函数矩阵的微积分

董波
数学科学学院
大连理工大学

主要内容

1、元素为函数的矩阵的微分和积分

2、数量函数对向量变量或矩阵变量的导数

3、向量值或矩阵值函数对向量变量或矩阵变量的导数

含参矩阵微分

元素为函数的矩阵微分

如果矩阵 $\mathbf{A}(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$ 的每一个元素 $a_{ij}(t)$ $i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$ 在$[a,b]$上均为变量t的可微函数，则称 $\mathbf{A}(t)$ 可微，且导数定义为

$$\boldsymbol{A}'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$$

例如

$$\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix} t+e^t & \sin t \\ t & 4 \end{pmatrix},\ \text{则}\ \boldsymbol{A}'(t)=\begin{pmatrix} 1+e^t & \cos t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求导法则

设$A(t)$、$B(t)$是可进行运算的两个可微矩阵，则

(1) $\left(\mathbf{A}(t)+\mathbf{B}(t)\right)'=\mathbf{A}'(t)+\mathbf{B}'(t)$

(2) $\left(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\right)'=\mathbf{A}'(t)\mathbf{B}(t)+\mathbf{A}(t)\mathbf{B}'(t)$

(3) $\left(\alpha\mathbf{A}(t)\right)'=\alpha\cdot\mathbf{A}'(t)$，其中$\alpha$为任意常数

(4) 当$A^{-1}(t)$为可微矩阵时，有$\left(\mathbf{A}^{-1}(t)\right)'=-\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{A}'(t)\mathbf{A}^{-1}(t)$

(5) 当$u=f(t)$关于t可微时，有$\left(\mathbf{A}(u)\right)'=f'(t)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathbf{A}(u)$

证：（2）设 $\mathbf{A}(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}(t)=\left(b_{ij}(t)\right)_{n\times p}$ 则

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)b_{kj}(t)\right)_{m\times p}=\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(a_{ik}(t)b_{kj}(t)\right)\right]\right)_{m\times p}$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(a_{ik}(t)\right)\cdot b_{kj}(t)+a_{ik}(t)\cdot\frac{d}{dt}\left(b_{kj}(t)\right)\right]\right]_{m\times p}$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\left(a_{ik}(t)\right)\right)\cdot b_{kj}(t)\right]_{m\times p}+\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\cdot\left(\frac{d}{dt}\left(b_{kj}(t)\right)\right)\right]_{m\times p}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t)\right)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}(t)$$

（4）由于$A(t)^{-1}A(t)=I$，两端对t求导得

从而 $\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\right)\boldsymbol{A}(t)=+-A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\left(A(t)\right)A^{-1}(t)=O(t)$

函数矩阵高阶导数

函数矩阵的**高阶导数**定义为

$$\frac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}t^{k}}\left(\boldsymbol{A}(t)\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}\left(\boldsymbol{A}(t)\right)\right)$$

注：$\left(A^{m}(t)\right)' = m\,A^{m-1}(t)\left(A(t)\right)'$ 不一定成立。$\boldsymbol{A}(t)\left(\boldsymbol{A}(t)\right)' \neq \left(\boldsymbol{A}(t)\right)'\boldsymbol{A}(t)$

例：$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix} t^{2} & t \\ 0 & t \end{pmatrix}$, $\left(\boldsymbol{A}(t)\right)' = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $2\boldsymbol{A}(t)\left(\boldsymbol{A}(t)\right)' = \begin{pmatrix} 4t^{3} & 2t^{2}+2t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}^{2}(t)=\begin{pmatrix} t^{4} & t^{3}+t^{2} \\ 0 & t^{2} \end{pmatrix}$, $\left(\boldsymbol{A}^{2}(t)\right)' = \begin{pmatrix} 4t^{3} & 3t^{2}+2t \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$,

事实上 $\left(\boldsymbol{A}^{2}(t)\right)' = \left(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}(t)\right)' = \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}'(t) \neq 2\boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{A}(t)$

特殊矩阵函数导数

设n阶方阵A与t无关，则有

(1) $\left(e^{t\mathbf{A}}\right)' = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{A}$

(2) $\left(\sin(t\mathbf{A})\right)' = \mathbf{A}\cdot\cos(t\mathbf{A}) = \cos(t\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}$

(3) $\left(\cos(t\mathbf{A})\right)' = -\mathbf{A}\cdot\sin(t\mathbf{A}) = -\sin(t\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}$

证： 只证(1)，(2, 3)的证明与(1)类似。

$$\frac{d\left(e^{tA}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\boldsymbol{A}^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{k!}\right)\boldsymbol{A}^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\boldsymbol{A}^k$$

$$= \boldsymbol{A}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\boldsymbol{A}^{k-1}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\boldsymbol{A}^{k-1}\right)\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}e^{tA} = e^{tA}\boldsymbol{A}$$

例题

例： 已知

$$e^{tA}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6e^{2t} & 4e^{2t}-3e^{t}-e^{-t} & 2e^{2t}-3e^{t}+e^{-t} \\ 0 & 3e^{t}+3e^{-t} & 3e^{t}-3e^{-t} \\ 0 & 3e^{t}-3e^{-t} & 3e^{t}+e^{-t} \end{pmatrix},$$

求A，并计算A的Jordan标准型。

利用 $\left(e^{tA}\right)'=Ae^{tA} \Longrightarrow \left(e^{tA}\right)'\Big|_{t=0}=A$

同理：

$$\left(\sin(tA)\right)'=A\cos(tA) \Longrightarrow \left(\sin(tA)\right)'\Big|_{t=0}=A$$

矩阵函数积分

如果矩阵 $\mathbf{A}(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$ 的每一个元素 $a_{ij}(t)$ 都是区间 $[t_0,t_1]$ 上的可积函数，则定义 $\mathbf{A}(t)$ 在区间 $[t_0,t_1]$ 上的积分为

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{A}(t)dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}$$

矩阵积分性质

（1） $\int_{t_0}^{t_1}\left(\alpha\boldsymbol{A}(t)+\beta\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})\right)dt=\alpha\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{A}(t)\,dt+\beta\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{B}(t)\,dt \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbf{C}$

（2） $\int_{t_0}^{t_1}\left(\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{B}\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{A}(t)\,dt\,\boldsymbol{B}$，　　其中$B$为常数矩阵；

$\int_{t_0}^{t_1}\left(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}(t)\right)dt=\boldsymbol{A}\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{B}(t)\,dt$，　　其中$A$为常数矩阵；

（3） 当$A(t)$在$[a,b]$上连续可微时，对任意 $t\in(a,b)$，有

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t\boldsymbol{A}(\tau)d\tau\right)=\boldsymbol{A}(t)$$

（4） 当$A(t)$在$[a,b]$上连续可微时，对任意 $t\in(a,b)$，有

$$\int_a^b\frac{d\left(\boldsymbol{A}(t)\right)}{dt}dt=\boldsymbol{A}(b)-\boldsymbol{A}(a)$$

相对于矩阵变量的微分

函数对矩阵求导

设 $\boldsymbol{X}=\left(x_{ij}\right)_{m\times n}$，函数 $f(\mathbf{X})=f(x_{11},x_{12},\cdots x_{1n},x_{21},\cdots,x_{mn})$ 为mn元的多元函数，且 $\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}}$ $(i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n)$ 都存在，定义 $f(X)$对矩阵X的导数为

$$\frac{d}{d\boldsymbol{X}}f(\mathbf{X})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{1n}}\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{mn}}\end{pmatrix}$$

例题

设 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)^T$，$n$元函数 $f(\boldsymbol{x})$，求 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^T}$，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$，和 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2}$。

解 根据定义有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^T}=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1},\frac{\partial f}{\partial \xi_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial \xi_n}\right)\qquad \nabla f(\boldsymbol{x})=\frac{\mathbf{d}f}{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial \xi_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi_n}\end{pmatrix}$$

梯度

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\frac{\mathbf{d}^2 f}{\mathbf{d}\boldsymbol{x}^2}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_1\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_1\partial \xi_n}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_2\partial \xi_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_2\partial \xi_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_n\partial \xi_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_n\partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi_n^2}\end{pmatrix}$$

Hessian阵

对称

例题

设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 为常向量，$\boldsymbol{x}=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$ 为向量变量，且 $f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$。

解：由于 $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$，$\dfrac{\partial f}{\partial \xi_j}=a_j$，$(j=1, 2, \cdots, n)$ 所以

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{a}$$

例题

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 为常矩阵，$X=\left(x_{ij}\right)_{n\times m}$ 为矩阵变量，且 $f(X)=\mathrm{tr}(AX)$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}}$。

分析:

$$\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

解：由于 $\boldsymbol{AX}=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}\right)_{m\times m}$，

所以 $f(X)=\mathrm{tr}(AX)=\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{sk}x_{ks}\right)$

而 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{n\times m}=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$

$(i=1,2,\cdots,n \quad j=1,2,\cdots,m)$，

故 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{n\times m}=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}=\boldsymbol{A}^T$

例题

设 $\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)^T$，$\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$， n元函数 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$。

解　因 $f(\mathbf{x})=\xi_1\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\xi_j+\cdots+\xi_k\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\xi_j+\cdots+\xi_n\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\xi_j$

所以 $$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \xi_k}=\xi_1a_{1k}+\ldots+\xi_{k-1}a_{k-1,k}+\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\xi_j+\xi_ka_{kk}\right)+\xi_{k+1}a_{k+1,k}+\ldots+\xi_na_{nk}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\xi_i+\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\xi_j,\quad k=1,2,\cdots,n$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial \xi_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\xi_j\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}\xi_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}\xi_j\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\xi_i\\ \sum_{i=1}^{n}a_{i2}\xi_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}a_{in}\xi_i\end{pmatrix}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{A}^T\mathbf{x}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\mathbf{x}$$

特别地，当A为对称矩阵时，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}=2A\mathbf{x}$

例题

例 设 $A\in \mathrm{R}^{m\times n}$，$b\in \mathrm{R}^{m}$，$x\in \mathrm{R}^{n}$，$f(x)=\|Ax-b\|_2^2$，试求 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

解：因为

$$f(x)=\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2^2=(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})$$

$$=\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{b}^T\right)(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})$$

$$=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}$$

$$=x^T\left(A^TA\right)x-2\left(A^Tb\right)^Tx+b^Tb$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=2A^TAx-2A^Tb=2\left(A^TAx-A^Tb\right)$$

一阶线性常系数齐次微分方程组

一阶线性常系数齐次微分方程组的定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t) \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t} = a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

给定初始条件: $x_i(0)$, $(i=1, 2, \cdots, n)$

记 $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)\in\mathbf{C}^{n\times n}$,

$$\boldsymbol{X}(0)=\left(x_1(0), x_2(0), \cdots, x_n(0)\right)^T$$

$$\boldsymbol{X}(t)=(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T,$$

则上述微分方程组可写成:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) \\ \boldsymbol{X}(0)=(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0))^T \end{cases}$$

解的存在性

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) \\ \boldsymbol{X}(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))^T \end{cases}$$

利用矩阵微分的性质有

$$\left(e^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}(t)\right)' = -e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{X}(t) + e^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}'(t) = e^{-\mathbf{A}t}\left(\boldsymbol{X}'(t) - \mathbf{A}\boldsymbol{X}(t)\right)$$

故 $\left(e^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}(t)\right)' = 0$,因此$X(t)=e^{At}C$，其中C为常数向量。

由初始条件，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{X}(0)$

$$\boldsymbol{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}(0)$$

解的唯一性

如果定解问题有两个解$X_1(t)$，$X_2(t)$，则令

$$Y(t)=X_1(t)-X_2(t),$$

满足

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}'(t) = \boldsymbol{X}'_1(t)-\boldsymbol{X}'_2(t) = A\boldsymbol{X}'_1(t)-A\boldsymbol{X}'_2(t) = \boldsymbol{AY}(t) \\ \boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{X}_1(0)-\boldsymbol{X}_2(0)=\boldsymbol{0} \end{cases}$$

类似推导可知，$\boldsymbol{Y}(t)=e^{At}\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{0}$，即$X_1(t)=X_2(t)$。

一阶线性常系数齐次微分方程组的定解问题有唯一解

$$X(t)=e^{At}X(0)$$

一阶线性常系数非齐次微分方程组

一阶线性常系数非齐次微分方程组的定解问题

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{F}(t) \\ \boldsymbol{X}(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0))^T \end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))^T$ 是已知向量函数，A和X意义同前。

解的存在性

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{F}(t) \\ \boldsymbol{X}(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0))^T \end{cases}$$

改写方程为

$$\left(e^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}(t)\right)' = e^{-\mathbf{A}t}\left[\boldsymbol{X}'(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)\right] = e^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{F}(t)$$

对此方程在$[t_0, t]$上进行积分，可得

$$e^{-\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}(t) - e^{-\mathbf{A}t_0}\boldsymbol{X}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

上述定解问题的解

$$\boldsymbol{X}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\boldsymbol{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

例题

例 求定解问题 $\begin{cases} \boldsymbol{X}'(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{X}(t) \\ \boldsymbol{X}(0) = (1,1,1)^T \end{cases}$ 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

解 $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$,

特征根为λ_1=0,λ_2=2,λ_3=3, 相应的三个线性无关的特征向量分别为:

$$\boldsymbol{X}_1 = (1,5,2)^T, \quad \boldsymbol{X}_2 = (1,1,0)^T, \quad \boldsymbol{X}_3 = (2,1,1)^T$$

故

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 9 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

所求的解为

$$\boldsymbol{X} = e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{3t} \end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{X}(0) = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1+3e^{2t}-8e^{3t} \\ -5+3e^{2t}-4e^{3t} \\ -2-4e^{3t} \end{pmatrix}$$

例题

例 求定解问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{F}(t) \\ \boldsymbol{X}(0)=(1,1,1)^T \end{cases}$ 的解，其中矩阵A如上例 $\boldsymbol{F}(t)=(0,0,e^{2t})^T$

解 该问题的解为 $\boldsymbol{X}(t)=e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{X}(0)+\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\boldsymbol{F}(\tau)= \boldsymbol{T}e^{[\boldsymbol{J}(t-\tau)]}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{F}(\tau)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{2(t-\tau)} & \\ & & e^{3(t-\tau)} \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 9 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2\tau} \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -e^{2\tau}+9e^{2t}-8e^{3t-\tau} \\ -5e^{2\tau}+9e^{2t}-4e^{3t-\tau} \\ -2e^{2\tau}-4e^{3t-\tau} \end{pmatrix}。$$

对变量τ 从0到t进行积分，即得

$$\boldsymbol{P}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+(9t+\frac{15}{2})e^{2t}-8e^{3t}\\ \frac{5}{2}+(9t+\frac{3}{2})e^{2t}-4e^{3t}\\ 1+3e^{2t}-4e^{3t}\end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{X}(t)=e^{At}\boldsymbol{X}(0)+\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{X}(t)=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+(9t+\frac{21}{2})e^{2t}-16e^{3t}\\ -\frac{5}{2}+(9t+\frac{9}{2})e^{2t}-8e^{3t}\\ -1+3e^{2t}-8e^{3t}\end{pmatrix}$$