矩阵幂级数

董波
数学科学学院
大连理工大学

主要问题

矩阵幂级数的一般形式：

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \boldsymbol{A}^k$$

问题：

1、判断矩阵幂级数是否收敛，若收敛，求收敛矩阵（解析函数）

2、解析函数的矩阵幂级数展开形式

矩阵幂级数收敛条件

矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛 $\xLeftrightarrow{\text{性质}}$ 正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k A^k\|$ 收敛

$$\|a_k A^k\| = |a_k| \|A^k\| \le |a_k| \|A\|^k$$

范数的齐次性 $\Updownarrow$

正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|A^k\|$ 收敛

正项级数 $\Uparrow$ 比较判别法

幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的收敛半径为r

$\rho(A) < r \Rightarrow$ 存在范数 $\|A\| < r$

$\Rightarrow$ 正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|A\|^k$ 收敛

矩阵幂级数发散条件

矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散 $\xleftrightarrow{\text{性质}}$ 正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k A^k\|$ 发散

$\Updownarrow$ 范数的齐次性

正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|A^k\|$ 发散

$\Uparrow$ 正项级数比较判别法

$$|a_k|(\rho(A))^k = |a_k|\rho\left(A^k\right) \le |a_k|\|A^k\| = \|a_k A^k\|$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{幂级数} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{的收敛半径为r} \\ \rho(A) > r \end{array}\right\} \Rightarrow \text{正项级数} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \rho(A)^k \text{ 发散}$$

矩阵幂级数收敛、发散

设 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ 为收敛半径为r的幂级数，A为n阶方阵，则

(1) $\rho(\mathbf{A})<r$ 时，矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{A}^k$ 绝对收敛；

(2) $\rho(\mathbf{A})>r$ 时，矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{A}^k$ 发散。

矩阵幂级数收敛、发散

设 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ 为收敛半径为r的幂级数，A为n阶方阵，

1、如果A的特征值均落在收敛圆内，即$|\lambda-z_0|<r$，其中 λ 为任意特征值，

则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\boldsymbol{A}-z_0\boldsymbol{I})^k$ 绝对收敛；

2、若有某个 λ_{i_0} 使得$|\lambda_{i_0}-z_0|>r$，则幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\boldsymbol{A}-z_0\boldsymbol{I})^k$发散

幂级数与解析函数的关系

1、幂级数的和函数是收敛圆内的解析函数

2、一个圆内解析的函数可以展开成收敛的幂级数

如果 $f(z)$ 是 $|z-z_0|<r$ 内的解析函数，其展成绝对收敛的幂级数为

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

则当矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 的特征值落在收敛圆 $|z-z_0|<r$ 内时，定义

$$f(\boldsymbol{A})\overset{\Delta}{=}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\boldsymbol{A}-z_0\boldsymbol{I})^k$$

并称之为 A 关于解析函数 $f(z)$ 的矩阵函数。

解析函数:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad (|z| < +\infty)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \quad (|z| < +\infty)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \quad (|z| < +\infty)$$

$$(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots (|z| < 1)$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \quad (|z| < 1)$$

矩阵函数:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \quad (\rho(\boldsymbol{A}) < +\infty)$$

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \cdots \quad (\rho(\boldsymbol{A}) < +\infty)$$

$$\cos A = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \cdots \quad (\rho(\boldsymbol{A}) < +\infty)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \cdots (\rho(\boldsymbol{A}) < 1)$$

$$\ln(I+A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \cdots \quad (\rho(\boldsymbol{A}) < 1)$$

求矩阵函数-Jordan分解

矩阵A的Jordan分解求矩阵函数 $f(A)$ 的具体表达式

$$A = TJT^{-1}$$

对于单项式函数:

$$f(A) = A^n = \left(TJT^{-1}\right)^n = TJ^nT^{-1} = Tf(J)T^{-1}$$

对于多项式函数:

$$\begin{aligned} f(A) &= \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I \\ &= \alpha_n TJ^nT^{-1} + \cdots + \alpha_1 TJT^{-1} + \alpha_0 I = Tf(J)T^{-1} \end{aligned}$$

对于初等函数:

$$f(A) = Tf(J)T^{-1}$$

求矩阵函数f(J)

Jordan标准型J为块对角矩阵 $J=\operatorname{diag}(J_1,\dots,J_k)$

$$=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

对于单项式函数：

$$f(J)=J^n=\operatorname{diag}(f(J_1),\dots,f(J_k))$$

对于多项式函数：

$$f(J)=\alpha_n J^n+\cdots+\alpha_1 J+\alpha_0 I$$
$$=\operatorname{diag}(f(J_1),\dots,f(J_k))$$

$$J^n=\operatorname{diag}(J_1^n,\dots,J_k^n)$$

$$=\begin{pmatrix} J_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & J_k^n \end{pmatrix}$$

对于初等函数：

$$f(J)=\operatorname{diag}(f(J_1),\dots,f(J_k))$$

Jordan标准型J为块对角矩阵，有：

$$J=\operatorname{diag}(J_1,\dots,J_k) \qquad f(J)=\operatorname{diag}(f(J_1),\dots,f(J_k))$$

利用矩阵的Jordan分解求矩阵函数 $f(A)$ 的具体表达式

1、$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ 为收敛半径为r的幂级数

2、A 为n阶方阵，$A=TJT^{-1}$ 为其Jordan分解，$J=\mathrm{diag}(J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_s)$

3、当A的特征值均落在收敛圆内

则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\boldsymbol{A}-z_0\boldsymbol{I})^k$ 绝对收敛，并且和矩阵为

$$f(A)=T\ \mathrm{diag}\left(f(J_1),f(J_2),\cdots,f(J_s)\right)T^{-1}$$

关键是如何计算

$$f(J_i)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(J_i-z_0I\right)^k \Leftarrow \sum_{k=0}^{\infty}a_kJ_i^k \Leftarrow J_i^k$$

因为 $\boldsymbol{J} = \lambda\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}$ 其中 $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $(\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}(\lambda\boldsymbol{I})$

$$J^k = (\lambda I + N)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^{k-i} N^i$$

$$= \lambda^k I_n + \cdots + C_k^i \lambda^{k-i} N^i + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & C_k^i\lambda^{k-i} & \cdots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & C_k^i\lambda^{k-i} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} \\ & & & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}^0 = \boldsymbol{I}$$

$$\begin{array}{cl} & \text{k+1列} \\ \boldsymbol{N}^k = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{n-k行}$$

$k \le n-1$,

$N^k = 0, \qquad k \ge n$

$$\mathbf{S}_{m+1}=\sum_{k=0}^{m}a_k\boldsymbol{J}^k=$$

$$\begin{pmatrix}
\sum_{k=0}^{m}a_k\lambda^k & \sum_{k=0}^{m}a_kC_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & \sum_{k=0}^{m}a_kC_k^i\lambda^{k-i} & \cdots & \sum_{k=0}^{m}a_kC_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\
 & \sum_{k=0}^{m}a_k\lambda^k & \ddots & & \ddots & \vdots \\
 & & \ddots & \ddots & & \sum_{k=0}^{m}a_kC_k^i\lambda^{k-i} \\
 & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & & \ddots & \sum_{k=0}^{m}a_kC_k^1\lambda^{k-1} \\
 & & & & & \sum_{k=0}^{m}a_k\lambda^k
\end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{m}a_kC_k^i\lambda^{k-i}=\sum_{k=i}^{m}a_kC_k^i\lambda^{k-i}$$

$$=\frac{1}{i!}\sum_{k=i}^{m}a_kk(k-1)\cdots(k-i+1)\lambda^{k-i}$$

$$=\frac{1}{i!}\left[\sum_{k=i}^{m}a_k\left(\lambda^k\right)^{(i)}\right]=\frac{1}{i!}\left(\sum_{k=i}^{m}a_k\lambda^k\right)^{(i)}$$

$$=\frac{S_{m+1}^{(i)}(\lambda)}{i!}$$

$S_{m+1}^{(i)}(\lambda)$ 表示 $S_{m+1}(\lambda)$ 对λ的 i阶导数。

$$f(\boldsymbol{J})=\lim_{m\to\infty}S_{m+1}=\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^m a_k\lambda^k & \sum_{k=0}^m a_kC_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & \sum_{k=0}^m a_kC_k^i\lambda^{k-i} & \cdots & \sum_{k=0}^m a_kC_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ & \sum_{k=0}^m a_k\lambda^k & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \sum_{k=0}^m a_kC_k^i\lambda^{k-i} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \sum_{k=0}^m a_kC_k^1\lambda^{k-1} \\ & & & & & \sum_{k=0}^m a_k\lambda^k \end{pmatrix}$$

由幂级数性质知， $\lim_{m\to\infty}S_{m+1}^{(i)}(\lambda)=f^{(i)}(\lambda)$ ，故

设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ 是收敛半径为r的幂级数，J是特征值为 λ 的n阶Jordan块阵，且 $|\lambda|<r$，则

$$f(J)=\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \dfrac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ 是收敛半径为 r 的幂级数，J 是特征值为 λ 的Jordan块，且 $|\lambda-z_0|<r$，则

$$f(\mathbf{J})=\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \dfrac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ 是收敛半径为r的幂级数，J是特征值为 λ 的n阶Jordan块阵，且 $|t\lambda|<r$，则

$$f(t\mathbf{J})=\begin{pmatrix} f(t\lambda) & t\,f'(t\lambda) & \cdots & \dfrac{t^{n-1}f^{(n-1)}(t\lambda)}{(n-1)!} \\ & f(t\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t\,f'(t\lambda) \\ & & & f(t\lambda) \end{pmatrix}$$

利用矩阵的Jordan分解求矩阵函数 $f(A)$ 的具体表达式

设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ 为收敛半径为r的幂级数，A 为n阶方阵，

$A=TJT^{-1}$ 为其Jordan分解，$\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{J}_1,\ \boldsymbol{J}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{J}_s\right)$

当A的特征值均落在收敛圆内时，即$|\lambda-z_0|<r$，其中λ为A的任意特征值，

则矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\boldsymbol{A}-z_0\boldsymbol{I})^k$ 绝对收敛，并且和矩阵为

$$f(A)=T\ \mathrm{diag}\left(f(J_1),f(J_2),\cdots,f(J_s)\right)T^{-1}$$

其中$f(J_i)$的定义如前表达式。

例题

例：求 $\sin A, \sin At$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$$

计算矩阵函数值的基本计算步骤：

1、计算Jordan分解 $A = TJT^{-1} = T\mathrm{diag}\left(J_1, \cdots, J_s\right)T^{-1}$

2、 求 $f(A) = T\mathrm{diag}\left(f(J_1), \cdots, f(J_s)\right)T^{-1}$

例题

例 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$，求 $\sin A$

解 根据矩阵A的Jordan分解

$$\mathbf{A}=\boldsymbol{TJT}^{-1}=\begin{pmatrix}0&4&1\\1&3&0\\0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&1\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&\frac{3}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}\\1&0&2\end{pmatrix}$$

因此，由 $\sin \boldsymbol{A}=f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{T}\ \mathbf{diag}\left(f(\boldsymbol{J}_1),\quad f(\boldsymbol{J}_2)\right)\boldsymbol{T}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0&4&1\\1&3&0\\0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin 1&&\\&-\sin 1&\cos 1\\&&-\sin 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&\frac{3}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cos 1-\sin 1&0&8\cos 1\\3\cos 1&-\sin 1&6\cos 1\\-2\cos 1&0&-\sin 1-4\cos 1\end{pmatrix}$$

例题

例 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求 e^{At}

解 根据矩阵的Jordan 分解

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & 1\\ & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}=f(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{T}\ \mathbf{diag}\left(f(t\boldsymbol{J}_1),\quad f(t\boldsymbol{J}_2)\right)\boldsymbol{T}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t & & \\ & e^{2t} & te^{2t}\\ & & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+t)e^{2t} & te^{2t} & -te^{2t}\\ e^{2t}-e^t & e^{2t} & -e^{2t}+e^t\\ (1+t)e^{2t}-e^t & te^{2t} & e^t-te^{2t}\end{pmatrix}$$

有限待定系数法

问题：给定函数 $f(x)$，计算 $f(At)$

挑战：避免计算矩阵的Jordan分解

$$f(\lambda t)=p(\lambda,t)\psi(\lambda)+q(\lambda,t)$$

$\psi(\lambda)$ 为特征多项式，$q(\lambda,t)$ 为次数不超过n-1的含参多项式

$$\psi(\lambda)=\det(A-\lambda I),q(\lambda,t)=b_{n-1}(t)\lambda^{n-1}+\cdots+b_1(t)\lambda+b_0(t)$$

从而

$$f(At)=q(A,t)$$

关键：确定含参系数 $b_{n-1}(t),\cdots,b_1(t),b_0(t)$

A的特征多项式

$$\psi(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{m_i} \Longrightarrow \psi^{(j)}(\lambda_i)=0$$

$$j=0,\ldots,m_i-1, i=1,\ldots,s$$

故

$$f(\lambda t)=p(\lambda,t)\psi(\lambda)+q(\lambda,t) \Longrightarrow \frac{d^j}{d\lambda^j}f(\lambda t)\bigg|_{\lambda=\lambda_i}=\frac{d^j}{d\lambda^j}q(\lambda,t)\bigg|_{\lambda=\lambda_i}$$

$$\Longrightarrow t^j\frac{d^j}{du^j}f(u)\bigg|_{u=\lambda_i t}=\frac{d^j}{d\lambda^j}q(\lambda,t)\bigg|_{\lambda=\lambda_i}$$

n个方程，n个变量的线性方程组

待定系数法步骤:

1、计算A的特征多项式 $\psi(\lambda)=\det(A-\lambda I)$

2、定义 $q(\lambda,t)=b_{n-1}(t)\lambda^{n-1}+\cdots+b_1(t)\lambda+b_0(t)$

利用

$$\left.\frac{d^j}{d\lambda^j}f(\lambda t)\right|_{\lambda=\lambda_i}=\left.\frac{d^j}{d\lambda^j}q(\lambda,t)\right|_{\lambda=\lambda_i}\text{ 或 }t^j\left.\frac{d^j}{du^j}f(u)\right|_{u=\lambda_i t}=\left.\frac{d^j}{d\lambda^j}q(\lambda,t)\right|_{\lambda=\lambda_i}$$

确定含参系数 $b_{n-1}(t),\cdots,b_1(t),b_0(t)$

3、计算 $f(At)=q(A,t)$

例题

例　设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$，求 $\sin A$ 及 e^{At}

解　计算A的特征多项式 $\psi(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-8\\-3&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$

（1）定义 $q(\lambda)=b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0$，构造线性方程组

$$\begin{cases}q(-1)=b_2-b_1+b_0=-\sin 1=f(-1),\\ q'(-1)=-2b_2+b_1=\cos 1=f'(-1),\\ q''(-1)=2b_2=\sin 1=f''(-1).\end{cases}\qquad \begin{cases}b_0=\cos 1-\dfrac{1}{2}\sin 1\\ b_1=\sin 1+\cos 1\\ b_2=\dfrac{1}{2}\sin 1\end{cases}$$

计算 $\sin A=b_2A^2+b_1A+b_0I=\cdots\cdots$

例题

例 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$，求 $\sin A$ 及 e^{At}

解 计算A的特征多项式 $\psi(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-8\\-3&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$

（2）定义 $q(\lambda)=b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0$，构造线性方程组

$$\begin{cases}q(-1)=b_2-b_1+b_0=e^{-t}=f(-t),\\ q'(-1)=-2b_2+b_1=te^{-t}=tf'(-t),\\ q''(-1)=2b_2=t^2e^{-t}=t^2f''(-t).\end{cases}$$

$$\begin{cases}b_0=\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}\right)e^{-t}\\ b_1=te^{-t}+t^2e^{-t}\\ b_2=\dfrac{t^2}{2}e^{-t}\end{cases}$$

计算 $e^{At}=b_2A^2+b_1A+b_0I=\cdots\cdots$

矩阵函数等式

（Ⅰ） $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，总有

（1） $\sin(-\mathbf{A}) = -\sin\mathbf{A}$， $\cos(-\mathbf{A}) = \cos\mathbf{A}$

（2） $e^{i\mathbf{A}} = \cos\mathbf{A} + \mathrm{i}\sin\mathbf{A}$， $\cos\mathbf{A} = \frac{1}{2}(e^{i\mathbf{A}} + e^{-i\mathbf{A}})$， $\sin\mathbf{A} = \frac{1}{2i}(e^{i\mathbf{A}} - e^{-i\mathbf{A}})$

（Ⅱ） $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，且 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ，则

（0） $e^{A}e^{B} = e^{B}e^{A} = e^{A+B}$

（1） $\sin(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \sin\mathbf{A}\cos\mathbf{B} + \cos\mathbf{A}\sin\mathbf{B}$

（2） $\cos(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \cos\mathbf{A}\cos\mathbf{B} - \sin\mathbf{A}\sin\mathbf{B}$

若A=B, 则

$$\cos 2\mathbf{A} = \cos^2\mathbf{A} - \sin^2\mathbf{A}，\ \sin 2\mathbf{A} = 2\sin\mathbf{A}\cos\mathbf{A}$$

对任何n阶方阵A, e^{A}总是可逆矩阵

$$e^{A}e^{-A}=e^{-A}e^{A}=e^{O}=\boldsymbol{I}$$

$\sin A$和$\cos A$不一定可逆. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\pi & 0\\ 0 & \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\qquad \sin\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\sin\pi & 0\\ 0 & \sin\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\cos\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\pi & 0\\ 0 & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$