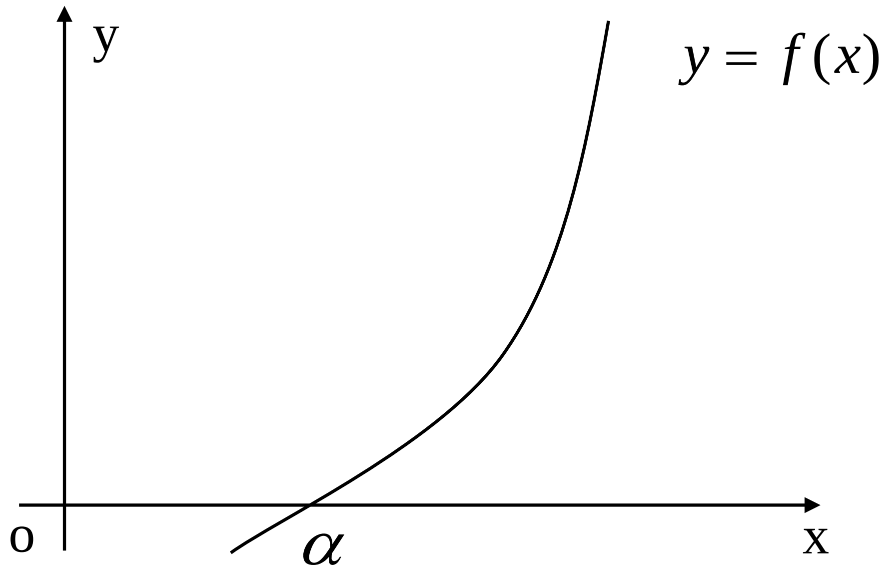
非线性方程迭代解法

董波
数学科学学院
大连理工大学

主要内容

代数： 对于非线性方程 $f(x)=0$ 求数 α，使 $f(\alpha)\equiv 0$.

几何： 求 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点 α



根、零点

对于非线性方程 $f(x)=0$，若数 α 满足 $f(\alpha)\equiv 0$，则称 α 为方程的根，或称函数 $f(x)$ 的零点。

有根区间

如果 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上仅有一个根，则称 $[a,b]$ 为方程的单根区间；

若方程在 $[a,b]$ 上有多个根，则称 $[a,b]$ 为方程的多根区间。

方程的单根区间和多根区间统称为方程的有根区间。

主要研究方程在单根区间上的求解方法。

简单迭代法构造

将方程 $f(x)=0$ 化为一个与它同解的方程

$$x=\varphi(x)$$

其中 $\varphi(x)$ 为 x 的连续函数。

$$\alpha\equiv\varphi(\alpha) \Longleftrightarrow f(\alpha)\equiv 0$$

任取一个初始值 x_0 代入右端得到 $x_1=\varphi(x_0)$

再将 x_1 代入右端得到 $x_2=\varphi(x_1)$

继为之，得到一个数列,其一般表示形式为

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

迭代法收敛

简单迭代法

称 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 为求解非线性方程的简单迭代法，也称迭代法或迭代过程或迭代格式，$\varphi(x)$ 称为迭代函数，x_k 称第 k 步的迭代值或简称迭代值。

迭代法收敛

如果由迭代格式产生的数列收敛，即

$$\lim_{k\to\infty} x_k=\alpha$$

则称迭代法收敛，否则称迭代法发散。

若迭代法收敛于 α ，则有

$\alpha=\varphi(\alpha) \Longleftrightarrow f(\alpha)\equiv 0$ 则 α 就是方程的根。

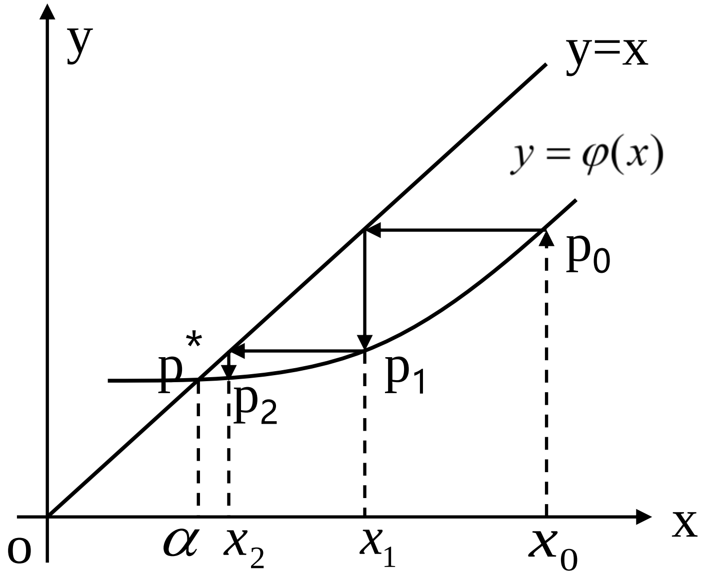
迭代法几何直观

在曲线 $y=\varphi(x)$ 上得到点列 $P_1, P_2, \cdots$ ，其纵坐标分别为由公式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

所确定的迭代值 $x_1, x_2, \cdots$

若迭代法收敛 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\alpha$，则点列 $P_1, P_2, \cdots$ 将越来越逼近所求的交点 $P(\alpha)=P^*$。



例题

用迭代法求 $f(x)=2x^3-x-1=0$ 的根。

解：化方程为等价方程

$$x=2x^3-1=\varphi(x)$$

取初始值 $x_0=0$，则迭代值为

$$x_1=2\times 0-1=-1$$

$$x_2=2(-1)^3-1=-3$$

$$x_3=2(-3)^3-1=-55$$

$$x_k\to-\infty$$

迭代法发散。

化方程为等价方程

$$x=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}=\varphi(x)$$

取初始值 $x_0=0$，则迭代值为

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx 0.79 \qquad x_2=\sqrt[3]{\frac{1+0.79}{2}}\approx 0.964$$

$$x_3=\sqrt[3]{\frac{1+0.964}{2}}\approx 0.994$$

$$x_k\to 1$$

$x=1$ 就是方程 $f(x)=0$ 的根。

迭代法的收敛与发散，依赖于迭代函数的构造

迭代函数构造的方法很多

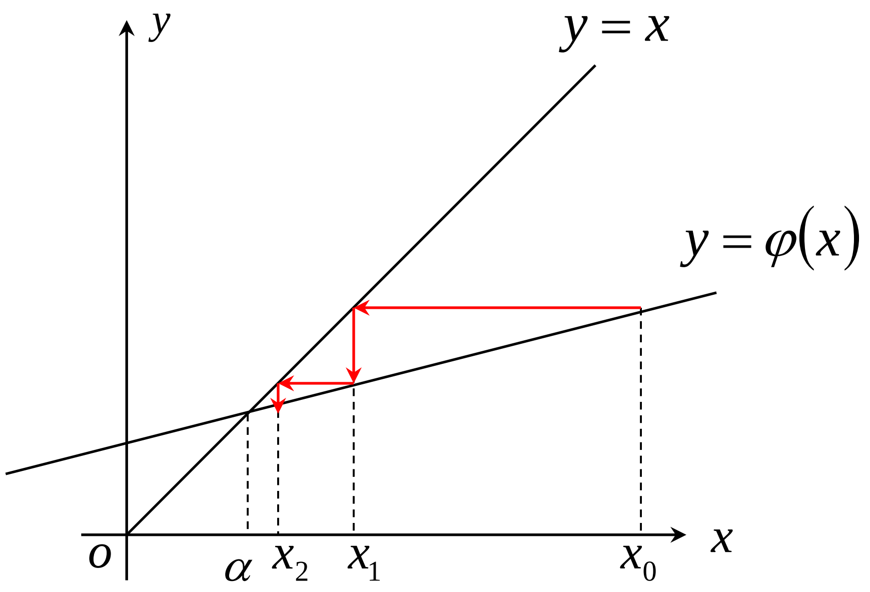
例如，$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=x\pm f(x)$$
$$\Leftrightarrow x=x\pm k(x)f(x)$$

迭代函数

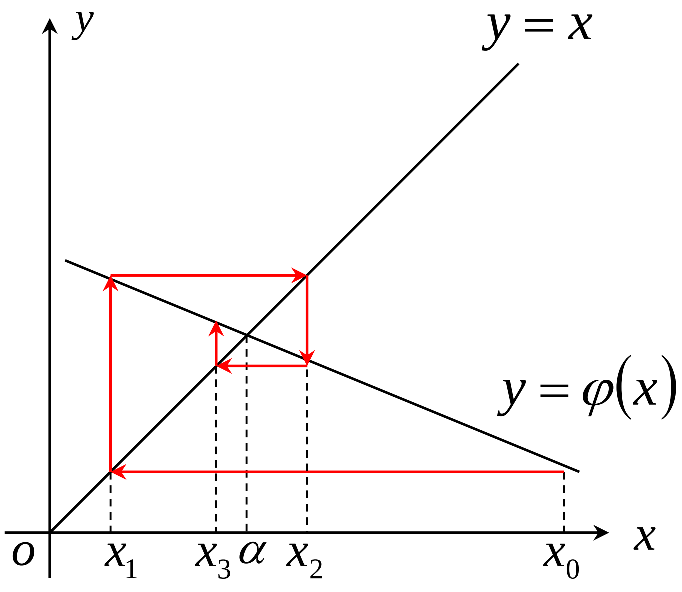
$$\varphi(x)=x\pm f(x)$$
$$\varphi(x)=x\pm k(x)f(x) \quad (k(x)\neq 0)$$

迭代函数须满足什么条件，迭代法才能收敛?

迭代法收敛性几何表示



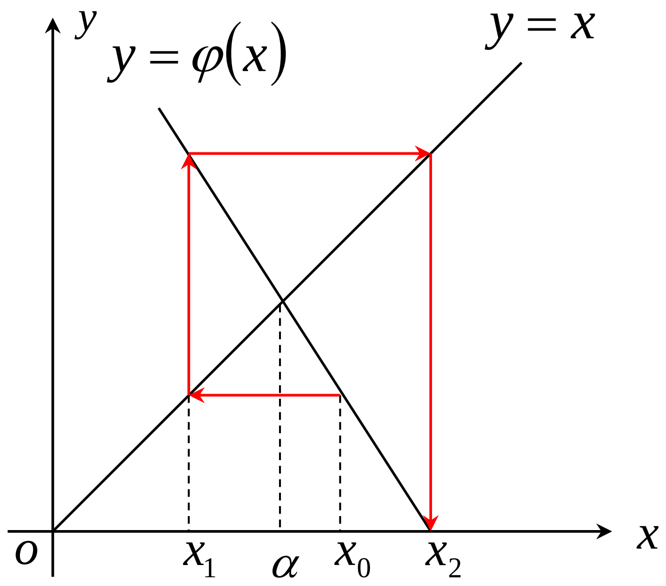
$0<\varphi'(x)<1$



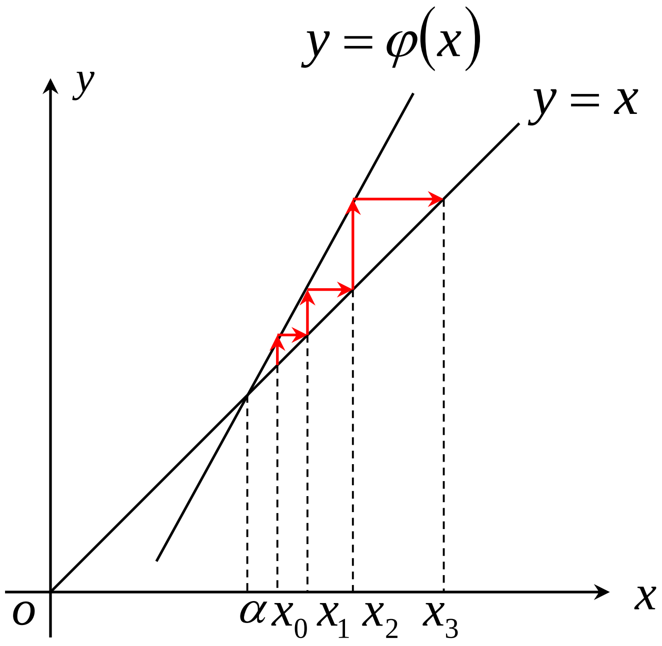
$-1<\varphi'(x)<0$

迭代函数满足条件：$|\varphi'(x)|<1$ 时,迭代法收敛

迭代法收敛性几何表示



$\varphi'(x) < -1$



$1 < \varphi'(x)$

当 $\varphi'(x) < -1$ 或 $1 < \varphi'(x)$ 时,迭代法发散

收敛性定理

设迭代函数 $\varphi(x)$ 满足

(1) 当 $x\in[a,b]$ 时，$a\le\varphi(x)\le b$

(2) 存在正数 $0<L<1$ ，对任意 $x\in[a,b]$ 均有

$$|\varphi'(x)|\le L$$

难以验证

则 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在唯一根 α，且对任意初始值 $x_0\in[a,b]$，迭代法

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

收敛于 α，且

$$|x_k-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

迭代法收敛依据I

L 较小

相邻两次计算值的偏差 $|x_k - x_{k-1}| \le \delta$ （事先给定的精度）

迭代过程就可以终止，x_k 就可作为 α 的近似值。

L 的大小可作出估计时，估计所需要的迭代次数

$$|x_k - \alpha| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow k \ge \log_L \frac{\delta(1-L)}{|x_1 - x_0|}$$

迭代法收敛依据II

使用迭代法时往往在根 α 的附近进行

假定 $\varphi'(x)$ 在 α 的附近连续且满足：

$$|\varphi'(\alpha)|<1$$

则一定存在 α 的某个邻域 $S:|x-\alpha|\le\delta$，$\varphi(x)$ 在S上 满足定理3.5的条件。

故在S中任取初始值 x_0，迭代格式

$$x_k=\varphi(x_{k-1})$$

收敛于方程的根 α，即 $f(\alpha)\equiv 0$，称此收敛为局部收敛.

例题

求方程 $x=e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的一个根，要求精度 $\delta=10^{-3}$。

解　由于 $\varphi'(x)=(e^{-x})'=-e^{-x}$，故当 $x\in[0.4,0.6]$ 时，

$$|\varphi'(x)|=|-e^{-x}|=e^{-x}\le e^{-0.4}\le 0.68<1$$

因此，迭代格式 $x_{k+1}=e^{-x_k}$，对于初始值 $x_0=0.5$ 是收敛的。

迭代停止条件

$$|x_k-x_{k-1}|\approx\frac{1-L}{L}\delta=\frac{1-0.61}{0.61}\times10^{-3}=0.64\times10^{-3}$$

迭代的数值结果表

k	x_k	e^{-x_k}	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$
0	0.5	0.606531	0.106531
1	0.606531	0.545239	0.061292
2	0.545239	0.579703	0.034464
3	0.579703	0.560065	0.019638
4	0.560065	0.571172	0.011107
5	0.571172	0.564863	0.006309
6	0.564863	0.568439	0.003576
7	0.568439	0.566409	0.002030
8	0.566409	0.567560	0.001151
9	0.567560	0.566907	0.000653
10	0.566907	0.567277	0.000370

误差估计式

$$|x_k-\alpha|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

L或 $|\varphi'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的值越小，迭代的收敛速度就越快。

$L<1$ 且接近于1时，迭代法虽然收敛,但收敛速度很慢。

为了使收敛速度有定量的判断，特介绍收敛速度的阶的概念，作为判断迭代法收敛速度的重要标准。

设迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，当 $k\to\infty$ 时，$x_{k+1}\to\alpha$ 记 $e_k=x_k-\alpha$

迭代法收敛阶

若存在实数 $p\geq 1$ 和 $c>0$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=c$$

则称迭代法是 p 阶收敛。当 $p=1$ 时，称线性收敛，当 $p>1$ 时称超线性收敛，当 $p=2$ 时称平方收敛。

- 收敛阶越大迭代法的收敛速度也越快
- 收敛阶难以直接确定
- 采用一些其他的方法来确定收敛阶（Taylor展开式）

收敛阶确定-Taylor展式法

如果 $\varphi(x)$ 在根 α 处充分光滑（各阶导数存在），则可对 $\varphi(x)$ 在 α 处进行Taylor展开，

$$x_{k+1}=\ \varphi(x_k)=\varphi(\alpha)+\varphi'(\alpha)(x_k-\alpha)+\frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(x_k-\alpha)^2$$

$$+\cdots+\frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_k-\alpha)^{p-1}+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-\alpha)^p$$

如果 $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0$ ，但是 $\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$，则

$$x_{k+1}-\varphi(\alpha)=x_{k+1}-\alpha=$$

即 $$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{|\phi^{(p)}(\xi_k)|}{p!}=\frac{|\phi^{(p)}(\alpha)|}{p!}$$

上式说明迭代法具有 p 阶收敛

收敛阶判定定理

P阶收敛

如果 $x=\varphi(x)$ 中的迭代函数 $\varphi(x)$ 在根 α 附近满足:

(1) $\varphi(x)$ 存在 p 阶导数且连续;

(2) $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0, \varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$,

则迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 是 p 阶收敛。

例题

例 取迭代函数 $\varphi(x)=x+\alpha(x^2-5)$ 要使迭代法收敛到 $x^*=\sqrt{5}$，则 α 应取何值？且其收敛阶是多少？

解： $|\varphi'(x)|=|1+2\alpha x|$ 令

$$|\varphi'(\sqrt{5})|=|1+2\alpha\sqrt{5}|<1 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}}<\alpha<0$$

当 $\alpha=-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ 时， $\varphi'(\sqrt{5})=0$ 其收敛阶 $p=2$

当 $\alpha\neq-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ 时， $0\neq|\varphi'(\sqrt{5})|<1$ 其收敛阶 $p=1$

例题

设 $f(x)=0$ 且 $f(\alpha)\equiv 0,\ f'(\alpha)\neq 0$,证明由

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x)$$

建立的迭代格式至少是平方收敛。

证 只需证明 $\varphi'(\alpha)=0$。因为

$$\varphi'(\alpha)=\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]'_{x=\alpha}=\left[1-\frac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right]_{x=\alpha}=\left[\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right]_{x=\alpha}=0$$

故该迭代法至少是平方收敛。

迭代法构造

非线性方程　　　　　　　　　　迭代函数

$f(x)=0$　　　　$x=\varphi(x)=x-k(x)f(x) \quad (k(x)\neq 0)$

$|\varphi'(x)|$ 在根 α 附近越小，　其局部收敛速度越快，

$$\varphi'(\alpha)=1-k'(\alpha)f(\alpha)-k(\alpha)f'(\alpha)=1-k(\alpha)f'(\alpha)=0$$

若 $f'(\alpha)\neq 0$（即不是的重根），　则 $k(\alpha)=\dfrac{1}{f'(\alpha)}$

取 $k(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$ 得

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Newton迭代法

Newton迭代格式

设方程 $f(x)=0$ 的根为 α，且 $f'(\alpha)\neq 0$ ，则迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

至少是平方收敛，并称该迭代格式为Newton迭代法。

割线法

为了避免求导数，利用导数的近似式替代 $f'(x)$

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

将它代入Newton迭代格式得

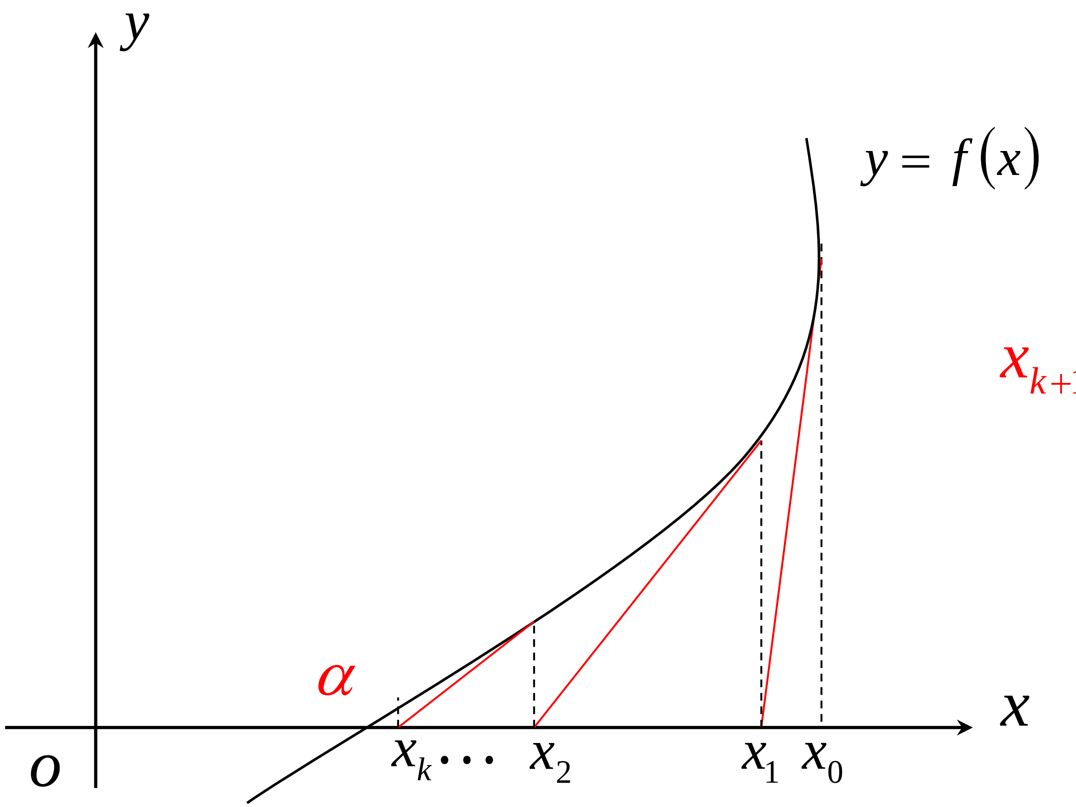
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\left[\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right]} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

割线法

则 $x_{k+1} =$

收敛阶为 $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ **超线性收敛**，低于Newton法

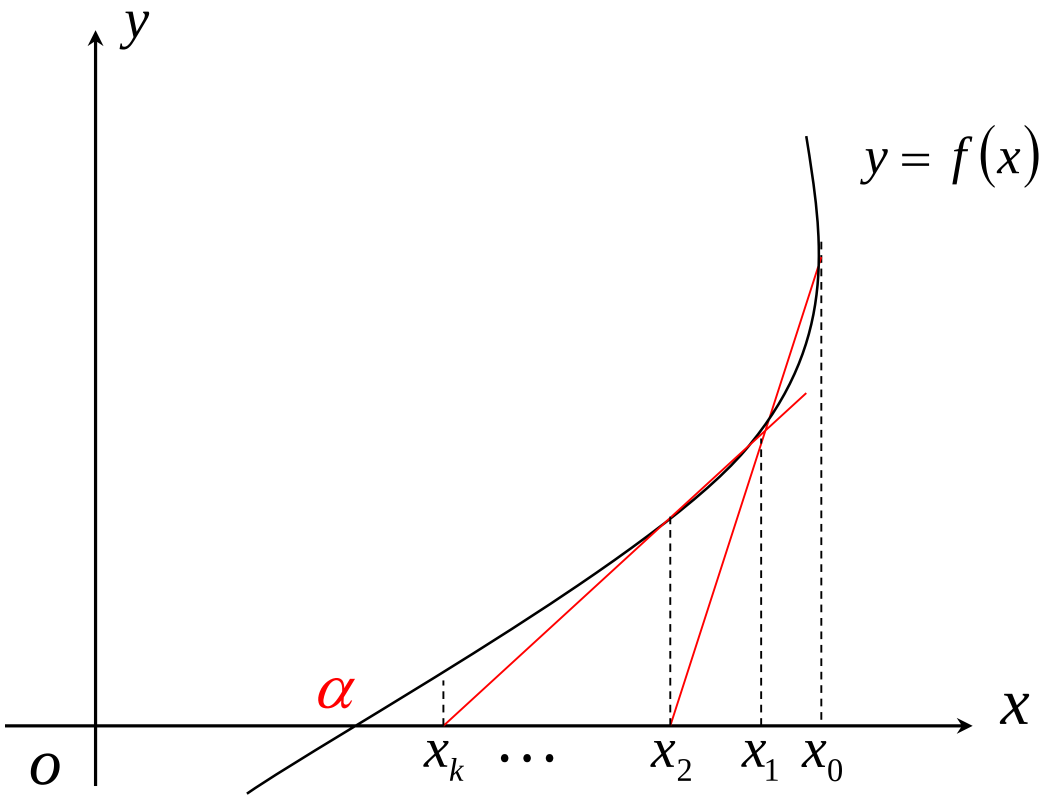
Newton 迭代法的几何意义



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

使用Newton迭代格式，就是过曲线上的点 x_k 作切线与 X 轴的交点即为 x_{k+1}，故Newton法也称切线法。

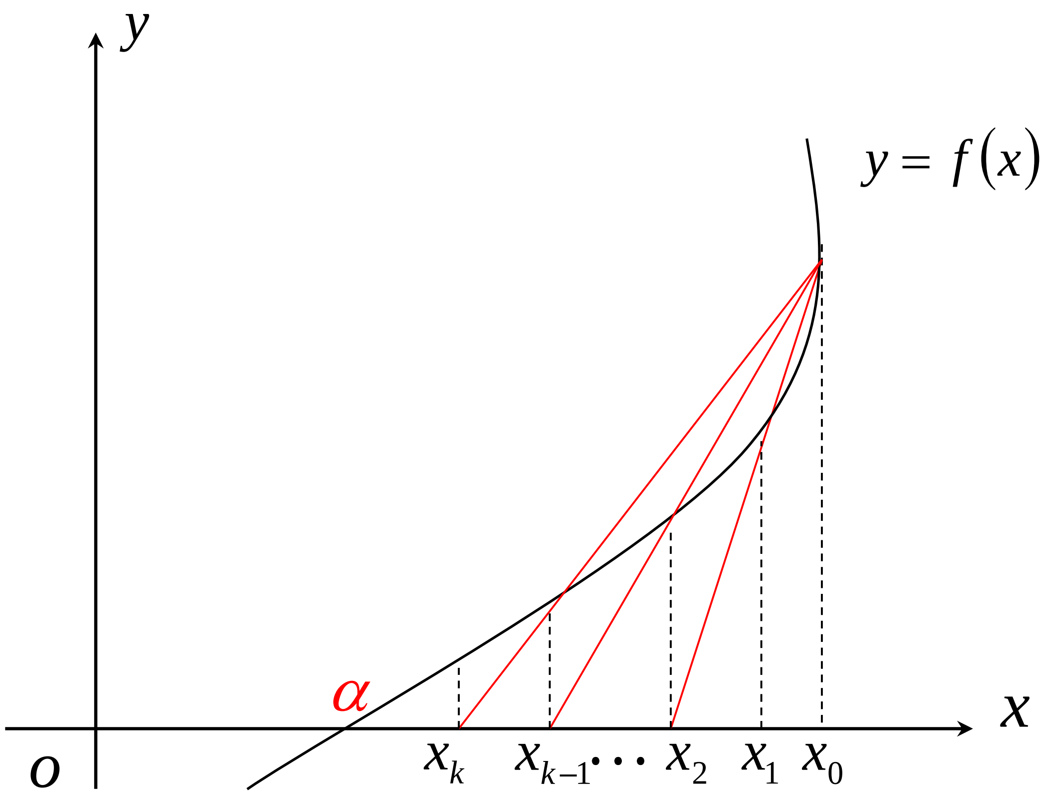
割线法的几何意义



$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1}) f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

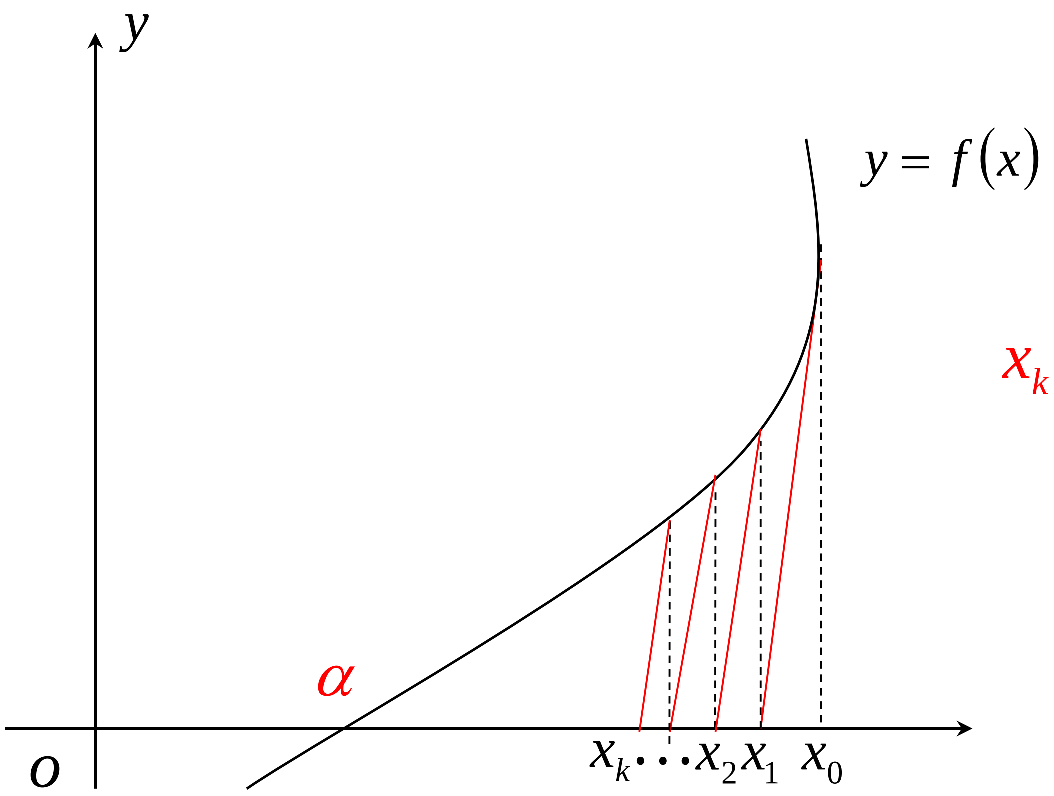
在几何上是一种以直代曲的近似方法。即用弦来替代曲线用在轴上截取的值，即弦与 x 轴的交点 x_k 作为 α 的近似值，故称弦截法。

单步弦截法的几何意义



$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_0)\,f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}$$

平行线法的几何意义



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

从Newton和弦截法的迭代格式中可以看到，

弦截法不需要求导数值，需要有两个初始值，收敛速度慢

Newton需要求导数值，只需要一个初始值，收敛速度快

初始点需要在真实解附近选择

多根区间上的逐次逼近法

方程 $f(x)=0$在多根区间 $[a,b]$ 上，根的情况主要有两种：

1、均为单根。

- 寻找单根区间
- 对每个单根区间求根

2、有重根。

- 寻找单根区间
- 对每个单根区间快速求根

仅有单根的多根区间

1）求单根区间　设 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有 m 个根。

1、将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[b_0,b_1],[b_1,b_2],\cdots,[b_{n-1},b_n]$

2、计算 $f(b_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的值

若 $f(b_i)\cdot f(b_{i+1})<0$，$f(x)=0$ 在 $[b_i,b_{i+1}]$ 上至少有一个根。

3、若有根区间的个数为 m，则所得到的有根区间就都是单根区间

若有根区间的个数小于 m，再将小区间对分，计算在对分点处函数值，再搜索有根区间，直到有根区间的个数是 m 为止。

2）在单根区间 $[c,d]$ 上求根

二分法基本思想：

将区间 $[c,d]$ 对分，对分点为 $x_0=\frac{1}{2}(c+d)$，计算 $f(x_0)$

若 $f(x_0)$ 与 $f(c)$ 同号，令 $x_0=c_1, d=d_1$

若 $f(x_0)$ 与 $f(c)$ 异号，令 $c=c_1, x_0=d_1$

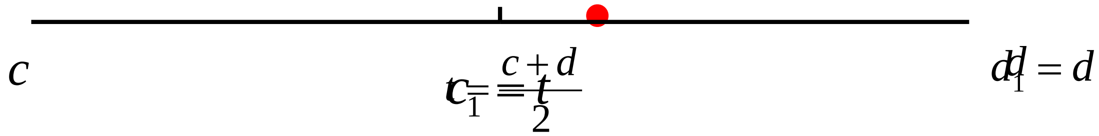
新的有根区间 $[c_1,d_1]$ 为其长度为原来区间的一半

继续下去，有根区间为 $[c_n,d_n]$，其长度为 $d_n-c_n=\frac{1}{2^n}(d-c)$

d_n-c_n 达到根的精度要求，

$x_n=\frac{1}{2}(d_n+c_n)$ 就可作为根 α 的近似值。

问题



$$f(c)\cdot f(t) > 0 \qquad f(d)\cdot f(t) < 0$$

$$[c, d] \supset [c_1, d_1] \supset \cdots \supset [c_n, d_n]$$

$$|x - \alpha| < \frac{d - c}{2^n}$$

二分法作用：

1、用于求方程的近似根。有根区间趋于零的速度较慢

2、可用于求迭代法的初始值：从某个区间 $[c_i,d_i]$ 开始使用其他迭代法求解，将 c_i 或 d_i 作为迭代法的初始值。

3、是一种好的并行算法。

例题

例：求 $f(x)=x^3-11.1x^2+38.79x-41.769=0$ 在[0 ,8]中的三个根。

解

1、将有根区间[0，8]三等分，得

$[0, 2.7]\quad [2.7, 5.4]\quad [5.4, 8]$

2、搜索单根区间：

$[0,2.7]\quad f(0)\cdot f(2.7)=(-41.768)\cdot(1.728)<0$

$[2.7,5.4]\quad f(2.7)\cdot f(5.4)=(1.728)\cdot(1.485)>0$

$[5.4,8]\quad f(5.4)\cdot f(8)=(1.485)\cdot(70.151)>0$

$[0,1.3]\quad f(0)\cdot f(1.3)=(-41.768)\cdot(-7.904)>0$

$[1.3,2.7]\quad f(1.3)\cdot f(2.7)=(-7.904)\cdot(1.728)<0$

$[2.7,4]\quad f(2.7)\cdot f(4)=(1.7)\cdot(-0.209)<0$

$[4,5.4]\quad f(4)\cdot f(5.4)=(-0.2)\cdot(1.4)<0$

3、用单根算法，求[1.3, 2.7],[2.7, 4], [4, 5.4]上的根。

重根的改进的Newton法

设 α 是 $f(x)=0$ 的 m 重根，其中$m\geqslant 2$整数，则有

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x)\qquad 且g(\alpha)\neq 0$$

此时 $f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0,\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0$

由 $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$ 且$g(\alpha)\neq 0$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{(x-\alpha)^m g(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x)}$$

线性收敛

则

$$\varphi'(x)=1-\frac{g(x)}{m\cdot g(x)+(x-\alpha)g'(x)}-(x-\alpha)\cdot\left[\frac{g(x)}{m\cdot g(x)+(x-\alpha)g'(x)}\right]'$$

$$\varphi'(\alpha)=1-\frac{g(\alpha)}{m\cdot g(\alpha)+0}=1-\frac{1}{m}\neq 0$$

为了提高收敛的阶，可取 $\varphi(x)=x-m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 从而 $\varphi'(\alpha)=1-\dfrac{m}{m}=0,$

故新迭代法至少是平方收敛的。

例题

例7 求方程 $f(x)=x^4-4x^2+4=0$ 二重根 $\sqrt{2}$ 的计算值。

解

(1) 使用Newton法

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=x_k-\frac{x_k^4-4x_k^2+4}{4x_k^3-8x_k}=x_k-\frac{x_k^2-2}{4x_k}$$

(2) 使用

$$x_{k+1}=x_k-2\frac{x_k^2-2}{4x_k}=x_k-\frac{x_k^2-2}{2x_k}$$

上述两种方法都取初始值 $x_0=1.5$，计算结果见下表。

1	1.453333	1.416667
2	1.436607	1.414216
3	1.425498	1.414214

方法（2）的收敛速度较方法（1）快