大连理工大学历年《矩阵与数值分析》

试卷与答案

年份	试题	答案
2005 年	√	×
2006 年	√	×
2007 年	√	√
2008 年	√	√
2009 年	√	√
2010 年	√	×
2011 年	√	√
2012 年	×	×
2013 级	√	√
2014 级	√	×

大 连 理 工 大 学 2005 年试题

课 程 名 称：计算方法　　试卷：A　考试形式：闭卷

授课院（系）：数学系　　考试日期：2005 年 12 月 12 日　　试卷共 7 页

	一	二	三	四	五	六	七			总分
标准分										
得　分										

装

一、填空（共 30 分，每空 1.5 分）

（1）误差的来源主要有________、________、________、________.

（2）要使 $\sqrt{60}=7.7459666\cdots$ 的近似值 a 的相对误差限不超过 10^{-3}，应至少取____位有效数字，此时的近似值 a =________.

订

（3）设 $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1=$_____，$\|A\|_2=$_____，$\|A\|_\infty=$_____，$\|A\|_F=$_____，

谱半径 $\rho(A)=$_____，2-条件数 $cond_2(A)=$_____，奇异值为________.

线

（4）设 $A\in C^{4\times 4}$，特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=\lambda_4=3$，特征值 2 是半单的，而特征值 3 是亏损的，则 A 的 Jordan 标准型 $J=$

________________.

（5）已知 $f(x)=x^2-3x$，则 $f[-1,0,1]=$______，$f[-1,0,1,3]=$______.

（6）求 $f(x)=x^3+x-1=0$ 在 $x=0.5$ 附近的根 α 的 Newton 迭代公式是：

____________________，其收敛阶________.

（7）计算 $u'=-5u\ \ (0\le t\le 1)$，$u(0)=1$ 的数值解的 Euler 求解公式为__________. 为使计算保持绝对稳定性，步长 h 的取值范围______.

二、（12 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 8\end{pmatrix}$ 的 Doolittle 分解和 Cholesky 分解，并求解 $Ax=\begin{pmatrix}5\\ 8\\ 10\end{pmatrix}$.

三、（6 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 9 & 2\\ 2 & 2 & 6\end{pmatrix}$ 的 QR 分解（Q 可表示为两个矩阵的乘积）.

四、（12 分）根据迭代法 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 对任意 $x^{(0)}$ 和 f 均收敛的充要条件为 $\rho(B)<1$，证明若线性方程组 $Ax=b$ 中的 A 为严格对角占优矩阵, 则 Jacobi 法和 G-S 法均收敛.

五、（12 分）求满足下列插值条件的分段三次多项式（$[-3,0]$ 和 $[0,1]$），并验证它是不是三次样条函数.

$f(-3)=-27$，$f(-2)=-8$，$f(-1)=-1$，$f(0)=0$，$x\in[-3,0]$；

$f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，$x\in[0,1]$.

六、（10 分）证明线性二步法$u_{n+2}+(b-1)u_{n+1}-bu_n=\frac{h}{4}[(3+b)f_{n+2}+(3b+1)f_n]$，当$b\neq -1$时为二阶方法，$b=-1$时为三阶方法，并给出$b=-1$时的局部截断误差主项.

七、（18 分）求$[-1,1]$上以$\rho(x)\equiv 1$为权函数的标准正交多项式系$\psi_0(x)$，$\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$，并由此求x^3 $(x\in[-1,1])$的二次最佳平方逼近多项式，构造Gauss型求积公式$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$，并验证其代数精度.

装

订

线

大 连 理 工 大 学 2006年试题

课 程 名 称：计算方法　　试卷：A　考试形式：闭卷

授课院（系）：数学系　　考试日期：2006 年 12 月 11 日　　试卷共 8 页

	一	二	三	四	五	六	七	八		总分
标准分										
得　分										

一、填空（共 30 分，每空 2 分）

（1）误差的来源主要有____________________.

（2）按四舍五入的原则，取 $\sqrt{22}=4.69041575\cdots$ 具有四位有效数字的近似值

$a=$________，则绝对误差界为________，相对误差界为________.

（3）矩阵算子范数 $\|A\|_M$ 和谱半径 $\rho(A)$ 的关系为：____________，

和____________________.

（4）设 $A\in C^{4\times 4}$,特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=\lambda_4=3$,特征值 2 是半单的，而特征值 3 是亏损的，则 A 的 Jordan 标准型 $J=$

____________________.

（5）已知 $f(x)=x^2-3x$，则 $f[0,1]=$________，$f[-1,0,1]=$________.

（6）求 $f(x)=x^3+x-1=0$ 在 $x=0.5$ 附近的根 α 的 Newton 迭代公式是：

____________________.

（7）使用 Aitken 加速迭代格式 $x_k=\varphi(x_{k-1})$ 得到的 Steffensen 迭代格式为：

____________________，对幂法数列 $\{m_k\}$ 的加速公式为：

____________________.

（8）$n+1$点的 Newton-Cotes 求积公式$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$的最高代数精度为

____.

（9）计算$u'=-7u\ (0\le t\le 1)$，$u(0)=1$的数值解的 Euler 求解公式为__________________，为使计算保持绝对稳定性, 步长h的取值范围_________.

二、（10 分） 设$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$，计算$\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F$，谱半径$\rho(A)$, 2-条件数$cond_2(A)$，和奇异值.

三、（10 分）求矩阵$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 8\end{pmatrix}$的 Doolittle 分解和 Cholesky 分解.

四、（4 分）求 Householder 变换矩阵将向量 $x=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ 化为向量 $y=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$.

五、（12 分）写出解线性方程组的 Jacobi 法，G-S 法和超松弛（SOR）法的矩阵表示形式，并根据迭代法 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 对任意 $x^{(0)}$ 和 f 均收敛的充要条件为 $\rho(B)<1$，证明若线性方程组 $Ax=b$ 中的 A 为严格对角占优矩阵，则超松弛（SOR）法当松弛因子 $\omega\in(0,1]$ 时收敛.

六、（12 分）求满足下列插值条件的分段三次多项式（$[-3,0]$ 和 $[0,1]$），并验证它是不是三次样条函数. $f(-3)=-27$，$f(-2)=-8$，$f(-1)=-1$，$f(0)=0$，$x\in[-3,0]$；

$$f(0)=0，f'(0)=0，f(1)=0，f'(1)=1，x\in[0,1].$$

七、（12 分）证明区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 的 Gauss 型求积公式 $I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 中的系数 $A_k=\int_a^b \rho(x)l_k(x)dx$，其中 $l_k(x)$ 为关于求积节点 $x_0,x_1,\cdots x_n$ 的 n 次 Lagrange 插值基函数，$k=0,1,\cdots n$. 另求 $[-1,1]$ 上以 $\rho(x)\equiv 1$ 为权函数的二次正交多项式 $\psi_2(x)$，并由此构造 Gauss 型求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx\approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$.

八、（10 分）证明线性二步法 $u_{n+2}+(b-1)u_{n+1}-bu_n=\frac{h}{4}[(3+b)f_{n+2}+(3b+1)f_n]$，当 $b\neq -1$ 时为二阶方法，$b=-1$ 时为三阶方法，并给出 $b=-1$ 时的局部截断误差主项.

师：张宏伟

装

订

线

大连理工大学2007年试题应用数学系
数学与应用数学专业2005级试卷

课 程 名 称：计算方法　　　授课院（系）：应 用 数 学 系

考 试 日 期：2007年11 月　日　　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
标准分	42	8	15	15	15	5	/	/	/	/	100
得　分											

一、填空（每一空2分，共42分）

1．为了减少运算次数，应将表达式.$\dfrac{16x^5-17x^4+18x^3-14x^2-13x-1}{x^4+16x^2+8x-1}$

改写为________；

2．给定3个求积节点：$x_0=0$，$x_1=0.5$和$x_2=1$，则用复化梯形公式计算积分$\int_0^1 e^{-x^2}dx$

求得的近似值为______________________________，

用Simpson公式求得的近似值为______________________________。

1．设函数$s(x)\in S_3(-1,0,\ 1)$，若当$x<-1$时，满足$s(x)=0$，则其可表示

为____。

4．已知$f(0)=0,\ \ f(1)=6,\ \ f(2)=12$，则$f[0,1]=$______，$f[0,1,2]=$_____，逼近$f(x)$的Newton插值多项式为_______________________________。

5．用于求$f(x)=e^x-1-x=0$的根$x=0$的具有平方收敛的Newton迭代公式为：_________________________________。

6．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$的Jordan标准型是____________________；

7．设$\boldsymbol{A}$是n阶正规矩阵，则$\|A\|_2=$__________；

8．求解一阶常微分方程初值问题$u'(t)=(t^2-1)u+t$，$u(t_0)=u_0$的向后（隐式）

Euler法的显式化的格式为：_______________________________________。

9．设$a=211.00112$为x的近似值，且$|x-a|\le 0.5\times10^{-2}$，则$a$至少有

_______位有效数字；

10．将 $\boldsymbol{x}=(3,4)^T$，化为 $\boldsymbol{y}=(5,0)^T$ 的 Householder 矩阵为：______________；

11．$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}^k=$______________；

12．用二分法求方程 $f(x)=2x^3-5x-1=0$ 在区间 $[1,3]$ 内的根，进行一步后根所在区间为_________，进行二步后根所在区间为_________。

13．若 $\int_0^1 f(x)\,dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)\ (\boldsymbol{n}\geq 2)$ 为 Newton-Cotes 求积公式，则 $\sum_{k=0}^{n}A_k\,x_k=$_________，若为 Gauss 型求积公式，则 $\sum_{k=0}^{n}A_k\,x_k^4=$_________。

14．设 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，则在 Schur 分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{URU}^{\boldsymbol{H}}$ 中，$\boldsymbol{R}$ 可取为_________。

15．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}=$_______________，$\frac{\mathrm{d}\,e^{At}}{\mathrm{d}t}=$____________。

二、（8 分） 已知近似值 $a_1=1.21$，$a_2=3.65$，$a_3=9.81$ 均为有效数字，试估计算术运算 $a_3+\frac{a_1\cdot a_2}{a_3}$ 的相对误差界。

三、（15 分）设线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

（1）列主元消元法求出上述方程组的解，并计算 $\|\boldsymbol{A}\|_1$，$\|\boldsymbol{L}\|_\infty$，$\|\boldsymbol{U}\|_{m_1}$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|_2$；

（2）试问用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解上述方程组是否收敛？

（3）请给出可求出上述方程组解的收敛的 Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的分量形式的迭代公式，并说明其收敛性。

四、（15 分）对于如下求解一阶常微分方程初值问题 $u'(t)=f(t,u)$，$u(t_0)=u_0$ 的数值方法

$$u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n=\frac{h}{8}\left(3f_{n+2}+8f_{n+1}+f_n\right)$$

①证明其收敛性；求出它的局部截断误差主项及绝对稳定区间；

②要用此方法解 $u'=-20u$，$u(0)=1$。为使方法绝对稳定，求出步长 h 的取值范围并以 $u_0=1$，$u_1=1$ 初值，$h=0.01$ 为步长，求出 $u(0.02)$ 的近似值 u_2。

五、（15 分）

（1）用 Schimidt 正交化方法，构造$[-1,1]$上以$\rho(x)\equiv 1$权函数的正交多项式系：$\phi_0(x)$，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$，$\phi_3(x)$；

（2）构造计算$\int_{-1}^{1} f(x)dx$，具有 5 次代数精度的数值求积公式；

（3） 利用 2)的结果求出$\int_0^4 \frac{\sin x}{x} dx$的数值解。

六、证明题（5 分）任选一题

1．设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$均为可逆矩阵，且齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$有非零解，证明：对于$\mathbf{C}^{n\times n}$中的任何矩阵范数$\|\cdot\|$，都有$\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|\geq 1$。

2．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求出$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$，证明 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}A^k$ 收敛。

大连理工大学 2008 年试卷答案

课 程 名 称：**计算方法**　　授课院（系）：**应 用 数 学 系**

考 试 日 期：2008 年 1 月 11 日

一、填空（每一空 2 分，共 46 分）

3．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$，则 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=$____，$\boldsymbol{A}$ 的奇异值 $=$______，

$\|\boldsymbol{A}\|_2=$____，$\|\boldsymbol{A}_1\|_1=$_____。

2．给定 3 个求积节点：$x_0=0$，$x_1=0.5$ 和 $x_2=1$，则用复化梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 求得的近似值为:______，则用复化 Simpson 公式求得的近似值为____。

4．设函数 $s(x)\in S_3(-1,0,\ 1)$，若当 $x<-1$ 时，满足 $s(x)=0$，则其可表示为__________。

4．已知 $f(0)=0,\ \ f(1)=6,\ \ f(2)=12$，则 $f[0,1]=$_______，$f[0,1,2]=$___，逼近 $f(x)$ 的 Newton 插值多项式为:____。

5．用于求 $f(x)=x-\sin x=0$ 的根 $x=0$ 的具有平方收敛的 Newton 迭代公式为：___。

6．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是：___或_____；

7．取 $f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{Ax}\|_2^2$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{3\times2}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$,则

$\dfrac{d\,f(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}}=$______;

8．求解一阶常微分方程初值问题 $u'(t)=(t^2-1)u+t$，$u(t_0)=u_0$ 的向后（隐式）Euler 法的显式化的格式为：___。

9．设 $a=211.00112$ 为 x 的近似值，且 $|x-a|\le0.5\times10^{-2}$，则 a 至少有______位有效数字；

10．将 $\boldsymbol{x}=(3,4)^T$，化为 $\boldsymbol{y}=(5,0)^T$ 的 Householder 矩阵为：____；

11．$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}^k=$______；

12．用二分法求方程 $f(x)=2x^3-5x-1=0$ 在区间 $[1,3]$ 内的根，进行一步后根所在区间为____，进行二步后根所在区间为____。

13．写出如下二阶常微分方程两点边值问题的差分格式为（化成最简分量形式）：____。

$$\frac{\mathbf{d}^2 u(x)}{\mathbf{d}x^2}=\frac{\mathbf{d}u(x)}{\mathbf{d}x}，\quad 0<x<1，\quad u(0)=0，\quad u(1)=0$$

其中 $x_i=ih$，$i=0,1,\cdots,10$，$h=\dfrac{1}{10}=10^{-1}$。

14．设 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，则在 Schur 分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{URU}^{\boldsymbol{H}}$ 中，$\boldsymbol{R}$ 可取为____或______。

15．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{e}^{At}=$______，$\dfrac{\mathrm{d}\,e^{At}}{\mathrm{d}t}=$______。#

二、（8 分）根据下列表格给出的数据，求其形如 $s(x)=a+bx$ 的最小二乘拟合曲线。

x_k	−2	−1	0	1	2
y_k	−3.1	−0.9	1.0	3.1	4. 9

三、**（12 分）**设线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

（1）列主元消元法求出上述方程组的解，并利用得到的上三角矩阵计算出 $\det(\boldsymbol{A})$（要有换元、消元过程）；

（2）试问用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解上述方程组是否收敛？

（3）请给出可求出上述方程组解的收敛的 Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的分量形式的迭代公式，并说明其收敛性。

四、**（15 分）**对于如下的数值方法

$$u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{h}{8}\left(3f_{n+2} + 8f_{n+1} + f_n\right)$$

（1） 求出其局部截断误差主项，并指出此方法的完整名称；

（2） 证明其收敛性；（3）求出其绝对稳定区间。

五、（14 分）

（1） 用 Schimidt 正交化方法，构造$[-1,1]$上权函数$\rho(x)\equiv 1$正交多项式系，$\phi_0(x)$，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$；

（2）设$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，用 1）中所得到的$\phi_2(x)$的零点x_0, x_1为插值节点构造$f(x)$的 Largrange 插值多项式$L_1(x)$，并给出余项估计式；

（3）设要计算积分$\int_{-1}^{1} f(x)dx,$ 以$L_1(x)$代替$f(x)$，求出相应的数值求积公式，并求出其代数精度；

（3） 利用 3)的结果给出$\int_0^2 f(x)dx$的数值求积公式。

六、证明题（5 分）

设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{n\times n}$均为可逆矩阵，且齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$有非零解，证明：对于$\mathbf{C}^{n\times n}$中的任何矩阵范数$\|\cdot\|$，都有$\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\| \geq 1$。

名:________
号:________

系:______
_级　班

装

订

线

大 连 理 工 大 学 2009 年试题

课 程 名 称：计 算 方 法　试　卷：B　考试类型　闭卷

授课院（系）：数 学 系　考试日期：2009 年 1 月 8 日　试卷共 2 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
标准分	34	15	15	10	10	10	6	/	/	/	100
得　分											

一、　填空，每题 2 分，共 34 分

1）1）已知近似值 $a=246.00$ 有 5 位有效数字，则 a 的绝对误差界为________，a 的相对误差界为____________；

2）于 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，用 $y=a+bx$ 做 $f(x)=\sin x$ 最佳平方逼近，则法方程组为：________；

3）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 5 & 7\end{pmatrix}$，$\|\boldsymbol{A}\|_1=$______，$\mathrm{cond}_1(\boldsymbol{A})=$______；

4）为了减少运算次数，应将表达式 $\dfrac{x^4+16x^2+8x-1}{16x^5-17x^4+18x^3-14x^2-13x-1}$

改写为______________________________；

5）已知 $f(0)=1,\ \ f(1)=3,\ \ f(2)=5,$ 则均差 $f[0,1,2]=$______，对应于 $x_0=0$ 插值基函数 $l_0(x)=$__________；

6）此数值求积公式 $\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\dfrac{1}{6}\left(1+\dfrac{4}{\sqrt[4]{e}}+e^{-1}\right)$ 的代数精度为：________；

7）求解 $u'=-u+t-e^{-1}$ 的隐式 Euler 公式：________________________；

8）用二分法求方程 $f(x)=2x^3-5x-1=0$ 在区间 $[1,3]$ 内的根，进行一步后根所在区间为______。

9）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ 的 $\mathbf{LL}^T$ 分解为：____________；

10）$[0,1]$ 上以 $\rho(x)=\ln\dfrac{1}{x}$ 权函数的正交多项式 $\phi_0(x)=$_____，$\phi_1(x)=$______。

11）$x=0$ 是 $f(x)=1-x-e^x=0$ 的根，则具有平方收敛的迭代公式为：

______________________________。

12）将向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ 变换为向量 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ 的正交矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为______________；

二、计算题

1.（15 分） 如下求解初值问题 $u'=f(t,u),\ u(t_0)=u_0$ 的线性二步法

$$u_{n+2}=u_n+\frac{h}{2}(f_{n+1}+3f_n)$$

①确定出它的阶 p 、局部截断误差主项和收敛性，求出其绝对稳定区间；

②给出上述方法求解方程：$u'=-40u$ ，$u(0)=1$，的步长 h 的取值范围。

2．（15 分）确定x_0，A_0，x_1，A_1使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} x^2 f\left(x\right) dx \approx A_0 f\left(x_0\right) + A_1 f\left(x_1\right)$$

的代数精度m达到最高，试问m是多少？取$f\left(x\right) = e^{-x^2}$，利用所求得的公式计算出数值解。

3．（10 分）求下列矩阵的一个奇异值分解

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4、（10 分）已知线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（1） 给出求解上述方程组的 **Gauss-Seidel** 法分量形式迭代公式；

（2） 确定 a 的值，得到 **Gauss-Seidel** 迭代法收敛的充要条件；

5.（10 分）已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求出 A 的 **Jardan** 标准型。

三、证明题（6 分）设 A 为 n 阶方阵，若 $\rho(\lambda)<1$，则在 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中存在一种矩阵范数 $\|\cdot\|$ ，使得 $\|A\|<1$。

分析___班

师___

装

订

线

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称：矩阵与数值分析　试 卷：统一　考试类型 闭卷

授课院（系）：数 学 系　考试日期：2010 年 1 月 12 日　试卷共 8 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
标准分	50	6	6	6	10	12	10	/	/	/	100
得　分											

二、　填空与判断题（×或√），每空 2 分，共 50 分

（1） 已知 $a=2009.12$， $b=2010.01$ 分别是按四舍五入原则得到的 x_1 和 x_2 近似值，那么，

$|x_1-a|\le$ ________； $\dfrac{|x_2-b|}{|b|}\le$ ________； $|x_1x_2-ab|\le$ ________。

（2） $[0,1]$ 上 权 函 数 $\rho(x)=x$ 的 正 交 多 项 式 族 中 $\phi_1(x)=$ ________________；

$\int_0^1\left(x^5+x^3\right)\phi_5(x)=$ ________。

（3） 已知存在实数 R 使曲线 $y=x^2$ 和 $y^2+(x-8)^2=R^2$ 相切。求切点横坐标近似值的 **Newton** 迭代公式为________________。

（4） 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，则它的奇异值为________。

（5）若取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $\int_0^1 e^{At}\mathrm{d}t=$ ________。

（6） 若 $\|\boldsymbol{A}\|<1$，则 $\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\|\le$ ________。

（7） 已知 $f(a-h), f(a), f(a+h)$，计算一阶数值导数的公式是：

$f'(a)=$ ________________ $+O(h^2)$；取 $f(x)=\sqrt{x},\ h=0.001$，那么，用此公式计算 $f'(2)$ 的近似值时，为避免误差的危害，应该写成：

$f'(2)\approx$ ________________ 。

(8) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.25 & 1\\ & 0.25\end{pmatrix}$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k=$ ________________________。

(9) 设 $\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{0}\in\mathbf{C}^n$，则 $\left\|\frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T}{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})}\right\|_2=$ ______。

(10) 求解微分方程 $\begin{cases}u'=t-u\\ u(0)=2\end{cases}$，的 **Euler** 法公式为________________________；绝对稳定区间为________；改进的 **Euler** 公式为________________________。

(11) 用 $A(-2,-3.1)$、$B(-1,0.9)$、$C(0,1.0)$ 、$D(1,3.1)$、$E(2,4.9)$ 拟合一直线 $s(x)=a+bx$ 的法方程组为：

_____________。

(12) 已知多项式 $p_3(x)=4x^3+3x^2+2x+1$，那么求此多项式值的秦九韶算法公为：_______。

(13) 给定如下数据表

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-5	-2	3	10	19	30

则均差 $f[-1,0,1]=$ ____，由数据构造出最简插值多项式 $p(x)=$ ____________________。

(14) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & a+2\end{pmatrix}$，当 a 满足条件_________时，$\boldsymbol{A}$ 必有唯一的 LL^T 分解（其中 L 是对角元为正的下三角矩阵）。

(15) 求 $f(x)=e^x-1-x=0$ 根的 **Newton** 迭代法至少局部平方收敛 （ ）

(16) 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则求解 $\boldsymbol{A^TAx=b}$ 的 **Gauss-Seidel** 迭代法收敛 （ ）

(17) 分段二点三次 **Hermite** 插值多项式 $\in\mathbf{C}^2$ 函数类 （ ）

(18) 如果 $\boldsymbol{A}$ 为 **Hermite** 矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 （ ）

二、（6 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & -2 & 0 \\ & & & -2 \end{pmatrix}$，求出 A 的 **Jordan** 分解以及 $\sin tA$ 。

三、（6 分）给定求积节点：x_k=0, 0. 25, 0. 5, 0. 75, 1, 请用复化的梯形公式和复化的 **Simpson** 公式，计算如下定积分的近似值。

四、**（8 分）**确定将向量 $\boldsymbol{x}=(1,3,4)^T$，变换为向量 $\boldsymbol{y}=(1,0,t)^T$ 的正数 t 和 **Householder** 矩阵 $\boldsymbol{H}$，以及 $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{H})$，$\|\boldsymbol{H}\|_1$ 。

五、**（10 分）**

（1）用 **Schimidt** 正交化方法，构造$[-1,1]$上以$\rho(x)\equiv 1$权函数的正交多项式系：$\phi_0(x)$，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$；

（2）利用所得到的结果构造$f\left(x\right)=x^4$在$[-1,1]$上的最佳二次平方逼近多项式；

（3）构造$[-1,1]$上的两点 **Gauss** 型数值求积公式；

（4）利用（3）的结果给出$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}dx$的近似值。

六、**（12 分）**设线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad - x_3 = 1 \\ -2x_1 - 10x_2 \qquad = -12 \\ -x_1 \quad - x_2 \; + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

(1) 利用 **Gauss** 消去法求上述解方程组；

(2) 求系数矩阵 ***A*** 的 ***LU*** 分解；

(3) 写出求解上述方程组的矩阵形式的 **Jacobi** 迭代公式和分量形式的 **Gauss-Seidel** 迭代法公式，并讨论收敛性.

七、（10 分）已知解常微分方程初值问题$\begin{cases} u'(t)=f(t,u) \\ u(t_0)=u_0 \end{cases}$的某线性二步法的第一、第二特征多项式分别为：

$$\rho(\lambda)=\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda+\frac{1}{3}，\ \sigma(\lambda)=\frac{2}{3}\lambda^2$$

(1) 给出此线性二步法具体表达式，并求出其局部截断误差主项；

(2) 讨论其收敛性；

(3) 求其绝对稳定区间。

大连理工大学2011年《矩阵与数值分析》试题

参考答案、评分标准

一、填空题（共50分，每填对一空得2分）

（1）已知 $a=1.234$，$b=2.345$ 分别是 x 和 y 的具有 4 位有效数字的近似值，那么，

$\dfrac{|x-a|}{a}\le$ ____；$|(3x-y)-(3a-b)|\le$ _____.

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}$ 的 ***QR*** 分解 $\boldsymbol{A}=$ _____；将向量 $\boldsymbol{x}=(1,4,3)^{\mathrm{T}}$ 映射成 $\boldsymbol{y}=(1,5,0)^{\mathrm{T}}$ 的

Householder 变换矩阵 $\boldsymbol{H}=$ _____，　$\boldsymbol{cond}_2(\boldsymbol{H})=$ _____.

（3）记区间 $[-1,1]$ 上以 $\rho(x)=1$ 为权函数的正交多项式序列为 $\phi_0(x),\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots$. 则

其中的 $\phi_2(x)=$ _____；**（可以相差常数倍）**　$\phi_3(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的二次最佳平方逼近

多项式 $p_2(x)=$ ____.

（4）数值求解微分方程 $\begin{cases}u'=-2tu^2\\u(0)=1\end{cases}$ 的 ***Euler*** 法格式为 ______；

梯形法格式为_______　（步长 h）.

（5）已知 $f(x)$ 是一个次数不超过4的多项式，其部分函数值如下表所示：

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1	-1	1	19	65

则 $f[0,1,2]=$ ___，　$f(x)=$ _____，　$f[0,1,2,4]=$ ____.

（6）满足下列条件：$H(0)=1,H'(0)=0,H(1)=0,H'(1)=1$ 的三次 ***Hermite*** 插值多项式

$H(x)=$ _____　（写成最简形式）.

（7）***Simpson*** 数值求积公式的代数精度为 ____ . 用该公式分别估算定积分 $I_1=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x$ 和

$I_2=\int_0^1(2x^4+\sqrt{2}x^3+\pi x^2)\mathrm{d}x$，所得近似值分别记为 S 和 $\tilde{\boldsymbol{S}}$，则 $S=$ ____，$I_2-\tilde{\boldsymbol{S}}=$ ____.

（8）迭代格式$x_{k+1}=\dfrac{2}{3}x_k+\dfrac{1}{x_k^2}$对于任意初值$x_0>0$均收敛于$\alpha=$ ___，其收敛阶$p=$ ___.

（9）奇异值分解$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{5}{13} & -\frac{12}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 $\|\boldsymbol{A}\|_2=$ ___， $\|\boldsymbol{A}\|_F=$ ___.

（10）已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ & 0.5\end{pmatrix}$, 则$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k=$____，

$\boldsymbol{A}^{10}=$_______， $e^{\boldsymbol{A}}=$___，

$e^{\boldsymbol{A}t}=$______， $\dfrac{\mathrm{d}\,e^{\boldsymbol{A}t}}{\mathrm{d}t}=$______.

二、（12 分）设线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

(1) 求系数矩阵 ***A*** 的 ***LU*** 分解；

(2) 利用平方根法（又称 ***Cholesky*** 方法）解此方程组；

(3) 构造解此方程组的 ***G-S*** 迭代格式，并讨论其收敛性.

三、（8 分）求拟合下列数据的最小二乘曲线 $y = a + bx$.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1.8	1.2	-0.2	-0.8	-2.2

四、（8 分）设 $\|\cdot\|_1$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 1-向量范数，$\boldsymbol{P} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵．对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，定义 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}} = \|\boldsymbol{Px}\|_1$．证明：$\|\cdot\|_{\boldsymbol{P}}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一种向量范数，并且 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}} \le \max\limits_{1\le j\le n}\|\boldsymbol{p}_j\|_1 \cdot \|\boldsymbol{x}\|_1$，其中 $\boldsymbol{p}_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的列向量．

五、（**12 分**）对于解常微分方程初值问题$\begin{cases} u'(t) = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$的线性二步法

$$u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = \frac{h}{16}\left(7f_{n+2} + 8f_{n+1} - 3f_n\right)$$

（**1**）求其局部截断误差（必须写出主项），并指出该方法是几阶方法；

（**2**）讨论收敛性；　　　　　　　（**3**）求绝对稳定区间.

六、（10 分）已知$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$为 ***Gauss*** 型求积公式，其中$\rho(x)$为权函数；设

$l_0(x)$，

$l_1(x)$，$\cdots, l_n(x)$为以$x_0, x_1, \cdots, x_n$为节点的 ***Lagrange*** 插值基函数．证明：

(1) $\int_a^b \rho(x) l_i(x) l_j(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad (i \neq j)$；

(2) $\sum_{k=0}^{n} \int_a^b \rho(x) l_k^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$.

装

订

线

大连理工大学应用数学系2007年答案

数学与应用数学专业 2005 级试 A 卷答案

课 程 名 称： 计算方法 　　授课院（系）： 应 用 数 学 系

考 试 日 期：2007年11 月 日 　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
标准分	42	8	15	15	15	5	/	/	/	/	100
得　分											

一、填空（每一空 2 分，共 42 分）

1．为了减少运算次数，应将表达式. $\frac{16x^5-17x^4+18x^3-14x^2-13x-1}{x^4+16x^2+8x-1}$

改写为 $\underline{\frac{((((16x-17)x+18)x-14)x-13)x-1}{(((x+0)x+16)x+8)x-1}}$；

2．给定 3 个求积节点：$x_0=0$，$x_1=0.5$ 和 $x_2=1$，则用复化梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

求得的近似值为 $\underline{\frac{1}{4}\left(1+2e^{-0.5}+e^{-1}\right)}$，

用 Simpson 公式求得的近似值为 $\underline{\frac{1}{6}\left(1+4e^{-0.5}+e^{-1}\right)}$。

5．设函数 $s(x)\in S_3(-1,0,\ 1)$，若当 $x<-1$ 时，满足 $s(x)=0$，则其可表示

为 $\underline{s(x)=c_1(x+1)_+^3+c_2x_+^3+c_3(x-1)_+^3}$。

4．已知 $f(0)=0,\ \ f(1)=6,\ \ f(2)=12$，则 $f[0,1]=$ $\underline{\ \ 6\ \ }$，$f[0,1,2]=$ $\underline{\ \ 0\ \ }$，逼近 $f(x)$ 的

Newton 插值多项式为 $\underline{6x}$。

5．用于求 $f(x)=e^x-1-x=0$ 的根 $x=0$ 的具有平方收敛的 Newton 迭代公式为：

$\underline{x_{k+1}=x_k-2\times\frac{e^{x_k}-1-x_k}{e^{x_k}-1}}$。

6．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是 $\underline{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}$ 或 $\underline{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$；

7．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正规矩阵，则 $\|A\|_2 = \underline{\rho(A)}$；

8．求解一阶常微分方程初值问题 $u'(t)=(t^2-1)u+t$， $u(t_0)=u_0$ 的向后（隐式）

Euler 法的显式化的格式为：$\underline{u_{n+1}=\dfrac{u_n+ht_{n+1}}{1+h\left(1-t_{n+1}^2\right)}}$。

9．设 $a=211.00112$ 为 x 的近似值，且 $|x-a|\le 0.5\times 10^{-2}$，则 a 至少有

__5__ 位有效数字；

10．将 $\boldsymbol{x}=(3,4)^T$，化为 $\boldsymbol{y}=(5,0)^T$ 的 Householder 矩阵为：$\underline{\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}}$；

11．$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}^k=\underline{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}}$；

12．用二分法求方程 $f(x)=2x^3-5x-1=0$ 在区间 $[1,3]$ 内的根，进行一步后根所在区间为 $\underline{(1,2)}$，进行二步后根所在区间为 $\underline{(1.5,2)}$。

13．若 $\int_0^1 f(x)\,dx\approx\sum\limits_{k=0}^{n}A_k f(x_k)\ (\boldsymbol{n}\ge 2)$ 为 Newton-Cotes 求积公式，则 $\sum\limits_{k=0}^{n}A_k\,x_k=\underline{\dfrac{1}{2}}$，若为 Gauss 型求积公式，则 $\sum\limits_{k=0}^{n}A_k\,x_k^4=\underline{\dfrac{1}{5}}$。

14．设 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，则在 Schur 分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{URU}^{\boldsymbol{H}}$ 中，$\boldsymbol{R}$ 可取为 $\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$ 或 $\underline{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$。

15．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}=\underline{\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$，$\dfrac{\mathrm{d}\,e^{\boldsymbol{A}t}}{\mathrm{d}t}=\underline{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$。

二、（8 分）已知近似值 $a_1=1.21$，$a_2=3.65$，$a_3=9.81$ 均为有效数字，试估计算术运算 $a_3+\dfrac{a_1\cdot a_2}{a_3}$ 的相对误差界。

解：由已知，

$\left|x_1 - a_1\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{k-n} = \frac{1}{2}\times 10^{-2}$；$\left|x_2 - a_2\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-2}$；$\left|x_3 - a_3\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-2}$。

令

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_3} + x_3,\quad f(a_1, a_2, a_3) = \frac{a_1 \cdot a_2}{a_3} + a_3,$$

由函数运算的误差估计式

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, a_2, a_3) \approx$$

$$f'_{x_1}(a_1, a_2, a_3)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2, a_3)(x_2 - a_2) + f'_{x_3}(a_1, a_2, a_3)(x_3 - a_3)$$

$$= \frac{a_2}{a_3}(x_1 - a_1) + \frac{a_1}{a_3}(x_2 - a_2) + \left(1 - \frac{a_1 \cdot a_2}{a_3^2}\right)(x_3 - a_3)$$

从而，相对误差可写成

$$\frac{\left|f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, a_2, a_3)\right|}{\left|f(a_1, a_2, a_3)\right|} \le \frac{\left|\frac{a_2}{a_3}\right|\left|x_1 - a_1\right| + \left|\frac{a_1}{a_3}\right|\left|x_2 - a_2\right| + \left|1 - \frac{a_1 \cdot a_2}{a_3^2}\right|\left|x_3 - a_3\right|}{\left|\frac{a_1 \cdot a_2}{a_3} + a_3\right|}$$ #

三、**（15 分）**设线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

（1）列主元消元法求出上述方程组的解，并利用得到的上三角矩阵计算出 $\det(\boldsymbol{A})$（要有换元、消元过程）;

（2）试问用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解上述方程组是否收敛？

（3）请给出可求出上述方程组解的收敛的 Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的分量形式的迭代公式，并说明其收敛性。

解：（1）

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 4 & \frac{13}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

故，$x = (1, 1, 1)^T$，$\det(\boldsymbol{A}) = (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -32$。

（2）由于 Gauss-Seidel 迭代法的特征值满足：

$$\mathbf{det}(\lambda(\boldsymbol{D}-L)-\boldsymbol{U})=\begin{vmatrix}\lambda & 3 & 0\\ 3\lambda & \lambda & 0\\ 2\lambda & \lambda & 4\lambda\end{vmatrix}=4\lambda^3-36\lambda^2=4\lambda^2(\lambda-9)=0，则$$

$\lambda(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S})=0,0,9$，故 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S})=9>1$，从而 Gauss-Seidel 迭代法发散。

又由于 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为：

$$\boldsymbol{B}_J=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ -3 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}，\ \mathbf{det}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J)=\begin{vmatrix}\lambda & 3 & 0\\ 3 & \lambda & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-9\lambda=\lambda(\lambda^2-9)，则$$

$\lambda(\boldsymbol{B}_J)=0,3,-3$，故 $\rho(\boldsymbol{B}_J)=3>1$，从而 Jacobi 迭代法发散。

（3）将上述方程组的第一个方程与第二个方程对调后，新的方程组的系数矩阵为：$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 7\end{pmatrix}$是严格对角占有的，故 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛。且新的方程组与原方程组同解。

Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的分量形式的迭代公式分别为：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_2^{(k)}\right)\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_1^{(k)}\right)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(7-2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}\right)\end{cases}\quad 和 \quad \begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_2^{(k)}\right)\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{3}\left(4-x_1^{(k+)}\right)\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(7-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}\right)\end{cases}\qquad \#$$

四、**(15 分)** 对于如下求解一阶常微分方程初值问题 $u'(t)=f(t,u)$，$u(t_0)=u_0$ 的数值方法

$$u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n=\frac{h}{8}\left(3f_{n+2}+8f_{n+1}+f_n\right)$$

①证明其收敛性；求出它的局部截断误差主项及绝对稳定区间；

②要用此方法解 $u'=-20u$，$u(0)=1$。为使方法绝对稳定，求出步长 h 的取值范围并以 $u_0=1$，$u_1=1$ 初值，$h=0.01$ 为步长，求出 $u(0.02)$ 的近似值 u_2。

解：（1）注意，$\alpha_0=-\frac{1}{2},\alpha_1=-\frac{1}{2},\alpha_2=1,\beta_0=\frac{1}{8},\beta_1=1,\beta_2=\frac{3}{8}$，从而

$$\begin{cases} C_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0 \\ C_1 = 2 - \frac{1}{2} - (\frac{1}{8} + 1 + \frac{3}{8}) = 0 \\ C_2 = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + 4) - (1 + 2 \times \frac{3}{8}) = 0 \\ C_3 = \frac{1}{6}(-\frac{1}{2} + 2^3) - \frac{1}{2}(1 + 2^2 \times \frac{3}{8}) = 0 \\ C_4 = \frac{1}{4!}(-\frac{1}{2} + 2^4) - \frac{1}{3!}(1 + 2^3 \times \frac{3}{8}) = -\frac{1}{48} \end{cases}$$

故此为**线性隐式二步三阶法**，其局部截断误差主项为：$-\frac{1}{48}h^4u^{(4)}(t_n)$。

（2）令，$\rho(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0$，得 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$，满足根条件；又方法阶 $p = 3 > 1$，故此差分格式收敛。

（3）又对于模型问题：$u' = \mu u\ (\mu < 0)$，取 $\overline{h} = \mu h$

$\rho(\lambda) - \overline{h}\sigma(\lambda) = \left(1 - \frac{3}{8}\overline{h}\right)\lambda^2 - \left(\frac{1}{2} + \overline{h}\right)\lambda - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)\overline{h} = \lambda^2 - \left(\frac{\frac{1}{2} + \overline{h}}{1 - \frac{3}{8}\overline{h}}\right)\lambda - \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\overline{h}}{1 - \frac{3}{8}\overline{h}}\right) = 0$ 而要使得

$|\lambda| < 1$ 的充要条件为：

$$\left|\frac{\frac{1}{2} + \overline{h}}{1 - \frac{3}{8}\overline{h}}\right| < 1 - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\overline{h}}{1 - \frac{3}{8}\overline{h}} = 1 - \frac{4 + \overline{h}}{8 - 3\overline{h}} < 2$$

而 $1 - \frac{4 + \overline{h}}{8 - 3\overline{h}} < 2$ 自然成立。现在再由 $\left|\frac{4 + 8\overline{h}}{8 - 3\overline{h}}\right| < \frac{4 - 4\overline{h}}{8 - 3\overline{h}}$ 得

$$-4 + 4\overline{h} < 4 + 8\overline{h} < 4 - 4\overline{h} \Leftrightarrow -1 + \overline{h} < 1 + 2\overline{h} < 1 - \overline{h}$$

由 $-1 + \overline{h} < 1 + 2\overline{h}$，可推出 $-2 < \overline{h} < 0$，即 $\overline{h} \in (-2, 0)$。#

五、**（15 分）**

（1）用 Schimidt 正交化方法，构造 $[-1,1]$ 上以 $\rho(x) \equiv 1$ 权函数的正交多项式系：$\phi_0(x)$，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$，$\phi_3(x)$；

（2）构造计算 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$，具有 5 次代数精度的数值求积公式；

（3） 利用 2)的结果求出$\int_0^4 \frac{\sin x}{x} dx$的数值解。

解：由$2n+1=5 \Rightarrow n=2$，即应构造具有 3 个 Gauss 点的求积公式。首先构造 3 次正交多项式，令

$$\phi_3(x)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & x \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & x^2 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & x^3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} x^3$$

$$=\left(\frac{8}{15}-\frac{8}{27}\right)x^3+\left(\frac{8}{45}-\frac{8}{25}\right)x=\left[\left(\frac{27-15}{15\times 27}\right)x^3+\left(\frac{25-45}{45\times 25}\right)x\right]\times 8$$

$=\frac{32}{135}x^3-\frac{32}{225}x$；令$\phi_3(x)=0$即得，

$\phi_3(x)=\frac{1}{135}x^3-\frac{1}{225}x=x\left(\frac{1}{135}x^2-\frac{1}{225}\right)=0$，得$x_{0,2}=\pm\sqrt{\frac{135}{225}}=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$， $x_1=0$

取$f(x)=1$，x，x^2，令 $\int_{-1}^1 f(x)dx=A_0 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+A_1 f(0)+A_2 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

即得到方程组：$2=A_0+A_1+A_2$， $0=-\sqrt{\frac{3}{5}}A_0+\sqrt{\frac{3}{5}}A_2$， $\frac{2}{3}=\frac{3}{5}A_0+\frac{3}{5}A_2$

解之，得$A_0=A_2=\frac{5}{9}$， $A_1=\frac{8}{9}$，从而具有 5 次代数精度 Gauss 求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

（2） $x=2(1+t)$，则有$\int_0^4 f(x)dx=2\int_1^{-1} f(2(1+t))dt$

$$\approx\frac{2}{9}\left[5\times f\left(2\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)+8\times f(2)+5\times f\left(2\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)\right]$$

$$\int_0^4\frac{\sin x}{x}dx\approx\frac{2}{9}\left[5\times\frac{\sin 2\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{2\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}+16\times\sin 2+5\times\frac{\sin 2\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{2\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}\right]$$

$$\approx\frac{50}{9}\times\frac{\sin\left(\frac{10-2\sqrt{15}}{5}\right)}{10-2\sqrt{15}}+\frac{32}{9}\times\sin 2+\frac{50}{9}\times\frac{\sin\left(\frac{10+2\sqrt{15}}{5}\right)}{10+2\sqrt{15}}$$

$$\approx \frac{\sin\left(\frac{10-2\sqrt{15}}{5}\right)\left(50+10\sqrt{15}\right)+128\times\sin 2+\sin\left(\frac{10+2\sqrt{15}}{5}\right)\left(50-10\sqrt{15}\right)}{36}$$

六、证明题（5 分）任选一题

1．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 均为可逆矩阵，且齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，证明：对于 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的任何矩阵范数 $\|\cdot\|$，都有 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|\geq 1$。

（1）由题意，可知矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$ 奇异。故 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$ 奇异。

反证法，若存在某种范数 $\|\cdot\|$，使得 $\|A^{-1}B\|<1$，则 $\rho(A^{-1}B)<1$，则可知 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$ 非奇异，与条件矛盾。

（2）由于 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，故对 $x\neq 0$，取与向量 x 的范数相容的矩阵范数 $\|\cdot\|$，则由

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=A^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

得 $$\|\boldsymbol{x}\|=\|-(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}\|\leq\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|\Rightarrow\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|\geq 1。\#$$

6．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求出 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$，证明 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}A^k$ 收敛。

证明, $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}=\begin{pmatrix}1&\mathrm{k}\\0&1\end{pmatrix}$，由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}A^k=\begin{pmatrix}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} & \mathrm{k}\cdot\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\\ 0 & \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} & \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\\ 0 & \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\end{pmatrix}$$，而

级数 $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ 和 $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ 均收敛，有矩阵级数收敛定义可知，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}A^k$ 收敛。#

大连理工大学 2008 年试卷答案

课 程 名 称：**计算方法**　　　授课院（系）：**应 用 数 学 系**

考 试 日 期：2008 年 1 月 11 日

一、填空（每一空 2 分，共 46 分）

7．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$，则 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=$ $\underline{\ 2\ }$，$\boldsymbol{A}$ 的奇异值 $=\underline{\sqrt{5},\ 1}$，

$\|\boldsymbol{A}\|_2=\underline{\sqrt{5}}$，$\|\boldsymbol{A}_1\|_1=\underline{\ 3\ }$。

2．给定 3 个求积节点：$x_0=0$，$x_1=0.5$ 和 $x_2=1$，则用复化梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 求得的近似值为:$\underline{\frac{1}{4}\left(1+2e^{-0.5}+e^{-1}\right)}$，则用复化 Simpson 公式求得的近似值为 $\underline{\frac{1}{6}\left(1+4e^{-0.5}+e^{-1}\right)}$。

8．设函数 $s(x)\in S_3(-1,0,\ 1)$，若当 $x<-1$ 时，满足 $s(x)=0$，则其可表示为 $\underline{s(x)=c_1(x+1)_+^3+c_2x_+^3+c_3(x-1)_+^3}$。

4．已知 $f(0)=0,\ f(1)=6,\ f(2)=12$，则 $f[0,1]=\underline{\ 6\ }$，$f[0,1,2]=\underline{\ 0\ }$，逼近 $f(x)$ 的 Newton 插值多项式为: $\underline{6x}$。

5．用于求 $f(x)=x-\sin x=0$ 的根 $x=0$ 的具有平方收敛的 Newton 迭代公式为：$\underline{x_{k+1}=x_k+\frac{x_k-\sin x_k}{1-\cos x_k}}$。

6．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型是：$\underline{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$ 或 $\underline{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$；

7．取 $f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{Ax}\|_2^2$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{3\times 2}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$,则

$$\frac{d\,f(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}}=\underline{2\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=2\begin{pmatrix}6&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{cases}12x_1+6x_2\\6x_1+4x_2\end{cases}};$$

8．求解一阶常微分方程初值问题 $u'(t)=(t^2-1)u+t$， $u(t_0)=u_0$ 的向后（隐式）

Euler 法的显式化的格式为：$\underline{u_{n+1}=\dfrac{u_n+ht_{n+1}}{1+h\left(1-t_{n+1}^2\right)}}$。

9．设 $a=211.00112$ 为 x 的近似值，且 $|x-a|\le 0.5\times10^{-2}$，则 a 至少有

$\underline{\quad 5 \quad}$位有效数字；

10．将 $\boldsymbol{x}=(3,4)^T$，化为 $\boldsymbol{y}=(5,0)^T$ 的 Householder 矩阵为：$\underline{\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}}$；

11．$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0.5&0\\1&0\end{pmatrix}^k=\underline{\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}}$；

12．用二分法求方程 $f(x)=2x^3-5x-1=0$ 在区间 $[1,3]$ 内的根，进行一步后根所在区间为 $\underline{(1,2)}$，进行二步后根所在区间为 $\underline{(1.5,2)}$。

13．写出如下二阶常微分方程两点边值问题的差分格式为（化成最简分量形式）：

$\underline{21u_{i-1}-40u_i+19u_{i+1}=0,\quad i=1,2,\cdots,9}$。

$$\frac{\mathbf{d}^2u(x)}{\mathbf{d}x^2}=\frac{\mathbf{d}u(x)}{\mathbf{d}x},\quad 0<x<1,\quad u(0)=0,\quad u(1)=0$$

其中 $x_i=ih$， $i=0,1,\cdots,10$， $h=\dfrac{1}{10}=10^{-1}$。

14．设 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$，则在 Schur 分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{URU}^H$ 中， $\boldsymbol{R}$ 可取为 $\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}$ $\underline{或}$ $\underline{\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}}$。

15．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{e}^{At}=\underline{\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}}$，$\dfrac{\mathrm{d}\,e^{At}}{\mathrm{d}t}=\underline{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}$。#

二、（8 分）根据下列表格给出的数据，求其形如 $s(x)=a+bx$ 的最小二乘拟合曲线。

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	-3.1	-0.9	1.0	3.1	4. 9

解：正规方程为：

$$\begin{pmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5} x_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} y_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \end{pmatrix}$$

即为：$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$，解之，$s(x) = 2x + 1$。#

三、**（12 分）**设线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

（1）列主元消元法求出上述方程组的解，并利用得到的上三角矩阵计算出 $\det(\boldsymbol{A})$（要有换元、消元过程）；

（2）试问用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解上述方程组是否收敛？

（3）请给出可求出上述方程组解的收敛的 Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的分量形式的迭代公式，并说明其收敛性。

解：（1）

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 4 & \frac{13}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

故，$x = (1, 1, 1)^T$，$\det(\boldsymbol{A}) = (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -32$。

（2）由于 Gauss-Seidel 迭代法的特征值满足：

$$\mathbf{det}(\lambda(\boldsymbol{D} - L) - \boldsymbol{U}) = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 0 \\ 3\lambda & \lambda & 0 \\ 2\lambda & \lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^3 - 36\lambda^2 = 4\lambda^2(\lambda - 9) = 0$$，则

$\lambda(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S}) = 0, 0, 9$，故 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\text{-}S}) = 9 > 1$，从而 Gauss-Seidel 迭代法发散。

又由于 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为：

$$\boldsymbol{B}_J = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}，\ \mathbf{det}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 0 \\ 3 & \lambda & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda^2 - 9)，则$$

$\lambda(\boldsymbol{B}_J) = 0, 3, -3$，故 $\rho(\boldsymbol{B}_J) = 3 > 1$，从而 Jacobi 迭代法发散。

（3）将上述方程组的第一个方程与第二个方程对调后，新的方程组的系数矩阵为：$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$是严格对角占有的，故 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛。且新的方程组与原方程组同解。

Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法的分量形式的迭代公式分别为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(4 - x_2^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(4 - x_1^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}\left(7 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right) \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(4 - x_2^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(4 - x_1^{(k+)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}\left(7 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right) \end{cases} \qquad \#$$

四、**（15 分）**对于如下的数值方法

$$u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{h}{8}\left(3f_{n+2} + 8f_{n+1} + f_n\right)$$

（4） 求出其局部截断误差主项，并指出此方法的完整名称；

（5） 证明其收敛性；（3）求出其绝对稳定区间。

解：（1）注意，$\alpha_0=-\frac{1}{2},\alpha_1=-\frac{1}{2},\alpha_2=1,\beta_0=\frac{1}{8},\beta_1=1,\beta_2=\frac{3}{8}$，从而

$$\begin{cases} C_0=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0 \\ C_1=2-\frac{1}{2}-(\frac{1}{8}+1+\frac{3}{8})=0 \\ C_2=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+4)-(1+2\times\frac{3}{8})=0 \\ C_3=\frac{1}{6}(-\frac{1}{2}+2^3)-\frac{1}{2}(1+2^2\times\frac{3}{8})=0 \\ C_4=\frac{1}{4!}(-\frac{1}{2}+2^4)-\frac{1}{3!}(1+2^3\times\frac{3}{8})=-\frac{1}{48} \end{cases}$$

故此为**线性隐式二步三阶法**，其局部截断误差主项为：$-\frac{1}{48}h^4u^{(4)}(t_n)$。

（2）令，$\rho(\lambda)=\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}=(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=0$，得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-\frac{1}{2}$，满足根条件；

又方法阶 $p=3>1$，故此差分格式收敛。

（3）又对于模型问题：$u'=\mu u$ ($\mu<0$)，取 $\bar{h}=\mu h$

$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=\left(1-\frac{3}{8}\bar{h}\right)\lambda^2-\left(\frac{1}{2}+\bar{h}\right)\lambda-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\bar{h}=\lambda^2-\left(\frac{\frac{1}{2}+\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}\right)\lambda-\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}\right)=0$ 而要使得

$|\lambda|<1$ 的充要条件为：

$$\left|\frac{\frac{1}{2}+\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}\right|<1-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\bar{h}}{1-\frac{3}{8}\bar{h}}=1-\frac{4+\bar{h}}{8-3\bar{h}}<2$$

而 $1-\frac{4+\bar{h}}{8-3\bar{h}}<2$ 自然成立。现在再由 $\left|\frac{4+8\bar{h}}{8-3\bar{h}}\right|<\frac{4-4\bar{h}}{8-3\bar{h}}$ 得

$$-4+4\bar{h}<4+8\bar{h}<4-4\bar{h}\Leftrightarrow -1+\bar{h}<1+2\bar{h}<1-\bar{h}$$

由 $-1+\bar{h}<1+2\bar{h}$，可推出 $-2<\bar{h}<0$，即 $\bar{h}\in(-2,0)$。#

五、**（14 分）**

（1） 用 Schimidt 正交化方法，构造 $[-1,1]$ 上权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 正交多项式系，$\phi_0(x)$，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶连续导数，用 1）中所得到的 $\phi_2(x)$ 的零点 x_0,x_1 为插

值节点构造 $f(x)$ 的 Largrange 插值多项式 $L_1(x)$，并给出余项估计式；

（3）设要计算积分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, 以 $L_1(x)$ 代替 $f(x)$，求出相应的数值求积公式，并求出其代数精度；

（6） 利用 3)的结果给出 $\int_0^2 f(x)dx$ 的数值求积公式。

解：（1） $\phi_0(x)=1$，

$$\phi_1(x)=\begin{vmatrix}(1,1) & 1\\ (x,1) & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & x\end{vmatrix}=2x$$

$$\phi_2(x)=\begin{vmatrix}(1,1) & (x,1) & 1\\ (x,1) & (x,x) & x\\ (x,x) & (x,x^2) & x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & \frac{2}{3} & x\\ \frac{2}{3} & 0 & x^2\end{vmatrix}=\frac{4}{3}x_2-\frac{4}{9}=\frac{4}{9}\left(3x^2-1\right)$$

（2）令 $\phi_2(x)=\frac{4}{9}\left(3x^2-1\right)=0$，得 $x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$。则

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)=\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{2}{3}\sqrt{3}}f(x_0)+\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}f(x_1),$$

$$r_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x^2-\frac{1}{3}\right),$$

（3） $\int_{-1}^{1} f(x)dx, \approx I_1(f)=\int_{-1}^{1} L_1(x)dx=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，3 次代数精度。

（7） 令 $x=t+1$则

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(t+1)dt\approx f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)。\#$$

六、证明题（5 分）

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 均为可逆矩阵，且齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，证明：对于 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的任何矩阵范数 $\|\cdot\|$，都有 $\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right\|\geq 1$。

证明：

（1）由题意，可知矩阵$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$奇异。故$\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$奇异。

反证法，若存在某种范数$\|\cdot\|$，使得$\left\|A^{-1}B\right\|<1$，则$\rho\left(A^{-1}B\right)<1$，则可知$\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$非奇异，与条件矛盾。

（2）由于$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{x}=0$有非零解，故对$x\neq 0$，取与向量$x$的范数相容的矩阵范数$\|\cdot\|$，则由

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{x}=A^{-1}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

得
$$\|\boldsymbol{x}\|=\left\|-\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{x}\right\|\le\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|\Rightarrow\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right\|\ge 1$$
。#

大连理工大学《矩阵与数值分析》2009年真题 2006级《计算方法》试题B卷答案

三、　填空，每题4分，共34分

1）a 的绝对误差界为 $\underline{\frac{1}{2}\times10^{-2}}$，$a$ 的相对误差界为 $\underline{\frac{1}{4}\times10^{-4}}$；

2）法方程组为：$\underline{\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^2}{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$；

$(\varphi_0,\varphi_0)=\frac{\pi}{2}$, $(\varphi_0,\varphi_1)=\frac{\pi^2}{8}$, $(\varphi_1,\varphi_1)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, $(\varphi_0,\sin x)=1$, $(\varphi_1,\sin x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=1$,

3）设 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\underline{\ 17\ }$，$\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A})=\underline{\ 17\times17=289\ }$；$\underline{\left(\left\|\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\right\|_1\left\|\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\right\|_1\right)}$

4）应改写为 $\underline{\dfrac{(((x+16)x+0)x+8)x-1}{((((16x-17)x+18)x-14)x-13)x-1}}$

5）均差 $f[0,1,2]=\underline{\ 0\ }$，$\underline{l_0(x)=\frac{(x-2)(x-1)}{2}}$；

6）此数值求积公式的代数精度为：$\underline{\ \ 3\ \ }$；

7）求解 $u'=-u+t-e^{-1}$ 的隐式 Euler：$\underline{u_{n+1}=\frac{u_n+(t_{n+1}-e^{-1})h}{1+h}}$；

8）用二分法进行一步后根所在区间为: [1, 2]。

9）$\boldsymbol{LL}^T$ 分解为：$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$；

10）[0,1] 上以 $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}$ 权函数的正交多项式 $\phi_0(x)=\underline{\ 1\ }$，$\phi_1(x)=\underline{x-\frac{1}{4}}$。

11）；$\underline{x_{k+1}=x_k-\frac{1-x_k-e^{x_k}}{e^{x_k}+1},k=0,1,2,\cdots}$

12）正交矩阵 $\underline{\boldsymbol{H}=\frac{1}{3}\times\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$；

二、计算题

1．（15 分）解： 已知，$\alpha_2=1,\ \alpha_1=0,\ \alpha_0=-1,\ \beta_2=0,\ \beta_1=\frac{1}{2},\ \beta_0=\frac{3}{2}$。

$c_0=1-1=0,\ c_1=2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0,\ c_2=\frac{1}{2}\times 2-\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\neq 0$，故此为二步一阶方法。局部误差主项为：$-\frac{3}{2}h^2u''(t_n)+O(h^3)$。

又$\rho(\lambda)=\lambda^2-1$，满足根条件，故此差分格式收敛。

又考虑模型问题$u'=\mu u$则，有特征多项式：

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=\lambda^2-\left(\frac{\bar{h}}{2}\right)\lambda-\left(1+\frac{3\bar{h}}{2}\right)=0\text{，其中}\bar{h}=\mu h$$

由判别式可知$|\lambda|<1$的充要条件是：$\left|\frac{\bar{h}}{2}\right|<-\frac{3\bar{h}}{2}<2$，而$\left|\frac{\bar{h}}{2}\right|<-\frac{3\bar{h}}{2}$自然成立，则由$-\frac{3\bar{h}}{2}<2$得出 $\bar{h}\in\left(-\frac{4}{3},0\right)$。

由于$0>\bar{h}=\mu h=-40h>-\frac{4}{3}$，故$h$的取值范围是：$0<h<\frac{1}{30}$。 #

2．（15 分）解： $\mu_m=\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^m dx$， $m=0,1,2,\cdots$，则

$\mu_0=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$， $\mu_1=\int_{-1}^{1}x^3dx=0$， $\mu_2=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}$， $\mu_3=\int_{-1}^{1}x^5dx=0$。

$$\varphi_2(x)=\begin{vmatrix}\frac{2}{3} & 0 & 1\\ 0 & \frac{2}{5} & x\\ \frac{2}{5} & 0 & x^2\end{vmatrix}=\frac{4}{15}x^2-\frac{4}{25}\text{，令}\phi_2(x)=0\text{即得，}\phi_2(x)=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{5}\right)=0$$

得 Gauss 点：$x_{0,1}=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$。取$f(x)=1$， x，令$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=A_0f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+A_1f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

即得到方程组：$\frac{2}{3}=A_0+A_1$， $0=A_1-A_0$ ，解之，得$A_0=A_1=\frac{1}{3}$，从而得到

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx\approx\frac{1}{3}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$，又取$f(x)=x^4$

$$\int_{-1}^{1}x^4\cdot x^4dx=\frac{2}{9}\neq\frac{1}{3}\left[\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^4+\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^4\right]=\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{25}{147}$$

故所得到的数值求积公式是具有 m=3 次代数精度 Gauss 求积公式。

$$\int_{-1}^{1} x^4 \cdot e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3}\left(e^{-\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2} + e^{-\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}\right) = \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{5}} \ \#$$

3．（10 分）解：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，

$$\mathbf{det}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2) = 0$$

则 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0 \ (\sigma_1 = \sqrt{2},\ \sigma_2 = 0)$， 所以 $\boldsymbol{\Sigma} = (\sqrt{2})$。
下面求对应的标准正交的特征向量(正规直交)，即

$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$；　　$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ，$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$；

即 $V = (v_1\ v_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，因 rank($\boldsymbol{A}$)=1，故有 $\boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$。 计算得

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}_1,$$

得约化的奇异值分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}_1^H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(\sqrt{2})\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{u}_2$, 使其与 $\boldsymbol{U}_1$ 构成 $\mathbf{R}^2$ 的一组标准正交基，可取 $U_2 = \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

则 $U = (U_1\ \ U_2)$ 是酉阵, 故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解（满的奇异值分解）为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ \#$$

4．（10 分）解：（1）Gauss-Seidel 法迭代公式：$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - a x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{a}{2} x_1^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} = 1 - x_1^{(k+1)} \end{cases}$；

（2）Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为：$\boldsymbol{C}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ a\lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix}$，则令

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}(\lambda)\right) = \begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ a\lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^3 - a^2\lambda^2 = \lambda^2\left(2\lambda - a^2\right) = 0$$

得 Gauss-Seidel 迭代法收敛的充要条件为：$|a| < \sqrt{2}$；

5．（10 分）解：由于 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^3 - (\lambda-1)\right] - \left[(\lambda-1)^2 - 1\right] = (\lambda-1)^2\left[(\lambda-1)^2 - 1\right] - \left[(\lambda-1)^2 - 1\right] = \lambda^2\left(\lambda^2 - 2\right)^2。$$

即 $\lambda_1 = 0$（二重），$\lambda_2 = 2$（二重）。

$(0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$，即 $\mathbf{rank}(0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2$，故其代数重复度=几何重复度=2，即 $\lambda_1 = 0$

为半单的；且其对应的 Jordan 块为 2 块，和为 2 阶的。

$(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，即 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 3$，故其代数重复度=2，几何重复度=1，即 $\lambda_2 = 2$

为亏损的；且其对应的 Jordan 块为 1 块，和为 2 阶的。

综上所述，A 的 Jordan 标准型为：$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2\end{pmatrix}$或$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$ #

四、　　证明题（6 分）

若 $\rho(A)<1$，则存在范数$\|\cdot\|$，使得$\|A\|<1$.

证明：令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(1-\rho(A))$，并取非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$，使

$$\|A\|_T \le \rho(A)+\varepsilon=\rho(A)+\frac{1}{2}(1-\rho(A))=\rho(A)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho(A)=\frac{1}{2}(1+\rho(A))<\frac{1}{2}\times 2=1$$

#

2010 级《矩阵与数值分析》试题

参考答案、评分标准

一、填空题（共 50 分，每填对一空得 2 分）

（1）已知 $a=1.234$，$b=2.345$ 分别是 x 和 y 的具有 4 位有效数字的近似值，那么，

$\dfrac{|x-a|}{a} \le \underline{\dfrac{1}{2}\times 10^{-3}}$；$|(3x-y)-(3a-b)| \le \underline{2\times 10^{-3}}$.

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ 的 $\boldsymbol{QR}$ 分解 $\boldsymbol{A}=\underline{\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}$；将向量 $\boldsymbol{x}=(1,4,3)^{\mathrm{T}}$ 映射成 $\boldsymbol{y}=(1,5,0)^{\mathrm{T}}$ 的

Householder 变换矩阵 $\boldsymbol{H}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}}$， $\boldsymbol{cond}_2(\boldsymbol{H})=\underline{1}$.

（3）记区间 $[-1,1]$ 上以 $\rho(x)=1$ 为权函数的正交多项式序列为 $\phi_0(x),\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots$. 则

其中的 $\phi_2(x)=\underline{\dfrac{4}{9}(3x^2-1)}$；**（可以相差常数倍）** $\phi_3(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的二次最佳平方逼近

多项式 $p_2(x)=\underline{0}$.

（4）数值求解微分方程 $\begin{cases}u'=-2tu^2\\ u(0)=1\end{cases}$ 的 ***Euler*** 法格式为 $\underline{u_{n+1}=u_n-2ht_nu_n^2}$；

梯形法格式为 $\underline{u_{n+1}=u_n-h(t_nu_n^2+t_{n+1}u_{n+1}^2)}$ （步长 h）.

（5）已知 $f(x)$ 是一个次数不超过 4 的多项式，其部分函数值如下表所示：

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1	-1	1	19	65

则 $f[0,1,2]=\underline{2}$， $f(x)=\underline{2x^3-4x^2+1}$， $f[0,1,2,4]=\underline{2}$.

（6）满足下列条件：$H(0)=1, H'(0)=0, H(1)=0, H'(1)=1$ 的三次 ***Hermite*** 插值多项式

$H(x)=\underline{3x^3-4x^2+1}$ （写成最简形式）.

（7）***Simpson*** 数值求积公式的代数精度为 $\underline{3}$. 用该公式分别估算定积分 $I_1=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x$ 和

$I_2=\int_0^1(2x^4+\sqrt{2}x^3+\pi x^2)\mathrm{d}x$ ，所得近似值分别记为 S 和 $\tilde{\boldsymbol{S}}$ ，则 $S=\underline{\dfrac{5}{24}}$， $I_2-\tilde{\boldsymbol{S}}=\underline{-\dfrac{1}{60}}$.

（8）迭代格式 $x_{k+1}=\dfrac{2}{3}x_k+\dfrac{1}{x_k^2}$ 对于任意初值 $x_0>0$ 均收敛于 $\alpha=\underline{\sqrt[3]{3}}$，其收敛阶 $p=\underline{2}$.

（9）奇异值分解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{5}{13} & -\frac{12}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 $\|\boldsymbol{A}\|_2=\underline{2}$， $\|\boldsymbol{A}\|_F=\underline{\sqrt{5}}$.

（10）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ & 0.5\end{pmatrix}$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k=\underline{\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}}$,

$\boldsymbol{A}^{10}=\underline{\begin{pmatrix}2^{-10} & 10\times 2^{-9}\\ 0 & 2^{-10}\end{pmatrix}}$， $e^{A}=\underline{\begin{pmatrix}\sqrt{e} & \sqrt{e}\\ 0 & \sqrt{e}\end{pmatrix}}$,

$e^{At}=\underline{\begin{pmatrix}e^{\frac{t}{2}} & te^{\frac{t}{2}}\\ 0 & e^{\frac{t}{2}}\end{pmatrix}}$， $\dfrac{\mathrm{d}e^{At}}{\mathrm{d}t}=\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} & (1+\frac{t}{2})e^{\frac{t}{2}}\\ 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\end{pmatrix}}$.

二、（12 分）设线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

(1) 求系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解；

(2) 利用平方根法（又称 ***Cholesky*** 方法）解此方程组；

(3) 构造解此方程组的 ***G-S*** 迭代格式，并讨论其收敛性.

解 (1) $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{U}$，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{LU}.$$ **------------4 分**

(2) $\boldsymbol{A}$ 的 ***Cholesky*** 分解与 $\boldsymbol{LU}$ 分解相同.

由 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$， 解得 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；

再由 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， 解得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. **---------------------8 分**

(3) ***G-S*** 迭代格式 $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=1-x_2^{(k)}-x_3^{(k)}\\x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{2}(1-x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)})\\x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{3}(1-x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)})\end{cases}$， **--------------------10 分**

<u>**收敛性证明**</u> **方法一、** 因为 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，所以 ***G-S*** 法收敛. **--------------------12 分**

方法二、 由特征方程 $|C(\lambda)|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\\lambda&2\lambda&2\\\lambda&2\lambda&3\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\\lambda&2\lambda&2\\0&0&3\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&2\lambda-1&1\\0&0&3\lambda-2\end{vmatrix}=0$，

知 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=\dfrac{2}{3}<1$，所以 ***G-S*** 法收敛. **--------------------12 分**

三、（8 分）求拟合下列数据的最小二乘曲线 $y=a+bx$.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1.8	1.2	-0.2	-0.8	-2.2

解 法方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.2 \\ -10.4 \end{bmatrix}$$ ------------------------6 分

解得 $a=1.96, \quad b=-1$， ------------------------------------**8 分**

最小二乘解 $y=1.96-x$.

四、（8 分）设 $\|\cdot\|_1$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 1-向量范数，$\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵. 对于任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，定义 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}}=\|\boldsymbol{Px}\|_1$. 证明：$\|\cdot\|_{\boldsymbol{P}}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一种向量范数，并且 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}}\le\max\limits_{1\le j\le n}\|\boldsymbol{p}_j\|_1\cdot\|\boldsymbol{x}\|_1$，其中 $\boldsymbol{p}_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的列向量.

证 （1）**非负性** 对于任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}}=\|\boldsymbol{Px}\|_1\ge 0$； 并且

$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \|\boldsymbol{Px}\|_1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{Px}=\boldsymbol{0} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$； -------- ---------**2 分**

（2）**齐次性** $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}}=\|\boldsymbol{P}(\alpha\boldsymbol{x})\|_1=\|\alpha(\boldsymbol{Px})\|_1=|\alpha|\cdot\|\boldsymbol{Px}\|_1=|\alpha|\cdot\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}}$， $\forall\alpha\in\boldsymbol{R}$； ---------**4 分**

（3）**三角不等式** $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{P}}=\|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|_1=\|\boldsymbol{Px}+\boldsymbol{Py}\|_1\le\|\boldsymbol{Px}\|_1+\|\boldsymbol{Py}\|_1=\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}}+\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{P}}$； -----**6 分**

综上，$\|\cdot\|_{\boldsymbol{P}}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一种向量范数.

（4）**不等式的证明**

方法一、 由算子范数与向量范数的相容性，

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}}=\|\boldsymbol{Px}\|_1\le\|\boldsymbol{P}\|_1\cdot\|\boldsymbol{x}\|_1=\max_{1\le j\le n}\|\boldsymbol{p}_j\|_1\cdot\|\boldsymbol{x}\|_1 .$$ ---------------------------**8 分**

方法二、$\|x\|_P=\|Px\|_1=\|x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n\|_1$

$$\le\|x_1p_1\|_1+\|x_2p_2\|_1+\cdots+\|x_np_n\|_1$$

$$=|x_1|\cdot\|p_1\|_1+|x_2|\cdot\|p_2\|_1+\cdots+|x_n|\cdot\|p_n\|_1$$

$$\le(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)\cdot\max_{1\le j\le n}\|p_j\|_1=\max_{1\le j\le n}\|p_j\|_1\cdot\|x\|_1 .$$

--------------------8 分

五、（12 分）对于解常微分方程初值问题$\begin{cases}u'(t)=f(t,u)\\u(t_0)=u_0\end{cases}$的线性二步法

$$u_{n+2}-\frac{5}{4}u_{n+1}+\frac{1}{4}u_n=\frac{h}{16}\left(7f_{n+2}+8f_{n+1}-3f_n\right)$$

（1）求其局部截断误差（必须写出主项），并指出该方法是几阶方法；

（2）讨论收敛性；　　　　　（3）求绝对稳定区间.

解　（1）$c_0=c_1=c_2=c_3=0,$

$c_4=\frac{1}{4!}(-\frac{5}{4}+2^4)-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{16}(8+2^3\times7)=\frac{59}{96}-\frac{64}{96}=-\frac{5}{96}$；　--4 分

局部截断误差　$R_{n+2}(h)=-\frac{5}{96}u^{(4)}(t_n)h^4+O(h^5)$；　--5 分

该方法是三阶方法.　--6 分

（2）　由　$\lambda^2-\frac{5}{4}\lambda+\frac{1}{4}=0$，　解得　$\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{1}{4}$.　知该方法满足根条件，又因其阶 $p\ge1$，所以该二步法收敛.　----------------------------------8 分

（3）特征方程$\lambda^2-\frac{5}{4}\lambda+\frac{1}{4}=\frac{7\bar{h}}{16}\lambda^2+\frac{8\bar{h}}{16}\lambda-\frac{3\bar{h}}{16}$，　$(1-\frac{7\bar{h}}{16})\lambda^2-(\frac{5}{4}+\frac{8\bar{h}}{16})\lambda+(\frac{1}{4}+\frac{3\bar{h}}{16})=0$，

$(16-7\bar{h})\lambda^2-(20+8\bar{h})\lambda+(4+3\bar{h})=0$，　　$\lambda^2-\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\lambda+\frac{4+3\bar{h}}{16-7\bar{h}}=0$，

以下解不等式　$\left|\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\right|<1+\frac{4+3\bar{h}}{16-7\bar{h}}=\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}<2$.　　（*）　-----------------------10 分

首先由$\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}<2$，得　$20-4\bar{h}<32-14\bar{h}$,　其解　$\bar{h}<0$；

再由$\left|\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\right|<\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}$，得　$4\bar{h}-20<20+8\bar{h}<20-4\bar{h}$，其解　$-10<\bar{h}<0$；

所以，（*）不等式的解集为 $-10 < \overline{h} < 0$，即此线性二步法的绝对稳定区间为

$(-10,0)$.   ------------------------------------**12 分**

六、（10 分）已知 $\int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 为 ***Gauss*** 型求积公式，其中 $\rho(x)$ 为权函数；设

$l_0(x)$，

$l_1(x)$，$\cdots, l_n(x)$ 为以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为节点的 ***Lagrange*** 插值基函数．证明：

(1) $\int_a^b \rho(x) l_i(x) l_j(x) \mathrm{d}x = 0 \qquad (i \neq j)$；

(2) $\sum_{k=0}^{n} \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x) \mathrm{d}x$.

证 (1) 因为 ***Gauss*** 型求积公式的代数精度为 $2n+1$，而 $l_i(x) l_j(x)$ 为 $2n$ 次的代数多项式，

所以 $\int_a^b \rho(x) l_i(x) l_j(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k l_i(x_k) l_j(x_k)$.

又因为当 $i \neq j$ 时，$l_i(x_k) l_j(x_k) = 0$，所以 $\int_a^b \rho(x) l_i(x) l_j(x) \mathrm{d}x = 0$.   ------------------**5 分**

(2) 对 $0,1,\cdots,n$ 中任意固定的 i，$l_i^2(x)$ 为 $2n$ 次的代数多项式，所以

$$\int_a^b \rho(x) l_i^2(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k l_i^2(x_k) = A_i ,$$

从而 $\sum_{k=0}^{n} \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k = \sum_{k=0}^{n} (A_k \cdot 1) = \int_a^b \rho(x) \cdot 1 \, \mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x) \, \mathrm{d}x$. ------------------**10 分**

大连理工大学 2013 级工科硕士研究生
《矩阵与数值分析》试题答案

一、 选择、判断（若正确填√，若错误填×）和填空

1)解非线性方程 $f(x)=0$ 的弦截法迭代法为 **B**

(A) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$；**(B)** $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$；**(C)** $x_{k+1}=x_k-f(x_k)$；

2）为使二点数值求积公式 $\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$ 具有最高的代数精度，其求积节点和求积系数应为 **B** .

(A) $x_0=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；$A_0=A_1=\dfrac{1}{2}$；　**(B)** $x_0=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$A_0=A_1=\dfrac{\pi}{2}$；

(C) $x_0=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$，$x_1=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$；$A_0=A_1=1$

3) 设 $S(x)=\begin{cases}x^3+x & 0\le x<1\\ x^3+2x^2-5x & 1\le x\le 2\end{cases}$ 则 ***S*(*x*)**为 **C** .

(A) 三次样条函数；**(B)**分段三次 **Hermite** 函数； **(C)** 分段三次多项式

4）已知 $\varphi_6(x)$ 为**[0,1]**上权函数 $\rho(x)=x^2$ 的正交多项式，则有：

$$\int_0^1\varphi_6(x)\cdot(x^6+3x^4+5x)\mathrm{d}x=0$$ （ √ ）

5）设矩阵 $A=(a_{i,j})\in R^{n\times n}$，则有 $\|A^T\|_1=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$。 （ √ ）

6） 若 ***A*** 为非奇异矩阵，则 sin ***A*** 必可逆。 （ × ）

7） $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a)$ 与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx f(a)(b-a)$ 的代数精度相同 （ × ）

9） 设 ***A*** 为反对称矩阵，则存在 ***n*** 阶酉阵 ***U*** 及对角阵 $\mathbf{D}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，使得 ***A=UDU^H*** （ × ）

10）设 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_6(x)$ 是以 **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6** 为插值节点的 **Lagrange** 基函数，则

$\sum\limits_{k=0}^{6}(k^3+k^2)l_k(x)=$ $\underline{x^3+x^2}$， $\sum\limits_{k=0}^{6}k^4l_k(-2)=$ $\underline{(-2)^4=16}$

11) 如下离散数据

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-3	0	1	0	-3

用最小二乘法拟合形如 **s(*x*)=*ax*²+*b*** 曲线所形成的法方程组为：***a***=$\underline{\frac{6}{5}}$，***b***=$\underline{\frac{7}{5}}$。

$$\underline{\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

12）矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的 **QR** 分解中 ***Q***=$\underline{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}}$；$\boldsymbol{LL}^T$ 分解中 ***L***=$\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}}$。

13）设求积公式 $\int_0^1 \frac{1}{x+1} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$ 为 **Gauss** 求积公式，则

$$A_0(x_0^3+1)+A_1(x_1^3+1)+A_2(x_2^3+1)=\underline{\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 (x^2-2x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}}$$

14）已知近似值 ***a*₁=3.11, *a*₂=−3.00, *a*₃=3.10**，由四舍五入得到的，则

$$|(x_1+x_3\cdot x_2)-(a_1+a_3\cdot a_2)|\le \underline{|1+3.00+3.10|\times\frac{1}{2}\times 10^{-2}=0.355\times 10}\text{。}$$

15）用形如 $x_{k+1}=x_k-\lambda(x_k)f(x_k)$ 的迭代法，求 $f(x)=1+x-e^x=0$ 的根 ***x*=0**，若要使其至少局部平方收敛，则 $\lambda(x_k)=\underline{\frac{2}{1-e^{x_k}}}$。

16）设 $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，则 $\|A\|_2=$ **<u>6</u>**。

17）. 为了减少运算次数，应将表达式. $\frac{4x^3-3x^2-2x-1}{x^4+x^2+x-1}$ 改写为

$$\underline{\frac{((4x-3)x-2)x-1}{(((x+0)x+1)x+1)x-1}};$$

18）.设方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$，则 **Jacobi** 迭代公式为：$\underline{\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 + \dfrac{x_2^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(1 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = 1 + \dfrac{x_2^{(k)}}{2} \end{cases}}$，

Jacobi 法的迭代矩阵 $\boldsymbol{B_J}$=$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$，

Gauss-Seidel 公式为：$\underline{\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 + \dfrac{x_2^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(1 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = 1 + \dfrac{x_2^{(k+1)}}{2} \end{cases}}$, **Jacobi** 法 收敛 。

19）求方程 $f(x) = e^x - e^{-x} = 0$ 的根 $x^* = 0$ 的 **Newton** 迭代法为：$\underline{x_{k+1} = x_k - \dfrac{e^{x_k} - e^{-x_k}}{e^{x_k} + e^{-x_k}}}$，

其收敛阶 ***p*= 3** 。

20）已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}^k = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$。 注意到：$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

二、取定求积节点

x_i	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5
$f(x_i)$	-3	0	2	1	3

请用复化梯形公式和复化 **Simpson** 公式计算 $\int_{-0.5}^{0.5} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ 的近似值.

解：$\int_{-0.5}^{0.5} f\left(x\right)\mathrm{d}x \approx T_4 = \frac{1}{8}\left[-3+2\times\left(2+1\right)+3\right] = \frac{3}{4}$

$\int_{-0.5}^{0.5} f\left(x\right)\mathrm{d}x \approx S_2 = \frac{1}{12}\left[-3+2\times 2+4\times\left(0+1\right)+3\right] = \frac{2}{3}$.

三、某线性多步法的第二特征多项式为 $\sigma\left(\lambda\right)=\frac{2}{3}\lambda^2$，且已知其第一特征多项式 $\rho\left(\lambda\right)$ 是最高次项系数为 **1** 的二次多项式。①试求出 $\rho\left(\lambda\right)$；②写出此多步法的具体的差分格式及局部截断误差主项；③讨论此格式的收敛性及绝对稳定区间。

解：①已知 $\beta_0=\beta_1=0$， $\beta_2=\frac{2}{3}$, $\alpha_2=1$。求 α_0 , α_1。它们应满足如下方程组：

$\alpha_0+\alpha_1+1=0$, $\alpha_1+2-\frac{2}{3}=0$, 即 $\alpha_0+\alpha_1=-1$, $\alpha_1=-\frac{4}{3}$, 解之， $\alpha_0=\frac{1}{3}$, $\alpha_1=-\frac{4}{3}$。

从而 $\underline{\rho\left(\lambda\right)=\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda+\frac{1}{3}}$。②具体的差分格式为：$\underline{u_{n+2}-\frac{4}{3}u_{n+1}+\frac{1}{3}u_n=\frac{2h}{3}f_{n+2}}$。

又 $c_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}+4\right)-\frac{4}{3}=0$, $c_3=\frac{1}{6}\left(-\frac{4}{3}+8\right)-\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}=-\frac{2}{9}$, 此为隐式二步二阶法，其局部截断误差主项为：$\underline{-\frac{2}{9}h^3u^{(3)}\left(t_n\right)}$。③令 $\rho\left(\lambda\right)=\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda+\frac{1}{3}=\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda-1\right)=0$，

得，$\lambda_1=1$， $\lambda_2=\frac{1}{3}$。故满足根条件。$\rho'\left(1\right)=\frac{1}{3}=\sigma\left(1\right)$ 至少为一阶，有定理 **7.1**

值此<u>二步二阶方法收敛</u>。

对于模型问题：$u'=\mu u$ ，有 $\rho\left(\lambda\right)-\bar{h}\sigma\left(\lambda\right)=\left(1-\frac{2}{3}\bar{h}\right)\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda+\frac{1}{3}=0$，

其中 $\bar{h}=\mu h$， $\mu<0$。进一步得

$\lambda^2-\frac{4}{3}\left(\frac{3}{3-2\bar{h}}\right)\lambda+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{3-2\bar{h}}\right)=0$， $\underline{\lambda^2-\frac{4}{3-2\bar{h}}\lambda-\frac{(-1)}{3-2\bar{h}}=0}$

$\left|\lambda\right|<1$ 的充要条件为 $\left|\frac{4\bar{h}}{3-2\bar{h}}\right|<1+\frac{1}{3-2\bar{h}}<2$，可推出 $\bar{h}<0$，<u>绝对稳定区间 $(-\infty,\mathbf{0})$</u>。

四、设 $x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，①求矩阵序列 $\boldsymbol{A}_k=\left(\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T}{2}\right)^k$ 的极限矩阵 $\boldsymbol{A}$；②对①中所求得的极限矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行奇异值分解。③计算 $\|\boldsymbol{A}\|_2$，$\|\boldsymbol{A}\|_F$。

解：① $\boldsymbol{A}_k=\left(\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T}{2}\right)^k=\frac{\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\right)\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\right)\cdots\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{x}^T}{2^k}=\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T}{2}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T}{2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$。

②由 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，令 $\det\left(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)=0$，

则 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0\ (\sigma_1=1,\ \sigma_2=0)$， 所以 $\boldsymbol{\Sigma}=(1)$。

下面求对应的标准正交的特征向量(正规直交)，即

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow p_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ，$v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 或 $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$;

即 $V=(v_1\ v_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 或 $V=(v_1\ v_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，因 rank(A)=1，故有

$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。 $\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}(1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{U}=\left(\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2\right)$，则

$\boldsymbol{U}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的满奇异值分解为：$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

或 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。③ $\|\boldsymbol{A}\|_2=1,\|\boldsymbol{A}\|_F=1$。

五、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, ，求 e^{At} 。

解法 1：首先求出 $\mathrm{de}\left(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -4 & \lambda-1\end{vmatrix}=\left(\lambda-1\right)^2-4=\left(\lambda+1\right)\left(\lambda-3\right)$，

设 $q\left(\lambda\right)=b_1\lambda+b_0$， $f\left(\lambda\right)=e^{\lambda t}$.因此，

$q\left(-1\right)=-b_1+b_0=f\left(-1\right)=e^{-t}$， $q\left(3\right)=3b_1+b_0=f\left(3\right)=e^{3t}$

即 $\begin{cases}-b_1+b_0=e^{-t}\\ 3b_1+b_0=e^{3t}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b_1=\dfrac{1}{4}\left(e^{3t}-e^{-t}\right)\\ b_0=\dfrac{1}{4}\left(3e^{-t}+e^{3t}\right)\end{cases}$

于是，$e^{\boldsymbol{A}t}=b_1\boldsymbol{A}+b_0\boldsymbol{I}$，即

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\frac{1}{4}\left(e^{3t}-e^{-t}\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\left(3e^{-t}+e^{3t}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\left(e^{3t}-e^{-t}\right)+\left(3e^{-t}+e^{3t}\right) & \left(e^{3t}-e^{-t}\right)\\ 4\left(e^{3t}-e^{-t}\right) & \left(e^{3t}-e^{-t}\right)+\left(3e^{-t}+e^{3t}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\left(e^{3t}+e^{-t}\right) & e^{3t}-e^{-t}\\ 4\left(e^{3t}-e^{-t}\right) & 2\left(e^{3t}+e^{-t}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{3t}+e^{-t}\right) & \frac{1}{4}\left(e^{3t}-e^{-t}\right)\\ \left(e^{3t}-e^{-t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{3t}+e^{-t}\right)\end{pmatrix}。$$

解法 2：首先求出 $\mathrm{de}\left(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -4 & \lambda-1\end{vmatrix}=\left(\lambda-1\right)^2-4=\left(\lambda+1\right)\left(\lambda-3\right)$，

则矩阵的 Jordan 标准型为：$\boldsymbol{J}\left(t\lambda\right)=\begin{pmatrix}e^{-t} & \\ & e^{3t}\end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{J}\left(t\lambda\right)=\begin{pmatrix}e^{3t} & \\ & e^{-t}\end{pmatrix}$。因此，

下面求 A 的 Jordan 分解的变换矩阵 T：即由

$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow T_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$, $\quad\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow T_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, 易得 $\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$,

于是，$$e^{At}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t} & \\ & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{3t}+e^{-t}\right) & \frac{1}{4}\left(e^{-t}-e^{3t}\right)\\ \left(e^{-t}-e^{3t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{3t}+e^{-t}\right)\end{pmatrix}$$

或

$$e^{At}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{3t} & \\ & e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{3t}+e^{-t}\right) & \frac{1}{4}\left(e^{3t}-e^{-t}\right)\\ \left(e^{3t}-e^{-t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{3t}+e^{-t}\right)\end{pmatrix}$$

六、设$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ -6 & 49 & -10 \\ -4 & 34 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 33 \\ 25 \end{pmatrix}$.请用 Doolittle 法求解方程此组，再利用 Doolittle 分解求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

解：①求得 $\boldsymbol{A}$ 的 Doolittle 分解中的 $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

解二个三角方程组：$\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 33 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

得上述线性方程组的解：$\boldsymbol{x} = (1\ 1\ 1)^T$。

② $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$，设 $\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{X}_1\ \ \boldsymbol{X}_2\ \ \boldsymbol{X}_3)$，则有

$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{LU}(\boldsymbol{X}_1\ \ \boldsymbol{X}_2\ \ \boldsymbol{X}_3) = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_3)$，通过解一系列如下三角方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 95 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} -28 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

得 $$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{X}_1\ \ \boldsymbol{X}_2\ \ \boldsymbol{X}_3) = \begin{pmatrix} 95 & -28 & 18 \\ 10 & -3 & 2 \\ -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}。$$

姓名：__________

学号：__________

院系：__________

_____ 级_____ 班

授课教师：_______

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称： 矩阵与数值分析　　试卷： 统一　　考试形式：闭卷

授课院（系）： 数学学院　　考试日期：2014 年 12 月 22 日　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七				总分
标准分	44	8	20	8	8	8	4				100
得　分											

得分	

一、（44 分）选择和填空（每空 2 分）

1）设 x 为精确值，a 是其近似值，且 $\frac{|x-a|}{|a|}\le\frac{1}{2}\times10^{-4}$，则 $\left|\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a}}\right|\le$ ________。

2) 下列函数为三次样条函数的是________。

(A) $\begin{cases}x^3+x^2 & -1\le x<0\\ x^3 & 0\le x\le1\end{cases}$；**(B)** $\begin{cases}x^3+x^2 & -1\le x<0\\ 2x^3+x^2 & 0\le x\le1\end{cases}$；**(C)** $\begin{cases}x^3+x^2 & -1\le x<0\\ 2x^3-x^2 & 0\le x\le1\end{cases}$

3) 已知方程 $f(x)=x^3-5x-3=0$ 在区间**[-2,3]**上有三个实根，其各个单根区间为：

________________________求解此方程的 **Newton** 的迭代法为：________________________，

其收敛阶为：______；

4)已知 $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，则其谱半径 $\rho(A)=$________； $\mathrm{cond}_\infty(A)=$________________

5）$\{\phi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 为**[-1,1]**上权函数 $\rho(x)=|x|$ 的正交多项式族，

则 $\phi_2(x)=$________________， $\int_{-1}^{1}|x|\cdot\phi_1(x)\cdot(2x^2-1)\mathrm{d}x=$________

6） 已知 $f(x)=\frac{1}{5-x}$，且 x_i**=0,1,2** 则：

一阶均差 $f[0,1]=$________________、二阶均差 $f[0,1,2]=$________________

$f(x)$以 **0, 1, 2** 为节点的二阶 **Newton** 插值多项式:

$p_2(x)=$____

7）已知 $\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T=$__________，$\left(\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}}\right)^k=$__________，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}^k=$__________，

8) 已知多项式求值的秦九韶表达式为 $(((5x+4)x+3)x+2)x+1$，则原多项式的表达式为：

____________________；

9） 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则存在 $\boldsymbol{n}$ 阶酉阵 $\boldsymbol{U}$ 及____________________，使得 $\boldsymbol{A=URU^H}$ 。

10） 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}$ 的 $\boldsymbol{LL^T}$ 分解中 $\boldsymbol{L}$=_______________；$\boldsymbol{QR}$ 分解中 $\boldsymbol{Q}$=_______________；

11）计算 $\int_0^1 x\cdot f(x)\mathrm{d}x$（其中 $\rho(x)=x$ 为权函数）的具有两个等距求积节点的数值求积公式为

_________________________；

12) 设初值问题 $u'=\cos\sqrt{u(t)},u(0)=1$，则梯形公式为：_________________________；

其绝对稳定区间为_______________。

得分	

二、（8 分）根据如下离散数据，请用最小二乘法拟合出形如 $y=\dfrac{x}{ax+b}$ 的曲线。

x_i	1	1/2	1/3	1/4	1/5
y_i	1/2	1/4	5/32	1/8	5/43

得分	

三、（20 分）

①用 **Doolittle** 方法求解如下线性方程组 $\begin{cases} x_1 \qquad + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \\ \qquad 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$；

②利用①**中**所得到的 $\boldsymbol{A= LU}$ 分解求出 $\boldsymbol{A}^{\mathbf{-1}}$；

③讨论用 **Gauss-Seidel** 法求解上述线性方程组的收敛性，并对给定的初始向量 $\boldsymbol{x} = (0\,,0\,,0)^T$，迭代法求出 $\boldsymbol{x}^{(3)}$；

得 分	

四、（8）设求解初值问题$u' = f(t, u), u(a) = u_0$**的线性二步法**$u_{n+2} = u_n + 2hf(t_{n+1}, u_{n+1})$，

①讨论此格式的收敛性，给出局部截断误差主项；

②讨论此格式的绝对稳定性。

得 分	

五、（8 分）求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 的满奇异值分解、计算 $\|\boldsymbol{A}\|_2$，$\|\boldsymbol{A}\|_F$ 。

得 分	

六、（8 分） 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的 **Jordan** 标准型及计算 $e^{t\boldsymbol{A}}$。

得 分	

七、（4 分） 证明求解线性方程组的迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{f}$，当 $\rho(\boldsymbol{B})=0$ 时，迭代法最多在有限步 $\boldsymbol{k=n}$（$\boldsymbol{n}$ 为方程组的阶数）时得到方程组的精确解。