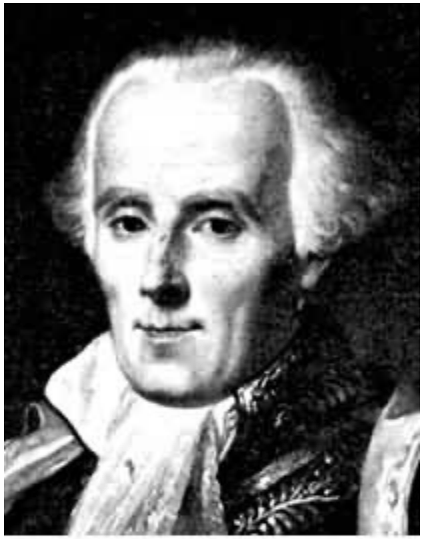
第七章 递推关系和生成函数

7.1 若干数列
7.2 生成函数
7.3 指数生成函数
7.4 求解线性齐次递推关系
7.5 非齐次递推关系
7.6 一个几何例子

7.2 生成函数



拉普拉斯，P.-S.

法国数学家和天文学家

- 法国数学家Laplace P.S.在1812年《概率的分析理论》中明确提出“生成函数的计算”，书中对生成函数思想奠基人——Euler L在18世纪对自然数的分解与合成的研究做了延伸与发展。生成函数的理论由此基本建立。
- 生成函数是推导Fibonacci数列的通项公式方法之一，Catalan数也可生成函数得到。
- 生成函数可分为很多种：普通母函数、指数母函数、L级数、贝尔级数和狄利克雷级数等。

7.2 生成函数

- 一个计数问题通常不是一个独立的问题，而是由一系列的独立问题组成

例：设 h_n表示{1, 2, ..., n}的排列数，有 $h_n=n!$，因此得到一个序列：$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$。

- ✓ 一般项 $h_n=n!$
- ✓ $n=5$时，$h_5=5!$

- 涉及一个整数参数 n 的某些计数问题的代数求解方法：生成函数（母函数、**Generating function**）
  - 求解带约束的多重集组合与排列的计数

回顾：多重集的组合与排列

- 设集合 S 包含重数分别为$n_1, \ldots, n_t$的 t 类元素
  - S的 r 组合的个数：
    1. $n_i \geq r$ (i =1, 2, …, t) : $\binom{r+t-1}{r}$
    2. 至少存在一个$n_i < r$：容斥原理
    3. 对每类元素的出现次数进行约束：生成函数
  - S 的排列的个数：$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$
    1. 对每类元素的出现次数进行约束：指数生成函数

回顾:几个常见的展开式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,\ (1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

对满足 $|x|<1$ 的任意 x，有

$$\frac{1}{(1+x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k,\quad \frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$n=1$时，得 $$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\quad(|x|<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\quad(|x|<1)$$

令 $x=y^m$，得 $$\frac{1}{1+y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{mk}\quad(|y|<1)$$

$$\frac{1}{1-y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}y^{mk}\quad(|y|<1)$$

生成函数的定义

令$h_0, h_1,\ldots,h_n\ldots$为一无穷数列, 其生成函数$g(x)$定义为:

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots$$

例1：每一项都等于1的无穷数列1, 1, 1,…的生成函数是

$$g(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$$

例2：设m为正整数，二项式系数$\binom{m}{0}$, $\binom{m}{1}$, …, $\binom{m}{m}$的生成函数是

$$g_m(x)=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\ldots+\binom{m}{m}x^m=(1+x)^m$$

有限数列$h_0, h_1,\ldots,h_n$可以看作是无限数列$h_0, h_1,\ldots,h_n, 0,\ldots 0\ldots$

生成函数的定义

令$h_0, h_1,\ldots,h_n\ldots$为一无穷数列, 其生成函数$g(x)$定义为:

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots$$

- 利用生成函数求解多重集的组合个数
  - 带有约束的多重集的组合个数

例3:设S是多重集合$\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \infty \cdot a_3, \infty \cdot a_4\}$。当$h_n$是分别满足以下约束的$S$的$n$组合数时，求解数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n, \ldots$一般项$h_n$:

(1) a_1出现奇数次，a_2出现偶数次

(2) 元素 a_1不会出现, a_2至多出现1次

(3) 每个 a_i 出现的次数是 3的倍数。

数列与生成函数的关系:多重集组合

- 设k是正整数, h_n等于方程

$$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$$

e_i为 a_i在一个n组合中出现的次数

的非负整数解个数,

即 h_n为多重集 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$ 的 n组合个数,

求数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n\ldots$的生成函数 $g(x)$。

因为 $h_n = \binom{n+k-1}{n}$【第二章结论】,

因此, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$ $(|x|<1)$

- 以上数列$h_0, h_1,\ldots, h_n\ldots$确定了一个生成函数!

问题:生成函数 $\frac{1}{(1-x)^k}$ 是否可以确定以上数列?

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \ \ (|x|<1)$$

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^k} = \underbrace{\frac{1}{(1-x)} \times \frac{1}{(1-x)} \times \cdots \times \frac{1}{(1-x)}}_{k\text{ 项}} \qquad (|x|<1)$$

$$= \left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2}\right) \ldots \left(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k}\right)$$

e_i个 a_i, $i = 1, \ldots, k$

$$= (1+x+\ldots+ x^{e_1}+\ldots)\ (1+x+\ldots+ x^{e_2}+\ldots)\ldots\ (1+x+\ldots+ x^{e_k}+\ldots)$$

$$= \sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty} x^{e_1} x^{e_2} \ldots x^{e_k}$$

$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$

其中，x^{e_i}是因子$\sum_{e_i=0}^{\infty} x^{e_i}$的代表项。($k$个因子)

由于 项 $x^n = x^{e_1} x^{e_2} \ldots x^{e_k}$ 满足 $e_1+e_2+\ldots+e_k=n$.

因此，项 x^n的系数 h_n 是方程 $e_1+e_2+\ldots+e_k=n$ 的非负整数解的个数。

因此，$h_n=\binom{n+k-1}{n}$。

设多重集合$S=\{\infty\cdot a_1, \ldots, \infty\cdot a_k\}$。$e_i$表示一个$n$组合中$a_i$出现次数

数列与生成函数的关系：多重集组合

设k是正整数，$g(x)$是数列h_0, $h_1,\ldots$, $h_n\ldots$的生成函数，其中h_n等于方程$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$的非负整数解个数.

设多重集合$S=\{\infty\cdot a_1, \ldots, \infty\cdot a_k\}$。$e_i$表示在一个$n$组合中$a_i$出现的次数

当n组合中a_i的出现次数有约束时，将反映到第i个因子中

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}$$

$$\boxed{=\left(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2}\right)\ldots\left(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k}\right)}$$

$$=\sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty}x^{e_1}x^{e_2}\ldots x^{e_k}$$

合并同次项后，x^n前的系数即为h_n

回顾：数列与生成函数的关系:多重集组合

- 令$h_0, h_1,\ldots,h_n\ldots$为一无穷数列, 其生成函数$g(x)$定义为 $g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots$

h_n等于方程$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$的非负整数解个数，$k>0$

$\Leftrightarrow h_n$是多重集$S=\{\infty\cdot a_1, \ldots, \infty\cdot a_k\}$的$n$组合个数

$$\Leftrightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k} = \frac{1}{(1-x)} \cdots \frac{1}{(1-x)}$$

$$= \left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2}\right) \ldots \left(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k}\right)$$

$$= \sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty} x^{e_1} x^{e_2} \ldots x^{e_k}$$

- e_i表示在一个n组合中a_i出现的次数
- a_i出现次数的约束反映在e_i上

例3:设S是多重集合$\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \infty\cdot a_3, \infty\cdot a_4\}$。当$h_n$是分别满足以下约束的$S$的$n$组合数时，求解数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n, \ldots$的一般项$h_n$.

(1) a_1出现奇数次，a_2出现偶数次

e_i是一个n组合中a_i出现的次数

无约束时，$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$

$= (\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1})(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k})$

解: (1) 生成函数为

$$g(x) = (x+x^3+\ldots+ x^{2n+1}+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots)$$
$$(1+x +x^2 +\ldots+ x^n+\ldots)^2$$
$$= x\,(1+ x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots)^2(1+x + x^2 +\ldots+ x^n+\ldots)^2$$
$$= x\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (|x|<1)$

回顾:几个常见的展开式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,\ (1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

对满足 $|x|<1$ 的任意 x，有

$$\frac{1}{(1+x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k,\quad \frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$n=1$ 时，得 $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ $(|x|<1)$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\quad(|x|<1)$$

令 $x=y^m$，得 $\frac{1}{1+y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{mk}$ $(|y|<1)$

$$\frac{1}{1-y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}y^{mk}\quad(|y|<1)$$

例3:设S是多重集合$\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \infty\cdot a_3, \infty\cdot a_4\}$。当$h_n$是分别满足以下约束的$S$的$n$组合数时，求解数列 $h_0, h_1, \ldots,$ $h_n, \ldots$的一般项h_n：

e_i是一个n组合中a_i出现的次数

(2) 元素 a_1不会出现, a_2至多出现1次

无约束时， $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$

$= (\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1})(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k})$

解: (2) 生成函数为

$$g(x) = x^0\,(1+x)(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^2$$

$$= (1+x)\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

例3:设S是多重集合$\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\infty\cdot a_3,\infty\cdot a_4\}$。当$h_n$是分别满足以下约束的$S$的$n$组合数时，求解数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n, \ldots$的一般项$h_n$：

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

(2) 元素 a_1不会出现，a_2至多出现1次

解: 数列 $h_0, h_1,\ldots, h_n, \ldots$的生成函数为:

$$g(x)=x^0(1+x)(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^2=\frac{1+x}{(1-x)^2}$$

令 $\frac{1+x}{(1-x)^2}=\frac{c_1}{1-x}+\frac{c_2}{(1-x)^2}=\frac{c_1+c_2-c_1x}{(1-x)^2}$ （部分分式分解）

令 $c_1+c_2=1$， $c_1=-1$, 解得 $c_1=-1$， $c_2=2.$

因此 $g(x)=\frac{-1}{1-x}+\frac{2}{(1-x)^2}$

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}2\binom{2+k-1}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\underbrace{2k+1}_{h_k})x^k$$

得一般项 $h_n=2n+1,\ n\geq 0$。

例3:设S是多重集合$\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \infty\cdot a_3, \infty\cdot a_4\}$。当$h_n$是分别满足以下约束的$S$的$n$组合数时，求解数列 $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$的一般项$h_n$:

(3) 每个 a_i 出现的次数是 3的倍数。

解: (3) 生成函数为

$$g(x) = (1+x^3+x^6+\ldots+x^{3n}+\ldots)^4$$

$$= \left(\frac{1}{1-x^3}\right)^4$$

回顾：几个常见的展开式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,\ (1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

对满足 $|x|<1$ 的任意 x，有

$$\frac{1}{(1+x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k,\quad \frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$n=1$ 时，得 $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \quad (|x|<1)$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k \quad (|x|<1)$$

令 $x=y^m$，得 $\dfrac{1}{1+y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{mk} \quad (|y|<1)$

$$\frac{1}{1-y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}y^{mk} \quad (|y|<1)$$

例5：什么样的数列的生成函数是如下式子？

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$
$$=\left(\sum_{e_1=0}^{5} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{2} x^{e_2}\right)\left(\sum_{e_3=0}^{4} x^{e_3}\right)$$

多重集合$\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \infty\cdot a_3\}$的$n$组合数，满足 a_1最多出现5次，a_2最多出现 2次，且 a_3最多出现 4次

解: 设 $x^{e_1}(0\le e_1\le 5)$, $x^{e_2}(0\le e_2\le 2)$, $x^{e_3}(0\le e_3\le 4)$ 分别表示第一个因子、第二个因子、第三个因子的代表项，假设$e_1+e_2+e_3=n$, 则有$x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}=x^n$。

因此乘积中 x_n的系数h_n是$e_1+e_2+e_3=n$的非负整数解的个数, 其中$0\le e_1\le 5$, $0\le e_2\le 2$, $0\le e_3\le 4$。

注意：若$n>5+2+4=11$，则$h_n=0$。

例6：求装有苹果、香蕉、桔子和梨的果篮的数量 h_n，其中每个果篮中，苹果的个数是偶数，香蕉的个数是5的倍数，桔子不超过4个，而且至多只有一个梨.

解：相当于求苹果、香蕉、桔子和梨的满足条件的n组合个数。

设e_1，e_2，e_3，e_4分别表示n组合中的苹果、香蕉、桔子和梨的个数，则问题等价于求满足e_1是偶数，e_2是5的倍数，$0\le e_3 \le 4$，$0 \le e_4 \le 1$的方程$e_1+e_2+e_3+e_4=n$的非负整数解个数。

则相应的生成函数是：

$$g(x)=(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)$$

例6：求装有苹果、香蕉、桔子和梨的果篮的数量 h_n，其中每个果篮中，苹果的个数是偶数，香蕉的个数是5的倍数，桔子不超过4个，而且至多只有一个梨.

解：（续）则相应的生成函数是：

$g(x)=(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)$

回顾:几个常见的展开式

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,\ (1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

对满足 $|x|<1$的任意 x，有

$$\frac{1}{(1+x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k,\quad \frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$n=1$时，得 $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ $(|x|<1)$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\ (|x|<1)$$

令 $x=y^m$，得 $\frac{1}{1+y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{mk}$ $(|y|<1)$

$$\frac{1}{1-y^m}=\sum_{k=0}^{\infty}y^{mk}\quad(|y|<1)$$

例6：求装有苹果、香蕉、桔子和梨的果篮的数量 h_n，其中每个果篮中，苹果的个数是偶数，香蕉的个数是5的倍数，桔子不超过4个，而且至多只有一个梨.

解：（续）则相应的生成函数是：

$$g(x)=(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)$$

$$=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}(1+x)$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2+n-1}{n}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n$$

因此，满足条件的n组合个数为 $h_n=n+1$ ($n\geq 0$)。

例7：设h_n是方程$3e_1+4e_2+2e_3+5e_4=n$的非负整数解的个数，求序列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$的生成函数.

e_i前有正整数系数

解：作变量替换$f_1=3e_1, f_2=4e_2, f_3=2e_3, f_4=5e_4$得到

$$f_1+f_2+f_3+f_4=n \qquad (1)$$

因此，h_n等于方程(1)的非负整数解的个数，满足f_1是3的倍数，f_2是4的倍数，f_3是2的倍数，f_4是5的倍数。

因此，生成函数为

$$g(x)=(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^4+x^8+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)$$

$$=\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}$$

例8：有无限多现成的1分、5分、1角、2角5分和5角的硬币。确定用这些硬币凑成n分钱的方法数h_n的生成函数。

解：每种方法满足方程：

$$e_1+5e_2+10e_3+25e_4+50e_5=n$$

因此，h_n是方程的非负整数解的个数。

生成函数：

$$g(x) = (1+x+x^2+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)(1+x^{10}+x^{20}+\dots)(1+x^{25}+x^{50}+\dots)(1+x^{50}+x^{100}+\dots)$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}\cdot\frac{1}{1-x^{25}}\cdot\frac{1}{1-x^{50}}$$

回顾：排列逆序

- 集合$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列$\pi = i_1 i_2 \ldots i_n$中的逆序为:

  (i_k, i_l)，其中 $k < l$，且 $i_k > i_l$

- 记π中的逆序的数目为$\mathrm{inv}(\pi)$，有$0 \le \mathrm{inv}(\pi) \le n(n-1)/2$,

  例：$\pi=315246$，$\mathrm{inv}(\pi)=4$

- 设$h(n, t)$ 表示$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列中有 t 个逆序的排列的数目，则
  - 对于$0 \le t \le n(n-1)/2$，有$h(n, t) \ge 1$
  - 对$t > n(n-1)/2$，有 $h(n, t) = 0$

定理7.2.1 设 n 是正整数，则数列 $h(n, 0), h(n,1),\dots,$ $h(n, n(n-1)/2)$ 的生成函数为

$$g_n(x)=1(1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^{n-1}) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(1-x^j)}{(1-x)^n} \quad (1)$$

证：生成函数为

$$g_n(x) = h(n,0)+h(n,1)x+\dots+h(n, n(n-1)/2)x^{n(n-1)/2}$$

记 $q_n(x) = 1(1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^{n-1})$ 。

展开$q_n(x)$, 得每一项都是形如 $x^{a_n}x^{a_{n-1}}x^{a_{n-2}}\dots x^{a_1} = x^p$ 的多项式，其中 $p = a_n+ a_{n-1} +\dots + a_1$ (2)，满足

$0 \le a_n\le 0,\ \ 0 \le a_{n-1}\le 1,\ \ 0 \le a_{n-2} \le 2,\ \ \dots,\ 0 \le a_1\le n-1 \quad (3)$

注意到：$q_n(x)$中 x^p 的系数等于方程(2)满足不等式(3)的解的个数，而满足不等式(3)的解与$\{1, 2, \dots, n\}$的排列存在一一对应。

定理7.2.1 设 n 是正整数，则数列 $h(n, 0), h(n,1),\ldots,$ $h(n, n(n-1)/2)$ 的生成函数为

$$g_n(x)=1(1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+\ldots+x^{n-1}) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(1-x^j)}{(1-x)^n} \quad (1)$$

证：（续）令 a_i 为排列中在 i 的前面但又大于 i 的整数的个数，则 $0 \le a_i \le n-i$。

因此，方程(2) 满足不等式(3)的解与有 p 个逆序的排列一一对应。

故 $q_n(x)$ 中 x^p 的系数等于 $h(n, p)$，且对于所有的 p 成立，从而有 $g_n(x)=q_n(x)$。

证毕。

小结：数列与生成函数的关系—多重集组合

设k是正整数，$g(x)$是数列h_0，$h_1,\ldots$，$h_n\ldots$的生成函数，其中h_n等于方程$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$的非负整数解个数.

多重集合$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$的$n$组合个数。$e_i$表示在一个$n$组合中$a_i$出现的次数

若e_i前有系数，则进行变量替换，引入对a_i的出现次数的约束

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}$$

$$=\left(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2}\right)\ldots\left(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k}\right)$$

$$=\sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty}x^{e_1}x^{e_2}\ldots x^{e_k}$$

当n组合中a_i的出现次数有约束时，将反映到e_i中

合并同次项后，x^n前的系数即为h_n

知识谱系1

第2章
$\binom{n+k-1}{n}$,
$n_i \geq n, i=1, 2, \ldots, k$

所有$n_i \geq n$

多重集$\{n_1 \cdot a_1, \ldots, n_k \cdot a_k\}$的
n 组合数 h_n

$\exists n_i < n$

第6章
容斥原理

e_i是n组合中a_i
出现的次数,

$n_i=\infty$,
$i=1, \ldots, k$

h_n： 方程 $e_1+e_2+\ldots+e_k=n$ 的
非负整数解个数, $e_i \leq n_i$, $i=1,\ldots, k$

n组合中
a_i的出现
次数e_i有约束
$\exists n_i < n$

数列 $h_0, h_1,\ldots,h_n\ldots$的生成函数：

$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n \ldots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$

$= (\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1})(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2}) \ldots (\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k})$

$= \sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty} x^{e_1} x^{e_2} \ldots x^{e_k}$

$\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_i}$

奇数次 $x^1 + x^3 + x^5 + \cdots$

偶数次 $x^0 + x^2 + x^4 + \cdots$

至少3次 $x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$

最多3次 $x^0 + x^1 + x^2 + x^3$

牛顿二项式定理的等价形式（第5章）
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$

第七章 递推关系和生成函数

指数生成函数的定义

- 回顾：数列$h_0, h_1, h_2,\ldots, h_n,\ldots$的生成函数定义为

$$g^{(e)}(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots$$

  - 组合含义：适合于多重集组合

数列$h_0, h_1, h_2,\ldots, h_n,\ldots$的指数生成函数定义为

$$g^{(e)}(x) = h_0 + h_1 x + h_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + h_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

  - 组合含义：适合于多重集排列

指数生成函数举例

例 1：设n是正整数。确定下面数列的指数生成函数：

$$P(n, 0), P(n, 1), P(n, 2), \ldots, P(n, n)$$

其中，$P(n, k)$ 表示 n元素集合的 k排列的数目，即

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}。$$

组合数列$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ 的生成函数

解：指数生成函数为：

$$g^{(e)}(x) = P(n, 0) + P(n, 1)x + P(n, 2)\frac{x^2}{2!} + \ldots + P(n, n)\frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + nx + \frac{n!}{2!(n-2)!}x^2 + \ldots + \underbrace{\boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}}}_{\binom{n}{k}}x^k + \ldots + \frac{n!}{n!0!}x^n$$

$$= (1+x)^n$$

指数生成函数举例

例2：求数列 1, 1, 1, …, 1,…的指数生成函数。

解：指数生成函数为 $g^{(e)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$（泰勒级数）

例3：求多重集合 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2,\ldots, \infty\cdot a_k\}$的$n$排列数$h_n$的数列$h_1, h_2, \ldots$的指数生成函数

解： $h_n = k^n$,

问题：有穷重数的情形？

指数生成函数为：

$$g^{(e)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = e^{kx}$$

指数生成函数的组合意义

- 数列$h_0, h_1, h_2,\ldots, h_n,\ldots$的生成函数定义为

$$g^{(e)}(x) = h_0 + h_1x + h_2\, x^2 +\ldots+ h_n\, x^n +\ldots$$

  - 组合含义：适合于多重集组合

数列$h_0, h_1, h_2,\ldots, h_n,\ldots$的指数生成函数定义为

$$g^{(e)}(x) = h_0 + h_1x + h_2\,\frac{x^2}{2!} +\ldots+ h_n\,\frac{x^n}{n!} +\ldots$$

  - 组合含义：适合于多重集排列？？

数列与指数生成函数的关系：多重集排列

例5：假设有多重集合$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$，从中取 r组合，其组合数为h_r，则其对应的生成函数为：

$$g(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$$
$$= 1+3x+6x^2+9x^3+10x^4+9x^5+6x^6+3x^7+x^8$$

- r组合的数目：x^r的系数

如：x^4 的系数为10，表示 4组合的数目为10

问题：如何取这10个4组合?

从$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$中取10个4组合的方式可从以下展开式中得到：$\boxed{g(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}$

$$(1+x_1+x_1^2+x_1^3)(1+x_2+x_2^2)(1+x_3+x_3^2+x_3^3)$$

$$= 1+(x_1+x_2+x_3)$$

$$+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2)$$

$$+(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2+x_3^3)$$

2个a_1, 1个a_2, 1个a_3

$$+(x_1x_3^3+x_1x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3+\boxed{x_1^2x_2x_3}+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2x_3^3+x_2^2x_3^2+x_1^3x_2+x_1^3x_3)$$

其中，4次方项表示从S中取4组合的所有方案。

$$g(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$$

由$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$的4组合生成**4排列数目**：

$1a_2, 3a_3$: $\frac{4!}{1!\,3!}$ $1a_1, 1a_2, 2a_3$: $\frac{4!}{1!\,1!\,2!}$ $2a_1, 1a_2, 1a_3$: $\frac{4!}{2!\,1!\,1!}$

$2a_1, 2a_2$: $\frac{4!}{2!\,2!}$ $1a_1, 2a_2, 1a_3$: $\frac{4!}{1!\,2!\,1!}$ $2a_2, 2a_3$: $\frac{4!}{2!\,2!}$

$3a_1, 1a_2$: $\frac{4!}{3!1!}$ $1a_1, 3a_3$: $\frac{4!}{1!\,3!}$ $2a_1, 2a_3$: $\frac{4!}{2!\,2!}$ $3a_1, 1a_3$: $\frac{4!}{3!\,1!}$

得到S的**4排列的个数**：

$$4!\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{1!1!2!}+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}\right)=\sum_{\substack{e_1+e_2+e_3=4\\0\le e_1\le 3,0\le e_2\le 2,0\le e_1\le 3}}\frac{4!}{e_1!e_2!e_3!}$$

$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$ 的4排列的个数：

$$4!\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{1!1!2!}+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}\right)$$

考虑：$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$

展开后 x^4 前的系数为

$$\sum_{\substack{e_1+e_2+e_3=4\\0\le e_1\le 3,0\le e_2\le 2,0\le e_1\le 3}} \frac{x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}}{e_1!e_2!e_3!}=\sum_{\substack{e_1+e_2+e_3=4\\0\le e_1\le 3,0\le e_2\le 2,0\le e_1\le 3}} \frac{x^4}{e_1!e_2!e_3!}$$

$$=\sum_{\substack{e_1+e_2+e_3=4\\0\le e_1\le 3,0\le e_2\le 2,0\le e_1\le 3}} \frac{4!}{4!}\cdot\frac{x^4}{e_1!e_2!e_3!}$$

$$=\boxed{\left(\sum_{\substack{e_1+e_2+e_3=4\\0\le e_1\le 3,0\le e_2\le 2,0\le e_1\le 3}} \frac{4!}{e_1!e_2!e_3!}\right)}\frac{x^4}{4!}$$

$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$ 的 4排列的个数

- 考虑 $S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$ 的 r 排列个数 h_r，$0 \le r \le 8$

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$$

$$=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{14}{3}x^3+\frac{35}{12}x^4+\frac{17}{12}x^5+\frac{35}{72}x^6+\frac{8}{72}x^7+\frac{1}{72}x^8$$

$$=\frac{1}{0!}x^0+\frac{3}{1!}x+\frac{9}{2!}x^2+\frac{28}{3!}x^3+\frac{70}{4!}x^4+\frac{170}{5!}x^5+\frac{350}{6!}x^6+\frac{560}{7!}x^7+\frac{560}{8!}x^8$$

$S=\{3\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3\}$ 的 r 排列个数 h_r:

$h_0 = 1$, $h_1 = 3$, $h_2 = 9$, $h_3 = 28$, $h_4 = 70$，$h_5 = 170$, $h_6 = 350$, $h_7 = 560$, $h_7 = 560$

数列与指数生成函数的关系：多重集排列

- $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, n_3\cdot a_3\}$ 的r 排列数 h_r , $r=0, 1, 2, \ldots, n_1+n_2+n_3$，数列$h_0, h_1,\ldots, h_{n1+n2+n3}, 0, \ldots$的指数生成函数

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)$$

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_3}}{n_3!}\right)$$

展开后 x^r 前的系数为

$$\sum_{\substack{e_1+e_2+e_3=r\\0\le e_1\le n_1,0\le e_2\le n_2,0\le e_1\le n_3}}\frac{x^{e_1}x^{e_2}x^{e_3}}{e_1!e_2!e_3!}$$

$$=\boxed{\left(\sum_{\substack{e_1+e_2+e_3=r\\0\le e_1\le n_1,0\le e_2\le n_2,0\le e_1\le n_3}}\frac{r!}{e_1!e_2!e_3!}\right)}\frac{x^r}{r!}$$

h_r

数列与指数生成函数的关系：多重集排列

- $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, n_3\cdot a_3\}$ 的r 排列数 h_r, $r = 0, 1, 2, \ldots, n_1+n_2+n_3$

$$h_r = \sum_{\substack{e_1+e_2+e_3=r \\ 0\le e_1\le n_1, 0\le e_2\le n_2, 0\le e_1\le n_3}} \frac{r!}{e_1!e_2!e_3!}$$

可得r 排列数的序列： $h_1, h_2, \ldots, h_{n_1+n_2+n_3}$

因此，$h_1, h_2, \ldots, h_{n_1+n_2+n_3}$, 0,…的指数生成函数为

$$\sum_{r=0}^{n+n_2+n_3}\left(\sum_{\substack{e_1+e_2+e_3=r \\ 0\le e_1\le n_1, 0\le e_2\le n_2, 0\le e_1\le n_3}} \frac{r!}{e_1!e_2!e_3!}\right)\frac{x^r}{r!}$$

定理7.3.1 设 S是多重集 $\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$，其中 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 是非负整数。设 h_n是 S的 n排列数，那么数列 $h_1, h_2,\ldots, h_k\ldots$的指数生成函数 $g^{(e)}$为：

$$g^{(e)} = f_{n_1}(x)\, f_{n_2}(x)\ldots f_{n_k}(x) \qquad (1)$$

其中，对于$i=1, 2, \ldots, k$，有

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_i}}{n_i!} \qquad (2)$$

证明：$g^{(e)}= (1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_1}}{n_1!})\ldots(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_k}}{n_k!})$

展开得以下乘积的和：

$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\frac{x^{m_2}}{m_2!}\ldots\frac{x^{m_k}}{m_k!}=\frac{x^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$, $0\le m_1\le n_1$, $0\le m_2\le n_2$, $\ldots$, $0\le m_k\le n_k$

证明：令 $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$，则

$$\frac{x^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1!m_2!\ldots m_k!}=\frac{x^n}{m_1!m_2!\ldots m_k!}=\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}\frac{x^n}{n!}$$

得 $\frac{x^n}{n!}$ 的系数为 $\sum\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$ (3)

其中, 求和是对所有满足下面条件的m_1, m_2,…, m_k的求和：

$0\le m_1\le n_1$, $0\le m_2\le n_2$, …, $0\le m_k\le n_k$, $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$

由于 $\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$ 等于S的子集$\{m_1\cdot a_1,\ldots, m_k\cdot a_k\}$的$n$排列数，

且 S的 n排列个数等于所有满足$m_1+\ldots+m_k=n$的组合的排列数，因此，(3)为S的n 排列数。

定理7.3.1 设 S是多重集 $\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$，其中 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 是非负整数。设 h_n是 S的 n排列数，那么数列 $h_1, h_2,\ldots, h_k\ldots$的指数生成函数 $g^{(e)}$为：

$$g^{(e)} = f_{n_1}(x)\, f_{n_2}(x) \ldots f_{n_k}(x) \qquad (1)$$

其中，对于i =1, 2, …, k，有

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_i}}{n_i!} \qquad (2)$$

$$g^{(e)} = f_{n_1}(x)\, f_{n_2}(x) \ldots f_{n_k}(x)$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)\ldots$$

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_k}}{n_k!}\right)$$

与生成函数的因子有类似的含意

- 同样可应用于存在无穷重数的情形

推广到无穷重数的情况

多重集合$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$的 n排列数为 h_n, 求数列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$的指数生成函数为

$$g^{(e)}(x) = h_0 + h_1 x + h_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + h_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$= f_\infty(x) f_\infty(x) \ldots f_\infty(x)$$

k个因子

其中，$f_\infty(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x$

- 当 n排列中a_i的出现有约束时，将反映到第i个因子中

带有附加限制的多重集合的n排列数数列

例6：设 h_n表示由数字1, 2, 3构造的n位数的个数，其中在每个n位数中, 1的个数是偶数，2的个数至少是3，而3的个数最多是4。确定数列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$的指数生成函数$g^{(e)}(x)$。

解：函数 $g^{(e)}(x)$对于数字1，2，3分别有一个因子$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$，且反映了对1，2，3的约束。

因为1的个数是偶数，所以 $f_1(x) = 1+ x^2/2!+x^4/4!+\ldots$

因为2的个数至少是3，因此 $f_2(x) = x^3/3!+x^4/4!+\ldots$

因为3的个数最多是4，因此

$$f_3(x)= 1+ x+x^2/2!+x^3/3!+x^4/4!$$

得，$g^{(e)}(x) = f_1(x)f_2(x)f_3(x)$。

例7：用红、蓝、黄三种颜色给$1\times n$的棋盘着色，如果被着成红色的方格数是偶数，确定给这个棋盘着色的方法数h_n。

解：设h_n表示着色的方法数，定义$h_0=1$。

显然，h_n等于3种颜色的多重集合的n排列数，其中每种颜色的重数是无穷的，且红色出现的次数是偶数。

因此，指数生成函数为

$$g^{(e)}=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots)$$

几个常用的展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots$$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

例7：用红、蓝、黄三种颜色给$1\times n$的棋盘着色，如果被着成红色的方格数是偶数，确定给这个棋盘着色的方法数h_n。

解：设h_n表示着色的方法数，定义$h_0=1$。

显然，h_n等于3种颜色的多重集合的n排列数，其中每种颜色的重数是无穷的，且红色出现的次数是偶数。

因此，指数生成函数为

$$g^{(e)}=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots)$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,e^x\,e^x=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^x)$$

$$=\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(3^n+1)\frac{x^n}{n!}$$

得 $h_n=\frac{3^n+1}{2}, n\geq 0$。

例9：确定满足下面条件的n位数的个数h_n:

每个数字都是奇数且数字1和3出现偶数次。

解：设h_0=1，h_n等于多重集合$\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 3, \infty\cdot 5, \infty\cdot 7, \infty\cdot 9\}$的1和3出现偶数次的 n排列个数。

则$h_0, h_1, h_2,\ldots, h_n,\ldots$的指数生成函数为

$$g^{(e)} = (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)^2\,(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^3$$

$$=(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 e^{3x} = \frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)$$

$$=\frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty} 5^n\frac{x^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty} 3^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{5^n+2\times 3^n+1}{4})\frac{x^n}{n!}$$

因此，$h_n = \frac{5^n+2\times 3^n+1}{4}, n\geq 0$

小结

令$h_0, h_1,\ldots,h_n\ldots$为一无穷数列,

- 其生成函数$g(x)$定义为:

$$g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n+\ldots$$

适用于多重集组合

- 其指数生成函数$g^{(e)}(x)$定义为:

$$g^{(e)}(x)=h_0+h_1x+h_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+h_n\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

适用于多重集排列

练习： 7个有区别的球放进4个有标志的盒子里，要求第1，2两个盒子必须有偶数个球，第3个盒子有奇数个球，求不同的方案个数。