

Step 1 目标函数

本问中，我们的目标是通过设计 5 架无人机 FY_j 与其分别投放的烟幕干扰弹相关参数，使得烟幕干扰弹对导弹 $M1, M2, M3$ 的有效遮蔽总时间尽可能长，因此目标函数为：

$$\max_{\alpha_j, v_{FY_j}, t_{FY_j, i1}, t_{FY_j, i2}} \Delta t \quad (1)$$

Step 2 决策变量

- 无人机 FY_j 的方向: 设 α_j 为无人机 FY_j 与 x 轴正方向的夹角，逆时针为正，范围为 $[0, 2\pi]$ ，从而确定无人机 FY_i 的飞行方向 ($i = 1, 2, 3, 4, 5, j = 1, 2, 3$)。
- 来袭导弹: 由问题一同理可知导弹 Mk ($k = 1, 2, 3$) 在 t 时刻的位置坐标 $Mk(t)$ 为:

$$\begin{cases} x_{Mk,t} = x_{Mk,0} - \frac{x_{Mk,0}v_0t}{\sqrt{x_{Mk,0}^2 + y_{Mk,0}^2 + z_{Mk,0}^2}} \\ y_{Mk,t} = y_{Mk,0} - \frac{y_{Mk,0}v_0t}{\sqrt{x_{Mk,0}^2 + y_{Mk,0}^2 + z_{Mk,0}^2}} \\ z_{Mk,t} = z_{Mk,0} - \frac{z_{Mk,0}v_0t}{\sqrt{x_{Mk,0}^2 + y_{Mk,0}^2 + z_{Mk,0}^2}} \end{cases} \quad (2)$$

- 无人机 FY_j 的飞行速度: 设无人机的飞行速度为 v_{FY_j} ，无人机受领任务后，保持高度匀速直线运动。由第一问可知 t 时刻无人机 FY_j 的位置坐标为:

$$\begin{cases} x_{FY_j,t} = x_{FY_j,0} + v_{FY_j}t \cos \alpha \\ y_{FY_j,t} = y_{FY_j,0} + v_{FY_j}t \sin \alpha \\ z_{FY_j,t} = z_{FY_j,0} \end{cases} \quad (3)$$

- 烟幕干扰弹投放点: 设无人机 FY_j 在受领任务 $t_{FY_j, i1}$ s 后投放第 i 枚烟幕干扰弹。由(3)式可知, 无人机 FY_j 投放的第 i 枚烟幕干扰弹的投放点位置坐标为

$$\begin{cases} x_{FY_j, t_{FY_j, i1}} = x_{FY_j,0} + v_{FY_j}t_{FY_j, i1} \cos \alpha \\ y_{FY_j, t_{FY_j, i1}} = y_{FY_j,0} + v_{FY_j}t_{FY_j, i1} \sin \alpha \\ z_{FY_j, t_{FY_j, i1}} = z_{FY_j,0} \end{cases} \quad (4)$$

- 烟幕干扰弹起爆点: 设无人机 FY_j 投放的第 i 枚烟幕干扰弹在无人机受领任务 $t_{FY_j, i2}$ 秒后起爆，因此由问题一可得投放的第 i 枚烟雾干扰弹在 $t_{FY_j, i2}$ 时刻即其

起爆时的位置坐标:

$$\begin{cases} x_{FYji,t_{FYj,i2}} = x_{FYj,t_{FYj,i1}} + v_{FYj} (t_{FYj,i2} - t_{FYj,i1}) \cos \alpha \\ y_{FYji,t_{FYj,i2}} = y_{FYj,t_{FYj,i1}} + v_{FYj} (t_{FYj,i2} - t_{FYj,i1}) \sin \alpha \\ z_{FYji,t_{FYj,i2}} = z_{FYj,t_{FYj,i1}} - \frac{g (t_{FYj,i2} - t_{FYj,i1})^2}{2} \end{cases} \quad (5)$$

代入问题 1 中, 得到 t 时刻 ($t \in [\min_{i=1,2,3,4,5} \{t_{FYj,12}\}, \max_{i=1,2,3,4,5} \{t_{FYj,32}\} + \Delta t_0]$) 第 i 枚烟幕干扰弹形成的烟幕云团是否对目标进行遮挡, 避免导弹 Mk 发现真目标的判别式 $\Delta_{FYjik}(x_l, y_l, z_s)$ 。代入(??)(??), 得到:

$$\begin{aligned} d_{1ji} &= \sqrt{k_{1ji}^2 (x_{Mk(t)} - x_l)^2 + k_{1ji}^2 (y_{Mk(t)} - y_l)^2 + k_{1ji}^2 (z_{Mk(t)} - z_s)^2}, \\ d_{2ji} &= \sqrt{k_{2ji}^2 (x_{Mk(t)} - x_l)^2 + k_{2ji}^2 (y_{Mk(t)} - y_1)^2 + k_{2ji}^2 (z_{Mk(t)} - z_s)^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中导弹 $M1$ 到圆柱侧面上的点的距离:

$$|\overrightarrow{N1Mk}| = \sqrt{(x_{Mk(t)} - x_{n1})^2 + (y_{Mk(t)} - y_{n1})^2 + (y_{Mk(t)} - y_{n2})^2} \quad (7)$$

只有在 t 时刻, 对于 3 枚导弹同时遮挡, 才有可能看作有效遮挡, 结合问题一中的(??), 则此问中的有效遮挡判断为:

$$\begin{cases} \min \{\Delta_{FYji1}, \Delta_{FYji2}, \Delta_{FYji3}\} < 0 & \text{未形成有效遮挡} \\ \min \{\Delta_{FYji1}, \Delta_{FYji2}, \Delta_{FYji3}\} \geq 0 & \begin{cases} \min \{d_{1ji}, d_{2ji}\} > |\overrightarrow{N1Mk}| & \text{未形成有效遮挡} \\ \min \{d_{1ji}, d_{2ji}\} \leq |\overrightarrow{N1Mk}| & \text{有效遮挡} \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

判断 t 时刻下无人机 FYj 释放的第 i 枚烟幕干扰弹形成的烟幕云团是否对真目标进行遮挡。又因为每个烟幕干扰弹形成的云团都将在 $\Delta t_0 = 20$ 秒后消散, 所以规定:

$$\Delta_{FYjik}(x_l, y_l, z_s) = -1, \quad t \geq t_{FYj,i2} + \Delta t_0 \quad (9)$$

$$(10)$$

Step 3 约束条件

- **无人机的飞行速度:** 由于无人机受领任务后, 可根据需要瞬时调整飞行方向, 然后以 70-140m/s 的速度等高度匀速直线飞行。因此:

$$70 \leq v_{FY1} \leq 140 \quad (11)$$

- 无人机投放的烟幕干扰弹的时间：

由于题目要求每架无人机投放两枚烟幕干扰弹至少间隔 1s，且据试验数据知，云团中心 10m 范围内的烟幕浓度在起爆 20s 内可为目标提供有效遮蔽。因此：

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{FYj,11} \in \left[0, \frac{x_{mk,0}}{v_0} \right] \\ t_{FYj,12} \in \left[t_{FYj,11}, \frac{d_{mk,0}}{v_0} \right] \\ t_{FYj,21} \in \left[t_{FYj,11} + 1, \frac{dx_{mk,0}}{v_0} \right] \\ t_{FYj,22} \in \left[t_{FYj,21}, \frac{d_{mk,0}}{v_0} \right] \\ t_{FYj,31} \in \left[t_{FYj,21} + 1, \frac{d_{mk,0}}{v_0} \right] \\ t_{FYj,32} \in \left[t_{FYj,21}, \frac{d_{mk,0}}{v_0} \right] \end{array} \right. \quad (12)$$

Step 4 优化模型

综上所述，5 架无人机释放的相应的烟幕干扰弹对真目标的有效遮蔽总时间单目标

优化模型为:

$$\begin{aligned}
 & \max_{\alpha_j, v_{FYj}, t_{FYj,i1}, t_{FYj,i2}} \Delta t \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \text{导弹 } Mk \text{ 在 } t \text{ 时刻的位置坐标:} \\
 & \begin{cases}
 x_{Mk,t} = x_{Mk,0} - \frac{x_{Mk,0}v_0t}{\sqrt{x_{Mk,0}^2 + y_{Mk,0}^2 + z_{Mk,0}^2}} \\
 y_{Mk,t} = y_{Mk,0} - \frac{y_{Mk,0}v_0t}{\sqrt{x_{Mk,0}^2 + y_{Mk,0}^2 + z_{Mk,0}^2}} \\
 z_{Mk,t} = z_{Mk,0} - \frac{z_{Mk,0}v_0t}{\sqrt{x_{Mk,0}^2 + y_{Mk,0}^2 + z_{Mk,0}^2}}
 \end{cases} \\
 & t \text{ 时刻无人机的位置坐标:} \\
 & \begin{cases}
 x_{FYj,t} = x_{FYj,0} + v_{FYj}t \cos \alpha \\
 y_{FYj,t} = y_{FYj,0} + v_{FYj}t \sin \alpha \\
 z_{FYj,t} = z_{FYj,0}
 \end{cases} \\
 & 70 \leq v_{FYj} \leq 140 \\
 & \text{第 } j \text{ 架无人机的第 } i \text{ 枚烟雾干扰弹起爆时的位置坐标:} \\
 & \begin{cases}
 x_{FYji,t_{FYj,i2}} = x_{FYj,t_{FYj,i1}} + v_{FYj}(t_{FYj,i2} - t_{FYj,i1}) \cos \alpha \\
 y_{FYji,t_{FYj,i2}} = y_{FYj,t_{FYj,i1}} + v_{FYj}(t_{FYj,i2} - t_{FYj,i1}) \sin \alpha \\
 z_{FYji,t_{FYj,i2}} = z_{FYj,t_{FYj,i1}} - \frac{g(t_{FYj,i2} - t_{FYj,i1})^2}{2} \\
 t_{FYj,11} \in \left[0, \frac{x_{mk,0}}{v_0} \right] \\
 t_{FYj,12} \in \left[t_{FYj,11}, \frac{d_{mk,0}}{v_0} \right] \\
 t_{FYj,21} \in \left[t_{FYj,11} + 1, \frac{dx_{mk,0}}{v_0} \right] \\
 t_{FYj,22} \in \left[t_{FYj,21}, \frac{d_{mk,0}}{v_0} \right] \\
 t_{FYj,31} \in \left[t_{FYj,21} + 1, \frac{dx_{mk,0}}{v_0} \right] \\
 t_{FYj,32} \in \left[t_{FYj,31}, \frac{d_{mk,0}}{v_0} \right]
 \end{cases}
 \end{aligned} \right. \quad (13)
 \end{aligned}$$