

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2025 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称“竞赛章程和参赛规则”，可从 <http://www.mcm.edu.cn> 下载）。

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

我们完全清楚，在竞赛中必须合法合规地使用文献资料和软件工具，不能有任何侵犯知识产权的行为。否则我们将失去评奖资格，并可能受到严肃处理。

我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D/E 中选择一项填写）：_____

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）：_____

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）：_____

参赛队员 (打印并签名)：1. _____

2. _____

3. _____

指导教师或指导教师组负责人 (打印并签名)：_____

（指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责）

日期：_____年____月____日

（请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号：
(由赛区填写)

全国评阅编号：
(全国组委会填写)

2025 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人						
备 注						

送全国评阅统一编号：

(赛区组委会填写)

(请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。)

摘要

关键字： 关键词 1 关键词 2

一、问题重述

二、问题的分析

三、模型的假设

假设 1 /

四、符号说明

符号	说明	单位
x	回焊炉内的点与炉前区域左边边缘之间的距离	cm
T	在回焊炉内 x 点处的空气温度	$^{\circ}C$
v_0	传送带过炉速度	cm/min
t	传送带过炉时间	min
δ	焊接区域一半厚度	mm
h	电路板表面传热系数	$W/(m^2 \cdot K)$
a	热扩散率	m^2/s
λ	导热系数	$W/(m \cdot K)$
S	炉温曲线中超过 $217^{\circ}C$ 到峰值温度所覆盖的面积 S	$^{\circ}C \cdot s$

五、模型的建立与求解

5.1 问题一

5.1.1 问题一的模型建立

5.1.1.1 回焊炉内的温度分布模型的确立

以炉前区域左边边缘为原点, 向右建立一维坐标轴, 简化回焊炉模型.

根据题目可知, 回焊炉启动后, 炉内空气温度会在短时间内达到稳定性, 炉内各点温度处于稳态. 并且, 回焊炉的加热主要依靠外部加热系统, 内部没有持续且显著的热源产

生热量影响温度分布, 因此, 回焊炉无内热源. 以及根据题意可知, 回焊炉内满足常物性. 从而我们可以得到拉普拉斯 (Laplace) 方程:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

其中, x 表示坐标轴上的点与原点之间的距离, T 表示在回焊炉内 x 点处的空气温度. 对(1)两次积分求解可得下列式子, C_1, C_2 为任意常数.

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (2)$$

由于炉内空气温度达到稳定后, 各小温区温度达到恒定, 为其设定温度. 并且, 炉前区域, 炉后区域以及小温区之间的间隙温度与相邻温区的温度有关, 因此可以据题目给定的已知条件求得回焊炉内的温度 T 沿空间位置 x 的分布关系

step 1 炉前区域的温度分布

在一维坐标轴上, 炉前区域表示为 $x \in [0, 25]$, 据题意可知, 生产车间温度 T_0 为 $25^\circ C$, 小温区 1 ~ 5 的温度 T_1 为 $175^\circ C$. 因此, 存在点 a 使得:

$$T(0 \leq x \leq a) = 25^\circ C \quad (3)$$

$$T(a < x < 25) > 25^\circ C \quad (4)$$

又因为, 从 a 点处开始的温度变化为线性变化, 且 $T(x = 25) = 25^\circ C$, 结合 T_0, T_1 以及从 a 点处开始的温度变化区间和 (2) 式, 可得炉前区域的温度分布:

$$T(x) = \begin{cases} 25 & (0 \leq x \leq a) \\ 25 + \frac{150}{25 - a}(x - a) & (a \leq x \leq 25) \end{cases} \quad (5)$$

step 2 炉内区域的温度分布

在一维坐标轴上, 小温区 1 ~ 5 (包含间隙 1 ~ 4), 表示为 $x \in [65, 197.5]$, 因为小温区 1 ~ 5 的温度 T_1 为 $175^\circ C$, 据(2)式可得, 间隙 1 ~ 4 的温度均为 $175^\circ C$, 因此

$$T(x) = 175 \quad (25 \leq x \leq 197.5) \quad (6)$$

在一维坐标轴上, 小温区 6 表示为 $x \in [202.5, 233]$, 由题意可知, 小温区 6 的温度 T_2 为 $195^\circ C$, 因此

$$T(x) = 195 \quad (202.5 \leq x \leq 233) \quad (7)$$

在一维坐标轴上, 小温区 7 表示为 $x \in [238, 268.5]$, 由题意可知, 小温区 7 的温度 T_3 为 $235^\circ C$, 因此

$$T(x) = 235 \quad (238 \leq x \leq 268.5) \quad (8)$$

在一维坐标轴上, 小温区 8 ~ 9 (包含间隙 8), 表示为 $x \in [273.5, 339.5]$, 因为小温区 8 ~ 9 的温度 T_4 为 255°C , 据(2)式可得, 间隙 8 的温度为 255°C , 因此

$$T(x) = 255 \quad (273.5 \leq x \leq 339.5) \quad (9)$$

在一维坐标轴上, 小温区 10 ~ 11 (包含间隙 10), 表示为 $x \in [344.5, 410.5]$, 因为小温区 10 - 11 的温度 T_5 为 25°C , 据(2)式可得, 间隙 10 的温度为 25°C , 因此

$$T(x) = 25 \quad (344.5 \leq x \leq 410.5) \quad (10)$$

在一维坐标轴上, 间隙 5 表示为 $x \in [197.5, 202.5]$, 因为相邻两个区间温度分别为 T_1, T_2 , 因此据(2)式可得:

$$T(x) = 175 + 4x \quad (197.5 \leq x \leq 202.5) \quad (11)$$

在一维坐标轴上, 间隙 6 表示为 $x \in [233, 238]$, 因为相邻两个区间温度分别为 T_2, T_3 , 因此据(2)式可得:

$$T(x) = 195 + 4x \quad (233 \leq x \leq 238) \quad (12)$$

在一维坐标轴上, 间隙 7 表示为 $x \in [268.5, 273.5]$, 因为相邻两个区间温度分别为 T_3, T_4 , 因此据(2)式可得:

$$T(x) = 235 + 4x \quad (268.5 \leq x \leq 273.5) \quad (13)$$

在一维坐标轴上, 间隙 9 表示为 $x \in [339.5, 344.5]$, 因为相邻两个区间温度分别为 T_4, T_5 , 因此据(2)式可得:

$$T(x) = 255 - 46x \quad (339.5 \leq x \leq 344.5) \quad (14)$$

step 3 炉后区域的温度分布

在一维坐标轴上, 炉后区域表示为 $x \in [410.5, 435.5]$, 据题意可知, 生产车间温度 T_0 为 25°C , 小温区 10 ~ 11 的温度 T_5 为 25°C . 因为炉后区域的温度分布为线性分布, 从而:

$$T(x) = 25 \quad (410.5 \leq x \leq 435.5) \quad (15)$$

step 4 回焊炉的温度分布

综上所述, 回焊炉的温度分布表如下

表 2 回焊炉的温度分布表

x	温区	温度
[0, 25]	炉前区域	$25(0 \leq x \leq a)$
		$25 + \frac{150}{25-a}(x-a)(a \leq x \leq 25)$
[25, 197.5]	小温区 1 ~ 5 (包含间隙 1 ~ 4)	175
[197.5, 202.5]	间隙 5	$175 + 4x$
[202.5, 233]	小温区 6	195
[233, 238]	间隙 6	$195 + 4x$
[238, 268.5]	小温区 7	235
[268.5, 273.5]	间隙 9	$235 + 4x$
[273.5, 339.5]	小温区 8 ~ 9 (包含间隙 8)	255
[339.5, 344.5]	间隙 9	$255 - 46x$
[344.5, 410.5]	小温区 10 ~ 11 (包含间隙 10)	25
[410.5, 435.5]	炉后区域	25

因此, 我们可以得到回焊炉各位置的温度分布即传送带各位置达到稳态时的个温度分布 $T_{\infty}(x)$. 由题意可知电路板两侧搭在传送带上匀速穿过炉内, 且传送带的过炉速度恒为:

$$v_0 = 70 \text{ cm/min} \quad (16)$$

故而电路板在一维坐标轴上的位置 x 可以用 $v_0 t$ 表示, 所以上式可化为:

$$T_{\infty}(x) = T_{\infty}(v_0 t) \quad (17)$$

5.1.1.2 焊接区域的温度分布模型的确立

通过题目给定条件, 我们可以知道焊接区域的厚度 2δ 为 0.15mm . 由于电路板的材质一般为金属, 金属板与空气的传热 (对流) 系数 h 一般在 $5 \sim 500\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 内, 金属的导热系数 λ 一般在 $100\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 左右, 而厚度 2δ 很小, 所以电路板内部的热阻与外部热阻之比 $Bi = \frac{\delta h}{\lambda} \ll 0.1$, 因此我们可以用集中参数法, 即将整块电路板的内部温度分布近似看作均匀分布来求解此题.

因为题目只给了焊接区域厚度 2δ , 所以我们忽略水平方向的热对流, 只考虑垂直于电路板方向的热对流对电路板温度的影响.

以焊接区域中心为原点 O , 向上为正方向建立一维坐标轴, 如下图所示

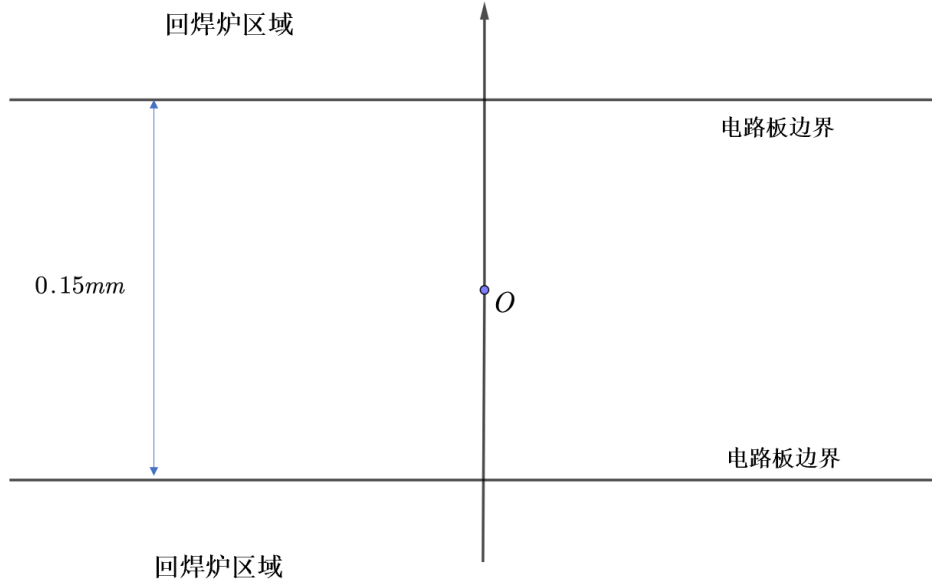


图 1 焊接区域坐标轴

一维坐标轴上的位置用 y 来表示, 因为焊接区域关于焊接中心对称, 所以我们只需要考虑电路板上半部分的热对流, 即

$$0 \leq y \leq \delta = 0.075mm \quad (18)$$

据题意可知, 焊接区域的温度分布与其在横轴和竖轴的位置有关, 横轴的位置 x 可用 $v_0 t$ 表示. 因此, 焊接区域的温度分布与竖轴位置 y 和时间 t 有关. 根据热传导方程, 我们可以知道焊接区域的温度分布函数 $T(y, t)$ 满足

$$\frac{\partial T(y, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(y, t)}{\partial y^2} (0 < y < \delta, t > 0) \quad (19)$$

其中 a 为热扩散率, 与导热系数 λ 和 ρc (ρ 为电路板密度, c 为比热容) 有关, 即

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (20)$$

记 $A = \rho c$, 则

$$a = \frac{\lambda}{A} \quad (21)$$

据题意可知,生产车间温度始终保持 25°C , 因此其初值条件

$$T(y, 0) = T_0 = 25^{\circ}\text{C} (0 \leq y \leq \delta) \quad (22)$$

因为焊接中心上下传热对称, 所以其边界条件

$$\left. \frac{\partial T(y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (23)$$

电路板在过炉过程中, 其表面温度 $T(\delta, t)$ 不断变化, 周围空气温度 $T_{\infty}(v_0 t)$ 也因焊接区域的热影响而改变. 因此, 据牛顿冷却定律, 焊接区域表面与空气之间的热流密度 q 满足

$$q = h(T(\delta, t) - T_{\infty}(v_0 t)) \quad (24)$$

将傅里叶定律用热流密度 q 表示, 得到焊接区域内部传导到电路板边界的热流密度, 即

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T(y, t)}{\partial y} \right|_{y=\delta} \quad (25)$$

由于内部传导到边界的热量与边界和空气对流换热的热量平衡, 即单位时间内通过单位面积的热量相等, 因此其热流密度相等, 即

$$h(T(\delta, t) - T_{\infty}(v_0 t)) = -\lambda \left. \frac{\partial T(y, t)}{\partial y} \right|_{y=\delta} \quad (26)$$

为了简化方程, 我们引入过剩变量 $\theta(y, t) = T(y, t) - T_{\infty}(v_0 t)$, 则方程(19)可化为

$$\frac{\partial \theta(y, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta(y, t)}{\partial y^2} (0 < y < \delta, t > 0) \quad (27)$$

记

$$\theta_0(t) = \theta(y, 0) = T(y, 0) - T_{\infty}(v_0 t) = T_0 - T_{\infty}(v_0 t) \quad (28)$$

根据过剩变量和(23)(26), 可以得到以下关系式

$$\left. \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (29)$$

$$h\theta(\delta, t) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial y} \right|_{y=\delta} \quad (30)$$

联立(22)(27)(29)(30), 得到焊接区域温度分布模型为以下方程组

$$\begin{cases} h\theta(\delta, t) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial y} \right|_{y=\delta} \\ \left. \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \\ T(y, 0) = 25^{\circ}\text{C} \quad (0 \leq y \leq \delta) \\ \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta(y, t)}{\partial y^2} \quad (0 < y < \delta, t > 0) \end{cases} \quad (31)$$

利用 PDE 理论可得到解析解

$$\frac{\theta(\eta, t)}{\theta_0(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 F_O) \cos(\mu_n \eta) \quad (32)$$

其中

$$C_n = \frac{2 \sin(\mu_n)}{\mu_n + \cos(\mu_n) \sin(\mu_n)} \quad (33)$$

η 表示把厚度方向归一化, 即

$$\eta = \frac{Y}{\delta} \quad (0 \leq \eta \leq 1, 0 \text{ 表示中心}, 1 \text{ 表示上表面}) \quad (34)$$

F_O 为傅里叶数, 衡量时间对热扩散的影响, 即

$$F_O = \frac{at}{\delta^2} \quad (35)$$

μ_n 为下列方程的根

$$\tan(\mu_n) = \frac{Bi}{\mu_n}, n = 1, 2, \dots \quad (36)$$

5.1.1.3 参数估计

由一维传热模型可知, a, λ, h 为未知参量. 因此, 我们只需用最小二乘法估计参数 a, λ, h 即可

$$(\hat{a}, \hat{\lambda}, \hat{h}) = \arg \min_{a, \lambda, h} (T(a, \lambda, h, \delta, t) - T(\delta, t)) \quad (37)$$

假设空气为低速 (静止) 空气的情况, 因为在自然对流的情况下, 温差越大, 空气的流动就越剧烈, 从而导致对流换热的强度发生变化. 则空气与金属板的对流系数 h 会只随着电路板表面温度 $T(\delta, t)$ 与周围空气温度 $T_{\infty}(v_0 t)$ 之间的温差的变化而改变.

根据传热学中关于自然对流的相关理论, 当我们只考虑热对流时, 我们可以通过一系列经验公式来计算对流系数 h :

$$\begin{cases} h = \frac{\lambda \cdot Nu}{\delta} \\ Nu = B \cdot (Gr \cdot Pr)^m, B = 1.076, m = \frac{1}{6} \\ Gr = \frac{g |T(\delta, t) - T_{\infty}(t)| \delta^4}{T_f v^2} \\ T_f = \frac{T(\delta, t) + T_{\infty}(t)}{2} \\ 10^4 < Gr \cdot Pr < 10^9 \end{cases} \quad (38)$$

其中 v, Pr 均为常数. 则 h 实际上是一个随时间变化的变量. 将上式代入(32)式得

$$\frac{T(\eta, t) - T_{\infty}(v_0 t)}{T_0 - T_{\infty}(v_0 t)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 F_O) \cos(\mu_n \eta) \quad (39)$$

进一步将其变形为

$$T(\eta, t) = T_{\infty}(v_0 t) + (T_0 - T_{\infty}(v_0 t)) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 F_o) \cos(\mu_n \eta) \quad (40)$$

其中各变量和参数如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n = \frac{2 \sin(\mu_n)}{\mu_n + \cos(\mu_n) \sin(\mu_n)} \\ \tan(\mu_n) = \frac{Bi}{\mu_n}, n = 1, 2, \dots \\ \eta = \frac{x}{\delta}, F_o = \frac{at}{\delta^2}, Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = Nu \\ Nu = B \cdot (Gr \cdot Pr)^m, B = 1.076, m = \frac{1}{6} \\ Gr = \frac{g |T(\delta, t) - T_{\infty}(t)| \delta^4}{T_f v^2} \\ T_f = \frac{T(\delta, t) + T_{\infty}(t)}{2} \\ 10^4 < Gr \cdot Pr < 10^9 \end{array} \right. \quad (41)$$

于是我们根据题目给的一组数据, 利用最小二乘法估计的参数应该为 a, λ, v, Pr , 故

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{a}, \hat{\lambda}, \hat{v}, \hat{Pr}) = \arg \min_{a, \lambda, v, Pr} (T(a, \lambda, v, Pr, \delta, t) - T(\delta, t)) \\ 10^4 < Gr \cdot Pr < 10^9 \end{array} \right. \quad (42)$$

通过计算得到参数 a, λ, v, Pr 的最优值, 即拟合优度 R^2 最接近 1 的取值. 再将最优参数代入(32)即可得到炉温曲线.

5.1.2 问题一的模型求解

5.2 问题二

5.2.1 模型建立

step 1 目标函数

根据题目要求, 我们需要找到传送带的最大过炉速度, 因此我们令速度最大作为目标函数

$$\max v \quad (43)$$

step 2 约束条件

由题目给定的制程条件, 可以得知:

- 温度曲线斜率的绝对值最高为 3°C/s , 最低为 0°C/s , 即

$$0 \leq \left| \frac{dT(0, t)}{dt} \right| \leq 3 \quad (44)$$

- 温度上升过程中, 在 $150^{\circ}\text{C} \sim 190^{\circ}\text{C}$ 的时间最高值为 120s , 最低值为 60s , 即

$$60 \leq \Delta t\{150^{\circ}\text{C} \leq T \leq 190^{\circ}\text{C}\} \leq 120 \quad (45)$$

- 温度大于 217°C 的时间最大为 120s , 最小为 60s , 即

$$40 \leq \Delta t\{T > 217^{\circ}\text{C}\} \leq 90 \quad (46)$$

- 峰值温度最高值为 250°C , 最低值为 240°C , 即

$$240 \leq \max T(0, t) \leq 250 \quad (47)$$

- 传送带的过炉速度调节范围为 $65 \sim 100\text{cm}/\text{min}$, 即

$$65 \leq v \leq 100 \quad (48)$$

综上所述, 约束条件方程组为

$$\begin{cases} 0 \leq \left| \frac{dT(0, t)}{dt} \right| \leq 3 \\ 60 \leq \Delta t\{150^{\circ}\text{C} \leq T(0, t) \leq 190^{\circ}\text{C}\} \leq 120 \\ 40 \leq \Delta t\{T(0, t) > 217^{\circ}\text{C}\} \leq 90 \\ 240 \leq \max T(0, t) \leq 250 \\ 65 \leq v \leq 100 \end{cases} \quad (49)$$

step 3 模型建立

根据以上讨论的目标函数与约束条件, 可以建立模型为

$$\begin{cases} \max v \\ 0 \leq \left| \frac{dT(0, t)}{dt} \right| \leq 3 \\ 60 \leq \Delta t\{150^{\circ}\text{C} \leq T(0, t) \leq 190^{\circ}\text{C}\} \leq 120 \\ 40 \leq \Delta t\{T(0, t) > 217^{\circ}\text{C}\} \leq 90 \\ 240 \leq \max T(0, t) \leq 250 \\ 65 \leq v \leq 100 \\ h\theta(\delta, t) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial y} \right|_{y=\delta} \\ \left. \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \\ T(y, 0) = 25^{\circ}\text{C} \quad (0 \leq y \leq \delta) \\ \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta(y, t)}{\partial y^2} \quad (0 < y < \delta, t > 0) \end{cases} \quad (50)$$

我们可以根据上述模型确定传送带过炉速度的范围, 取范围的最大值, 即传送带的最大过炉速度.

5.2.2 模型求解

5.3 问题三

5.3.1 模型建立

step 1 目标函数

根据题目给定的条件, 即理想的炉温曲线应使超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小. 因此, 我们定义目标函数为超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积 S , 通过积分计算该面积, 即

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T(0, t) - 217) dt \quad (51)$$

其中, t_1 为温度超过 217°C 的时刻即 $\min \{t | T \geq 217\}$, t_2 为达到峰值温度的时刻即 $\max T(0, t)$, $T(0, t)$ 为焊接区域中心温度随时间的变化函数.

因为根据题意设定目标是通过变化各温区的设定温度和传送带的过炉速度, 而冷却区温度恒定, 因此使该面积最小化, 即

$$\min_{T_1, T_2, T_3, T_4, v} S \quad (52)$$

step 2 约束条件

通过变化 T_1, T_2, T_3, T_4, v , 即可变化回焊炉内的空气温度, 从而改变炉温曲线, 因此

$$\min S = S(T_1, T_2, T_3, T_4, v) \quad (53)$$

根据题目给定条件, 可以得知:

- 各小温区设定温度可以进行 $\pm 10^{\circ}\text{C}$ 范围内的调整. 调整时要求小温区 1 ~ 5 中的温度保持一致, 小温区 8 ~ 9 中的温度保持一致, 即

$$165 \leq T_1 \leq 185 \quad (54)$$

$$185 \leq T_2 \leq 205 \quad (55)$$

$$225 \leq T_3 \leq 245 \quad (56)$$

$$245 \leq T_4 \leq 265 \quad (57)$$

- 由于传送带的过炉速度调节范围为 $65 \sim 100 \text{cm/min}$, 则

$$65 \leq v \leq 100 \quad (58)$$

又因为约束条件满足制程界限, 因此约束条件方程组为

$$\left\{ \begin{array}{l} 165 \leq T_1 \leq 185 \\ 185 \leq T_2 \leq 205 \\ 225 \leq T_3 \leq 245 \\ 245 \leq T_4 \leq 265 \\ 0 \leq \left| \frac{dT(0, t)}{dt} \right| \leq 3 \\ 60 \leq \Delta t \{150^\circ C \leq T(0, t) \leq 190^\circ C\} \leq 120 \\ 40 \leq \Delta t \{T(0, t) > 217^\circ C\} \leq 90 \\ 240 \leq \max T(0, t) \leq 250 \\ 65 \leq v \leq 100 \end{array} \right. \quad (59)$$

step 3 模型建立

根据以上讨论的目标函数与约束条件, 可以建立模型为

$$\begin{array}{l} \min_{T_1, T_2, T_3, T_4, v} S \\ \left\{ \begin{array}{l} S = \int_{t_1}^{t_2} (T(0, t) - 217) dt \\ t_1 = \min \{t | T \geq 217\} \\ t_2 = \max T(0, t) \\ 165 \leq T_1 \leq 185 \\ 185 \leq T_2 \leq 205 \\ 225 \leq T_3 \leq 245 \\ 245 \leq T_4 \leq 265 \\ 0 \leq \left| \frac{dT(0, t)}{dt} \right| \leq 3 \\ 60 \leq \Delta t \{150^\circ C \leq T(0, t) \leq 190^\circ C\} \leq 120 \\ 40 \leq \Delta t \{T(0, t) > 217^\circ C\} \leq 90 \\ 240 \leq \max T(0, t) \leq 250 \\ 65 \leq v \leq 100 \end{array} \right. \end{array} \quad (60)$$

我们可以根据上述模型确定面积 S 的范围, 取范围的最小值, 即可确定各温区的设定温度和传送带的过炉速度以及相应的面积.

5.3.2 模型求解

5.4 问题四

5.4.1 模型建立

由问题三设定的条件可知, t_1 为温度第一次超过 217°C 的时刻即 $\min\{t|T \geq 217\}$, t_2 为达到峰值温度的时刻即 $\max T(0, t)$, 以 Δt 为步长, 令

$$n = \frac{\Delta t}{t_2 - t_1} \quad (61)$$

故而, 对于 $t_1 \sim t_2$ 内的时间点 t 可以以下形式表示

$$t = t_1 + i\Delta t \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (62)$$

其关于 t_2 对应的时间点为 $2t_2 - (t_1 + i\Delta t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$. 为了衡量炉温曲线关于峰值温度的对称性, 我们引入一个评价指标 M , 其表达式为以下方程

$$M = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (F(0, t_1 + i\Delta t) - F(0, 2t_2 - (t_1 + i\Delta t)))^2} \quad (63)$$

由题意可知以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称, M 值越小, 说明炉温曲线在峰值温度两侧超过 217°C 的部分越对称. 因此, 我们的目标函数是使 M 最小化, 即

$$\min M = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (F(0, t_1 + i\Delta t) - F(0, 2t_2 - (t_1 + i\Delta t)))^2} \quad (64)$$

题目要求满足所求得的炉温曲线满足制程条件以及第三问的要求, 因此建立模型为

$$\begin{aligned}
 & \min_{T_1, T_2, T_3, T_4, v} S \\
 & \min E \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & S = \int_{t_1}^{t_2} (T(0, t) - 217) dt \\
 & t_1 = \min \{t | T \geq 217\} \\
 & t_2 = \max T(0, t) \\
 & 165 \leq T_1 \leq 185 \\
 & 185 \leq T_2 \leq 205 \\
 & 225 \leq T_3 \leq 245 \\
 & 245 \leq T_4 \leq 265 \\
 & 0 \leq \left| \frac{dT(0, t)}{dt} \right| \leq 3 \\
 & 60 \leq \Delta t \{150^\circ C \leq T(0, t) \leq 190^\circ C\} \leq 120 \\
 & 40 \leq \Delta t \{T(0, t) > 217^\circ C\} \leq 90 \\
 & 240 \leq \max T(0, t) \leq 250 \\
 & 65 \leq v \leq 100
 \end{aligned} \right. \quad (65)
 \end{aligned}$$

我们可以根据上述模型求出最优炉温曲线, 各温区的设定温度以及传送带的过炉速度.

5.4.2 模型求解

六、模型的评价

附录 A 支撑材料目录与代码环境依赖

本文支撑材料目录结构如下

```
README.md <----- 本文档
reference <----- 参考文献文,档习惯把对应的PDF放到这里
    reference.bib <----- 参考文献的数据库(bib)
src <----- 代,码存放代码的文件夹
    test.py <----- 单独的代码文件
thesis <----- 论文文件夹
    build <----- 用自动脚本生成的文件,夹存放多版本文件
    cumcmthesis.cls <----- 模板文件
    figures <----- 图片文件,夹存放所有图片
    main.pdf <----- 论文PDF,稿每一小节的主题内容为对应的tex文件位置
    main.tex <----- 论文代码
    makefile <----- Linux 对应自动化脚,本响应make命令
    make.ps1 <----- powershell 脚本
    sections <----- 每一节的代码
        abstract.tex <----- 摘要
        analyse.tex <----- 问题分析
        assumptions.tex <----- 模型假设
        flowchart_example.tex 一个tikz画的流图的例子
        model_review.tex <--- 模型评价
        notations.tex <----- 符号约定
        q1_build.tex <----- 问题一模型建立
        q1_solution.tex <----- 问题一模型求解
        q2_build.tex
        q2_solution.tex
        q3_build.tex
        q3_solution.tex
        question_review.tex <- 问题重述
    tree.txt <----- 支撑材料目录结,构../src的目录,树两个脚本都可以自动生成
```

附录 B 导入其他代码的测试

```
print('hello')
for i in range(3):
    print(i)
```