证 先证充分性. 在闭区间 $[a,b]$ 上构造辅助函数

$$F(x)=\begin{cases} f(a^+), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b^-), & x=b. \end{cases}$$

则可以看出 $F\in C[a,b]$. 对 F 应用 Cantor 定理, 可见 F 在 $[a,b]$ 上一致连续. 因此 f 在 (a,b) 上也一致连续. (这与例题 5.3.3 的第一个证明完全相同.)

再证必要性. 不妨只写出存在 $f(a^+)$ 的证明. 对 $\varepsilon>0$, 由于 f 在 (a,b) 上一致连续, 因此存在 $\delta>0$, 使得当 $x',x''\in(a,b)$, 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

因此当 $x',x''\in(a,a+\delta)$ 时, 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立. 应用关于右侧极限的 Cauchy 收敛准则 (命题 4.2.5), 可见存在极限 $f(a^+)$. □