第七章 递推关系和生成函数

7.1 若干数列
7.2 生成函数
7.3 指数生成函数
7.4 求解线性齐次递推关系
7.5 非齐次递推关系
7.6 一个几何例子

回顾：斐波那契（Fibonacci）数列

设有数列$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$。如果

$f_0=0, f_1=1$, 且满足递推关系 $f_n= f_{n-1}+f_{n-2}$， $n\geq 2$

称该数列为斐波那契（**Fibonacci**）数列，这个数列的项称为斐波那契数。

定理7.1.1 斐波那契数 f_n 满足公式

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ n\geq 0$$

求解常系数线性齐次递推式

7.4(1)线性齐次递推关系的定义

令$h_0, h_1, h_2,\ldots, h_n,\ldots$是一个数列。若存在量 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(a_k\neq 0)$和量 b_n（每个量是常数或依赖于n的数）使得:

$$h_n= a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots +a_{k-1}h_{n-k+1} +a_kh_{n-k}+ b_n \quad (n\geqslant k)$$

则称该数列满足 k阶线性递推关系。

若 $b_n= 0$，则称该数列是 k 阶线性齐次递推关系。

若a_1，a_2，…，a_k都为常数，则称该数列是k阶常系数线性递推关系。

例1：错位排列数列$D_0, D_1, D_2,\ldots, D_n,\ldots$满足递推关系：

$$D_n= (n-1)D_{(n-1)}+(n-1)D_{(n-2)}$$ （2阶线性齐次递推关系）

$$D_n= nD_{(n-1)}+(-1)^n$$ （1阶线性递推关系）

线性齐次递推关系的定义

令$h_0, h_1, h_2,\ldots, h_n,\ldots$是一个数列。若存在量 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($a_k \neq 0$)和量 b_n（每个量是常数或依赖于n的数）使得:

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \ldots + a_{k-1} h_{n-k+1} + a_k h_{n-k} + b_n \quad (n \geqslant k)$$

则称该数列满足 k阶线性递推关系。

若 $b_n = 0$，则称该数列是 k 阶线性齐次递推关系。

若a_1，a_2，…，a_k都为常数，则称该数列是k阶常系数线性递推关系。

例2：阶乘数列$h_0, h_1, h_2,\ldots, h_n,\ldots$,（其中$h_n=n!$）满足

$$h_n = n h_{n-1}$$

（1阶线性齐次递推关系）

线性齐次递推关系的定义

令$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$是一个数列。若存在量 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(a_k \neq 0)$和量 b_n（每个量是常数或依赖于n的数）使得：

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \ldots + a_{k-1} h_{n-k+1} + a_k h_{n-k} + b_n \quad (n \geq k)$$

则称该数列满足 k阶线性递推关系。

若 $b_n = 0$，则称该数列是 k 阶线性齐次递推关系。

若a_1，a_2，…，a_k都为常数，则称该数列是k阶常系数线性递推关系。

例3：斐波那契序列$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$满足递推关系：

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

（2阶常系数线性齐次递推关系）

线性齐次递推关系

- 本节重点讨论 k阶常系数线性齐次递推关系：

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_{k-1}h_{n-k+1}\ a_kh_{n-k}\quad (n\geqslant k)$$

其中，$a_1, \ldots, a_k$都为常数，且 $a_k\neq 0$。

- 递推关系从 $n=k$ 开始生效：

  已知初始值 $h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$，则满足递推关系的数列 $h_0, \ldots, h_k, \ldots$被唯一确定。

- 解法：
  - 特征方程法
  - 生成函数法

常系数线性齐次递推关系的求解

定理7.4.1：令 q为一个非零数，则 $h_n= q^n$ 是常系数线性齐次递推关系

$h_n-a_1h_{n-1}-a_2h_{n-2}-\ldots-a_{k-1}h_{n-k-1}-a_kh_{n-k}=0$

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (a_k\neq 0,\ n\geq k) \quad (1)$$

的解当且仅当 q 是多项式方程

$$x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \ldots - a_{k-1}x - a_k=0 \qquad (2)$$

的一个根.

特征根

特征方程

若多项式方程 (2) 有 k个不同的根 $q_1, q_2,\ldots, q_k$, 则

$$h_n=c_1q_1^n+ c_2q_2^n+\ldots+ c_kq_k^n \quad (3)$$

是下述意义下(1)的通解：任意给定初始值h_0, $h_1, \ldots,h_{k-1}$, 都存在$c_1, c_2,\ldots, c_k$ 使得(3)式是满足(1)式和初始条件的唯一的数列。

定理 7.4.1证明：

1. $h_n=q^n$ 满足递推关系 $h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k}$ $(a_k\neq 0, n\geq k)$ 当且仅当

$q^n - a_1q^{n-1} - a_2q^{n-2} - \ldots - a_k q^{n-k} = q^{n-k}\,\underline{(q^k-a_1q^{k-1}-\ldots-a_k)} = 0$

因为 $q\neq 0$，因此，$h_n=q^n$ 满足递推关系当且仅当 q 是方程 $x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \ldots - a_k=0$的根。

2. 设 $q_1, q_2,\ldots, q_k$是方程$x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\ldots-a_k=0$的$k$个不同的根。

则对任意的$i\in\{1, 2,\ldots, k\}$, 有

$$q_i^{n-k}(q_i^k - a_1q_i^{k-1} - \cdots a_{k-1}q_i - a_k)=0$$

因此，$h_n=q_1^n, h_n=q_2^n,\ldots, h_n=q_k^n$ 是递推关系的不同的解。

可以验证：$h_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$ 也满足递推关系(1)（略），然后证明它是通解。

定理 7.4.1证明（续）：

$$h_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n$$

3. 设 $h_0=b_0, h_1=b_1,\ldots, h_{k-1}=b_{k-1}$是初始值，那么满足初始条件的$c_1, c_2,\ldots, c_k$是下面线性方程组的解：

$$\begin{aligned}
&(n=0\text{时})\ c_1+c_2+\ldots+c_k=b_0\\
&(n=1\text{时})\ c_1q_1+c_2q_2+\ldots+c_kq_k=b_1\\
&\quad\ldots\\
&(n=k-1\text{时})\ c_1q_1^{k-1}+c_2q_2^{k-1}+\ldots+c_kq_k^{k-1}=b_{k-1}
\end{aligned}$$

方程组的系数矩阵是范德蒙矩阵，行列式不等于0，因此，方程组存在唯一解。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_k \\ q_1^2 & q_2^2 & \ldots & q_2^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \ldots & q_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

因此，式(3)是递推关系的通解。

特征方程法

定理7.4.1：令 q为一个非零数，则 $h_n = q^n$ 是常系数线性齐次递推关系

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (a_k\neq 0,\ n\geq k) \quad (1)$$

的解当且仅当 q 是多项式方程

特征根

$$x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \ldots - a_{k-1}x - a_k=0 \quad (2)$$

的一个根.

特征方程

若多项式方程 (2) 有 k个不同的根 $q_1, q_2,\ldots, q_k$, 则

$$h_n=c_1q_1^n+ c_2q_2^n+\ldots+ c_kq_k^n \quad (3)$$

是下述意义下(1)的通解：任意给定初始值$h_0, h_1, \ldots,h_{k-1}$, 都存在$c_1, c_2,\ldots, c_k$ 使得(3)式是满足(1)式和初始条件的唯一的数列。

1\. 列出特征方程

2\. 求出特征根

3\. 利用初始值求通解

特征方程法举例

例4：已知递推关系 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，$n\geq 2$，$f_0=0, f_1=1$, 求通项 f_n。

解：解特征方程 $x^2-x-1=0$，得 $q_1=(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$，$q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，

则通解为 $f_n= c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$。

将 $f_0=0$，$f_1=1$ 代入 $f_n= c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$，得到线性方程组：

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})+c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})=1 \end{cases}$$

解得：$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$c_2=\frac{-1}{\sqrt{5}}$。

因此，得通项 $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+\frac{-1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$，$n\geq 2$

例5：求满足初始值$h_0=1$，$h_1=2$和$h_2=0$的递推关系：

$$h_n=2h_{n-1}+h_{n-2}-2h_{n-3}\ (n\geq 3)$$

解：递推关系的特征方程为

$$x^3-2x^2-x+2=0 \qquad (1)$$

由于$x^3-2x^2-x+2 = x^2(x-2)-(x-2) = (x^2-1)(x-2)$

$$= (x-1)(x+1)(x-2)$$

因此(1)的3个根分别是1, −1, 2.

因此，通解为 $h_n=c_1 1^n+c_2(-1)^n+c_3 2^n$

代入初始值 $h_0=1, h_1=2$和$h_2=0$得方程组：

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=1\ (\text{即}h_0=1) \\ c_1-c_2+2c_3=2\ (\text{即}h_1=2) \\ c_1+c_2+4c_3=0\ (\text{即}h_2=0) \end{cases}$$

解得 $c_1=2, c_2=\frac{2}{3}, c_3=-\frac{1}{3}$，

因此，$h_n=2-\frac{2}{3}(-1)^n-\frac{1}{3}\cdot 2^n \quad (n\geq 0)$

例6: 由3个字母a, b, c组成长度为 n 的一些单词在通信信道传输，满足条件：不得有两个a连续出现在任一个单词中。确定信道允许传输的单词数。

解：设 h_n 表示允许传输的长度为n的单词数。

显然，$h_0=1$（空单词）。

$h_1= 3$（即 a, b, c三个单词）。

当$n>1$时，

(1) 若单词的第一个字母是 b或 c，

那么各有h_{n-1} 种方法构成该单词；

(2) 若单词的第一个字母是a, 则第二个字母只能是b或c，

此时各有h_{n-2} 种方式构成这个单词，

因此可以得到递推关系：$h_n = 2h_{n-1}+ 2h_{n-2}$ $(n\geq 2)$

解(续)：递推关系的特征方程：$x^2-2x-2=0$

解得特征根： $x_1=1+\sqrt{3}$， $x_1=1-\sqrt{3}$

得通解为 $h_n=c_1(1+\sqrt{3})^n+c_2(1-\sqrt{3})^n,\ n\geq 3$

代入初始值 $h_0=1$ 和 $h_1=3$，得到方程组：

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1(1+\sqrt{3})+c_2(1-\sqrt{3})=3 \end{cases}$$

解得： $c_1=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$， $c_2=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

因此， $h_n=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n,\ n\geq 0$

生成函数法

令$h_0, h_1, \ldots, h_n \ldots$为一无穷数列, 其生成函数$g(x)$定义为:

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots$$

牛顿二项式定理:

如果n是正整数，而 r是非零实数， $|rx|<1$时，则有

$$(1-rx)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-rx)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} (rx)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} (rx)^k$$

生成函数法举例

例7：求解下面的递推关系

$$h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

其对应的初始条件为h_0=1， h_1= -2。

解：设数列$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$的生成函数为

$$g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n+\ldots \quad (1)$$

$$h_n = 5h_{n-1}-6h_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$\downarrow$$

$$h_n - 5h_{n-1}+ 6h_{n-2}=0 \quad (n \geq 2) \quad \Rightarrow$$

$$h_2 - 5h_1 + 6h_0=0$$

$$h_3 - 5h_2 + 6h_1=0$$

$$h_4 - 5h_3 + 6h_2=0$$

$$h_5 - 5h_4 + 6h_3=0$$

$$\ldots$$

思想：对$g(x)$进行变换，使得x^k以这些等式为系数，从而系数为 0

$$(h_k - 5h_{k-1}+ 6h_{k-2})x^k = 0 \quad (k \geq 2)$$

$h_n - 5h_{n-1} + 6h_{n-2} = 0 \ (n \geq 2)$

例7：求解下面的递推关系

$$h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2} \ (n \geq 2)$$

其对应的初始条件为$h_0=1$，$h_1=-2$。

解：设数列$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$的生成函数为

$$g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n+\ldots \quad (1)$$

用$-5x$, $6x^2$分别乘以$g(x)$，得

$$-5x\, g(x) = -5h_0x - 5h_1x^2 - 5h_2x^3+\ldots -5h_nx^{n+1}+\ldots \quad (2)$$

$$6x^2\, g(x) = \qquad 6h_0x^2 + 6h_1x^3 + 6h_2x^4 +\ldots+ 6h_nx^{n+2}+\ldots \quad (3)$$

(1)+(2)+(3)得，

$$(1-5x+6x^2)g(x) = h_0 + (h_1-5h_0)x + (h_2-5h_1+6h_0)x^2 +\ldots+ (h_n-5h_{n-1}+6h_{n-2})x^n+\ldots$$

$$= h_0 + (h_1-5h_0)x = 1-7x。$$

因此 $g(x) = \dfrac{1-7x}{1-5x+6x^2}$

$$g(x)=\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}=\frac{1-7x}{(1-2x)(1-3x)}$$

$$=\frac{c_1}{1-2x}+\frac{c_2}{1-3x}=\frac{(c_1+c_2)+(-3c_1-2c_2)x}{(1-2x)(1-3x)}$$

因此，$c_1+c_2=1$, $-3c_1-2c_2=7$，解得 $c_1=5$, $c_2=-4$。

得 $g(x)=\frac{5}{1-2x}-\frac{4}{1-3x}$。

已知 $\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$, $\frac{1}{1-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n$,

因此，$g(x)=5\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(5\cdot 2^n-4\cdot 3^n)x^n$$

故，递推关系的一般项 $h_n=5\cdot 2^n-4\cdot 3^n$。

例8：利用生成函数求解 $h_n=h_{n-1}+9h_{n-2}-9h_{n-3}$ $(n\geq 3)$, $h_0=0$, $h_1=1$, $h_2=2$。

解: 令生成函数为$g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+h_3x^3\ldots+h_nx^n+\ldots$ (1)

(1) 式 两边分别同乘 $-x$, $-9x^2$, $9x^3$, 得

$$-x\,g(x) = -h_0x - h_1x^2 - h_2x^3 - \ldots - h_nx^{n+1} + \ldots \quad (2)$$

$$-9x^2g(x) = -9h_0x_2 - 9h_1x^3 - 9h_2x^4 - \ldots - 9h_nx^{n+2} + \ldots \quad (3)$$

$$9x^3g(x) = 9h_0x^3 + 9h_1x^4 + 9h_2x^5 + \ldots + 9h_nx^{n+3} + \ldots \quad (4)$$

(1), (2), (3)与(4)四式左右两边分别相加得：

$(1-x-9x^2+9x^3)\,g(x) = h_0 + (h_1-h_0)x+(h_2-h_1-9h_0)x^2+(h_3-h_2-9h_1+9h_0)x + \ldots = h_0 + (h_1-h_0)x+(h_2-h_1-9h_0)x^2 = x+x^2$。

得 $g(x)=\dfrac{x+x^2}{1-x-9x^2+9x^3}=\dfrac{x+x^2}{(1-x)(1-3x)(1+3x)}$（略）

利用生成函数求解线性齐次递推关系

1. 利用递推关系求出序列的生成函数：$\frac{p(x)}{q(x)}$，

其中，$p(x)$是次数小于k的多项式，

$q(x)$是常数项等于 1的 k 阶多项式；

2. 用部分分式法，把 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 表示为如下代数分式的和：

$$\frac{c}{(1-rx)^t};$$

3. 利用牛顿二项式展开 $\frac{c}{(1-rx)^t}$，并把所有项求和，

得到生成函数的幂级数。

7.4(5) 特征方程有重根的情形

定理7.4.1: (1) 令 q为一个非零数,则 $h_n=q^n$是常系数线性齐次递推关系 $h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k}$ $(a_k\neq 0, n\geq k)$ (1)
的解, 当且仅当 q 是多项式方程

$$x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\ldots-a_k=0 \quad (2)$$

的一个根.

无重根

(2) 若多项式方程(2)有$\boxed{k\text{个不同的根}q_1, q_2,\ldots, q_k}$,则

$$h_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_kq_k^n \quad (3)$$

是下述意义下(1)的通解：任意给定初始值$h_0, h_1, \ldots,h_{k-1}$, 都存在$c_1, c_2,\ldots, c_k$使得(3)式是满足(1)式和初始条件的唯一的数列.

问题：若特征方程有重根时，如何求解？

特征方程有重根的情形

例9. 递推关系$h_n=4h_{n-1}-4h_{n-2}$ $(n\geq 2)$的特征方程是：

$$x^2-4x+4=(x-2)^2=0。$$

因此，2 是二重特征根。

可证明 $h_n=c_1 2^n+c_2 2^n = c2^n$ 有时不是该递推关系的通解。

例如：假设初始值 $h_0=1, h_1=3,$

解得：$c=1$（n=0时），$2c=3$（n=1时）

矛盾，因此h_n不是通解。

结论：定理7.4.1不适用于特征方程有重根的情况

常系数线性递推关系的通解

定理7.4.2 令$q_1, q_2, \dots, q_t$为常系数线性齐次递推关系:

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} \quad (n \geqslant k) \quad (1)$$

的特征方程的互异的根。

如果 q_i 是 (1)的特征方程的 s_i 重根，那么该递推关系的通解中对应于q_i的部分为

s_i 项的和

$$H_n^{(i)} = c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \dots + c_{s_i} n^{s_i - 1} q_i^n,$$

且该递推关系的通解为:

$$h_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} + \dots + H_n^{(t)}$$

例10. 求递推关系

$$H_n^{(i)} = c_1 q_i^n + c_2 n q_i^n + \ldots + c_{s_i} n^{s_i - 1} q_i^n$$

$$h_n = -h_{n-1} + 3h_{n-2} + 5h_{n-3} + 2h_{n-4}$$

满足初始值$h_0=1$, $h_1=0$, $h_2=1$, $h_3=2$的解。

解：(1) 递推关系的特征方程为

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

得特征根：重根 $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = 2$.

(2) 通解中对应重根 -1的部分为：

$$H_n^{(1)} = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n$$

通解中对应根 2的部分为：$H_n^{(2)} = c_4 2^n$

因此，通解为：$h_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)}$

$$= c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n + c_4 2^n$$

因此，通解为：$h_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)}$

$$= c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n + c_4 2^n$$

(3) 代入初始值$h_0=1, h_1=0, h_2=1, h_3=2$得：

$$c_1+c_4=1 \quad (n=0\text{时})$$

$$-c_1-c_2-c_3+2c_4=0 \quad (n=1\text{时})$$

$$c_1+2c_2+4c_3+4c_4=1 \quad (n=2\text{时})$$

$$-c_1-3c_2-9c_3+8c_4=2 \quad (n=3\text{时})$$

解线性方程组，得$c_1=\frac{7}{9}, c_2=\frac{-3}{9}, c_3=0, c_4=\frac{2}{9}$。

因此，通解为：$h_n=\frac{7}{9}(-1)^n - \frac{3}{9}n(-1)^n + \frac{2}{9}2^n$

例11. 求解递推关系

$$h_n+h_{n-1}-16h_{n-2}+20h_{n-3}=0 \quad (n\geq 3)$$

其中$h_0=0,\ h_1=1,\ h_2=-1.$

解：生成函数为

$$g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+h_3x^3+\dots+h_nx^n+\dots$$

$$x\,g(x)=h_0x+h_1x^2+h_2x^3+\dots+h_{n-1}x^n+\dots$$

$$-16x^2\,g(x)=-16h_0x^2-16h_1x^3-\dots-16h_{n-2}x^n+\dots$$

$$20x^3\,g(x)=20h_0x^3+\dots+20h_{n-3}x^n+\dots$$

把以上四个式子相加，得到：

$$(1+x-16x^2+20x^3)g(x)$$

$$=h_0+(h_1+h_0)x+(h_2+h_1-16h_0)x^2+(h_3+h_2-16h_1+20h_0)x^3$$

$$+\dots+(h_n+h_{n-1}-16h_{n-2}+20h_{n-3})x^n+\dots$$

$$=h_0+(h_1+h_0)x+(h_2+h_1-16h_0)\,x^2$$

代入$h_0=0, h_1=1, h_2=-1$ 得：$(1+x-16x^2+20x^3)g(x)=x$

因此， $g(x)=\dfrac{x}{1+x-16x^2+20x^3}=\dfrac{x}{(1-2x)^2(1+5x)}$

$$=\frac{c_1}{1-2x}+\frac{c_2}{(1-2x)^2}+\frac{c_3}{(1+5x)}$$

下面确定c_1, c_2, c_3的值

$$x=(1-2x)(1+5x)c_1+(1+5x)c_2+(1-2x)^2c_3$$

$$=(c_1+c_2+c_3)+(3c_1+5c_2-4c_3)x+(-10c_1+4c_3)x^2$$

有 $\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ 3c_1+5c_2-4c_3=1 \\ -10c_1+4c_3=0 \end{cases}$ 解得 $c_1=-2/49, c_2=7/49, c_3=-5/49,$

因此， $g(x)=-\dfrac{2/49}{1-2x}+\dfrac{7/49}{(1-2x)^2}-\dfrac{5/49}{1+5x}$

回顾:几个常见的展开式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,\ (1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

对满足 $|x|<1$ 的任意 x，有

$$\frac{1}{(1+x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k,\quad \frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$n=1$时，得 $$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\quad(|x|<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\quad(|x|<1)$$

令 $x=y^m$，得 $$\frac{1}{1+y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{mk}\quad(|y|<1)$$

$$\frac{1}{1-y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}y^{mk}\quad(|y|<1)$$

因此， $g(x) = -\frac{2/49}{1-2x} + \frac{7/49}{(1-2x)^2} - \frac{5/49}{1+5x}$

由牛顿二项式定理知，

$\frac{1}{1-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$， $\frac{1}{(1-2x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} 2^k x^k$

$\frac{1}{1+5x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-5)^k x^k$

得 $g(x) = -\frac{2}{49}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k + \frac{7}{49}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} 2^k x^k$

$\quad - \frac{5}{49}\sum_{k=0}^{\infty} (-5)^k x^k$

$\quad = \sum_{k=0}^{\infty} [-\frac{2}{49}2^k + \frac{7}{49}(k+1)2^k - \frac{5}{49}(-5)^k] x^k$

因此， $h_n = -\frac{2}{49}2^n + \frac{7}{49}(n+1)2^n - \frac{5}{49}(-5)^n$, $n \geq 0$

特征方程的根：2 (二重根), -5

两种方法的联系

例：求解递推关系

$h_n+h_{n-1}-16h_{n-2}+20h_{n-3}=0 \quad (n\geq 3)$

其中$h_0=0, h_1=1, h_2=-1.$

生成函数形如 $\frac{p(x)}{q(x)}$，其中$q(x)$由递推关系确定。

$$g(x)=\frac{x}{1+x-16x^2+20x^3}$$

递推关系确定了唯一的特征方程，那么，$q(x)$与特征方程有何关系？

在上例中，$q(x)=1+x-16x^2+20x^3$,

而相应特征方程 $r(x)=x^3+x^2-16x+20=(x-2)^2(x+5)$,

有 $x^3r(\frac{1}{x})=x^3(\frac{1}{x}-2)^2(\frac{1}{x}+5)$

$=(1-2x)^2(1+5x)$

$=1+x-16x^2+20x^3=q(x)$

$q(x)=x^k r(1/x)$

将有理多项式函数写成代数分式和过程**相当于**求特征方程解以及确定系数过程。

一般的：数列与生成函数关系

一般的，设k阶递推关系

$$h_n+a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k}=0 \quad (n\geq k)$$

的初始值$h_0, h_1,\ldots,h_{k-1}$.

根据上述方法，存在多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$ 使得

$g(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, 其中

$$q(x)=1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k$$

$$p(x)=h_0+(h_1+a_1h_0)x+(h_2+a_1h_1+a_2h_0)x^2+\ldots+(h_{k-1}+a_1h_{k-2}+\ldots+a_{k-1}h_0)x^{k-1}$$

设相应特征方程$r(x)=0$，其中$q(x)=x^k r(\frac{1}{x})$.

若$r(x)=0$的根为$q_1, q_2, \ldots, q_k$, 那么

$$r(x)=(x-q_1)(x-q_2)\ldots(x-q_k)$$

$$q(x)=(1-q_1x)(1-q_2x)\ldots(1-q_kx)$$

另一方面，任意给出k次多项式

$$q(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_kx^k \quad (b_0\neq 0)$$

和小于k次多项式： $p(x)=d_0+d_1x+\ldots+d_{k-1}x^{k-1}$

可以用部分分式法求出幂级数展开式：

$$p(x)/q(x)= h_0+h_1x+\ldots+h_nx^n+\ldots$$

得

$$d_0+d_1x+\ldots+d_{k-1}x^{k-1} = (b_0+b_1x+\ldots+b_kx^k)\times(h_0+h_1x+\ldots+h_nx^n+\ldots)$$

$$d_0+d_1x+\ldots+d_{k-1}x^{k-1} = (b_0+b_1x+\ldots+b_kx^k)\times(h_0+h_1x+\ldots+h_nx^n+\ldots)$$

- 比较两边系数得到：

$$\begin{cases} b_0h_0=d_0 \\ b_0h_1+b_1h_0=d_1 \\ \ldots \\ b_0h_{k-1}+b_1h_{k-2}+\ldots+b_{k-1}h_0=d_{k-1} \\ b_0h_n+b_1h_{n-1}+\ldots+b_kh_{n-k}=0 \quad (b_0\neq 0) \end{cases} \quad (1)$$

因此， $h_n+\frac{b_1}{b_0}h_{n-1}+\ldots+\frac{b_k}{b_0}h_{n-k}=0$

这是一个常系数线性齐次递推关系，初始值由方程组(1)确定。

定理7.4.3 令h_0，h_1，$h_2,\ldots,h_n,\ldots$为满足k阶常系数线性齐次递推关系：

$$h_n+c_1h_{n-1}+\ldots+c_kh_{n-k}=0 \quad (c_k\neq 0,\ n\geq k) \quad (1)$$

的数列, 则它的生成函数$g(x)$形如：

$$g(x)=p(x)/q(x) \qquad (2)$$

其中，

$q(x)$是具有非零常数项的k次多项式,

$p(x)$是小于k次的多项式.

反之, 给定这样的多项式 $p(x)$和$q(x)$, 则存在序列$h_0,h_1,\ldots,h_n,\ldots$满足(1)式的$k$阶常系数线性齐次递推关系, 其生成函数由(2)式给出.

小结：常系数线性齐次递推关系

令h_0, h_1, $h_2,\ldots$, $h_n,\ldots$是一个数列，若存在常数量a_1, a_2, $\ldots$, a_k $(a_k\neq 0)$使得

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (n\geq k)$$

则称该数列是k阶常系数线性齐次递推关系

- 利用特征方程求解常系数线性齐次递推关系：
  - (1) 写出相应的特征方程；
  - (2) 求解特征方程：
    - (a) 如果没有重根，则直接给出通解（定理7.4.1）；
    - (b) 如果有重根，根据重根求出通解（定理7.4.2）；
  - (3) 将初始条件代入通解，得到满足初始条件的解。
- 利用生成函数求解：使得 x^j $(j\geq k)$前的系数为0

本节主要讨论常系数线性非齐次递推关系的求解

第七章 递推关系和生成函数

7.1 若干数列
7.2 生成函数
7.3 指数生成函数
7.4 求解线性齐次递推关系
7.5 非齐次递推关系
7.6 一个几何例子

常系数线性非齐次递推关系

- 对于常系数线性递推关系

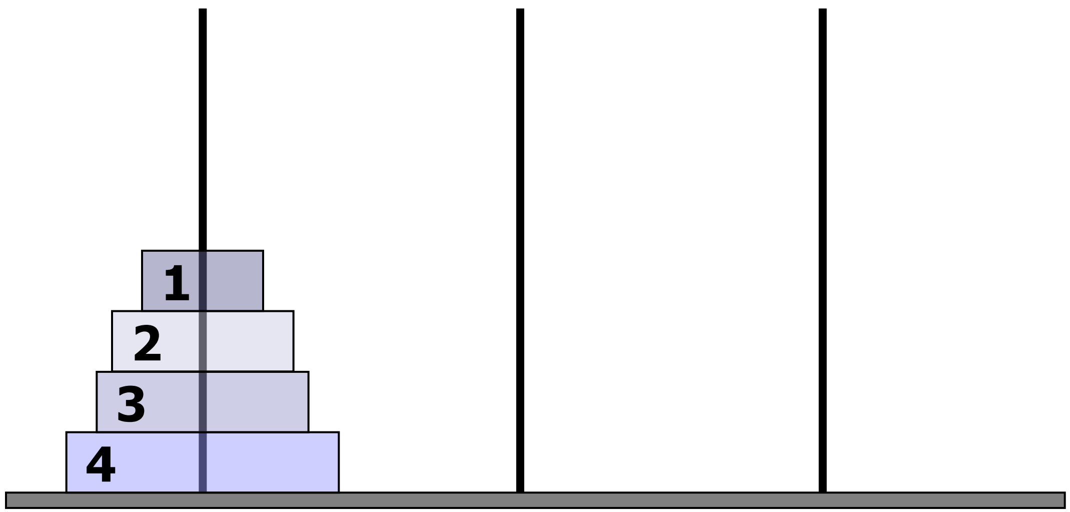
$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k}+b_n\quad (a_k\neq 0, n\geqslant k),$$

若$b_n\neq 0$，则称该递推关系为常系数线性非齐次递推关系。

7.5（1）汉诺塔(Hanoi)递推关系

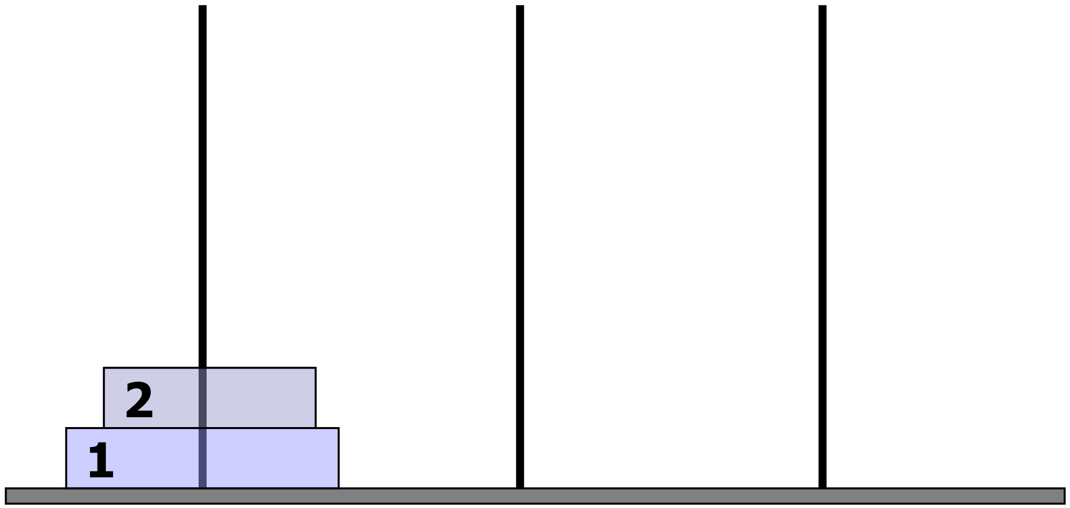
将所有盘子移到右边的柱子：

- ✓ 一次移动一个盘子，
- ✓ 每次移动时，大盘子不能放在小盘子上面。



问题：一共需要移动多少次盘子？

汉诺塔递推关系

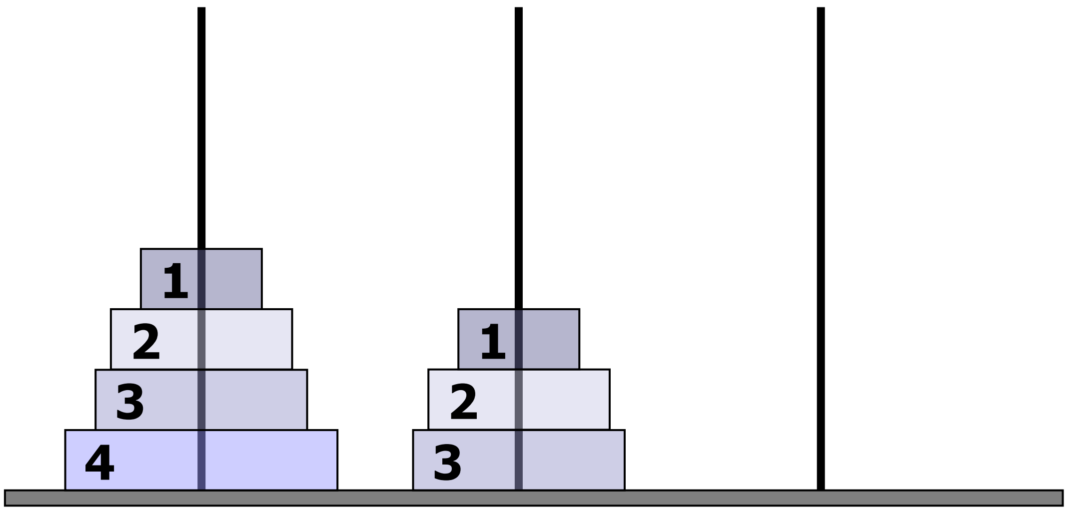


- 设h_n是移动n个圆盘所需的移动次数。
  - ✓ $h_0=0$
  - ✓ $h_1=1$
  - ✓ $h_2=3$

汉诺塔递推关系

递推步骤：

1. 把顶部n-1个盘子转移到中间柱子上 (h_{n-1})
2. 把最大的圆盘移到右边柱子上 (1)
3. 把中间柱子上的 n-1 个盘子转移到右边柱子上 (h_{n-1})



h_3　　　$1+h_3$

$h_4=2h_3+1$

- 设h_n是移动n个圆盘所需的移动次数。
- ✓ 满足递推关系： $h_n=2h_{n-1}+1$ （$n\geq1$）
- ✓ $h_0=0$, $h_1=1$和$h_2=3$,

非齐次

- 迭代求解：

$$
\begin{aligned}
h_n &= 2h_{n-1}+1 \\
&= 2(2h_{n-2}+1)+1 = 2^2h_{n-2}+2+1 \\
&= 2^2(2h_{n-3}+1)+2+1 = 2^3h_{n-3}+2^2+2+1 \\
&= \ldots \\
&= 2^{n-1}h_1+2^{n-2}\ldots+2^2+2+1 = \\
&= 2^n-1\ (n\geq 0)
\end{aligned}
$$

下面对n进行数学归纳证明结果的正确性。

(1) $h_0=0$, $h_1=1$; 因此， $n=1$时， 结论成立。

(2) 假设当$n=k$时结论成立， 即$h_k=2^k-1$。

当$n=k+1$时， $h_{k+1}=2h_k+1=2\cdot(2^k-1)+1=2^{k+1}-1$。

因此， $n=k+1$时， 结论成立。

由数学归纳法知， $h_n= 2^n-1\ (n\geq 0)$

用生成函数求解汉梵塔递推关系

由 $h_n = 2h_{n-1}+1\ (n\geq 1)$ 得 $h_n - 2h_{n-1} = 1\ (n\geq 1)$。

设$g(x)=h_0 + h_1x + h_2x^2 + \ldots + h_nx^n + \ldots$ 是该数列的生成函数，

有 $-2x\, g(x) = -2h_0x - 2h_1x^2 + \ldots - 2h_{n-1}x^n - 2h_nx^{n+1} \ldots$

以上两式相加得：

$$(1-2x)g(x) = h_0 + (h_1 - 2h_0)x + (h_2 - 2h_1)x^2 + \ldots + (h_n - 2h_{n-1})x^n + \ldots$$

$$= x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x}{1-x}$$

因此，$g(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1-2x)} = \dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{1}{1-x}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)\, x^n$$

得$h_n = 2^n - 1\ (n\geq 0)$

7.5（2）一般非齐次递推关系的通解

假设有非齐次递推关系

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k}+b_n, \quad (1)$$

若 f_n是对应齐次递推关系

$$h'_n = h_n - b_n = a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (2)$$

的通解, 而 c_n是原非齐次递推关系（1）的一个特解,

那么： $h_n = c\, f_n + c_n$ 是原非齐次递推关系（1）的通解.

步骤：

1. 求齐次的通解
2. 求非齐次的特解
3. 组合通解和特解，并利用初始项求常系数c

例1. 求递推关系$h_n = 3h_{n-1} - 4n$， $h_0=2$.

解：(1) 首先求解对应的齐次递推关系 $h_n=3h_{n-1}$的通解。

特征方程为$x-3=0$，特征根为 $x=3$，因此通解为 $h_n=c3^n$。

(2) 求$h_n=3h_{n-1}-4n$的一个特解：

猜测解的形式 $h_n = rn+s$，代入递推关系得到：

$$rn+s = 3(r(n-1)+s) - 4n = (3r-4)n+(-3r+3s)$$

得到：$r=3r-4$， $s=-3r+3s$

因此，$r=2$和$s=3$, 从而$h_n=2n+3$是递推关系的一个特解。

(3) 将齐次递推关系的一般解与特解结合：

$$h_n=c3^n+2n+3$$

(4) 代入初始关系，确定系数： $h_0=c3^0+2\times 0+3=2$

因此，$c=-1$, 从而问题的解为：$h_n=-3^n+2n+3,\ n\geq 0$

非齐次递推关系求解方法小结

(1) 求对应的齐次递推关系的通解；

(2) 求该非齐次递推关系的一个特解；

(3) 将一般解和特解结合得到该非齐次递推关系的通解；

(4) 通过初始条件确定通解中出现的常系数值.

难点：

- 特征方程求解
- 找出一个特解

尝试特解的一些方法

但不是绝对的！

根据非齐次项 b_n来尝试某些类型的特解:

(1) 如果b_n是n的k次多项式，尝试h_n也是n的k次多项式

① 若$b_n=d$ (常数), 尝试$h_n=r$ (常数)

② 若$b_n=dn+c$ (d, c是常数), 尝试$h_n= rn+s$ (r,s是常数)

③ 若$b_n= an^2+dn+c$ (a,d,c是常数), 尝试$h_n= rn^2+sn+t$ (r, s, t是常数)

(2) 若$b_n=d^n$ (d是常数)是指数形式，尝试$h_n= pd^n$ (p是常数)也是指数形式。

例2：求解$h_n = 2h_{n-1} + 3^n$ ($n\geq 1$), $h_0=2$.

解. (1) 首先求齐次关系 $h_n = 2h_{n-1}$的通解。其特征方程 $x-2=0$，特征根 $x=2$, 得到通解： $h_n = c2^n$

(2) 下面求非齐次递推关系的一个特解。

尝试： $h_n = p3^n$ ，代入得 $p3^n = 2p3^{n-1} + 3^n$。

令$n=1$，得 $p=3$，因此 $h_n = 3^{n+1}$是一个特解。

因此，非齐次关系的通解为 $h_n = c2^n + 3^{n+1}$.

(3) 代入初始条件 $h_0=2$，得 $c2^0+3^{0+1} = 2$。

得到：$c = -1$，因此 $h_n = -2^n + 3^{n+1}$ $(n \geq 0)$

例2：求解$h_n = 2h_{n-1} + 3^n$ $(n\geq 1)$, $h_0=2$.

解（利用生成函数求解）设生成函数为

$$g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n+\ldots. \quad (1)$$

(1)式左右两边乘以$-2x$得

$$-2x\, g(x) = -2h_0x - 2h_1x^2 - 2h_2x^3 -\ldots- 2h_nx^{n+1} +\ldots. \quad (2)$$

(1)，(2)相加得

$$(1-2x)g(x) = h_0 + (h_1-2h_0)x+(h_2-2h_1)x^2+\ldots+(h_n-2h_{n-1})x^n+\ldots$$

$$= 2 + 3x + 3^2x^2 + \ldots + 3^nx^n + \ldots$$

$$= 1 + (1+3x+3^2x^2+\ldots+3^nx^n+\ldots)$$

$$= 1+\frac{1}{1-3x}\text{。}$$

例2：求解$h_n = 2h_{n-1} + 3^n$ $(n\geq 1)$, $h_0=2$.

解 (续) $(1-2x)\, g(x) = 1+\frac{1}{1-3x}$

得 $g(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$

$$= \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(2^n + 3^{n+1} - 2^{n+1})x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(3^{n+1} - 2^n)xn$$

因此，$h_n = 3^{n+1} - 2^n \quad (n \geq 0)$。

例3：求解$h_n = 3h_{n-1} + 3^n\ (n\geq 1)$，$h_0=2$.

解：首先解对应齐次关系 $h_n = 3h_{n-1}$，特征方程 $x-3 = 0$，特征根 $x = 3$, 得到一般解： $h_n = c3^n$

求非齐次递推关系的一个特解，尝试： $h_n = p3^n$,

代入得 $p3^n = 3p3^{n-1} + 3^n$，解得：$3p = 3p+3$ （矛盾）

尝试 $h_n=pn3^n$，代入得 $pn3^n = 3p(n-1)3n^{-1} + 3^n$

解得 $p=1$。因此，$h_n=n3^n$ 是一个特殊解。

因此，通解为 $h_{\mathrm{n}} = c3n + n3n$。

代入初始条件$h_0=2$，得$c=2$，

因此，$h_n = 2\cdot 3n + n3n = (2+n)3n$。

一些特别情形

- 注意：上述求非齐次关系的特解的方法并不具有一般性。
- 递推关系可由迭代直接求出，再用数学归纳法证明。

小结：常系数线性非齐次递推关系

令 $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ 是一个数列, 若存在常数量 $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_n$ $(a_k \neq 0, b_n \neq 0)$ 使得

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \ldots + a_k h_{n-k} + b_n \quad (n \geq k)$$

则称该数列是k阶常系数线性非齐次递推关系

- 迭代求解 + 数学归纳法
- 生成函数
- 特征方程法
  - 对应的齐次递推关系的通解与原非齐次递推关系的特解相结合
  - 难点更在于找出特解