

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2025 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称“竞赛章程和参赛规则”，可从 <http://www.mcm.edu.cn> 下载）。

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D/E 中选择一项填写）： A

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）： 202508013001

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）： 哈尔滨商业大学

参赛队员 (打印并签名)：1. 邹文杰

2. 李慧

3. 盛炫皓

指导教师或指导教师组负责人 (打印并签名)： 郭丽华

（指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责）

日期： 2025 年 9 月 4 日

（请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号：
(由赛区填写)

全国评阅编号：
(全国组委会填写)

2025 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人						
备注						

送全国评阅统一编号：

(赛区组委会填写)

(请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。)

摘要

针对问题一，首先，我们已知导弹 $M1$ 和假目标在题目给定坐标系下的初始位置，以及导弹直指假目标的飞行方向和飞行速度，因此，我们可以得到导弹 $M1$ 在 t 时刻下的坐标。通过题目给定条件，我们可以得到真目标所在的圆柱侧面各点的位置，由此可知在 t 时刻导弹 M_1 与真目标上任一点的连线方程；其次，我们已知无人机 $FY1$ 的初始位置，无人机匀速直线运动至假目标的速度，进而得到烟幕干扰弹投放时的位置，已知烟幕干扰弹在重力作用下运动，从而得到烟幕干扰弹爆炸时的位置，也就是云团中心的初始位置，已知云团匀速下沉的速度，进而可以知道得到在 t 时刻云团球体球心的位置，进而得到云团球体球面上各点的位置；最后，将 t 时刻导弹 $M1$ 与真目标上任一点的连线方程与云团球体在 t 时刻下的球面方程进行联立，可以判断在 t 时刻云团是否对 $M1$ 进行遮挡，从而得到烟幕干扰弹对 $M1$ 的有效遮挡时长。

针对问题二，首先；然后；最后。

针对问题三，首先；然后；最后。

关键字： 关键词 1 关键词 2

一、 问题重述

1.1 问题背景

在当今国际形势下，国防安全至关重要。为应对现代战争中敌方导弹对我方重要目标的攻击，我方会投放烟幕干扰弹影响来袭导弹发现重要目标，从而提升我国的国防实力，对应对外部威胁和维护国家安全具有重要意义。烟幕干扰弹主要通过重要目标前方特区域形成对敌方导弹视线的遮挡从而进行干扰，具有成本低、效费比高等优点。如何通过数学建模通过对无人机的各项参数以及烟雾干扰弹的各项参数进行优化设计，从而实现更为有效的烟雾干扰效果成为了我们有待解决的问题。

1.2 问题一

在题目给定的直角坐标系下，将假目标放置在坐标系原点。根据题目给定的无人机 $FY1$ 的位置，飞行速度(120m/s)，飞行方向, 敌方导弹 $M1$ 的位置, 受领任务后投放烟幕干扰弹间隔时间(1.5s) 以及干扰弹起爆间隔时间 (3.6s), 无人机 $FY1$ 投放 1 枚烟幕干扰弹实施对 $M1$ 的干扰，计算烟幕干扰弹对 $M1$ 的有效遮挡时间。

1.3 问题二

已知在题目给定的直角坐标系下，无人机 $FY1$ 的位置以及敌方导弹 $M1$ 的位置已知，无人机 $FY1$ 投放 1 枚烟幕干扰弹进行干扰. 给出无人机 $FY1$ 的飞行方向，无人机的飞行速度，烟幕干扰弹 $M1$ 的投放点, 烟幕干扰弹起爆点，使得烟幕干扰弹对来袭导弹的遮蔽时间尽可能长。

1.4 问题四

本问多加入 2 架无人机 $FY2$ 和 $FY3$ ，分别投放 1 枚烟幕干扰弹，实施对敌方导弹的干扰，因此需要重新设计烟幕干扰弹的投放策略。在题目给定的直角坐标系下，3 架无人机的位置以及敌方导弹 $M1$ 的位置已知, 重新给出 3 架无人机的飞行方向以及飞行速度、烟幕干扰弹投放点以及起爆点，从而延长对来袭导弹的遮蔽时间。

1.5 问题五

已知在题目给定的直角坐标系下,5 架无人机的位置以及 3 枚敌方导弹的位置, 每架无人机至多投放 3 枚烟幕干扰弹. 重新给出 5 架无人机各自的飞行方向以及飞行速度、3

枚烟幕干扰弹各自的投放点以及起爆点，从而找到对来袭导弹的遮蔽时间的最优解。

二、问题的分析

2.1 问题一的分析

问题一要求我们求解在给定条件下，烟雾干扰弹对导弹 $M1$ 的有效遮挡时长。因此我们需要知道烟雾干扰弹形成的云团球体在某时刻下是否对导弹进行遮挡，即导弹与假目标上任一点的连线是否与云团球体相交。首先，对于某时刻下导弹与真目标上任一点的连线方程，由导弹在某时刻下直角坐标系下的位置坐标与真目标所在圆柱侧面上任一点确定。我们已知导弹 $M1$ 和假目标在题目给定坐标系下的初始位置，以及导弹直指假目标的飞行方向和飞行速度，因此得到导弹 $M1$ 在某时刻下的坐标，通过题目给定条件，可以得到真目标所在的圆柱侧面各点的位置，由此可知某时刻下导弹与真目标上任一点的连线方程；其次，对于云团球体所在的球面方程，由云团中心和半径确定，因此需要知晓在某时刻下云团中心的位置坐标，我们已知无人机 $FY1$ 的初始位置，无人机匀速直线运动至假目标的速度，进而得到烟幕干扰弹投放时的位置，已知烟幕干扰弹在重力作用下运动，从而得到烟幕干扰弹爆炸时的位置，也就是云团中心的初始位置，已知云团匀速下沉的速度，可以得到在某时刻云团球心的位置，进而得到云团的球面方程；最后，将某时刻导弹 $M1$ 与真目标上任一点的连线方程与云团球体在某时刻下的球面方程进行联立，可以判断在某时刻下云团是否对导弹进行遮挡，从而得到烟幕干扰弹对导弹的有效遮挡时长。

2.2 问题二的分析

2.3 问题三的分析

2.4 问题四的分析

2.5 问题五的分析

三、模型的假设

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

四、符号说明

符号	说明	单位
t	无人机受领任务后开始运动的时间	s

五、模型的建立与求解

5.1 问题一

5.1.1 问题一的模型建立

Step 1 在 t 时刻下导弹 M_1 与真目标所在圆柱侧面各点的连线方程

随着烟幕干扰技术的不断发展，在导弹来袭过程中会通过投放烟幕干扰弹尽量避免来袭导弹发现真目标。控制中心在警戒雷达发现目标时，立即向无人机指派任务。令无人机 M_1 受领任务后开始沿相关轨迹进行运动的时间为 t ，对于 t 时刻下导弹 M_1 与真目标所在圆柱侧面各点的连线方程，由导弹 M_1 在 t 时刻的位置坐标与真目标所在圆柱侧面各点确定。

(1) 导弹 M_1 在 t 时刻的位置坐标

本题以假目标为原点 O ，水平面为 XY 平面建立直角坐标系 XYZ 。在该坐标系下记警戒雷达发现来袭导弹时，导弹 M_1 的位置坐标为 $M_{1,0}(x_{M_{1,0}}, y_{M_{1,0}}, z_{M_{1,0}})$ 。

在警戒雷达发现来袭导弹后，导弹 M_1 以飞行速度 v_0 直指一个为掩护真目标而设置的假目标。其中，导弹 M_1 飞行速度 v_0 已知，为 $300m/s$ 。记 t 时刻下导弹 M_1 的位置坐标为 $M_{1,t}(x_{M_{1,t}}, y_{M_{1,t}}, z_{M_{1,t}})$ 。由于已经确定导弹 M_1 的初始位置、运动方向与运行速度，根据直线的参数确定方法，导弹轨迹可通过比例关系来表示。设存在参数 a ，满足：

$$\frac{x_{M_{1,0}} - x_{M_{1,t}}}{x_{M_{1,0}}} = \frac{y_{M_{1,0}} - y_{M_{1,t}}}{y_{M_{1,0}}} = \frac{z_{M_{1,0}} - z_{M_{1,t}}}{z_{M_{1,0}}} = a, a \in [0, +\infty) \quad (1)$$

即：

$$\begin{cases} x_{M_{1,t}} = x_{M_{1,0}} - ax_{M_{1,0}} \\ y_{M_{1,t}} = y_{M_{1,0}} - ay_{M_{1,0}} \\ z_{M_{1,t}} = z_{M_{1,0}} - az_{M_{1,0}} \end{cases}, a \in [0, +\infty) \quad (2)$$

导弹 M_1 从初始时刻到 t 时刻向假目标进行匀速直线运动，通过匀速直线运动的距

离公式，其在 t 时刻位置与初始时刻位置之间的距离 S_1 满足

$$S_1 = v_0 t \quad (3)$$

同时，根据两点间距离公式，可以得到：

$$S_1 = \sqrt{(x_{M1,t} - x_{M1,0})^2 + (y_{M1,t} - y_{M1,0})^2 + (z_{M1,t} - z_{M1,0})^2} \quad (4)$$

联立(2) (3) (4)，进而得到导弹 $M1, t(x_{M1,t}, y_{M1,t}, z_{M1,t})$ 在 t 时刻下的位置坐标

$$\begin{cases} x_{M1,t} = x_{M1,0} - \frac{x_{M1,0}v_0t}{\sqrt{x_{M1,0}^2 + y_{M1,0}^2 + z_{M1,0}^2}} \\ y_{M1,t} = y_{M1,0} - \frac{y_{M1,0}v_0t}{\sqrt{x_{M1,0}^2 + y_{M1,0}^2 + z_{M1,0}^2}} \\ z_{M1,t} = z_{M1,0} - \frac{z_{M1,0}v_0t}{\sqrt{x_{M1,0}^2 + y_{M1,0}^2 + z_{M1,0}^2}} \end{cases} \quad (5)$$

(2) 真目标所在圆柱侧面各点的位置坐标

由于导弹 $M1$ 与真目标所在圆柱的上底面和下底面上各点的连线，一定与圆柱侧面相交。故而，当我们考虑导弹 $M1$ 与圆柱上任一点的连线方程时，只需要考虑其与圆柱侧面上任一点的连线方程。因此，我们需要确定真目标所在圆柱侧面各点的位置坐标 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 。

通过题目给定条件可以得知，真目标是半径为 r_0 、高为 h_0 的圆柱体，其下底面的圆心坐标为 $(0, y_0, 0)$ 。其中， $y_0 = 200, r_0 = 7, h_0 = 10$ 。因此，真目标圆柱侧面上任一点位置坐标 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 满足：

$$\Gamma_0 : \begin{cases} x_1^2 + (y_1 - y_0)^2 = r_0^2 \\ z_1 \in [0, h_0] \end{cases} \quad (6)$$

(3) 在 t 时刻下导弹 M_1 与真目标所在圆柱侧面各点的连线方程

通过(5)(6)，我们得到了导弹 $M1$ 在 t 时刻的位置坐标 $M1, t(x_{M1,t}, y_{M1,t}, z_{M1,t})$ 以及真目标所在圆柱侧面任一点位置坐标 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 。因此， $M_1, M1_t$ 所在的直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_{M1,t} - x_1} = \frac{y - y_1}{y_{M1,t} - y_1} = \frac{z - z_1}{z_{M1,t} - z_1} = k \quad (7)$$

其中， k 为设定参数。

Step 2 云团球体在 t 时刻的球面方程

(1) 烟幕干扰弹投放时的位置坐标

通过题目给定条件可知，在警戒雷达发现来袭导弹后，无人机 $FY1$ 以飞行速度 v_{FY1}

匀速朝向假目标方向飞行,并在受领任务 t_1s 后即投放 1 枚烟幕干扰弹在来袭武器和保护目标之间形成烟幕遮蔽。因此无人机 $FY1$ 在 t_1 时刻的位置坐标即烟幕干扰弹投放时的位置坐标 $(x_{FY1,t_1}, y_{FY1,t_1}, z_{FY1,t_1})$ 满足

$$\begin{cases} x_{FY1,t_1} = x_{FY1,0} - v_{FY1}t_1 \\ y_{FY1,t_1} = y_{FY1,0} \\ z_{FY1,t_1} = z_{FY1,0} \end{cases} \quad (8)$$

其中,无人机 $FY1$ 飞行速度 v_{FY1} 已知为 $120m/s$, t_1 已知为 $1.5s$ 。

(2) 烟幕干扰弹起爆时的位置坐标

烟幕干扰弹脱离无人机后,在重力作用下进行匀加速运动。并在被无人机 $FY1$ 投放后间隔 t_2s 起爆分散形成烟幕或气溶胶云团,进而在目标前方特定空域形成遮蔽,干扰敌方导弹 $M1$ 。已知烟幕干扰弹水平方向飞行速度即 v_{FY1} ,烟幕干扰弹竖直方向加速度即重力加速度 g ,因此烟幕干扰弹起爆时的位置坐标 $(x_{FY11,t_2}, y_{FY11,t_2}, z_{FY11,t_2})$ 满足

$$\begin{cases} x_{FY11,t_2} = x_{FY1,t_1} - v_{FY1}t_2 \\ y_{FY11,t_2} = y_{FY1,t_1} \\ z_{FY11,t_2} = z_{FY1,t_1} - \frac{gt_2^2}{2} \end{cases} \quad (9)$$

其中,烟幕干扰弹水平方向飞行速度即 v_{FY1} 已知为 $120m/s$, t_2 已知为 $3.6s$ 。

(3) 云团球体在 t 时刻的球面方程

烟幕干扰弹起爆后瞬时形成球状烟幕云团,由于采用特定技术,该烟幕云团以速度 v_1 匀速下沉。云团中心 rm 范围内的烟幕浓度在起爆后一定时间内可为目标提供有效遮蔽。已知烟幕干扰弹起爆后瞬时形成的球状云团中心位置即烟幕干扰弹起爆时的位置坐标 $(x_{FY11,t_2}, y_{FY11,t_2}, z_{FY11,t_2})$,烟幕云团匀速下沉的速度 v_1 。因此云团球体中心在 t 时刻的位置坐标 $(x_{FY1,t}, y_{FY1,t}, z_{FY1,t})$ 满足

$$\begin{cases} x_{FY11,t} = x_{FY11,t_2} \\ y_{FY11,t} = y_{FY11,t_2} \\ z_{FY11,t} = z_{FY11,t_2} - v_1(t - t_2) \end{cases} \quad (10)$$

其中,烟幕云团匀速下沉的速度 v_1 已知,为 $3m/s$ 。因此可以得到云团球体在 t 时刻的球面方程:

$$O_{FY11,t} : (x - x_{FY11,t})^2 + (y - y_{FY11,t})^2 + (z - z_{FY11,t})^2 = r^2 \quad (1.5) \quad (11)$$

Step 3

-

- (1)
- (2)
- (3)

5.1.2 问题一的模型求解

5.2 问题二

5.2.1 模型建立

Step 1

-

- (1)
- (2)
- (3)

Step 2

-

- (1)
- (2)
- (3)

Step 3

-

- (1)
- (2)
- (3)

5.2.2 模型求解

5.3 问题三

5.3.1 模型建立

Step 1

- 目标函数

根据题意, 以无人机 FY1 的飞行方向与 x 轴正向的夹角 α , 飞行速度 v_{FY1} , 三枚烟幕干扰弹的投放时间 t_{11} 、 t_{21} 、 t_{31} , 三枚烟幕干扰弹的起爆时间 t_{12} 、 t_{22} 、 t_{32} 为变量. 建立单目

标优化模型, 目标函数为

$$\underset{\alpha, v_{FY1}, t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}, t_{31}, t_{32}}{\text{Arg max}} \quad \Delta t = . \quad (12)$$

Step 2

- 计算有效遮挡时间

(1) 由问题 1 同理可得, 无人机 FY1 第 $i(i = 1, 2, 3)$ 个投放的烟雾干扰弹在投放时的在 t 时刻的位置坐标

$$\begin{cases} x_{FY1, t_{i1}} = x_{FY1, 0} - v_{FY1} t_{i1} \cos \alpha \\ y_{FY1, t_{i1}} = y_{FY1, 0} - v_{FY1} t_{i1} \sin \alpha \\ z_{FY1, t_{i1}} = z_{FY1, 0} \end{cases} \quad (13)$$

以及无人机 FY1

(2)

(3)

Step 3

- 约束条件

(1)

(2)

(3)

5.3.2 模型求解

表 1 标准三线表格

$D(\text{in})$	$P_u(\text{lbs})$	$u_u(\text{in})$	β	$G_f(\text{psi.in})$
5	269.8	0.000674	1.79	0.04089
10	421.0	0.001035	3.59	0.04089
20	640.2	0.001565	7.18	0.04089

六、 模型的评价

6.1 模型的优点

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

6.2 模型的缺点

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

七、 参考文献

- [1]
- [2]
- [3]
- [4]

附录 A 支撑材料目录与代码环境依赖

本文支撑材料目录结构如下

```
README.md <----- 本文档
reference <----- 参考文献文档，习惯把对应的PDF放到这里
    reference.bib <----- 参考文献的数据库(bib)
src <----- 代码，存放代码的文件夹
    test.py <----- 单独的代码文件
thesis <----- 论文文件夹
    build <----- 用自动脚本生成的文件夹，存放多版本文件
    cumcmthesis.cls <----- 模板文件
    figures <----- 图片文件夹，存放所有图片
    main.pdf <----- 论文PDF稿，每一小节的主题内容为对应的tex文件位置
    main.tex <----- 论文代码
    makefile <----- Linux 对应自动化脚本，响应make命令
    make.ps1 <----- powershell 脚本
    sections <----- 每一节的代码
        abstract.tex <----- 摘要
        analyse.tex <----- 问题分析
        assumptions.tex <----- 模型假设
        flowchart_example.tex 一个tikz画的流图的例子
        model_review.tex <--- 模型评价
        notations.tex <----- 符号约定
        q1_build.tex <----- 问题一模型建立
        q1_solution.tex <----- 问题一模型求解
        q2_build.tex
        q2_solution.tex
        q3_build.tex
        q3_solution.tex
        question_review.tex <- 问题重述
    tree.txt <----- 支撑材料目录结构，../src的目录树，两个脚本都可以自动生成
```

附录 B 导入其他代码的测试

```
print('hello')
for i in range(3):
    print(i)
```