

### Step 1 在 $t$ 时刻下导弹 $N_1$ 与真目标所在圆柱侧面各点的连线方程

随着烟幕干扰技术的不断发展,在导弹来袭过程中会通过投放烟幕干扰弹尽量避免来袭导弹发现真目标。控制中心在警戒雷达发现目标时,立即向无人机指派任务。令无人机  $M1$  受领任务后开始沿相关轨迹进行运动的时间为  $t$ ,对于  $t$  时刻下导弹  $M1$  与真目标所在圆柱侧面各点的连线方程,由导弹  $M1$  在  $t$  时刻的位置坐标与真目标所在圆柱侧面各点确定。

#### (1) 导弹 $M1$ 在 $t$ 时刻的位置坐标

本题以假目标为原点  $O$ ,水平面为  $XY$  平面建立直角坐标系  $XYZ$ .在该坐标系下记警戒雷达发现来袭导弹时,导弹  $M1$  的位置坐标为  $M1(0)(x_{M1(0)}, y_{M1(0)}, z_{M1(0)})$ .

在警戒雷达发现来袭导弹后,导弹  $M1$  以飞行速度  $v_0$  直指一个为掩护真目标而设置的假目标。其中,导弹  $M1$  飞行速度  $v_0$  已知,为  $300m/s$ 。记  $t$  时刻下导弹  $M1$  的位置坐标为  $M1(t)(x_{M1(t)}, y_{M1(t)}, z_{M1(t)})$ 。由于已经确定导弹  $M1$  的初始位置、运动方向与运行速度,根据三维空间的直线的标准方程,导弹轨迹可表示为

$$\frac{x_{M1(0)} - x_{M1(t)}}{x_{M1(0)}} = \frac{y_{M1(0)} - y_{M1(t)}}{x_{M1(0)}} = \frac{z_{M1(0)} - z_{M1(t)}}{z_{M1(0)}} \quad (1)$$

其参数方程为:

$$\begin{cases} x_{M1(t)} = x_{M1(0)} - ax_{M1(0)} \\ y_{M1(t)} = y_{M1(0)} - ay_{M1(0)} \\ z_{M1(t)} = z_{M1(0)} - az_{M1(0)} \end{cases}, a \in [0, +\infty) \quad (2)$$

导弹  $M1$  从初始时刻到  $t$  时刻向假目标进行匀速直线运动,根据匀速直线运动的位移时间公式,其在  $t$  时刻位置与初始时刻位置之间的距离  $S_1$  满足

$$S_1 = v_0 t \quad (3)$$

同时,根据两点间距离公式,可以得到

$$S_1 = \sqrt{(x_{M1(t)} - x_{M1(0)})^2 + (y_{M1(t)} - y_{M1(0)})^2 + (z_{M1(t)} - z_{M1(0)})^2} \quad (4)$$

联立(2)(3)(4)，进而得到导弹  $M1(t)(x_{M1(t)}, y_{M1(t)}, z_{M1(t)})$  在  $t$  时刻下的位置坐标

$$\begin{cases} x_{M1(t)} = x_{M1(0)} - \frac{x_{M1(0)}v_0t}{\sqrt{x_{M1(0)}^2 + y_{M1(0)}^2 + z_{M1(0)}^2}} \\ y_{M1(t)} = y_{M1(0)} - \frac{y_{M1(0)}v_0t}{\sqrt{x_{M1(0)}^2 + y_{M1(0)}^2 + z_{M1(0)}^2}} \\ z_{M1(t)} = z_{M1(0)} - \frac{z_{M1(0)}v_0t}{\sqrt{x_{M1(0)}^2 + y_{M1(0)}^2 + z_{M1(0)}^2}} \end{cases} \quad (5)$$

## (2) 真目标所在圆柱侧面各点的位置坐标

由于导弹  $M1$  与真目标所在圆柱的上底面和下底面上各点的连线，一定与圆柱侧面相交。故而，当我们考虑导弹  $M1$  与圆柱上任一点的连线方程时，只需要考虑其与圆柱侧面上任一点的连线方程。因此，我们需要确定真目标所在圆柱侧面各点的位置坐标  $N_1(x_1, y_1, z_1)$ 。

通过题目给定条件可以得知，真目标是半径为  $r_0$ 、高为  $h_0$  的圆柱体，其下底面的圆心坐标为  $(0, y_0)$ 。其中， $y_0 = 200, r_0 = 7, h_0 = 10$ 。因此，真目标圆柱侧面上任一点位置坐标  $N_1(x_1, y_1, z_1)$  满足：

$$\Gamma_0 : \begin{cases} x_1^2 + (y_1 - y_0)^2 = r_0^2 \\ z_1 \in [0, h_0] \end{cases} \quad (6)$$

## (3) 在 $t$ 时刻下导弹 $N_1$ 与真目标所在圆柱侧面各点的连线方程

通过(5)(6)，我们得到了导弹  $M1$  在  $t$  时刻的位置坐标  $M1(t)(x_{M1(t)}, y_{M1(t)}, z_{M1(t)})$  以及真目标所在圆柱侧面任一点位置坐标  $N_1(x_1, y_1, z_1)$ 。因此， $N_1, M1(t)$  所在的直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_{M1(t)} - x_1} = \frac{y - y_1}{y_{M1(t)} - y_1} = \frac{z - z_1}{z_{M1(t)} - z_1} = k \quad (7)$$

## Step 2 云团球体在 $t$ 时刻的球面方程

### (1) 烟幕干扰弹投放时的位置坐标

通过题目给定条件可知，在警戒雷达发现来袭导弹后，无人机  $FY1$  以飞行速度  $v_{FY1}$  匀速朝向假目标方向飞行，并在受领任务  $t_1$  秒后即投放 1 枚烟幕干扰弹在来袭武器和保护目标之间形成烟幕遮蔽。因此无人机  $FY1$  在  $t_1$  时刻的位置坐标即烟幕干扰弹投放时的位置坐标  $(x_{FY1, t_1}, y_{FY1, t_1}, z_{FY1, t_1})$  满足

$$\begin{cases} x_{FY1, t_1} = x_{FY1, 0} - v_{FY1}t_1 \\ y_{FY1, t_1} = y_{FY1, 0} \\ z_{FY1, t_1} = z_{FY1, 0} \end{cases} \quad (8)$$

其中, 无人机  $FY1$  飞行速度  $v_{FY1}$  已知为  $120m/s$ ,  $t_1$  已知为  $1.5s$ 。

### (2) 烟幕干扰弹起爆时的位置坐标

烟幕干扰弹脱离无人机后, 在重力作用下进行匀加速运动。并在  $t_2$  秒起爆分散形成烟幕或气溶胶云团, 进而在目标前方特定空域形成遮蔽, 干扰敌方导弹  $M1$ 。由于烟幕干扰弹水平方向飞行速度即  $v_{FY1}$ , 烟幕干扰弹竖直方向加速度即重力加速度  $g$ , 因此烟幕干扰弹起爆时的位置坐标  $(x_{FY11,t_2}, y_{FY11,t_2}, z_{FY11,t_2})$  满足

$$\begin{cases} x_{FY11,t_2} = x_{FY1,t_1} - v_{FY1}t_2 \\ y_{FY11,t_2} = y_{FY1,t_1} \\ z_{FY11,t_2} = z_{FY1,t_1} - \frac{gt_2^2}{2} \end{cases} \quad (9)$$

其中, 烟幕干扰弹水平方向飞行速度即  $v_{FY1}$  已知为  $120m/s$ ,  $t_2$  已知为  $5.1s$ 。

### (3) 云团球体在 $t$ 时刻的球面方程

烟幕干扰弹起爆后瞬时形成球状烟幕云团, 由于采用特定技术, 该烟幕云团以速度  $v_1$  匀速下沉。云团中心  $r$  米范围内的烟幕浓度在起爆后一定时间内可为目标提供有效遮蔽。已知烟幕干扰弹起爆后瞬时形成的球状云团中心  $10m$  范围的烟幕浓度在起爆  $20$  秒内可为目标提供有效遮蔽, 因此在  $t$  时刻形成的球状云团的有效遮蔽范围近似一个球体, 其球心记作  $O_{FY11,t}$ 。又由题意可知该烟幕云团以  $v_1 = 3m/s$  的速度匀速下沉, 故球心  $O_{FY11,t}$  的位置坐标为

$$\begin{cases} x_{FY11,t} = x_{FY11,t_2} \\ y_{FY11,t} = y_{FY11,t_2} \\ z_{FY11,t} = z_{FY11,t_2} - v_1(t - t_2) \end{cases} \quad (10)$$

于是可得云团球体在  $t$  时刻的球面方程

$$(x - x_{FY11,t})^2 + (y - y_{FY11,t})^2 + (z - z_{FY11,t})^2 = r^2. \quad (11)$$

### Step 3

- 判断  $t$  时刻烟幕是否有效遮蔽真目标

(1)

(2)

(3)