



Demo

空

作者: 邹文杰

组织: 无

时间: 2024/10/25

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒.

目录

第一章 问题 1	1
1.1 螺线方程	1
1.2 计算龙头前把手中心在各时刻的位置	1
1.3 计算板凳龙其余各节板凳的后把手中心在各时刻的位置	2
1.3.1 计算第 1 节板凳的后把手中心在第 t 秒时的位置 $P_1(t)$	2
1.3.2 计算第 $i(2 \leq i \leq 223)$ 节板凳的后把手中心在第 t 秒时的位置 $P_i(t)$	2
1.4 计算板凳龙其余各节板凳的后把手中心在各时刻的速度	3

第一章 问题 1

1.1 螺线方程

在题目图 4 中的直角坐标系下,以坐标原点 O 为极点建立极坐标系,设图 4 中的等距螺线 Γ 的极坐标方程为

$$\Gamma: \rho = a + b\theta. \quad (1.1)$$

其中 ρ 为极径, θ 为极角, a, b 均为待定常数. 设龙头前把手中心的初始位置 P_0 极坐标和直角坐标分别为 $(\rho_0, \theta_0), (x_0, y_0)$, 记 $d_0(\text{m})$ 为图 4 中等距螺线的螺距, 则由题可知

$$d_0 = 0.55, \rho_0 = 16d_0 = 8.8, \theta_0 = 16 \times 2\pi = 32\pi. \quad (1.2)$$

又由图 4 可知图中等距螺线 Γ 过原点 O 和 (ρ_0, θ_0) 点, 于是将 $(0, 0)$ 和 (ρ_0, θ_0) 代入(1.1)式解得

$$a = 0, b = \frac{d_0}{2\pi} = \frac{0.55}{2\pi} \quad (1.3)$$

因此, 等距螺线 Γ 的极坐标方程为

$$\Gamma: \rho = \frac{d_0}{2\pi}\theta, (0 \leq \theta \leq 32\pi). \quad (1.4)$$

再利用

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases},$$

得到等距螺线 Γ 的直角坐标方程为

$$\begin{cases} x = \frac{d_0}{2\pi}\theta \cos \theta \\ y = \frac{d_0}{2\pi}\theta \sin \theta \end{cases}, (0 \leq \theta \leq 32\pi). \quad (1.5)$$

1.2 计算龙头前把手中心在各时刻的位置

设龙头前把手的行进速度为 v_0 , 由题可知 $v_0 = 1(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$. 记龙头前把手中心在第 t 秒时的位置为 $P_0(t), P_0(t)$ 点的极坐标和直角坐标分别为 $(\rho_0(t), \theta_0(t))$ 和 $(x_0(t), y_0(t))$, 则利用第一型曲线积分计算公式可得, 曲线 $\overline{P_0 P_0(t)}$ 的长度 S 为

$$S = \int_{P_0 P_0(t)} ds = \int_{\theta_0(t)}^{\theta_0} \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} d\theta. \quad (1.6)$$

又由题可知

$$S = v_0 t. \quad (1.7)$$

联立(1.4)(1.6)(1.7)式解得

$$\theta_t \sqrt{\theta_t^2 + 1} - \ln(\theta_0(t) + \sqrt{(\theta_0(t))^2 + 1}) = \theta_0 \sqrt{\theta_0^2 + 1} + \ln(\theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 1}) - \frac{4\pi}{d_0} v_0 t. \quad (1.8)$$

根据上式, 利用 Python 求解得到当 $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$ 时, $P_0(t)$ 的极角 $\theta_0(t)$, 再将其代入(1.4)式得到, $P_0(t)$ 的极坐标 $(\rho_0(t), \theta_0(t))$ 见表 1. 再利用

$$\begin{cases} x_0(t) = \rho_0(t) \cos \theta_0(t) \\ y_0(t) = \rho_0(t) \sin \theta_0(t) \end{cases}, \quad (1.9)$$

得到当 $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$ 时, $P_0(t)$ 的的直角坐标 $(x_0(t), y_0(t))$ 见表 2.

1.3 计算板凳龙其余各节板凳的后把手中心在各时刻的位置

记第 i 节板凳的后把手中心在第 t 秒时的位置为 $P_i(t)$, 并设 $P_i(t)$ 的极坐标和直角坐标分别为 $(\rho_i(t), \theta_i(t))$ 和 $(x_i(t), y_i(t))$, 再记 $P_i(t)$ 与 P_{i+1}^t 之间的距离为 $|P_i(t)P_{i+1}^t|(\text{m}) (0 \leq i \leq 223)$. 再记 l_1, l_2 分别为龙头和龙身前把手中心与后把手中心之间的距离, 则由条件可知

$$|P_0(t)P_1(t)| = l_1 = 3.41 - 2 \times 0.275 = 2.86 \quad (1.10)$$

$$|P_{i-1}(t)P_i(t)| = l_2 = 2.2 - 2 \times 0.275 = 1.65, 2 \leq i \leq 223. \quad (1.11)$$

1.3.1 计算第 1 节板凳的后把手中心在第 t 秒时的位置 $P_1(t)$

当 $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$ 时, 由极坐标系的两点之间距离公式可得

$$l_1^2 = |P_0(t)P_1(t)|^2 = (\rho_1(t))^2 + (\rho_0(t))^2 - 2\rho_1(t)\rho_0(t)\cos(\theta_0(t) - \theta_1(t)). \quad (1.12)$$

又因为板凳龙各把手中心均位于螺线 Γ 上, 所以再结合(1.5)式可得

$$\rho_1(t) = \frac{d_0}{2\pi}\theta_1(t), (0 \leq \theta_1(t) \leq 32\pi). \quad (1.13)$$

因此联立(1.12)(1.13)式可得

$$l_1^2 = \frac{d_0^2}{4\pi^2}[(\theta_1(t))^2 + (\theta_0(t))^2 - 2\theta_1(t)\theta_0(t)\cos(\theta_0(t) - \theta_1(t))]. \quad (1.14)$$

根据上式利用 Python 求解 $\theta_1(t)$, 可能得到多个不同解. 不妨设这些为不同的解为 $\alpha_j^1(t) (j = 1, 2, \dots, m)$, 注意到一定有 $\theta_1(t) > \theta_0(t)$, 因此令

$$A_1 = \{\alpha_j^1(t) | \alpha_j^1(t) > \theta_0(t), j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (1.15)$$

又因为龙头前把手与第 1 个把手的极角之差一定最小, 所以

$$\theta_1(t) = \min_{\alpha_j^1(t) \in A_1} [\alpha_j^1(t) - \theta_0(t)] + \theta_0(t). \quad (1.16)$$

再将上述求得的 $\theta_1(t)$ 代入(1.13)式就能得到此时 $P_1(t)$ 的极坐标 $(\rho_1(t), \theta_1(t))$. 令 t 依次取 $1, 2, \dots, 300$, 反复进行上述操作就能得到, 当 $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$ 时, $P_1(t)$ 的极坐标 $(\rho_1(t), \theta_1(t))$. 再利用

$$\begin{cases} x_1(t) = \rho_1(t) \cos \theta_1(t) \\ y_1(t) = \rho_1(t) \sin \theta_1(t) \end{cases}, \quad (1.17)$$

得到当 $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$ 时, $P_1(t)$ 的直角坐标 $(x_1(t), y_1(t))$.

1.3.2 计算第 $i (2 \leq i \leq 223)$ 节板凳的后把手中心在第 t 秒时的位置 $P_i(t)$

当 $i \in \{2, 3, \dots, 223\}$ 时, 由(1.3.1)同理可得, 当 $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$ 时, 我们有

$$l_2^2 = |P_{i-1}(t)P_i(t)|^2 = (\rho_i(t))^2 + (\rho_{i-1}(t))^2 - 2\rho_i(t)\rho_{i-1}(t)\cos(\theta_{i-1}(t) - \theta_i(t)). \quad (1.18)$$

$$\rho_i(t) = \frac{d_0}{2\pi}\theta_i(t), (0 \leq \theta_i(t) \leq 32\pi). \quad (1.19)$$

从而联立(1.18)(1.19)式可得

$$l_2^2 = \frac{d_0^2}{4\pi^2}[(\theta_i(t))^2 + (\theta_{i-1}(t))^2 - 2\theta_i(t)\theta_{i-1}(t)\cos(\theta_{i-1}(t) - \theta_i(t))]. \quad (1.20)$$

根据上式利用 Python 求解 $\theta_i(t)$, 可能得到多个不同解. 不妨设这些为不同的解为 $\alpha_j^i(t) (j = 1, 2, \dots, m)$, 注意到一定有 $\theta_i(t) > \theta_{i-1}(t)$, 因此令

$$A_i = \{\alpha_j^i(t) | \alpha_j^i(t) > \theta_{i-1}(t), j = 1, 2, \dots, m\}, \quad (1.21)$$

又因为第 $i-1$ 个把手与第 i 个把手的极角之差一定最小, 所以

$$\theta_i(t) = \min_{\alpha_j^i(t) \in A_i} [\alpha_j^i(t) - \theta_{i-1}(t)] + \theta_{i-1}(t). \quad (1.22)$$

再将上述求得的 $\theta_i(t)$ 代入(1.13)式就能得到此时 $P_i(t)$ 的极坐标 $(\rho_i(t), \theta_i(t))$. 令 t 依次取 $1, 2, \dots, 300$, 反复进行上述操作就能得到, 当 $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$ 时, $P_i(t)$ 的极坐标 $(\rho_i(t), \theta_i(t))$. 再利用

$$\begin{cases} x_i(t) = \rho_i(t) \cos \theta_i(t) \\ y_i(t) = \rho_i(t) \sin \theta_i(t) \end{cases}, \quad (1.23)$$

得到当 $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$ 时, $P_i(t)$ 的直角坐标 $(x_i(t), y_i(t))$.

综上所述, 令 i 依次取 $1, 2, \dots, 223$, 按照上述(1.3.1)(1.3.2)的方式, 利用 Python 不断迭代计算就能得到每秒板凳龙各把手中心的位置直角坐标见表 3.

1.4 计算板凳龙其余各节板凳的后把手中心在各时刻的速度

记第 $i(1 \leq i \leq 223)$ 节板凳的后把手中心在第 t 秒时的速度为 $v_i(t)$. 根据(1.2),(1.3.1),(1.3.2)得到的第 $i(1 \leq i \leq 223)$ 节板凳的后把手中心第 t 秒时的位置 $P_i(t)$ 的极坐标 $(\rho_i(t), \theta_i(t))$, 于是当 $i \in \{1, 2, \dots, 223\}$ 时, 对(1.14)(1.20)式两边同时对 t 求导可得

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\theta_{i-1} + \theta_i \cos(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)}{\theta_i + \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_{i-1} \cos(\theta_{i-1} - \theta_i)} \cdot \frac{d\theta_{i-1}}{dt}. \quad (1.24)$$

设第 $i(1 \leq i \leq 223)$ 节板凳的后把手中心在充分短的时间 dt 内经过的路程微分为 ds_i , 又因为各把手中心始终在螺线 Γ 上, 从而各把手的路程微分 ds_i 就是螺线 Γ 的弧微分, 所以利用(1.4)式及弧微分的计算公式可得

$$ds_i = \sqrt{[\rho(\theta_i)]^2 + [\rho'(\theta_i)]^2} d\theta_i = \frac{d_0}{2\pi} \sqrt{\theta_i^2 + 1} d\theta_i, i \in \{1, 2, \dots, 223\} \quad (1.25)$$

故当 $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$ 时, 由瞬时速度的定义可得

$$v_i(t) = \frac{ds_i}{dt} = \frac{d_0}{2\pi} \frac{\sqrt{\theta_i^2 + 1} d\theta_i}{dt}, i \in \{1, 2, \dots, 223\}. \quad (1.26)$$

联立(1.24)(1.26)式得到

$$|v_i(t)| = \left| \frac{d_0}{2\pi} \frac{\sqrt{\theta_i^2 + 1} d\theta_i}{dt} \right| = \frac{|\theta_{i-1} + \theta_i \cos(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)|}{|\theta_i + \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_{i-1} \cos(\theta_{i-1} - \theta_i)|} \sqrt{\frac{1 + \theta_i^2}{1 + \theta_{i-1}^2}} \left| \frac{d\theta_{i-1}}{dt} \right| \quad (1.27)$$

$$= \frac{|\theta_{i-1}(t) + \theta_i \cos(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)|}{|\theta_i + \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_{i-1} \cos(\theta_{i-1} - \theta_i)|} \sqrt{\frac{1 + \theta_i^2}{1 + \theta_{i-1}^2}} |v_{i-1}(t)|, i \in \{1, 2, \dots, 223\}. \quad (1.28)$$

其中 $\theta_i = \theta_i(t), \theta_{i-1} = \theta_{i-1}(t), v_0(t) \equiv 1, \forall t \geq 0$. 又因为 $v_i(t) (1 \leq i \leq 223)$ 均大于 0, 所以上式可化为

$$v_i(t) = \sqrt{\frac{1 + \theta_i^2}{1 + \theta_{i-1}^2}} \frac{|\theta_{i-1} + \theta_i \cos(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)|}{|\theta_i + \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_{i-1} \cos(\theta_{i-1} - \theta_i)|} v_{i-1}(t), i \in \{1, 2, \dots, 223\}, \quad (1.29)$$

其中 $\theta_i = \theta_i(t), \theta_{i-1} = \theta_{i-1}(t), v_0(t) \equiv 1, \forall t \geq 0$. 于是根据上式, 令 i 依次取 $1, 2, \dots, 223$, 再利用 Python 进行迭代计算, 就能得到板凳龙的第 $i(1 \leq i \leq 223)$ 节板凳的后把手中心在第 t 秒时的速度 $v_i(t)$. 再令 t 依次取 $1, 2, \dots, 300$, 反复进行上述操作, 就能得到当 $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$ 时, 板凳龙的第 $i(1 \leq i \leq 223)$ 节板凳的后把手中心每秒的速度见表 7.