

Step 1 分析调头区域

根据题目要求, 舞龙队在调头空间内的运动轨迹大致如下:

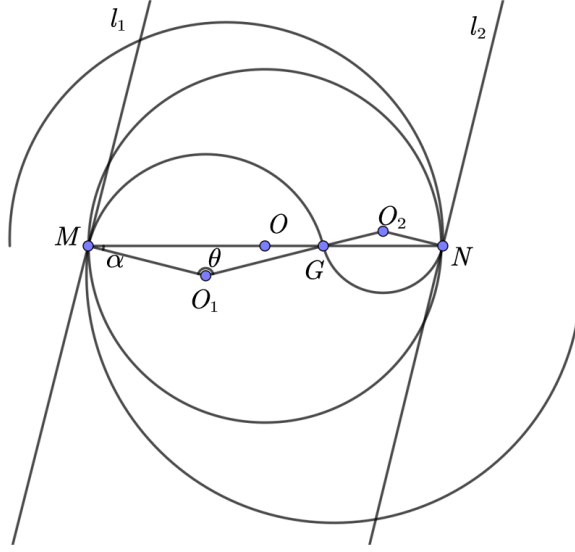


图 1 调头空间示意图

其中, 盘入螺线与盘出螺线与调头区域边界交点分别为 M 和 N . 前一段、后一段调头圆弧圆心分别为 O_1, O_2 . 两段圆弧切点为 G . 过点 M 与盘入螺线相切的直线为 l_M , 过点 N 与盘出螺线相切的直线为 l_N . 记第一段圆弧半径与调头空间直径的夹角为 α , 第一段圆弧对应的夹角为 θ .

根据题目和计算可以得到以下结论:

- 由于两段圆弧之间相切, 所以 O_1, G, O_2 三点共线.
- 经计算可知, $\angle MGO_2 + \angle O_2GN = \pi$, 基于这个条件, 可得 M, G, N 三点共线.
- 因为盘入螺线 F 与盘出螺线 F' 中心对称, 所以 MN 一定过原点 O 且 l_M 平行于 l_N .
- 由于两段圆弧均与盘入, 盘出螺线相切, 因此 $O_1M \perp l_M, O_2N \perp l_N$ 且 O_1M 与 O_2N 的大小比例为 2: 1.
- 由于 O_1M 平行于 O_2N , 则由几何关系易得

$$\angle MO_1G = \angle NO_2G = \theta, \quad (1)$$

$$\angle O_1MN = \angle O_1GMN = \angle O_2GN = \angle O_2NG = \alpha. \quad (2)$$

Step 2 证明不可通过改变前后两段调头圆弧半径比例减小调头曲线长度

记调头区域半径为 R , 则 $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{ON}| = R$. 设前后两段调头圆弧半径比例为 $a : 1$, 记后一段调头圆弧的半径为 r , 则前一段调头圆弧的半径为 ar , 其中 a 为任意常数. 则

$$|\overrightarrow{O_1M}| = |\overrightarrow{O_1G}| = ar, |\overrightarrow{O_2N}| = |\overrightarrow{O_2G}| = r. \quad (3)$$

设直线 l_M, l_N, O_1M, MN 的斜率分别为 $k_{l_M}, k_{l_N}, k_{O_1M}, k_{MN}$, 根据两直线夹角斜率公式可得

$$\tan \alpha = \tan \angle NMO_1 = \frac{k_{MN} - k_{l_{O_1M}}}{1 + k_{MN}k_{l_{O_1M}}}. \quad (4)$$

从而

$$\alpha = \left| \arctan \frac{k_{MN} - k_{l_{O_1M}}}{1 + k_{MN}k_{l_{O_1M}}} \right|. \quad (5)$$

由 $O_1M \parallel O_2N, \angle MO_1G = \angle NO_2G, \angle O_1MG = \angle O_2NG$, 且 $|\overrightarrow{O_1M}| = 2|\overrightarrow{O_2N}|$, 根据角角边定理可得 $\triangle MO_1G \cong \triangle NO_2G$, 由此可得下述线段比例关系

$$|\overrightarrow{NG}| = \frac{|\overrightarrow{MN}|}{1+a} = \frac{2R}{1+a}. \quad (6)$$

再结合几何关系易得

$$\theta = \pi - 2\alpha, \quad \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2} |\overrightarrow{NG}|}{|\overrightarrow{O_2N}|} = \frac{R}{(1+a)r}. \quad (7)$$

因此

$$r = \frac{R}{(1+a)\cos \alpha}. \quad (8)$$

设 \widehat{MG} 的长度为 L_1, \widehat{GN} 的长度为 L_2 , 记 $L = L_1 + L_2$. 于是根据圆弧长度计算公式可得

$$L = L_1 + L_2 = \theta r + \theta a r = (1+a)\theta r = \frac{(\pi - 2\alpha)R}{\cos \alpha} = \frac{\left(\pi - 2 \left| \arctan \frac{k_{MN} - k_{l_{O_1M}}}{1 + k_{MN}k_{l_{O_1M}}} \right| \right) R}{\cos \left| \arctan \frac{k_{MN} - k_{l_{O_1M}}}{1 + k_{MN}k_{l_{O_1M}}} \right|}. \quad (9)$$

由上式可知 L 与 a 无关, 因此不可通过改变前后两段调头圆弧半径比例减小调头曲线长度.

Step 3 调头曲线长度

由 Step 2 可知调头曲线长度与 MN 以及盘入螺线在 M 处的斜率 $k_{l_{O_1M}}$ 有关, 因此我们需要确定 M, N 的位置, 记它们的极坐标分别为 (ρ_M, θ_M) 和 (ρ_N, θ_N) . 由图 2 可知, M 与 N 分别为盘入螺线, 盘出螺线与调头空间的交点.

其中, 盘入螺线 Γ 的极坐标方程和直角坐标方程分别为

$$\Gamma: \rho = \frac{d_0}{2\pi} \theta. \quad (10)$$

$$\Gamma : \begin{cases} x = \frac{d_0}{2\pi} \theta \cos \theta \\ y = \frac{d_0}{2\pi} \theta \sin \theta \end{cases} \quad (11)$$

由于盘入螺线与盘出螺线关于螺线中心呈中心对称, 因此盘出螺线 Γ' 的极坐标方程和直角坐标方程分别为

$$\Gamma' : \rho = \frac{d_0}{2\pi} (-\theta). \quad (12)$$

$$\Gamma' : \begin{cases} x = \frac{d_0}{2\pi} (-\theta) \cos \theta \\ y = \frac{d_0}{2\pi} (-\theta) \sin \theta \end{cases} \quad (13)$$

由于调头空间的直径为 R , 因此其极坐标方程为

$$S : \rho = R. \quad (14)$$

因此, 将(14)式分别与(10)式,(12)式联立得到 M, N 的极坐标

$$\begin{cases} \rho_M = R \\ \theta_M = \frac{2\pi R}{d_0} \end{cases}, \begin{cases} \rho_N = R \\ \theta_N = -\frac{2\pi R}{d_0} \end{cases}. \quad (15)$$

通过坐标转化方程, 将 M, N 的极坐标转化为直角坐标

$$\begin{cases} x_M = R \cos \frac{2\pi R}{d_0} \\ y_M = R \sin \frac{2\pi R}{d_0} \end{cases}, \begin{cases} x_N = R \cos(\frac{2\pi R}{d_0} - \pi) = -R \cos \frac{2\pi R}{d_0} \\ y_N = R \sin(\frac{2\pi R}{d_0} - \pi) = -R \sin \frac{2\pi R}{d_0} \end{cases}. \quad (16)$$

于是得到 MN 的斜率

$$k_{MN} = \tan \frac{2\pi R}{d_0}. \quad (17)$$

将(11)分别对 x 和 y 对于 θ 求导

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = \frac{d_0}{2\pi} (\cos \theta - \theta \sin \theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = \frac{d_0}{2\pi} (\sin \theta + \theta \cos \theta) \end{cases}$$

于是就有

$$k_{l_M} = \frac{dy}{dx} \Big|_M = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \Big|_M = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta} \Big|_{\theta=\theta_M} = \frac{\sin \frac{2\pi R}{d_0} + \frac{2\pi R}{d_0} \cos \frac{2\pi R}{d_0}}{\cos \frac{2\pi R}{d_0} - \frac{2\pi R}{d_0} \sin \frac{2\pi R}{d_0}} \quad (18)$$

所以将(17) (18)代入可得

$$L = \quad (19)$$

Step 4 计算圆心和切点的坐标

1. 切点坐标

通过题目给定条件, 我们可以知道, 前一段圆弧的半径是后一段的 2 倍, 又由于 $\triangle MO_1G \cong \triangle NO_2G$, 所以 $\vec{MG} = 2\vec{GN}$, 记 G 的直角坐标为 (x_G, y_G)

$$\vec{MG} = (x_G - x_M, y_G - y_M), \quad (20)$$

$$\vec{GN} = (x_N - x_G, y_N - y_G). \quad (21)$$

在 Step 3 中我们已经求出 M, N 的直角坐标, 因此

$$\begin{cases} x_G = -\frac{1}{3}R \cos \frac{2\pi R}{d_0} \\ y_G = -\frac{1}{3}R \sin \frac{2\pi R}{d_0} \end{cases}. \quad (22)$$

2. 圆心坐标

设前一段调头圆弧圆心 O_1 的直角坐标与极坐标分别为 (x_{O_1}, y_{O_1}) 和 $(\rho_{O_1}, \theta_{O_1})$, 后一段调头圆弧圆心 O_2 的直角坐标为 (x_{O_2}, y_{O_2}) 和 $(\rho_{O_2}, \theta_{O_2})$. 前一段圆弧的半径为 $2r$, 后一段圆弧的半径为 r , 因为圆心到圆上任意一点的距离相同, 因此

$$|\vec{O_1O_2}| = |\vec{O_1G}| + |\vec{O_2G}| = 3r \quad (23)$$

$$|\vec{O_1M}| = 2r \quad (24)$$

$$|\vec{O_2N}| = r \quad (25)$$

即

$$2R = |\vec{MN}| = |\vec{MG}| + |\vec{GN}| = 2r \cos \alpha \times 2 + r \cos \alpha \times 2 = 6r \cos \alpha, \quad (26)$$

$$\begin{cases} (x_M - x_{O_1})^2 + (y_M - y_{O_1})^2 = 4r^2 \\ (x_G - x_{O_1})^2 + (y_G - y_{O_1})^2 = 4r^2 \end{cases}, \quad (27)$$

$$\begin{cases} (x_N - x_{O_2})^2 + (y_N - y_{O_2})^2 = r^2 \\ (x_G - x_{O_2})^2 + (y_G - y_{O_2})^2 = r^2 \end{cases}. \quad (28)$$

由上式解得

$$\begin{cases} x_{O_1} = \\ y_{O_1} = \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{O_2} = \\ y_{O_2} = \end{cases}. \quad (29)$$

进而得到

$$\begin{cases} \rho_{O_1} = \sqrt{x_{O_1}^2 + y_{O_1}^2} = \\ \theta_{O_1} = \arctan \frac{y_{O_1}}{x_{O_1}} = \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho_{O_2} = \sqrt{x_{O_2}^2 + y_{O_2}^2} = \\ \theta_{O_2} = \arctan \frac{y_{O_2}}{x_{O_2}} = \end{cases}. \quad (30)$$

Step 5 计算龙头前把手在各时刻的位置

1. P_0 位于盘入螺线 Γ 上

当 $t \in [-100, 0]$ 时, P_0 位于盘入螺线 Γ 上. 从 t s 至 0 s, 龙头前把手运动的路径长度为 $(-t)v_0$, 极角从 $\theta_{P_0(t)}$ 变为 θ_M , 由第一型曲线积分计算公式可得, 曲线 $\widehat{P_0M}$ 长度

$$S = (-t)v_0 = \int_{\widehat{P_0M}} ds = \int_{\theta_M}^{\theta_{P_0(t)}} \sqrt{[\rho_\Gamma(\theta)]^2 + [\rho'_\Gamma(\theta)]^2} d\theta = \frac{d_0}{2\pi} \int_{\theta_M}^{\theta_{P_0(t)}} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta. \quad (31)$$

通过求解, 可以得到龙头前把手某一时间点与其极角之间的关系

$$(-t)v_0 = \frac{d_0}{4\pi} \left[\theta_{P_0(t)} \sqrt{\theta_{P_0(t)}^2 + 1} + \ln(\theta_{P_0(t)} + \sqrt{\theta_{P_0(t)}^2 + 1}) - \theta_M \sqrt{\theta_M^2 + 1} - \ln(\theta_M + \sqrt{\theta_M^2 + 1}) \right] \quad (32)$$

由上式解得 P_0 的极角, 再通过(??)可以求得 P_0 的极坐标, 通过坐标转化方程(??)求得 P_0 在直角坐标系下的坐标.

2. P_0 位于调头曲线 \widehat{MG} 上

当 $t \in [0, \frac{L_1}{v_0}]$ 时, P_0 在以 O_1 为圆心, 半径为 $2r$ 的圆弧 \widehat{MG} 上运动, 且运动速度为 v_0 , 在时间 t 内, P_0 所经过的弧长对应的圆心角为 $\angle P_0(t)O_1M$. 根据弧长公式 $l = \alpha r$, 可得

$$v_0 t = \angle P_0(t)O_1M \cdot 2r \quad (33)$$

根据直线斜率的定义, 直线 O_1M 的斜率 k_{O_1M} , $O_1P_0(t)$ 的斜率 $k_{O_1P_0(t)}$ 为

$$k_{O_1M} = \frac{y_{O_1} - y_M}{x_{O_1} - x_M}, k_{O_1P_0(t)} = \frac{y_{O_1} - y_{P_0(t)}}{x_{O_1} - x_{P_0(t)}}, \quad (34)$$

依据两直线夹角的正切公式, $\angle P_0(t)O_1M$ 的正切值为

$$\tan \angle P_0(t)O_1M = \frac{k_{O_1M} - k_{O_1P_0(t)}}{1 + k_{O_1M}k_{O_1P_0(t)}} \in [0, \pi] \quad (35)$$

联立(33)(35), 得到

$$\tan \frac{v_0 t}{2r} = \tan \angle P_0(t)O_1M = \frac{k_{O_1M} - k_{O_1P_0(t)}}{1 + k_{O_1M}k_{O_1P_0(t)}} = \frac{\frac{y_{O_1} - y_M}{x_{O_1} - x_M} - \frac{y_{O_1} - y_{P_0(t)}}{x_{O_1} - x_{P_0(t)}}}{1 + \frac{y_{O_1} - y_M}{x_{O_1} - x_M} \frac{y_{O_1} - y_{P_0(t)}}{x_{O_1} - x_{P_0(t)}}}, \quad (36)$$

由于 $P_0(t)$ 到圆心 O_1 的距离始终等于圆弧半径 $2r$, 根据两点间距离公式, 可得

$$(x_{O_1} - x_{P_0(t)})^2 + (y_{O_1} - y_{P_0(t)})^2 = 4r^2 \quad (37)$$

因此, 通过(36)(37)解得 P_0 的位置坐标.

3. P_0 位于调头曲线 \widehat{GN} 上

当 $t \in [\frac{L_1}{v_0}, \frac{L}{v_0}]$ 时, P_0 在以 O_2 为圆心, 半径为 r 的圆弧 \widehat{GN} 上运动, 且运动速度为 v_0 , 在时间 $t - \frac{L_1}{v_0}$ 内, P_0 所经过的弧长对应的圆心角为 $\angle P_0(t)O_2G$. 根据弧长公式 $l = \alpha r$, 可得

$$v_0 \left(t - \frac{L_1}{v_0} \right) = \angle P_0(t) O_2G \cdot r, \quad (38)$$

根据直线斜率的定义, 直线 O_2G 的斜率 k_{O_2G} , $O_2P_0(t)$ 的斜率 $k_{O_2P_0(t)}$ 为

$$k_{O_2G} = \frac{y_{O_2} - y_G}{x_{O_2} - x_G}, k_{O_2P_0(t)} = \frac{y_{O_2} - y_{P_0(t)}}{x_{O_2} - x_{P_0(t)}}, \quad (39)$$

依据两直线夹角的正切公式, $\angle P_0(t)O_2G$ 的正切值为

$$\tan \angle P_0(t) O_2G = \frac{k_{O_2G} - k_{O_2P_0(t)}}{1 + k_{O_2G}k_{O_2P_0(t)}} \in [0, \pi], \quad (40)$$

联立(38)(40), 得到

$$\tan \frac{v_0 \left(t - \frac{L_1}{v_0} \right)}{r} = \tan \angle P_0(t) O_2G = \frac{k_{O_2G} - k_{O_2P_0(t)}}{1 + k_{O_2G}k_{O_2P_0(t)}} = \frac{\frac{y_{O_2} - y_G}{x_{O_2} - x_G} - \frac{y_{O_2} - y_{P_0(t)}}{x_{O_2} - x_{P_0(t)}}}{1 + \frac{y_{O_2} - y_G}{x_{O_2} - x_G} \frac{y_{O_2} - y_{P_0(t)}}{x_{O_2} - x_{P_0(t)}}}, \quad (41)$$

由于 $P_0(t)$ 到圆心 O_2 的距离始终等于圆弧半径 r , 根据两点间距离公式, 可得

$$(x_{O_2} - x_{P_0(t)})^2 + (y_{O_2} - y_{P_0(t)})^2 = r^2. \quad (42)$$

因此, 通过(41)(42)解得 P_0 的位置坐标.

4. P_0 位于盘出螺线 Γ' 上

当 $t \in [\frac{L}{v_0}, 100]$ 时, P_0 位于盘入螺线 Γ' 上. 从 $\frac{L}{v_0}$ 至 ts , 龙头前把手运动的路径长度为 $v_0 \left(t - \frac{L}{v_0} \right)$, 极角从 θ_N 变为 $\theta_{P_0(t)}$, 由第一型曲线积分计算公式可得, 曲线 $\widehat{P_0M}$ 长度

$$S = v_0 \left(t - \frac{L}{v_0} \right) = \int_{P_0(t)N} ds = \int_{\theta_N}^{\theta_{P_0(t)}} \sqrt{[\rho_{\Gamma'}(\theta)]^2 + [\rho'_{\Gamma'}(\theta)]^2} d\theta = \frac{d_0}{2\pi} \int_{\theta_N}^{\theta_{P_0(t)}} \sqrt{(-\theta)^2 + 1} d\theta. \quad (43)$$

通过求解, 可以得到龙头前把手某一时间点与其极角之间的关系

$$v_0 \left(t - \frac{L}{v_0} \right) = \frac{d_0}{4\pi} \left[(\theta_{P_0(t)} + \pi) \sqrt{(\theta_{P_0(t)} + \pi)^2 + 1} - (\theta_N + \pi) \sqrt{(\theta_N + \pi)^2 + 1} + \ln \frac{\theta_{P_0(t)} + \pi + \sqrt{(\theta_{P_0(t)} + \pi)^2 + 1}}{\theta_N + \pi + \sqrt{(\theta_N + \pi)^2 + 1}} \right]$$

由上式解得 P_0 的极角, 再通过(??)可以求得 P_0 的极坐标, 通过坐标转化方程(??)求得 P_0 在直角坐标系下的坐标.

Step 6 计算板凳龙从-100s 到 100s 其余各把手的位置

当 $t \in [-100, 100]$ 时, 板凳龙部分把手位于调头曲线上, 此时需要对板凳龙的运动轨迹分段处理, 我们将板凳龙的运动轨迹分为盘入螺线 Γ 、前一段调头曲线 \widehat{MG} 、后一段

调头曲线 \widehat{GN} 、盘出螺线 Γ' 四段. 然后我们需要根据前一个把手的位置判断与其相邻的后一个把手所在的轨迹曲线, 进而递推解出后一个把手的位置.

已知 $O_1(x_{O_1}, y_{O_1})$ 与 $M(x_M, y_M)$ 的直角坐标, 依据直线的两点式方程公式

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (44)$$

联立公式(16)(29), 得到 O_1M 直线方程:

$$(y - y_{O_1})(x_M - x_{O_1}) - (y_M - y_{O_1})(x - x_{O_1}) = 0 \quad (45)$$

1. 判断 P_i 在直线 MO_1 的上侧还是下侧

(1) 当第 t 秒, 满足

$$(y_{P_i} - y_0)(x_M - x_0) - (y_M - y_0)(x_{P_i} - x_0) \leq 0 \quad (46)$$

则 P_i 在直线 OM 的下侧或直线上, 即 $P_i(0 \leq i \leq 222)$ 在盘入螺线 Γ 上时, 利用问题 1 的模型求解 P_{i+1} 的直角坐标即可.

(2) 当第 t 秒, 若

$$(y_{P_i} - y_0)(x_M - x_0) - (y_M - y_0)(x_{P_i} - x_0) > 0 \quad (47)$$

则 P_i 在直线 OM 的上侧, 进行下一步 2.

2. 判断 $\angle P_i(t)O_1M$ 大小

• 引入判断角 β_1

当第 t 秒 $P_i(0 \leq i \leq 222)$ 在 \widehat{MG} 上时, 引入判断角. 若 P_{i+1} 与 M 点重合, 则定义此时 $\angle P_iO_1P_{i+1} = \beta_1$, 称 β_1 为 \widehat{MG} 判断角. 几何示意图如下:

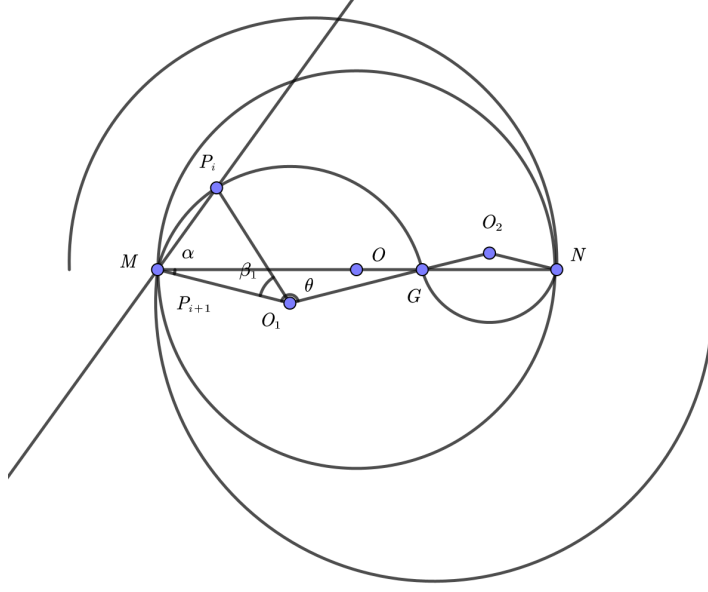


图 2 几何示意图 1

在由点 P_i 、 O_1 和 P_{i+1} 构成的三角形中, 根据余弦定理有

$$l_{i+1}^2 = \left| \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \right|^2 = 4r^2 - 4r^2 \cos \beta_1. \quad (48)$$

由上式解得

$$\beta_1 = \left| \arccos \left(1 - \frac{l_{i+1}^2}{4r^2} \right) \right| = \quad (49)$$

• 计算 $\angle P_i(t)O_1M$

根据几何关系及两直线夹角斜率公式可得

$$k_{O_1M} = \frac{y_M - y_{O_1}}{x_M - x_{O_1}}, k_{O_1P_i(t)} = \frac{y_{P_i(t)} - y_{O_1}}{x_{P_i(t)} - x_{O_1}}, \quad (50)$$

$$\tan \angle P_i(t)O_1M = \frac{k_{O_1M} - k_{O_1P_i(t)}}{1 + k_{O_1M}k_{O_1P_i(t)}}. \quad (51)$$

从而

$$\angle P_i(t)O_1M = \arctan \frac{\frac{y_M - y_{O_1}}{x_M - x_{O_1}} - \frac{y_{P_i(t)} - y_{O_1}}{x_{P_i(t)} - x_{O_1}}}{1 + \frac{y_M - y_{O_1}}{x_M - x_{O_1}} \cdot \frac{y_{P_i(t)} - y_{O_1}}{x_{P_i(t)} - x_{O_1}}}. \quad (52)$$

• 判断并计算 P_{i+1} 的位置

P_i 在直线 OM 的上侧时, 在得到 $\angle P_i(t)O_1M$ 和 β_1 后, 我们通过比较它们的大小来判断 P_{i+1} 的位置.

(1) 若 $\angle P_i(t)O_1M \in [\beta_1, \theta]$, 则 P_{i+1} 一定位于圆弧 \widehat{MG} 上. 此时, 我们可以根据以下两个方程来确定 P_{i+1} 的坐标:

$$\begin{cases} (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 = l_{i+1}^2 \\ (x_{i+1} - x_{O_1})^2 + (y_{i+1} - y_{O_1})^2 = 4r^2 \end{cases} \quad (53)$$

联立这两个方程求解, 会得到 (x_{i+1}, y_{i+1}) 的多个可能解. 但结合题意可知, 在这些解中, x_{i+1} 的真实解是其中最小的一个, 由此我们就能确定 P_{i+1} 的直角坐标 (x_{i+1}, y_{i+1}) .

(2) 若 $\angle P_i(t)O_1M < \beta_1$, 则 P_{i+1} 一定位于盘入螺线 Γ 上. 此时, 我们利用问题 1 中建立的模型, 按照相应的计算方法解出 (x_{i+1}, y_{i+1}) 即可.

(3) 若 $\angle P_i(t)O_1M > \theta$, 则进行下一步 3.

3. 判断 $\angle P_i(t)O_2G$ 大小

• 引入判断角 β_2

当第 t 秒 $P_i (0 \leq i \leq 222)$ 在 \widehat{GN} 上时, 引入判断角. 若 P_{i+1} 与 G 点重合, 则定义此时 $\angle P_i O_2 P_{i+1} = \beta_2$, 称 β_2 为 \widehat{GN} 判断角. 几何示意图如下:

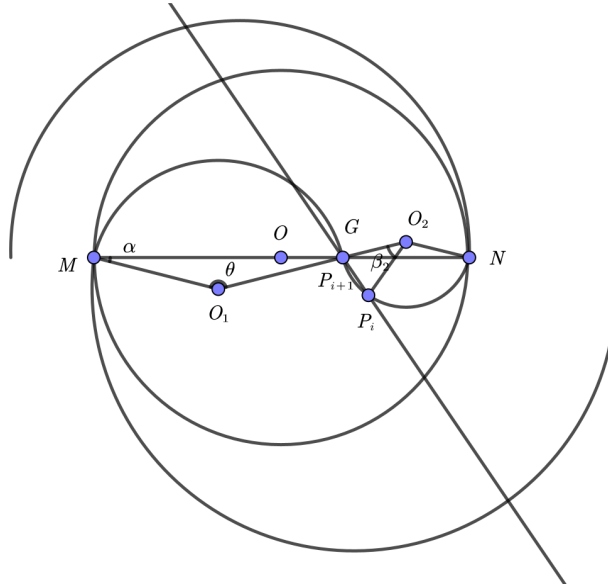


图 3 几何示意图 2

在由点 P_i 、 O_2 和 P_{i+1} 构成的三角形中, 根据余弦定理有

$$l_{i+1}^2 = \left| \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \right|^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \beta_2. \quad (54)$$

由上式解得

$$\beta_2 = \left| \arccos \left(1 - \frac{l_{i+1}^2}{2R^2} \right) \right| = \quad (55)$$

• 计算 $\angle P_i(t)O_2G$

根据几何关系及两直线夹角斜率公式可得

$$k_{O_1O_2} = \frac{y_{O_2} - y_{O_1}}{x_{O_2} - x_{O_1}}, k_{O_2P_i(t)} = \frac{y_{P_i(t)} - y_{O_2}}{x_{P_i(t)} - x_{O_2}}, \quad (56)$$

$$\tan \angle P_i(t)O_2G = \frac{k_{O_1O_2} - k_{O_2P_i(t)}}{1 + k_{O_1O_2}k_{O_2P_i(t)}}. \quad (57)$$

从而

$$\angle P_i(t)O_2G = \arctan \frac{\frac{y_{O_2} - y_{O_1}}{x_{O_2} - x_{O_1}} - \frac{y_{P_i(t)} - y_{O_2}}{x_{P_i(t)} - x_{O_2}}}{1 + \frac{y_{O_2} - y_{O_1}}{x_{O_2} - x_{O_1}} \frac{y_{P_i(t)} - y_{O_2}}{x_{P_i(t)} - x_{O_2}}}. \quad (58)$$

• 判断 $\angle P_i(t)O_2G$ 并计算 P_{i+1} 的位置

在得到 $\angle P_i(t)O_2G$ 和 β_2 后, 通过比较它们的大小来判断 P_{i+1} 的位置.

(1) 若 $\angle P_i(t)O_2G \in [\beta_2, \theta]$, 根据几何关系可知, P_{i+1} 一定位于圆弧 \widehat{GN} 上. 此时, 我们可以根据以下两个方程来确定 P_{i+1} 的坐标

$$\begin{cases} (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 = l_{i+1}^2 \\ (x_{i+1} - x_{O_2})^2 + (y_{i+1} - y_{O_2})^2 = r^2 \end{cases}. \quad (59)$$

联立这两个方程求解, 会得到 (x_{i+1}, y_{i+1}) 的多个可能解. 由题意可知, x_{i+1} 的真实解是其中最小的一个. 通过这种方式, 我们确定了 P_{i+1} 的直角坐标 (x_{i+1}, y_{i+1}) .

(2) 若 $\angle P_i(t)O_2G < \beta_2$, 则 P_{i+1} 一定位于圆弧 \widehat{MG} 上. 从而根据 2 中的情形 (1) 解出 (x_{i+1}, y_{i+1}) 即可.

(3) 若 $\angle P_i(t)O_2G > \theta$, 则进行下一步 4.

4. 判断 $\angle P_i(t)O_2N$ 大小

• 引入判断角 β_3

当第 t 秒 $P_i(0 \leq i \leq 222)$ 在 Γ' 上时, 引入判断角. 若 P_{i+1} 与 N 点重合, 则定义此时 $\angle P_iO_2N = \beta_3$, 称 β_3 为 Γ' 判断角. 几何示意图如下:

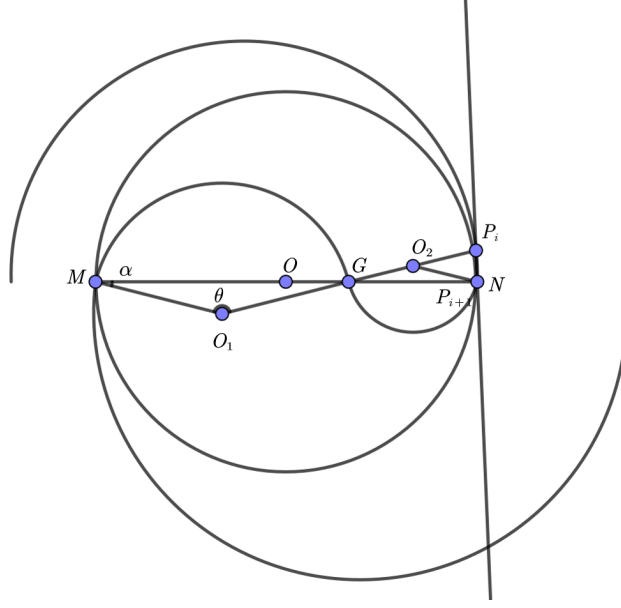


图 4 几何示意图 3

在由点 P_i 、 O_2 和 P_{i+1} 构成的三角形中, 根据余弦定理有

$$\left| \overrightarrow{O_2 P_i} \right| = \sqrt{(x_{P_i} - x_{O_2})^2 + (y_{P_i} - y_{O_2})^2}, \quad (60)$$

$$l_{i+1}^2 = \left| \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \right|^2 = \left| \overrightarrow{O_2 P_i} \right|^2 + r^2 - 2r \left| \overrightarrow{O_2 P_i} \right| \cos \beta_3. \quad (61)$$

由上式解得

$$\beta_3 = \left| \arccos \frac{r^2 + (x_{P_i} - x_{O_2})^2 + (y_{P_i} - y_{O_2})^2 - l_{i+1}^2}{2r \sqrt{(x_{P_i} - x_{O_2})^2 + (y_{P_i} - y_{O_2})^2}} \right| = \quad (62)$$

• 计算 $\angle P_i(t) O_2 N$

根据几何关系及两直线夹角斜率公式可得

$$k_{O_2 N} = \frac{y_{O_2} - y_N}{x_{O_2} - x_N}, k_{O_2 P_i(t)} = \frac{y_{P_i(t)} - y_{O_2}}{x_{P_i(t)} - x_{O_2}}, \quad (63)$$

$$\tan \angle P_i(t) O_2 N = \frac{k_{O_2 N} - k_{O_2 P_i(t)}}{1 + k_{O_2 N} k_{O_2 P_i(t)}}. \quad (64)$$

从而

$$\angle P_i(t) O_2 N = \arctan \frac{\frac{y_{O_2} - y_N}{x_{O_2} - x_N} - \frac{y_{P_i(t)} - y_{O_2}}{x_{P_i(t)} - x_{O_2}}}{1 + \frac{y_{O_2} - y_N}{x_{O_2} - x_N} \frac{y_{P_i(t)} - y_{O_2}}{x_{P_i(t)} - x_{O_2}}}. \quad (65)$$

• 判断并计算 P_{i+1} 的位置

在得到 $\angle P_i(t) O_2 N$ 和 β_3 后, 通过比较它们的大小来判断 P_{i+1} 的位置.

(1) 若 $\angle P_i(t)O_2N \geq \beta_3$, 根据几何关系可知, P_{i+1} 一定位于盘出螺线 Γ' 上. 此时, 根据盘出螺线的性质以及两把手之间的距离关系, 我们可以列出以下方程来确定 P_{i+1} 的坐标

$$l_{i+1}^2 = |P_i(t)P_{i+1}(t)|^2 = (\rho_i(t))^2 + (\rho_{i+1}(t))^2 - 2\rho_i(t)\rho_{i+1}(t)\cos(\theta_i(t) - \theta_{i+1}(t)), \quad (66)$$

$$\rho_{i+1}(t) = \frac{d_0}{2\pi} (\theta_{i+1}(t) + \pi). \quad (67)$$

根据上式利用 Python 求解 $\theta_i(t)$, 可能得到多个不同解. 不妨设这些为不同的解为 $\alpha_j^i(t) (j = 1, 2, \dots, m)$, 注意到一定有 $\theta_i(t) < \theta_{i-1}(t)$, 因此令

$$A_i = \{\alpha_j^i(t) | \alpha_j^i(t) < \theta_{i-1}(t), j = 1, 2, \dots, m\}, \quad (68)$$

因为第 $i+1$ 个把手与第 i 个把手的极角之差一定是最小的, 所以

$$\theta_{i+1}(t) = \min_{\alpha_j^i(t) \in A_i} [\alpha_j^i(t) - \theta_i(t)] + \theta_i(t). \quad (69)$$

将上述求得的 $\theta_{i+1}(t)$ 代入盘入螺线 Γ' 得到此时 $P_{i+1}(t)$ 的极坐标 $(\rho_{i+1}(t), \theta_{i+1}(t))$. 再利用极坐标与直角坐标之间的转化公式

$$\begin{cases} x_{i+1}(t) = \rho_{i+1}(t) \cos \theta_{i+1}(t) \\ y_{i+1}(t) = \rho_{i+1}(t) \sin \theta_{i+1}(t) \end{cases}, \quad (70)$$

就能得到 $P_{i+1}(t)$ 的直角坐标 $(x_{i+1}(t), y_{i+1}(t))$.

(2) 若 $\angle P_i(t)O_2N < \beta_3$, 则 P_{i+1} 一定位于圆弧 \widehat{GN} 上. 从而利用 3 的情形 (1) 解出 (x_{i+1}, y_{i+1}) 即可.

综上, 将 P_0 在不同时刻的坐标代入上述四个步骤, 不断递推就能得到所有把手的位置坐标.

Step 7 计算板凳龙从-100s 到 100s 各把手的速度

由 Step 5, Step 6, 我们可以得到板凳龙各把手不同时刻在极坐标系下的的位置坐标, 因此利用问题一中求得的速度迭代公式

$$v_i(t) = \sqrt{\frac{1 + \theta_i^2}{1 + \theta_{i-1}^2} \frac{|-\theta_{i-1} + \theta_i \cos(\theta_i - \theta_{i-1}) + \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_i - \theta_{i-1})|}{|\theta_i + \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_i - \theta_{i-1}) - \theta_{i-1} \cos(\theta_i - \theta_{i-1})|}} v_{i-1}(t), i \in \{1, 2, \dots, 223\}, \quad (71)$$

因此, 令 i 依次取 $1, 2, \dots, 223$, 利用 Python 进行迭代计算, 就能得到板凳龙的第 $i (1 \leq i \leq 223)$ 节板凳的后把手中心在第 t 秒时的速度 $v_i(t)$. 再令 t 依次取 $(-100, -99, \dots, 100)$, 反复进行上述操作, 就能得到板凳龙从-100s 到 100s 各把手的速度.