



# Intial Draft

空

作者: 邹文杰

组织: 无

时间: 2024/10/25

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;  
去留无意, 漫随天外云卷云舒。

# 目录

第一章 问题 1	1
1.1 螺线方程	1
1.2 计算龙头前把手中心在各时刻的位置	1
1.3 计算板凳龙其余各节板凳的后把手中心在各时刻的位置	2
1.3.1 计算第 1 节板凳的后把手中心在第 $t$ 秒时的位置 $P_1(t)$	2
1.3.2 计算第 $i(2 \leq i \leq 223)$ 节板凳的后把手中心在第 $t$ 秒时的位置 $P_i(t)$	2
1.4 计算板凳龙其余各节板凳的后把手中心在各时刻的速度	3
第二章 问题 2	4
2.1 计算各节板凳四个顶点的坐标	4
2.2 计算板凳龙发生碰撞的时间	5
2.2.1 判断矩形 $A_i(t)B_i(t)C_i(t)D_i(t)$ 和矩形 $A_j(t)B_j(t)C_j(t)D_j(t)$ 是否有交点的算法	5
2.2.2 证明板凳龙首次发生碰撞一定是第 1 节板凳或第 2 节板凳与其他板凳碰撞	5
2.2.3 判断板凳龙是否发生碰撞	6
2.2.4 计算板凳龙发生碰撞的时间及此时板凳龙各把手的位置和速度	6
第三章 问题 3	7
第四章 问题 4	8
4.1 证明不可通过改变前后两段调头圆弧半径比例减小调头曲线长度	8
4.2 计算调头曲线长度	9
4.3 计算板凳龙从-100s 到 100s 各把手的位置	10
4.4 计算板凳龙从-100s 到 100s 各把手的速度	10
第五章 问题 5	11

# 第一章 问题 1

## 1.1 螺线方程

在题目图 4 中的直角坐标系下,以坐标原点  $O$  为极点建立极坐标系,设图 4 中的等距螺线  $\Gamma$  的极坐标方程为

$$\Gamma: \rho = a + b\theta. \quad (1.1)$$

其中  $\rho$  为极径,  $\theta$  为极角,  $a, b$  均为待定常数. 设龙头前把手中心的初始位置  $P_0$  极坐标和直角坐标分别为  $(\rho_0, \theta_0), (x_0, y_0)$ , 记  $d_0(\text{m})$  为图 4 中等距螺线的螺距, 则由题可知

$$d_0 = 0.55, \rho_0 = 16d_0 = 8.8, \theta_0 = 16 \times 2\pi = 32\pi. \quad (1.2)$$

又由图 4 可知图中等距螺线  $\Gamma$  过原点  $O$  和  $(\rho_0, \theta_0)$  点, 于是将  $(0, 0)$  和  $(\rho_0, \theta_0)$  代入(1.1)式解得

$$a = 0, b = \frac{d_0}{2\pi} = \frac{0.55}{2\pi} \quad (1.3)$$

因此, 等距螺线  $\Gamma$  的极坐标方程为

$$\Gamma: \rho = \frac{d_0}{2\pi}\theta, (0 \leq \theta \leq 32\pi). \quad (1.4)$$

再利用

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases},$$

得到等距螺线  $\Gamma$  的直角坐标方程为

$$\Gamma: \begin{cases} x = \frac{d_0}{2\pi}\theta \cos \theta \\ y = \frac{d_0}{2\pi}\theta \sin \theta \end{cases}, (0 \leq \theta \leq 32\pi). \quad (1.5)$$

## 1.2 计算龙头前把手中心在各时刻的位置

设龙头前把手的行进速度为  $v_0$ , 由题可知  $v_0 = 1(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ . 记龙头前把手中心在第  $t$  秒时的位置为  $P_0(t), P_0(t)$  点的极坐标和直角坐标分别为  $(\rho_0(t), \theta_0(t))$  和  $(x_0(t), y_0(t))$ , 则利用第一型曲线积分计算公式可得, 曲线  $\overline{P_0 P_0(t)}$  的长度  $S$  为

$$S = \int_{P_0 P_0(t)} ds = \int_{\theta_0(t)}^{\theta_0} \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} d\theta. \quad (1.6)$$

又由题可知

$$S = v_0 t. \quad (1.7)$$

联立(1.4)(1.6)(1.7)式解得

$$\theta_0(t) \sqrt{\theta_0^2(t) + 1} - \ln(\theta_0(t) + \sqrt{(\theta_0(t))^2 + 1}) = \theta_0 \sqrt{\theta_0^2 + 1} + \ln(\theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 1}) - \frac{4\pi}{d_0} v_0 t. \quad (1.8)$$

根据上式, 利用 Python 求解得到当  $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$  时,  $P_0(t)$  的极角  $\theta_0(t)$ , 再将其代入(1.4)式得到,  $P_0(t)$  的极坐标  $(\rho_0(t), \theta_0(t))$  见表 1. 再利用

$$\begin{cases} x_0(t) = \rho_0(t) \cos \theta_0(t) \\ y_0(t) = \rho_0(t) \sin \theta_0(t) \end{cases}, \quad (1.9)$$

得到当  $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$  时,  $P_0(t)$  的的直角坐标  $(x_0(t), y_0(t))$  见表 2.

### 1.3 计算板凳龙其余各节板凳的后把手中心在各时刻的位置

记第  $i$  节板凳的后把手中心在第  $t$  秒时的位置为  $P_i(t)$ , 并设  $P_i(t)$  的极坐标和直角坐标分别为  $(\rho_i(t), \theta_i(t))$  和  $(x_i(t), y_i(t))$ , 再记  $P_{i-1}(t)$  与  $P_i(t)$  之间的距离为  $|P_{i-1}(t)P_i(t)|(\text{m})(0 \leq i \leq 223)$ . 再记第  $i$  节板凳前把手中心与后把手中心之间的距离为  $l_i(\text{m})(1 \leq i \leq 223)$ , 则由条件可知

$$|P_0(t)P_1(t)| = l_1 = 3.41 - 2 \times 0.275 = 2.86; \quad (1.10)$$

$$|P_{i-1}(t)P_i(t)| = l_i = 2.2 - 2 \times 0.275 = 1.65, 2 \leq i \leq 223. \quad (1.11)$$

#### 1.3.1 计算第 1 节板凳的后把手中心在第 $t$ 秒时的位置 $P_1(t)$

当  $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$  时, 由极坐标系的两点之间距离公式可得

$$l_1^2 = |P_0(t)P_1(t)|^2 = (\rho_1(t))^2 + (\rho_0(t))^2 - 2\rho_1(t)\rho_0(t)\cos(\theta_0(t) - \theta_1(t)). \quad (1.12)$$

又因为板凳龙各把手中心均位于螺线  $\Gamma$  上, 所以再结合(1.5)式可得

$$\rho_1(t) = \frac{d_0}{2\pi}\theta_1(t), (0 \leq \theta_1(t) \leq 32\pi). \quad (1.13)$$

因此联立(1.12)(1.13)式可得

$$l_1^2 = \frac{d_0^2}{4\pi^2}[(\theta_1(t))^2 + (\theta_0(t))^2 - 2\theta_1(t)\theta_0(t)\cos(\theta_0(t) - \theta_1(t))]. \quad (1.14)$$

根据上式利用 Python 求解  $\theta_1(t)$ , 可能得到多个不同解. 不妨设这些为不同的解为  $\alpha_j^1(t)(j = 1, 2, \dots, m)$ , 注意到一定有  $\theta_1(t) > \theta_0(t)$ , 因此令

$$A_1 = \{\alpha_j^1(t) | \alpha_j^1(t) > \theta_0(t), j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (1.15)$$

又因为龙头前把手与第 1 节板凳后把手中心的极角之差一定是最小的, 所以

$$\theta_1(t) = \min_{\alpha_j^1(t) \in A_1} [\alpha_j^1(t) - \theta_0(t)] + \theta_0(t). \quad (1.16)$$

再将上述求得的  $\theta_1(t)$  代入(1.13)式就能得到此时  $P_1(t)$  的极坐标  $(\rho_1(t), \theta_1(t))$ . 令  $t$  依次取  $1, 2, \dots, 300$ , 反复进行上述操作就能得到, 当  $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$  时,  $P_1(t)$  的极坐标  $(\rho_1(t), \theta_1(t))$ . 再利用

$$\begin{cases} x_1(t) = \rho_1(t) \cos \theta_1(t) \\ y_1(t) = \rho_1(t) \sin \theta_1(t) \end{cases}, \quad (1.17)$$

得到当  $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$  时,  $P_1(t)$  的直角坐标  $(x_1(t), y_1(t))$ .

#### 1.3.2 计算第 $i(2 \leq i \leq 223)$ 节板凳的后把手中心在第 $t$ 秒时的位置 $P_i(t)$

当  $i \in \{2, 3, \dots, 223\}$  时, 由(1.3.1)同理可得, 当  $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$  时, 我们有

$$l_i^2 = |P_{i-1}(t)P_i(t)|^2 = (\rho_i(t))^2 + (\rho_{i-1}(t))^2 - 2\rho_i(t)\rho_{i-1}(t)\cos(\theta_{i-1}(t) - \theta_i(t)). \quad (1.18)$$

$$\rho_i(t) = \frac{d_0}{2\pi}\theta_i(t), (0 \leq \theta_i(t) \leq 32\pi). \quad (1.19)$$

从而联立(1.18)(1.19)式可得

$$l_i^2 = \frac{d_0^2}{4\pi^2}[(\theta_i(t))^2 + (\theta_{i-1}(t))^2 - 2\theta_i(t)\theta_{i-1}(t)\cos(\theta_{i-1}(t) - \theta_i(t))]. \quad (1.20)$$

根据上式利用 Python 求解  $\theta_i(t)$ , 可能得到多个不同解. 不妨设这些为不同的解为  $\alpha_j^i(t)(j = 1, 2, \dots, m)$ , 注意到一定有  $\theta_i(t) > \theta_{i-1}(t)$ , 因此令

$$A_i = \{\alpha_j^i(t) | \alpha_j^i(t) > \theta_{i-1}(t), j = 1, 2, \dots, m\}, \quad (1.21)$$

又因为第  $i-1$  个把手与第  $i$  个把手的极角之差一定是最小的, 所以

$$\theta_i(t) = \min_{\alpha_j^i(t) \in A_i} [\alpha_j^i(t) - \theta_{i-1}(t)] + \theta_{i-1}(t). \quad (1.22)$$

再将上述求得的  $\theta_i(t)$  代入(1.13)式就能得到此时  $P_i(t)$  的极坐标  $(\rho_i(t), \theta_i(t))$ . 令  $t$  依次取  $1, 2, \dots, 300$ , 反复进行上述操作就能得到, 当  $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$  时,  $P_i(t)$  的极坐标  $(\rho_i(t), \theta_i(t))$ . 再利用

$$\begin{cases} x_i(t) = \rho_i(t) \cos \theta_i(t) \\ y_i(t) = \rho_i(t) \sin \theta_i(t) \end{cases}, \quad (1.23)$$

得到当  $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$  时,  $P_i(t)$  的直角坐标  $(x_i(t), y_i(t))$ .

综上所述, 令  $i$  依次取  $1, 2, \dots, 223$ , 按照上述(1.3.1)(1.3.2)的方式, 利用 Python 不断迭代计算就能得到每秒板凳龙各把手中心的位置直角坐标见表 3.

## 1.4 计算板凳龙其余各节板凳的后把手中心在各时刻的速度

记第  $i(1 \leq i \leq 223)$  节板凳的后把手中心在第  $t$  秒时的速度为  $v_i(t)$ . 根据(1.2),(1.3.1),(1.3.2)得到的第  $i(1 \leq i \leq 223)$  节板凳的后把手中心第  $t$  秒时的位置  $P_i(t)$  的极坐标  $(\rho_i(t), \theta_i(t))$ , 于是当  $i \in \{1, 2, \dots, 223\}$  时, 对(1.14)(1.20)式两边同时对  $t$  求导可得

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\theta_{i-1} + \theta_i \cos(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)}{\theta_i + \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_{i-1} \cos(\theta_{i-1} - \theta_i)} \cdot \frac{d\theta_{i-1}}{dt}. \quad (1.24)$$

设第  $i(1 \leq i \leq 223)$  节板凳的后把手中心在充分短的时间  $dt$  内经过的路程微分为  $ds_i$ , 又因为各把手中心始终在螺线  $\Gamma$  上, 从而各把手的路程微分  $ds_i$  就是螺线  $\Gamma$  的弧微分, 所以利用(1.4)式及弧微分的计算公式可得

$$ds_i = \sqrt{[\rho(\theta_i)]^2 + [\rho'(\theta_i)]^2} d\theta_i = \frac{d_0}{2\pi} \sqrt{\theta_i^2 + 1} d\theta_i, i \in \{1, 2, \dots, 223\} \quad (1.25)$$

故当  $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$  时, 由瞬时速度的定义可得

$$v_i(t) = \frac{ds_i}{dt} = \frac{d_0}{2\pi} \frac{\sqrt{\theta_i^2 + 1} d\theta_i}{dt}, i \in \{1, 2, \dots, 223\}. \quad (1.26)$$

联立(1.24)(1.26)式得到

$$|v_i(t)| = \left| \frac{d_0}{2\pi} \frac{\sqrt{\theta_i^2 + 1} d\theta_i}{dt} \right| = \frac{|\theta_{i-1} + \theta_i \cos(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)|}{|\theta_i + \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_{i-1} \cos(\theta_{i-1} - \theta_i)|} \sqrt{\frac{1 + \theta_i^2}{1 + \theta_{i-1}^2}} \left| \frac{d\theta_{i-1}}{dt} \right| \quad (1.27)$$

$$= \frac{|\theta_{i-1}(t) + \theta_i \cos(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)|}{|\theta_i + \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_{i-1} \cos(\theta_{i-1} - \theta_i)|} \sqrt{\frac{1 + \theta_i^2}{1 + \theta_{i-1}^2}} |v_{i-1}(t)|, i \in \{1, 2, \dots, 223\}. \quad (1.28)$$

其中  $\theta_i = \theta_i(t), \theta_{i-1} = \theta_{i-1}(t), v_0(t) \equiv 1, \forall t \geq 0$ . 又因为  $v_i(t) (1 \leq i \leq 223)$  均大于 0, 所以上式可化为

$$v_i(t) = \sqrt{\frac{1 + \theta_i^2}{1 + \theta_{i-1}^2}} \frac{|\theta_{i-1} + \theta_i \cos(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)|}{|\theta_i + \theta_i \theta_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) - \theta_{i-1} \cos(\theta_{i-1} - \theta_i)|} v_{i-1}(t), i \in \{1, 2, \dots, 223\}, \quad (1.29)$$

其中  $\theta_i = \theta_i(t), \theta_{i-1} = \theta_{i-1}(t), v_0(t) \equiv 1, \forall t \geq 0$ . 于是根据上式, 令  $i$  依次取  $1, 2, \dots, 223$ , 再利用 Python 进行迭代计算, 就能得到板凳龙的第  $i(1 \leq i \leq 223)$  节板凳的后把手中心在第  $t$  秒时的速度  $v_i(t)$ . 再令  $t$  依次取  $1, 2, \dots, 300$ , 反复进行上述操作, 就能得到当  $t \in \{1, 2, \dots, 300\}$  时, 板凳龙的第  $i(1 \leq i \leq 223)$  节板凳的后把手中心每秒的速度见表 7.

## 第二章 问题 2

### 2.1 计算各节板凳四个顶点的坐标

$\forall t \in \mathbb{N}$ , 根据问题 1 求解得到龙头前把手中心、第  $i (i = 1, 2, \dots, 223)$  节板凳后把手中心在第  $t$  秒的直角坐标分别为  $(x_0(t), y_0(t)), (x_i(t), y_i(t))$ . 设所有板凳的板宽均为  $w$ , 板凳把手中心离最近的板头距离为  $h$ , 则由条件可知  $w = 0.3m, h = 0.275m$ . 当第  $i (i = 1, 2, \dots, 223)$  节板凳后把手刚盘入螺线 (即后把手恰好在初始位置) 时, 记离原点较远且离  $P_i$  较近的顶点为  $A_i$ , 再按顺时针方向分别记其余顶点为  $B_i, C_i, D_i$ . 记  $A_i, B_i, C_i, D_i$  在第  $t$  秒时的位置分别为  $A_i(t), B_i(t), C_i(t), D_i(t)$ , 其直角坐标分别为  $(x_{A_i}(t), y_{A_i}(t)), (x_{B_i}(t), y_{B_i}(t)), (x_{C_i}(t), y_{C_i}(t)), (x_{D_i}(t), y_{D_i}(t))$ . 于是根据向量垂直坐标变换公式可得, 对  $\forall i \in 0, 1, 2, \dots, 222$ , 都有

$$\overrightarrow{P_{i+1}(t) P_i(t)} = (x_i(t) - x_{i+1}(t), y_i(t) - y_{i+1}(t)), \quad (2.1)$$

$$\overrightarrow{A_i(t) D_i(t)} = \overrightarrow{B_i(t) C_i(t)} = (-[y_i(t) - y_{i+1}(t)], x_i(t) - x_{i+1}(t)), \quad (2.2)$$

$$\left| \overrightarrow{A_i(t) D_i(t)} \right| = \left| \overrightarrow{B_i(t) C_i(t)} \right| = w. \quad (2.3)$$

再记  $B_i C_i$  和  $A_i D_i$  的中点分别为  $E_i, F_i$ , 它们在第  $t$  秒时的位置分别为  $E_i(t), F_i(t)$ , 直角坐标分别为

$$E_i(t) = (x_{E_i}(t), y_{E_i}(t)), \quad (2.4)$$

$$F_i(t) = (x_{F_i}(t), y_{F_i}(t)). \quad (2.5)$$

从而

$$\overrightarrow{P_{i+1}(t) E_i(t)} = (x_{E_i}(t) - x_{i+1}(t), y_{E_i}(t) - y_{i+1}(t)), \quad (2.6)$$

$$\overrightarrow{P_i(t) F_i(t)} = (x_{F_i}(t) - x_i(t), y_{F_i}(t) - y_i(t)), \quad (2.7)$$

$$\left| \overrightarrow{P_{i+1}(t) E_i(t)} \right| = \left| \overrightarrow{P_i(t) F_i(t)} \right| = h. \quad (2.8)$$

$$\overrightarrow{E_i(t) B_i(t)} = (x_{B_i}(t) - x_{E_i}(t), y_{B_i}(t) - y_{E_i}(t)), \quad (2.9)$$

$$\overrightarrow{E_i(t) C_i(t)} = (x_{C_i}(t) - x_{E_i}(t), y_{C_i}(t) - y_{E_i}(t)), \quad (2.10)$$

$$\overrightarrow{F_i(t) A_i(t)} = (x_{A_i}(t) - x_{F_i}(t), y_{A_i}(t) - y_{F_i}(t)), \quad (2.11)$$

$$\overrightarrow{F_i(t) D_i(t)} = (x_{D_i}(t) - x_{F_i}(t), y_{D_i}(t) - y_{F_i}(t)). \quad (2.12)$$

由  $E_i, P_i, P_{i+1}, F_i$  共线可得

$$\overrightarrow{P_{i+1}(t) E_i(t)} = -\frac{\overrightarrow{P_{i+1}(t) P_i(t)}}{\left| \overrightarrow{P_{i+1}(t) P_i(t)} \right|} \cdot \left| \overrightarrow{P_{i+1}(t) E_i(t)} \right|, \quad (2.13)$$

$$\overrightarrow{P_i(t) F_i(t)} = \frac{\overrightarrow{P_{i+1}(t) P_i(t)}}{\left| \overrightarrow{P_{i+1}(t) P_i(t)} \right|} \cdot \left| \overrightarrow{P_{i+1}(t) E_i(t)} \right|. \quad (2.14)$$

联立(2.1)(2.6)(2.7)(2.8)(2.13)(2.14)式可得

$$\begin{cases} x_{E_i}(t) = x_{i+1}(t) - \frac{h}{l_{i+1}} (x_i(t) - x_{i+1}(t)) \\ y_{E_i}(t) = y_{i+1}(t) - \frac{h}{l_{i+1}} (y_i(t) - y_{i+1}(t)) \end{cases}, \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} x_{F_i}(t) = x_i(t) + \frac{h}{l_{i+1}} (x_i(t) - x_{i+1}(t)) \\ y_{F_i}(t) = y_i(t) + \frac{h}{l_{i+1}} (y_i(t) - y_{i+1}(t)) \end{cases}. \quad (2.16)$$

又由  $E_i$  是  $B_i, C_i$  的中点和  $F_i$  是  $A_i, D_i$  的中点可得

$$\overrightarrow{E_i(t) B_i(t)} = -\frac{\overrightarrow{B_i(t) C_i(t)}}{2}, \quad (2.17)$$

$$\overrightarrow{E_i(t) C_i(t)} = \frac{\overrightarrow{B_i(t) C_i(t)}}{2}, \quad (2.18)$$

$$\overrightarrow{F_i(t) A_i(t)} = -\frac{\overrightarrow{A_i(t) D_i(t)}}{2}, \quad (2.19)$$

$$\overrightarrow{F_i(t) D_i(t)} = \frac{\overrightarrow{A_i(t) D_i(t)}}{2}. \quad (2.20)$$

因此联立(2.2)(2.3)(2.9)(2.10)(2.11)(2.12)(2.15)(2.16)(2.17)(2.18)(2.19)式, 解得

$$\begin{cases} x_{A_i}(t) = x_i(t) + \frac{h}{l_{i+1}}(x_i(t) - x_{i+1}(t)) + \frac{y_i(t) - y_{i+1}(t)}{2} \\ y_{A_i}(t) = y_i(t) + \frac{h}{l_{i+1}}(y_i(t) - y_{i+1}(t)) - \frac{x_i(t) - x_{i+1}(t)}{2} \end{cases}, \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} x_{B_i}(t) = x_{i+1}(t) - \frac{h}{l_{i+1}}(x_i(t) - x_{i+1}(t)) + \frac{y_i(t) - y_{i+1}(t)}{2} \\ y_{B_i}(t) = y_{i+1}(t) - \frac{h}{l_{i+1}}(y_i(t) - y_{i+1}(t)) - \frac{x_i(t) - x_{i+1}(t)}{2} \end{cases}, \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} x_{C_i}(t) = x_{i+1}(t) - \frac{h}{l_{i+1}}(x_i(t) - x_{i+1}(t)) - \frac{y_i(t) - y_{i+1}(t)}{2} \\ y_{C_i}(t) = y_{i+1}(t) - \frac{h}{l_{i+1}}(y_i(t) - y_{i+1}(t)) + \frac{x_i(t) - x_{i+1}(t)}{2} \end{cases}, \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} x_{D_i}(t) = x_i(t) + \frac{h}{l_{i+1}}(x_i(t) - x_{i+1}(t)) - \frac{y_i(t) - y_{i+1}(t)}{2} \\ y_{D_i}(t) = y_i(t) + \frac{h}{l_{i+1}}(y_i(t) - y_{i+1}(t)) + \frac{x_i(t) - x_{i+1}(t)}{2} \end{cases}. \quad (2.24)$$

## 2.2 计算板凳龙发生碰撞的时间

对  $\forall t > 0$ , 板凳龙在第  $t$  秒发生碰撞的充要条件是: 当  $t = t_0$  时, 存在  $s, k \in \{1, 2, \dots, 223\}$ , 使得  $A_s(t), B_s(t), C_s(t), D_s(t)$  和  $A_k(t), B_k(t), C_k(t), D_k(t)$  所对应的两节板凳在第  $t$  秒发生碰撞, 即此时矩形  $A_s(t)B_s(t)C_s(t)D_s(t)$  和矩形  $A_k(t)B_k(t)C_k(t)D_k(t)$  有交点. 于是我们只需要判断在第  $t$  秒时, 对  $\forall i, j \in 1, 2, \dots, 223$ , 矩形  $A_i(t)B_i(t)C_i(t)D_i(t)$  和矩形  $A_j(t)B_j(t)C_j(t)D_j(t)$  是否有交点即可.

### 2.2.1 判断矩形 $A_i(t)B_i(t)C_i(t)D_i(t)$ 和矩形 $A_j(t)B_j(t)C_j(t)D_j(t)$ 是否有交点的算法

任取矩形  $A_i(t)B_i(t)C_i(t)D_i(t)$  的一条边记为  $X_1(t)Y_1(t)$ , 矩形  $A_j(t)B_j(t)C_j(t)D_j(t)$  的一条边记为  $X_2(t)Y_2(t)$ . 则利用向量叉乘的性质 (详见[几何算法: 判断两条线段是否相交](#)) 可得

$$\begin{cases} \text{若 } \left( \overrightarrow{X_1(t)Y_1(t)} \times \overrightarrow{X_1(t)X_2(t)} \right) \cdot \left( \overrightarrow{X_1(t)Y_1(t)} \times \overrightarrow{X_1(t)Y_2(t)} \right) > 0, \text{ 则 } \overrightarrow{X_1(t)Y_1(t)}, \overrightarrow{X_2(t)Y_2(t)} \text{ 相交,} \\ \text{若 } \left( \overrightarrow{X_1(t)Y_1(t)} \times \overrightarrow{X_1(t)X_2(t)} \right) \cdot \left( \overrightarrow{X_1(t)Y_1(t)} \times \overrightarrow{X_1(t)Y_2(t)} \right) \leq 0, \text{ 则 } \overrightarrow{X_1(t)Y_1(t)}, \overrightarrow{X_2(t)Y_2(t)} \text{ 不相交.} \end{cases} \quad (2.25)$$

将矩形  $A_i(t)B_i(t)C_i(t)D_i(t)$  和矩形  $A_j(t)B_j(t)C_j(t)D_j(t)$  的每一条边都代入上式, 若所有边代入后都不相交, 则这两个矩形无交点, 否则有交点.

### 2.2.2 证明板凳龙首次发生碰撞一定是第 1 节板凳或第 2 节板凳与其他板凳碰撞

设板凳龙在第  $t$  秒首次发生碰撞, 假设在第  $t$  秒第  $i$  ( $3 \leq i \leq 223$ ) 节板凳发生碰撞, 不妨设其与第  $j$  ( $2 \leq j < i$ ) 节板凳发生碰撞, 再设在第  $t_1$  秒第  $j-1$  节板凳的前把手中心运动到第  $t$  秒第  $j$  节板凳的前把手中心所在位置, 注意到  $t_1 < t$  且  $1 \leq j-1 \leq i-1$ . 若  $j-1 = 1$ , 则结论显然成立. 从而不妨设  $2 \leq j-1 \leq i-1$ , 则由于除第 1 节板凳外, 其他板凳的长度都相同, 并且每节板凳各把手中心始终沿着螺线  $\Gamma$  移动, 因此由几何关系不难得到, 在第  $t_1$  秒时



第  $j-1$  节板凳的前后把手中心位置与在第  $t$  秒时第  $j$  节板凳的前后把手中心位置相同, 否则在第  $t_1$  秒时第  $j-1$  节板凳必然发生碰撞, 这与板凳龙在第  $t$  秒首次发生碰撞矛盾! 同理可得, 在第  $t_1$  秒时第  $m$  节板凳前后把手中心的位置一定与在第  $t$  秒时第  $m+1$  节板凳前后把手中心的位置相同, 其中  $m = j-1, j-2, \dots, 2$ . 即

$$P_m(t) = P_{m-1}(t_1), m = 2, 3, \dots, j. \quad (2.26)$$

故第  $j-1$  节板凳在第  $t_1$  秒的位置和第  $j$  节板凳在第  $t$  秒的位置相同, 第  $i-1$  节板凳在第  $t_1$  秒的位置和第  $i$  节板凳在第  $t$  秒的位置相同. 由假设可知第  $j-1$  节板凳和第  $i-1$  节板凳在第  $t_1$  秒一定发生碰撞, 这与板凳龙在第  $t$  秒首次发生碰撞矛盾! 故结论成立.

### 2.2.3 判断板凳龙是否发生碰撞

在第  $t$  秒时, 若对  $\forall i \in \{1, 2, \dots, 223\}$ , 将矩形  $A_i(t)B_i(t)C_i(t)D_i(t)$  和矩形  $A_1(t)B_1(t)C_1(t)D_1(t)$  代入(2.2.1)后, 结果都不相交. 则板凳龙在第  $t$  秒不发生碰撞, 否则发生碰撞.

### 2.2.4 计算板凳龙发生碰撞的时间及此时板凳龙各把手的位置和速度

令  $t$  依次取  $1, 2, \dots$ , 代入(2.2.3), 利用 Python 计算得到板凳龙第一次发生碰撞的时间  $t_0$ , 从而板凳龙盘入的终止时刻为  $t_0$ . 在将  $t_0$  代入问题 1 的模型, 利用 Python 求解得到此时板凳龙各把手的位置直角坐标和速度见表.



### 第三章 问题 3

根据问题 1 和问题 2, 建立优化模型易得.

## 第四章 问题 4

### 4.1 证明不可通过改变前后两段调头圆弧半径比例减小调头曲线长度

根据题意, 设盘入螺线与盘出螺线与调头区域边界交点分别为  $M$  和  $N$ , 前一段、后一段调头圆弧圆心分别为  $O_1, O_2$ . 两段圆弧切点为  $G$ . 过点  $M$  与盘入螺线相切的直线为  $l_M$ , 过点  $N$  与盘出螺线相切的直线为  $l_N$ , 连接  $NG, MG, O_1M, O_1G, O_2G, O_2N$ . 画出板凳龙调头曲线的几何示意图如下: 由题可知  $O_1, G, O_2$  三点共线, 从而

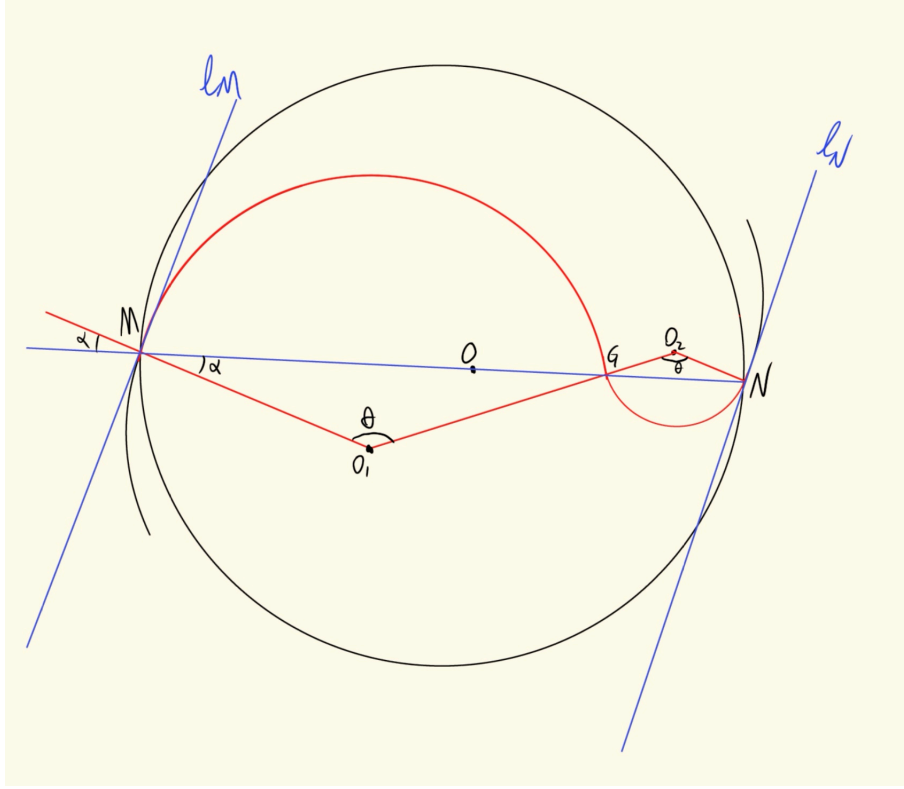


图 4.1: 板凳龙调头曲线的几何示意图

$\angle MGO_2 + \angle O_1GM = \pi$ . 又注意到  $\angle O_1GM = \angle O_2GN$ . 于是

$$\angle MGO_2 + \angle O_2GN = \angle MGO_2 + \angle O_1GM = \pi. \quad (4.1)$$

因此  $M, G, N$  三点共线. 因为盘入螺线  $\Gamma$  与盘出螺线  $\Gamma'$  中心对称, 所以  $MN$  一定过原点  $O$  且  $l_M \parallel l_N$ . 又由  $\overline{MG}$  与  $\Gamma$  相切,  $\overline{GN}$  与  $\Gamma'$  相切, 可得  $O_1M \perp l_M$ ,  $O_2N \perp l_N$ . 故  $O_1M \parallel O_2N$ . 设  $\angle MO_1G = \theta, \angle O_1MN = \alpha$ , 则由几何关系易得

$$\angle MO_1G = \angle NO_2G = \theta, \quad (4.2)$$

$$\angle O_1MN = \angle O_1GMN = \angle O_2GN = \angle O_2NG = \alpha. \quad (4.3)$$

设调头区域半径为  $R$ , 则  $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{ON}| = R$ . 设前后两段调头圆弧半径比例为  $a : 1$ , 后一段调头圆弧的半径为  $r$ , 则前一段调头圆弧的半径为  $ar$ , 其中  $a$  为任意常数. 则

$$|\overrightarrow{O_1M}| = |\overrightarrow{O_1G}| = ar, |\overrightarrow{O_2N}| = |\overrightarrow{O_2G}| = r. \quad (4.4)$$

设直线  $l_M, l_N, O_1M, MN$  的斜率分别为  $k_{l_M}, k_{l_N}, k_{O_1M}, k_{MN}$ . 于是根据两直线夹角斜率公式可得

$$\tan \alpha = \tan \angle NMO_1 = \frac{k_{MN} - k_{l_M}}{1 + k_{MN}k_{l_M}}. \quad (4.5)$$

从而

$$\alpha = \left| \arctan \frac{k_{MN} - k_{l_M}}{1 + k_{MN} k_{l_M}} \right|. \quad (4.6)$$

由  $\triangle MO_1G \cong \triangle NO_2G$  可得

$$|\vec{NG}| = \frac{|\vec{MN}|}{1+a} = \frac{2R}{1+a}. \quad (4.7)$$

又由几何关系易得

$$\theta = \pi - 2\alpha, \quad \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}|\vec{NG}|}{|\vec{O_2N}|} = \frac{R}{(1+a)r}. \quad (4.8)$$

因此

$$r = \frac{R}{(1+a)\cos \alpha}. \quad (4.9)$$

设  $\widehat{MG}$  的长度为  $L_1$ ,  $\widehat{GN}$  的长度为  $L_2$ , 记  $L = L_1 + L_2$ . 于是根据圆弧长度计算公式可得

$$L = L_1 + L_2 = \theta r + \theta a r = (1+a)\theta r = \frac{(\pi - 2\alpha)R}{\cos \alpha} = \frac{(\pi - 2\left|\arctan \frac{k_{MN} - k_{l_M}}{1 + k_{MN} k_{l_M}}\right|)R}{\cos \left|\arctan \frac{k_{MN} - k_{l_M}}{1 + k_{MN} k_{l_M}}\right|}. \quad (4.10)$$

由上式可知  $L$  与  $a$  无关, 因此不可通过改变前后两段调头圆弧半径比例减小调头曲线长度.

## 4.2 计算调头曲线长度

根据题意可知, 调头区域边界曲线  $S$ , 盘入螺线  $\Gamma$ , 盘出螺线  $\Gamma'$  的极坐标方程分别为

$$S: \rho = R, \quad (4.11)$$

$$\Gamma: \rho = \frac{d_0}{2\pi} \theta, \quad (4.12)$$

$$\Gamma': \rho = \frac{d_0}{2\pi} (\theta + \pi). \quad (4.13)$$

于是分别联立(4.11)(4.12)式与(4.11)(4.13)式可分别解出  $M, N$  的极坐标, 分别记为  $(\rho_M, \theta_M)$  和  $(\rho_N, \theta_N)$ , 则有

$$\begin{cases} \rho_M = \\ \theta_M = \end{cases}, \begin{cases} \rho_M = \\ \theta_M = \end{cases}. \quad (4.14)$$

于是就有

$$k_{MN} = k_{OM} = \tan \theta_M = . \quad (4.15)$$

又因为  $\Gamma$  与  $\Gamma'$  的直角坐标方程分别为

$$\Gamma: \begin{cases} x = \frac{d_0}{2\pi} \theta \cos \theta \\ y = \frac{d_0}{2\pi} \theta \sin \theta \end{cases}, \quad \Gamma': \begin{cases} x = \frac{d_0}{2\pi} (\theta + \pi) \cos \theta \\ y = \frac{d_0}{2\pi} (\theta + \pi) \sin \theta \end{cases} \quad (4.16)$$

因此我们就有

$$k_{l_M} = \frac{dy}{dx} \Big|_M = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \Big|_M = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta} \Big|_{\theta=\theta_M} =, \quad (4.17)$$

$$k_{l_N} = \frac{dy}{dx} \Big|_N = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \Big|_M = \frac{\sin \theta + (\theta + \pi) \cos \theta}{\cos \theta - (\theta + \pi) \sin \theta} \Big|_{\theta=\theta_N} =. \quad (4.18)$$

故将(4.15)(4.17)(4.18)代入(4.10)计算可得板凳龙的调头曲线长度为

$$L = . \quad (4.19)$$

### 4.3 计算板凳龙从-100s 到 100s 各把手的位置

### 4.4 计算板凳龙从-100s 到 100s 各把手的速度

## 第五章 问题 5

根据前四问, 建立优化模型易得.