第 1 章 随机变量基础

1.1　设有两个随机变量 X 和 Y, 证明

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

提示: 首先证明 $F(y|x<X\leqslant x+\Delta x)=\dfrac{\int_{-\infty}^{y}\int_{x}^{x+\Delta x}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{F_X(x+\Delta x)-F_X(x)}$, 然后对 y 求导得

$$f_{Y|x<X<x+\Delta x}(y|x<X\leqslant x+\Delta x)=\frac{\int_{x}^{x+\Delta x}f(x,y)\mathrm{d}x}{F_X(x+\Delta x)-F_X(x)}\approx\frac{f(x,y)\Delta x}{f_X(x)\Delta x},$$

最后求 $\Delta x\to 0$ 的极限.

证明

$$\begin{aligned}F(y|x<X\leqslant x+\Delta x)&=\frac{P\left\{Y\leqslant y,x<X\leqslant x+\Delta x\right\}}{P\left\{x<X\leqslant x+\Delta x\right\}}\\&=\frac{\int_{-\infty}^{y}\int_{x}^{x+\Delta x}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{F_X(x+\Delta x)-F_X(x)}\end{aligned}$$

上式两边对 y 同时求导, 得

$$\begin{aligned}f_{y|x<X\leqslant x+\Delta x}(y|x<X\leqslant x+\Delta x)&=\frac{\int_{x}^{x+\Delta x}f(x,y)\mathrm{d}x}{F_X\left(x+\Delta x\right)-F_X\left(x\right)}\\&\approx\frac{f(x,y)\Delta x}{f_X(x)\Delta x},\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}f_{Y|X}(y|x)&=\lim_{\Delta x\to 0}f_{Y|x<X\leqslant x+\Delta x}(y|x<X\leqslant x+\Delta x)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x,y)\Delta x}{f_X(x)\Delta x}\ \text{(直接得出结果,个人觉得不尽自然)}\\&=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}\\&=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}.\end{aligned}$$

同理得

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

□

1.2　设随机变量 X 服从二项式分布, 其概率分布律为

$$P\{X=m\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\quad\left(m=0,1,2,\dots,n_i;\ 0<p<1\right),$$

求 X 的均值和方差.

解

解法 1　直接按照定义计算

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{m=0}^{n} mP\{X=m\} = \sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m (1-p)^{n-m} \\
&= \sum_{m=0}^{n} m \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \\
&= \sum_{m=0}^{n} m \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^{n-m} \\
&= \sum_{m=1}^{n} m \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^{n-m} \\
&= np \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]}{(m-1)!} p^{m-1} (1-p)^{[(n-1)-(m-1)]} \\
&= np \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{m!} p^m (1-p)^{[(n-1)-m]} \\
&= np \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots[(n-1)-m+1]}{m!} p^m (1-p)^{[(n-1)-m]} \\
&= np[p+(1-p)]^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}
$$

根据二项式定理

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!} a^i b^{n-i}
\end{aligned}
$$

得 $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots[(n-1)-m+1]}{m!} p^m (1-p)^{[(n-1)-m]} = [p+(1-p)]^{n-1}$, 故

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= E[X(X-1)+X] = E[X(X-1)] + E(X) \\
&= \sum_{m=0}^{n} m(m-1) C_n^m p^m (1-p)^{n-m} + np \\
&= n(n-1)p^2[p+(1-p)]^{n-2} + np \\
&= n(n-1)p^2 + np.
\end{aligned}
$$

所以 X 的方差为

$$
D(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).
$$

解法 2　设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立, 且都服从 (0-1) 分布, 分布规律为

$$
P\left\{X_i = 0\right\} = 1-p, \quad P\left\{X_i = 1\right\} = p, \quad i = 1, 2, \ldots, n,
$$

则 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的所有可能取值为 $0,1,2,\ \dots,n$. 由独立性可知, X 以特定的方式取 m(如前 m 个取 1, 后 m 个取 0) 的概率为 $p^m(1-p)^{n-m}$. 而 X 取 m 的两两互不相容的方式有 C_n^m 种可能, 故有

$$P\{X=m\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}, \quad m=0,1,2,\dots,n,$$

所以 X 服从参数为 n,p 的二项分布.

且有

$$\begin{aligned}
E\left(X_i\right)&=1\cdot P\left\{X_i=1\right\}+0\cdot P\left\{X_i=0\right\}=p,\\
E\left(X_i^2\right)&=1^2\cdot P\left\{X_i=1\right\}+0^2\cdot P\left\{X_i=0\right\}=p,\\
D\left(X_i\right)&=E\left(X_i^2\right)-E^2\left(X_i\right)=p-p^2=p(1-p).
\end{aligned}$$

根据 X_i 之间的独立性, 对于服从二项分布的 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 有

$$\begin{aligned}
E(X)&=E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)=np,\\
D(X)&=D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} D\left(X_i\right)=np(1-p).
\end{aligned}$$

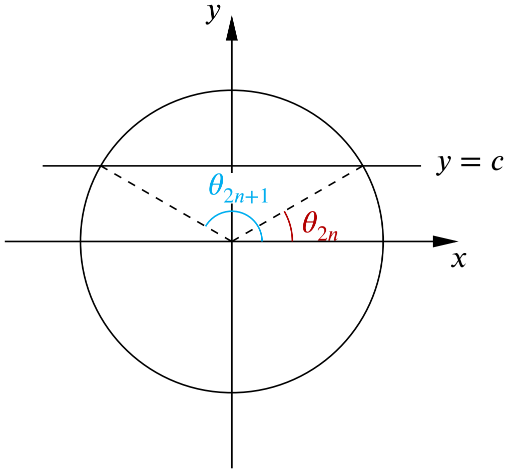
1.3 设随机变量 Y 与 X 满足如下函数关系

$$Y=g(X)=\sin(X+\theta)$$

其中 θ 是已知常量, 求 Y 的概率密度.

解 显然, 若 $|y|>1$, 则 $f_Y(y)=0$. 若 $|y|\leqslant 1$, 这时对任意的 y, 有无穷多个 x 值与之对应, 即

$$\begin{aligned}
x_{2n}&=\arcsin y-\theta+2\pi n, \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots,\\
x_{2n+1}&=\pi-\arcsin y-\theta+2\pi n, \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots,\\
\left|J_n\right|&=\left|\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}y}\right|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.
\end{aligned}$$



所以, 当 $|y| \leqslant 1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[g^{-1}\left(x_{2n}\right) + g^{-1}\left(x_{2n+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[g^{-1}(\arcsin y - \theta + 2\pi n) + g^{-1}(\pi - \arcsin y - \theta + 2\pi n)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g^{-1}\left(x_n\right)
\end{aligned}
$$

即 Y 的概率密度为

$$
f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g^{-1}\left(x_n\right) & (|y| \leqslant 1) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}.
$$

1.4 设有随机变量 X_1 和 X_2, 求 $Y = X_1 X_2$ 和 $Z = X_1/X_2$ 的概率密度.

解

(1) $Y = X_1 X_2$

设 $Y_1 = X_1, Y_2 = X_1 X_2$, 对应的反函数关系为

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1, \\
x_2 &= y_2/y_1,
\end{aligned}
$$

则

$$
J = \frac{\partial\left(x_1, x_2\right)}{\partial\left(y_1, y_2\right)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -y_2/y_1^2 & -1/y_1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{y_1},
$$

$$
f_{Y_1 Y_2}\left(y_1, y_2\right) = f_{X_1 X_2}\left(x_1, x_2\right)|J| = \frac{1}{\left|y_1\right|} f_{X_1 X_2}\left(y_1, y_2/y_1\right),
$$

$$
f_{Y_2}\left(y_2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1 Y_2}\left(y_1, y_2\right) \mathrm{d}y_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left|y_1\right|} f_{X_1 X_2}\left(y_1, y_2/y_1\right) \mathrm{d}y_1,
$$

即两个随机变量之积的概率密度为

$$
f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|u|} f_{X_1 X_2}(u, y/u) \mathrm{d}u.
$$

(2)

$$
Y_1 = X_1/X_2
$$

设 $Y_1 = X_1, Y_2 = X_1/X_2$, 对应的反函数关系为

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1, \\
x_2 &= y_1/y_2,
\end{aligned}
$$

则

$$
J = \frac{\partial\left(x_1, x_2\right)}{\partial\left(y_1, y_2\right)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/y_2 & -y_1/y_2^2 \end{vmatrix} = -\frac{y_1}{y_2^2},
$$

$$f_{Y_1Y_2}\left(y_1, y_2\right) = f_{X_1X_2}\left(x_1, x_2\right)|J| = \frac{|y_1|}{y_2^2} f_{X_1X_2}\left(y_1, y_1/y_2\right),$$

$$f_{Y_2}\left(y_2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1Y_2}\left(y_1, y_2\right)\mathrm{d}y_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y_1|}{y_2^2} f_{X_1X_2}\left(y_1, y_1/y_2\right)\mathrm{d}y_1,$$

在上式中令 $u = y_1/y_2$, 则

$$f_{Y_2}\left(y_2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u| f_{X_1X_2}\left(y_2 u, u\right)\mathrm{d}u,$$

即两个随机变量之商的概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u| f_{X_1X_2}(yu, u)\mathrm{d}u.$$

拓展

1. $Z = X + Y$ 的分布为

$$f_{x+y}(z) = f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x.$$

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布,

$$Z \sim N\left(a\mu_1 + b\mu_2 + \cdots + n\mu_n, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + \cdots + n^2\sigma_n^2\right).$$

2. $M = \max\left\{X_1, X_2, \cdots, X_n\right\}$ 及 $N = \min\left\{X_1, X_2, \cdots, X_n\right\}$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_{x_1}(z) F_{x_2}(z) \cdots F_{x_n}(z),$$
$$F_{\min}(z) = 1 - \left[1 - F_{x_1}(z)\right]\left[1 - F_{x_2}(z)\right] \cdots \left[1 - F_{x_n}(z)\right].$$

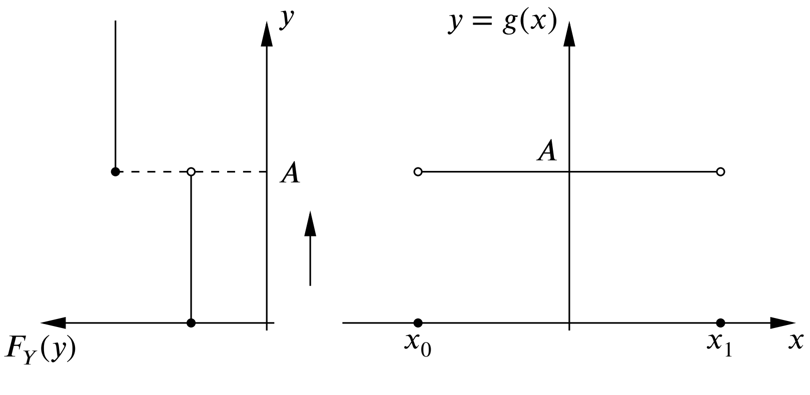
1.5　设 $Y = g(X)$, 其中

$$g(x) = \begin{cases} A & \left(x_0 < x < x_1\right) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases},$$

假定随机变量的概率分布函数已知, 求 Y 的概率分布函数.[1]

解

函数 $g(x)$ 的图像:



解法一　根据概率分布函数的定义计算.

[1]题目应该注明 $A > 0$ 较为合理, 解题过程中认定如此, 否则需要分类讨论.

当 $y \leqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\left\{X \leqslant x_0\right\} + P\left\{X \geqslant x_1\right\} \\ &= P\left\{X \leqslant x_0\right\} + 1 - P\left\{X \leqslant x_1\right\} + P(x_1)(=0) \\ &= F\left(x_0\right) + 1 - F\left(x_1\right).\end{aligned}$$

当 $y \leqslant A$ 时,$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\left\{x_0 < X < x_1\right\} = F_X\left(x_1\right) - F_X\left(x_0\right) + P(x_1)(=0)$.

所以,Y 的概率分布函数为

$$F_Y(y) = \left[1 - F_X\left(x_1\right) + F_X\left(x_0\right)\right] U(y) + \left[F_X\left(x_1\right) - F_X\left(x_0\right)\right] U(y-A).$$

解法二　从概率密度 $f_Y(y)$ 求解概率分布函数 $F_Y(y)$.

由图可知 $g(x)$ 的取值只能可能为 0 或 A, 求 Y 的概率分布函数, 也就是对 $g(x)$ 取 0 或 A 可能性的讨论.

对于 $g(x)$ 取 0 的情况, 只有 $x_1 \geqslant c$ 或 $x_0 \leqslant -c$ 的时候才有可能:

$$P(Y=0) = 1 - P\left(x_0 \leqslant X \leqslant x_1\right).$$

对于 $g(x)$ 取 A 的情况, 只有 $-c < x < -c$ 的时候才有可能:

$$P(Y=A) = P\left(x_0 < X < x_1\right).$$

所以 Y 的概率密度为

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= P(Y=0)\delta(y) + P(Y=A)\delta(y-A) \\ &= \left[1 - P\left(x_0 \leqslant X \leqslant x_1\right)\right]\delta(y) + P\left(x_0 < X < x_1\right)\delta(y-A) \\ &= \left[1 - F_X\left(x_1\right) + F_X\left(x_0\right)\right]\delta(y) + \left[F_X\left(x_1\right) - F_X\left(x_0\right)\right]\delta(y-A).\end{aligned}$$

对 $f_Y(y)$ 求积分可以得到 Y 的概率分布函数 $F_Y(y)$, 注意其中 $1 - F_X\left(x_1\right) + F_X\left(x_0\right)$ 和 $F_X\left(x_1\right) - F_X\left(x_0\right)$ 是常数. 故

$$F_Y(y) = \left[1 - F_X\left(x_1\right) + F_X\left(x_0\right)\right] U(y) + \left[F_X\left(x_1\right) - F_X\left(x_0\right)\right] U(y-A).$$

归纳　对于函数 $Y = g(X)$, 如果在区间 $[x_0, x_1]$ 上为常数 A, 即 $Y = g(X) = A, x \in \left[x_0, x_1\right]$, 那么 Y 的概率密度函数在 $y = A$ 处不连续, 跃变高度为 $F_X\left(x_1\right) - F_X\left(x_0\right)$.

1.6　设函数 $g(x)$ 为

$$g(x) = \begin{cases} x + c & (x < -c) \\ 0 & (-c < x \leqslant c) \\ x - c & (x > c) \end{cases},$$

其中 $c > 0$ 为常数, 假定随机变量 X 的概率分布函数已知, 求 $Y = g(X)$ 的概率分布函数.

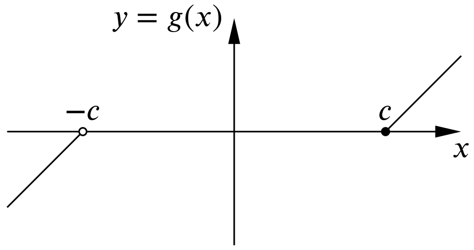
解　函数 $g(x)$ 的图像:

解法一　根据概率分布函数的定义计算.

当 $y = g(x) > 0$ 时, y 和 x 是一一对应的, 也就是说 x 取什么值, y 的取值是唯一确定的, 故 $F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{X + c \leqslant y\} = F_X(y-c)$.

当 $y = g(x) < 0$ 时, y 和 x 仍然是一一对应的, 故 $F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{X - c \leqslant y\} = F_X(y+c)$.

当 $y = g(x) = 0$ 时, y 和 x 之间是一对多的关系, 也就是说 y 取 0 时, 此时 x 有区间 $(-c, c]$ 之间任何一个值的可能, 故 $F_Y(0) = P\{Y \leqslant 0\} = P\{X \leqslant c\} = F_X(c)$.



所以 $Y=g(X)$ 的概率分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases} F_X(y-c) & (y<0) \\ F_X(y+c) & (y\geqslant 0) \end{cases}$.

解法二　从概率密度 $f_Y(y)$ 求解概率分布函数 $F_Y(y)$.

当 $y>0$ 时, $P(Y=y)=P(X=y+c)$, 故 $f_Y(y)=f_X(y+c)$.

当 $y<0$ 时, $P(Y=y)=P(X=y-c)$, 故 $f_Y(y)=f_X(y-c)$.

当 $y=0$ 时, $g(x)$ 取点 0 的概率跟 x 取一段的概率相等, 此时 $P(Y=0)=P(-c<X\leqslant c)$,$f_Y(0)=F_X(c)-F_X(-c)$.

对 $Y=g(X)$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$ 求积分得到它的概率分布函数为:

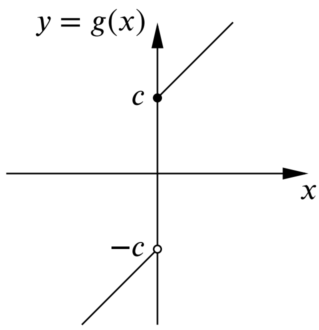
$$F_Y(y)=\begin{cases} F_X(y-c) & (y<0) \\ F_X(y+c) & (y\geqslant 0) \end{cases}.$$

1.7　设函数 $g(x)$ 为

$$g(x)=\begin{cases} x-c & (x<0) \\ x+c & (x\geqslant 0) \end{cases},$$

其中 $c>0$ 为常数, 假定随机变量 X 的概率分布函数已知, 求 $Y=g(X)$ 的概率分布函数.

解　函数 $g(x)$ 的图像:



解法一　根据概率分布函数的定义计算.

当 $y<-c$ 时, $P\{Y\leqslant y\}=P\{X-c\leqslant y\}=F_X(y+c)$.

当 $-c\leqslant y<c$ 时, $P\{Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant 0\}=F_X(0)$.

当 $y\geqslant c$ 时, $P\{Y\leqslant y\}=P\{X+c\leqslant y\}=F_X(y-c)$.

所以 $Y=g(X)$ 的概率分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases} F_X(y-c) & (y\geqslant c) \\ F_X(0) & (-c\leqslant y<c) \\ F_X(y+c) & (y<-c) \end{cases}$.

解法二　从概率密度 $f_Y(y)$ 求解概率分布函数 $F_Y(y)$.

当 $y\geqslant c$ 时, $P(Y=y)=P(X=y-c)$, 故 $f_Y(y)=f_X(y-c)$.

当 $-c\leqslant y<c$ 时, $P(-c\leqslant Y\leqslant c)=P(X=0)$, 故 $f_Y(Y)=F_X(0)$.

当 $y\leqslant -c$ 时, $P(Y=y)=P(X=y+c)$, 故 $f_Y(y)=f_X(y+c)$.

所以, $Y=g(X)$ 的概率分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases} F_X(y-c) & (y\geqslant c) \\ F_X(0) & (-c\leqslant y<c) \\ F_X(y+c) & (y<-c) \end{cases}$.

1.8　设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y} & (y>|x|,\ -\infty<x<\infty) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases},$$

求 $E(Y|X)$.

解　根据 (X,Y) 联合概率密度可以求出 x 的概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{|x|}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

按照条件概率密度的定义, 得

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=e^{-y+|x|}.$$

所以, $E(Y|X)=\int_{|x|}^{+\infty} y\cdot f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\int_{|x|}^{+\infty} ye^{-y+|x|}\mathrm{d}y=|x|+1.$

1.9　已知随机变量 X 在 $[0,a]$ 上服从均匀分布, 随机变量 Y 在 $[X,a]$ 上服从均匀分布, 试求

(1)$E(Y|X=x)(0<x<a)$;

(2)$E(Y)$.

解　在此需要注意 X 与 x 的区别; 前者表示的是随机变量, 后者表示的是随机变量 X 的可能取值. 所以 $E(Y|X=x)$ 表示的是随机变量 X 取值为 x 时随机变量 Y 的数学期望. 只有随机变量才会有概率分布, 数学期望, 方差等统计描述, 类似于 $f_X(x)$, $P(x=6)$ 和 $E(x)$ 等都是没有意义的符号.

(1) 由条件知 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{a-x} & (0<x<y<a) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$, 因此对任意的 $0<x<a$, 有

$$E(Y|X=x)=\int_x^a y\cdot f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\int_x^a \frac{y}{a-x}\mathrm{d}y=\frac{a+x}{2}.$$

(2) $E(Y)=E[E(Y|X)]=E\left(\frac{a+X}{2}\right)=\frac{3}{4}a.$

回顾　均匀分布的均值和方差计算.

设随机变量 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布, 其概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a<x<b) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$.

X 的均值为

$$E(X)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a+b).$$

X 的方差为

$$D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x-\frac{1}{4}(a+b)^2$$
$$=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

拓展 条件期望公式: $E[X]=E[E[X|Y]]=\int E[X|Y=y]\mathrm{d}F_Y(y)$.
如果 Y 是一个离散变量, 则 $E[X]=\sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\}$.
如果 Y 是连续的, 具有密度 $f_Y(y)$ 时, 则 $E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} E[X|Y=y]f(y)\mathrm{d}y$.
现就 X 和 Y 都是离散随机变量的情形给出证明:

$$
\begin{aligned}
&\sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\}\\
&=\sum_y\sum_x xP\{X=x|Y=y\}P(Y=y\}\\
&=\sum_y\sum_x xP\{X=x,Y=y\}\\
&=\sum_x x\sum_y P\{X=x,Y=y\}\\
&=\sum_x xP\{X=x\}\\
&=E[X].
\end{aligned}
$$

□

1.10 设随机矢量 (X,Y) 联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{2(ax+by)}{a+b}\quad(0<x,y<1),$$

计算 (1)$E(X|Y=1/4)$; (2)$E(Y|X=1/2)$.

解 这里的条件应该是 $0<x<y<1$, 否则难以求解, 下题解遵循此条件.

(1)

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2(ax+by)}{a+b}\mathrm{d}x=\frac{a+2by}{a+b};$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{2(ax+by)}{a+2by};$$

$$f_{X|Y}\left(x|y=\frac{1}{4}\right)=\frac{2(ax+by)}{a+2by}\bigg|_{y=-\frac{1}{4}}=\frac{4ax+b}{2a+b};$$

$$E\left(X|Y=\frac{1}{4}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\frac{4ax+b}{2a+b}\mathrm{d}x=\frac{8a+3b}{6(2a+b)}.$$

(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{2(ax+by)}{a+b}\mathrm{d}y=\frac{2ax+b}{a+b};$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{2(ax+by)}{2ax+b};$$

$$f_{Y|X}\left(y|x=\frac{1}{2}\right)=\frac{2(ax+by)}{2ax+b}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{a+2by}{a+b};$$

$$E\left(Y|X=\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\frac{a+2by}{a+b}\mathrm{d}y=\frac{3a+4b}{6(a+b)}.$$

1.11　某设备的有效期 (按年计算) 的分布函数为

$$F_x(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1-\mathrm{e}^{-x/5} & (0\leqslant x<\infty)\end{cases}.$$

求:(1) 该设备有效期的均值; (2) 该设备有效期的方差.

提示: 对于非负的随机变量 X, 有 $E[X]=\int_0^{+\infty}\left[1-F_x(x)\right]\mathrm{d}x$.

解

解法一　对分布函数求导可以得到有效期的概率密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \dfrac{1}{5}e^{-x/5} & (0\leqslant x<\infty)\end{cases}.$$

(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{5}xe^{-x/5}\mathrm{d}x=5.$

(2) $E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{5}x^2e^{-x/5}\mathrm{d}x=50$, 故 $D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=50-5^2=25.$

解法二　根据题目提示解答

(1) $E[X]=\int_0^{+\infty}\left[1-F_X(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x/5}\mathrm{d}x=5.$

(2) $D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=50-5^2=25.$

拓展 证明对于非负的随机变量 X, 有 $E[X]=\int_0^{+\infty}\left[1-F_x(x)\right]\mathrm{d}x$.

假设右边的积分公式为 $\int_0^{c}\left[1-F_X(x)\right]\mathrm{d}x$, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{c}\left[1-F_X(x)\right]\mathrm{d}x&=\int_0^c 1\cdot\mathrm{d}x+\int_0^c F_X(x)\mathrm{d}x\\&=c+F_X(x)\cdot x\Big|_0^c-\int_0^c x\mathrm{d}F_X(x)\\&=c+F_X(c)\cdot c-\int_0^c xf_X(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $c\to+\infty$ 时,

$$\int_0^{+\infty}\left[1-F_X(x)\right]\mathrm{d}x=\lim_{c\to\infty}\int_0^{c}\left[1-F_X(x)\right]\mathrm{d}x=\lim_{c\to\infty}\left[c+F_X(c)\cdot c-\int_0^c xf_X(x)\mathrm{d}x\right]$$

代入 $F_X(+\infty)=1$, 得

$$\int_0^{+\infty}\left[1-F_X(x)\right]\mathrm{d}x=\lim_{c\to\infty}\int_0^{c}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=E[X].$$

□

1.12　设 X_1,X_2,X_3 相互独立, 且都服从均值为 0, 方差为 1 的标准正态分布, 证明:

$$Y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_1-X_2\right),\quad Y_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(X_1+X_2-2X_3\right),\quad Y_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(X_1+X_2+X_3\right)$$

也相互独立, 且都服从均值为 0, 方差为 1 的标准正态分布.

证明　传统证明过于繁琐, 使用线性变换证明.

可以把 $\boldsymbol{Y}=\left[Y_1,Y_2,Y_3\right]^{\mathrm{T}}$ 看作是对 $\boldsymbol{X}=\left[X_1,X_2,X_3\right]^{\mathrm{T}}$ 作线性变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}$ 得来的, 且 $\boldsymbol{X}$ 服从正态分布 $\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{m},\boldsymbol{K})$, 其中

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{K}=\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},$$

可以算出线性变换矩阵的秩 $r(\boldsymbol{L})=3$, 且 $\boldsymbol{X}=\left[X_1,X_2,X_3\right]^{\mathrm{T}}$ 的协方差矩阵为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$, 易知 $\boldsymbol{Y}$ 服从三围正态分布, 均值 $\boldsymbol{m}_Y=\boldsymbol{L}\boldsymbol{m}=0$; 协方差矩阵为 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$, 即 $\boldsymbol{Y}\sim N(\boldsymbol{O},\boldsymbol{I})$.

由于 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵为单位矩阵, 表明 $\boldsymbol{Y}$ 的各个分量相互独立. 从 $\boldsymbol{Y}$ 的均值向量和协方差矩阵看出 $\boldsymbol{Y}$ 的各个分量都服从均值为 0, 方差为 1 的标准正态分布.

正态随机变量的线性变换　设有一 n 维正态随机矢量 $\boldsymbol{X}=\left[X_1,X_2,\cdots,X_n\right]^{\mathrm{T}}$, 定义如下变换:

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X},$$

其中

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}l_{11}&l_{12}&\cdots&l_{1n}\\l_{21}&l_{22}&\cdots&l_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{nm}\end{bmatrix}.$$

随机矢量 $\boldsymbol{Y}$ 的概率密度为

$$f_Y(\boldsymbol{y})=|J|f_X(\boldsymbol{x})=|J|f_X\left(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{y}\right),$$

式中 $\boldsymbol{x}=\left[x,x_2,\cdots,x_n\right]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=\left[y,y_2,\cdots,y_n\right]^{\mathrm{T}}$, J 为雅可比行列式:

$$J=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}=\det\left(\boldsymbol{L}^{-1}\right)=\frac{1}{\det(\boldsymbol{L})},$$

其中 $\det(\boldsymbol{L})$ 为 $\boldsymbol{L}$ 的行列式, 所以

$$\begin{aligned}f_Y(\boldsymbol{y})&=\frac{1}{|\boldsymbol{L}|}f_X\left(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{y}\right)\\&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{K}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{m}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{-1}\left(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{m}\right)\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(|\boldsymbol{L}|^2|\boldsymbol{K}|\right)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{m})\right]\end{aligned}$$

可见经过变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}$ 后,$\boldsymbol{Y}$ 仍服从正态分布, 其均值为 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{m}$, 协方差阵为 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$.

1.13　设 X 和 Y 为零均值正态随机变量, 其方差分别为 σ^2, X 和 Y 的相关系数为 r, 证明:

(1)$P\{X>0,Y>0\}=P\{X<0,Y<0\}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{2\pi}$

(2)$P\{X>0,Y<0\}=P\{X<0,Y>0\}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{2\pi}$

(3) $P\{XY>0\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{\pi}$

(4) $P\{XY<0\}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\pi}$

其中 $\alpha=\arcsin r$.

证明 由题可知 X 和 Y 服从二维正态分布, 其概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\left(\frac{x^2-2rxy+y^2}{\sigma^2}\right)\right].$$

(1) $P\{X>0,Y>0\}=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 令 $\alpha=\frac{x}{\sigma},\beta=\frac{y}{\sigma}$ 所以

$$\begin{aligned}P\{X>0,Y>0\}&=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\frac{\alpha^2-2r\alpha\beta+\beta^2}{2\left(1-r^2\right)}\right]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a-r\beta}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2-\frac{1}{2}\beta^2\right]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta,\end{aligned}$$

再令 $u=\frac{a-r\beta}{\sqrt{1-r^2}},v=\beta$, 则

$$\begin{aligned}P\{X>0,Y>0\}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\pi/\sqrt{1-r^2}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}v^2\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\arcsin r}^{\frac{\pi}{2}}R\exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}R\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin r\right)=\frac{1}{4}+\frac{\arcsin r}{2\pi}=\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2\pi}.\end{aligned}$$

根据积分公式的对称性可知,$P\{X<0,Y<0\}=P\{X>0,Y>0\}=\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2\pi}$.

(2) 与 (1) 类似:

$$\begin{aligned}P\{X>0,Y<0\}&=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{-\infty}\sqrt{1-r^2}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}v^2\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin r}R\exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}R\\&=\frac{1}{2\pi}\left(-\arcsin r+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{\arcsin r}{2\pi}=\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2\pi}.\end{aligned}$$

同理有 $P\{X<0,Y>0\}=P\{X>0,Y<0\}=\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2\pi}$.

(3)

$$P\{XY>0\}=P\{X>0,Y>0\}+P\{X<0,Y<0\}=\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\pi}.$$

(4)

$$P\{XY<0\}=P\{X>0,Y<0\}+P\{X<0,Y>0\}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\pi}.$$

也可以 $P\{XY<0\}=1-P\{XY>0\}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\pi}$.

1.14　设有 N 个互相独立的正态随机变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 它们都有零均值和单位方差, 令

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

通常称 χ^2 为具有 n 个自由度的 χ^2 变量, 它的分布称为 χ^2 分布, 证明 χ^2 分布为

$$f_{x^2}\left(\chi^2\right) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\chi^2\right)^{n/2-1}\exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right),$$

其中,$\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数. 如果 $X_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ 不是单位方差, 而是 σ^2, 那么 χ^2 分布为

$$f_{x^2}\left(\chi^2\right) = \frac{1}{\left(2\sigma^2\right)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\chi^2\right)^{n/2-1}\exp\left(-\frac{\chi^2}{2\sigma^2}\right).$$

提示: 利用特征函数进行证明.

证明　　证方差是 σ^2 的情况，单位方差只需令 $\sigma^2 = 1$ 即可.

由于随机变量 X_i 服从正态分布, 即 $f_{X_i}\left(x_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$, 令 $Y = X_i^2$, 则

$$f_Y(y) = \left|J_1\right| f_{X_i}\left(x_{i1}\right) + \left|J_2\right| f_{X_i}\left(x_{i2}\right),$$

其中,$x_{i1} = \sqrt{y}, x_{i2} = -\sqrt{y}, J_1 = \frac{\mathrm{d}x_{i1}}{\mathrm{d}y}, J_2 = \frac{\mathrm{d}x_{i2}}{\mathrm{d}y}$, 代入其中得

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}\exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0.$$

则 $f_Y(y)$ 对应的特征函数为 $\Phi_Y(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{j\omega y} f_Y(y)\mathrm{d}y = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - 2j\omega\sigma^2}}$.

由于 $X_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ 是相互独立的随机变量, 独立随机变量之和的特征函数等于各个随机变量特征函数的乘积, 故有

$$\Phi_{\chi^2}(\omega) = \prod_{i=1}^{n}\Phi_{X_i^2}(\omega) = \frac{\sigma^n}{\left(1 - 2j\omega\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}},$$

对其作傅里叶反变换可得

$$f_{\Gamma^2}\left(\chi^2\right) = \frac{1}{\left(2\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(-\frac{\chi^2}{2\sigma^2}\right).$$

□

1.15　设有 N 个互相独立的正态随机变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 它们都有零均值和单位方差, 令

$$Q = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(a + X_i\right)^2$$

通常称 Q 为有 n 个自由度的非中心 χ^2 变量, 其中 a 为常数, 证明 Q 的概率密度为

$$f_Q(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}}\exp\left(-\frac{\lambda + q}{2}\right)\mathrm{I}_{n/2-1}(\sqrt{q\lambda}) \quad (q \geqslant 0),$$

式中 $\lambda = na^2/\sigma^2$ 称为非中心参量, $\mathrm{I}_n(\cdot)$ 为第一类 n 阶修正贝塞尔函数.

证明　设 $Y_i = \left(a + X_i\right)^2 = X_{ai}^2$, 故 $X_{ai} = a + X_i$ 的概率密度为

$$f_{X_{ai}}\left(x_{ai}\right) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{\left(x_{ai} - a\right)^2}{2\sigma^2}\right],$$

所以 Y_i 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_{Y_i}\left(y_i\right) &= \left|J_1\right| f_{X_{ai}}\left(x_{ai1}\right) + \left|J_2\right| f_{X_\alpha}\left(x_{ai2}\right) \\ &= \frac{1}{2\left(2\pi\sigma^2 y_i\right)^{\frac{1}{2}}}\left\{\exp\left[-\frac{(\sqrt{y} - a)^2}{2\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{(-\sqrt{y} - a)^2}{2\sigma^2}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y_i}} \exp\left(-\frac{y_i + a^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{ch}\left(\frac{a\sqrt{y_i}}{\sigma^2}\right), \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, 则 $f_{Y_i}\left(y_i\right)$ 对应的特征函数为

$$\Phi_{Y_i}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2j\sigma^2\omega}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left[\frac{a^2/\left(2\sigma^2\right)}{1 - 2j\sigma^2\omega}\right].$$

令 $Q' = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, 则 Q' 的特征函数为 $\Phi_{Q'}(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{Y_i}(\omega) = \Phi_{Y_i}^n(\omega)$, 即

$$\Phi_{Q'}(\omega) = \frac{1}{\left(1 - 2j\sigma^2\omega\right)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{na^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left[\frac{na^2/\left(2\sigma^2\right)}{1 - 2j\sigma^2\omega}\right].$$

对 $\Phi_{Q'}(\omega)$ 进行傅里叶反变换可得 Q' 的概率密度函数

$$f_{Q'}\left(q'\right) = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{q'}{\lambda'}\right)^{\frac{n-2}{4}} \exp\left(-\frac{\lambda' + q'}{2\sigma^2}\right) I_{n/2-1}\left(\frac{\sqrt{q'\lambda'}}{\sigma^2}\right), \quad q' \geqslant 0,$$

归一化变量, 令 $Q = \dfrac{Q'}{\sigma^2}$, 则有

$$f_Q(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}} \exp\left(-\frac{\lambda + q}{2}\right) I_{n/2-1}(\sqrt{q\lambda}), \quad q \geqslant 0.$$

□

补充习题

1　假设一个随机事件: 抛射两枚硬币. 分别用 H 和 T 表示硬币的正面和反面.$\{HT\}$ 是一个基本事件吗?

✓. 这里要提别注意随机事件是抛射两枚硬币, 所以 $\{HT\}$ 是一个基本事件.

2　考虑一个平方律检波的例子, 假定输入输出的关系为

$$Y = bX^2,$$

求 Y 的概率密度.

解

解法一 由于 Y 的取值不可能为负, 故 $y<0$ 时, $f_Y(y)=0$.

若 $y>0$, 这时对于任意的 y, 有两个 x 值与之对应, 即

$$x_1=\sqrt{y/b},\quad x_2=-\sqrt{y/b},$$

由于 $J_1=\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{2\sqrt{by}}$, $J_2=\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{1}{2\sqrt{by}}$, 故

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{by}}\left[f_X(\sqrt{y/b})+f_X(-\sqrt{y/b})\right]\ (y>0).$$

若 $y=0$, 只有唯一的 x 与之对应,$P(Y=0)=P(X=0)=0$, 故 $f_Y(y)=0$.

$$f_Y(y)=\begin{cases}0 & (\text{else})\\ \dfrac{1}{2\sqrt{by}}\left[f_X(\sqrt{y/b})+f_X(-\sqrt{y/b})\right] & (y>0)\end{cases}.$$

解法二 从概率分布函数入手.

当 $y<0$ 时, $F_Y(y)=0$.

当 $y\geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y/b}\leqslant X\leqslant\sqrt{y/b})\\&=F_X(\sqrt{y/b})-F_X(-\sqrt{y/b}),\end{aligned}$$

对 $F_Y(y)$ 关于 y 求导, 得 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}0 & (\text{else})\\ \dfrac{1}{2\sqrt{by}}\left[f_X(\sqrt{y/b})+f_X(-\sqrt{y/b})\right] & (y>0)\end{cases}.$$

对 y 求导时, $y=0$ 时 $F_Y(y=0)=0$, 其导数为 0.

---

3 假定高斯随机变量通过一个半波线性检波,

$$y=g(x)=\begin{cases}x & (x>0)\\ 0 & (\text{else})\end{cases},$$

$X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$, 求 Y 的概率密度.

解

若 $y<0$, $f_Y(y)=0$.

若 $y=0$, 对应的 x 取 $x\leqslant 0$, $P(Y=0)=P(X\leqslant 0)$, $F_Y(0)=P(Y\leqslant 0)=P(X\leqslant 0)=F_X(0)=1/2$, 则 $f_Y(y)=\dfrac{1}{2}\delta(y)$.

若 $y>0$, y 与 x 一一对应, 则 $f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))|J|$, $J=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1$, 故 $f_Y(y)=f_X(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}\right]$.

$$f_Y(y)=\begin{cases}0 & (y<0)\\ \dfrac{1}{2}\delta(y) & (y=0)\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}\right] & (y>0)\end{cases}.$$

与上一题不同, 这里 $y = 0$ 产生一个冲激函数, 原因是在 $y = 0$ 处, $f_Y(y)$ 是不连续的. 这一题和上一题的区别在于, 这一题存在一个冲激, 上一题在端点处不存在冲激虽然同为连续型随机变量, 但还是要注意其中的区别