特殊矩阵的特征系统

董波
数学科学学院
大连理工大学

Schur分解

Schur分解

设 $A \in C^{n\times n}$ ，则存在酉阵$U \in C^{n\times n}$ 使得

$$A = URU^H$$

其中 $R \in C^{n\times n}$ 为上三角矩阵。

- R 的对角元可以按任意给定的顺序排列，R 通常称为A的Schur标准型。
- Schur定理还可以表示为：任意n阶方阵酉相似于一个以其特征值为对角元的上三角矩阵R。

正规矩阵

正规矩阵

设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，若 $A^H A = AA^H$，则称A为**正规矩阵**

复情形		实情形	
Hermite阵：	$A^H = A$	实对称矩阵：	$A^T = A$
斜Hermite阵：	$A^H = -A$	实反对称矩阵：	$A^T = -A$
酉 阵:	$A^H A = AA^H = I$	正交矩阵:	$A^T A = AA^T = I$

正规矩阵的Schur标准型

A为正规矩阵，即

$$A^H A = AA^H \Rightarrow \left(URU^H\right)^H URU^H = URU^H \left(URU^H\right)^H$$

$$\Rightarrow \cancel{U}R^H \cancel{U^H U} R\cancel{U}^H = \cancel{U}R\cancel{U^H U}R^H \cancel{U}^H$$

$$\Rightarrow \quad R^H R = RR^H$$

R为正规矩阵。

上三角阵R正规矩阵 $\Longleftrightarrow$ R为对角矩阵。

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^H=\begin{pmatrix} \bar{r}_{11} & & & \\ \bar{r}_{12} & \bar{r}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{r}_{1n} & \bar{r}_{2n} & \cdots & \bar{r}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^H\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} |r_{11}|^2 & * & \cdots & * \\ * & |r_{22}|^2+|r_{12}|^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \sum_{i=1}^{n}|r_{in}|^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^H=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}|r_{1i}|^2 & * & \cdots & * \\ * & \sum_{i=2}^{n}|r_{2i}|^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & |r_{nn}|^2 \end{pmatrix}$$

$$|r_{11}|^2=|r_{11}|^2+|r_{12}|^2+\cdots+|r_{1n}|^2 \Rightarrow r_{1j}=\bar{r}_{1j}=0, \quad j=2,\cdots,n$$

$$|r_{12}|^2+|r_{22}|^2=|r_{22}|^2+|r_{23}|^2+\cdots+|r_{2n}|^2 \Rightarrow r_{2j}=\bar{r}_{2j}=0, \; j=3,\cdots,n$$

即R为对角矩阵。

$$r_{ij}=\bar{r}_{ij}=0, \; 1\le i<j\le n。$$

Hermite矩阵的Schur标准型

Hermite矩阵的Schur标准型为n阶对角阵

A为Hermite矩阵

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^H$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{UDU}^H=\left(\boldsymbol{UDU}^H\right)^H=\boldsymbol{UD}^H\boldsymbol{U}^H$$

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{D}^H=\boldsymbol{D}$,D的对角元均为实数

推论

n阶方阵A为Hermite矩阵

$\Longleftrightarrow$ 存在n阶酉阵U，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UDU}^H$$

其中$D\in \mathrm{R}^{n\times n}$ 为实对角矩阵

斜Hermite矩阵的Schur标准型

斜Hermite矩阵的Schur标准型为n阶对角阵

A为斜Hermite矩阵

$$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{H}$$

$$\boldsymbol{UDU}^{H}=-\left(\boldsymbol{UDU}^{H}\right)^{H}=-\boldsymbol{UD}^{H}\boldsymbol{U}^{H}$$

$\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{D}^{H}$,$D$的对角元为纯虚数

推论

n阶方阵A为斜Hermite矩阵

$\Longleftrightarrow$存在n阶酉阵U，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UDU}^{H}$$

其中$D\in\mathbb{C}^{n\times n}$为纯虚对角阵

酉矩阵的Schur标准型

酉矩阵的Schur标准型为n阶对角阵

A为酉矩阵

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{AA^H} = \boldsymbol{A^H} A = I$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{DD^H} = \boldsymbol{D^H D = I}$$

$$\Downarrow$$

$|d_i| = 1$,D的对角元模为1

推论

n阶方阵A为酉矩阵

$\Longleftrightarrow$ 存在n阶酉阵U，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{UDU}^H$$

其中$D \in \mathbb{C}^{n\times n}$为对角元模为1的对角阵

正规矩阵性质

设 A为n阶方阵， 则

A为正规矩阵 $\Longleftrightarrow$ 存在n阶酉阵U，使得$A = UDU^H$，
其中D为对角矩阵。

A为Hermite矩阵 $\Longleftrightarrow$ 存在n阶酉阵U，使得$A = UDU^H$
其中 D为实对角矩阵。

A为斜Hermite矩阵 $\Longleftrightarrow$ 存在n阶酉阵U，使得$A = UDU^H$
其中D为对角阵，且对角元为纯虚数

A为酉阵 $\Longleftrightarrow$ 存在n阶酉阵U，使得$A = UDU^H$，
其中D为对角阵，其对角元的模为1

矩阵的基本分类

一般矩阵 $\supset$ 可对角化矩阵

$\supset$ 正规矩阵

$\supset$ Hermite阵 $\supset$ 实对称矩阵

斜Hermite阵 $\supset$ 实反对称矩阵

酉阵 $\supset$ 正交矩阵

在正规矩阵的集合中，

特征值均为实数的子集为Hermite矩阵的集合;

矩阵的特征值的模均为1的子集为酉阵的集合。

证明 Schur不等式:

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$

其中 λ_i 为A的特征值, 并且Schur不等式等号成立的充分必要条件是A为正规矩阵。

证: 根据Schur定理,存在n阶酉阵U使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{URU}^H$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\|\boldsymbol{A}\|_F^2=\|\boldsymbol{URU}^H\|_F^2=\|\boldsymbol{R}\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}|r_{ij}|^2\ge\sum_{i=1}^{n}|r_{ii}|^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$$

要使得等号成立,只需 $r_{ij}=0, 1\le i<j\le n$ 即D为n阶对角阵,则由推论可知其充分必要条件是A为正规矩阵。