

Step 1 目标函数

在本问中，我们的目标是通过设计 3 架无人机 $FY1$, $FY2$, $FY3$ 与其分别投放的 3 枚烟幕干扰弹相关参数，使得 3 枚烟幕干扰弹对导弹 $M1$ 的有效遮蔽总时间尽可能长，因此目标函数为：

$$\max \Delta t \quad (1)$$

Step 2 决策变量

- 无人机 FYi 的方向: 设 α_i 为无人机 FYi 与 x 轴正方向的夹角, 从而确定无人机 FYi 的飞行方向.
- 烟幕干扰弹投放点: 设无人机 FYi 在受领任务 $t_{FYi,11}$ s 后投放第 1 枚烟幕干扰弹, $t_{FYi,21}$ s 后投放第 2 枚烟幕干扰弹, $t_{FYi,31}$ s 后投放第 3 枚烟幕干扰弹.
- 无人机 FYi 的飞行速度: 设无人机的飞行速度为 v_{FYi} , 无人机受领任务后, 保持等高度匀速直线运动。由第二问可知 t 时刻无人机 FYi 的位置坐标为:

$$\begin{cases} x_{FYi,t} = x_{FYi,0} + v_{FYi}t \cos \alpha \\ y_{FYi,t} = y_{FYi,0} + v_{FYi}t \sin \alpha \\ z_{FYi,t} = z_{FYi,0} \end{cases} \quad (2)$$

- 烟幕干扰弹起爆点: 设无人机 $FY1$ 投放的第一枚烟幕干扰弹在无人机受领任务 $t_{FY1,12}$ s 后起爆, 第二枚烟幕干扰弹在无人机受领任务 $t_{FY1,22}$ s 后起爆, 第三枚烟幕干扰弹在无人机受领任务 $t_{FY1,32}$ s 后起爆, 因此由问题 1 可得投放的第 i 枚烟雾干扰弹在 $t_{FY1,i2}$ 时刻即其起爆时的位置坐标 $(x_{FY1i,t_{FY1,i2}}, y_{FY1i,t_{FY1,i2}}, z_{FY1i,t_{FY1,i2}})$ 满足:

$$\begin{cases} x_{FY1i,t_{FY1,i2}} = x_{FY1,t_{FY1,i1}} + v_{FY1}(t_{FY1,i2} - t_{FY1,i1}) \cos \alpha \\ y_{FY1i,t_{FY1,i2}} = y_{FY1,t_{FY1,i1}} + v_{FY1}(t_{FY1,i2} - t_{FY1,i1}) \sin \alpha \\ z_{FY1i,t_{FY1,i2}} = z_{FY1,t_{FY1,i1}} - \frac{g(t_{FY1,i2} - t_{FY1,i1})^2}{2} \end{cases} \quad (3)$$

无人机 $FY1$ 投放的第 i 枚烟幕干扰弹在起爆之后 t 时刻的位置坐标满足:

$$\begin{cases} x_{FY11,t} = x_{FY11,t_{FY1,i2}} \\ y_{FY11,t} = y_{FY11,t_{FY1,i2}} \\ z_{FY11,t} = z_{FY11,t_{FY1,i2}} - v_1(t - t_{FY1,i2}) \\ t \in [t_{FY1,i2}, t_{FY1,i2} + \Delta t_0] \end{cases} \quad (4)$$

因此，无人机 $FY1$ 投放的第 i 枚烟幕干扰弹在起爆之后形成的烟雾有效遮挡范围的

云团球体球面方程为：

$$O_{FY1i,t} : (x - x_{FY1i,t})^2 + (y - y_{FY1i,t})^2 + (z - z_{FY1i,t})^2 = r^2 \quad (3.5) \quad (5)$$

代入问题 1 中，得到 t 时刻第 i 枚烟幕干扰弹形成的烟幕云团是否对目标进行遮挡的判断条件 $\Delta_{FY1i}(x_1, y_1, z_1)$ 。将真目标所在圆柱侧面上任一点坐标 (x_1, y_1, z_1) 带入，当 $\Delta_{FY1i} \geq 0$ 时，第 i 枚烟幕干扰弹形成的烟幕云团对目标进行遮挡，当 $\Delta_{FY1i} < 0$ 时，第 i 枚烟幕干扰弹形成的烟幕云团未对目标形成遮挡。我们记无人机 FY1 投放的第 i 枚烟幕干扰弹形成的烟幕云团对目标形成遮挡为 a_i^1 ，其为 0,1 向量，则

$$a_i^1 = \begin{cases} 0 & \Delta_{FY1i} \geq 0 \quad \text{未遮挡} \\ 1 & \Delta_{FY1i} < 0 \quad \text{遮挡} \end{cases} \quad (6)$$

对于无人机 FY1 投放的 3 枚烟幕干扰弹只要有一枚形成的烟幕云团对目标进行遮挡即可，因此

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \begin{cases} 0 & \text{未遮挡} \\ \text{else} & \text{遮挡} \end{cases} \quad (7)$$

Step 3 约束条件

- **无人机的飞行速度：**由于无人机受领任务后，可根据需要瞬时调整飞行方向，然后以 70-140m/s 的速度等高度匀速直线飞行。因此：

$$70 \leq v_{FY1} \leq 140 \quad (8)$$

- **无人机投放的烟幕干扰弹的时间：**我们假定当导弹 M_1 匀速飞行至假目标正上空时，发现该目标为假目标。已知该导弹飞行速度 V_0 ，以及初始坐标 $M_{1,0}(x_{m1,0}, y_{m1,0}, z_{m1,0})$ 和假目标位置坐标 Q （即原点 O ）。因此警戒雷达发现导弹后 t 时刻满足范围为：

$$0 \leq t \leq \frac{x_{m1,0}}{v_0} \quad (9)$$

由于题目要求每架无人机投放两枚烟幕干扰弹至少间隔 1s，且据试验数据知，云团

中心 10m 范围内的烟幕浓度在起爆 20s 内可为目标提供有效遮蔽。因此：

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{FY1,11} \in \left[0, \frac{x_{m1,0}}{v_0} \right] \\ t_{FY1,12} \in \left[t_{FY1,11}, \frac{x_{m1,0}}{v_0} \right] \\ t_{FY1,21} \in \left[t_{FY1,11} + 1, \frac{x_{m1,0}}{v_0} \right] \\ t_{FY1,22} \in \left[t_{FY1,21}, \frac{x_{m1,0}}{v_0} \right] \\ t_{FY1,31} \in \left[t_{FY1,21} + 1, \frac{x_{m1,0}}{v_0} \right] \\ t_{FY1,32} \in \left[t_{FY1,21}, \frac{x_{m1,0}}{v_0} \right] \end{array} \right. \quad (10)$$

Step 4 优化模型

综上所述，有效遮蔽时间单一目标优化模型为：

$$\begin{aligned}
 & \max \Delta t \\
 & \left\{ \begin{array}{l}
 t \text{时刻无人机的位置坐标:} \\
 \begin{cases} x_{FY1,t} = x_{FY1,0} - v_{FY1} t \cos \alpha \\ y_{FY1,t} = y_{FY1,0} - v_{FY1} t \sin \alpha \\ z_{FY1,t} = z_{FY1,0} \\ 0 \leq t \leq t_1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ 70 \leq V_{FY1} \leq 140 \end{cases} \\
 \text{第 } i \text{ 枚烟雾干扰弹起爆时的位置坐标:} \\
 \begin{cases} x_{FY1i,t_{FY1,i2}} = x_{FY1,t_{FY1,i1}} + v_{FY1} (t_{FY1,i2} - t_{FY1,i1}) \cos \alpha \\ y_{FY1i,t_{FY1,i2}} = y_{FY1,t_{FY1,i1}} + v_{FY1} (t_{FY1,i2} - t_{FY1,i1}) \sin \alpha \\ z_{FY1i,t_{FY1,i2}} = z_{FY1,t_{FY1,i1}} - \frac{g (t_{FY1,i2} - t_{FY1,i1})^2}{2} \end{cases} \\
 t \text{时刻第 } i \text{ 枚烟幕干扰弹形成的云团中心坐标:} \\
 \begin{cases} x_{FY11,t} = x_{FY11,t_{FY1,i2}} \\ y_{FY11,t} = y_{FY11,t_{FY1,i2}} \\ z_{FY11,t} = z_{FY11,t_{FY1,i2}} - v_1 (t - t_{FY1,i2}) \\ t \in [t_{FY1,i2}, t_{FY1,i2} + \Delta t_0] \end{cases} \\
 \text{第 } i \text{ 枚烟幕干扰弹形成的云团球体球面方程:} \\
 O_{FY1i,t} : (x - x_{FY1i,t})^2 + (y - y_{FY1i,t})^2 + (z - z_{FY1i,t})^2 = r^2 \quad (3.5) \\
 \text{圆柱面上点坐标:} \\
 \begin{cases} x_1^2 + (y_1^2 - y_0)^2 = r_0^2 \\ z_1 \in [0, h_0] \end{cases} \\
 \text{烟幕云团遮挡判断条件:} \\
 \sum_{i=1}^3 a_i = \begin{cases} 0 & \text{未遮挡} \\ \text{else} & \text{遮挡} \end{cases}
 \end{array} \right. \quad (11)
 \end{aligned}$$