# 三次样条插值

董波
数学科学学院
大连理工大学

# 样条函数应用

样条函数是一个重要的逼近工具，在插值、数值微分、曲线拟合等方面有着广泛的应用

# 各种插值比较

多项式Lagrange插值:

整体性强, 光滑性好 (无穷阶连续), 但不一定收敛

分段多项式(Lagrange)插值:

局部性好, 光滑性差 ($C^0$连续), 收敛性保证

分段多项式(Hermite)插值:

局部性好, 满足一定光滑性, 收敛性保证,

但需要导数值信息

样条插值 样条函数: 满足一定光滑性的分段多项式

局部性好, 满足一定光滑性, 收敛性保证, 只需函数值信息

# 样条函数

对区间$\left(-\infty,+\infty\right)$的一个分割：

$$\Delta: -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < +\infty,$$

若分段函数 $s(x)$ 满足条件：

（1）在每个区间 $(-\infty, x_1], [x_j, x_{j+1}](j=1,\ldots,n-1)$ 和

$[x_n,+\infty)$ 上，$s(x)$ 是一个次数不超过 $m$ 的实系数代数多项式；

（2） $s(x)$ 在区间 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上具有直至 $m-1$ 阶的连续微商，

则称 $y=s(x)$ 为对应于分割 $\Delta$ 的 $m$ 次样条函数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样条节点

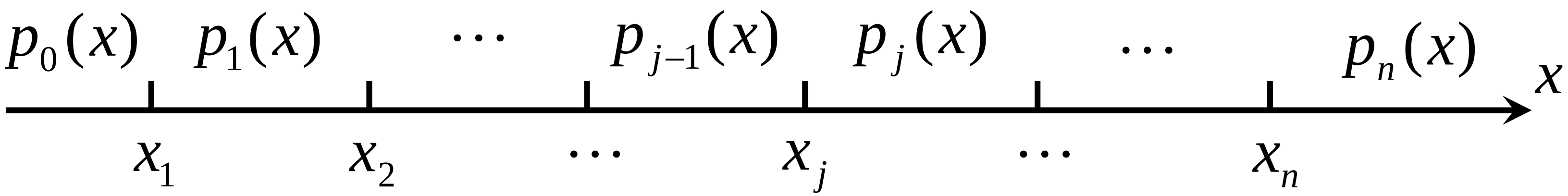
以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为节点的 $m$ 次样条函数的全体记为：

$$s_m\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$$

问题: 如何判断一个分段的多项式函数是样条函数?

$$s(x)=\begin{cases} p_0(x), & x \le x_1 \\ p_1(x), & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \\ p_j(x), & x_j \le x \le x_{j+1} \\ \vdots & \\ p_n(x), & x_n \le x \end{cases} \qquad p_j(x) \in \boldsymbol{P}_m (j=0,1,\ldots,n)$$

# 样条函数判定




$$p_{j-1}^{(i)}(x_j)=p_j^{(i)}(x_j),\quad i=0,1,\ldots,m-1$$

令 $q_j(x)=p_j(x)-p_{j-1}(x)\in \boldsymbol{P}_m$

$x_j$是$q_j(x)$的$m$重根

$$\Rightarrow q_j^{(i)}(x_j)=p_{j-1}^{(i)}(x_j)-p_j^{(i)}(x_j)=0,\quad i=0,1,\ldots,m-1$$

$$\Rightarrow q_j(x)=c_j(x-x_j)^m$$

光滑因子

$$\Rightarrow p_j(x)=p_{j-1}(x)+c_j(x-x_j)^m \qquad j=1,2,\ldots,n$$

# 样条函数判定定理

$$s(x)=\begin{cases} p_0(x), & x\le x_1 \\ p_1(x), & x_1\le x\le x_2 \\ \vdots & \\ p_j(x), & x_j\le x\le x_{j+1} \\ \vdots & \\ p_n(x), & x_n\le x \end{cases} \quad p_j(x)\in \boldsymbol{P}_m(j=0,1,\dots,n)$$

于是$s(x)$是m次样条的充要条件是

$$p_0(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m,$$

$$p_1(x)=p_0(x)+c_1(x-x_1)^m,$$

$$p_2(x)=p_1(x)+c_2(x-x_2)^m=p_0(x)+c_1(x-x_1)^m+c_2(x-x_2)^m,$$

$$\cdots$$

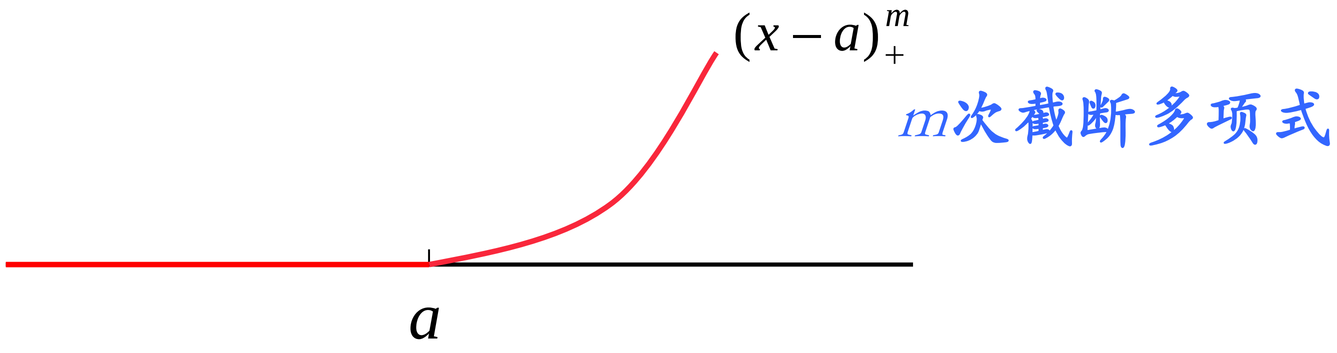
$$p_n(x)=p_{n-1}(x)+c_n(x-x_n)^m=p_0(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j(x-x_j)^m$$

# 截断多项式

为了便于表示分段信息，引进截断多项式：

$$(x-a)_+^m = \begin{cases} (x-a)^m, & x \ge a, \\ 0, & x < a, \end{cases}$$

易见 $(x-a)_+^m$ 是$C^{m-1}(-\infty,+\infty)$（表示$(-\infty,+\infty)$上$m$-1次连续可微函数的集合）类的分段$m$次多项式。



**定理**

任意$s(x)\in S_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)$均可唯一地表示为

$$s(x)=p_m(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j(x-x_j)_+^m,\quad -\infty<x<+\infty$$

其中$p_m(x)\in P_m$，$c_j\ (j=1,2,\cdots,n)$为实数。

**定理**

为使$s(x)\in S_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，必须且只须存在$p_m(x)\in P_m$和$n$个实数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得

$$s(x)=p_m(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j(x-x_j)_+^m,\quad -\infty<x<+\infty$$

$$S_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\operatorname{span}\{1,x,\ldots,x^m,(x-x_1)_+^m,(x-x_2)_+^m,\ldots,(x-x_n)_+^m\}$$

$$\dim S_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=m+n+1$$

# 例题

例 验证分片多项式是三次样条函数.

$$S(x)=\begin{cases}1-2x & x<-3\\ 28+25x+9x^2+x^3 & -3\le x<-1\\ 26+19x+3x^2-x^3 & -1\le x<0\\ 26+19x+3x^2 & 0\le x\end{cases}$$

解 利用光滑因子验证.

$$(28+25x+9x^2+x^3)-(1-2x)=(x+3)^3,$$

$$(26+19x+3x^2-x^3)-(28+25x+9x^2+x^3)=-2(x+1)^3,$$

$$(26+19x+3x^2)-(26+19x+3x^2-x^3)=x^3,$$

该函数为三次样条函数.

# 三次样条插值及其收敛性

有些实际问题中提出的插值问题，要求插值曲线具有较高的光滑性和几何光顺性．样条插值适用于这类问题．例如，在船体放样时，模线员用压铁压在样条（弹性均匀的窄木条）的一批点上，强迫样条通过这组离散的型值点．当样条取得合适的形状后，再沿着样条画出所需的曲线．在小挠度的情形下，该曲线可以由三次样条函数表示．由于样条函数插值不仅具有较好的收敛性和稳定性，而且其光滑性也较高，因此，样条函数成为了重要的插值工具．其中应用较多的是三次样条插值．

# 样条函数构造

设给定节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 及节点上的函数值

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\cdots,n.$$

三次样条问题就是构造 $s(x) \in S_3(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 满足

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\cdots,n.$$

利用两点三次Hermite插值公式, 设

$$s'(x_k) = m_k \,(k = 0,1,\cdots,n), h_k = x_{k+1} - x_k \,(k = 0,1,\cdots,n-1)$$

当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时,

$$s(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_k}{-h_k}\right)\left(\frac{x - x_{k+1}}{-h_k}\right)^2 y_k + \left(1 - 2\frac{x - x_{k+1}}{h_k}\right)\left(\frac{x - x_k}{h_k}\right)^2 y_{k+1}$$

$$+ (x - x_k)\left(\frac{x - x_{k+1}}{-h_k}\right)^2 m_k + (x - x_{k+1})\left(\frac{x - x_k}{h_k}\right)^2 m_{k+1},$$

# 样条函数构造

求$s(x)$的关键在于确定$n+1$个常数$m_0, m_1, \cdots, m_n$. 对$s(x)$求二阶导数

$$s''(x) = \frac{6x - 2x_k - 4x_{k+1}}{h_k^2} m_k + \frac{6x - 4x_k - 2x_{k+1}}{h_k^2} m_{k+1} + \frac{6(x_k + x_{k+1} - 2x)}{h_k^3}(y_{k+1} - y_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$\lim_{x \to x_k^+} s''(x) = -\frac{4}{h_k} m_k - \frac{2}{h_k} m_{k+1} + \frac{6}{h_k^2}(y_{k+1} - y_k).$$

$$\lim_{x \to x_k^-} s''(x) = \frac{2}{h_{k-1}} m_{k-1} + \frac{4}{h_{k-1}} m_k - \frac{6}{h_{k-1}^2}(y_k - y_{k-1}).$$

# 样条函数构造

由三次样条函数的二次连续条件

$$\lim_{x\to x_k^+} s''(x) = \lim_{x\to x_k^-} s''(x) \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\frac{1}{h_{k-1}} m_{k-1} + 2\left(\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k}\right) m_k + \frac{1}{h_k} m_{k+1} = 3\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k^2} + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}^2}\right).$$

等式两端除以 $\dfrac{h_k + h_{k-1}}{h_{k-1}h_k}$ ，化简得到基本方程组

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k, \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\lambda_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k-1}}, \quad \mu_k = \frac{h_{k-1}}{h_k + h_{k-1}} = 1 - \lambda_k,$$

$$g_k = 3\left(\mu_k \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} + \lambda_k \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}\right), \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

n-1个方程
n+1个未知量

# 第一类边界条件

**第一类边界条件**

$$\begin{cases} s'(x_0) = f_0', \\ s'(x_n) = f_n', \end{cases} \Leftrightarrow m_0 = f_0', m_n = f_n'$$

$$\begin{cases} 2m_1 + \mu_1 m_2 = g_1 - \lambda_1 f_0', \\ \lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k, \qquad (k = 2,3,\cdots,n-2) \\ \lambda_{n-1} m_{n-2} + 2m_{n-1} = g_{n-1} - \mu_{n-1} f_n', \end{cases}$$

三对角
严格对角占优

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \mu_{n-2} \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 f_0' \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} f_n' \end{bmatrix}$$

# 第二类边界条件

**第二类边界条件**

$$\begin{cases} s''(x_0) = f_0'', \\ s''(x_n) = f_n'', \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \dfrac{3(y_1 - y_0)}{h_0} - \dfrac{h_0}{2} f_0'', \\ m_{n-1} + 2m_n = \dfrac{3(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}} + \dfrac{h_{n-1}}{2} f_n''. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_0 = 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \dfrac{h_0}{2} f_0'', \\ g_n = 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} + \dfrac{h_{n-1}}{2} f_n''. \end{cases}$$

三对角
严格对角占优

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

# 第三类边界条件

**第三类边界条件(周期性条件)**

$$\lim_{x \to x_0^+} s^{(p)}(x) = \lim_{x \to x_n^-} s^{(p)}(x), \quad (p = 0,1,2)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} s''(x) = -\frac{4}{h_0} m_0 - \frac{2}{h_0} m_1 + \frac{6}{h_0^2}(y_1 - y_0),$$

$$\lim_{x \to x_n^-} s''(x) = \frac{2}{h_{n-1}} m_{n-1} + \frac{4}{h_{n-1}} m_n - \frac{6}{h_{n-1}^2}(y_n - y_{n-1}),$$

由边界条件，$m_0 = m_n$，所以

$$\frac{1}{h_0} m_1 + \frac{1}{h_{n-1}} m_{n-1} + 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) m_n = 3\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0^2} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}^2}\right),$$

# 第三类边界条件

简写为 $\mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = g_n,$

$$\begin{cases} \mu_n = \dfrac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \lambda_n = \dfrac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \\ g_n = 3\left(\mu_n \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} + \lambda_n \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right). \end{cases}$$

严格对角占优

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & & & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

# 例题

例 给定插值条件

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

以及第一类边界条件 $m_0=1, m_3=0$ 求三次样条插值函数.

解: $\lambda_k=\dfrac{h_k}{h_{k-1}+h_k}=\dfrac{1}{2}, \quad \mu_k=\dfrac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}=\dfrac{1}{2}, \; g_k=0, \quad k=1,2.$

$$\lambda_k m_{k-1}+2m_k+\mu_k m_{k+1}=g_k \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}m_0+2m_1+\dfrac{1}{2}m_2=0 \\ \dfrac{1}{2}m_1+2m_2+\dfrac{1}{2}m_3=0 \end{cases}$$

再由边界条件 $m_0=1, m_3=0 \Rightarrow m_1=-\dfrac{4}{15}, m_2=\dfrac{1}{15}.$

$$s(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{15}x(1-x)(15-11x), & x\in[0,1] \\ \dfrac{1}{15}(x-1)(x-2)(7-3x), & x\in[1,2] \\ \dfrac{1}{15}(x-3)^2(x-2), & x\in[2,3]. \end{cases}$$

# 三次样条函数应用

例 已知正弦函数表

| $x_i$ | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.1 | 1.3 | 1.5 | 1.7 | 1.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 0.4794 | 0.6442 | 0.7833 | 0.8912 | 0.9636 | 0.9975 | 0.9917 | 0.9463 |

以及边界条件 $s''(0.5)=-0.4794,\ s''(1.9)=-0.9463$

用三次样条插值函数$s(x)$计算诸节点中点处的函数值，并将计算结果与sin$x$在相应点处的函数值相比较.

解 利用在第二类边界条件中介绍的方法，计算结果列表如下:

| $x$ | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s(x)$ | 0.56462 | 0.71733 | 0.84144 | 0.93206 | 0.98547 | 0.99959 | 0.97386 |
| sin$x$ | 0.56464 | 0.71736 | 0.84147 | 0.93204 | 0.98545 | 0.99957 | 0.97385 |

# 三次样条插值函数的收敛性

**定理**

设$f(x)\in C^2[a,b]$，$s(x)$是以$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$为节点，满足三种边界条件中的任何一种的三次样条插值函数，记 $h=\max\limits_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)$，则当 $h\to 0$ 时，$s(x)$和$s'(x)$在$[a,b]$上分别一致收敛于$f(x)$和$f'(x)$ .