第 2 章 随机过程的基本概念

2.1 设有正弦波随机过程 $X(t)=V\cos(\omega t)$, 其中 $0\leqslant t<\infty$, ω 为常数, V 是均匀分布于 $[0,1]$ 区间的随机变量.

(1) 画出该过程两条样本函数;

(2) 确定随机变量 $X(t_i)$ 的概率密度, 画出 $t_i=0,\dfrac{\pi}{4\omega},\dfrac{3\pi}{4\omega},\dfrac{\pi}{\omega}$ 时的概率密度的图形;

(3) 当 $t_i'=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时, 求 $X(t_i)$ 的概率密度.

解

(1)

2.2 用一枚硬币掷一次试验定义一个随机过程:

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t & (\text{出现正面})\\ 2t & (\text{出现反面})\end{cases},$$

设 “出现正面” 和 “出现反面” 的概率均为 $1/2$.

(1) 确定 $X(t)$ 的一维分布函数 $F_X(x,1/2)$, $F_X(x,1)$;

(2) 确定 $X(t)$ 的二维分布函数 $F_x\left(x_1,x_2;1/2,1\right)$;

(3) 画出上述分布函数的图形.

2.3 设某信号源每 T 秒产生一个幅度为 A 的方波脉冲, 其脉冲宽度 X 为均匀分布于 $[0,T]$ 中的随机变量. 这样构成一个随机变量 $Y(t)$, $0\leqslant t<\infty$, 其中一个样本函数示于下图. 设不同间隔中的脉冲是统计独立的, 求 $Y(t)$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

2.4 设随机过程 $X(t)=b+Nt$, 已知 b 为常量, N 为正态随机变量, 其均值为 m, 方差为 σ^2. 试求随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度及其均值和方差.

2.5 考虑一个正弦振荡器, 由于器件的热噪声和分布参数变化的影响, 振荡器输出的正弦波可看作一个随机过程 $X(t)=A\cos(\Omega t+\Theta)$, 其中 A,Ω,Θ 是相互独立的随机变量, 且已知

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{2a}{A_0^2} & \left(a\in\left(0,A_0\right)\right)\\ 0 & (\text{else})\end{cases},\quad f_a(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{100} & (\omega\in(250,350))\\ 0 & (\text{else})\end{cases},\quad f_\Theta(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & (\theta\in(0,2\pi))\\ 0 & (\text{else})\end{cases},$$

求随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度.

2.6 设随机过程 $X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$, 其中 ω 为常数, A 和 B 是两个相互独立的高斯随机变. 已知 $E[A]=E[B]=0$, $E\left[A^2\right]=E\left[B^2\right]=\sigma^2$, 求 $X(t)$ 的一维和二维概率密度函数.

2.7 设随机过程 $X(t)$ 的相关函数为 $R_X(\tau)$, 试证明: $R_X(0)\geqslant|R_X(\tau)|$.

2.8 设随机过程 $X(t)$ 的均值为 $m_X(t)$, 协方差函数为 $K_X\left(t_1,t_2\right)$, $\varphi(t)$ 为普通确知函数. 试求随机过程 $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$ 的均值和协方差函数.

2.9　设有复随机过程 $Z(t)=\sum_{k=1}^{N} A_K \mathrm{e}^{i\theta_k t}$, 其中 $A_k(k=1,2,\cdots,N)$ 分别服从 $N\left(0,\sigma_k^2\right)$, 且相互独立, $\theta_k(k=1,2,\cdots,N)$ 是常数, 试求该过程的均值和相关函数.

2.10　给定随机过程 $X(t)$ 和常数 a, 试以 $X(t)$ 的自相关函数表示随机过程 $Y(t)=X(t+a)-X(t)$ 的自相关函数.

2.11　设随机过程 $X(t)=X+Yt, t\in\mathbb{R}$, 而随机矢量 $(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 的协方差阵为 $\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \gamma\\ \gamma & \sigma_2^2\end{bmatrix}$, 试求随机过程 $X(t)$ 的协方差函数.

2.12　设有一脉冲串，其脉宽为 1, 脉冲可为正脉冲也可为负脉冲, 幅值为 +1 或 −1; 各脉冲取 +1 或 −1 是相互独立的; 脉冲的起始时间均匀分布于单位时间内. 求此随机过程的相关函数. 此过程的一个样本函数见下图.

2.13　已知随机过程 $X(t)=\cos\Omega t$, 其中 2 为均匀分布于 $\left(\omega_1,\omega_2\right)$ 中的随机变量. 试求:

(1) 均值 $m_X(t)$;

(2) 自相关函数 $R_X\left(t_1,t_2\right)$.

2.14　广义平稳随机过程 $Y(t)$ 的自相关矩阵如下, 试确定矩阵中用 ×× 表示的元素.

$$\boldsymbol{R}_Y=\begin{bmatrix} 2 & 1.3 & 0.4 & \times\times\\ \times\times & 2 & 1.2 & 0.8\\ 0.4 & 1.2 & \times\times & 1.1\\ 0.9 & \times\times & \times\times & 2 \end{bmatrix}$$

2.15　根据掷骰子试验, 定义随机过程为

$$X(t)=\cos\left(\frac{2K\pi}{6}\right)t\quad (K=1,2,3,4,5,6),$$

(1) 求 $X(1)$, $X(2)$ 的概率密度;

(2) $X(t)$ 是否为平稳随机过程?

2.16　随机过程 $X(t)$ 示于下图, 该过程仅由三个样本函数组成, 而且每个样本函数均等概率发生. 试计算

(1) $E[X(2)]$, $E[X(6)]$, $R_X(2,6)$;

(2) $F_X(x,2)$, $F_X(x,6)$ 及 $F_X\left(x_1,x_2,2,6\right)$, 分别画出它们的图形.

2.17　随机过程由下述三个样本函数组成, 且等概率发生:

$$X\left(t,e_1\right)=1,\quad X\left(t,e_2\right)=\sin t,\quad X\left(t,e_3\right)=\cos t.$$

(1) 计算均值 $m_X(t)$ 和自相关函数 $R_X(t_1,t_2)$;

(2) 该过程是否是平稳随机过程.

2.18 设随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$, 其中 A 是具有瑞利分布的随机变量, 其概率密度为

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sigma^2}\exp\left[-\dfrac{a^2}{2\sigma^2}\right] & (a>0)\\ 0 & (a\leqslant 0)\end{cases}.$$

Θ 是在 $[0,2\pi]$ 中均匀分布的随机变量, 且与 A 统计独立,ω 为常量. 试问 $X(t)$ 是否为平稳随机过程?

$$\begin{aligned}\mu(X)&=\int_0^{+\infty}x\times\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=-\int_0^{+\infty}xd\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\\&=-xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=0+\sqrt{2\pi}\sigma\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\\&=\sqrt{2\pi}\sigma\times\frac{1}{2}=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X)&=\int_0^{+\infty}x^2\times\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx-\mu^2(X)=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx-\mu^2(X)\\&=-\int_0^{+\infty}x^2d\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)-\mu^2(X)=-x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx-\mu^2(X)\\&=0-2\sigma^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}-\mu^2(X)=2\sigma^2-\mu^2(X)\\&=2\sigma^2-(\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}})^2=\frac{4-\pi}{2}\sigma^2\end{aligned}$$

2.19 设 $X(t)$ 为一平稳随机过程, 若对应于某一个 $T\neq 0$, $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 满足 $R_X(T)=R_X(0)$, 证明 $R_X(\tau)$ 必为以 T 为周期的周期函数.

2.20 若两个随机过程 $X(t)$、$Y(t)$ 均不是平稳随机过程, 且 $X(t)=A(t)\cos t, Y(t)=B(t)\sin t$. 式中随机过程 $A(t), B(t)$ 是相互独立的零均值平稳随机过程, 并有相同的相关函数. 证明: $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 是广义平稳随机过程.

2.21 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个联合平稳的随机过程, 证明:

(1) $\left|R_{XY}(\tau)\right|^2\leqslant R_X(0)R_Y(0)$;

(2) $2R_{XY}(\tau)\leqslant R_X(0)+R_Y(0)$;

(3) $\left|K_{XY}(\tau)\right|^2\leqslant\sigma_X^2\sigma_Y^2$.

2.22 已知平稳随机过程的相关函数为 $R_X(\tau)=\sigma_X^2\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$ 和 $R_X(\tau)=\sigma_X^2(1-\alpha|\tau|),|\tau|\leqslant 1/\alpha$, 试求其相关时间 τ_0.

2.23 设随机过程 $Z(t)=X(t)\cos\omega t-Y(t)\sin\omega t$, 其中 ω 为常量,$X(t)$、$Y(t)$ 为平稳随机过程, 且相关函数分别为 $R_X(\tau)$ 和 $R_Y(\tau)$. 试求:

(1) $Z(t)$ 的自相关函数 $R_z\left(t_1,t_2\right)$;

(2) 如果 $R_X(\tau)=R_Y(\tau), R_{XY}(\tau)=0$, 求 $R_z\left(t_1,t_2\right)$.

2.24 两个统计独立的平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 其均值都为 0, 自相关函数分别为 $R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-|\tau|}$, $R_Y(\tau)=\cos 2\pi\tau$, 试求:

(1) $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 的自相关函数;

(2) $W(t)=X(t)-Y(t)$ 的自相关函数;

(3) 互相关函数 $R_{ZW}(\tau)$.

2.25 设 $X(t)$ 是雷达发射信号, 遇到目标后返回接收机的微弱信号 $\alpha X\left(t-\tau_1\right)$, 其中 $a \leqslant 1$, τ_1 是信号返回时间. 由于接收到的信号总是伴随有噪声 $N(t)$, 于是接收到的信号为 $Y(t)=\alpha X\left(t-\tau_1\right)+N(t)$.

(1) 如果 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是联合平稳过程, 求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$.

(2) 在 (1) 的条件下, 假如 $N(t)$ 为零均值, 且与 $X(t)$ 统计独立, 求 $R_{XY}(\tau)$.

2.26 证明相关函数具有非负定性, 即对于任意 N 个复数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, a_N$, 有

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j^* \cdot R_x\left(t_i-t_j\right) \geqslant 0,$$

式中的 $*$ 号代表取复共轭.

证明

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_x\left(t_j, t_k\right) u_k u_j \\
&=\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E\left[\left(X\left(t_j\right)-E X\left(t_j\right)\right)\left(X\left(t_k\right)-E X\left(t_k\right)\right)\right] u_k u_j \\
&=E\left[\sum_{j=1}^{n}\left(X\left(t_j\right)-E X\left(t_j\right)\right) u_j\right]^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

2.27 证明严格循环平稳的定理 1.

2.28 证明广义循环平稳的定理 2.

2.29 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}.$$

试求 $X(t)$ 的均方值 $E\left[X^2(t)\right]$.

2.30 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)=4\mathrm{e}^{-1\cdot1}\cos \pi r+\cos 3\pi\tau$, 试求功率谱密度 $G_X(\omega)$.

2.31 随机序列 $X[n]$ 的相关函数为 $R_X(m)=a^{|m|}$, $|a|<1$, 试求其功率谱密度.

2.32 已知离散时间随机信号

$$X(n)=W(n)+\sum_{i=1}^{p} a_k \cos\left(\omega_k n+\theta_k\right),$$

式中 $W(n)$ 是均值为零、方差为 σ_W^2 的白噪声, a_k 为实常数, $\theta_k(k=1,2,\cdots,p)$ 是在 $E[-\pi,\pi]$ 上均匀分布的相互独立的随机变量, $W(n)$ 与正弦项不相关. 试求 $X(n)$ 的功率谱密度 $G_X(\omega)$.

2.33　如图所示的系统中, 若 $X(t)$ 为平稳过程. 证明 $Y(t)$ 的功率谱密度为 $G_Y(\omega) = 2G_X(\omega)(1-\cos\omega T)$.

2.34　已知平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度为 $G_X(\omega) = \begin{cases} 8\delta(\omega) + 20\left(1 - \dfrac{|\omega|}{10}\right) & (|\omega| \leqslant 10) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$, 试求 $X(t)$ 的自相关函数.

2.35　设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个统计独立的平稳随机过程, 均值分别为常量 m_X 和 m_Y, 且 $X(t)$ 的功率谱密度为 $G_X(\omega)$, 定义 $Z(t) = X(t) + Y(t)$, 试计算 $G_{XY}(\omega), G_{XZ}(\omega)$.

2.36　设随机过程 $X(t) = a\cos(\Omega t + \Theta)$, 其中 a 的常量, Ω 和 Θ 为相互独立的随机变量, 且 Θ 均匀分布于 $(0, 2\pi)$ 中, Ω 的一维概率密度为偶函数, 即 $f_\Omega(\Omega) = f_\Omega(-\Omega)$. 求证 $X(t)$ 的功率谱密度为 $G_X(\Omega) = \pi a^2 f_a(\Omega)$.

2.37　设 $X(t)$ 为广义平稳随机过程, 其自相关函数 $R_X(\tau)$ 如图所示. 试求该过程的功率谱密度, 并将其图形画出来.

2.38　设有零均值的正态随机过程, 令 $X_1 = X\left(t_1\right), X_2 = X\left(t_2\right), X_3 = X\left(t_3\right)$ 和 $X_4 = X\left(t_4\right)$, 证明: $E\left[X_1X_2X_3X_4\right] = E\left[X_1X_2\right]E\left[X_3X_4\right] + E\left[X_1X_3\right]E\left[X_2X_4\right] + E\left[X_1X_4\right]E\left[X_2X_3\right]$.

提示: 首先求出四维特征函数 $\Phi_X(\boldsymbol{\omega}) = \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\omega}\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\omega_i K_{ij}\omega_j\right]$, 根据特征函数与矩的关系求解.

2.39　一正态随机过程的均值 $m_X(t) = 2$, 协方差 $K_X\left(t_1, t_2\right) = 8\cos\pi\left(t_1 - t_2\right)$, 写出当 $t_1 = 0, t_2 = 1/2$ 时的二维概率密度.

2.40　反函数法、变换法是任意分布随机数产生的常用方法, 其中反函数法利用随机变量的分布函数求解其反函数获得任意分布随即说, 变换法则利用随机变量的函数变换获得任意分布随机数. 下面证明反函数法定理:

若随机变量 X 具有连续分布函数 $F_X(x)$, 而 r 是 $(0,1)$ 均匀分布分随机变量, 则有

$$X = F_X^{-1}(r).$$

这一定理告诉了我们产生服从分布 $F_X(x)$ 的随机数的方法, 即先产生 $(0,1)$ 均匀分布的随机数, 然后按上式做变换得到随机数 X.