常微分方程的数值解法

董波
数学科学学院
大连理工大学

问题描述

一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \quad a \le t \le b \\ u(a) = u_0 \end{cases}$$

解的存在唯一性：

若 $f(t,u)$ 满足Lipschitz条件，即存在常数 L ，对任意 $t \in [a,b]$ ，均有

$$\left| f(t,u) - f(t,\bar{u}) \right| \le L \left| u - \bar{u} \right|$$

则问题的解存在且唯一。

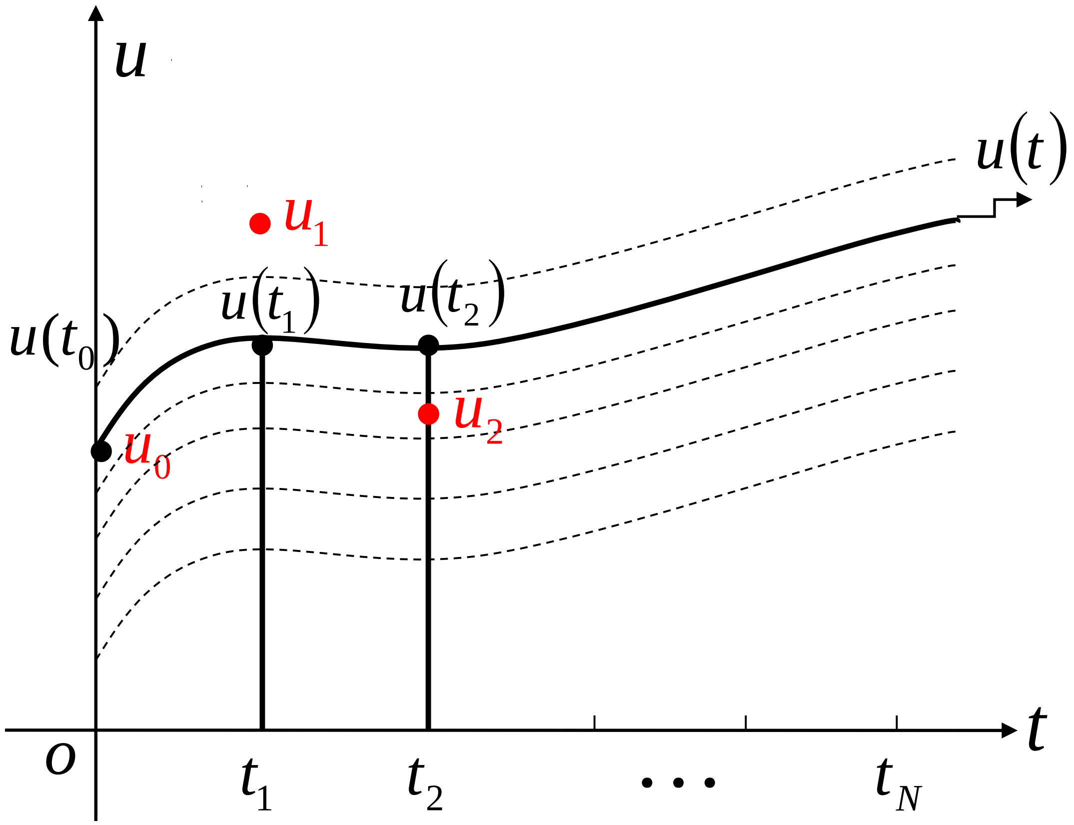
数值解法思想

初值问题大多数情况下解析解无法求得，求其数值解。

它是一种离散化方法，利用这种方法，可以在一系列事先取定的 $[a,b]$ 中的离散点（称为节点）

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N \le b$$

上求出未知函数 $u(t)$ 之值 $u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_N)$ 的近似值 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ ，而通常称 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 为初值问题的数值解。



数值解的几何解释

数值方法

基于数值积分的方法

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \quad a \le t \le b \\ u(a) = u_0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$u(x_{k+1}) - u(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\tau, u(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$\Downarrow$$ 数值积分公式

$$u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow u_n$$

基于Taylor展式的方法

一般形式

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \quad \alpha_k \neq 0,$$

利用精度概念及

$$u(x_{n+j}), f(x_{n+j}, u(x_{n+j}))$$

的Taylor展式得到参数 α_j, β_j 的值

基于数值积分的解法

董波
数学科学学院
大连理工大学

基本思想

将节点取为 $t_n = a + nh \quad h = \dfrac{b-a}{N}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N$ 每个节点区间求积分

$$\begin{cases} u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

如果 $u(t_n)$ 的近似值 u_n 已经求出，则通过计算右端项的数值积分可求出 $u(t_{n+1})$ 的近似值 u_{n+1}.

Euler法

对右端积分项使用左矩形求积公式，则得

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \approx u(t_n) + h\, f(t_n, u(t_n))$$

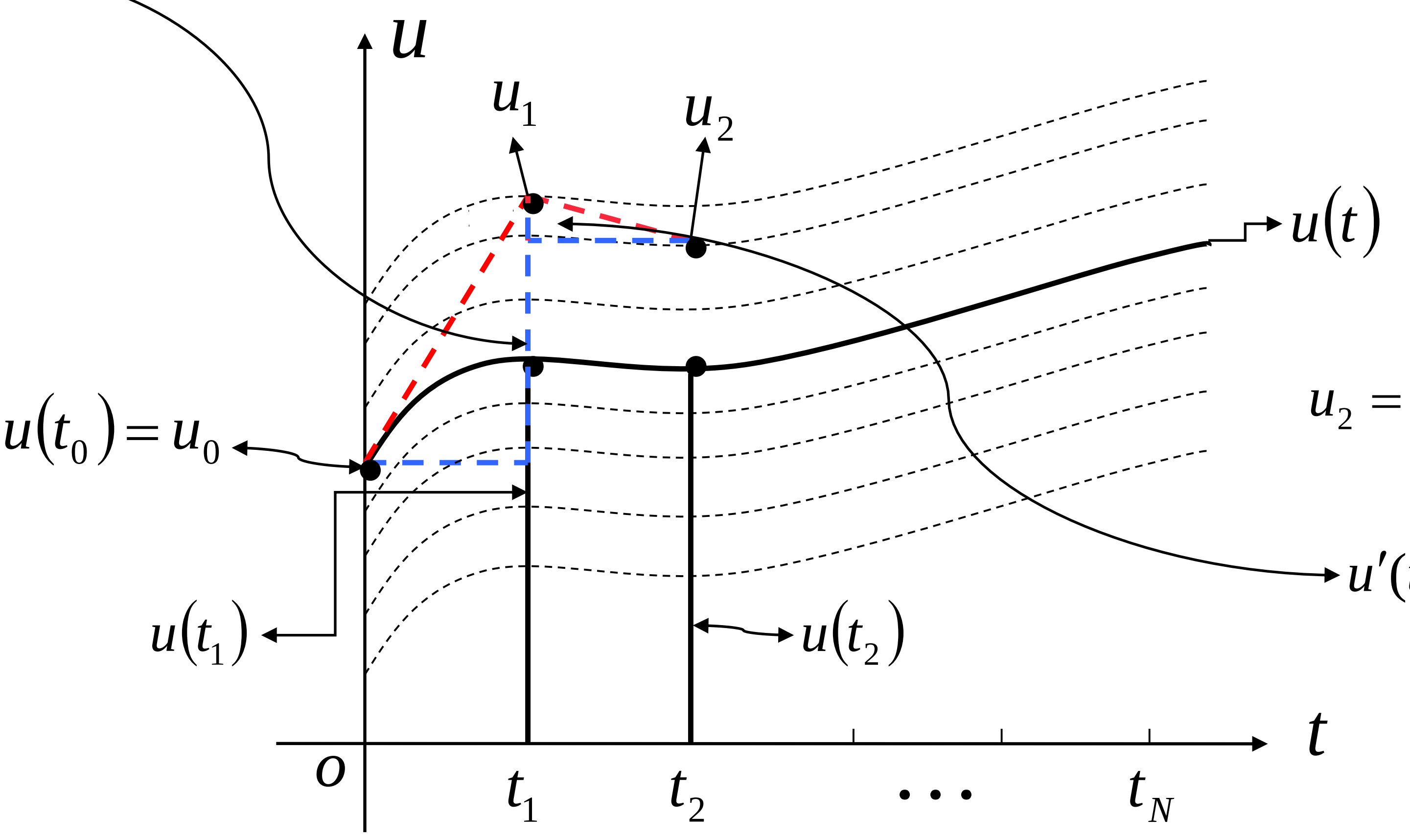
令

$$u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

上式称为Euler求解公式，又称矩形公式。

Euler法（切线法）几何解释

$$u'(t_0)\cdot h = f(t_0,u_0)\cdot h \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_0 + f(t_0,u_0)\cdot h$$



$$u_2 = u_1 + f(t_1,u_1)\cdot h$$

$$\Uparrow$$

$$u'(t_1)\cdot h = f(t_1,u_1)\cdot h$$

例题

例： 用Euler公式计算初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = t^2 + 100u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

的解 $u(t)$ 在 $t = 0.3$ 处的数值解 u_3。（取步长 $h = 0.1$）

解：相应的Euler公式：

$$u_{n+1} = u_n + h\left(t_n^2 + 100u_n^2\right) = u_n + 0.1\times\left(t_n^2 + 100u_n^2\right)$$

由初值 $u(0) = u_0 = 0$，计算得

$$u(0.1) \approx u_1 = u_0 + 0.1\times\left(t_0^2 + 100u_0^2\right) = 0.0 + 0.1\times(0.0 + 100\times 0.0) = 0.0000$$

$$u(0.2) \approx u_2 = u_1 + 0.1\times\left(t_1^2 + 100u_1^2\right) = 0.0 + 0.1\times(0.1^2 + 100\times 0.0) = 0.0010$$

$$u(0.3) \approx u_3 = u_2 + 0.1\times\left(t_2^2 + 100u_2^2\right) = 0.001 + 0.1\times\left(0.2^2 + 100\times(0.0010)^2\right) = 0.0051$$

隐Euler法

对右端积分项使用右矩形求积公式，则得

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt \approx u(t_n) + h\, f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))$$

令

$$\underline{u_{n+1}} = u_n + h\, f(t_{n+1}, \underline{u_{n+1}}) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

上式称为隐Euler公式，又称右矩形公式，或向后Euler公式。

隐式公式需要求解方程，或者利用迭代法求解

梯形法

对右端的积分使用梯形求积分式计算，

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,u(t))dt \approx \frac{h}{2}[f(t_n,u(t_n))+f(t_{n+1},u(t_{n+1}))]$$

则得

$$u(t_{n+1}) \approx u(t_n)+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u(t_n))+f(t_{n+1},u(t_{n+1}))\right)$$

令

$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1})\right) \quad n=0,1,2,\cdots,N$$

上式称为梯形公式，简称梯形法.

梯形公式可看做Euler公式与隐式Euler公式的算术平均

梯形公式与Euler公式相比要精确的多，但是梯形公式的计算量要大一些。每步计算要解一个关于 u_{n+1} 的非线性方程

构造如下迭代公式：

$$u_{n+1}^{[k+1]}=u_n+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1}^{[k]})\right)\quad k=0,1,2,\cdots$$

取初值为 $u_{n+1}^{[0]}=u_n$ ，若序列 $\{u_{n+1}^{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 $u_{n+1}^{[*]}$ ，则有

$$u_{n+1}^{[*]}=u_n+\frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n)+f(t_{n+1},u_{n+1}^{[*]})\right)$$

则取 $u_{n+1}=u_{n+1}^{[*]}$ 为第 $n+1$ 个近似值。

终止条件 $\left|u_{n+1}^{[k+1]}-u_{n+1}^{[k]}\right|<\varepsilon$

改进的Euler法

为了避免求解非线性代数方程，可以用Euler法将它显化，建立预测——校正系统：

Euler法预估

梯形法校正

$$\begin{cases} u(t_0) = u_0 \\ \bar{u}_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \underline{\bar{u}_{n+1}})\right) \end{cases}$$

求解公式称为改进的Euler法，其中 $\bar{u}_{n+1}$ 称为预测值，u_{n+1} 称为校正值.

其求解顺序为：

$$u_0 \to \bar{u}_1 \to u_1 \to \bar{u}_2 \to u_2 \to \cdots \to \bar{u}_N \to u_N$$

改进的Euler法还可写为：

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \underline{u_n + h\, f(t_n, u_n)})\right]$$

例题：隐式格式显示化

如果 $f(t,u(t))$ 关于u是线性函数，则隐式公式可以显式化。

例，若方程为：

$$u'(t)=t\cdot u+5$$

隐Euler公式：

$$\underline{u_{n+1}}=u_n+h(t_{n+1}\underline{u_{n+1}}+5) \qquad u_{n+1}=\frac{u_n+5h}{1-t_{n+1}h}$$

梯形公式：

$$\underline{u_{n+1}}=u_n+\frac{h}{2}(t_nu_n+t_{n+1}\underline{u_{n+1}}+10)$$

$$u_{n+1}=\frac{1}{1-\frac{h}{2}t_{n+1}}\left(\left(1+\frac{h}{2}t_n\right)u_n+5h\right)$$

Simpson公式

若在区间上，对右端的使用 Simpson求积公式，得

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} f(t,u(t))\,dt \approx \frac{t_{n+2}-t_n}{6}\left[f(t_{n+2},u(t_{n+2}))+4f(t_{n+1},u(t_{n+1}))+f(t_n,u(t_n))\right]$$

令

$$u_{n+2}=u_n+\frac{2h}{6}\left[f(t_{n+2},u_{n+2})+4f(t_{n+1},u_{n+1})+f(t_n,u_n)\right]$$

可写成

$$u_{n+2}=u_n+\frac{h}{3}\left[f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n\right]$$

其中

$$f_{n+2}=f(t_{n+2},u_{n+2}),\quad f_{n+1}=f(t_{n+1},u_{n+1}),\quad f_n=f(t_n,u_n)$$

此为二步方法，需要已知 u_n 和 u_{n+1}，才能计算出 u_{n+2} 的值。

二步以上的方法也称为多步法

截断误差：局部、整体

假设 $u_i = u(t_i)$ ，$i=0,1,2,\cdots,n-1$ 则称

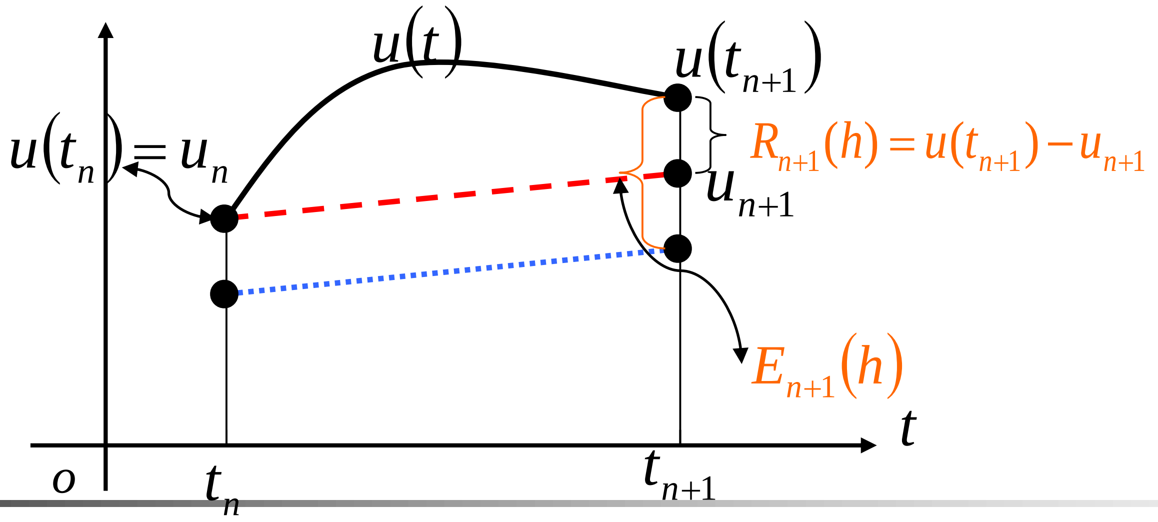
$$R_n(h) = u(t_n) - u_n$$

为求解公式第 n 步的局部截断误差。

假设前n-1步是精确的

$E_n(h) = u(t_n) - u_n = \sum_{i=1}^{n} R_i(h)$ 为求解公式在 t_n 点上的整体截断误差

所有误差的累计



局部与整体截断误差的关系

若

$$R_i(h) = O(h^{p+1}), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则

$$E_n(h) = \sum_{i=1}^{n} R_i(h) = \sum_{i=1}^{n} O(h^{p+1}) = \sum_{i=1}^{n} h \cdot O(h^p)$$

$$= h \cdot O(h^p) \cdot n = O(h^p) \cdot n \times \frac{b-a}{n} = O(h^p)$$

求解公式精度

衡量求解公式好坏的一个主要标准是求解公式的精度。

求解公式的精度越高，计算解的精确性可能越好。

定义

求解公式具有 p 阶精度：

求解公式的局部截断误差： $R_n(h) = O(h^{p+1})$

求解公式的整体截断误差： $E_n(h) = O(h^p)$

求解公式精度计算：Taylor展式

Euler法局部截断误差

$$R_n(h)=u(t_n)-u_n=u(t_n)-\left[u_{n-1}+h\,f(t_{n-1},u_{n-1})\right]$$

假设前n-1步是精确的

$$=u(t_n)-\left[u(t_{n-1})+h\,f(t_{n-1},u(t_{n-1}))\right]$$

$$=u(t_n)-\left[u(t_{n-1})+h\,u'(t_{n-1})\right]$$

$$=u(t_{n-1})+hu'(t_{n-1})+\frac{h^2}{2!}u''(t_{n-1})+O(h^3)$$

$$-u(t_{n-1})-h\,u'(t_{n-1})$$

$$=\frac{h^2}{2!}u''(t_{n-1})+O(h^3)=O(h^2)$$

Euler法具有一阶精度

梯形法具有二阶精度