线性多步法

董波
数学科学学院
大连理工大学

微分方程离散化求解公式的分类:

- 显式公式和隐式公式
- 单步法和多步法

梯形法 $u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\big(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1})\big)$ 单步隐式

改进Euler法 $u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}[f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_n+h\,f(t_n,u_n))]$ 单步显式

Simpson公式 $u_{n+2}=u_n+\frac{h}{3}\left[f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n\right]$ 二步隐式

(1) 显式单步法一般可以写成：

依赖于f(t,u)

$$u_{n+1}=u_n+h\varphi(t_n,u_n;h),\ n=0,1,2,\ldots$$

(2) 线性多步（k-步）法一般可以写成：

$$\alpha_0u_n+\alpha_1u_{n+1}+\cdots+\alpha_ku_{n+k}=h(\beta_0f_n+\beta_1f_{n+1}+\cdots+\beta_kf_{n+k})$$

即：

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_ju_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_jf_{n+j},\ \alpha_k\neq 0,$$

保证是k步法

其中 $f_{n+j}=f(t_{n+j},u_{n+j})$，$\alpha_j,\beta_j$ 是常数，α_0 和 β_0 不同时为0。

若 $\beta_k=0$ 则是显式的，若 $\beta_k\neq 0$ 则是隐式的。

基于Taylor展式的求解公式

假设初值问题的解充分光滑，将 $u(t)$ 在 t_0 处作Taylor展开

$$u(t)=u(t_0)+hu'(t_0)+\frac{h^2}{2!}u''(t_0)+\cdots+\frac{h^p}{p!}u^{(p)}(t_0)+O(h^{p+1})$$

$$u'=f(t,u(t))$$

$$=u(t_0)+hf(t_0,u_0)+\frac{h^2}{2!}\frac{df(t,u(t))}{dt}\bigg|_{t=t_0}+\cdots$$

$$+\frac{h^p}{p!}\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}}f(t,u(t))\bigg|_{t=t_0}+O(h^{p+1})$$

令 $\varphi(t,u(t);h)=\sum_{j=1}^{p}\frac{h^{j-1}}{j!}\cdot\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}f(t,u(t))$ 即可将上式改写为

$$u(t_0+h)-u(t_0)=h\varphi(t_0,u_0;h)+O(h^{p+1}),$$

舍去余项则得 $$u_1-u_0=h\varphi(t_0,u_0;h)$$

定义

若已知 u_n ，则得单步法

$$u_{n+1} = u_n + h\varphi(t_n, u_n; h), n = 0,1,2,\ldots,$$

局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ ，φ 关于 f 非线性。

当 $p=1$ 时，它是Euler法。

$$u(t_0)=u_0,$$

$$u'(t_0)=f(t_0,u(t_0))=f(t_0,u_0),$$

$$u''(t_0)=\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0}=f_t+f_u u'|_{t=t_0}=f_t+f_u f|_{t=t_0}$$

$$u'''(t_0)=\left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_{t=t_0}=f_{tt}+f_{tu}u'+(f_{ut}+f_{uu}u')f+f_u(f_t+f_u f)|_{t=t_0}$$

$$=f_{tt}+f_{tu}f+(f_{ut}+f_{uu}f)f+f_u(f_t+f_u f)|_{t=t_0}$$

$$=f_{tt}+2f_{tu}f+f^2 f_{uu}+f_t f_u+f_u f_u f|_{t=t_0}$$

计算 $\varphi(t_n,u_n;h)$ 的工作量太大,不直接用Taylor展开法做数值计算

一般显式Runge-Kutta法

$$u_{n+1}=u_n+h\sum_{i=1}^{m}c_ik_i,\quad n=0,1,2,\ldots$$

其中 $c_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{m}c_i=1$

$$\begin{cases} k_1=f(t,u), \\ k_2=f(t+ha_2,u(t)+hb_{21}k_1), \\ k_3=f(t+ha_3,u(t)+h(b_{31}k_1+b_{32}k_2)), \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ k_m=f(t+ha_m,u(t)+h\sum_{j=1}^{m-1}b_{m,j}k_j). \end{cases}$$

满足 $\sum_{j=1}^{i-1}b_{i,j}=a_i,\quad i=2,\ldots,m$

高阶显式Runge-Kutta公式构造

利用Taylor展开的思想构造高阶显式Runge-Kutta公式

显式单步法一般可以写成:

$$u_{n+1} = u_n + h\sum_{i=1}^{m} c_i k_i, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

系数 $\{a_i\}, \{b_{i,j}\}, \{c_i\}$ 按如下原则确定:

将 k_i 关于 h 展开,

使 $h^l (l = 0,1,\ldots, p-1)$ 的系数和显式单步法同次幂系数相等。

如此得到的算法称为m级p阶Runge-Kutta法。

例题

例如，给出 $m \le 3$ 情形下显式Runge-Kutta法的推导。

➢首先将 $u(t+h)$ 在 t 处展开到 h 的三次幂：

$$u(t+h) = u(t) + \sum_{l=1}^{3} \frac{h^l}{l!} u^{(l)}(t) + O(h^4) \ = u(t) + h\tilde{\phi}(t, u(t); h)$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(t,u;h) = f + \dfrac{1}{2} h\tilde{f} + \dfrac{1}{6} h^2 (\tilde{f} f_u + \hat{f}) + O(h^3), \\ \tilde{f} = f_t + f f_u, \\ \hat{f} = f_{tt} + 2 f f_{tu} + f^2 f_{uu}, \end{cases}$$

➢ 其次，由二元函数 $f(t,u)$ 在 (t,u) 处Taylor展开得到：

$$k_1 = f(t,u(t)) = f,$$

$$k_2 = f(t+ha_2, u(t)+ha_2k_1)$$

$$= f + ha_2(f_t + k_1 f_u) + \frac{1}{2}h^2a_2^2(f_{tt} + 2k_1 f_{tu} + k_1^2 f_{uu}) + O(h^3)$$

$$= f + ha_2 \tilde{f} + \frac{1}{2}h^2a_2^2 \hat{f} + O(h^3)$$

$$k_3 = f + ha_3 \tilde{f} + h^2(a_2b_{32} f_u \tilde{f} + \frac{1}{2}a_3^2 \hat{f}) + O(h^3)$$

于是，合并 $h^l(l=0,1,2)$ 的同类项得到：

$$\phi(t,u(t);h) = \sum_{i=1}^{3} c_i k_i = (c_1+c_2+c_3) f + h(a_2c_2 + a_3c_3)\tilde{f}$$

$$+ \frac{1}{2}h^2[2a_2b_{32}c_3 f_u \tilde{f} + (a_2^2c_2 + a_3^2c_3)\hat{f}] + O(h^3)$$

- 再比较 $\phi(t,u;h)$ 和 $\tilde{\phi}(t,u;h)$ 的同次幂系数，得到

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 & \Longrightarrow \text{一阶精度} \\ a_2 c_2 + a_3 c_3 = \dfrac{1}{2} & \Longrightarrow \text{二阶精度} \\ \left.\begin{aligned} a_2 b_{32} c_3 = \dfrac{1}{6} \\ a_2^2 c_2 + a_3^2 c_3 = \dfrac{1}{3} \end{aligned}\right\} & \Longrightarrow \text{三阶精度} \end{cases}$$

数值方法

（一） $m=1$ $c_1+c_2+c_3=1$

$$c_1=1, c_2=c_3=0 \Rightarrow \phi(t,u;h)=f$$

$$\Rightarrow u_{n+1}=u_n+hf(t_n,u_n)$$

即为一级一阶Runge-Kutta法，实际为Euler法。

（二） $m=2$

$$c_1+c_2=1 \qquad a_2c_2=\frac{1}{2}$$

它有无穷多组解，从而有无穷多个二级二阶Runge-Kutta法。常见的有

(1) $c_1=0, c_2=1, a_2=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+hk_2, \\ k_1=f(t_n,u_n), \\ k_2=f(t_n+\frac{1}{2}h, u_n+\frac{1}{2}hk_1), \end{cases}$$

中点法

(2) $c_1=c_2=\frac{1}{2}, a_2=1$

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2}h(k_1+k_2), \\ k_1=f(t_n,u_n), \\ k_2=f(t_n+\frac{1}{2}h, u_n+\frac{1}{2}hk_1), \end{cases}$$

改进Euler法

（三） $m=3$

$$c_1+c_2+c_3=1 \quad a_2c_2+a_3c_3=\frac{1}{2} \quad a_2b_{32}c_3=\frac{1}{6} \quad a_2^2c_2+a_3^2c_3=\frac{1}{3}$$

四个方程不能完全确定六个系数，为含两个参数的三级三阶R-K法

$$c_1=\frac{1}{6},c_2=\frac{2}{3},c_3=\frac{1}{6}$$

$$a_2=\frac{1}{2},a_3=1,b_{32}=2$$

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+\dfrac{h}{6}\left(k_1+4k_2+k_3\right), \\ k_1=f(t_n,u_n), \\ k_2=f(t_n+\dfrac{1}{2}h,u_n+\dfrac{1}{2}hk_1), \\ k_3=f(t_n+h,u_n-hk_1+2hk_2). \end{cases}$$

Kutta法

（四） $m=4$　　比较 $h^i(i=0,1,2,3)$ 的系数，

则得到含13个待定系数的11个方程，为含两个参数的四级四阶R-K法

$$
\begin{cases}
u_{n+1}=u_n+\dfrac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \\
k_1=f(t_n,u_n), \\
k_2=f(t_n+\dfrac{1}{2}h,u_n+\dfrac{1}{2}hk_1), \\
k_3=f(t_n+\dfrac{1}{2}h,u_n+\dfrac{1}{2}hk_2), \\
k_4=f(t_n+h,u_n+hk_3).
\end{cases}
$$

经典龙格—库塔方法

通常m级R-K法最高阶不一定是m阶。若 p(m)是m级R-K法的最高阶，

$$p(5)=4,\ p(6)=5,\ p(7)=6,\ p(8)=6,\ p(9)=7.$$

待定系数法

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j},\ \alpha_k \neq 0,$$

令差分算子

$$L_k[u(t);h] = \sum_{j=0}^{k}[\alpha_j u(t+jh) - h\beta_j u'(t+jh)],$$

假设 $u(t)$ 是初值问题的解，将 $u(t+jh)$ 和 $u'(t+jh)$ 在点 t 处作Taylor展开

$$u(t+jh) = u(t) + \frac{jh}{1!}u'(t) + \frac{(jh)^2}{2!}u''(t) + \frac{(jh)^3}{3!}u^{(3)}(t) + \cdots$$

$$u'(t+jh) = u'(t) + \frac{jh}{1!}u''(t) + \frac{(jh)^2}{2!}u'''(t) + \frac{(jh)^3}{3!}u^{(4)}(t) + \cdots$$

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u(t+jh)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u(t)+\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \frac{jh}{1!}u'(t)+\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \frac{(jh)^2}{2!}u''(t)+\cdots+$$

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \frac{(jh)^p}{p!}u^{(p)}(t)+\cdots$$

$$\sum_{j=0}^{k}\beta_j h u'(t+jh)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j h\, u'(t)+\sum_{j=0}^{k}\beta_j h \frac{jh}{1!}u''(t)+\sum_{j=0}^{k}\beta_j h \frac{(jh)^2}{2!}u'''(t)+\cdots+$$

$$\sum_{j=0}^{k}\beta_j h \frac{(jh)^{p-1}}{(p-1)!}u^{(p)}(t)+\cdots$$

$$\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j u(t+jh)-h\beta_j u'(t+jh)]=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u(t)+\sum_{j=0}^{k}(j\alpha_j-\beta_j)\, hu'(t)+$$

$$\sum_{j=0}^{k}(\frac{1}{2!}j^2\alpha_j-j\beta_j)h^2u''(t)+\cdots+\sum_{j=0}^{k}(\frac{1}{p!}j^p\alpha_j-\frac{1}{(p-1)!}j^{p-1}\beta_j)h^pu^{(p)}(t)+\cdots$$

整理得到

$$L_k[u(t);h]=c_0u(t)+c_1hu'(t)+c_2h^2u''(t)+\cdots+c_ph^pu^{(p)}(t)+\cdots$$

其中

$$\begin{cases} c_0=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k, \\ c_1=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k-(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k), \\ c_2=\dfrac{1}{2!}(\alpha_1+2^2\alpha_2+\cdots+k^2\alpha_k)-(\beta_1+2\beta_2+\cdots+k\beta_k), \\ \qquad\qquad\vdots \\ c_p=\dfrac{1}{p!}(\alpha_1+2^p\alpha_2+\cdots+k^p\alpha_k)-\dfrac{1}{(p-1)!}(\beta_1+2^{p-1}\beta_2+\cdots+k^{p-1}\beta_k), \end{cases}$$

可选取适当的k和 α_j,β_j 使得

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0,\ c_{p+1} \neq 0,$$

此时 $L_k[u(t);h] = \sum_{j=0}^{k}[\alpha_j u(t+jh) - h\beta_j u'(t+jh)],$

$$= c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t) + O(h^{p+2})$$

舍去余项，并记

$$u_{n+j} = u(t_n + jh),\ f_{n+j} = u'(t_{n+j}, u_{n+j}),$$

即得到线性多步法

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j},}$$

p阶k步法

局部截断误差为 $R_n = \boxed{c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t_n)} + O(h^{p+2})$

局部截断误差主项 $c_{p+1}h^{p+1}u^{(p+1)}(t_n)$ 局部截断误差主项系数 c_{p+1}

k步线性法确定

线性k步法

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j},\ \alpha_k\neq 0,$$

取 $\alpha_k=1,$ 由 $c_0=c_1=c_2=\cdots=c_p=0$ 得到线性方程组

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k-(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k)=0\\ \vdots\\ \dfrac{1}{p!}(\alpha_1+2^p\alpha_2+\cdots+k^p\alpha_k)-\dfrac{1}{(p-1)!}(\beta_1+2^{p-1}\beta_2+\cdots+k^{p-1}\beta_k)=0\end{cases}$$

p+1个方程，2k+1个未知量，因此 $p\leq 2k$

线性k步法最高可达到2k阶精度(整体截断误差)。

线性方程组两个用途

- 解方程组获得p阶k步法
- 对已知k步法验证其精度

例题

例：构造线性单步公式 $k=1$

$$\alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = h[\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n]$$

解：令 $k=1, \alpha_1 = 1$

$$\begin{cases} c_0 = \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\ c_1 = \alpha_1 - (\beta_0 + \beta_1) = 0 \\ c_2 = \dfrac{1}{2}\alpha_1 - \beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -1 \\ \beta_0 = \dfrac{1}{2} \\ \beta_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

得到梯形(二阶隐式方法):

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

局部截断误差为

$$c_3 = \frac{1}{6}\alpha_1 - \frac{1}{2}\beta_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12} \quad R_{n+1}(h) = -\frac{1}{12}h^3 u^{(3)}(t_n) + O(h^4)$$

例题

例：构造线性二步公式 $k=2$

$$\alpha_2 u_{n+2}+\alpha_1 u_{n+1}+\alpha_0 u_n = h[\beta_2 f_{n+2}+\beta_1 f_{n+1}+\beta_0 f_n]$$

令 $\alpha_0=\alpha, \alpha_2=1$

$$\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 & & =0 \\ \alpha_1+2\alpha_2 & -\ (\beta_0+\beta_1+\beta_2) & =0 \\ \frac{1}{2}(\alpha_1+4\alpha_2) & -\ (\beta_1+2\beta_2) & =0 \\ \frac{1}{6}(\alpha_1+8\alpha_2) & -\ \frac{1}{2}(\beta_1+4\beta_2) & =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-(1+\alpha) \\ \beta_0=-\frac{1}{12}(1+5\alpha) \\ \beta_1=\frac{2}{3}(1-\alpha) \\ \beta_2=\frac{1}{12}(5+\alpha) \end{cases}$$

一般二步法为

$$u_{n+2}-(1+\alpha)u_{n+1}+\alpha u_n=\frac{h}{12}[(5+\alpha)f_{n+2}+8(1-\alpha)f_{n+1}-(1+5\alpha)f_n]$$

$$u_{n+2}-(1+\alpha)u_{n+1}+\alpha u_n=\frac{h}{12}[(5+\alpha)f_{n+2}+8(1-\alpha)f_{n+1}-(1+5\alpha)f_n]$$

$$c_4=\frac{1}{24}(\alpha_1+16\alpha_2)-\frac{1}{6}(\beta_1+8\beta_2)=\frac{1}{24}(1+\alpha)$$

$$c_5=\frac{1}{120}(\alpha_1+32\alpha_2)-\frac{1}{24}(\beta_1+16\beta_2)=-\frac{1}{360}(17+13\alpha)$$

当 $\alpha\neq-1$ 时 $c_4\neq0$ 三阶二步法；

Simpson公式

当 $\alpha=-1$ 时 $c_4=0, c_5\neq0$ 是四阶二步法，具有最高阶

$$u_{n+2}=u_n+\frac{h}{3}(f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n)$$

若取 $\alpha=0$ 二步隐式方法 $u_{n+2}=u_{n+1}+\frac{h}{12}(5f_{n+2}+8f_{n+1}-f_n)$

若取 $\alpha=-5$ 则显式方法 $u_{n+2}+4u_{n+1}-5u_n=2h(2f_{n+1}+f_n)$

对已知k步法验证其精度

例：向后Euler法(一阶隐式方法)：$u_{n+1}=u_n+hf_{n+1}$ 局部截断误差与精度。

解： $k=1,\alpha_0=-1,\alpha_1=1,\beta_0=0,\beta_1=1$

$$\begin{cases} c_0=\alpha_0+\alpha_1=0 \\ c_1=\alpha_1-(\beta_0+\beta_1)=0 \\ c_2=\dfrac{1}{2}\alpha_1-\beta_1=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

局部截断误差为 $R_{n+1}(h)=-\dfrac{1}{2}h^2u^{(2)}(t_n)+O(h^3)$ 精度为1

例：三步三阶显式Adams方法：

$$u_{n+3}=u_{n+2}+\frac{h}{12}(23f_{n+2}-16f_{n+1}+5f_n)$$

得到

$$\alpha_0=0,\alpha_1=0,\alpha_2=-1,\alpha_3=1,$$

$$\beta_0=5/12,\beta_1=-16/12,\beta_2=23/12,\beta_3=0,$$

$$c_0=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

$$c_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3-(\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3)=0$$

$$c_2=\frac{1}{2}(\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3)-(\beta_1+2\beta_2+3\beta_3)=0$$

$$c_3=\frac{1}{6}(\alpha_1+8\alpha_2+27\alpha_2)-\frac{1}{2}(\beta_1+4\beta_2+9\beta_3)=0$$

$$c_4=\frac{1}{4!}(\alpha_1+2^4\alpha_2+3^4\alpha_2)-\frac{1}{3!}(\beta_1+2^3\beta_2+3^3\beta_3)=\frac{3}{8}$$

局部截断误差为 $R_{n+3}(h)=\frac{3}{8}h^4u^{(4)}(t_n)+O(h^5)$ 精度为3

其它线性多步法，见P234

k+1步显式Adams方法：

$$u_{n+1} = u_n + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1} + \cdots + \beta_k f_{n-k})$$

k步隐式Adams方法：

$$u_{n+1} = u_n + h(\beta_0 f_{n+1} + \beta_1 f_n + \cdots + \beta_k f_{n-k+1})$$

对于求近似解(数值解)应关注三个问题:

误差估计，收敛性，稳定性。

一、数值方法的局部截断误差和阶;

二、在离散点 t_n 处的数值解 u_n 是否收敛到精确解 $u(t_n)$；

三、数值方法的稳定性。

收敛性

对单步法，当方法的阶 $p \geq 1$ 时，有整体误差

$$E_n = u(t_n) - u_n = O(h^p)$$

故有 $\lim\limits_{h\to 0} E_n = 0$ ，因此方法是收敛的。

对多步法，若方法是 k 步 p 阶法，

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j},\ \alpha_k \neq 0,$$

多步法的第一特征多项式 和第二特征多项式分别为

$$\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j \qquad \sigma(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \lambda^j$$

若多步法的第一特征多项式 $\rho(\lambda)$ 的所有根(复根)在单位圆内或圆上 $(|\lambda| \leq 1)$，且位于单位圆周上的根都是单根，则称多步法满足根条件。

若线性多步法(7-4)的阶 $p \geq 1$，且满足根条件，则方法是收敛的。

稳定性

一般通过模型方程来讨论方法的数值稳定性，

$$u' = \mu u$$

其中 $\mathrm{Re}(\mu) < 0$ ，模型方程为好条件问题。

$$\begin{cases} u' = \mu u \\ u(0) = u_0 \end{cases} \Rightarrow u = u_0 e^{\mu t}$$

精确解

若初值有误差： $u_0 + \varepsilon$ $\Rightarrow \tilde{u} = (u_0 + \varepsilon) e^{\mu t}$

$$\Rightarrow |u - \tilde{u}| = |\varepsilon| e^{\mathrm{Re}(\mu) t}$$

坏条件问题，类似于病态问题

如果 $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ ，则误差随 t 的增加而扩大；

如果 $\mathrm{Re}(\mu) < 0$ ，则误差随 t 的增加而减小。

好条件问题，类似于良态问题

因为实际计算中，h是固定的。当某一步 u_n有 舍入误差时，若以后的计算中不会逐步扩大，称这种稳定性为**绝对稳定性**。

一个数值方法用于**求解模型问题**，若在 $\bar{h}=\mu h$ 平面中的某一个区域D中方法都是绝对稳定的，而在区域D外方法是不稳定的，则称D是方法的**绝对稳定区域**，它与实轴的交称为**绝对稳定区间**。

步长h的可选范围

例如，对Euler法

$$u_{n+1}=u_n+hf_n,\quad n=0,1,2,\ldots$$

用于求解模型方程得到 $u_{n+1}=u_n+h\mu u_n=(1+\mu h)u_n$

当 u_n 有舍入误差时，近似解为 $\tilde{u}_n$

$$\tilde{u}_{n+1}=(1+\mu h)\tilde{u}_n$$

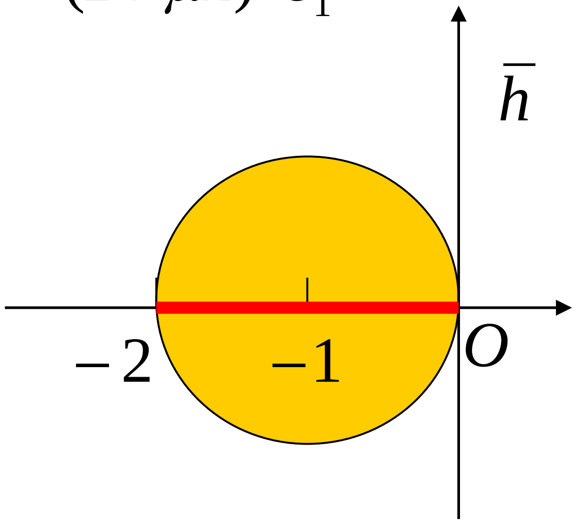
取 $\varepsilon_n=u_n-\tilde{u}_n$，得误差传播方程 $\varepsilon_{n+1}=(1+\mu h)\varepsilon_n=(1+\mu h)^n\varepsilon_1$

记 $\bar{h}=\mu h$，只要 $|1+\bar{h}|<1$，则Euler方法绝对稳定。

若实数 $\mu<0$，则 $-2<\bar{h}<0\Leftrightarrow 0<h<\dfrac{2}{-\mu}$

若 μ 为复数，在 $\bar{h}=\mu h$ 的复平面上，

$|1+\bar{h}|<1$ 表示以(-1,0)为圆心，1为半径的单位圆。



m级m阶Runge-Kutta法的绝对稳定区域: $\left|\lambda(\bar{h})\right|<1$

$$\lambda(\bar{h})=1+\bar{h}+\frac{1}{2!}\bar{h}^2+\cdots+\frac{1}{m!}\bar{h}^m$$

	$\lambda(\bar{h})$	绝对稳定区间
一级	$1+\bar{h}$	$(-2,0)$
二级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2$	$(-2,0)$
三级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\frac{1}{6}\bar{h}^3$	$(-2.51,0)$
四级	$1+\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^2+\frac{1}{6}\bar{h}^3+\frac{1}{24}\bar{h}^4$	$(-2.78,0)$

线性k步法的绝对稳定区域

将k步法用于求解模型问题得到k阶线性差分方程

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j u_{n+j}=\mu h\sum_{j=0}^{k}\beta_j u_{n+j}$$

若取 $\bar{h}=\mu h$ ，则差分方程的特征方程为 $\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=0$ 其中

$$\rho(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda^j,\ \sigma(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\lambda^j$$

若特征方程的根都在单位圆 $(|\lambda|<1)$ 内，

则多步法关于 $\bar{h}=\mu h$ 绝对稳定，其绝对稳定域是复平面 $\bar{h}$ 上区域：

$$D=\left\{\bar{h}:\left|\lambda_j(\bar{h})\right|<1,\ j=1,2,\ldots,k\right\}$$

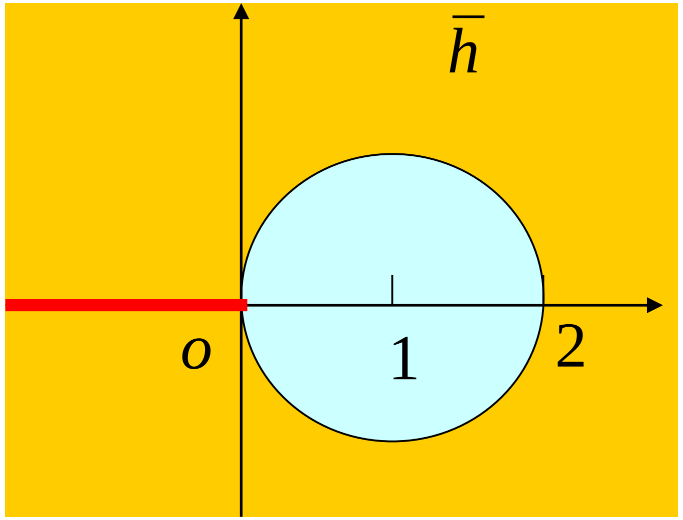
向后Euler法稳定性

例如，隐式方法中最简单的向后Euler法，

$$u_{n+1}=u_n+hf(t_{n+1},u_{n+1}),\quad n=0,1,2,\ldots$$

其特征方程为

$$\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=(\lambda-1)-\bar{h}\lambda$$
$$=(1-\bar{h})\lambda-1=0$$
$$\Rightarrow \lambda=\frac{1}{1-\bar{h}}$$



于是隐Euler法的绝对稳定区域为 $|1-\bar{h}|>1$

它是 $\bar{h}$ 平面上以(1,0)为圆心的单位圆外区域。

当 $\mu<0$ 为实数时，绝对稳定区间为 $(-\infty,0)$ $\Leftrightarrow h>0$

隐Euler法无条件稳定!

梯形法稳定性

梯形法

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}h(f_n + f_{n+1}), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

其特征方程为

$$\rho(\lambda) - \bar{h}\sigma(\lambda) = (\lambda - 1) - \bar{h}\frac{1}{2}(1+\lambda) = (1 - \frac{\bar{h}}{2})\lambda - (1 + \frac{\bar{h}}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = (1 + \frac{\bar{h}}{2}) \Big/ (1 - \frac{\bar{h}}{2})$$

于是梯形法的绝对稳定区域为左半平面 $\left|\bar{h} + 2\right| < \left|\bar{h} - 2\right|$

当 $\mu < 0$ 为实数时，绝对稳定区间为 $(-\infty, 0) \Leftrightarrow h > 0$

梯形法无条件稳定!

实用定理

实系数二次方程 $\lambda^2 - b\lambda - c = 0$ 的根在单位圆内的充要条件为

$$|b| < 1 - c < 2.$$

例题

对于解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

的线性二步法

$$u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = \frac{h}{16}\left(7f_{n+2} + 8f_{n+1} - 3f_n\right)$$

(1) 指出该方法是几阶方法;

(2) 讨论收敛性;

(3) 求绝对稳定区间.

解 （1） $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0,$

$$c_4 = \frac{1}{4!}(-\frac{5}{4} + 2^4) - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{16}(8 + 2^3 \times 7) = \frac{59}{96} - \frac{64}{96} = -\frac{5}{96}$$

局部截断误差 $R_{n+2}(h) = -\frac{5}{96}u^{(4)}(t_n)h^4 + O(h^5)$

该方法是三阶方法.

(2) 由 $\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0$，解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{4}$. 知该方法满足根条件，

又因其阶 $p \geq 1$，所以该二步法收敛.

特征方程

$$\lambda^2-\frac{5}{4}\lambda+\frac{1}{4}=\frac{7\bar{h}}{16}\lambda^2+\frac{8\bar{h}}{16}\lambda-\frac{3\bar{h}}{16} \qquad (1-\frac{7\bar{h}}{16})\lambda^2-(\frac{5}{4}+\frac{8\bar{h}}{16})\lambda+(\frac{1}{4}+\frac{3\bar{h}}{16})=0$$

$$(16-7\bar{h})\lambda^2-(20+8\bar{h})\lambda+(4+3\bar{h})=0 \qquad \lambda^2-\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\lambda+\frac{4+3\bar{h}}{16-7\bar{h}}=0$$

以下解不等式

$$\left|\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\right|<1+\frac{4+3\bar{h}}{16-7\bar{h}}=\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}<2$$

首先由 $\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}<2$，得 $20-4\bar{h}<32-14\bar{h}$，其解 $\bar{h}<0$

再由 $\left|\frac{20+8\bar{h}}{16-7\bar{h}}\right|<\frac{20-4\bar{h}}{16-7\bar{h}}$，得 $4\bar{h}-20<20+8\bar{h}<20-4\bar{h}$，其解 $-10<\bar{h}<0$

所以，不等式的解集为 $-10<\bar{h}<0$

即此线性二步法的绝对稳定区间为 $(-10,0)$