第 5 章 窄带随机过程

5.1　证明:

(1) 偶函数的希尔伯特变换为奇函数;

(2) 奇函数的希尔伯特变换为偶函数.

5.2　设 $A(t)$ 与 $\varphi(t)$ 为低频信号, 证明:

(1) $\mathscr{H}\left\{A(t)\cos\left[\omega_0 t+\varphi(t)\right]\right\}=A(t)\sin\left[\omega_0 t+\varphi(t)\right]$;

(2) $\mathscr{H}\left\{A(t)\sin\left[\omega_0 t+\varphi(t)\right]\right\}=-A(t)\cos\left[\omega_0 t+\varphi(t)\right]$.

证明

(1)

(2)

5.3　证明广义平稳过程 $X(t)$ 与其希尔伯特 $\hat{X}(t)$ 的相关函数存在下述关系:

(1) $R_{X\hat{X}}(\tau)=-\hat{R}_X(\tau)$;

(2) $R_{\hat{X}X}(\tau)=\hat{R}_X(\tau)$;

(3) $R_{\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)$;

(4) $R_{X\hat{X}}(\tau)$ 是奇函数.

5.4　设 $X(t)$ 的解析信号为 $Z(t)=X(t)+j\hat{X}(t)$:

(1) 证明 $E\left[Z(t)Z^*(t-\tau)\right]=2\left[R_X(\tau)+\mathrm{j}\hat{R}_X(\tau)\right]$;

(2) 证明 $E[Z(t)Z(t-\tau)]=0$.

5.5　设一个线性系统输入为 $X(t)$ 时, 相应的输出为 $Y(t)$. 证明若该系统的输入为 $X(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{X}(t)$, 则相应的输出为 $Y(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{Y}(t)$.

5.6　在复随机过程 $Z(t)=X(t)+\mathrm{j}Y(t)$ 中, 如果 $Z(t)$ 的均值 $E[Z(t)]=E[X(t)]+\mathrm{j}E[Y(t)]=m_Z$ 是复常数, 且 $Z(t)$ 的自相关函数 $E\left[Z(t)Z^*(t-\tau)\right]=R_Z(\tau)$ 为仅与 τ 有关的复函数, 则称 $Z(t)$ 为复平稳随机过程. 设 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个实随机变量, $\omega_k(k=1,2,\ldots,n)$ 是 n 个实数, 试问 A_k 应该满足怎样的条件才能使

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t}$$

是一个复平稳随机过程.

5.7　设有复随机过程

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\cos\omega_i t+j\beta_i\sin\omega_i t\right)$$

其中 α_i 与 β_k 是相互独立的随机变量, α_i 与 α_k、β_i 与 $\beta_k(i\neq k)$ 是相互正交的, 数学期望和方差分别为 $E\left[\alpha_i\right]=E\left[\beta_i\right]=0,\sigma_{\alpha_i}^2=\sigma_{\beta_i}^2=\sigma_i^2$. 求其复随机过程的相关函数.

5.8　设信号 $X(t)$ 的带宽限制在 Ω 上, 证明信号预包络模平方的带宽为 2Ω.

5.9　对于调频信号 $X(t)=\cos\left[\omega_{\mathrm{c}}t+m(t)\right]$, 设 $\mathrm{d}m(t)/\mathrm{d}t\leqslant\omega_{\mathrm{c}}$, 即为窄带信号, 求该信号的复包络和包络的表示式.

5.10　证明

$$G_{\mathrm{c}}(\omega)=G_{\mathrm{s}}(\omega)=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{sgn}\left(\omega+\omega_0\right)\right]G_Y\left(\omega+\omega_0\right)+\frac{1}{2}\left[1-\operatorname{sgn}\left(\omega-\omega_0\right)\right]G_{\mathrm{Y}}\left(\omega-\omega_0\right)$$

以及

$$G_{\mathrm{cs}}(\omega)=\frac{\mathrm{j}}{2}\left[1+\operatorname{sgn}\left(\omega+\omega_0\right)\right]G_{\mathrm{Y}}\left(\omega+\omega_0\right)-\frac{\mathrm{j}}{2}\left[1-\operatorname{sgn}\left(\omega-\omega_0\right)\right]G_{\mathrm{Y}}\left(\omega-\omega_0\right).$$

5.11　设功率密度为 $N_0/2$ 的零均值白高斯噪声通过一个理想带通滤波器, 此滤波器的增益为 1, 中心频率为 f_c, 带宽为 $2B$. 求滤波器输出的窄带过程 $n(t)$ 和它的同相及正交分量的自相关函数 $R_n(\tau)$, $R_{n_{\mathrm{c}}}(\tau)$ 和 $R_{n_{\mathrm{s}}}(\tau)$.

5.12　考虑如图所示的 RLC 带通滤波器. 设滤波器的品质因数 $Q\gg 1$, 输入是功率谱密度为 $N_0/2$ 的零均值白高斯噪声 $W(t)$, 求滤波器输出端的窄带过程 $n(t)$ 和它的同相及正交分量额功率谱密度 $R_n(\tau)$, $R_{n_{\mathrm{c}}}(\tau)$ 和 $R_{n_{\mathrm{s}}}(\tau)$, 并以图示之.

5.13　相关函数为 $R_X(\tau)=\sigma_X^2\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau$ 的窄带随机平稳过程可以表示为 $X(t)=A_{\mathrm{c}}(t)\cos\omega_0't-A_{\mathrm{s}}(t)\sin\omega_0't$, 试在 (1) $\omega_0'\neq\omega$; (2)$\omega_0'=\omega$ 的条件下, 分别求出相关函数 $R_{\mathrm{c}}(\tau)$, R_{s} 及互相关函数 $R_{\mathrm{cs}}(\tau)$.

5.14　考虑窄带高斯过程 $n(t)=X(t)\cos\omega_{\mathrm{c}}t-Y(t)\sin\omega_{\mathrm{c}}t$, 假定功率谱密度对称于载频 ω_{c}, 求概率密度 $f\left(x_t,x_{t-x},y_t,y_{t-\tau}\right)$.

5.15　设 $A(t)$ 为平稳的窄带正态过程的包络, 试证:

$$E[A(t)]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_X,\quad \sigma_A^2=D[A(t)]=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma_X^2,$$

其中 σ_X^2 为正态过程的方差.

5.16　χ 变量为 χ^2 变量的平方根, 证明 n 个自由度的 χ 变量的概率密度为

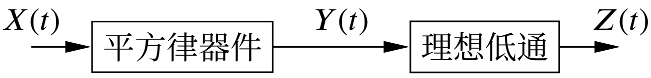
$$f(\chi)=\frac{\chi^{n-1}\mathrm{e}^{-\chi^2/2}}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

5.17　证明 n 个自由度的 χ^2 变量的第 m 阶中心矩为

$$2^m\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}+m-1\right).$$

5.18　一检波器如图所示, 其中非线性器件部分的传输特性为 $y=bx^2$. 设输入信号 $X(t)$ 为一窄带正态噪声, 且可表示为 $X(t)=V(t)\cos\left[\omega_{\mathrm{c}}t+\varphi(t)\right]$, 其概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right].$$



求 $Z(t)$ 的概率密度、均值和方差.

5.19　在平方律包络检波器输入端加以窄带随机电压信号, 其包络 $A(t)$ 服从瑞利分布

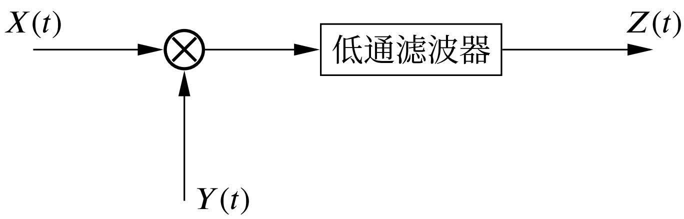
$$f_A\left(A_t\right)=\frac{A_t}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{A_t^2}{2\sigma^2}\right]\quad\left(A_t\geqslant 0\right).$$

求在 $Y(t)=\dfrac{\alpha^2}{2}A^2(t)$ 时, 检波器 $Y(t)$ 输出的概率密度、均值和方差.

5.20　同步检波器如图所示, 设 $X(t)$ 为以窄带平稳噪声, 其相关函数为

$$R_x(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau+\frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right)\quad\left(\alpha\ll\omega_0\right),$$

而 $Y(t)=A\sin\omega_0 t$ 为一确定性信号, 求同步检波器输出端的平均功率 P_Z.



5.21　双边带抑制载波调制和单边带调制中, 若消息信号均为 3kHz 限带低频信号, 载频为 1MHz, 接收信号功率为 1mW, 加性白色高斯噪声双边带功率皮密度为 $10^{-3}\mu$W/Hz.

(1) 比较调解器输入信噪比;

(2) 比较调解器输出信噪比.