第 3 章 随机过程的线性变换

3.1　设随机过程 $X(t)$ 是平稳和可微的, 存在导数 $X'(t)$. 证明对于给定的 t, 随机变量 $X(t)$ 和 $X'(t)$ 是正交和不相关的.

3.2　设输入随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = A^2 + Be^{-|\tau|}$, 系统冲激响应为

$$h(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-at} & (t \geqslant 0) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases},$$

A, B, a 均为正实常数. 试求输出 $Y(t)$ 的均值.

3.3　已知一个平稳随机过程输入到低通滤波器, 如图所示.$X(t)$ 的自相关函数 $R_X\left(t_1, t_2\right) = \delta\left(t_1 - t_2\right) = \delta(\tau)$, 求输出的自相关函数 $R_Y(\tau)$.

3.4　如图所示 RL 电路, 输入随机过程 $X(t)$, 其 $E[X(t)] = 0$, $R_X(t_1, t_2) = \sigma^2 \exp\left[-\beta\left(t_1 - t_2\right)\right] = \sigma^2 \exp[-\beta|\tau|], \beta > 0$, 试求稳态时输出的自相关函数 $R_Y(\tau)$.

3.5　设线性时不变系统的冲激响应为 $h(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}U(t)$, 输入平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0$, 求

(1) 求输入输出之间的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$;

(2) 当令 $\alpha = 3, \beta = 1$ 时, 将所得结果画出来.

3.6　如图所示电路中, 输入平稳随机过程 $X(t)$ 的相关函数为 $R_X(\tau)$. 试求 $R_Y(\tau)$、$R_{XY}(\tau)$.

3.7　设线性时不变系统的传递函数为 $H(\omega) = \dfrac{\mathrm{j}\omega - \alpha}{\mathrm{j}\omega + \beta}$, 输入平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = \mathrm{e}^{-v|\tau|}(v > 0)$, 试求输入输出之间的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$.

3.8　如图所示, 低通 RC 滤波器的输入为白噪声, 其物理密度谱 $F_X(\omega) = N_0 (0 < \omega < \infty)$, 相应的自相关函数 $R_X(\tau) = \dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)$. 试求输出的 $F_Y(\omega)$ 和 $R_Y(\tau)$, 并证明 (令 $t_3 > t_2 > t_1$)

$$R_Y\left(t_3 - t_1\right) = \frac{R_Y\left(t_3 - t_2\right) R_Y\left(t_2 - t_1\right)}{R_Y(0)}.$$

3.9　假定功率密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声通过一个滤波器, 其传递函数为 $H(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega/\omega_1}$, 求输出的概率密度函数.

3.10　如图所示的 RL 系统中, 输入 $X(t)$ 是物理密度谱为 N_0 的白噪声, 试用频谱法求输出的概率密度函数.

3.11　如图所示,$X(t)$ 是输入随机过程, $G_X(\omega) = N_0/2$, $Z(t)$ 是随机过程. 试用频谱法求输出 $Z(t)$ 的均方值.

3.12 零均值平稳随机过程 $X(t)$ 输入一个线性滤波器, 滤波器的冲激响应是指指数形式的一段, 即

$$h(t)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-at} & (0 \leqslant t \leqslant T, \alpha>0) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases} .$$

证明输出随机过程的功率谱密度为

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}\left(1-2\mathrm{e}^{-\mathrm{a}T}\cos\omega T+\mathrm{e}^{-2\alpha T}\right)G_X(\omega),$$

其中 $G_X(\omega)$ 是输入过程的功率谱密度.

3.13 设积分电路输入输出之间满足下述关系

$$Y(t)=\int_{t-T}^{t} X(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中 T 为常数, 且 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 均为平稳随机过程. 求证 $Y(t)$ 的功率谱密度

$$G_Y(\omega)=G_X(\omega)\frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega/2)^2}.$$

3.14 如图为具有一个输入、两个输出的线性系统. 求证: 输出 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 的互谱密度

$$G_{Y_1Y_2}(\omega)=H_1(\omega)H_2^*(\omega)G_X(\omega).$$

3.15 若线性系统输入随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^2+8},$$

现已知其输出过程 $Y(t)$ 的功率谱密度为 $G_Y(\omega)=1$, 求该系统的传递函数.

3.16 假定随机过程 $X(t)$ 的功率谱为 $G_x(f)=\dfrac{1}{1+f^2}$, 该过程加到一个传递函数为 $H(f)$ 的滤波器, 该滤波器的功能是使输出的功率谱为 1, 称该滤波器为白化滤波器. 求该滤波器的传递函数, 并画出它的实现电路.

3.17 证明随机过程的采样定理. 设 $X(t)$ 为限带随机过程, 即功率谱密度满足 $G_X(\omega)=0\left(|\omega|>\omega_c\right)$, 试证明:

$$\hat{X}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT)\frac{\sin\left(\omega_c t-n\pi\right)}{\omega_c t-n\pi}.$$

提示: 要证明上式, 只需要证明 $E\left\{[X(t)-\hat{X}(t)]^2\right\}=0$.

3.18 已知平稳随机过程的相关函数为

(1) $R_X(\tau)=\sigma_X^2(1-\alpha|\tau|)\left(\tau\leqslant\dfrac{1}{\alpha}\right)$;

(2) $R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$;

其中 $\alpha>0$, 分别求其等效通能带 $\Delta\omega_\mathrm{e}$.

3.19　设 $X(t)$ 是一个零均值高斯过程, 其功率谱密度 $G_X(f)$ 如图所示, 若每 $1/(2W)$ 秒对 $X(t)$ 取样一次, 得到样本集合 $X(0), X[1/(2W)], \ldots$, 求前 N 个样本的联合概率密度.

3.20　设 $X(n)$ 是一个均值为零、方差为 σ_x^2 的白噪声,$Y(n)$ 是单位样值响应为 $h(n)$ 的线性时不变离散系统的输出, 试证:

(1) $E[X(n)Y(n)] = h(0)\sigma_X^2$;

(2) $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \sum_{n=0}^{+\infty} h^2(n)$.

3.21　图示系统, 激励为均值为零、方差为 σ_x^2 的白噪声序列, 其中 $h_1(n) = a^n U(n), h_2(n) = b^n U(n)$ 及 $|a| < 1$ 和 $|b| < 1$. 试求 σ_2^Z.

3.22　设离散系统的单位样值响应 $h(n) = na^{-n}U(n), a > 1$, 该系统输入的自相关函数为 $R_X(m) = \sigma_X^2\delta(m)$ 的白噪声, 试求系统输出 $Y(n)$ 的自相关函数和功率谱密度.

3.23　序列 $Y(n)$ 和 $X(n)$ 满足差分方程 $Y(n) = X(n+a) - X(n-a)$, 其中 a 为常数, 试用 $X(n)$ 的自相关函数表示 $Y(n)$ 的自相关函数.

3.24　实值一阶自回归过程 $X(n)$ 满足差分方程 $X(n) + a_1 X(n-1) = W(n)$, 其中 a_1 为常数,$W(n)$ 为独立同分布随机序列. 证明:

(1) 若 $W(n)$ 均值非零, 则 $X(n)$ 非平稳;

(2) 若 $W(n)$ 均值非零, a_1 满足条件 $|a_1| < 1$, 则 $X(n)$ 的方差为 $\dfrac{\sigma_w^2}{1-a_1^2}$;

(3) 若 $W(n)$ 均值非零, 分别求当 $0 < a_1 < 1$ 和 $-1 < a_1 < 0$ 时 $X(n)$ 的自相关函数.

3.25　二阶自回归过程 $X(n)$ 满足 $X(n) = X(n-1) - 0.5X(n-2) + W(n)$, 其中 $W(n)$ 为零均值、方差为 0.5 的白噪声.

(1) 求 $X(n)$ 的自相关函数 $R_X(1)$ 和 $R_X(2)$;

(2) 求 $X(n)$ 的方差.

3.26　二阶自回归过程 $X(n)$ 满足 $X(n) = b_1 X(n-1) - b_2 X(n-2) + W(n)$, 其中 $W(n)$ 为零均值、方差为 0.5 的白噪声, 且 $\left|b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}\right| < 2$.

(1) 求 $X(n)$ 的功率谱密度;

(2) 求 $X(n)$ 的自相关函数.

3.27　输入过程 $X(n)$ 的功率谱密度为 σ_X^2, 二阶 MA 模型为 $Y(n) = X(n) + a_1 X(n-1) + a_2 X(n-2)$, 试求 $Y(n)$ 的自相关函数和功率谱密度.

3.28　平稳随机过程 $X_c(t)$ 的相关函数为 $R_{X_c}(\tau) = \mathrm{e}^{-4|\tau|}$. 若以间隔 20s 为周期时对 $X_c(t)$ 采样得到随机序列 $X(n)$, 求随机序列 $X(n)$ 的功率谱密度.

3.29　试证明最佳线性滤波器输出的信噪比为

$$d_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|S(\omega)|^2}{G_n(\omega)}\mathrm{d}\omega,$$

其中 $S(\omega)$ 是输入信号的频谱, $G_n(\omega)$ 是输入噪声功率谱密度.

3.30　设线性滤波器的输入为 $X(t) = s(t) + n(t)$, 其中信号

$$s(t) = \begin{cases} Ae^{\alpha(t-T)} & (t \leqslant T) \\ 0 & (t > T) \end{cases}$$

为指数形式脉冲, $\alpha > 0, n(t)$ 为平稳白噪声, 且与 $s(t)$ 之间统计独立. 试求匹配滤波器的传输函数 $H(\omega)$, 并画出电路示意图.

3.31　单个射频脉冲信号的匹配滤波: 信号 $s(t)$ 是矩形包络的射频脉冲, 脉冲宽度为 τ, 角频率为 ω_0, 其表示式为 $s(t) = a \cdot \mathrm{rect}(t)\cos\omega_0 t$, 其中

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leqslant t \leqslant \tau) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

求 $s(t)$ 的匹配滤波器的传递函数、输出信号的波形、输出的信噪比, 并画出匹配滤波器的实现框图.

3.32　相参射频脉冲串信号的匹配滤波器: 设信号 $s(t)$ 为

$$s(t) = \sum_{k=0}^{M-1} s_1(t - kT),$$

其中 $s_1(t)$ 是习题 3.38 所表示的单个射频脉冲信号, 求 $s_1(t)$ 的匹配滤波函数的传递函数、输出信号的波形、输出的信噪比, 并画出匹配滤波器的实现框图.

3.33　设 RC 积分电路的输入信号为 $X(t) = s(t) + n(t)$, 其中 $n(t)$ 的功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2,\ -\infty < \omega < \infty$, $s(t)$ 为与 $n(t)$ 统计独立的矩形脉冲

$$s(t) = \begin{cases} A & (0 \leqslant t \leqslant \tau) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}.$$

若定义积分电路的等效噪声频带 $\Delta f_{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2}RC$, 试求

(1) 积分电路输出信噪比的表达式;

(2) 最佳等效噪声频带 $\Delta f_{\mathrm{e,opt}}$ 与 τ 为什么关系时, 积分电路输出端有最大信噪比?

3.34　设线性滤波器的输入为 $X(t) = s(t) + n(t)$, 已知 $s(t)$ 与 $n(t)$ 之间统计独立, 且

$$s(t) = \begin{cases} A & (0 \leqslant t \leqslant \tau) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases},$$

$n(t)$ 是平稳噪声, 其功率谱为

$$G_n(\omega) = \frac{2\alpha\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (-\infty < \omega < \infty).$$

试求输出信噪比最大的最佳线性滤波器的传输函数.

3.35　设信号 $s(t) = 1 - \cos\omega_0 t \left(0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega_0\right)$, 噪声的物理谱 $F_n(\omega) = N_0(0 < \omega < \infty$, 且与信号统计独立, 试设计匹配滤波器:

(1) 求传输函数和冲激响应;

(2) 求输出波形;

(3) 画出匹配滤波器的结构方框图;

(4) 若噪声功率谱为 $G_n(\omega) = \omega_1^2 / \left(\omega^2 + \omega_1^2\right) (-\infty < \omega < \infty)$, 其中 ω_1 为常数, 试求输出信噪比最大的线性滤波器的传输函数和冲激响应.

补充习题

1　设信号 $s(t)$ 为相参射频脉冲串信号, 即 $s(t)=\sum_{k=0}^{M-1} s_1(t-kT)$, 其中 $s_1(t)=a\cdot \mathrm{rect}(t)\cos\omega_0 t$ 为单个射频脉冲信号, $\mathrm{rect}(t)=\begin{cases} 1 & (0\leqslant t\leqslant t) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$, $\omega_0\tau=2\pi m, m>>1, m$ 为整数, 求 $s(t)$ 的匹配滤波器的传输函数.