多项式插值

董波
数学科学学院
大连理工大学

多项式插值问题-仅函数值

设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个互异点，构造 n 次多项式 $p(x)$ 满足：

$$p(x_i)=f(x_i)=y_i,\qquad i=0,1,\cdots,n$$

解的存在唯一性定理

多项式函数的基底为 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,\ \cdots,\varphi_n(x)=x^n$ ，由于

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}\left(x_i-x_j\right)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}\left(x_i-x_j\right)\neq 0$$

故多项式函数的基底满足Haar条件。

在 $\mathbf{P}_n$（所有次数不超过 n 的实系数代数多项式的集合）中有唯一的多项式 $p(x)$ ，满足

$$p(x_i)=f\left(x_i\right)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n$$

求解方法

设 $p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ 由插值条件可得

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_{n-1}x_0^{n-1}+a_nx_0^n &= f(x_0) \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_1^{n-1}+a_nx_1^n &= f(x_1) \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_{n-1}x_n^{n-1}+a_nx_n^n &= f(x_n) \end{cases}$$

求解 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 困难，故实用方法需满足：

基底及系数简单易算

- Lagrange插值：先给系数，再确定基底
- Newton插值：先给基底，再确定系数

Lagrange插值

系数为给定的函数值

假定构造的 n 次多项式为：

$$p(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)$$

由插值条件 $p(x_i)=f(x_i)=y_i$ 知，基函数 $l_i(x)$ 需满足：

$$l_i(x_k)=\begin{cases}1, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases}\qquad i,k=0,1,\cdots,n.$$

$l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 称为 n 次Lagrange插值基函数.

Lagrange插值基函数

由于 $l_i(x_k)=0,\quad k\neq i$，故

$$l_i(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)\,\alpha$$

由于 $l_i(x_i)=1$，故

$$l_i(x_i)=1=(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)\,\alpha$$

$$\alpha=\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

基函数 $l_i(x)$ 为：

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w'_{n+1}(x_i)}$$

其中

$$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

Lagrange插值多项式

多项式

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

就是多项式空间 $\mathbf{P}_n(x)$中满足插值条件

$$p_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n)$$

的唯一的多项式，$p_n(x)$称为 n 次Lagrange插值多项式.

注意:

- 插值基函数的个数=插值节点的个数;
- 插值基函数的次数=插值节点的个数-1;
- 插值基函数与插值节点的次序无关。

例题

例：已知函数 $f(x)$ 的如下函数值：

x_i	1	2	3
$y_i = f(x_i)$	-1	-1	1

求 $f(x)$ 的二次Lagrange插值多项式并计算 $f(1.5)$ 的近似值

解　计算插值基函数：

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$\begin{aligned} & p_2(x) \\ &= l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 \\ &= x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

$$f(1.5) \approx p_2(1.5) = -1.25.$$

Lagrange插值公式缺点

在插值问题中，为了提高插值精度，有时需增加插值节点个数．插值节点个数发生变化后，所有的Lagrange插值基函数都会发生变化，从而整个Lagrange插值多项式的结构发生变化，这在计算实践中是不方便的．

为了克服Lagrange插值多项式的缺点，能灵活地增加插值节点，使其具有“承袭性”，即可以充分利用已有的信息，我们引进Newton插值公式。

Newton插值基函数

设已知函数$f(x)$在$[a,b]$上的$n+1$个互异插值节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$上的函数值$f_0, f_1, \cdots, f_n$，将基函数取作：

$$\begin{cases} \varphi_0(x)=1, \\ \varphi_j(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})=\prod_{i=0}^{j-1}(x-x_i), \quad j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

则可将n次插值多项式写成如下形式：

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

其中待定系数$a_0, a_1, \cdots, a_n$由插值条件

$$p(x_i)=f_i, \quad i=0,1,\cdots,n$$

来确定.

插值多项式系数确定

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$p_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow f(x_0) + a_1(x_1-x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$p_n(x_2) = f(x_2) \Rightarrow f(x_0) + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) = f(x_2)$$

$$a_2 = \frac{f(x_2)-f(x_0)-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_1+x_1-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2)-f(x_1)-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

问题描述

n 次插值多项式写成如下形式:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$a_0 = f[x_0, x_0]$$

$$a_1 = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

差商定义

设函数 $f(x)$ 在互异的节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值为 $f_0, f_1, \cdots, f_n$，称

$$f[x_i, x_k] = \frac{f_k - f_i}{x_k - x_i} \quad k \neq i$$

为 $f(x)$ 关于 x_i, x_k 的一阶均差（差商）。称

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i} \quad i \neq j \neq k$$

为 $f(x)$ 关于 x_i, x_j, x_k 的二阶均差（差商）。称

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

为 $f(x)$ 关于 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的 k 阶均差（差商）。

均差性质

- k 阶均差计算公式：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

其中 $w_{k+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$

- 对称性，即在 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 中任意调换 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的位置时，均差的值不变

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_1,x_0,\cdots,x_k]=\cdots=f[x_k,x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]$$

均差性质

- 若 $f(x)=x^m$ m为自然数，则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\begin{cases}0, & k>m\\ 1, & k=m\\ \text{诸 } x_i \text{ 的 } m-k \text{ 次齐次函数}, & k<m\end{cases}$$

- 设 $f(x)$在包含 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的区间 (a,b) 内 k 次可微，则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

此处 $\min(x_0,x_1,\cdots,x_k)<\xi<\max(x_0,x_1,\cdots,x_k)$。

Newton插值多项式

n 次Newton插值多项式公式:

$$p_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$= p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

插值多项式的唯一性

Newton插值多项式 $\xleftrightarrow[\text{表达式相同}]{\text{表现形式不同}}$ Lagrange插值多项式

例题

例：若

$$f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 1,$$

求 $f[2^0, 2^1, \cdots, 2^4]$和 $f[e^0, e^1, \cdots, e^5]$

解:

$$f[2^0, 2^1, \cdots, 2^4] = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \frac{-3 \times 4!}{4!} = -3$$

$$f[e^0, e^1, \cdots, e^5] = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = 0$$

均差表

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	$\cdots$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	

$$p_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Taylor多项式

$$\lim_{x_0=x_1=\cdots=x_k} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

例题

例　　已知 $f(0)=2,\ f(1)=-3,\ f(2)=-6,\ f(3)=11$, 求 $f(x)$ 关于上述节点组的三次插值多项式 $p_3(x)$。

解　利用均差表计算均差

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
0	2			
		$\frac{-3-2}{1-0}=-5$		
1	-3		$\frac{-3+5}{2-0}=1$	
		$\frac{-6+3}{2-1}=-3$		$\frac{10-1}{3-0}=3$
2	-6		$\frac{17+3}{3-1}=10$	
		$\frac{11+6}{3-2}=17$		
3	11			

故 $f[0,1]=-5$，$f[0,1,2]=1$，$f[0,1,2,3]=3$，插值多项式为：

$$p_3(x)=2-5x+x(x-1)+3x(x-1)(x-2)=3x^3-8x^2+2$$

例题

例 已知 $f(-2)=-5,\ f(-1)=-2,\ f(0)=3,\ f(1)=10,\ f(2)=19,\ f(3)=30,$

求 $f(x)$ 关于上述节点组的插值多项式 $p(x)$。

解 均差表为

x	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	$\cdots$
-2	-5				
		$\frac{-2+5}{-1+2}=3$			
-1	-2		$\frac{5-3}{0+2}=1$		
		$\frac{3+2}{0+1}=5$		$\frac{1-1}{1+2}=0$	
0	3		$\frac{7-5}{1+1}=1$		$\cdots$
		$\frac{10-3}{1-0}=7$		$\frac{1-1}{2+1}=0$	
1	10		$\frac{9-7}{2-0}=1$		$\cdots$
		$\frac{19-10}{2-1}=9$		$\frac{1-1}{3-0}=0$	
2	19		$\frac{11-9}{3-1}=1$		
		$\frac{30-19}{3-2}=11$			
3	30				

由均差表可知，

$f[-2,-1]=3$，

$f[-2,-1,0]=1$，

$f[-2,-1,0,1]=0$，

故插值多项式为：

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= -5 \\
&\quad +3(x+2) \\
&\quad +(x+1)(x+2) \\
&= x^2+6x+3
\end{aligned}
$$

差商性质4证明

$f(x)$关于节点组 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的k次插值多项式

$$p_k(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})$$

则余项 $r_k(x) = f(x) - p_k(x)$ 至少有$k+1$个互异零点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$

反复利用Rolle定理，可知存在

$$\min(x_0, x_1, \cdots, x_k) < \xi < \max(x_0, x_1, \cdots, x_k)。$$

使得

$$r_k^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - p_k^{(k)}(\xi) = 0 \Longrightarrow f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

插值余项

插值余项

若 $f(x)$ 在包含着插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 次可微，则对任意 $x \in [a,b]$，存在与 x 有关的 ξ $(a<\xi<b)$，使得

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

例：取节点 $x_0=1, x_1=4, x_2=9$，求函数 $y=\sqrt{x}$ 在区间 $[1,9]$ 上的插值多项式 $p_2(x)$，进一步求出 $y(3)$ 的近似值，并估计误差。

解：利用Lagrange插值多项式，

$$p_2(x)=\sqrt{1}\frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)}+\sqrt{4}\frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(4-9)}+\sqrt{9}\frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$

有

$$\sqrt{3}\approx p_2(3)=1.70000.$$

从而

$$|r_2(3)|=\left|\left.\frac{\left(\sqrt{x}\right)'''}{3!}\right|_{x=\xi}(3-1)(3-4)(3-9)\right|\le 0.75.$$

Hermite插值

理论和应用中提出的某些插值问题，要求插值函数$p(x)$具有一定的光滑度，即在插值节点处满足一定的导数条件，这类插值问题称为Hermite插值问题。

设已知函数 $f(x)$ 在 s 个互异点 $x_1,\ldots,x_s$ 处的函数值和导数值：

$$\begin{array}{l} f(x_1),\ f'(x_1),\cdots,\ f^{(\alpha_1-1)}(x_1); \\ f(x_2),\ f'(x_2),\cdots,\ f^{(\alpha_2-1)}(x_2); \\ \quad\cdots \qquad\quad \cdots \qquad\quad \cdots \\ f(x_s),\ f'(x_s),\cdots,\ f^{(\alpha_s-1)}(x_s), \end{array}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为正整数，有 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=n+1$，构造一个 n 次多项式 $p_n(x)$，使其满足插值条件：

$$p_n^{(\mu_i)}(x_i)=f^{(\mu_i)}(x_i)=y_i^{(\mu_i)},\ i=1,2,\cdots,s;\ \ \mu_i=0,1,\cdots,\alpha_i-1。$$

构造方法

采用类似于构造Lagrange插值基函数的方法解决Hermite插值问题

构造一批 n 次多项式 $L_{i,k}(x),\ i=1,2,\cdots,s;\ k=0,1,\cdots,\alpha_i-1,$

使这些多项式满足条件:

$$L_{i,k}^{(h)}(x_m)=0,\quad m\neq i,\quad h=0,1,\cdots,\alpha_m-1;$$

$$L_{i,k}^{(h)}(x_i)=\begin{cases}0, & h\neq k,\\ 1, & h=k。\end{cases}$$

只要上述问题一解决，则n次多项式

$$p_n(x)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1}y_i^{(k)}L_{i,k}(x)=\sum_{i=1}^{s}[y_iL_{i,0}(x)+y_i^{(1)}L_{i,1}(x)+\cdots y_i^{(\alpha_i-1)}L_{i,\alpha_i-1}(x)]$$

必满足插值条件。

例题

例： $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_s=1$ 的情形。

此时相应的插值问题就是通常的Lagrange插值， 插值多项式

就是以 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 为节点的不超过 s-1 次Lagrange插值多项式

$$p_{s-1}(x)=\sum_{i=1}^{s} y_i \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} 。$$

例题

例　$s=1, x_1=a,\ \alpha_1=\alpha$的情形。　$a \mid f(a), f'(a), \cdots, f^{(\alpha-1)}(a)$

设　$$p_{\alpha-1}(x)=f(a)L_0(x)+f'(a)L_1(x)+\cdots+f^{(\alpha-1)}(a)L_{\alpha-1}(x)$$

解

$L_0(a)=1$	$L_1(a)=0$	$\cdots$	$L_{\alpha-1}(a)=0$
$L'_0(a)=0$	$L'_1(a)=1$	$\cdots$	$L'_{\alpha-1}(a)=0$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$L_0^{(\alpha-1)}(a)=0$	$L_1^{(\alpha-1)}(a)=0$	$\cdots$	$L_{\alpha-1}^{(\alpha-1)}(a)=1$
$\Downarrow$	$\Downarrow$		$\Downarrow$
$L_0(x)=1$	$L_1(x)=x-a$		$L_{\alpha-1}(x)=\dfrac{(x-\alpha)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$

所求的插值多项式

$$p_{\alpha\text{-}1}(x)=\sum_{i=0}^{\alpha-1} f^{(i)}(a)L_{1,k}(x)=\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$ 恰为 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近的Taylor多项式。

例题

构造二点三次Hermite插值多项式，插值条件为：

$$H_3(x_k)=f(x_k) \qquad H_3'(x_k)=f'(x_k) \qquad (k=1,2)$$

设：$H_3(x)=f(x_1)L_{1,0}(x)+f(x_2)L_{2,0}(x)+f'(x_1)L_{1,1}(x)+f'(x_2)L_{2,1}(x)$

其中 $L_{1,0}(x),L_{1,1}(x),L_{2,0}(x),L_{2,1}(x)$ 为插值基函数。满足：

$$L_{1,0}(x_1)=1 \qquad L_{1,0}(x_2)=L_{1,0}'(x_1)=L_{1,0}'(x_2)=0$$

$$L_{1,1}'(x_1)=1 \qquad L_{1,1}(x_1)=L_{1,1}(x_2)=L_{1,1}'(x_2)=0$$

$$L_{2,0}(x_2)=1 \qquad L_{2,0}(x_1)=L_{2,0}'(x_1)=L_{2,0}'(x_2)=0$$

$$L_{2,1}'(x_2)=1 \qquad L_{2,1}(x_1)=L_{2,1}'(x_1)=L_{2,1}(x_2)=0$$

以 $L_{1,0}(x)$ 为例计算之，$L_{1,1}(x),L_{2,0}(x),L_{2,1}(x)$ 同理。

由于$L_{1,0}(x)$为三次多项式，又 $L_{1,0}(x_2)=L'_{1,0}(x_2)=0$，故应有

$$L_{1,0}(x)=(x-x_2)^2(ax+b)$$

$$L'_{1,0}(x)=2\cdot(x-x_2)\,(ax+b)+a\cdot(x-x_2)^2$$

又由于 $L_{1,0}(x_1)=1, L'_{1,0}(x_1)=0$，进一步有，

$$(x_1-x_2)^2(ax_1+b)=1 \Rightarrow ax_1+b=\frac{1}{(x_1-x_2)^2}$$

$$2\cdot(ax_1+b)+a\cdot(x_1-x_2)=0 \Rightarrow a=\frac{-2}{(x_1-x_2)^3}$$

代入上式得， $b=\dfrac{3x_1-x_2}{(x_1-x_2)^3}$

那么，

$$L_{1,0}(x)=\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2\left\{1-\frac{2(x-x_1)}{(x_1-x_2)}\right\}$$

同理有:

$$L_{1,1}(x) = \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2 (x-x_1),$$

$$L_{2,0}(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2 \left(1-2\frac{x-x_2}{x_2-x_1}\right)$$

$$L_{2,1}(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2 (x-x_2)$$

两点三次Hermite插值误差估计

插值余项

设 $f(x)\in C^3[a,b]$，在 (a,b) 内4阶可导，又设 $a\le x_1<x_2\le b$，

则两点三次Hermite插值多项式误差估计式为：

$$f(x)-p_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_1)^2(x-x_2)^2,\quad x\in[a,b]$$

其中 $\min(x_1,x_2)<\xi<\max(x_1,x_2)$。

分段低次插值

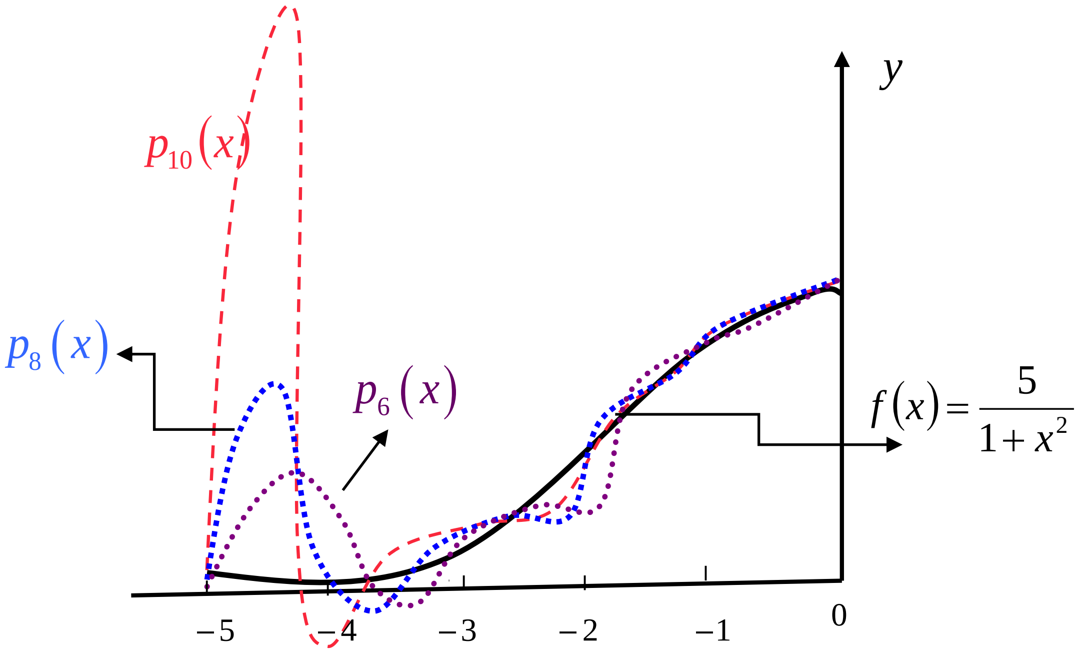
利用插值法构造近似函数时，为了提高逼近精度，经常需要增加插值节点，加密插值节点会使插值函数与被插值函数在更多节点上的取值相同，那么误差是否会随之减小呢?

答案是否定的。原因在于插值节点增多导致插值多项式的次数增高，而高次多项式的振荡次数增多有可能使插值多项式在非节点处的误差变得很大。

例题

例：函数 $f(x)=\dfrac{5}{1+x^2}$ 在[-5,5]上构造n+1个等距节点：$x_k=-5+\dfrac{10}{n}k$

分别取 n=6、n=8 和 n=10作出插值多项式 $p_n(x)$ 逼近 $f(x)$。



等距节点高次插值多项式的Rung现象

插值函数的稳定性分析

$$f_i=\bar{f}_i+\delta_i$$

舍入误差为：

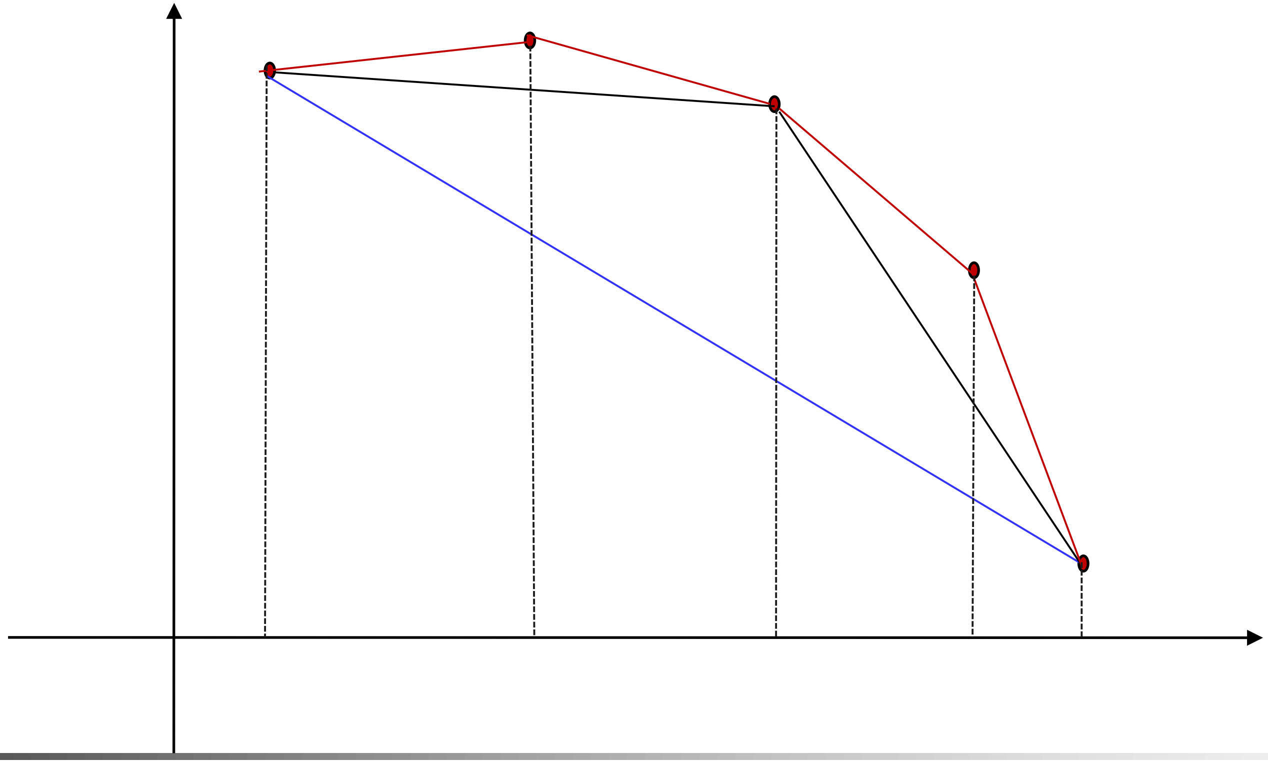
$$\max_{a\le x\le b}\left|\sum_{i=0}^{n} l_i(x)f_i-\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\bar{f}_i\right|$$

$$\le \max_{a\le x\le b}\left[\sum_{i=0}^{n}|l_i(x)|\right]\max_{1\le i\le n}\left|f_i-\bar{f}_i\right|$$

其中 $\max\limits_{a\le x\le b}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}|l_i(x)|\right)$随$n$增长

分段低次插值

为了克服高次插值多项式的上述弊端，通常采用分段低次插值的方法，即以插值节点为分点，将 $[a,b]$ 分成若干个小区间，并在每个小区间上进行低次的多项式插值。



分段线性插值

设插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 满足 $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ 在每一个区间 $[x_k, x_{k+1}](k = 0, 1, \ldots, n-1)$ 上做线性插值多项式

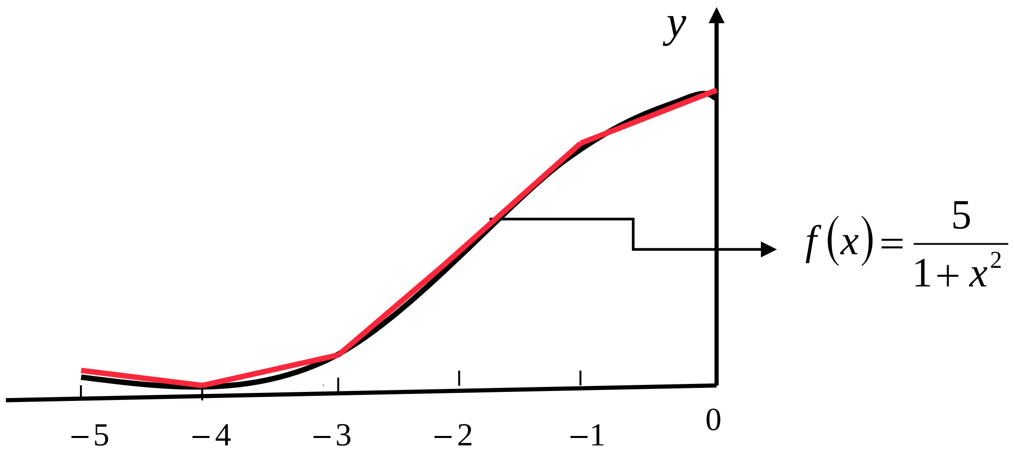
$$L_h^{(k)}(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}]。$$

令

$$L_h(x) = \begin{cases} L_h^{(0)}(x), & x \in [x_0, x_1], \\ L_h^{(1)}(x), & x \in [x_1, x_2], \\ \quad \ldots & \\ L_h^{(n-1)}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases} \qquad L_h(x_i) = y_i, i = 0, 1, \ldots, n$$

$L_h(x)$称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$上的分段线性插值多项式

$y=L_h(x)$ 的图形是平面上连接点 $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$ 的一条折线



分段多项式插值余项

若$f(x)$在$[a,b]$ 上二次可微，对任意 $x\in[x_k,x_{k+1}]$余项为：

$$R_1(x)=f(x)-L_h^{(k)}(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_k)(x-x_{k+1}),$$

从而

$$\max_{a\le x\le b}|R_1(x)|\le\frac{M_2}{2}|(x-x_k)(x-x_{k+1})|\le\frac{M_2}{8}h^2,$$

其中

$$M_2=\max_{a\le x\le b}|f''(x)|,h=\max_{0\le k\le n-1}h_k,\quad h_k=x_{k+1}-x_k$$

收敛性

收敛性定理

若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\lim\limits_{h\to 0} L_h(x)=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致成立。

求函数 $f(x)$在任意 $x\in[a,b]$ 处近似值:

若 $x\in[x_k,x_{k+1}]$，则以 $L_h^{(k)}(x)$ 作为 $f(x)$的近似值;

若 $x>x_n$，则以 $L_h^{(n-1)}(x)$ 作为 $f(x)$的近似值;

若 $x<x_0$，则以 $L_h^{(0)}(x)$ 作为 $f(x)$的近似值。

分段二次插值

当给定的函数表中节点的个数远多于3的时候，为了提高计算精度，或根据实际问题需要，有时采取分段二次插值法。

对于 $x\in[a,b]$ ，应选择靠近 X 的三个节点做二次插值多项式：

1、当 $x\in[x_k,x_{k+1}]$，且 X 偏向 x_k 时，选择 x_{k-1},x_k,x_{k+1} 作为插值节点；

2、当 $x\in[x_k,x_{k+1}]$，且 X 偏向 x_{k+1} 时，选择 x_k,x_{k+1},x_{k+2} 作为插值节点；

3、当 $x\in[x_0,x_1)$，或 $x<x_0$ 时，选择 x_0,x_1,x_2 作为插值节点；

4、当 $x\in(x_{n-1},x_n]$ 或 $x>x_n$ 时，选择 x_{n-2},x_{n-1},x_n 作为插值节点；

根据实际问题的需要，还可采用分段Hermite插值或样条插值方法。