第 8 章 检测理论

8.1　如图所示为二元对称信道示意图. ε 为交叉概率, 即信道输入为 0(或 1) 时, 输出为 1(或 0) 的概率, 而且 ε 是一个很小的量. 设先验概率相等. 试求:

(1) 保证总错误概率最小的判决规则;

(2) $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$ 时的错误概率.

8.2　设有两种假设

$$H_{0:} z_i = v_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, N),$$
$$H_{1:} z_i = 1 + v_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N),$$

其中 $v_i \sim N(0, 1)$, 且噪声相互独立, 假定 $P\left(H_0\right) = P\left(H_1\right)$, 求最大后验概率准则的判决表达式, 并确定判决性能.

8.3　设信号

$$s(t) = \begin{cases} A & (\text{相应的先验概率为} P(H_0)) \\ -A & (\text{相应的后验概率为} P(H_1)) \end{cases}$$

且 $P\left(H_1\right) = P\left(H_0\right) = \dfrac{1}{2}$. 现以正态噪声 $N\left(0, \sigma_n^2\right)$ 为背景, 采用一次观测进行二择一检验. 试求最小错误概率准则的判决表达式, 并计算平均错误概率, 画出接收机的方框图.

8.4　在两种假设下观测 z 的概率密度, 如图所示. 已知先验概率为 $P(H_1) = 0.7, P(H_0) = 0.3$, 试求其判决域及错误概率.

8.5　在两个假设下, 观测 x 都服从正态分布:

$$f\left(x|H_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-i)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (i = 0, 1),$$

且 $P\left(H_0\right) = P\left(H_1\right) = 1/2$. 该观测 x 再经过平方检波器, 输出 $y = ax^2$. 试根据 y 求出最小错误概率准则下的判决规则.

8.6　在二元假设检验中, 观测在两个假设下具有不用参量的瑞利分布:

$$f\left(z|H_i\right) = \frac{z}{\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad \left(z \geqslant 0, i = 0, 1, \sigma_1 > \sigma_0\right).$$

试求贝叶斯准则下的判决表达式. 在 $P\left(H_0\right) = P\left(H_1\right) = 1/2$ 条件下, 将结果推广到 N 个独立观测下的最小错误概率准则的判决表达式, 并导出总错误概率的表达式.

8.7　设有九个独立观测 $z_i = s + v_i (i = 1, 2, \ldots, 9)$, 其中

$$s = \begin{cases} 0 & (\text{在假设} H_0 \text{下}) \\ \dfrac{1}{3} & (\text{在假设} H_1 \text{下}), \end{cases}$$

v_i 为相互独立的正态随机变量, 其均值为 0, 方差 $\sigma^2 = 0.09$. 现令虚警概率 $\alpha = 10^{-8}$, 如判决规则定为当 $G = \sum_{i=1}^{9} z_i \geqslant G_{\mathrm{T}}$ 时, 则判为 $s = 1/3$, 试求 G_{T} 的值及相应的检测概率 P_{D}.

8.8　设两个假设下 M 个独立观测为

$$H_0: z_i = v_i,$$
$$H_1: z_i = 2 + v_i,$$

其中 v_i 为均值为零、方差为 2 的正态白噪声. 依据 M 个独立样本 $z_i (i = 1, 2, \dots, M)$, 采用纽曼-皮尔逊准则进行检验, 且令虚警概率 $\alpha = 0.05$, 试求最佳判决门限及相应的检测概率.

8.9　许多情况下, 两种假设下观测值的密度函数是离散的. 在密度函数中使用冲激函数照样可以推导似然比检验. 假定在两种假设下观测值是泊松分布的:

$$P\left(z = n | H_1\right) = \frac{m_1^n}{n!} \exp\left(-m_1\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots,),$$
$$P\left(z = n | H_0\right) = \frac{m_0^n}{n!} \exp\left(-m_0\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots,),$$

其中 $m_1 > m_0$.

(1) 试证明似然比是

$$z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\ln \eta + m_1 - m_0}{\ln m_1 - \ln m_0}.$$

(2) 因为 z 只取整数值, 把判决公式写做如下更合适:

$$z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma' \quad \left(\gamma' = 0, 1, 2, \dots,\right),$$

试证明错误概率为

$$P_{\mathrm{F}} = 1 - \exp\left(-m_0\right) \sum_{n=0}^{\gamma'-1} \frac{\left(m_0\right)^n}{n!}$$

和

$$P_M = \exp\left(-m_1\right) \sum_{n=0}^{\gamma'-1} \frac{\left(m_1\right)^n}{n!},$$

画出接受机工作特性, 假定 $m_0 = 1, m_1 = 2$.

8.10　考虑下列二元假设检验问题:

$$H_0: z = v$$
$$H_1: z = s + v \ ,$$

其中 s 和 v 是独立随机变量.

$$f(s) = \begin{cases} a\exp(-\alpha s) & (s \geqslant 0, \alpha \text{ 为常数}) \\ 0 & (s < 0) \end{cases}$$
$$f(v) = \begin{cases} b\exp(-\alpha v) & (v \geqslant 0) \\ 0 & (v < 0) \end{cases}$$

(1) 证明似然比检验可简化为

$$z \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta.$$

(2) 试求最佳贝叶斯检验的门限 η 与代价因子和先验概率的函数关系;

(3) 采用纽曼-皮尔逊检验, 求虚警概率 P_F 与门限 η 的函数关系.

8.11　如四个假设 H_0, H_1, H_2, H_3 观测 z 分别为二、四、六、八个自由度的 χ^2 分布 (参见习题 1.14), 其先验概率相等, 且代价因子 $C_{00} = C_{11} = 0, C_{01} = C_{10} = 1$. 按此似然比判决规则进行选择.

(1) 依据一个样本 z, 证明其相应的判决域为

$$
\begin{aligned}
H_0 &: 0 \leqslant z < 2, \\
H_1 &: 2 \leqslant z < 4, \\
H_2 &: 4 \leqslant z < 6, \\
H_3 &: 6 \leqslant z.
\end{aligned}
$$

(2) 若采用 M 个统计独立的样本 $z_i (i = 1, 2, \cdots, M)$, 证明只要以 $\left(\prod_{i=1}^{M} z_i\right)^{\frac{1}{M}}$ 代替 z, 所得到的最佳检验与 (1) 相同.

8.12　证明二元信号 (8.6.18) 式和 (8.6.19) 式成立.

8.13　利用最小错误概率准则设计一接收机, 对下述两个假设作选择:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: z(t) = s_0(t) + v(t), \\
H_1 &: z(t) = s_1(t) + v(t),
\end{aligned}
$$

信号 $s_0(t), s_1(t)$ 如图所示. $v(t)$ 是功率谱为 $N_0/2$ 的正态白噪声. 令信号先验概率相等. 信号平均能量为 E, 观测时间为 $0 \leqslant t \leqslant 3T$, 试求 $E/N_0 = 2$ 时的错误概率.

8.14　对下述两个假设, 按似然比判决规则进行选择:

$$
\begin{aligned}
H_1 &: z(t) = A\cos\omega_1 t + B\cos\left(\omega_2 t + \varphi\right) + v(t), \\
H_0 &: z(t) = B\cos\left(\omega_2 t + \varphi\right) + v(t),
\end{aligned}
$$

其中 $A, B, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$ 为已知常数, $v(t)$ 是功率谱为 $N_0/2$ 的正态白噪声. 问信号 $B\cos(\omega_2 t + \varphi)$ 对接收机性能有何影响?

8.15　设有两个假设

$$
\begin{aligned}
H_0 &: z(t) = s_0(t) + v(t), \\
H_1 &: z(t) = s_1(t) + v(t),
\end{aligned}
$$

其中信号如图所示. $v(t)$ 是功率谱为 $N_0/2$ 的正态白噪声. 令先验概率相等. 试按最小错误概率准则设计一个接收机, 对上述假设作选择.

8.16　设有移频键控信号

$$
\begin{aligned}
s_1(t) &= A_m\cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right), \\
s_2(t) &= A_m\cos\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) \quad \left(0 \leqslant t \leqslant T, T\left|\omega_1 - \omega_2\right| \gg 1\right),
\end{aligned}
$$

且先验概率相等, $A_m, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$ 均为常量. 现以功率谱密度为 $N_0/2$ 的正态白噪声为背景, 按最小错误概率准则对上述信号作最佳接受, 试求总错误概率.

8.17 设两个假设

$$H_0: z(t) = v(t),$$
$$H_1: z(t) = s(t) + v(t),$$

其中 $v(t)$ 是相关函数为 $\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)$ 的正态白噪声. 令信号 $s(t)$ 的能量 $E = \int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t$, 虚警概率为 α, 采用连续观测进行检验. 试求:

(1) 最佳接收机的结构;

(2) 判决门限的求解方程;

(3) 检测概率 $P\left(D_1|H_1\right)$ 的表达式.

8.18 依据一次观测, 用极大极小准则对下述两种假设做出判决:

$$H_0: z(t) = v(t),$$
$$H_1: z(t) = 1 + v(t),$$

其中 $v(t)$ 是零均值正态噪声, 方差为 σ_n^2, 且 $C_{00} = C_{11} = 0, C_{01} = C_{10} = 1$. 试求

(1) 判决门限;

(2) 与门限相应的各先验概率.