矩阵的Jordan分解

董波
数学科学学院
大连理工大学

代数重数、几何重数

代数重数

设A为n阶方阵,A的特征多项式为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

其中 $m_i(i=1,2,\ldots,s)$ 均为正整数, $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ 为A的不同特征值,

称m_i为 λ_i 的代数重数

几何重数

把与 λ_i 对应的线性无关的特征向量的个数,即子空间 $N(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$

(即 $(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间,称为 $\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ 的零空间)的维数,

称为 λ_i 的几何重数,记为 α_i, $\alpha_i = n - \operatorname{rank}(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$.

代数重数与几何重数关系

代数重数　几何重数　$m_i \ge \alpha_i$

取特征子空间 $N(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$ 的一组基 $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{\alpha_i}$ 扩充为R^n 的基 $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{\alpha_i}, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{n-\alpha_i}$

令$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{\alpha_i}, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{n-\alpha_i})$

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\alpha_i}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_{n-\alpha_i})$$

$$= (\lambda_i \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}_1, \dots, \lambda_i \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}_{\alpha_i}, \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_{n-\alpha_i}) = \begin{pmatrix} \lambda_i \boldsymbol{I}_{\alpha_i} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_{\alpha_i} - \lambda_i \boldsymbol{I}_{\alpha_i}) \cdot \det(\lambda \boldsymbol{I}_{\alpha_i} - \boldsymbol{C}) = (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \cdot \det(\lambda \mathbf{I}_{n-\alpha_i} - \mathbf{C})$$

半单、亏损

设A为n阶方阵，λ_i为其特征值，m_i和α_i分别为其代数重数和几何重数. 如果$m_i=\alpha_i$，则称特征值λ_i为半单的；如果$m_i>\alpha_i$，则称特征值λ_i为亏损的.

- 代数重数为1的特征值一定是半单的.
- 不同特征值对应的特征向量是线性无关的.

- 每个特征值都是半单的矩阵(有完备的特征向量系) 等价于可对角化.
- 存在亏损的特征值的矩阵称为亏损矩阵等价于不可对角化.

例题

例 下列矩阵是否可以对角化?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}17 & 0 & -25\\ 0 & 3 & 0\\ 9 & 0 & -13\end{pmatrix}$$

(1) $\det(\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-2)$ $\quad \lambda_1=2,\lambda_2=1+\sqrt{3},\lambda=1-\sqrt{3}$ $\quad$ $\boldsymbol{A}$可对角化

(2) $\det(\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{B})=\lambda^2(\lambda-2)$ $\quad \lambda_1=0,m_1=2,\lambda_2=2,m_2=1$

$rank(\lambda_1\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{B})=rank(\boldsymbol{B})=1,$ 几何重数 $\alpha_1=3-1=2$ $\quad \lambda_1$ 是半单的

$\boldsymbol{B}$可对角化

(3) $\det(\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{C})=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$ $\quad \lambda_1=2,m_1=2,\lambda_2=3,m_2=1$

$rank(\lambda_1\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{C})=2,$ 几何重数 $\alpha_1=3-2=1$ $\quad \lambda_1$是亏损的

$\boldsymbol{C}$为亏损矩阵,不可对角化

Jordan块

称下面的$k\times k$阶方阵为Jordan块

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}$$

$$J_4(0)=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}\quad J_3(2)=\begin{pmatrix}2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2\end{pmatrix}\quad J_2(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ & 1\end{pmatrix}$$

由若干个Jordan块排成的块对角矩阵为Jordan阵.

$$J=\begin{pmatrix} J_3(2) & & \\ & J_4(0) & \\ & & J_2(1) \end{pmatrix}=\mathrm{diag}(J_3(2),J_4(0),J_2(1))$$

设A为n阶方阵,则存在n阶可逆矩阵T使得

$$A=TJT^{-1}$$

其中$J=\mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1),J_{n_2}(\lambda_2),\ldots,J_{n_k}(\lambda_k)),n_1+n_2+\cdots n_k=n.$

称上式为A的Jordan分解,J称为A的Jordan标准型,T称为变换矩阵.若不计Jordan块的次序,则Jordan标准型唯一.

Jordan标准型

Jordan标准型是一个块对角矩阵, 对角元是矩阵A的特征值.

对于特征值λ_i，它的代数重数是Jordan标准型中以λ_i为特征值的Jordan块的阶数之和. 不同Jordan块的特征值可能相同.

对于特征值λ_i, 它的几何重数, 即与λ_i对应的线性无关的特征向量的个数, 恰为以λ_i为特征值的Jordan块的个数.

例题

例 求矩阵A的Jordan标准型J, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

解： $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+1)^3$

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1 \quad 3-\operatorname{rank}(\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3-\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}=2$$

代数重数为3, 以-1为特征值的Jordan块的阶数之和为3.

几何重数为2, 以-1为特征值的Jordan块的个数为2.

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad 或 \quad J=\begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

例题

例　求矩阵A的Jordan标准型J, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

解:　$\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^4$

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2, \qquad 4-\operatorname{rank}(\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$$

代数重数为4, 以2为特征值的Jordan块的阶数之和为4.

几何重数为2, 以2为特征值的Jordan块的个数为2.

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix} \quad 或 \quad J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

设A为n阶方阵, λ_i 为其特征值, 则A的Jordan标准型J中以 λ_i为特征值, 阶数为l的Jordan块的个数为

$$r_{l+1}+r_{l-1}-2r_l,$$

其中 $r_l=\operatorname{rank}(\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A})^l$. $r_0=\operatorname{rank}(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^0=\operatorname{rank}(\boldsymbol{I})=n$

(1) $l=1$ $\quad r_1=\operatorname{rank}(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$

$$r_2=\operatorname{rank}(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2=\operatorname{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^2=0$$

以2为特征值, 阶数为1 的Jordan块的个数为

$$r_2+r_0-2r_1=0+4-2\times2=0$$

(2) $l=2$

$$r_3=\operatorname{rank}(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^3=\operatorname{rank}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^3=0$$

以2为特征值, 阶数为2 的Jordan块的个数为

$$r_3+r_1-2r_2=0+2-2\times0=2$$

故$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&2&1\\&&&2\end{pmatrix}$

变换矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{TJT}^{-1}\Rightarrow \boldsymbol{AT}=\boldsymbol{TJ} \qquad \boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\ldots,\boldsymbol{T}_k),\ T_i \text{ 为 } n\times n_i \text{ 阶矩阵}$$

$$A(T_1,T_2,\ldots,T_k)=(T_1,T_2,\ldots,T_k)\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}$$

$$AT_i=T_iJ_{n_i}(\lambda_i) \qquad \boldsymbol{T}_i=(\boldsymbol{t}_1^i,\boldsymbol{t}_2^i,\ldots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i),\ t_k^i \text{ 为 } n\times 1 \text{ 阶矩阵}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}_1^i,\boldsymbol{t}_2^i,\ldots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i)=(\boldsymbol{t}_1^i,\boldsymbol{t}_2^i,\ldots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i)\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{t}_1^i=\lambda_i\mathbf{t}_1^i, \\ \mathbf{A}\mathbf{t}_2^i=\lambda_i\mathbf{t}_2^i+\mathbf{t}_1^i, \\ \quad\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{t}_{n_i}^i=\lambda_i\mathbf{t}_{n_i}^i+\mathbf{t}_{n_i-1}^i. \end{cases}$$

$\boldsymbol{t}_1^i,\boldsymbol{t}_2^i,\ldots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i$ 构成一条关于特征值 λ_i 的长度为 n_i 的Jordan链. $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{t}_1^i=0,$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{t}_j^i=\boldsymbol{t}_{j-1}^i,\ j=2,3,\ldots,n_i$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{t}_1^i=0, \quad (\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{t}_j^i=\boldsymbol{t}_{j-1}^i,\ j=2,3,\ldots,n_i$$

$\boldsymbol{t}_1^i$是矩阵A的关于特征值λ_i的一个特征向量，称为**链首**.

注意:

- 并不是任何一个特征向量都可以做链首
- 链首要求：特征向量、方程组可解
- 选取：对应特征向量空间中所有特征向量的某种线性组合

例题

例　计算例2中矩阵A化Jordan标准型的变换矩阵T.

解

由A的Jordan标准型
$$J=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1\end{pmatrix}$$

λ_1对应两个Jordan块,即有两条Jordan链,长度为1和2.

对于阶数为1的Jordan块

求出λ_1所对应的线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{x}_1=(2,0,-1)^T,\boldsymbol{x}_2=(0,1,0)^T.$$

对应的变换矩阵的块为x_1和x_2的任意组合，我们选取x_1

例题

对于阶数为2的Jordan块

构造 $\mathbf{y}=k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2$ 使得 $(A-\lambda_1 I)z=y$ 可解

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}4&0&8&2k_1\\3&0&6&k_2\\-2&0&-4&-k_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&0&8&2k_1\\0&0&0&k_2-3k_1/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

需$2k_2-3k_1=0$　取$k_1=2,k_2=3,\boldsymbol{y}=(4,3,-2)^T$　由$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}$解出$\boldsymbol{z}=(1,0,0)^T$

故变换矩阵为

$$J=\begin{pmatrix}\boxed{-1}&&\\&\boxed{\begin{matrix}-1&1\\&-1\end{matrix}}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{T}=\left(\begin{array}{c:cc}2&4&1\\0&3&0\\-1&-2&0\end{array}\right)$$

计算矩阵的Jordan分解

Jordan标准型J

1、计算矩阵的全部特征值

2、计算特征值的代数重数（确定对角元）

3、计算特征值的几何重数（Jordan块个数）

4、利用定理2.11确定每个k阶块的个数（为节省计算量从小到大计算）

变换矩阵T

1、求得Jordan标准型

2、计算每个Jordan块对应的Jordan链

- 若Jordan块阶数为1，直接计算特征向量
- 若阶数大于1，则先计算特征向量，利用特征向量的线性组合得到链首（保证线性方程组2.45有解）

Jordan分解的应用：

计算初等函数在某个矩阵处的值（矩阵）

最简单的情形：

多项式函数（高次多项式）

Hamilton-Caylay定理

设$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}, \psi(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$，则 $\psi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$

例题

例 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，计算 (1) $A^7-A^5-19A^4+28A^3+6A-4I$； (2) A^{-1}； (3) A^{100}.

解 $\psi(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2$

(1)令$f(\lambda)=\lambda^7-\lambda^5-19\lambda^4+28\lambda^3+6\lambda-4$

$$=(\lambda^4+4\lambda^3+10\lambda^2+3\lambda-2)\psi(\lambda)-3\lambda^2+22\lambda-8$$

$$f(A)=-3A^2+22A-8I=\begin{pmatrix}-19&6&0\\-64&43&0\\19&-3&24\end{pmatrix}$$

(2)由$\psi(A)=A^3-4A^2+5A-2I=O$得

$$A\left(\frac{1}{2}(A^2-4A+5I)\right)=I$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A^2-4A+5I)=\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(3)设$\lambda^{100}=g(\lambda)\psi(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$ 由$\psi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$，有$\psi(2)=\psi(1)=\psi'(1)=0$

$$\begin{cases}2^{100}=4a+2b+c\\1=a+b+c\\100=2a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2^{100}-101\\b=-2^{101}+302\\c=2^{100}-200\end{cases}$$

$$\mathbf{A}^{100}=g(\mathbf{A})\psi(\mathbf{A})+a\mathbf{A}^2+b\mathbf{A}+c\mathbf{I}$$
$$=a\mathbf{A}^2+b\mathbf{A}+c\mathbf{I}=\begin{pmatrix}-199&100&0\\-400&201&0\\201-2^{100}&2^{100}-101&2^{100}\end{pmatrix}$$