Gauss型求积公式

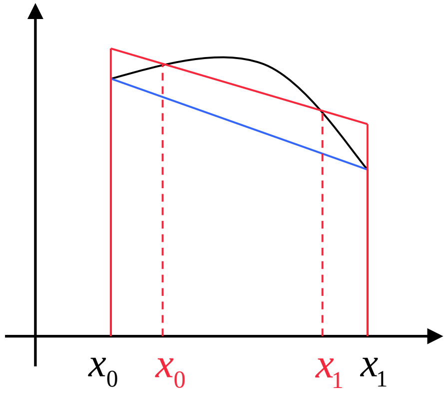
董波
数学科学学院
大连理工大学

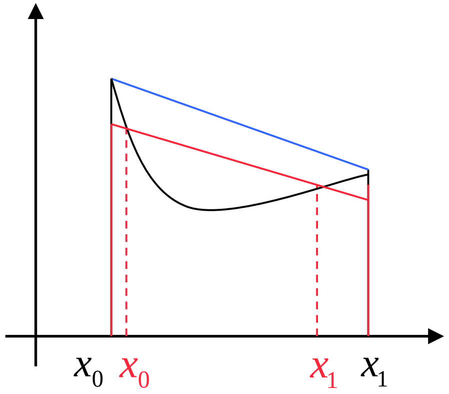
基本思想

形如

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

插值型求积公式的代数精度至少为 n。





两点的求积公式为：$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

若限制等距节点，则

1、x_0, x_1 固定，A_0, A_1 变量

2、确定 A_0, A_1 需两个方程

3、从代数精度出发，需对

$f(x) = 1, x$ ，

精确成立。

Newton-Cotes公式

若不限制等距节点，则

1、 x_0, x_1, A_0, A_1 均为变量

2、确定 x_0, x_1, A_0, A_1 需四个方程

3、从代数精度出发，需对

$f(x) = 1, x, x^2, x^3$ ，

精确成立。

具有更高代数精度的求积公式

具有更高代数精度公式的构造

由代数精度定义，利用代数精度最高原则，通过求解 $2n+2$ 阶非线性方程组来确定所有 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 和 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 共 $2n+2$ 个待定系数，就可以构造出具有 $2n+1$ 次代数精度的数值积分公式。

具体做法

对于数值求积公式:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

由代数精度定义可得如下非线性方程组:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 \cdot x_0 + A_1 \cdot x_1 = 0 \\ A_0 \cdot x_0^2 + A_1 \cdot x_1^2 = \dfrac{2}{3} \\ A_0 \cdot x_0^3 + A_1 \cdot x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = A_1 = 1 \\ x_0 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

即

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Gauss型求积公式

n+1个节点的求积公式，代数精度必小于2n+2

取2n+2次多项式 $p_{2n+2}(x)=(x-x_0)^2\cdots(x-x_n)^2$

$$I(p_{2n+2})=\int_a^b \rho(x)p_{2n+2}(x)dx>0 \neq I_n(p_{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}A_k p_{2n+2}(x_k)=0$$

定义

如果求积公式具有代数精度 $2n+1$，则称其为Gauss型求积公式，并称其中的求积节点 x_k $(k=0,1,\cdots,n)$ 为Gauss点.

利用求解非线性方程组构造求积公式:

1、简单易理解

2、节点个数较多时，对应大规模非线性方程组，难求解

3、没有统一的求解公式

实用的求积公式:

1、寻找求积节点

2、计算求积系数

实用构造方法：求积节点

要使插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E_n(f)$$

具有 $2n+1$ 次代数精度，必须且只须以节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为零点的 $n+1$ 次多项式

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

与所有次数不超过 n 的多项式在 $[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 正交。

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是Gauss点 $\Leftrightarrow$ $\omega_{n+1}(x)$ 是正交多项式。

$\Leftrightarrow$ $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是正交多项式的根。

证明：

必要性 假设求积公式具有2n+1次代数精度，则 $\forall q(x) \in \boldsymbol{P}_n$

$$\Rightarrow \omega_{n+1}(x)q(x) \in \boldsymbol{P}_{2n+1}$$

$$(\omega_{n+1}, q) = \int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)q(x)dx = I(\omega_{n+1}q) = I_n(\omega_{n+1}q) = \sum_{k=0}^{n} A_k \boxed{\omega_{n+1}(x_k)} q(x_k) = 0$$

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

即 $\omega_{n+1}(x)$ 与任意次数不超过n的多项式在[a,b]上关于 $\rho(x)$ 正交。

充分性　假设$\omega_{n+1}(x)$与任意次数不超过n的多项式在[a,b]上关于权函数 $\rho(x)$ 正交。

$\forall f(x)\in \boldsymbol{P}_{2n+1}$ 利用多项式的带余除法，有唯一的 $q_n(x), r_n(x)\in \boldsymbol{P}_n$ 使得

$$f(x)=\omega_{n+1}(x)q_n(x)+r_n(x)$$

$$I(f)=I(\omega_{n+1}q_n)+I(r_n)=\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)q_n(x)dx+I(r_n)=\boxed{(\omega_{n+1},q_n)}+I(r_n)=I(r_n)$$

$$I_n(f)=I_n(\omega_{n+1}q_n)+I_n(r_n)=I_n(r_n)=\sum_{k=0}^{n} A_k\boxed{\omega_{n+1}(x_k)}q_n(x_k)+I_n(r_n)$$

$$I(f)=I_n(f)\quad\Leftarrow\quad I(r_n)=I_n(r_n)$$

n+1个节点的插值型求积公式的代数精度至少为n

充分性得证

实用构造方法：求积系数

Gauss型求积公式代数精度为2n+1

$$f(x) = p(x) + r(x) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx + \int_a^b r(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + \int_a^b r(x)dx$$

通过求一个2n+1次Hermite插值多项式的积分来构造n+1点Gauss求积公式

$$r(x) = \cdots \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdots$$

$p(x)$ 为2n+1次多项式

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 f(x_k)$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\omega_{n+1}(x)\left(\frac{\omega''_{n+1}(x_k)\omega_{n+1}(x)}{(\omega'_{n+1}(x_k))^3(x-x_k)}\right)f(x_k)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\omega_{n+1}(x)\left(\frac{\omega_{n+1}(x)}{(\omega'_{n+1}(x_k))^2(x-x_k)}\right)f'(x_k)$$

n次多项式

由于 $\omega_{n+1}(x)$与所有n次多项式正交，则有

$$\int_a^b \rho(x)H_{2n+1}(x)dx=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\int_a^b \rho(x)\left(\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 dx$$

Gauss型求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

求积系数 $A_k = \int_a^b \rho(x)\left(\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 dx$ $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是正交多项式的根。

也可按照Lagrange插值公式构造求积系数

$$A_k = \int_a^b \rho(x)\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}dx$$

实用构造方法：求积余项

$$\tilde{E}_n(f)=\int_a^b \rho(x) r_{2n+1}(x)dx=\frac{1}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x) f^{(2n+2)}(\xi_x)\omega_{n+1}^2(x)dx$$

积分中值定理

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\boxed{f^{(2n+2)}(\eta)}\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}^2(x)dx,\ \eta\in(a,b)$$

数值稳定性和收敛性

Gauss型求积公式是数值稳定的

因为求积系数 $A_k = \int_a^b \rho(x)\left(\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 dx > 0$

$$\sum_{k=0}^{n}|A_k| = \sum_{k=0}^{n}A_k = \sum_{k=0}^{n}A_k\cdot 1 = \tilde{I}_n(1) = I(1) = \int_a^b \rho(x)dx$$

有界

设 $f(x)\in C[a,b]$ ，则Gauss型求积公式是收敛的

n+1个节点的Gauss型求积公式

1. 以求积节点和求积系数为2n+2个未知量，
   求解由2n+1次代数精度得到的2n+2个非线性方程

2. 由求积区间和权函数得到n+1次正交多项式，
   解其零点获得n+1个求积节点，再如下计算求积系数：

   a. 按照Hermite基函数得到的求积系数公式

   b. 按照Lagrange基函数得到的求积系数公式

   c. 求解由n次代数精度得到的n+1个线性方程

例题

例 求 $[-1,1]$ 上关于 $\rho(x)=1$ 的两点Gauss型求积公式。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解：构造二次正交多项式

$$\phi_2(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & x \\ \mu_2 & \mu_3 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & x \\ \frac{2}{3} & 0 & x^2 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}\left(3x^2 - 1\right)$$

令

$$\phi_2(x) = \frac{4}{9}\left(3x^2 - 1\right) = 0\,, \qquad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}},\ \ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

方法1

$$A_0=\int_{-1}^{1}l_0(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}dx\ =1$$

$$A_1=\int_{-1}^{1}l_1(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{x+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}dx\ =1$$

方法2:

取 $f(x)=1, x$ ，由代数精度的定义，得线性方程组

$$\begin{cases} A_0+A_1=\int_{-1}^{1}dx=2 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}A_0+\frac{1}{\sqrt{3}}A_1=\int_{-1}^{1}x\,dx=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0+A_1=2 \\ A_1-A_0=0 \end{cases} \Rightarrow A_0=A_1=1$$

则得具有3次代数精度的Gauss-Legendre公式:

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

对于任意区间 $[a,b]$ 上权函数 $\rho(x)=1$ 的Gauss型求积公式，只需作变量替换：

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot t$$

则有 $x\in[a,b] \leftrightarrow t\in[-1,1]$

这样

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot t\right)dt \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n} A_k f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_k\right)$$

例题

例 构造求解 $\int_1^5 f(x)dx$ 的具有3次代数精度的数值积分公式。

解：由 $2n+1=3 \Rightarrow n=1$，此求积公式具有2个Gauss节点。

作变量替换：$x=3+2t$，则取Gauss节点、求积系数：

$$t_0=-\sqrt{\frac{1}{3}},\quad t_1=\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad A_0=A_1=1$$

从而，得

$$\int_1^5 f(x)dx=2\cdot\int_{-1}^1 f(3+2t)dt\approx 2\sum_{k=0}^{1}A_k f(3+2t_k)=2f\left(3-2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+2f\left(3+2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

例题

例 确定 x_0, x_1, A_0, A_1 使以下的求积公式为Gauss型求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\, f(x)\, dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解：首先构造 $[0,1]$ 上关于 $\rho(x)=\sqrt{1-x}$ 的首项系数为1的二次正交多项式，为此可设

$\phi_0(x)=1 \quad \phi_1(x)=x+a \qquad \phi_2(x)=x^2+bx+c$，从而有

$$\left.\begin{aligned}(\phi_0,\phi_1)&=\int_0^1\sqrt{1-x}(x+a)dx=0\\(\phi_0,\phi_2)&=\int_0^1\sqrt{1-x}(x^2+bx+c)dx=0\\(\phi_1,\phi_2)&=\int_0^1\sqrt{1-x}\cdot(x+a)\cdot(x^2+bx+c)dx=0\end{aligned}\right.\quad\Longrightarrow\quad\left\{\begin{aligned}a&=-\frac{2}{5}\\b&=-\frac{8}{9}\\c&=\frac{8}{63}\end{aligned}\right.$$

则 $\phi_2(x)= x^2-\frac{8}{9}x+\frac{8}{63}$ 其零点为：$x_0=0.7188,\ x_1=0.7101$

令 $f(x)=1, x$，用代数精度定义得：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \dfrac{2}{3} \\ 0.7188A_0 + 0.7101A_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\cdot x \cdot dx = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 0.3891 \\ A_1 = 0.2776 \end{cases}$$

从而

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}f(x)dx \approx 0.3891\cdot f(0.7188) + 0.2776\cdot f(0.7101)$$