第 6 章 马尔可夫过程与泊松过程

6.1　设齐次马尔可夫链又四个状态 a_1, a_2, a_3, a_4, 其转移概率如下列转移矩阵所示:

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

(1) 如果该马尔可夫链在 n 时刻处于 a_3 状态, 求在 $n+2$ 时刻处于 a_2 状态的概率;

(2) 如果该链在 n 时刻处于 a_1 状态, 求在 $n+3$ 时刻处于 a_3 状态的概率.

6.2　一个质点沿标有整数的直线游动. 经过一步就能从点 i 移到 $i-1$ 的概率为 p, 留在点 i 的概率为 q, 移到点 $i+1$ 的概率为 r, 且有 $p+q+r=1$. 求一步转移概率矩阵和二步转移概率矩阵.

6.3　设质点 M 在 $(0,1,2)$ 三个位置随机徘徊, 每经一单位时间按下列概率规则改变一次位置: 自 0 出发, 下一步停留在 0 的概率为 q, 来到 1 的概率为 p; 自 1 出发, 来到 0 及 2 的概率分别为 p 和 q; 自 2 出发停留在 2 及到 1 的概率分别为 p 和 q. 试求其一步概率转移矩阵和二步概率转移矩阵.

6.4　设一质点 M, 在图中琐事的反射壁件四个位置 (a_1, a_2, a_3, a_4) 上随机游动, 在 a_1 处向右游动一步的概率为 1; 在 a_2, a_3 处, 则向左或向右游动一步的概率为 1/4, 停留的概率为 1/2. 试求在平稳情况下, 各点的状态概率.

6.5　设齐次马尔可夫链的一步转移矩阵为

$$\boldsymbol{P}(1) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

请应用便利性证明:

$$\boldsymbol{P}(n) = \boldsymbol{P}^n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

6.6　从 $1,2,3,4,5,6$ 六个数中, 等可能地取一数, 取后还原, 不断独立地连取下去, 如果在前 n 次中所取的最大数 j, 就说质点在第 n 步时的位置在转态 j. 质点的运动构成一个马尔可夫链. 试写出一步转移概率矩阵.

6.7　设经 RC 滤波器后的高斯白噪声为 $Y(t)$, 其相关函数 $R_Y(\tau) = \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$, 规定 $t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = \Delta, Y\left(t_3\right) = Y_3, Y\left(t_2\right) = Y_2$ 和 $Y\left(t_1\right) = Y_1$, 式中 $t_3 > t_2 > t_1$. 证明 $f\left(y_1/y_2, y_3\right) = f\left(y_1/y_2\right)$.

6.8　设 $\left\{X_n, n \in N^+\right\}$ 为一个马尔可夫链, 其状态空间 $\boldsymbol{I} = \{a, b, c\}$, 转移矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 $P\left\{X_1=b, X_2=c, X_3=a, X_4=c, X_5=a, X_6=c, X_7=b | X_0=c\right\}$;

(2) 求 $P\left\{X_{n+2}=c | X_n=b\right\}$.

6.9　考虑下述的随机过程, 确定是否为独立增量过程. 如果是, 求其平均值和方差.

(1) 第一个实验是重复地往上抛一均匀的硬币, 第 j 次抛出的结果用随机变量 X_j 描述;

$$X_j=\begin{cases}1 & (\text{第}j\text{ 次结果为“正面”})\\ -1 & (\text{第}j\text{ 次结果为“反面”})\end{cases},$$

由此确定的积累计数过程为

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

其 X_j 是统计独立的.

(2) 第二个实验是重复地掷一均匀硬币. 在第一次掷出以前, 过程起始值为 “1”. 如果一个 “正面” 出现, 则过程进入 “2”. 如果一个 “反面” 出现, 过程仍停在 “1”. 在每次掷出时, 如果掷出之前过车在值 “n”, 则以 $1/2$ 的概率进到值 “$2n$”, 或以 $1/2$ 的概率停在值 “n”.

6.10　设 X_n 为马尔可夫链, 其状态空间 $\boldsymbol{I}=\{a, b, c, d, e\}$, 其转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

求其闭集.

6.11　设有四个状态 $(0,1,2,3)$ 的马尔可夫链, 其一步转移概矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

试对其状态进行分类.

6.12　设由齐次随机序列 X_i 构成一个新的时间序列 Y_i, 且定义为:

$$Y_1=X_1,\quad Y_n+CY_{n-1}=X_n\quad(n\geqslant 2),$$

试证时间序列 Y_i 为马尔科夫序列.

6.13　若信号模型的时间参数是连续变化的, 并且有下述形式:

$$\dot{X}(t) = \alpha X(t) + \beta W(t),$$

其中 $W(t)$ 为白色高斯过程, 其均值和协方差为

$$\begin{aligned} m_W(t) &= E[W(t)] \\ K_W(t,s) &= E\left\{\left[W(t) - m_W(t)\right]\left[W(s) - m_W(s)\right]\right\}, \\ &= \sigma_W^2(t)\delta(t-s) \end{aligned}$$

则称过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是连续高斯马尔可夫过程.

(1) 求证 $\dot{m}_X(t) = \alpha m_X(t) + \beta m_W(t)$;

(2) 若令 $V_x(t) = \sigma_X^2(t)$, 则 $\dot{V}_X(t) = 2\alpha V_X(t) + \beta^2 \sigma_W^2(t)$.

6.14　设 $N(t)$ 是具有比率为 $lambda$ 的泊松计数过程, 其相应的概率分布为

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

试求 $N(t)$ 的特征函数、均值和方差.

6.15　设在时间 t 内向电话总机呼唤 k 次的概率为 $p_i(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}(k = 0, 1, 2, \cdots,$ 其中$\lambda > 0$为常数. 如果在任意两相邻的时间间隔内的呼唤次数是相互独立的, 求在时间 $2t$ 内呼唤 n 次的概率为 $p_{2t}(n)$.

6.16　设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是统计独立且具有相同分布的一组随机变量, 令随机变量 $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 证明: 若 X_k 服从参数为 λ_k 的泊松分布, 则 Y 必服从参数为 λ_Y 的泊松分布, 并且有 $\lambda_Y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

6.17　考虑电子管中的电子发射问题, 设单位时间内到达阳极的电子数目 N 服从泊松分布 $P\{N = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$, 每个电子携带的能量构成一个随机变量序列 $x_1, x_2, \ldots, X_k, \ldots$, 已知 $\{X_k\}$ 与 N 统计独立,$\{X_k\}$ 之间互不相关并具有相同的均值和方差, $E\left(X_k\right) = \eta, D\left(X_k\right) = \sigma^2$, 单位时间内阳极接受到的能量为 $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$. 求 S 的均值和方差.

6.18　设 $N(t)$ 是具有比率为 λ 的泊松计数过程. 以下面的方式产生一个新的过程 $X(t), X(0) = 0$, 在 $N(t)$ 过程中, 每当发生一事件, $X(t)$ 就变化一个随机数量, 对应第 n 次时间变化的大小是随机变量 Y_n 的值, 并且对应不同的事件, 这些变化相互间 $N(t)$ 都是统计独立的. 这样, 有

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n.$$

已知每个随机变量 Y_n 有相同的密度, 即 $f_{Y_n}(y) = f_Y(y)$. 如果 Y 是离散随机变量, 则 $X(t)$ 就称为广义泊松过程, 而如果 Y 是连续随机变量,$X(t)$ 就称为符合泊松过程. 试求过程 $X(t)$ 的特征函数、均值和方差.

6.19　设 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 是两个比率分别为 λ_1 和 λ_2 的统计独立泊松过程.

(1) 证明 $N_s(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 是具有 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程;

(2) 证明 $N_{\mathrm{D}}(t)=N_1(t)-N_2(t)$ 不是泊松计数过程.

6.20 多级单调谐放大器的频率响应特性为

$$K(\omega)=C_0\exp\left[-\frac{\left(\omega-\omega_0\right)^2}{2\beta}\right],$$

其输入端接入电流 $I(t)=\sum_j q\delta\left(t-t_j\right)$, q 为电子的电荷. 已知泊松脉冲序列 $Z(t)=\sum_j \delta\left(t-t_j\right)$ 的相关函数 $R_z(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$. 如果中频放大器输出的噪声 $V(t)$ 的均值和方差 σ_V 都可以测出, 问如何求出输入脉冲列每秒的平均个数.

6.21 给定一个随机过程 $X(t)$ 及两个时刻 t_1 和 t_2, 且 $t_1<t_2$, 若对于任意时刻 $t<t_2$, $X(t)$ 都与 $X\left(t_2\right)-X\left(t_1\right)$ 统计独立, 证明 $X(t)$ 必为马尔可夫过程.