

# 特殊矩阵的特征系统

董波

数学科学学院

大连理工大学



# Schur分解

## Schur分解

设  $A \in C^{n \times n}$ ，则存在酉阵  $U \in C^{n \times n}$  使得

$$A = URU^H$$

其中  $R \in C^{n \times n}$  为上三角矩阵。

- $R$  的对角元可以按任意给定的顺序排列， $R$  通常称为  $A$  的 **Schur标准型**。
- Schur定理还可以表示为：任意  $n$  阶方阵酉相似于一个以其特征值为对角元的上三角矩阵  $R$ 。

# 正规矩阵

## 正规矩阵

设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，若  $A^H A = A A^H$ ，则称  $A$  为正规矩阵

### 复情形

Hermite阵:  $A^H = A$

斜Hermite阵:  $A^H = -A$

酉阵:  $A^H A = A A^H = I$

### 实情形

实对称矩阵:  $A^T = A$

实反对称矩阵:  $A^T = -A$

正交矩阵:  $A^T A = A A^T = I$

# 正规矩阵的Schur标准型

$A$ 为正规矩阵, 即

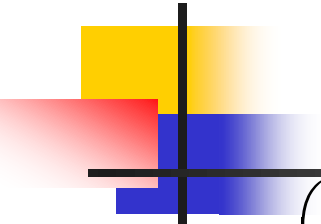
$$A^H A = A A^H \Rightarrow (URU^H)^H URU^H = URU^H (URU^H)^H$$

$$\Rightarrow \cancel{U} R^H \cancel{U}^H \cancel{U} R \cancel{U}^H = \cancel{U} R U^H \cancel{U} R^H \cancel{U}^H$$

$$\Rightarrow R^H R = R R^H$$

$R$ 为正规矩阵。

上三角阵 $R$ 正规矩阵  $\iff R$ 为对角矩阵。



$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}^H = \begin{pmatrix} \bar{r}_{11} & & & \\ \bar{r}_{12} & \bar{r}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{r}_{1n} & \bar{r}_{2n} & \cdots & \bar{r}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^H \mathbf{R} = \begin{pmatrix} |r_{11}|^2 & * & \cdots & * \\ * & |r_{22}|^2 + |r_{12}|^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \sum_{i=1}^n |r_{in}|^2 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \mathbf{R}^H = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n |r_{1i}|^2 & * & \cdots & * \\ * & \sum_{i=2}^n |r_{2i}|^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & |r_{nn}|^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |r_{11}|^2 &= |r_{11}|^2 + |r_{12}|^2 + \cdots + |r_{1n}|^2 \Rightarrow r_{1j} = \bar{r}_{1j} = 0, \quad j = 2, \cdots, n \\ |r_{12}|^2 + |r_{22}|^2 &= |r_{22}|^2 + |r_{23}|^2 + \cdots + |r_{2n}|^2 \Rightarrow r_{2j} = \bar{r}_{2j} = 0, \quad j = 3, \cdots, n \\ r_{ij} &= \bar{r}_{ij} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

即  $\mathbf{R}$  为对角矩阵。

# Hermite矩阵的Schur标准型

Hermite矩阵的Schur标准型为 $n$ 阶对角阵

$A$ 为Hermite矩阵



$$A = A^H$$



$$UDU^H = (UDU^H)^H = UD^H U^H$$



$D^H = D$ ,  $D$ 的对角元均为实数

推论

$n$ 阶方阵 $A$ 为Hermite矩阵

↔ 存在 $n$ 阶酉阵 $U$ , 使得

$$A = UDU^H$$

其中 $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为实对角矩阵

# 斜Hermite矩阵的Schur标准型

斜Hermite矩阵的Schur标准型为 $n$ 阶对角阵

$A$ 为斜Hermite矩阵



$$A = -A^H$$



$$UDU^H = -(UDU^H)^H = -UD^H U^H$$



$D = -D^H$ ,  $D$ 的对角元为纯虚数

推论

$n$ 阶方阵 $A$ 为斜Hermite矩阵

↔ 存在 $n$ 阶酉阵 $U$ , 使得

$$A = UDU^H$$

其中 $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为纯虚对角阵

# 酉矩阵的Schur标准型

酉矩阵的Schur标准型为 $n$ 阶对角阵

$A$ 为酉矩阵



$$AA^H = A^H A = I$$



$$DD^H = D^H D = I$$



$|d_i| = 1$ ,  $D$ 的对角元模为1

推论

$n$ 阶方阵 $A$ 为酉矩阵

↔ 存在 $n$ 阶酉阵 $U$ , 使得

$$A = UDU^H$$

其中 $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为对角元模为1的对角阵



# 正规矩阵性质

设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则

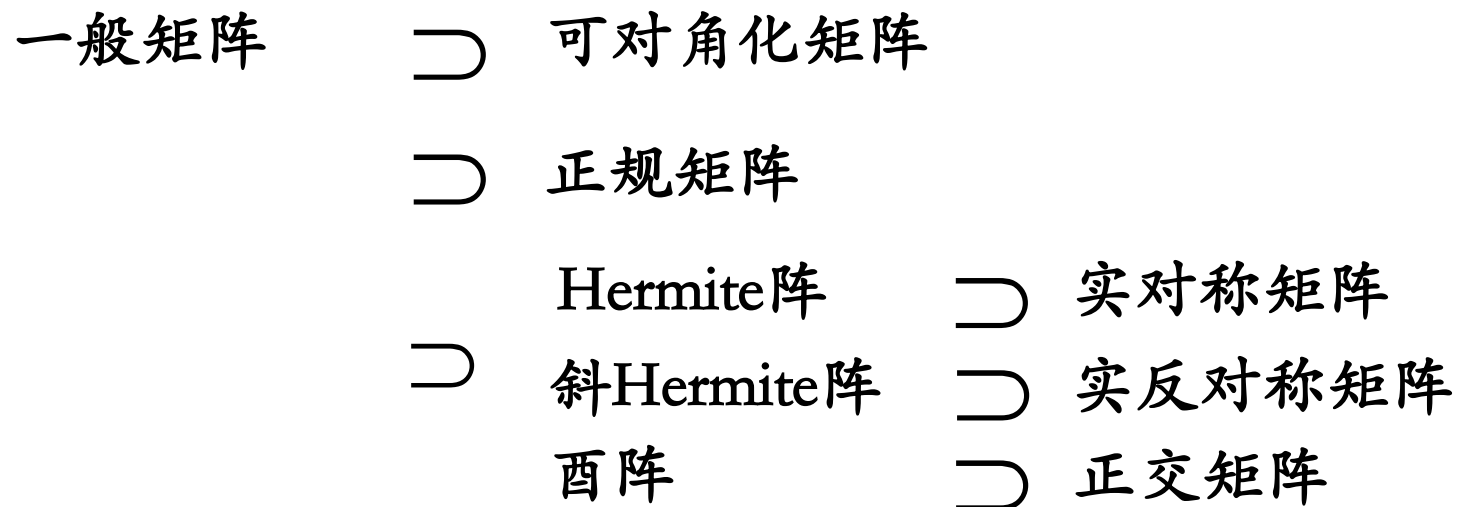
$A$  为正规矩阵  $\iff$  存在  $n$  阶酉阵  $U$ , 使得  $A = UDU^H$ ,  
其中  $D$  为 **对角矩阵**。

$A$  为 Hermite 矩阵  $\iff$  存在  $n$  阶酉阵  $U$ , 使得  $A = UDU^H$   
其中  $D$  为 **实对角矩阵**。

$A$  为斜 Hermite 矩阵  $\iff$  存在  $n$  阶酉阵  $U$ , 使得  $A = UDU^H$   
其中  $D$  为对角阵, 且对角元为 **纯虚数**

$A$  为酉阵  $\iff$  存在  $n$  阶酉阵  $U$ , 使得  $A = UDU^H$ ,  
其中  $D$  为对角阵, 其 **对角元的模为 1**

# 矩阵的基本分类



在正规矩阵的集合中，

特征值均为实数的子集为Hermite矩阵的集合；  
矩阵的特征值的模均为1的子集为酉阵的集合。



证明 Schur不等式:

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$$

其中  $\lambda_i$  为  $A$  的特征值, 并且Schur不等式等号成立的充分必要条件是  $A$  为正规矩阵。

证: 根据Schur定理, 存在  $n$  阶酉阵  $U$  使得  $A = URU^H$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \|A\|_F^2 = \|URU^H\|_F^2 = \|R\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |r_{ij}|^2 \geq \sum_{i=1}^n |r_{ii}|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$$

要使得等号成立, 只需  $r_{ij} = 0, 1 \leq i < j \leq n$  即  $D$  为  $n$  阶对角阵, 则由推论可知其充分必要条件是  $A$  为正规矩阵。

---