矩阵分析基础

董波
数学科学学院
大连理工大学

主要内容

- 矩阵序列与矩阵级数
- 矩阵幂级数
- 矩阵的微积分

基本思想

矩阵列

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \cdots & \\ a_{n1}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ & \cdots & \\ a_{n1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \cdots$$

数列

$$a_{11}^{(1)}, a_{11}^{(2)}, \cdots, a_{11}^{(k)} \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(k)} \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{nn}^{(1)}, a_{nn}^{(2)}, \cdots, a_{nn}^{(k)} \cdots$$

数列

$$a_k \to a, \quad b_k \to b$$

1、 $a_k \to a \rightleftarrows |a_k| \to |a|$

$a_k \to a \rightleftarrows |a_k - a| \to 0$

2、

$$\alpha a_k \pm \beta b_k \to \alpha a \pm \beta b$$

$$a_k b_k \to ab$$

$$a_k^{-1} b_k \to a^{-1} b, (a_k, a \neq 0)$$

3、 非零数列极限可能为零

矩阵序列

?

矩阵序列收敛 $\Leftrightarrow$ mn个数列收敛

矩阵序列收敛性-数列

矩阵序列收敛、发散

$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中的矩阵序列，其中$A_k=\left(a_{ij}^{(k)}\right)$，又 $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbf{C}^{m\times n}$。

如果 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij}$ 对 $i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$ 均成立，

则称矩阵序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛，而A称为 矩阵序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限，记为

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A$$

不收敛的矩阵 序列称为发散的。

矩阵序列收敛 $\Leftrightarrow$ 元素收敛

例题

例　讨论矩阵序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的收敛性。

解：只需求出它的每一个元素的极限即可，极限为：

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k & \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\sin k}{k} \\ \lim\limits_{k\to\infty} 1 & \lim\limits_{k\to\infty} e^{-k} \\ \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2+k}{k} & \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

- 矩阵序列的收敛相当于mn个数列同时收敛
- 可以用初等分析的方法来研究它

矩阵序列收敛性-范数

矩阵序列收敛、发散

设 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中的矩阵序列，$\|\cdot\|$ 为 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中的一种矩阵范数，则矩阵序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于矩阵A的充要条件是 $\|A_k - A\|$ 收敛于零。

矩阵收敛 $\Leftrightarrow$ 元素收敛 $\Leftrightarrow$ 范数收敛

设 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$，$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，并且 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{A}_k=\mathbf{A}$ 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\|A_k\|=\|A\|$

此结论只是充分条件，反过来不一定成立。

例题

例：给定矩阵序列 $\boldsymbol{A}_k=\begin{pmatrix}(-1)^k & \frac{1}{k+1}\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 和矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

显然有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}_k\|_F=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{|-1|^{2k}+1^2+2^2+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sqrt{6}=\|\boldsymbol{A}\|_F$

但是矩阵序列A_k不收敛，故更不收敛于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

矩阵序列四则运算收敛性-加减

设 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $C^{m\times n}$ 中的矩阵序列，并且

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \qquad \lim_{k\to\infty} B_k = B$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\left(\alpha A_k + \beta B_k\right) = \alpha A + \beta B, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}$$

证：由

$$\left\|\left(\alpha A_k + \beta B_k\right) - \left(\alpha A + \beta B\right)\right\| = \left\|\alpha\left(A_k - A\right) + \beta\left(B_k - B\right)\right\|$$

$$\leq |\alpha| \cdot \left\|A_k - A\right\| + |\beta| \cdot \left\|B_k - B\right\|$$

结论成立。

矩阵序列四则运算收敛性-乘

设 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$和 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$分别为 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 和 $\mathbf{C}^{n\times l}$ 中的矩阵序列，并且

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A\ ,\quad \lim_{k\to\infty} B_k = B$$

则

$$\lim_{k\to\infty} A_k B_k = AB$$

证 由

$$\|A_k B_k - AB\| = \|A_k B_k - A_k B + A_k B - AB\| \le \|A_k\|\cdot\|B_k - B\| + \|B\|\cdot\|A_k - A\|$$

结论成立。

矩阵序列四则运算收敛性-逆

例:

$$\boldsymbol{A}_k=\begin{pmatrix}1+\dfrac{1}{k} & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\qquad \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$$ 不可逆。

$$\left(A_k\right)^{-1}=\begin{pmatrix}k & k\\ -k & k+1\end{pmatrix}\qquad \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k^{-1}$$ 不存在

$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k^{-1}=A^{-1}$ 条件 $A_k\,(k=1,2,\cdots)$ 和A均为可逆的是不可少的。

矩阵序列可逆不能保证极限一定可逆

矩阵序列四则运算收敛性-逆

设 $\{\mathbf{A}_k\}_{k=1}^{\infty}\in \mathrm{C}^{n\times n}$中的矩阵序列，并且 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{A}_k=\mathbf{A}$ ，$\mathbf{A}_k(k=1,2,\cdots)$
和 $A\in \mathrm{C}^{n\times n}$均为可逆矩阵，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{A}_k^{-1}=\mathbf{A}^{-1}$

证　因为$(A_k)^{-1}$和A^{-1}存在，　所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\det\left(\boldsymbol{A}_k\right)=\det\left(\boldsymbol{A}\right)\neq 0$，

又有 $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{\boldsymbol{A}}_k=\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{\boldsymbol{A}}\neq 0$，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_k=\begin{pmatrix}\det(\bar{\boldsymbol{A}}_{11}^{(k)}) & \det(\bar{\boldsymbol{A}}_{21}^{(k)}) & \cdots & \det(\bar{\boldsymbol{A}}_{n1}^{(k)})\\ \det(\bar{\boldsymbol{A}}_{12}^{(k)}) & \det(\bar{\boldsymbol{A}}_{22}^{(k)}) & \cdots & \det(\bar{\boldsymbol{A}}_{n2}^{(k)})\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \det(\bar{\boldsymbol{A}}_{1n}^{(k)}) & \det(\bar{\boldsymbol{A}}_{2n}^{(k)}) & \cdots & \det(\bar{\boldsymbol{A}}_{nn}^{(k)})\end{pmatrix}$$

其中 $\det\left(\left(\bar{A}_{ij}^{(k)}\right)_{(n-1)\times(n-1)}\right)$ $i,j=1,2,\cdots,n$ 为A_k的第ij个代数余子式。

于是，$$\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{A}_k)^{-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{\tilde{\boldsymbol{A}}_k}{\det(\boldsymbol{A}_k)}=\frac{\tilde{\boldsymbol{A}}}{\det(\boldsymbol{A})}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

矩阵序列收敛性

数列

$$a_k \to a, \quad b_k \to b$$

1、 $a_k \to a \rightleftarrows |a_k| \to |a|$

$a_k \to a \rightleftarrows |a_k - a| \to 0$

2、 $\alpha a_k \pm \beta b_k \to \alpha a \pm \beta b$

$a_k b_k \to ab$

$a_k^{-1} b_k \to a^{-1} b, (a_k, a \neq 0)$

3、 非零数列极限可能为零

矩阵序列

$$A_k \to A, \quad B_k \to B$$

1、 $A_k \to A \rightleftarrows \|A_k\| \to \|A\|$

$A_k \to A \rightleftarrows \|A_k - A\| \to 0$

2、 $\alpha A_k \pm \beta B_k \to \alpha A \pm \beta B$

$A_k B_k \to AB$

$A_k^{-1} B_k \to A^{-1} B$, A_k, A 可逆

3、 可逆矩阵列极限可能奇异

非零矩阵列极限可能为零

例　设 $A\in C^{n\times n}$，证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{A}^k=0$ 的充分必要条件是 $\rho(\mathbf{A})<1$。

A为收敛矩阵

$\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{A}^k=0 \xLeftrightarrow{\text{定理3.1}}$ 对任意一种矩阵范数 $\|\cdot\|$ 均有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\mathbf{A}^k\|=0$。

定理3.1

$\lim\limits_{k\to\infty}\|\mathbf{A}^k\|=0$

对充分大的k，必有 $\|\mathbf{A}^k\|<1$

$\|\mathbf{A}^k\|\le\|\mathbf{A}\|^k\le\left(\rho(\mathbf{A})+\varepsilon\right)^k\le q^k<1$

$\left(\rho(\mathbf{A})\right)^k=\rho(\mathbf{A}^k)\le\|\mathbf{A}^k\|<1$

相容矩阵范数 $\|\cdot\|$

$\varepsilon=\frac{1}{2}(1-\rho(\mathbf{A}))>0$

$\rho(\mathbf{A})+\varepsilon=\frac{1}{2}(1+\rho(\mathbf{A}))<1 \Longleftarrow \rho(\mathbf{A})<1$

$\rho(\mathbf{A})<1 \Longleftrightarrow$ 存在$C^{n\times n}$上的某种范数$\|\cdot\|$，使得$\|A\|<1$

设 $A\in C^{n\times n}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{A}^k=0$ 的充分必要条件是存在$C^{n\times n}$上的某种范数$\|\cdot\|$，使得

$$\|\boldsymbol{A}\|<1$$

$\rho(\mathbf{A})<1 \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{A}^k=\boldsymbol{0} \Longleftarrow \|A\|<1$ 任意

判断一个矩阵是否为收敛矩阵：

1、若 A^k 容易计算，则利用其判断收敛性

2、判断矩阵的某种范数是否小于1

3、计算矩阵的谱半径

练习 判断对下列矩阵是否为收敛矩阵

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$$

解：(1) 令

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 8\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left((\lambda-1)^2-16\right)=\frac{1}{6}(\lambda-5)(\lambda+3)=0$$

得 $\lambda_1(\boldsymbol{A})=\frac{5}{6}$，$\lambda_2(\boldsymbol{A})=-\frac{1}{2}$。于是，$\rho(\boldsymbol{A})=\frac{5}{6}<1$ 故 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{A}^k=\boldsymbol{0}$。

(2) 因为 $\|\boldsymbol{A}\|_1=0.9<1$，由推论，故 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$

矩阵级数

数项级数

1、数列所有项的和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

2、前n项和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

3、级数收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$

4、数项级数

$$S = 1 + a + \cdots + a^n + \cdots$$

收敛 $\Leftrightarrow |a| < 1$

矩阵级数

?

矩阵级数收敛 $\Leftrightarrow$ mn个数项级数收敛

矩阵级数与收敛性

设 $\{\mathbf{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为$C^{m\times n}$中的矩阵序列，称

$$\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\cdots+\mathbf{A}_k+\cdots$$

为由矩阵序列 $\{\mathbf{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 构成的**矩阵级数**，记为 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$。

记 $\mathbf{S}_k=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{A}_i$，称之为矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$ 的**前k项部分和**。若矩阵序列 $\{\mathbf{S}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛且$\lim_{k\to\infty}\mathbf{S}_k=\mathbf{S}$，则称矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$ 收敛，

矩阵S称为矩阵级数的**和矩阵**，记为 $\mathbf{S}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$。

不收敛的矩阵级数称为**发散**的。

矩阵级数收敛即$m\times n$个数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)}$均收敛

例　研究矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 的收敛性，其中

解：因为

$$S_N=\sum_{k=0}^{N} A_k=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(k+1)(k+2)} & \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}\\ 0 & \frac{\pi}{3}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{4^k}\right)\end{pmatrix},\quad k=1,2,\cdots,$$

于是

$$S=\lim_{N\to\infty} S_N=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & \frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}$$

故矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛，且和为S。

例　设A为n阶方阵，证明：矩阵级数 $\mathbf{I}_n+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^k+\cdots$ 收敛($A_0=I_n$)的充要条件是 $\rho(\mathbf{A})<1$, 而且矩阵级数收敛时有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}$$

证：　必要性

$$S_k=I_n+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

$$S_{k+1}=I_n+A+\cdots+A^{k-1}+A^k$$

若矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$ 收敛，则

$$\lim_{k\to\infty}A^k=\lim_{k\to\infty}\left(S_{k+1}-S_k\right)=0$$

故，　$\rho(\mathbf{A})<1$。

充分性

$$S_k=I_n+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

$$AS_k=A+A^2+\cdots++A^{k-1}+A^k$$

$\rho(\mathbf{A})<1$, 则I-A可逆且 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}^k=0$

$$\lim_{k\to\infty}\left(S_k-AS_k\right)=\lim_{k\to\infty}\left(I_n-A^k\right)=I_n$$

则矩阵级数收敛且 $\lim_{k\to\infty}S_k=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}$

★ 级数收敛的必要条件是通项的极限为0.

例：计算 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.7\\ 0.3 & 0.6\end{pmatrix}$。

思路：

判断是否是收敛矩阵，若是则收敛到 $(I-A)^{-1}$ 否则不收敛

解：

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = 0.9 < 1 \Rightarrow \rho(\mathbf{A}) < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k \text{ 收敛，且有}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1} = \begin{pmatrix}0.9 & -0.7\\ -0.3 & 0.4\end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 3 & 9\end{pmatrix}$$

矩阵级数收敛性

数项级数

1、数列所有项的和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

2、前n项和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

3、级数收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$

4、数项级数

$$S = 1 + a + \cdots + a^n + \cdots$$

收敛 $\Leftrightarrow |a| < 1$

矩阵级数

1、矩阵列所有项的和 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$

2、前n项和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$

3、级数收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$

4、矩阵级数

$$S = I + A + \cdots + A^n + \cdots$$

收敛 $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$

矩阵级数收敛 $\Leftrightarrow$ mn个数项级数收敛

矩阵级数绝对收敛性

数项级数

1、绝对收敛 $\Rightarrow$

收敛且级数和不变

2、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow$

正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 收敛

3、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 绝对收敛到

a, b 则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k = ab$

4、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛，$\sum_{k=1}^{\infty} b a_k c$ 绝对收敛

矩阵项级数

?

矩阵项级数绝对收敛 $\Leftrightarrow$ mn个数项级数绝对收敛

矩阵级数绝对收敛性

矩阵级数　　类比于　数项级数

设 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$ 为$\mathrm{C}^{m\times n}$中的矩阵级数，其中 $\mathbf{A}_k=\left(a_{ij}^{(k)}\right)$。

如果$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)}$ 对任意的$1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$均为绝对收敛的，

则称 矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$ 绝对收敛。

矩阵级数绝对收敛性判定

矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$ 为绝对收敛 $\Longleftrightarrow$ 正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|\mathbf{A}_k\|$ 收敛

利用矩阵范数的等价性，只需证明对于∞-范数定理成立即可。

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & & A_2 & & & A_k & \\ \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix} & + & \cdots + & \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(k)} & \cdots & a_{mn}^{(k)} \end{pmatrix} & + \cdots \end{array}$$

$$\left|a_{ij}^{(1)}\right| \le \|A_1\|_\infty$$

$$\left|a_{ij}^{(2)}\right| \le \|A_2\|_\infty \qquad \sum_{k=1}^{l}\left|a_{ij}^{(k)}\right| \le \sum_{k=1}^{l}\|A_k\|_\infty$$

$$\vdots$$

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| \le \|A_k\|_\infty$$

$$\|A_1\|_\infty \le \left|a_{11}^{(1)}\right| + \cdots + \left|a_{mn}^{(1)}\right|$$

$$\|A_2\|_\infty \le \left|a_{11}^{(2)}\right| + \cdots + \left|a_{mn}^{(2)}\right| \qquad \sum_{k=1}^{l}\|A_k\|_\infty \le M_{11} + \cdots + M_{mn}$$

$$\vdots$$

$$\|A_k\|_\infty \le \left|a_{11}^{(k)}\right| + \cdots + \left|a_{mn}^{(k)}\right|$$

绝对收敛矩阵级数性质

若矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$ 是绝对收敛，则它一定是收敛的，
并且任意调换各项的顺序所得到的级数还是收敛的，且级数和不变。

绝对收敛 $\underset{\nleftarrow}{\rightarrow}$ 收敛

绝对收敛矩阵级数性质

设 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$ 为$C^{m\times n}$中的绝对收敛的矩阵级数，$\mathbf{A}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k$，

$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{B}_k$ 为 $C^{n\times l}$中的绝对收敛的矩阵级数，$\mathbf{B}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{B}_k$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}_k \bullet \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{B}_k$$

按任何方式排列得到的级数绝对收敛，且和为AB.

证：$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{B}_k = (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots \boldsymbol{A}_p + \cdots)(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 + \cdots + \boldsymbol{B}_p + \cdots)$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3 + \cdots + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_p + \cdots \\
&+ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 + \cdots + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_p + \cdots \\
&+ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3 + \cdots + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_p + \cdots \\
&+ \cdots \\
&+ \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{B}_3 + \cdots + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{B}_p + \cdots \\
&+ \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{C}_k, \quad \boldsymbol{C}_k = \sum_{i,j} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j
\end{aligned}
$$

有限项和

从而

绝对收敛

$$\sum_{k=1}^{p} \|\mathbf{C}_k\|_\infty \le \sum_{k=1}^{p} \sum_{i,j} \|\mathbf{A}_i\mathbf{B}_j\|_\infty \le \sum_{k=1}^{N_i} \|\mathbf{A}_k\|_\infty \cdot \sum_{k=1}^{N_j} \|\mathbf{B}_k\|_\infty \le \mathrm{M}_{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{M}_{\mathbf{B}}$$

绝对收敛

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{C}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{B}_k =$$

$$\begin{aligned}
&= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3 + \cdots + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_p + \cdots \\
&+ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 + \cdots + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_p + \cdots \\
&+ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3 + \cdots + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_p + \cdots \\
&+ \cdots \\
&+ \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{B}_3 + \cdots + \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{B}_p + \cdots \\
&+ \cdots
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1, \quad \boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2, \quad \boldsymbol{C}_p = \boldsymbol{A}_p \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{B}_i + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_p,$$

$$\sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{C}_k = \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{A}_k \cdot \sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{B}_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} C_k = AB$$

设 $P\in C^{p\times m}$ 和 $Q\in C^{n\times q}$ 为给定矩阵，

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}PA^kQ \text{ 收敛}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k \text{绝对收敛} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}PA^kQ\text{绝对收敛}$$

且有等式 $\sum_{k=0}^{\infty}PA^kQ=P\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^k\right)Q$

乘积运算和无穷和运算可交换

$$\sum_{k=0}^{\infty}PA^kQ=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}PA^kQ=P\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}A^k\right)Q=PSQ=P\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^k\right)Q$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k\text{绝对收敛}\xrightarrow{\text{性质}}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^k\right\| \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\|P\|\left\|A^k\right\|\|Q\| \text{ 收敛}$$

$$\xrightarrow{\text{正项级数比较法}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|PA^kQ\right\| \text{ 收敛} \xrightarrow{\text{性质}}\sum_{k=0}^{\infty}PA^kQ \text{ 绝对收敛}$$

数项级数

1、绝对收敛 $\Rightarrow$

收敛且级数和不变

2、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow$

正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 收敛

3、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 绝对收敛到

a, b 则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k = ab$

4、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛，$\sum_{k=1}^{\infty} b a_k c$ 绝对收敛

矩阵项级数

1、绝对收敛 $\Rightarrow$

收敛且级数和不变

2、$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow$

正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ 收敛

3、$\sum_{k=1}^{\infty} A_k, \sum_{k=1}^{\infty} B_k$ 绝对收敛到

A, B 则 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sum_{k=1}^{\infty} B_k = AB$

4、$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 绝对收敛，$\sum_{k=1}^{\infty} P A_k Q$ 绝对收敛

矩阵项级数绝对收敛 $\Leftrightarrow$ mn个数项级数绝对收敛