第 4 章 随机过程的非线性变换

4.1　给定实数 x 和一个严平稳随机过程 $X(t)$, 定义理想门限系统特性为

$$Y(t)=\begin{cases}1 & (X(t)\leqslant x)\\ 0 & (X(t)>x)\end{cases},$$

证明: (1) $E[Y(t)]=F_X(x)$; (2) $R_Y(\tau)=F_X(x,x,\tau)$.

4.2　设对称限幅器的特性为

$$Y(t)=\begin{cases}-y_0 & \left(X(t)<-x_0\right)\\ X(t) & \left(-x_0\leqslant X(t)<x_0\right)\\ y_0 & \left(X(t)\geqslant x_0\right)\end{cases}.$$

(1) 已知输入过程 $X(t)$ 的一维概率密度, 求输出 $Y(t)$ 的一维概率密度;

(2) 当输入 $X(t)$ 为零均值平稳正态随机过程时, 自相关函数为 $R_X(\tau)$, 求输出 $Y(t)$ 的一维概率密度.

4.3　证明 Pricce 定理. 提示: 对于零均值平稳正态随机过程, 它的二维特征函数为

$$\Phi_X\left(\omega_1,\omega_2,\tau\right)=\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2\left(\omega_1+\omega_2\right)-\omega_1\omega_2R_X(\tau)\right],$$

将上式代入 (4.2.8) 式, 然后对 $R_X(\tau)$ 求导, 利用傅里叶变换的性质 $h^{(k)}(x)\leftrightarrow(\mathrm{j}\omega)^kH(\omega)$ 即可得证.

4.4　设二极管的电压 $X(t)$ 是零均值正态随机过程, 其自相关函数为 $R_X(\tau)=ce^{-\alpha|\tau|}$, 其中 c 和 a 为常数, 求产生的电流 $Y(t)=Ie^{\alpha X(t)}$ 的均值、方差及其功率谱.

4.5　设有理想限幅器

$$Y(t)=\begin{cases}1 & (X(t)\geqslant 0)\\ -1 & (X(t)<0)\end{cases},$$

假定输入为零均值正态随机过程.

(1) 求 $Y(t)$ 的一维概率密度和均值;

(2) 用 Price 定理证明

$$R_Y(\tau)=\frac{2\alpha}{\pi}=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(r_X(\tau)\right),$$

其中 $r_X(\tau)=R_X(\tau)/\sigma^2$.

4.6　设有随机变量 X 和 Y 是联合正态随机变量, 且具有边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$,$E(X)=E(Y)=0$, $E\left(X^2\right)=E\left(Y^2\right)=\sigma^2$, $E(XY)=\mu_0$. 证明:

$$E\left[f_X(X)f_Y(Y)\right]=\frac{1}{2\pi\sqrt{4\sigma^2-\mu^2}}.$$

4.7　设有一零均值平稳正态随机过程, 其自相关函数为 $R_X(\tau)$, 它的一维分布函数为 $F_X(x)$, 定义一个无记忆非线性系统

$$Y(t)=F_X[X(t)]-\frac{1}{2},$$

试用 Price 定理证明 $Y(t)$ 的自相关函数为

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\frac{R_X(\tau)}{2R_X(0)}\right).$$

提示: $F_X[X(t)]$ 在 $(0,1)$ 区间上服从均匀分布, 所以 $F_X[X(t)] - 1/2$ 在 $(-1/2, 1/2)$ 上服从均匀分布.

4.8 如图所示非线性系统. 该系统输入为零均值, 功率谱密度为 $G_x(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声. 不考虑其他因素, 试求输出随机过程 $Y(t)$ 的自相关函数和功率谱密度.

4.9 量化编码器由函数 $y = g(x)$ 表示, 如图所示. 假设输入过程 $X(t)$ 是高斯随机过程, 均值和自相关函数分别为 $m_X = 0, R_X(\tau) = d^2\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$. 试求:

(1) 输出过程的均值 $m_Y(t)$;

(2) 输出过程 $Y(t)$ 的一阶概率密度 $f_Y(y,t)$.