插值函数的应用

董波
数学科学学院
大连理工大学

主要内容

基于插值公式的数值积分

数值求积公式及其代数精度

复化求积公式

Gauss型求积公式

为什么要数值积分

由 Newton-Leibniz公式，连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b)-F(a)$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$的原函数。对大多数问题，N-L公式无法使用。

- $F(x)$不能用初等函数表示，即 $f(x)$找不到的原函数;

$$f(x)=\frac{1}{\ln x} \qquad f(x)=\frac{\sin x}{x} \qquad f(x)=e^{-x^2} \qquad f(x)=\frac{1}{1-k^2\sin^2 x}$$

- $f(x)$没有解析表达式，用表格方式给出时;
- 大多数的无穷积分，除特殊的无穷积分外;
- 虽然找到$f(x)$的原函数，但是它比被积函数复杂的多，例

$$\int \frac{x^2}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}\ dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{1-x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}+c$$

问题描述

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可积函数，考虑带权积分

$$I(f)=\int_a^b \rho(x)\,f(x)\,dx$$

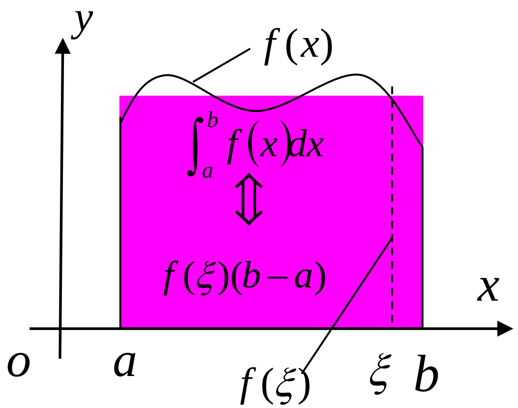
其中权函数 $\rho(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积，且至多有有限个零点。

数值积分公式产生的背景

第一积分中值定理：

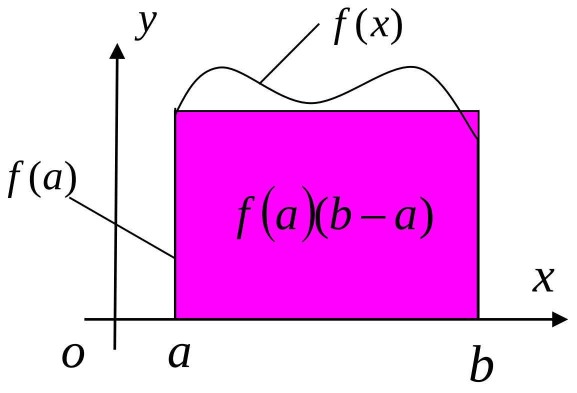
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \quad \xi \in (a,b)$$

但是的具体位置不可确定。



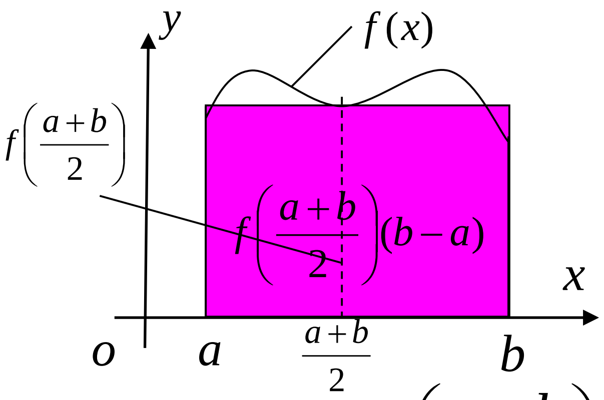
曲边梯形 $\int_a^b f(x)dx$ 面积

矩形 $f(\xi)(b-a)$ 的面积



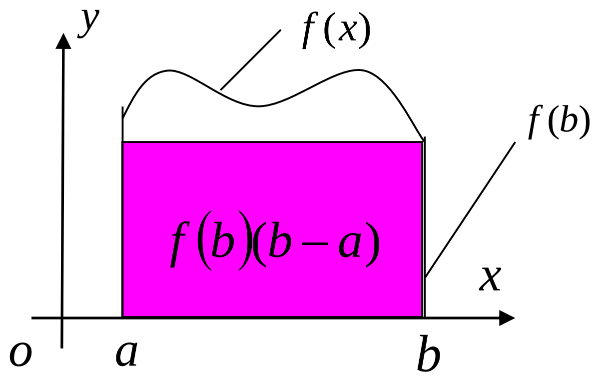
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(a)(b-a)$$

左矩形数值求积公式



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

中矩形数值求积公式



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(b)(b-a)$$

右矩形数值求积公式

数值求积

所谓**数值求积**就是用

求积系数

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

数值求积公式

近似计算 $I(f)$ 的值。其中 A_k $(k=0,1,\cdots,n)$ 是与 $f(x)$ 无关的常数，称为求积系数，$[a,b]$ 上的点 x_k $(k=0,1,\cdots,n)$ 称为求积节点。

求积节点

基本思想

权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 的情形 $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$

$$f(x)=p_n(x)+r_n(x) \longrightarrow I(f)=I_n(f)+E_n(f)$$

本节采用的逼近函数是 $f(x)$ 在等距节点上的插值多项式，得到的数值求积公式称为插值型求积公式。

具体做法

插值节点（求积节点）

等距节点

$$x_k = a + k\,h\ (k = 0, 1, \cdots, n)。\ h = \frac{b-a}{n}$$

$f(x)$表示为它的 Lagrange插值多项式及其余项之和，即

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x) + r_n(x)$$

积分计算

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &= \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x)\right] dx + \int_a^b r_n(x)\ dx \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\int_a^b l_k(x)\ dx\right] f(x_k) + \int_a^b r_n(x)\ dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k\cdot f(x_k) + \int_a^b r_n(x)dx\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{\sum_{k=0}^{n} A_k \cdot f(x_k)} + \boxed{\int_a^b r_n(x)dx}$$

插值型求积公式

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k \cdot f(x_k)$$

称为 $n+1$ 点的Newton-Cotes公式，其中求积系数

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

求积余项

$$E_n(f) = \int_a^b r_n(x)\,dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)\,!}\, w_{n+1}(x)\,dx$$

标志着求积公式的误差大小。

常用的Newton-Cotes公式

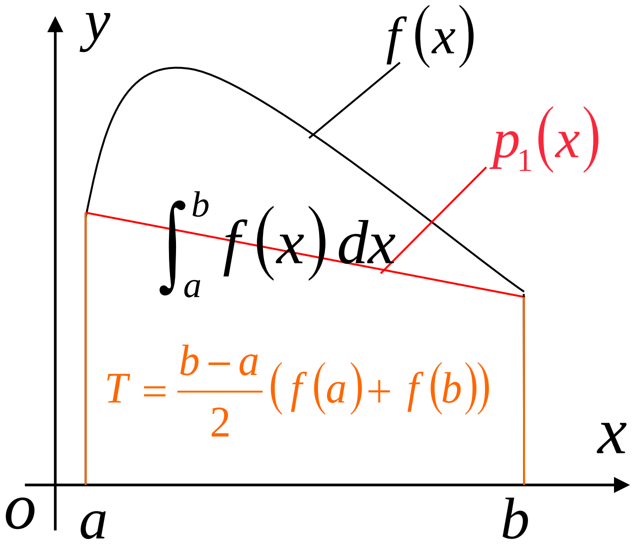
$n=1$

$$I_1(f)=A_0\ f(a)+A_1\ f(b)$$

有

$$A_0=\int_a^b l_0(x)dx=\int_a^b \frac{x-b}{a-b}dx=\frac{b-a}{2}$$

$$A_1=\int_a^b l_1(x)dx=\int_a^b \frac{x-a}{b-a}dx=\frac{b-a}{2}$$



$$I_1(f)=T=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

梯形求积公式

常用的Newton-Cotes公式

$n=2$

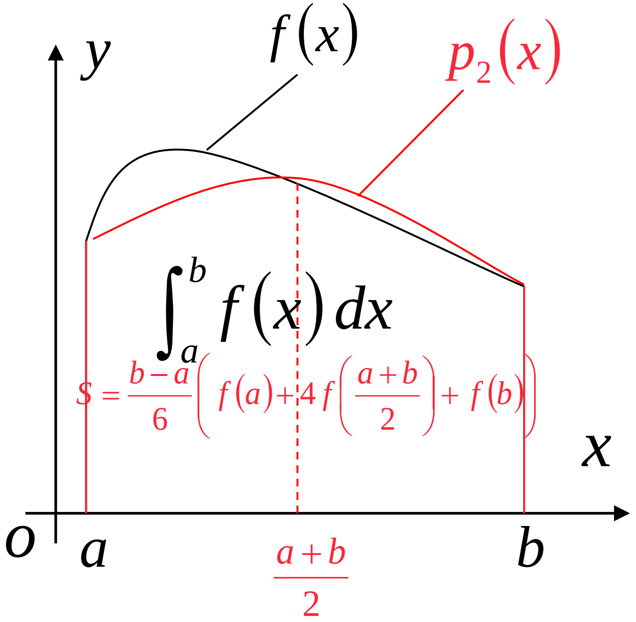
$$I_2(f)=A_0\,f(a)+A_1\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)+A_2\,f(b)$$

此时

$$A_0=\int_a^b l_0(x)dx=\int_a^b \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}dx=\frac{b-a}{6}$$

$$A_1=\int_a^b l_1(x)dx=\int_a^b \frac{(x-a)\ (x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}dx=\frac{2(b-a)}{3}$$

$$A_2=\int_a^b l_2(x)\,dx=\int_a^b \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}dx=\frac{b-a}{6}$$



$$I_2(f)=S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Simpson求积公式

常用的Newton-Cotes公式

Cotes公式 $n=4$

$$I_4(f)=C=\frac{b-a}{90}\left[7f(a)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(b)\right]$$

Cotes求积公式

常用求积公式

梯形求积公式:

$$I_1(f) = T = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b) \right]$$

Simpson求积公式:

$$I_2(f) = S = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4 \times f\left(\frac{a+b}{2} \right) + f(b) \right]$$

Cotes求积公式

$$I_4(f) = C = \frac{b-a}{90}\left[7f(a) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(b) \right]$$

n+1点Newton-cotes公式求积系数的特点

等距节点的Lagrange插值基函数满足单位分解性

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$$

N-C公式的求积系数是对称的，并且满足“单位分解性”

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x)dx = \int_a^b 1dx = b-a$$

例题

练习题　用梯形求积公式和Simpson求积公式计算积分

$$I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

解：　由梯形求积公式:

$$T=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]=\frac{1}{2}\left[1+e^{-1}\right]$$

由Simpson求积公式:

$$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=\frac{1}{6}\left[1+4e^{-\frac{1}{4}}+e^{-1}\right]$$

求积公式评价标准I：代数精度

如果某个数值求积公式对比较多的函数能够准确成立，即

$$I_n(f) = I(f)$$

那么这个公式的使用价值就较大，可以说这个公式的精度较高．为衡量数值求积公式的精度，引进代数精度的概念。

代数精度判定

代数精度

若某数值求积公式对任何次数不超过m的代数多项式精确成立

$$I(p_m(x))=\int_a^b p_m(x)dx\equiv\sum_{k=0}^{n}A_k\cdot p_m(x_k)=I_n(p_m(x))$$

但对于 $m+1$ 次代数多项式不一定能准确成立，即

$$I(p_{m+1}(x))=\int_a^b p_{m+1}(x)dx\neq\sum_{k=0}^{n}A_k\cdot p_{m+1}(x_k)=I_n(p_{m+1}(x))$$

则称该求积公式具有 m 次代数精度.

数值求积公式具有 m 次代数精度的充要条件是它对

$f(x)=1,x,\cdots,x^m$ 都能准确成立，但对 x^{m+1}不能准确成立。

梯形求积公式代数精度

对于 $f(x)=1, x, x^2$，有

$$I(1)=\int_a^b 1\,dx = b-a = \frac{b-a}{2}(1+1) = I_1(1) = T$$

$$I(x)=\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b-a}{2}(a+b) = I_1(x) = T$$

$$I(x^2)=\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3} \neq \frac{b-a}{2}\left(a^2+b^2\right) = I_1(x^2) = T$$

故梯形数值求积公式具有1次代数精度。

Simpson求积公式代数精度

对于 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ ，有

$$I(1)=\int_a^b 1\,dx = b-a = \frac{b-a}{6}(1+4+1)=I_2(1)=S$$

$$I(x)=\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b-a}{6}\left(a+4\left(\frac{a+b}{2}\right)+b\right) = I_2(x)=S$$

$$I(x^2)=\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b-a}{6}\left(a^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2\right) = I_2(x^2)=S$$

$$I(x^3)=\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4} = \frac{b-a}{6}\left(a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right) = I_2(x^3)=S$$

而 $$I(x^4)=\int_a^b x^4\,dx = \frac{b^5-a^5}{5} \neq \frac{b-a}{6}\left(a^4+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+b^4\right) = I_2(x^4)=S$$

故Simposon数值求积公式具有3次代数精度。

求积公式评价标准II：求积余项

梯形公式的求积余项：

由于 $$f(x)=p_1(x)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b) \qquad \xi=\xi(x)\in[a,b]$$

$$E_1(f)=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)dx$$

因为 $(x-a)(x-b)$ 在 (a,b) 上恒为负(不变号)，由积分中值定理

$$E_1(f)=\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b (x-a)(x-b)dx \qquad \eta\in(a,b)$$

$$=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

Simpson公式的求积余项

由于 $f(x)=p_2(x)+f[a,x_1,b,x](x-a)(x-x_1)(x-b) \qquad x_1=\dfrac{a+b}{2}$

$$
\begin{aligned}
E_2(f) &= \int_a^b f[a,x_1,b,x](x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)dx \\
&= \int_a^b f[a,x_1,b,x](x-a)(x-b)\frac{1}{2}d(x-a)(x-b) \\
&= \int_a^b f[a,x_1,b,x]d\frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4} \\
&= \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4}f[a,x_1,b,x]\Big|_a^b - \int_a^b \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4}df[a,x_1,b,x]
\end{aligned}
$$

由于

$$\frac{df[a,x_1,b,x]}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[a,x_1,b,x+\Delta x]-f[a,x_1,b,x]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} f[a,x_1,b,x,x+\Delta x] = f[a,x_1,b,x,x]$$

因此

$$E_2(f) = -\int_a^b \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4} f[a,x_1,b,x,x]dx$$

因为 $\frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4}$ 在(a,b) 上恒为正，由积分中值定理

$$E_2(f) = -\frac{1}{4} f[a,x_1,b,\xi,\xi]\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 dx \qquad \eta\in(a,b)$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 dx = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\eta)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Newton-Cotes公式的求积余项

一般的n+1点Newton-Cotes公式的求积余项，有如下定理：

n 是偶数，且 $f(x)\in \mathbf{C}^{n+2}[a,b]$ ，则

$$E_n(f)=C_n h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

其中 $$C_n=\frac{1}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t$$

n 是奇数，且 $f(x)\in \mathbf{C}^{n+1}[a,b]$，则

$$E_n(f)=C_n h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

其中 $$C_n=\frac{1}{(n+1)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t.$$

代数精度是“粗”的误差估计

求积余项是“细”的误差估计

Newton-Cotes公式代数精度

当 n 为偶数时，$n+1$ 点的Newton-Cotes公式的代数精度为 $n+1$;

当 n 为奇数时，$n+1$ 点的Newton-Cotes公式的代数精度为 n。

n+1点Newton-Cotes公式至少有n次代数精度

梯形公式、Simpson公式及Cotes公式的代数精度分别为1，3，5.

$n=1 \quad \to m=1$ 梯形公式

$n=2 \quad \to m=3$ Simpson公式

$n=3 \quad \to m=3$

代数精度相等

$n=4 \quad \to m=5$ Cotes公式

$n=5 \quad \to m=5$

代数精度相等

例题

若

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), (n \geq 2)$$

为Newton-Cotes公式，则

$$\sum_{k=0}^{n} A_k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^3 =$$

Newton-Cotes公式的稳定性

舍入误差
（稳定性）

令 $$f(x_k)=\tilde{f}_k+\varepsilon_k$$

$$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)=\sum_{k=0}^{n}A_k\tilde{f}_k+\sum_{k=0}^{n}A_k\varepsilon_k$$

而 $$\left|\sum_{k=0}^{n}A_k\varepsilon_k\right|\le\max_{0\le k\le n}|\varepsilon_k|\cdot\sum_{k=0}^{n}|A_k|$$

N-C公式求积系数的绝对值和发散

高次N-C公式的稳定性差！

Newton-Cotes公式的收敛性

采用分段低次插值型求积公式

我们希望有 $\lim_{n\to\infty} E_n(f)=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} I_n(f) \cancel{=I}(f)$

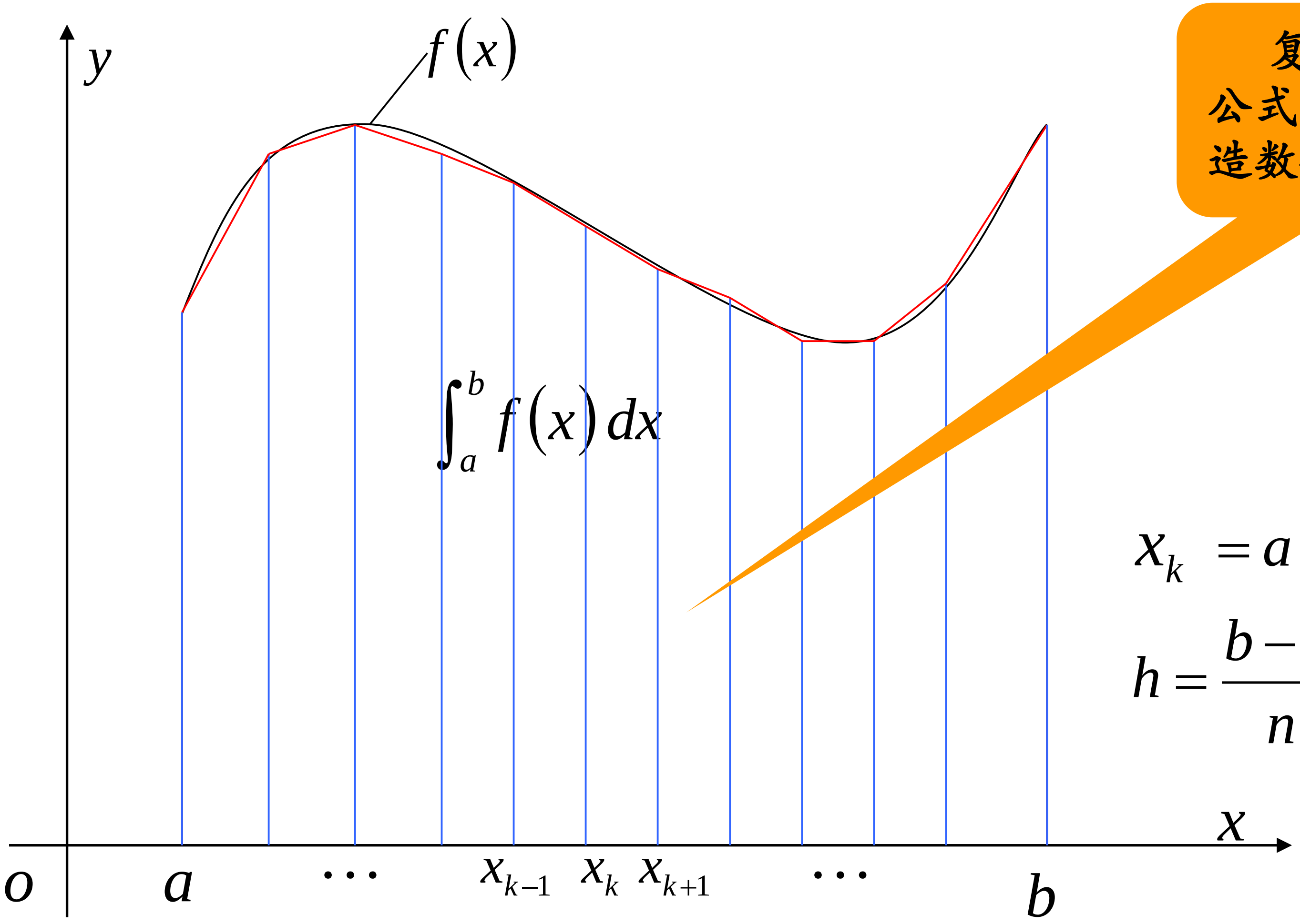
注意到 $I_n(f)=\int_a^b p_n(x)dx \qquad I(f)=\int_a^b f(x)dx$

不成立！

然而，多项式插值 $\lim_{n\to\infty} p_n(x)=f(x)$

分段低次插值解决收敛性问题

复化求积公式



复化求积公式：分段构造数值积分

$$x_k = a + k\,h$$

$$h = \frac{b-a}{n} \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

具体做法

- 将 $[a,b]$ 等分成若干个小区间

$$[x_k, x_{k+1}] \ (k=0,1,\cdots,n-1)$$

有

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

- 在每个小区间上用点数少的Newton-Cotes公式进行数值积分

这样得到的数值求积公式称为复化Newton-Cotes公式

复化梯形公式

将区间 $[a,b]$ 进行 n 等分，每个子区间的长度 $h=\dfrac{b-a}{n}$。

在每个子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 上用梯形求积公式

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]$$

则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})+\cdots+f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]=\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

由此可得复化梯形公式

$$T_n=\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

复化Simpson公式

如果在每个子区间$[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$上用Simpson公式，即

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}\left[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})\right]$$

$$=\frac{h}{6}\Big[f(x_0)+4f(x_{1/2})+f(x_1)+f(x_1)+4f(x_{3/2})+f(x_2)$$

$$+\cdots+f(x_{n-1})+4f(x_{n-1/2})+f(x_n)\Big]$$

可得复化Simpson公式

$$S_n=\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(b)\right]$$

复化Cotes公式

$$C_n = \frac{b-a}{90n}\left[7f(a) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 7f(b)\right]$$

复化求积公式余项估计

设 $f(x)\in C^2[a,b]$，复化梯形公式的余项：

$$I-T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{h^3}{12}f''(\eta_k)\right)=-\frac{nh^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f''(\eta_k)}{n}$$

利用
介值定理

$$=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

又由于

$$\lim_{h\to 0}\frac{I-T_n}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1}hf''(\eta_k)\right)=-\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx=\frac{-1}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

误差是2阶无
穷小

当n充分大时，

$$I-T_n\approx-\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

复化Simpson公式:

$$I-S_n=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta),\ \eta\in(a,b)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{I-S_n}{h^4}=-\frac{1}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4[f'''(b)-f'''(a)]$$

当n充分大时，$I-S_n\approx-\frac{1}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4[f'''(b)-f'''(a)]$

复化Cotes公式:

$$I-C_n=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

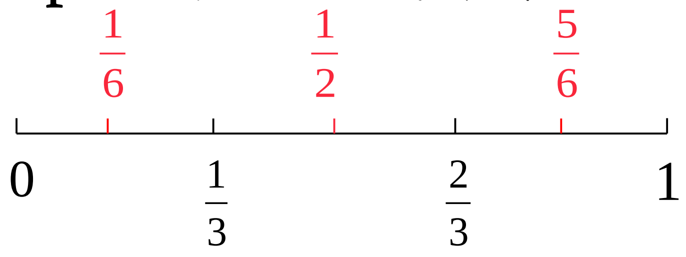
$$\lim_{h\to0}\frac{I-C_n}{h^6}=-\frac{2}{945}\left(\frac{1}{4}\right)^6[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)]$$

当n充分大时，$I-C_n\approx-\frac{2}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)]$

例题

练习题 用$n=3$复化梯形、复化Simpson求积公式计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$



解： 由复化梯形求积公式：

$$T_3=\frac{b-a}{2\times 3}\left[f(a)+2\times\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+f(b)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[1+2\times\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{2}\right]=\frac{21}{30}$$

由复化Simpson求积公式：

$$S_3=\frac{b-a}{6\times 3}\left[f(a)+2\times\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+4\times\left(f\left(x_{\frac{1}{2}}\right)+f\left(x_{\frac{3}{2}}\right)+f\left(x_{\frac{5}{2}}\right)\right)+f(b)\right]$$

$$=\frac{1}{18}\left[1+2\times\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right)+4\times\left(\frac{6}{7}+\frac{2}{3}+\frac{6}{11}\right)+\frac{1}{2}\right]=0.6931670$$