绪论

董波
数学科学学院
大连理工大学

主要内容

- 计算机科学计算研究对象与特点
- 误差的基本概念和有效数字
- 向量与矩阵的范数

计算机科学计算研究对象与特点

本课程主要研究

用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现

主要内容包括：

数值代数 $Ax=b$

数值逼近（数值微分积分） $f(x)$ $f'(x)$ $\int_a^b \rho(x)f(x)dx$

微分方程数值解法 $u'=f(t,u),\ u(t_0)=u_0$

矩阵分析简介 $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ $\sum_{k=0}^{\infty}A_k$ $f(A)=e^A$、$\sin A$ $\frac{dA(t)}{dt}$ $\int_a^b A(t)\,dt$

实际问题求解

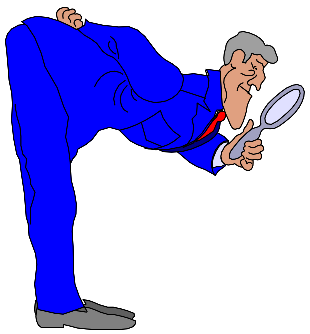
一、构造计算机可行的有效算法

二、给出可靠的理论分析，即对任意逼近达到精度要求，保证数值算法的收敛性和数值稳定性，并可进行误差分析。

三、有好的计算复杂性，既要时间复杂性好，是指节省时间，又要空间复杂性好，是指节省存储量，这也是建立算法要研究的问题，它关系到算法能否在计算机上实现。

四、数值实验，即任何一个算法除了从理论上要满足上述三点外，还要通过数值试验证明是行之有效的。

有效算法



考察线性方程组的解法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Cramer求解法则(18世纪)

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad i=1,2,\cdots,n, \qquad (D\neq 0)$$

$$D = \det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 i 列

$$D_i = \det(\boldsymbol{A}_i) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Laplace展开定理

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

A_{ij}表示元素a_{ij}的代数余子式

理论非常漂亮

实际计算困难（运算量大得惊人）

线性方程组的求解 $\Longrightarrow$ 计算n+1个n阶行列式 $\Longleftarrow$ Laplace展开定理

设计算 k 阶行列式所需要的乘法运算的次数为 m_k，则

$$m_k = k + k\,m_{k-1}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} m_n &= n + n\,m_{n-1} = n + n\left[(n-1) + (n-1)m_{n-2}\right] \\ &= n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n(n-1)\cdots 3\cdot 2 \\ &> n! \end{aligned}$$

利用Cramer法和Laplace展开定理来求解一个n阶线性方程组，所需的乘法运算次数就大于

$$(n+1)n! = (n+1)!$$

求解25阶线性方程组

总的的乘法运算次数将达：

$$26! = 4.0329 \times 10^{26}（次）$$

若使用每秒百亿次的串行计算机计算，一年可进行的运算应为：

$$365(天) \times 24(小时) \times 3600(秒) \times 10^{10} \approx 3.1536 \times 10^{17}（次）$$

共需要耗费时间为：

$$\left(4.0329 \times 10^{26}\right) \div \left(3.1536 \times 10^{17}\right) \approx 1.2788 \times 10^{9} \approx 13(亿年)$$

它远远超出目前所了解的人类文明历史！

Cramer 算法是“实际计算不了”的。

Gauss主元消元法可在不到一秒钟之内即可完成上述计算任务。

随着科学技术的发展，又出现了迭代法，大大提高了求解效率和计算精度。

这就是研究数值方法的必要性