第2章 排列与组合

多重集合

- 多重集（multiset）：允许元素重复

例如:

由两个a，一个b，三个 c和四个d 组成的多重集

$$M=\{a, a, b, c, c, c, d, d, d, d\}$$

2个类型 a，1个类型b，3个类型c，4个类型 d

也可写作: $M=\{2\cdot a, 1\cdot b, 3\cdot c, 4\cdot d\}$

其中，2, 1, 3, 4 是多重集 M 的重数。

- 注：一般多重集不是集合

  集合是重数为 1 的多重集

多重集合

- 多重集（**multiset**）：允许元素重复
  允许无限重数

例如:

由无限个a，无限个b，三个 c和四个d 组成的多重集

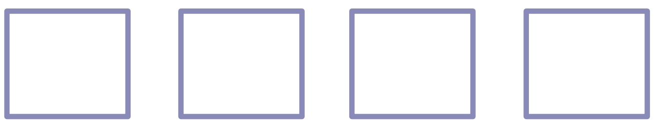
$$M=\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, 3\cdot c, 4\cdot d\}$$

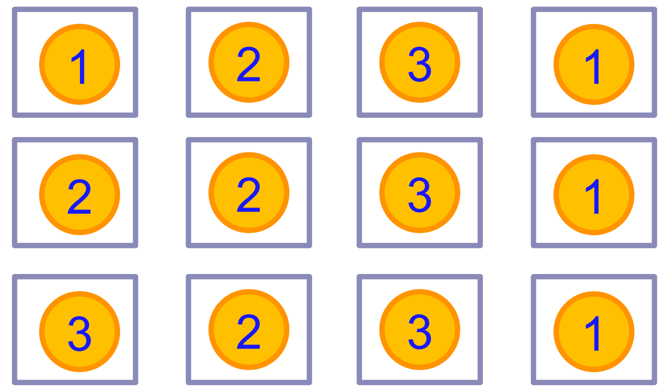
举例：投球入盒

假设有四个有区别的盒子和编号为1、2、3各若干球

- 如果各编号的球无限多， 取出4个球投入盒中，每个盒子一个球，有多少种方法?

  (无限重复排列)





  - 每个盒子只能投入一个 1，2 或 3号球
  - 令$S=\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \infty\cdot 3\}$，即为 S 的4-排列数：3^4

- 如果各编号的球均有5个， 取出4个球投入盒中，每个盒子一个球，有多少种方法?(有限重复排列)

主要内容

- 2.4多重集排列及应用
  - 无限重复：
    - *r* 排列（模型区别）---证明---实例
  - 有限重复：
    - 全排列—证明—实例，模型等价：排列 vs 划分？
    - *r* 排列：思考？简单情形如何处理？
    - 典型应用：非攻击车的摆放

多重集的排列-无限重复数

定理2.4.1：令 S 是多重集，它有 k 种不同的元素，每种元素都有无限重复次数，那么，S 的 r 排列个数为 k^r。

r 个有区别的盒子 $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \cdots\ \boxed{}$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad\quad r$

- 编号为 **1, 2, …,** k 的球，每个编号的球有无限个
- 把球放入盒子，每个盒子一个球
- 每个盒子可以放 k 个球中任何一个，有 k 种选择
- 共有 k^r 种放法。

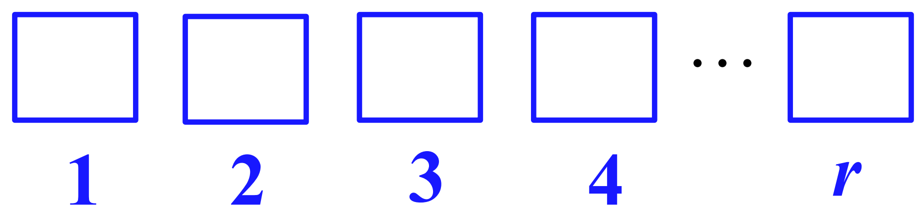
问题等价于 k 种数字的 r 排列(允许重复)个数

多重集的排列-无限重复数

定理2.4.1：令 S 是多重集，它有 k 种不同的元素，每种元素都有无限重复次数，那么，S 的 r 排列个数为 k^r。

r 个有区别的盒子

每个盒子一个球



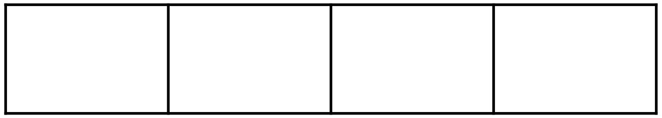
- 问题：若S的每种元素的重数都大于或等于r?
- 对比：有 k 个不同的元素，投入到 r 个不同盒子，可以有空盒，有多少种方法?

r^k：每个球可以有 r 种选择

举例：无限重复数多重集

例：具有4位数字的三进制数的个数是多少？

如：**0120，1202，2100，0002**



问题等价于：

- 多重集 $\{\infty\cdot 0, \infty\cdot 1, \infty\cdot 2\}$的4排列个数：$3^4$个
- 多重集 $\{4\cdot 0, 4\cdot 1, 4\cdot 2\}$的4 排列个数：$3^4$个

多重集的排列-有限重复数

例：数字1, 1, 1, 3, 8 可以构造出多少个不同的 5位数？

- 多重集 {3·1, 3, 8}的排列问题

先排3：5个位置选1个，5种

再排8：4个位置选1个， 4种

最后排 1：选剩下的3个位置，1种

由乘法原理，得 5×4＝20种。

不等于3^5

多重集的排列-有限重复数

例：数字1, 1, 1, 3, 8 可以构造出多少个不同的 5位数？

- 多重集 $\{3\cdot 1, 3, 8\}$的排列问题

先排1：5个位置选3个，$\binom{5}{3}$种

再排3：2个位置选1个， 2种

最后排 8：选剩下的1个位置，1种

由乘法原理，得 $\binom{5}{3}\times 2=20$种。

$$\frac{5!}{3!\,1!\,1!}$$

多重集的排列-有限重复数

定理2.4.2：令S是多重集，它有 k 种不同的元素，每种元素的重复数分别为 $n_1, n_2, \ldots$，n_k, 则 S 的排列数等于

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

其中 $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$

证明：设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$，则相当于求将 S 中所有元素放到 n个有序位置的方法。

定理2.4.2证明

证明：设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$，

则相当于求将 S 中所有元素放到 n 个有序位置的方法。

n_1 个 a_1 的放置方法有 $\binom{n}{n_1}$ 种，

n_2 个 a_2 的放置位置剩下 $n-n_1$ 个，因此，有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种。

…

n_k 个 a_k 的放置位置剩下 $n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}$ 个，因此，

有 $\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$ 种。

定理2.4.2证明（续）

证明：设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$，则相当于求将 S 中所有元素放到 n个有序位置的方法。

由乘法原理，S的排列数为

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots$$

$$\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-2})!}{n_{k-1}!(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_{k-1}-n_k)!}$$

定理2.4.2证明（续）

证明：设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$，则相当于求将 S 中所有元素放到 n个有序位置的方法。

由乘法原理，S的排列数为

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots$$

$$\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-2})!}{n_{k-1}!(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_{k-1}-n_k)!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

对角线项相约去！

多重集的排列-有限重复数

例：求字母多重集$\{1 \cdot M, 4 \cdot I, 4 \cdot S, 2 \cdot P\}$的排列数。

解：$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$，

排列总数为：

$$\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}$$

多重集的排列

<table>
<tr><th>多重集</th><th>r 排列的个数 h_r</th></tr>
<tr><td>$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2 \ldots, \infty\cdot a_k\}$</td><td rowspan="2">$k^r$</td></tr>
<tr><td>$S=\{r_1\cdot a_1, r_2\cdot a_2 \ldots, r_k\cdot a_k\}$
$r_i \geq r$, i=1, 2, …, k</td></tr>
<tr><td>$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2 \ldots, n_k\cdot a_k\}$
$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$</td><td>$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\ (r=n)$</td></tr>
</table>

多重集排列的另一种解释：集合划分

- 多重集排列的另一种解释：对n个元素集合划分为指定大小的多个部分，每个部分指派标号。

例如：令$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2\}$, $n = n_1 + n_2$,
则多重集 S 的排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = \binom{n}{n_1}$$

也是 n元素集合的 n_1子集数。

多重集排列的另一种解释：集合划分

- 多重集排列的另一种解释：对n个元素集合划分为指定大小的多个部分，每个部分指派标号。

例：设集合$S=\{a, b, c, d\}$。将 S 中元素放入两个有标号的盒子B_1和B_2, 且每个盒子装 2个元素（即集合划分为两个有标号的部分），共有多少种方法?

若盒子无标号：3种　若盒子有标号：6种 $= \dfrac{4!}{2!2!}$

{{a, b}, {a, c}}　每个子集可放入B_1或B_2

{{a, c}, {b, d}}

{{a, d}, {b, c}} → $\{a, d\}$放B_1中，$\{b, c\}$放B_2中
$\{a, d\}$放B_2中，$\{b, c\}$放B_1中

多重集排列的另一种解释：集合划分

定理2.4.3 设 $n, n_1, n_2, \ldots, n_k$是正整数，且

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k。$$

将 n个元素集合划分成 k 个有标签的盒子$B_1, B_1, \ldots, B_k$，其中B_i含有n_i个元素（i=1, 2,…, k），则划分方法数为

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots n_k}$$

若盒子无标号，划分数为

$$\frac{n!}{k!\, n_1!\, n_2!\, \ldots n_k}$$

证明：类似定理2.4.2可证。

多重集排列&集合划分

多重集 $S=\{n_1\cdot 1, n_1\cdot 2, \ldots, n_k\cdot k\}$的排列数
($n=n_1+n_2+\ldots+n_k$)

||

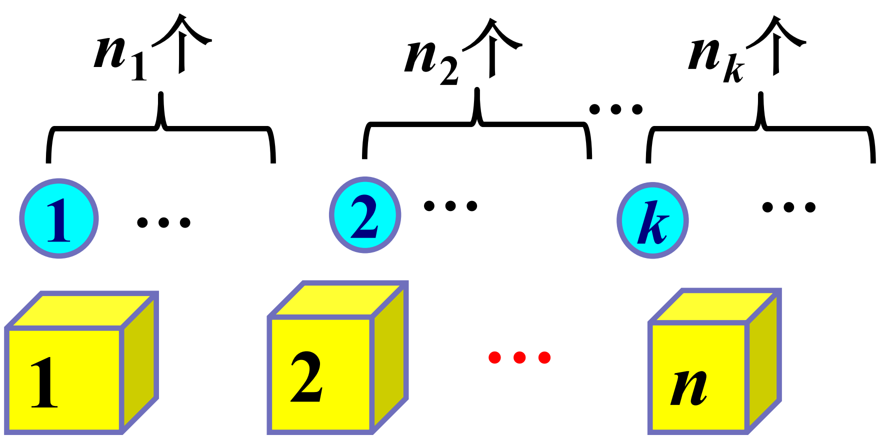
$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

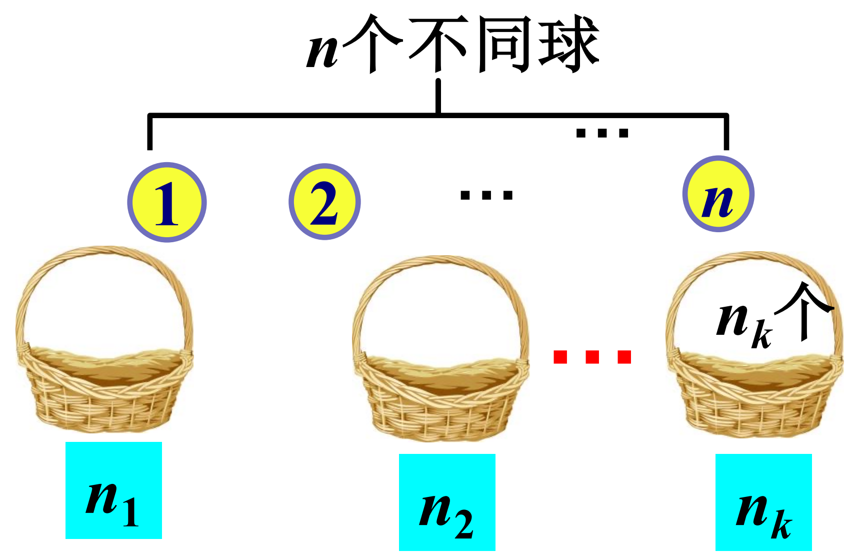
||

集合$S=\{1, 2, \ldots, n\}$划分到 k 个有标签的盒子 B_1, $B_1, \ldots, B_k$，的划分数，其中B_i含有n_i个元素

两种模型的等价性

- 令 $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$
  - k 种球，重复数为：
    $n_1, n_2, \ldots, n_k$，
    放入n个有标签的盒子
    （盒子不能为空）
  - n个不同球，放入 k 个带标签的篮子，篮子容量为 $n_1, n_2, \ldots, n_k$





思考：当篮子容量不设限制？（不指定大小）

进一步思考：有限重复？

- 无限重复集的r 排列
- 有限重复的全排列
- **有限重复的 r 排列？**

$M = \{ 2\cdot a, 1\cdot b, 3\cdot c \}$
的3排列？

	全排列	r排列
k种元素无限重复	✖	k^r
k种元素有限重复	$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$	?

进一步思考：有限重复？

- 多重集 $S = \{ n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k \}$，令

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k \ ,$$

求 S 的 r 排列数？其中 $r < n$.

  - 这个问题需要在第7章，生成函数的方法中给出求解方法。
  - 但对于某些特殊的 r 排列，可以借助之前的方法进行计算。

例：一个多重集 r排列的求解

- 多重集S ={ 3·a, 2·b, 4·c}，求 S 的 8 排列的个数。

解：S 的一个 8排列是 S去掉一个元素的子集的排列。可分为 3 种情况：

(1) S 去掉 1个a, 得 {2·a, 2·b, 4·c}：$\frac{8!}{2!2!4!} = 420$

(2) S 去掉 1个b, 得 {3·a, 1·b, 4·c}：$\frac{8!}{3!1!4!} = 280$

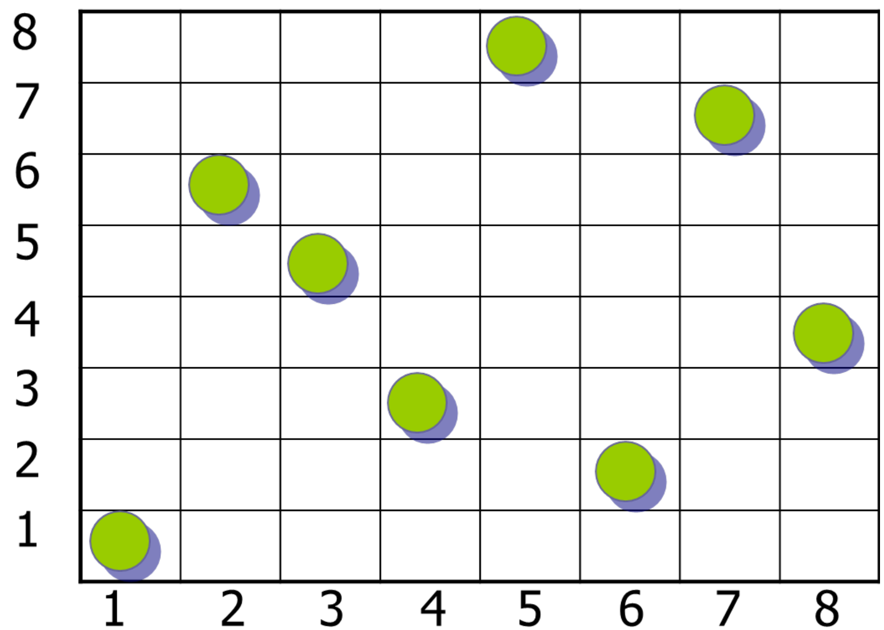
(3) S 去掉 1个c, 得 {3·a, 2·b, 3·c}：$\frac{8!}{3!2!3!} = 560$

由加法原理知，S的8排列的个数为

$$420+280+560 = 1260$$

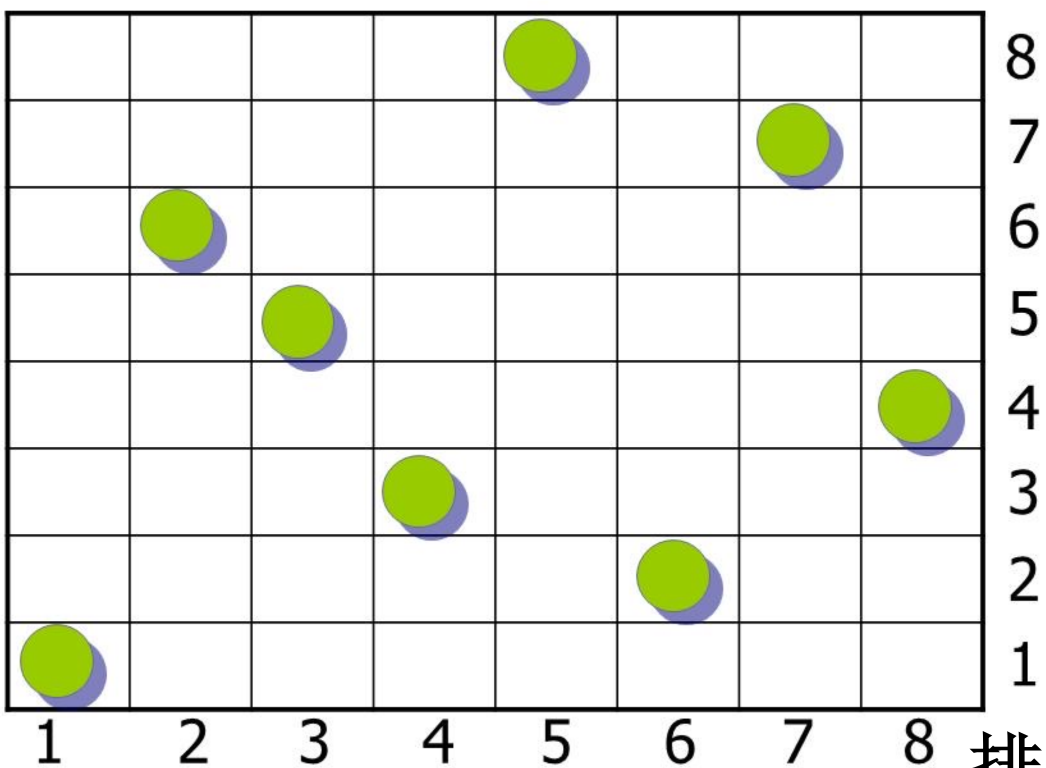
典型应用：非攻击性车摆放

- 问题1：非攻击性车摆放，等价于什么问题？
- 问题2：当 8个车有 8 种颜色，方法数？
- 问题3：当 8个车，1个红车，3个蓝车和4个黄车



典型应用：非攻击性车摆放

例：在8×8的棋盘上，对于8个非攻击型车有多少种可能的摆放法？



8个车的坐标：

(1, 1)
(2, 6)
(3, 5)
(4, 3)
(5, 8)
(6, 2)
(7, 7)
(8, 4)

排列：1, 6, 5, 3, 8, 2, 7, 4

典型应用：非攻击性车摆放

- 8个车各占一行(列)，具有坐标

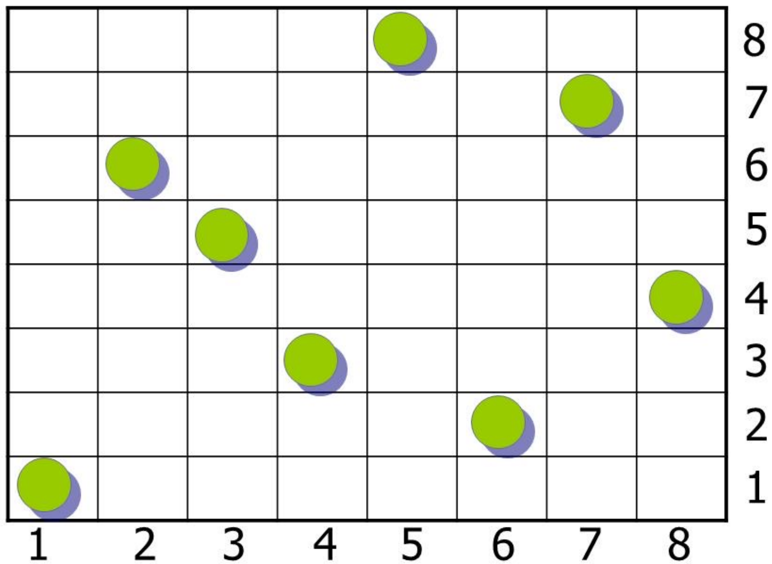
$$(1,\ j_1),\ (2,\ j_2),\ \ldots\ (8, j_8)$$

其中，$j_1, j_2, \ldots, j_8$互不相同。

即是{1, 2,…, 8}的一个排列，因此，总数为8!。

{1, 2,…, 8}的一个排列

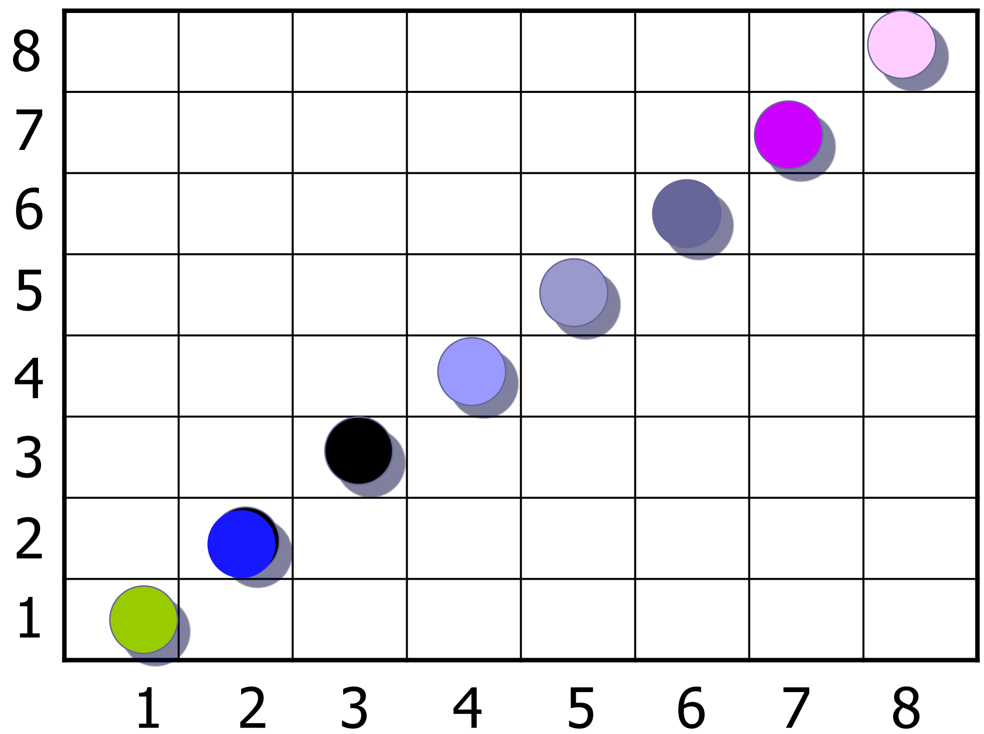
非攻击型车的一个摆法



提示：一一对应

- “一一对应”概念是一个在计数中极为基本的概念。一一对应既是单射又是满射。
- 如，我们说A集合有n个元素 $|A|=n$，无非是建立了将A中元与$[1, n]$元一一对应的关系。
- 在组合计数时往往借助于一一对应实现模型转换。
- 比如，要对 A集合计数，但直接计数有困难，于是可设法构造一易于计数的 B，使得 A与 B一一对应。

- 设上例中各车互相不同，用不同颜色标记。



- 注意到区分 8 种颜色，实质上考虑8个车的有序排列，那么，共有 8! 种；

由乘法原理共有 $(8!)^2$种。

例：在8×8的棋盘上，1个红车，3个蓝车和 4个黄车，构成的非攻击型车的摆放方法有多少种？

解：首先求多重集 $\{1\cdot R, 3\cdot B, 4\cdot Y\}$的排列，共有

$$\frac{8!}{1!3!4!}\text{种}$$

由乘法原理，这种情况下的非攻击车的摆放方法数为：

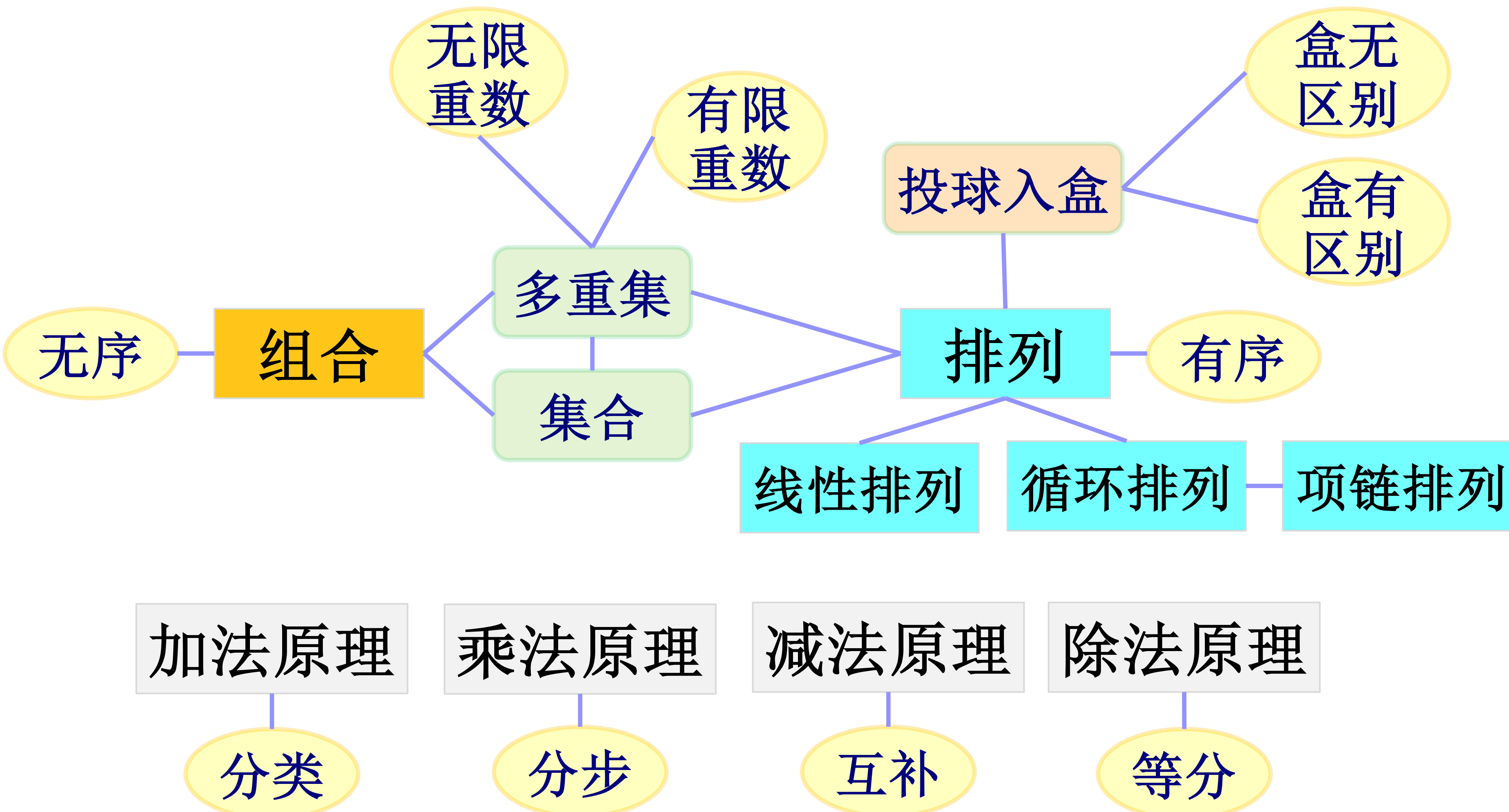
$$8!\frac{8!}{1!3!4!}=\frac{(8!)^2}{3!4!}$$

定理2.4.4：有n个车共 k 种颜色，其中第一种颜色的车有n_1个，第二种颜色的车有n_2个，…，第 k种颜色的车有n_k个，那么，把这些车放到 $n\times n$的棋盘上，使得没有车能相互攻击的摆放方法数为：

$$n!\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}=\frac{(n!)^2}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

- 特别的，若n个车颜色互不相同，则为$(n!)^2$

知识图谱


无限重数
有限重数
投球入盒
盒无区别
盒有区别
多重集
无序
组合
排列
有序
集合
线性排列
循环排列
项链排列
加法原理
乘法原理
减法原理
除法原理
分类
分步
互补
等分

第2章 排列与组合

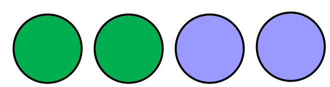
2.1 四个基本的计数原理
2.2 集合的排列
2.3 集合的组合（子集）
2.4 多重集合的排列
2.5 多重集合的组合

2.5 多重集组合--思考题

- 问题：本科同学4人一个宿舍，学生可能来之 34个不同省市等（学生足够多）。1个宿舍的室友能够有多少种各类省市的组合？

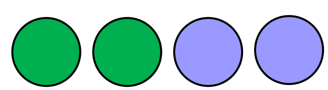
解答 1: $\binom{34}{4}$?

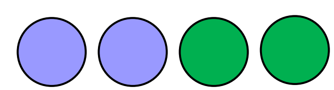
会缺少如下情形：



解答2：34^4 ?

会重复如下情形：





定义：多重集的组合

多重集 S 的一个r 组合是S的**子多重集**。

- 如$S=\{2\cdot a, 1\cdot b, 3\cdot c\}$的 3 组合包括：

$$\{2\cdot a, 1\cdot b\}, \{2\cdot a, 1\cdot c\}, \{1\cdot a, 2\cdot c\},$$
$$\{1\cdot b, 2\cdot \mathrm{c}\}, \{3\cdot c\}, \ \{1\cdot a, 1\cdot b, 1\cdot c\}$$

（无限）多重集的组合

- 类似问题：
  - 某学院有 8个研究方向，学生面试12人为一组，则能够多少种各类研究方向组合的答辩组？
  - 假设有 $k=4$个数字，每个数字可以用无数次，其$r=5$组合数？
- 均可表示为方程

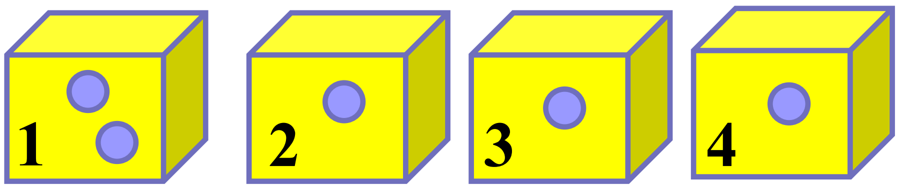
$$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$$

的非负整数解的个数，满足条件 $0\le x_1\le r$, $0\le x_2\le r$, ..., $0\le x_k\le r$。

有重组合——转无重组合

例：假设有 $k=4$个数字，每个数字可以用无数次。

其$r=5$ 组合数为多少？ $\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \infty\cdot 3, \infty\cdot 4\}$的5组合

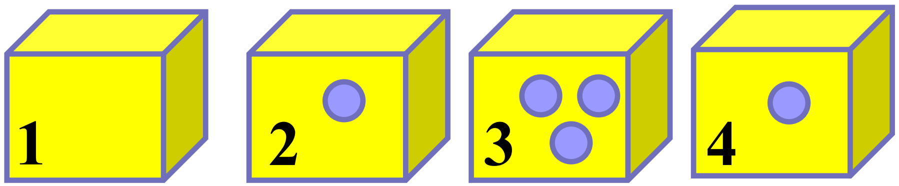


$\{1, 1, 2, 3, 4\}$

有重复组合——转无重复组合

例：假设有 $k = 4$个数字，每个数字可以用无数次。

其$r = 5$ 组合数为多少？ $\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \infty\cdot 3, \infty\cdot 4\}$的5组合



$\{2, 3, 3, 3, 4\}$

$\{2, 3, 3, 3, 4\} \Rightarrow \{2+0, 3+1, 3+2, 3+3, 4+4\}$

有重复组合

$=\{2, 4, 5, 6, 8\}$

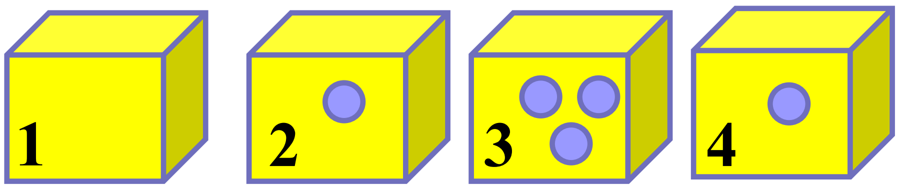
无重复组合

有重复组合——转无重复组合

例：假设有 $k=4$个数字，每个数字可以用无数次。

其$r=5$ 组合数为多少？

$\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \infty\cdot 3, \infty\cdot 4\}$的5组合



$\{2, 3, 3, 3, 4\}$

$\{2, 3, 3, 3, 4\} \Rightarrow \{2+0, 3+1, 3+2, 3+3, 4+4\}$

有重复组合

$=\{2, 4, 5, 6, 8\}$

无重复组合

$\{2, 3, 5, 6, 8\} \Rightarrow \{2-0, 3-1, 5-2, 6-3, 8-4\}$

无重复组合

$=\{2, 2, 3, 3, 4\}$

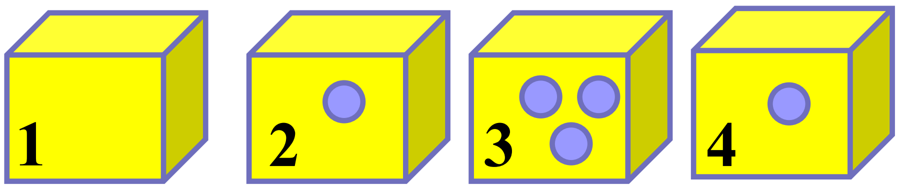
有重复组合

$\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \infty\cdot 3, \infty\cdot 4\}$ 的一个有重复5组合 $\Leftrightarrow$ $\{1, 2,\ldots, 8\}$的一个无重复5组合

有重复组合——转无重复组合

例：假设有 $k=4$个数字，每个数字可以用无数次。

其$r=5$ 组合数为多少？ $\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \infty\cdot 3, \infty\cdot 4\}$的5组合



$\{2, 3, 3, 3, 4\}$

$\{1, 2, \ldots, k\}$的一个 r组合$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$，$(1\le a_1\le\ldots\le a_r\le k)$

$\Updownarrow$

$\{1, 2, \ldots, k+r-1\}$的一个 r组合$\{a_1, a_2+1, \ldots, a_r+r-1\}$

$\{1, 2, \ldots, k\}$的 r组合数 $=$ $\{1, 2, \ldots, k+r-1\}$的无重r组合数

$$=\binom{r+k-1}{r}$$

无限重数的多重集组合

定理2.5.1：令S是多重集，它有k个不同的元素，每个元素都有无限重复次数，那么，S的 r 组合个数为

$$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$$

证明思路：

多重集组合 ⟷ 不定方程解集 ⟷ 多重集排列

2.5.1定理的证明

（多重集组合 ➔ 方程的非负整数集）

令$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2,\ldots, \infty\cdot a_k\}$，

令 x_i 表示 S 的一个r 组合中包含 a_i的个数，

则该 r组合可表示为 $\{ x_1\cdot a_1,\ x_2\cdot a_2,\ \ldots,\ x_k\cdot a_k \}$，

其中，$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ （2.1）

且每个 x_i 是非负整数 。

反之，方程（2.1）的任何一个非负整数解确定 S 的一个 r组合。

因此，S的 r-组合个数等于方程（2.1）解的个数。

2.5.1定理的证明

$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2,\ldots, \infty\cdot a_k\}$
的 r组合数

$\|$

方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 的
非负整数解的个数

2.5.1定理的证明

$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ （2.1）
且每个 x_i 是非负整数。

（方程的非负整数解个数➔ 多重集排列数）

下面证明：方程（2.1）解的个数等于多重集 $T=\{r\cdot 1, (k-1)\cdot *\}$ 的排列数。

$$\overbrace{1\ldots1*1\ldots1*1\ldots1*1\ldots1*1\ldots1*1\ldots1}^{r\text{个}1}$$

$$1\ldots1\underbrace{*1\ldots1*1\ldots1*1\ldots1*1\ldots1*}_{k-1\text{个}*}1\ldots1$$

$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ （2.1）
且每个 x_i 是非负整数。

2.5.1定理的证明

（方程的非负整数解个数➔ 多重集排列数）

下面证明：方程（2.1）解的个数等于多重集 $T=\{r\cdot 1, (k-1)\cdot *\}$ 的排列数。

$$\overbrace{1\ldots1\underbrace{*1\ldots1*1\ldots1*1\ldots1*1\ldots1*}_{k\text{-}1\text{个}*}1\ldots1}^{r\text{个}1}$$

给定 T 的任一个排列，

- ✓ 第一个*的左边有 x_1 个 1，
- ✓ 第二个*和第三个*之间有 x_2 个 1
- ✓ 第 i 个 *和 $i+1$ 个 *之间有 x_i 个 1 （$i=2, \ldots, k\text{-}1$）
- ✓ 第 k-1 个 * 右边有 x_k 个 *。

则 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 是满足 $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 的非负整数解。

2.5.1定理的证明

（方程的非负整数解个数➔ 多重集排列数）

下面证明：方程（2.1）解的个数等于多重集

$T=\{r\cdot 1, (k-1)\cdot *\}$ 的排列数。

反之，给定满足$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 的非负整数解 $x_1, x_2, \ldots, x_k$, 则可构造 T 的一个排列，满足

- ✓ 第一个*的左边有x_1个 1，
- ✓ 第i 个 *和$i+1$个 *之间有x_{i-1}个 1 （$i=2,\ldots, k-1$
- ✓ 第 k 个* 右边有x_i个 *。

因此，多重集 S的 r 组合数等于多重集 T的排列数，即

$$\frac{(r+k-1)!}{(r)!(k-1)!}=\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}。$$

定理2.5.1：令S是多重集，它有k个不同的元素，每个元素都有无限重复次数，那么，S的 r 组合个数为

$$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$$

- 等价于：
  - 方程 $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 的非负整数解的个数
  - 多重集 $T=\{r\cdot 1, (k-1)\cdot *\}$ 的排列数
- 当 S中每个元素的重数至少是 r 时，定理 2.5.1仍然成立。

举例：多重集组合—问题抽象

例： 取自1, 2, …, k 的长为 r 的非递减序列个数是多少？（允许重复）

注：非递减序列指严格递增序列或非严格递增序列。

解：取自 1, 2, …, k 的长为 r 的任一个非递减序列，首先可以取 r 个数，对应唯一非递减排列。

令多重集 $S=\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \ldots, \infty\cdot k\}$，则 S的任意一个r组合唯一确定一个取自1, 2, …, k的长为 r的非递减序列。

因此，个数为：$\binom{r+k-1}{r}$。

举例：多重集组合—重复数等价

例. 令 $S=\{12\cdot a, 12\cdot b, 12\cdot c\}$。求 S 的的12-组合的个数。

解：因为S中每个元素的重数都为 12，

因此等价于求多重集

$$\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c\}$$

的 12 组合的个数。

因此，个数为：

$$\binom{12+3-1}{12}=\binom{14}{2}。$$

举例：多重集组合—元素约束

例：令$S=\{12\cdot a, 12\cdot b, 12\cdot c\}$。求 S 的使得3个元素都至少出现一次的12 组合个数。

解：S的一个12组合中 a,b,c 的出现次数分别为 x_1, x_2, x_3，

则方程 $x_1+x_2+x_3=12$ 的正整数解的个数，

即为S 的使得3个元素都至少出现一次的12 组合个数。

进行变量代换：$y_i = x_i - 1$（$i=1, 2, 3$），

得到方程 $y_1+y_2+y_3 = 9$，其中每个 y_i 都是非负整数。

因此，所求的12组合个数为：$\binom{9+3-1}{9} = \binom{11}{2}$.

多重集组合---练习

3. 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$的整数解的个数是多少？其中$x_1 \geq 3, x_2 \geq 1, x_3 \geq 0, x_4 \geq 5.$

解：作变量代换：$y_1 = x_1-3$， $y_2 = x_2-1$， $y_3 = x_3$，$y_4 = x_4-5$，那么，得到方程： $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$。原方程的解个数与该方程的非负整数解个数相同。故为：

$$\binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11}$$

多重集组合-练习（上界约束）

例：方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=12$的整数解的个数是多少？其中$0\le x_1 \le 3$, $x_2\ge0$, $x_3\ge0$, $x_4\ge0$.

解法1：

x_1=0,1,2,3分类

C(12+3-1, 12)+C(11+3-1, 11)+C(10+3-1, 10)+C(9+3-1, 9)

解法2：

先求出$x_1\ge0$，再减去$x_1\ge4$的

C(12+4-1, 12)-C(12-4+4-1, 8)

通用问题：有限重复集r组合问题？

- 令多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，

$n= n_1+n_2+\ldots+n_k$，求S的r-组合数，其中$0\le r\le n$.

- 方程：$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 满足条件

$0\le x_1\le n_1$，$0\le x_2\le n_2$，$\ldots$, $0\le x_k\le n_k$

的整数解的个数。

第6章容斥原理部分介绍。

小结

- 选取模型

n个元素	r排列问题（choose a list）	r组合问题（choose a set）
无重复	$P(n, r)$	$\binom{n}{r}$
允许重复（无限）	n^r	$\binom{n+r-1}{r}$

小结

- $n_1+n_2+\ldots+n_k=r$ 的非负整数解个数为 $\binom{r+k-1}{r}$
- $n_1+n_2+\ldots+n_k=r$ 的正整数解个数为$\binom{r-1}{k-1}$

小结

- 多重集的排列计数问题
- 多重集的组合计数
  - 不定方程整数解个数

多重集排列
- 有限全排列
  无限r排列
- 有限重复集
  r-排列

不存在计算公式，第7章讨论

多重集组合
- 无限重复集
  r-组合
- 有限重复集
  r组合

公式不适用，第6章讨论

- 把2n个人分成n组，每组2人，有多少分法？
- 18. 2个红车，4个蓝车放入8X8的棋盘中，使得两个车没有相互攻击的放置方法有多少？
- 35. 确定下面多重集合的11排列数目
  - $S=\{3\cdot a, 3\cdot b, 3\cdot c, 3\cdot d\}$
- 36. 确定下面多重集合的所有组合数量（大小任意）
  - 有k种不同类型对象，且它们的有限重复数为$n_1, n_2, \ldots, n_k$
- 39. 有20根完全相同的棍列成一行，占据20个不同位置。从中选出6根
  - （1）有多少种选择？
  - （2）如果选出的棍子没有两根是相邻，有多少种选择？
  - （3）如果每一对选出的棍之间必须至少有2根棍，有多少选择？
- 51.考虑大小为2n的多重集合$\{n\cdot a,1,2,3,\ldots,n\}$, 确定他的n组合数
- 52.考虑3n+1的多重集{n.a,n.b,1,2,…n+1}, 确定其n组合数。

练习题

知识点：等价性

- 把2n个人分成n组，每组2人，有多少分法？

解：等价为分组问题，相当于将$2n$个不同球投入n个相同的盒子中，每个盒子2个。

$$\frac{(2n)!}{(2!)^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

小练习：

- **2个红车，4个蓝车放入8×8的棋盘中，使得任意两个车没有相互攻击的放置方法有多少？**

解：

- **(i, j)）先从8个选行6行: C(8,6)**
- **再选列： P(8,6)**
- **选定位置后选择2个红车 C(6, 2)**

放置方法：C(8,6) P(8,6) C(6, 2)

分步：选行，排列，选颜色

小练习

- **35. 确定下面多重集合的11排列数目**
  - $S=\{3\cdot a, 3\cdot b, 3\cdot c, 3\cdot d\}$
  - **A.12!/2!3!3!3!**
  - **B. 4 *12!/2!3!3!3!**
  - **C. 11!/2!3!3!3!**
  - **D.4 *11!/2!3!3!3!**

小练习

- **36. 确定下面多重集合的所有组合数量（大小任意）**
  - 有k种不同类型对象，且它们的有限重复数为$n_1, n_2, \ldots, n_k$
  - **A. $(n_1)*(n_2)*\ldots*(n_k)$**
  - **B. $(n_1+1)*(n_2+1)*\ldots*(n_k+1)$**

经典题目：不相邻选取问题

例：从 1, 2, …, n 中取出r个不相邻的数，这样的组合有多少种？

取出 r 个不相邻的数：

- 是组合不是排列
- 取出的 r 个数被剩下的 $n-r$ 个数隔开

隔开 r 个0

$n-r$ 个1

(n=12, r=5)　0 1　1 0　1 0 1　1　1 0　1 0 1

经典题目：不相邻选取问题

例：从 1, 2, …, n 中取出r 个不相邻的数，这样的组合有多少种？

分析：

- 是组合不是排列
- 取出的 r 个数被剩下的 n- r 个数隔开

$$(n=12,\ r=5)\quad \mid\ \overbrace{1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1}^{n\,-\,r\text{ 个}1}\ \mid$$

等价于 在 n- $r+1$ 个 位置插入 r 个0：$\binom{n-r+1}{r}$

注意区别多重集组合

小练习

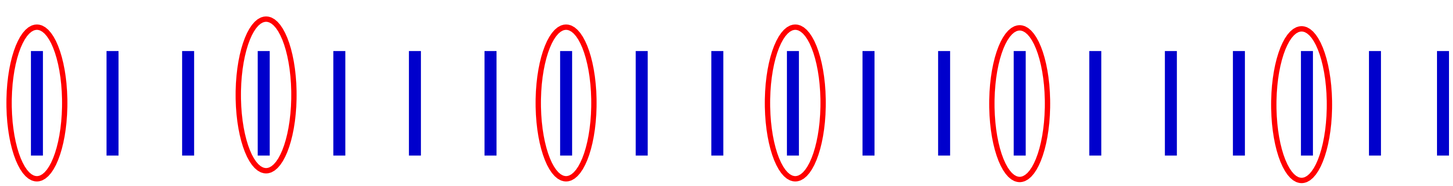
39. 有 20 根完全相同的棍列成一行， 占据 20个不同位置。从中选出6根

(1)有多少种选择？

(2)如果选出的棍子没有两根是相邻，有多少种选择？

(3)如果每一对选出的棍之间必须至少有2根棍，有多少选择？

解： (1) 从 20 个位置中取6个位置上的棍子：$\binom{20}{6}$



小练习

39. 有 20 根完全相同的棍列成一行， 占据 20个不同位置。从中选出6根

(2)如果选出的棍子没有两根是相邻，有多少种选择?

解：记选出的 6根棍为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

相当于用$x_1,\ldots, x_6$分隔剩下的14 根棍，使得x_i与x_{i+1}之间至少有 1 根棍子，i=1,…, 5。

设 x_1 左边的棍子数为y_0, x_i与x_{i+1}之间的棍子数为y_i, i=1,…, 5，x_6 右边的棍子数为 y_6,

则选择个数为以下方程的解的个数：

$y_0+y_1+\ldots+y_6 = 14$，其中$y_0 \geq 0$, $y_i \geq 1$ (i=1,…, 5), $y_6 \geq 0$。

小练习

39. 有 20 根完全相同的棍列成一行，占据 20个不同位置。从中选出6根

(2)如果选出的棍子没有两根是相邻，有多少种选择？

解：(续)则选择个数为以下方程的解的个数：

$y_0+\ldots+y_6=14$，其中$y_0\geq 0$, $y_i\geq 1$ (i=1, 2,3,4, 5), $y_6\geq 0$。

令 $z_0=y_0$, $z_i=y_i-1$, i=1,2,3,4,5, $z_6=y_6$，则选择个数为方程 $z_0+z_1+\ldots+z_6=9$ 的非负整数个数，即

$$\binom{7+9-1}{9}=\binom{15}{9}=\binom{15}{6}.$$

小练习

39. 有 20 根完全相同的棍列成一行， 占据 20个不同位置。从中选出6根

(3)如果每一对选出的棍之间必须至少有2根棍，有多少选择?

解: 记选出的 6根棍为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

相当于用$x_1,\ldots, x_6$ 分隔剩下的14 根棍，使得x_i与x_{i+1}之间至少有 2 根棍子，i=1,…, 5。

设 x_1 左边的棍子数为y_0, x_i与x_{i+1}之间的棍子数为y_i, i=1,…, 5，x_6 右边的棍子数为 y_6，

则选择个数为以下方程的解的个数:

$y_0+y_1+\ldots+y_6 = 14$，其中$y_0 \geq 0$, $y_i \geq 2$ (i=1,…, 5), $y_6 \geq 0$。

小练习

39. 有 20 根完全相同的棍列成一行，占据 20个不同位置。从中选出6根

(3)如果每一对选出的棍之间必须至少有2根棍，有多少选择？

解: (续)则选择个数为以下方程的解的个数：

$y_0+\ldots+y_6=14$，其中$y_0\geq 0$, $y_i\geq 2$ (i=1, 2,3,4, 5), $y_6\geq 0$。

令 $z_0=y_0$, $z_i=y_i-2$, i=1,2,3,4,5, $z_6=y_6$ ，则选择个数为方程 $z_0+z_1+\ldots+z_6=4$ 的非负整数个数，即

$$\binom{7+4-1}{9}=\binom{10}{9}=\binom{10}{6}.$$

小练习

- **2.7的51题？**
  - 考虑大小为2n的多重集合{n·a,1,2,3,…,n}，确定他的n组合数
- **2.7的52题？**
  - 考虑3n+1的多重集{n.a,n.b,1,2,…n+1}, 确定其n组合数。

2^n

$(n+1)2^n$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{n-k+1}{1}$$

p个球	k个盒	是否空	方 案 个 数
有区别	有区别	有空盒	k^p
	无区别	无空盒	$S(p,k)$
	有区别	无空盒	若不考虑盒子区别时得$S(p,k)$ 再对k个盒子排列得$k!S(p,k)$
	无区别	有空盒	$S(p,1)+S(p,2)+\ldots\ldots+S(p,k)$ $(p\geq k)$ $S(p,1)+S(p,2)+\ldots\ldots+S(p,p)$ $(p\leq k)$

选取模型

放球子模型

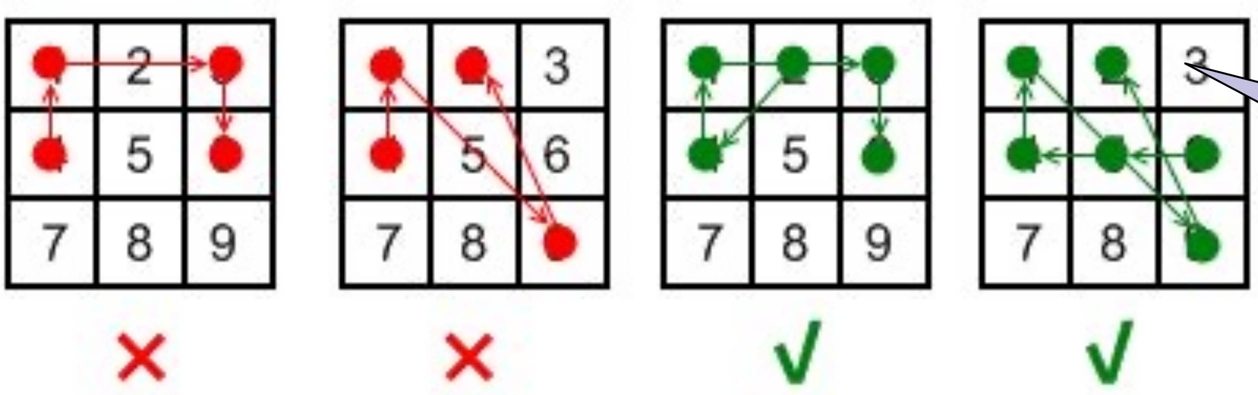
p个球	k个盒	是否空	方 案 个 数
无区别	有区别	有空盒	相当于p个有区别的元素 取k个作允许重复排列数
	有区别	无空盒	先取k个球每盒一个，余下的$p-k$个无区别的球放到k个盒子中。
	无区别	有空盒	
	无区别	无空盒	

不定方程解模型

正整数拆分模型

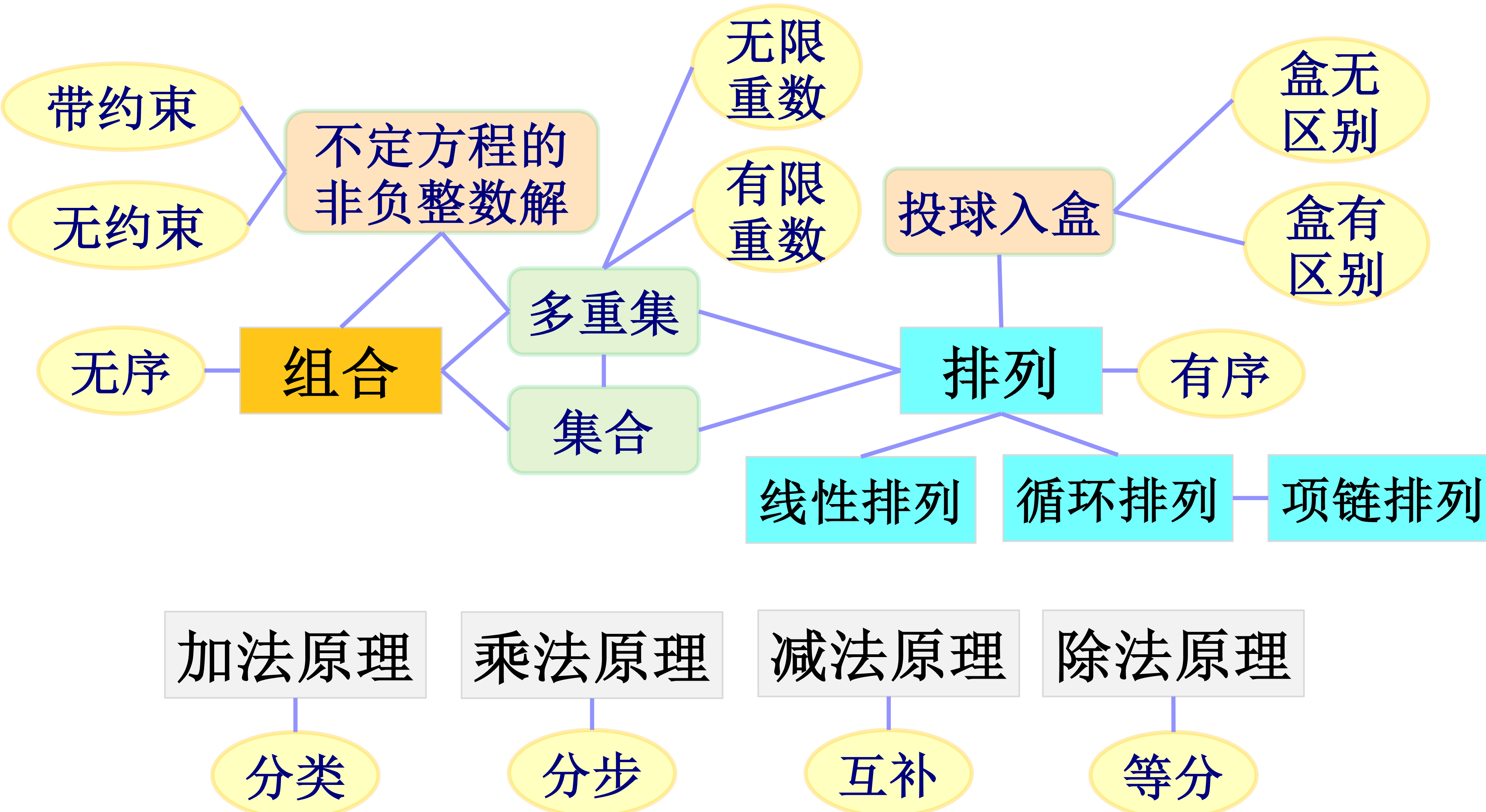
手机密码组合（建议编程）

- 早期iPhone手机4位密码
  - 密码空间？
- Android手机图案密码(最少4位)
  - 密码空间？



能否通过一段程序来计算？

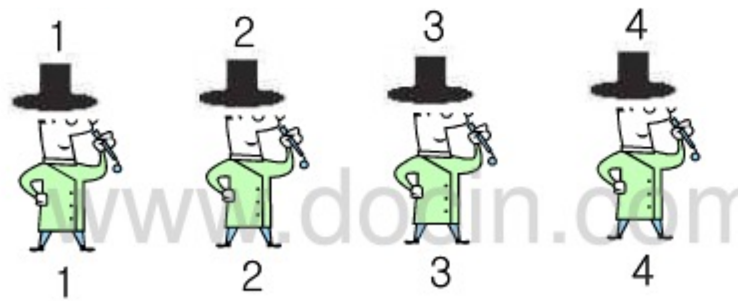
知识图谱



带约束
无约束
不定方程的非负整数解
无限重数
有限重数
投球入盒
盒无区别
盒有区别
无序
组合
多重集
集合
排列
有序
线性排列
循环排列
项链排列
加法原理
乘法原理
减法原理
除法原理
分类
分步
互补
等分

练习：餐厅服务员问题

- 餐厅里的一个新服务员，在寄存n个人的帽子时，忘记表示寄存号。请问：当顾客取回帽子时，只能从身下的帽子中随机发放，则没有一人收到自己帽子的概率多大?



抽象表示：
集合$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$的全排列，
使得每个 i 都不在第 i 位上。