



Intial Draft

空

作者: 邹文杰

组织: 无

时间: 2024/10/25

版本: ElegantBook-4.5

自定义: 信息



宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒。

目录

第一章 问题一

1

第一章 问题一

常物体、无内热源、稳态、一维导热问题。由于温区之间的间隙只考虑与之相邻的温区对其的影响，因此可以建立一维热传导方程： $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ （实际上，就是一维 Laplace 方程）。两次积分后解得： $T(x) = C_1 x + C_2$ 。再将各个温区的初值条件代入即得：

$$\begin{aligned}
 T(x) &\equiv T_{1\sim 5}, & x &\in [0, 5l_0 + 4d_0] \\
 T(x) &= \frac{T_6 - T_{1\sim 5}}{d_0}x + T_{1\sim 5} - \frac{5l_0 + 4d_0}{d_0}(T_6 - T_{1\sim 5}), & x &\in [5l_0 + 4d_0, 5l_0 + 5d_0] \\
 T(x) &\equiv T_6, & x &\in [5l_0 + 5d_0, 6l_0 + 5d_0] \\
 T(x) &= \frac{T_7 - T_6}{d_0}x + T_6 - \frac{6l_0 + 5d_0}{d_0}(T_7 - T_6), & x &\in [6l_0 + 5d_0, 6l_0 + 6d_0] \\
 T(x) &\equiv T_7, & x &\in [6l_0 + 6d_0, 7l_0 + 6d_0] \\
 T(x) &= \frac{T_{8\sim 9} - T_7}{d_0}x + T_7 - \frac{7l_0 + 6d_0}{d_0}(T_{8\sim 9} - T_7), & x &\in [7l_0 + 6d_0, 7l_0 + 7d_0] \\
 T(x) &\equiv T_{8\sim 9}, & x &\in [7l_0 + 7d_0, 9l_0 + 8d_0] \\
 T(x) &= \frac{T_{10\sim 11} - T_{8\sim 9}}{d_0}x + T_{8\sim 9} - \frac{9l_0 + 8d_0}{d_0}(T_{10\sim 11} - T_{8\sim 9}), & x &\in [9l_0 + 8d_0, 9l_0 + 9d_0] \\
 T(x) &\equiv T_{10\sim 11}, & x &\in [9l_0 + 9d_0, 11l_0 + 10d_0]
 \end{aligned}$$

由此可得传送带各位置达到稳态时的温度分布 $T_\infty(x) = T_\infty(v_0 t)$ 。

因为金属板与空气的传热(对流)系数 h 一般在 $5 \sim 500 \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 内，金属的导热系数 λ 一般在 $100 \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 左右，而厚度 2δ 很小，所以 $Bi = \frac{\delta h}{\lambda} \ll 0.1$ ，因此可以用集中参数法（即将物体内部温度分布始终看作均匀）。

因为题目只给了金属板厚度 2δ ，所以我们忽略水平方向的热对流，只考虑垂直于金属板方向的热对流对金属板温度的影响。根据对称性，我们只须考虑金属板上半部分的热对流即可。

垂直于金属板建立一维坐标系，垂直金属板向上为正方向。

建立 PDE：

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} (0 < x < \delta, t > 0)$$

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ ， ρ 为金属板密度， c 为金属板热容。记 $A = \rho c$ ，则 $a = \frac{\lambda}{A}$ 。边界(初值)条件（热传导方程第三边界条件）：

$$T(x, 0) = T_0 (= 25^\circ \text{C}) (0 \leq x \leq \delta)$$

$$\text{对称边界条件: } \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$\text{对流边界条件: } h(T(\delta, t) - T_\infty(v_0 t)) = -\lambda \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\delta}$$

引入过余温度： $\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty(v_0 t)$ 原方程可化为：

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} (0 < x < \delta, t > 0)$$

$$\theta_0(t) = \theta(x, 0) = T(x, 0) - T_\infty(v_0 t) = T_0 - T_\infty(v_0 t)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$h\theta(\delta, t) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\delta}$$

于是利用 PDE 理论可得到解析解:

$$\frac{\theta(\eta, t)}{\theta_0(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 F_O) \cos(\mu_n \eta) \quad (1.1)$$

其中各变量和参数如下:

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= T(x, t) - T_{\infty}(v_0 t) \\ \theta_0(t) &= \theta(x, 0) = T(x, 0) - T_{\infty}(v_0 t) = T_0 - T_{\infty}(v_0 t) \\ C_n &= \frac{2 \sin(\mu_n)}{\mu_n + \cos(\mu_n) \sin(\mu_n)} \\ \tan(\mu_n) &= \frac{Bi}{\mu_n}, n = 1, 2, \dots \\ \eta &= \frac{x}{\delta}, F_O = \frac{at}{\delta^2}, Bi = \frac{h\delta}{\lambda} \end{aligned}$$

因此只需用最小二乘法估计参数 a, λ, h 即可.

$$(\hat{A}, \hat{\lambda}, \hat{h}) = \arg \min_{A, \lambda, h} (T(A, \lambda, h, \delta, t) - T(\delta, t))$$

假设空气是低速 (静止) 空气, 则实际上, 空气与金属板的对流系数 h 会只随着温差的变化而改变. 根据传热学公式可知, 当我们只考虑热对流时, 根据自然对流系数的经验公式就有

$$\begin{aligned} h &= \frac{\lambda \cdot Nu}{\delta} \\ Nu &= B \cdot (Gr \cdot Pr)^m, B = 1.076, m = \frac{1}{6} \\ Gr &= \frac{g |T(\delta, t) - T_{\infty}(t)| \delta^4}{T_f v^2} \\ T_f &= \frac{T(\delta, t) + T_{\infty}(t)}{2} \\ 10^4 &< Gr \cdot Pr < 10^9 \end{aligned}$$

其中 v, Pr 均为常数. 从而 h 实际上是一个随时间变化的变量. 将上式代入(1.1)式得

$$\begin{aligned} \frac{T(\eta, t) - T_{\infty}(v_0 t)}{T_0 - T_{\infty}(v_0 t)} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 F_O) \cos(\mu_n \eta) \\ \Rightarrow T(\eta, t) &= T_{\infty}(v_0 t) + (T_0 - T_{\infty}(v_0 t)) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 F_O) \cos(\mu_n \eta) \end{aligned}$$

其中各变量和参数如下:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2 \sin(\mu_n)}{\mu_n + \cos(\mu_n) \sin(\mu_n)} \\ \tan(\mu_n) &= \frac{Bi}{\mu_n}, n = 1, 2, \dots \\ \eta &= \frac{x}{\delta}, F_O = \frac{at}{\delta^2}, Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = Nu \\ Nu &= B \cdot (Gr \cdot Pr)^m, B = 1.076, m = \frac{1}{6} \\ Gr &= \frac{g |T(\delta, t) - T_{\infty}(t)| \delta^4}{T_f v^2} \\ T_f &= \frac{T(\delta, t) + T_{\infty}(t)}{2} \\ 10^4 &< Gr \cdot Pr < 10^9 \end{aligned}$$

于是我们根据题目给的一组数据, 利用最小二乘法估计的参数应该为 a, λ, v, Pr , 故

$$(\hat{a}, \hat{\lambda}, \hat{v}, \hat{Pr}) = \arg \min_{a, \lambda, v, Pr} (T(a, \lambda, v, Pr, \delta, t) - T(\delta, t))$$

$$10^4 < Gr \cdot Pr < 10^9$$

计算得到参数 a, λ, ν, Pr 的最优值, 即拟合优度 R^2 最接近 1 的取值. 再将最优参数代入(1.1)得到炉温曲线.
后续三问就是分别做单目标优化而已, 后续模型建立不难, 重点是模型求解的算法.