示
6	1						6^1
5+1		1				1	$5^1 1^1$
4+2			1		1		$4^1 2^1$
3+3				2			3^2
4+1+1			1		2		$4^1 1^2$
3+2+1				1	1	1	$3^1 2^1 1^1$
2+2+2					3		2^3
3+1+1+1				1		3	$3^1 1^3$
2+2+1+1					2	2	$2^2 1^2$
2+1+1+1+1					1	4	$2^1 1^4$
1+1+1+1+1+1						6	1^6

分拆的表示举例：整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1	表示	
6	1						6^1	$6^1 5^0 4^0 3^0 2^0 1^0$
5+1		1				1	$5^1 1^1$	$6^0 5^1 4^0 3^0 2^0 1^1$
4+2			1		1		$4^1 2^1$	$6^0 5^0 4^1 3^0 2^1 1^0$
3+3				2			3^2	$6^0 5^0 4^0 3^2 2^0 1^0$
4+1+1			1		2		$4^1 1^2$	$6^0 5^0 4^1 3^0 2^0 1^2$
3+2+1				1	1	1	$3^1 2^1 1^1$	$6^0 5^0 4^0 3^1 2^1 1^1$
2+2+2					3		2^3	$6^0 5^0 4^0 3^0 2^3 1^0$
3+1+1+1				1		3	$3^1 1^3$	$6^0 5^0 4^0 3^1 2^0 1^3$
2+2+1+1					2	2	$2^2 1^2$	$6^0 5^0 4^0 3^0 2^2 1^2$
2+1+1+1+1					1	4	$2^1 1^4$	$6^0 5^0 4^0 3^0 2^1 1^4$
1+1+1+1+1+1						6	1^6	$6^0 5^0 4^0 3^0 2^0 1^6$

分拆的表示

假设$a_1, a_2, \ldots, a_n$是 n个非负整数，且

$$n = na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + 2a_2 + 1a_1$$

则上式对应 n的一个分拆记作：

$$\lambda = n^{a_n} \ldots 2^{a_2}\ 1^{a_1}。$$

注意：分拆中的部分的顺序不重要，因此总可以排列这些部分使得它们被排列成从大到小的顺序。

分拆数 p_n 的等价表示

假设$a_1, a_2, \ldots, a_n$是 n个非负整数，且

$$n = na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + 2a_2 + 1a_1$$

则上式对应 n的一个分拆记作：

$$\lambda = n^{a_n} \ldots 2^{a_2}\ 1^{a_1}。$$

n的分拆数 p_n 等价于方程

$$na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots. + 2a_2 + a_1 = n$$

的非负整数解 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$的个数。

与多重集的组合数的区别是什么？

分拆数与多重集组合数的区别

多重集 $S=\{\infty\cdot b_1, \infty\cdot b_2, \ldots, \infty\cdot b_k\}$的 n组合数 等于方程

$$e_1+e_2+\ldots+e_k=n \quad \text{个数}$$

的非负整数解个数.

$S=\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \ldots, \infty\cdot n\}$

n的分拆数 p_n 等价于方程

$$na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + 2a_2 + a_1=n \quad \text{值}$$

的非负整数解 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$的个数。

定理：n 的分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k，\quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

（p_n^j：n的所有包含j个部分的分拆的个数）

证明：把 n分拆成1个部分和 n个部分，显然均只有一种可能，即$p_n^1 = p_n^n = 1$。

设E是将n分成不多于k个部分的分拆集合，有$|E| = \sum_{j=1}^{k} p_n^j$.

属于 E 的每个分拆可看成是一个 k元组（其分量用 0 补足k位）：

$$\alpha = (\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0}_{k\text{项}}),\ n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m,\ 1 \le m \le k\,.$$

定义映射 φ，使得 对 E中的每个分成 m个部分的分拆

$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0)$ （即 $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$），

有 $\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_m + 1, 1, 1, \ldots, 1)$ 。

则 α' 是 $n+k$ 的一个包含 k个部分的分拆。

定理：n 的分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k, \quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

（p_n^j：n的所有包含j个部分的分拆的个数）

$$E = \{\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0) \mid 1 \le m \le k\}$$

$$E' = \{\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1+1, a_2+1, \ldots, a_m+1, 1, 1, \ldots, 1) \mid \alpha \in E\}$$

证明(续)：令 $E' = \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in E\}$。

显然有：

(1) $\alpha_1, \alpha_2 \in E$ 且 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 当且仅当$\alpha_1', \alpha_2' \in E'$ 且$\alpha_1' \neq \alpha_2'$；

(2) 对任意 $\alpha' \in E'$，有 $\alpha \in E$ 使 $\varphi(\alpha) = \alpha'$。

因此 φ 为双射，得 $|E| = |E'|$。

定理：n 的分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k,\quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

（p_n^j：n的所有包含j个部分的分拆的个数）

$$E=\{\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0) \mid 1 \le m \le k\}$$

$$E'=\{\varphi(\alpha)=\alpha'=(a_1+1, a_2+1, \ldots, a_m+1, 1, 1, \ldots, 1) \mid \alpha \in E\}$$

证明：（续）下面证明$|E'|=p_{n+k}^k$。

只需证明：对任意一个$n+k$的包含k个部分的划分α'，都能找到一个$\alpha \in E$，使得$\varphi(\alpha)=\alpha'$。

设$\alpha'=(b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_k)$，

(1) 若b_i全大于1，$i=1, \ldots, k$, 则$\alpha=(b_1-1, b_2-1, \ldots, b_k-1)$ 为n的k个部分的划分；

(2) 否则，设$\alpha'=(b_1, b_2, \ldots, b_m, 1, \ldots, 1)$，则$\alpha=(b_1-1, \ldots, b_m-1, 0, \ldots, 0)$为$n$的$m$个部分的划分。

因此，$|E'|=p_{n+k}^k$。综上，定理得证。

利用定理给出的公式，可递归地推算p_n^k如下表：

p_n^k	k=1	2	3	4	5	6	7	8
n=1	1							
2	1	1						
3	1	1	1					
4	1	2	1	1				
5	1	2	2	1	1			
6	1	3	3	2	1	1		
7	1						1	
8	1							1

$$p_{n+k}^k = \sum_{j=1}^k p_n^j\ ,\quad p_n^1 = p_n^n = 1$$

$$p_n^k = p_{n-k+k}^k = \sum_{j=1}^k p_{n-k}^j$$

即将第n-k行中前k个数相加。

利用定理给出的公式，可递归地推算p_n^k如下表：

p_n^k	k=1	2	3	4	5	6	7	8	$p_n=\sum_{j=1}^{n} p_n^j$
n=1	1								1
2	1	1							2
3	1	1	1						3
4	1	2	1	1					5
5	1	2	2	1	1				7
6	1	3	3	2	1	1			11
7	1	3	4	3	2	1	1		15
8	1	4	5	5	3	2	1	1	22

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，

则 $p_n(r) = q_n(r)$。

6

5+1,4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4)$

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 n-r 的分拆数量，

则 $p_n(r) = q_n(r)$。

6

5+1,4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4)$

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 n-r 的分拆数量，

则 $p_n(r) = q_n(r)$。

6

5+1,4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4) = 2$：4+2，4+1+1

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，

则 $p_n(r) = q_n(r)$。

6

5+1,4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4) = 2$：4+2，4+1+1

$q_6(4)$

分拆各部分不大于 4 的 2 的分拆数量

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n\text{-}r$ 的分拆数量，

则 $p_n(r) = q_n(r)$。

6

5+1,4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4) = 2$：4+2，4+1+1

$q_6(4) = 2$：2，1+1

分拆各部分不大于 4 的 2 的分拆数量

构建两种情况的分拆的一一对应

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。
设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且
$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，
则 $p_n(r) = q_n(r)$。

证明：如下建立两种分拆的一一对应：

(1) 任取 n的一个最大部分为 r 的分拆 λ_1，

去掉 λ_1 的一个等于 r 的部分，得到 $n-r$ 的一个分拆 λ_1'，
且 λ_1' 的任何部分都不大于r;

(2) 反过来，任取 $n-r$ 的分拆 λ_2，其任何部分都不大于 r，
插入一个等于r的部分，从而得到一个 n 的分拆λ_2'。

因此，得 $p_n(r) = q_n(r)$。

分拆的几何图示：Ferrers图

设λ是n的分拆 $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$，其中$n_1 \geq n_2\ldots \geq n_k >0$。$\lambda$ 的Ferrers图（Ferrers diagram），是一个左对齐的点组，该组有 k 行，第 i 行有 n_i 的点 （$1\leq i \leq k$）。

例：10的分拆 λ 为10＝4＋2＋2＋1＋1，可记作 $4^1 2^2 1^2$,

λ 的Ferrers图为：

● ● ● ●
● ●
● ●
●
●

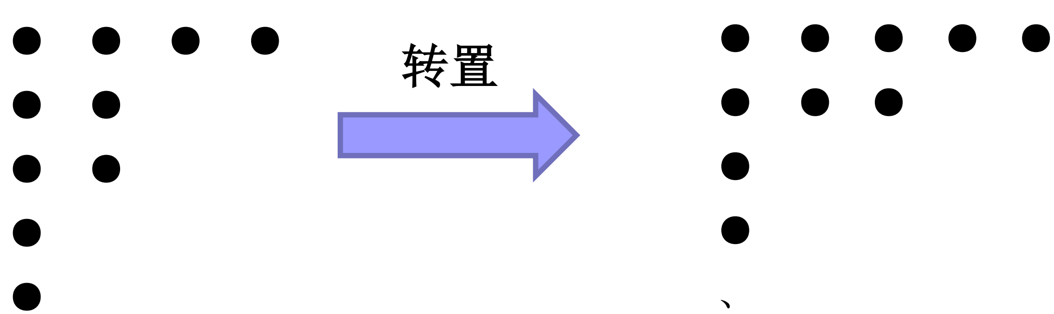
- 对于任何正整数n，其每个分拆可由Ferrers图唯一确定。

分拆的几何图示：Ferrers图

将分拆 λ 的Ferrers图 看成一个矩阵，其 转置矩阵称为 λ 的共轭分拆，记为 λ^*。

例：10的分拆 λ 为10＝4＋2＋2＋1＋1，可记作 $4^1 2^2 1^2$,

λ 的Ferrers图为：　λ^* 的Ferrers图为：



$10 = 5+3+1+1$

λ^*：531^2

- λ^*的行数等于 λ 的最大部分。
- λ的行数等于 λ^* 的最大部分。
- 分拆 λ的共轭的共轭就是它本身，即$(\lambda^*)^* = \lambda$。

- λ^*的行数等于 λ 的最大部分。
- λ的行数等于 λ^* 的最大部分。

问题：当 n=10，以 5 作为最大部分的分拆有多少个？

10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1

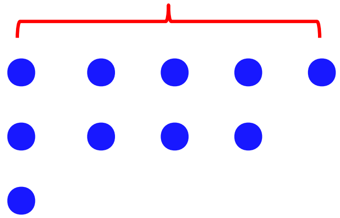
= 5+2+1+1+1 = 5+1+1+1+1+1　　7 个

分成 5个部分的分拆有多少个？　　*联系？*

10 = 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 =4+3+1+1+1=　7 个

4+2+2+1+1= 3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2

以5作为最大部分



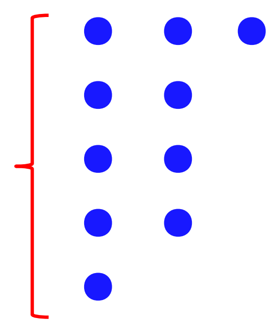
5+4+1

转置

（一一对应）

分成

5个部分



3+2+2+2+1

- λ^*的行数等于 λ 的最大部分。
- λ的行数等于 λ^* 的最大部分。

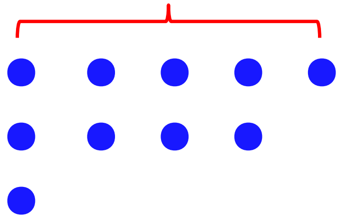
问题：当 n=10，以 5 作为最大部分的分拆有多少个？

10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1
= 5+2+1+1+1 = 5+1+1+1+1+1　　7 个

分成 5个部分的分拆有多少个？　　*联系？*

10 = 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 =4+3+1+1+1= 7 个
4+2+2+1+1= 3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2

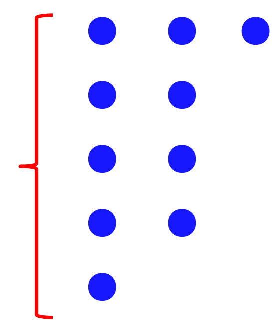
以5作为最大部分



5+4+1

转置
（一一对应）

分成
5个部分



3+2+2+2+1

- λ^*的行数等于 λ 的最大部分。
- λ的行数等于 λ^* 的最大部分。

问题：当 n=10，以 5 作为最大部分的分拆有多少个？

10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1

= $\boxed{5+2+1+1+1}$ = 5+1+1+1+1+1　　7 个

分成 5个部分的分拆有多少个？　　*联系？*

10 = 6+1+1+1+1 = $\boxed{5+2+1+1+1}$ =4+3+1+1+1=　7 个

4+2+2+1+1= 3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2

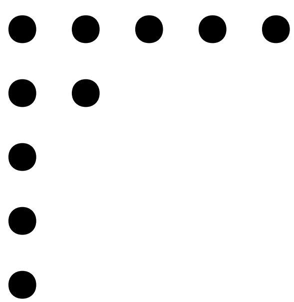
定理（分拆数定理）：正整数 n 分成 k个部分的分拆个数，等于 n 分成以 k为最大部分的分拆个数。

自共轭分拆

- 当某个分拆 λ 与它的共轭分拆 λ* 完全相同时，即 λ ＝ λ* 时，λ 称为自共轭分拆。
  - 此时，λ的Ferrers图是一个对称方阵。

例如：将10分拆成：12= 5+2+1+1+1； $\lambda = 5^1 2^1 1^3$;

其Ferrers图如下：

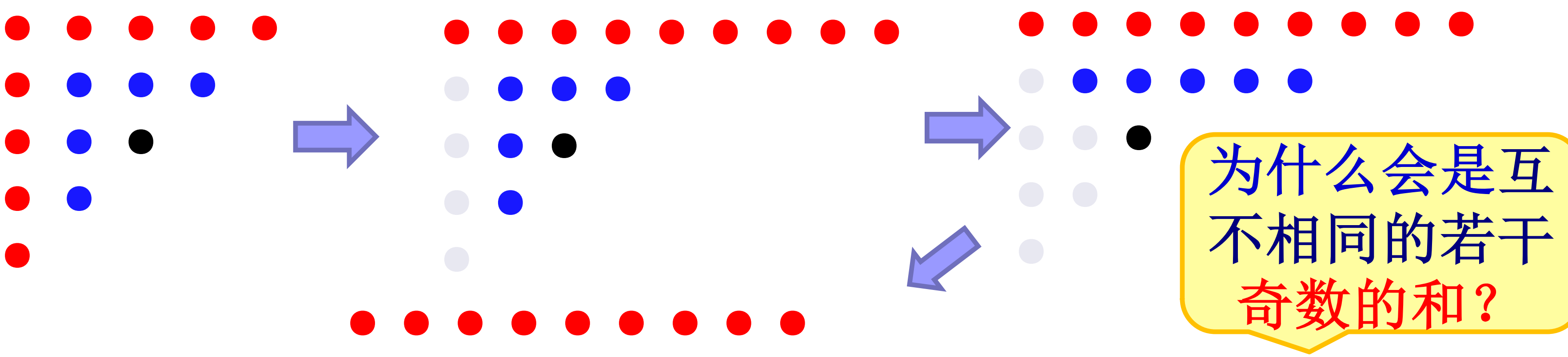


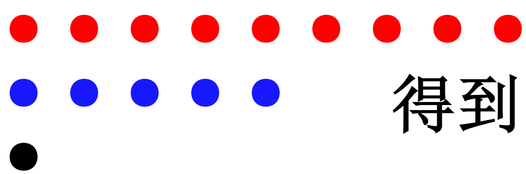
✓ 它的转置与自身一样。
✓ 关于主对角线对称

定理8.3.2 设 n 是正整数，
设 p_n^s 为 n 的自共轭分拆个数，
p_n^t 为分拆成互不相同的若干奇数的和的分拆个数，
则有 $p_n^s = p_n^t$。

分析：利用Ferrers图建立两种分拆的一一对应。

例：考虑15的自共轭分拆 λ： $15 = 5+4+3+2+1$，其图为





得到15的分拆 λ'： $15 = 9 + 5 + 1$。

把以上过程反过来，可得从λ' 得到 λ。

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，

设 p_n^o 是把 n 分成奇数部分的分拆个数，

p_n^d 是把 n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

例：考虑32的奇数和分拆 $32 = 7+5+5+5+3+3+1+1+1+1$。

$$\begin{aligned}32 &= 7+5+5+5+3+3+1+1+1+1\\ &= 7+10+5+3+3+1+1+1+1\\ &= 7+10+5+6+1+1+1+1\\ &= 7+10+5+6+2+1+1\\ &= 7+10+5+6+2+2\\ &= 7+10+5+6+4\end{aligned}$$

迭代地把两个相同部分合并成一个部分，最终产生不同部分的分拆

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，

设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，

p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

考虑 32 的分成不同部分的分拆

$$32 = 11+9+6+4+2。$$

$$\begin{aligned} 32 &= 11+9+6+4+2 \\ &= 11+9+3+3+2+2+1+1 \\ &= 11+9+3+3+1+1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

迭代地把偶数部分平分成两个相等部分，直至产生奇数部分的分拆。

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，

设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，

p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

证明：如下建立两种分拆的一一对应：

(1) 考虑把n分成奇数和的一个分拆 λ。

- 若 λ的所有部分互不相同，则λ是一个把n分成不同部分的分拆；
- 如果存在两个相同的部分，则把这两部分合并成一个部分。

持续以上过程，直到所有部分都互不相同。

由于每次合并两个部分时，都相应减少了部分的数量，因此以上过程最终会终止，得到一个把n分成不同部分的分拆。

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，
设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，
p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

证明：如下建立两种分拆的一一对应：

(2) 考虑把n分成不同部分的一个分拆λ。

- 如果λ的所有部分都是奇数，则λ是一个把n分成奇数和的分拆；
- 否则至少存在一个偶数部分，则把每一个偶数部分分成两个相同的部分。

重复以上过程，直到所有部分都是奇数。

小结

定理（分拆数定理）：正整数 n 分成 k个部分的分拆个数，等于 n 分成以 k为最大部分的分拆个数。

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \leq n$。
设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且
$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，
则 $p_n(r) = q_n(r)$。

定理8.3.2 设 n 是正整数，
设 p_n^s为 n 的自共轭分拆个数，
p_n^t 为分拆成互不相同的若干奇数的和的分拆个数，
则有 $p_n^s = p_n^t$。

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，
设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，
p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

- 如何计算分拆数？

- 方法一：

定理：n 的分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k，\quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

n 分拆数 $p_n = \sum_{i=1}^{n} p_n^i$

- 方法二：生成函数

分拆数与生成函数

$$\frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+y^3+\ldots+y^n+\ldots.$$

定理8.3.4 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}。$$

证明：由 $(1-x^k)^{-1} = 1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots+x^{a_k k}+\ldots$，得

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1} = \frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^2}\times\ldots\times\frac{1}{1-x^k}\times\ldots$$

$$= (1+x+x^2+\ldots+x^{1a_1}+\ldots)\times(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2a_2}+\ldots)$$

$$\times\ldots\times(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots+x^{ka_k}+\ldots)\times\ldots$$

每一个 x^n 通过从第一个因子选择 x^{1a_1}，从第二个因子选择项 x^{2a_2}，…,从第k个因子选择项 x^{ka_k}，以此类推，得到，

其中，$1a_1+2a_2+3a_3+\ldots+ka_k+\ldots = n \quad (0\le a_i \le n)$. (1)

显然，(1)式等价于 $1a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n = n \ (0\le a_i \le n)$ (2)

分拆数与生成函数

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n + \ldots$$

定理8.3.4　分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)^{-1}。$$

$$1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ka_k + \ldots = n \quad (0 \le a_i \le n) \quad (2)$$

证明：显然，方程(2)的每个正整数解均对应 n的一个分拆，因此，x^n的系数，即方程(2)的正整数解的个数，就是 n的分拆数p_n 。

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \boxed{\frac{1}{1-x^k}} \cdot \ldots$$

对应为 k的部分

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots) \times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

- 多重集合$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$的$n$组合数数列$h_0$, $h_1, \ldots, h_n, \ldots$的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{(1-x)}$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{e_1} + \ldots) \times (1 + x + x^2 + \ldots + x^{e_2} + \ldots) \times \ldots \times (1 + x + x^2 + \ldots + x^{e_k} + \ldots)$$

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ 的生成函数是

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$。

$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$ $\boxed{1a_1+2a_2+\ldots+na_n = n\ (0 \le a_i \le n)}$

$= (1+x+x^2+\ldots+x^{1a_1}+\ldots) \times (1+x^2+x^4+\ldots+x^{2a_2}$

$+\ldots) \times \ldots \times (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots+x^{ka_k}+\ldots) \times \ldots$

- 多重集合 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$ 的 n 组合数数列 h_0, $h_1, \ldots, h_n, \ldots$ 的生成函数是 $\boxed{e_1+e_2+\ldots+e_k = n\ (0 \le a_i \le n)}$

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{(1-x)}$

$= (1+x+x^2+\ldots+x^{e_1}+\ldots) \times (1+x+x^2+\ldots+x^{e_2}+\ldots)$

$\times \ldots \times (1+x+x^2+\ldots+x^{e_k}+\ldots)$

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ 的生成函数是

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}$。

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots) \times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

问题:

- n 分成 k 个部分的分拆数 p_n^k 的生成函数?
- n 分成奇数和的分拆数 p_n 的生成函数?
- n 分成互不相等的部分的分拆数 p_n 的生成函数?
- n 分成互不相等的奇数部分的分拆数 p_n 的生成函数?

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-x^k}\cdot\ldots$$

$$= (1+x+x^2+\ldots+x^{1a_1}+\ldots)\times(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2a_2}+\ldots)\times\ldots\times(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots+x^{ka_k}+\ldots)\times\ldots$$

例：n 分成 k个部分的分拆数p_n^k的生成函数

$$g(x)= x^k(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}\ldots(1-x^k)^{-1}$$

保证至少存在一个部分k

保证最大部分为 k

定理（分拆数定理）：正整数 n 分成 k个部分的分拆个数，等于 n 分成以 k为最大部分的分拆个数。

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots) \times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

例：n 分成奇数和的分拆数 p_n 的生成函数？

$$g(x) = (1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^7)^{-1}\ldots(1- x^{2\lceil n/2\rceil-1})^{-1}$$

例：n 分成互不相等的部分的分拆数 p_n 的生成函数？

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^n)$$

分拆中1, 2, …, n最多只能出现 一次

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots) \times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

例：n 分成奇数和的分拆数 p_n 的生成函数？

$$g(x) = (1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^7)^{-1}\ldots(1-x^{2\lceil n/2\rceil-1})^{-1}$$

例：n 分成互不相等的奇数部分的分拆数 p_n 的生成函数？

$$g(x) = (1+x)(1+x^3)(1+x^5)\ldots(1+x^{2\lceil n/2\rceil-1})$$

分拆中不超过n 的奇数只能出现 1次

例 1 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？ 对能称出的重量有几种可称量方案？

分析： 与{1, 2, 3, 4}的组合数有区别：

{1, 2, 4}, {3, 4}是两个不同的组合，但称出同样的重量。

(1) {1, 2, 3, 4}的组合数的生成函数为：

$G_1(x)=(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$

(2) {1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$

例 1　有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？对能称出的重量有几种可称量方案？

分析：$\{1, 2, 3, 4\}$的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$。

例 1　有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？对能称出的重量有几种可称量方案？

分析：{1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$。

把四个因子中的x用x_1, x_2, x_3, x_4替换，得

$(x_1^0 + x_1^1)(x_2^0 + x_2^2)(x_3^0 + x_3^3)(x_4^0 + x_4^4) =$

$x_1^0\ x_2^0\ x_3^0\ x_4^0 + x_1^0\ x_2^0\ x_3^0\ x_4^4 + x_1^0\ x_2^0\ x_3^3\ x_4^0 + x_1^0\ x_2^0\ x_3^3 x_4^4 +$

$x_1^0 x_2^2 x_3^0\ x_4^0 + x_1^0 x_2^2 x_3^0\ x_4^4 + x_1^0 x_2^2 x_3^3\ x_4^0 + x_1^0 x_2^2 x_3^3 x_4^4 +$

$x_1^1 x_2^0\ x_3^0\ x_4^0 + x_1^1 x_2^0\ x_3^0\ x_4^4 + x_1^1\ x_2^0\ x_3^3\ x_4^0 + x_1^1 x_2^0\ x_3^3 x_4^4 +$

$x_1^1 x_2^2 x_3^0\ x_4^0 + x_1^1 x_2^2 x_3^0\ x_4^4 + x_1^1 x_2^2 x_3^3\ x_4^0 + x_1^1 x_2^2 x_3^3 x_4^4$

例 1 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？对能称出的重量有几种可称量方案？

分析：{1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$。

把四个因子中的x用x_1, x_2, x_3, x_4替换，得

$$(x_1^0+x_1^1)(x_2^0+x_2^2)(x_3^0+x_3^3)(x_4^0+x_4^4) =$$

$$x_1^0x_2^0x_3^0x_4^0+x_1^0x_2^0x_3^0x_4^4+x_1^0x_2^0x_3^3x_4^0+x_1^0x_2^0x_3^3x_4^4+$$

$$x_1^0x_2^2x_3^0x_4^0+x_1^0x_2^2x_3^0x_4^4+x_1^0x_2^2x_3^3x_4^0+x_1^0x_2^2x_3^3x_4^4+$$

$$x_1^1x_2^0x_3^0x_4^0+x_1^1x_2^0x_3^0x_4^4+x_1^1x_2^0x_3^3x_4^0+x_1^1x_2^0x_3^3x_4^4+$$

$$x_1^1x_2^2x_3^0x_4^0+x_1^1x_2^2x_3^0x_4^4+x_1^1x_2^2x_3^3x_4^0+x_1^1x_2^2x_3^3x_4^4$$

把x_1, x_2, x_3, x_4替换成x，得

$$g(x) = 1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10}$$

从$G(x)$展开式中x的幂次项知，可称出1~10克的重量，系数即为对应的称量方案数。

例： 若有 1 克的砝码 3 枚，2克的砝码 4 枚，4克的砝码2枚。问能称出哪些重量？各有几种方案？

有 序 拆 分

- 以上讨论的整数n的分拆都是无序分拆
  - 即在定义中强加了一种次序，即

$$n=\sum_{i=1}^{k}a_i,\ a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_k\geq 1$$

例：5=3+1+1，5=1+3+1，5=1+1+3 是5的同一无序分拆。

- 当考虑有序分拆时，定义可改写如下：

$$n=\sum_{i=1}^{k}a_i,\ a_i\geq 1,\ i=1,2,\ldots,k$$

例：5=3+1+1，5=1+3+1，5=1+1+3 是 5的不同的有序分拆。

n的有序分拆的个数？

小结

- 分拆数相关定理

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2}$$

$$+ \ldots) \times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

总结

<table>
<tr><th>n 个球</th><th>k 个盒</th><th>是否为空</th><th>方案个数</th></tr>
<tr><td rowspan="7">有区别</td><td>有区别</td><td>有空盒</td><td>k^n</td></tr>
<tr><td>无区别</td><td>无空盒</td><td>$S(n, k)$</td></tr>
<tr><td>有区别</td><td>无空盒</td><td>$k!\ S(n, k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">无区别</td><td rowspan="2">有空盒</td><td>$S(p, 1)+S(p, 2)+\ldots+S(n, k),\ n\geq k$</td></tr>
<tr><td>$S(n, 1)+S(n, 2)+\ldots+S(n, n),\ n\leq k$</td></tr>
<tr><td>k个循环排列</td><td>非空</td><td>$s(n, k)$</td></tr>
</table>

总结

n 个球	k 个盒	是否为空	方案个数
无区别	有区别	有空盒	
	有区别	无空盒	
	无区别	有空盒	
	无区别	无空盒	

例 1 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？对能称出的重量有几种可称量方案？

解：{1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$

$$= 1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10}$$

从$G(x)$展开式中x的幂次项知，可称出1~10克的重量，其中x^n前的系数表示称出n克的可称量方案数，n=1, 2, 3, 4。

即 称出3、4、5、6、7克均有2种方案，称出其他重量的均只有1种方案。

故称出6克的方案数有两种， 称出10克的方案数是唯一的。

例：求用1角，2角，3角的邮票贴出不同数值的方案数。

解：方案数的生成函数为

$$G(x)=\sum_{j=0}^{\infty}x^{j}\sum_{j=0}^{\infty}x^{2j}\sum_{j=0}^{\infty}x^{3j}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^{2}}\cdot\frac{1}{1-x^{3}}$$

$$=(1+x+x^{2}+\ldots..)\cdot(1+x^{2}+x^{4}+\ldots..)\cdot(1+x^{3}+x^{6}+\ldots..)$$

$$=(1+x+2x^{2}+2x^{3}+3x^{4}+\ldots..)\cdot(1+x^{3}+x^{6}+\ldots..)$$

$$=1+x+2x^{2}+3x^{3}+4x^{4}+\cdots+\cdots$$

以x^4为例，其系数为4，即4分拆成1、2、3之和的分拆数为4，

分拆方案(贴邮票方案)为：

4=1+1+1+1， 4=1+1+2， 4=2+2， 4=1+3