逐次逼近法

董波
数学科学学院
大连理工大学

主要内容

1、解线性方程组的古典迭代法

2、非线性方程的迭代解法

3、求矩阵模最大特征值的迭代解法

4、求解线性方程组的共轭梯度法

解线性方程组的迭代法

董波
数学科学学院
大连理工大学

主要内容

1、简单迭代法迭代格式

2、迭代法的收敛性

求解线性方程组:

$$Ax = b$$

其中 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}, b \in \mathbf{R}^n, x \in \mathbf{R}^n$

直接法:通过有限步四则运算求得问题的精确解	迭代法:设计迭代法则，从初始值出发求得问题的近似解
1、舍入误差得问题的近似解;	1、问题的近似解;
2、破坏问题的稀疏结构;	2、保持问题的稀疏结构
3、程序实现相对复杂;	3、程序设计相对简单
求解中小规模、稠密的线性方程组	如何构造收敛、快速的迭代公式

线性方程组变形

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$$

其中 $\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \boldsymbol{f} \in \mathbf{R}^{n}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n}$

迭代矩阵

迭代法

称使用

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

求解的方法为迭代法，也称迭代过程或迭代格式.

迭代法收敛、发散

如果对任意 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，都有 $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{*}$ 。即

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_i^{(k)} = \boldsymbol{x}_i^{*}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称该迭代法收敛，否则称迭代法发散.

具体迭代过程

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 代入 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}$ 的右端

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(0)}+\boldsymbol{f}$$
$$\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(1)}+\boldsymbol{f}$$
$$\boldsymbol{x}^{(3)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(2)}+\boldsymbol{f}$$

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f \Longrightarrow x^{*}=Bx^{*}+f \Longleftrightarrow Ax^{*}=b$$

使用迭代法求解就是求向量序列 $x^{(0)},x^{(1)},x^{(2)},\cdots$的极限向量

简单迭代法-方程组变形

线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

等价方程组

$a_{ii} \neq 0$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n\right) \\ \vdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n\right) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}\right) \end{cases}$$

Jacobi迭代法 $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

例题

例　求解线性方程组 $\begin{cases} 8x_1-3x_2+2x_3=20 \\ 4x_1+11x_2-x_3=33 \\ 2x_1+x_2+4x_3=12 \end{cases}$

解：写成Jacobi迭代格式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{11}(33-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(12-2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}) \end{cases}$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$

$$x_1^{(1)}=\frac{20}{8} \qquad x_2^{(1)}=\frac{33}{11}=3 \qquad x_3^{(1)}=\frac{12}{4}=3$$

$$x_1^{(2)}=\frac{1}{8}(20+3\times3-2\times3)\approx 2.875 \qquad x_2^{(2)}=\frac{1}{11}\left(33+4\times\frac{20}{8}+3\right)\approx 2.3636 \qquad x_3^{(2)}=\frac{1}{4}\left(12-2\times\frac{20}{8}-3\right)\approx 1$$

$$\cdots$$

$$x_1^{(10)}\approx 3.00032 \qquad x_2^{(10)}\approx 1.999838 \qquad x_3^{(10)}\approx 0.999881$$

终止条件为：$\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|\le 10^{-5}$　精确解为：$x^*=(3,2,1)^T$。

Seidel技巧

在Jacobi迭代过程中，对已经算出来的信息未加充分利用，

在计算 $x_2^{(k+1)}$ 时 $x_1^{(k+1)}$ 已经算出

在计算 $x_i^{(k+1)}$ 时 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 已经算出。

一般说来，后面的计算值 $x_i^{(k+1)}$ 比前面的计算值 $x_i^{(k)}$ 要精确些。故对

Jacobi迭代法

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}) \end{cases}$$

作如下改进

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

例题

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(20+3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(33-4\ x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(12-2\ x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}\ ) \end{cases}$$

取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$ ，得到

$$x_1^{(1)}=2.5$$

$$x_2^{(1)}=3-0.363636\times 2.5\approx\ 2.0909091$$

$$x_3^{(1)}=3-0.5\times 2.5-0.25\times 2.0909091\approx 1.768939$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$x_1^{(5)}\approx 2.999843$， $x_2^{(5)}\approx 2.000072$， $x_3^{(5)}\approx 1.000061$。

终止条件为： $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|\leq 10^{-5}$

Gauss-Seidel迭代法

Jacobi迭代法

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Gauss-Seidel迭代法

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

矩阵分裂

$$D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

$$L=\begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ -a_{21} & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ -a_{j1} & \cdots & -a_{jj-1} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nj-1} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i-1} & a_{i,i} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & -a_{j-1j} & \cdots & -a_{j-1n} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A=D-L-U$$

Jacobi、Gauss-Seidel迭代法矩阵格式

由 $A = D - L - U$，得 $Dx = (L+U)x + b$ 从而

$$x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

则Jacobi迭代法可写成为：

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)\,x^{(k)} + D^{-1}b \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

由 $A = D - L - U$，得 $(D-L)x = Ux + b$ 从而

$$x = (D-L)^{-1}Ux + (D-L)^{-1}b$$

则Gauss-Seidel迭代法可以写成

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

迭代改善法

对良态或者不十分严重病态的线性方程组,与直接法结合对已得近似解进行精度改善.

1)用三角分解法(带列主元LU分解)求$Ax=b$

$$PA=LU \Rightarrow PAx=LUx=Pb \Rightarrow \begin{cases} Ly=Pb \\ Ux=y \end{cases}$$

得到计算解 $\tilde{x}$

2)求$\tilde{x}$的修正向量 z

用双精度计算余向量 $r=b-A\tilde{x} \;=Ax-A\tilde{x}=Az$

$$PAz=LUz=Pr \;\Rightarrow \begin{cases} Ly=Pr \\ Uz=y \end{cases}$$

令 $x=\tilde{x}+z$, x 为近似解 $\tilde{x}$的改进解.

$$Ax=A\tilde{x}+Az=b-r+Az=b$$

3)反复对近似解进行改善,即反复2)的过程.

例题

例 P121 Hilbert型线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\xrightarrow{\text{直接法得初始近似解}}\boldsymbol{x}^{*}\approx\boldsymbol{x}^{(1)}$$

$$\text{余量 } r^{(1)}=b-Ax^{(1)}\xrightarrow{\text{利用余量求修正量}}Az^{(1)}=r^{(1)}\Leftrightarrow\begin{cases}Ly^{(1)}=r^{(1)}\\Uz^{(1)}=y^{(1)}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{修正}}\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\boldsymbol{z}^{(1)}$$

$$\text{余量 } r^{(2)}=b-Ax^{(2)}\xrightarrow{\text{利用余量求修正量}}Az^{(2)}=r^{(2)}\Leftrightarrow\begin{cases}Ly^{(2)}=r^{(2)}\\Uz^{(2)}=y^{(2)}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{修正}}\boldsymbol{x}^{(3)}=\boldsymbol{x}^{(2)}+\boldsymbol{z}^{(2)}$$

迭代法的收敛性

考虑如下问题:

① 如何判断迭代过程是否收敛?

② 迭代格式收敛的充要条件、充分条件是什么?

③ 决定迭代收敛速度的因素是什么?

收敛性分析

迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

线性方程组的精确解为 $\boldsymbol{x}^*$，则

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{f}$$

第k+1步迭代向量与真实解的差

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*) = \cdots = B^{k+1}\left(x^{(0)} - x^*\right)$$

从而 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} \to x^* \Leftrightarrow \boldsymbol{B}^{k+1}\left(x^{(0)} - x^*\right) \to 0 \Leftrightarrow B^{k+1} \to 0 \Leftrightarrow \rho(B) < 1$

任意向量

迭代法收敛性定理(谱半径)

迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$ 对任意 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 均收敛的充要条件为：

$$\rho(B) < 1$$

收敛性分析

$$x^{(k)}-x^{*}=x^{(k)}-x^{(k+1)}+x^{(k+1)}-x^{*}=B(x^{(k-1)}-x^{(k)})+B(x^{(k)}-x^{*})$$

$$\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|\le\|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|+\|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|$$

$$\left(1-\|\mathbf{B}\|\right)\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|\le\|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|\le\cdots\le\|B\|^{k}\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

$$\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|\le\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\cdot\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|\le\cdots\le\frac{\|B\|^{k}}{1-\|B\|}\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

迭代法收敛性定理（范数）

若 $\|B\|<1$，则迭代法收敛，且有

$$\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|\le\frac{\|B\|^{k}}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

例 设线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+x_3=1 \end{cases}$ 问使用Jacobi法和G-S法求解是否收敛. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

（1） 求Jacobi迭代法的迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})=\begin{pmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{det}(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3=0$$

即 $\rho(\boldsymbol{B})=0<1$，故Jacobi迭代法收敛.

（2） 求G-S迭代法的迭代矩阵$\boldsymbol{B}$，由

$$\mathbf{det}(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=\mathbf{det}\left(\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right)=\det\left((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U})\right)$$

$$=\det\left((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\right)\cdot\det\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)=0$$

得

$$\mathbf{det}\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)=\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda=\lambda(\lambda-2)^2=0$$

从而 $\rho(\boldsymbol{B})=2>1$，故G-S迭代法发散.

并不是对任何情况, G-S迭代比Jacobi迭代收敛速度快

迭代法收敛性-特殊线性方程组

对于某些特殊的方程组，从方程组本身就可判定其收敛性.不必求迭代矩阵的特征值或范数.

- 严格（不可约）对角占优矩阵
- 对称正定矩阵

（严格）对角占优

如果矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素满足不等式

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 A 为**对角占优阵**；如果所有严格不等式均成立，称 A 为**严格对角占优阵**.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

对角占优矩阵　　　　严格对角占优矩阵

定理

严格对角占优阵$\boldsymbol{A}$为非奇异矩阵，即 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$

如果A奇异, 则Ax=0有非零解 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ， 令 $|c_i| = \max\limits_{1\le j\le n}\{|c_j|\}$

则

$$a_{i,1}c_1 + a_{i,2}c_2 + \cdots + a_{i,n}c_n = 0 \Rightarrow a_{i,i}c_i = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}c_j$$

$$\Rightarrow |a_{i,i}| \cdot |c_i| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| \cdot |c_j| \Rightarrow |a_{i,i}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| \cdot |c_j| / |c_i| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$

与A为严格对角占优矩阵矛盾!

定理

若线性方程组$Ax=b$ 中的A为严格对角占优阵，则Jacobi法和Gauss-Seidel法均收敛。

Jacobi迭代矩阵为 $B=D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

严格对角占优 $\Rightarrow$ $\sum_{j\neq i}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}<1$ $\Rightarrow$ $\|B\|_\infty<1$ $\Rightarrow$ 收敛

G-S迭代法收敛性

G-S迭代矩阵为$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$，其特征值$\lambda$ 满足

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\right)=\det\left((\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)\right)$$
$$=\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\cdot\det[\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}]=0$$

因为$\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\neq 0$，则有 $\mathbf{det}(C)=\mathbf{det}\left(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\right)=0$

假设 $|\lambda|\geq 1$

$$\boldsymbol{C}=\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

由于$\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优阵，则

$$|\lambda||a_{ii}|>|\lambda|\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=\sum_{j\neq i}|\lambda||a_{ij}|\geq\sum_{j=1}^{i-1}|\lambda||a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|$$

C为严格对角占优阵，故$\det(C)\neq \boldsymbol{O}$，矛盾 $\rho(\boldsymbol{B})<1$ G-S迭代法收敛

若A为对称正定矩阵：

1、若2D-A为正定矩阵，则Jacobi迭代法收敛

2、Gauss-Seidel迭代法收敛