Intial Draft

空

作者: 邹文杰

组织: 无

时间:2024/10/25

版本:ElegantBook-4.5

自定义: 信息

ElegantLaTeX Program

宠辱不惊, 闲看庭前花开花落;
去留无意, 漫随天外云卷云舒。

目录

第一章 问题一

常物体、无内热源、稳态、一维导热问题。由于温区之间的间隙只考虑与之相邻的温区对其的影响，因此可以建立一维热传导方程：$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=0$（实际上，就是一维 Laplace 方程）。两次积分后解得：$T(x)=C_1x+C_2$。再将各个温区的初值条件代入即得：

$$
\begin{aligned}
&T(x)\equiv T_{1\sim5}, && x\in[0,5l_0+4d_0]\\
&T(x)=\frac{T_6-T_{1\sim5}}{d_0}x+T_{1\sim5}-\frac{5l_0+4d_0}{d_0}(T_6-T_{1\sim5}), && x\in[5l_0+4d_0,5l_0+5d_0]\\
&T(x)\equiv T_6, && x\in[5l_0+5d_0,6l_0+5d_0]\\
&T(x)=\frac{T_7-T_6}{d_0}x+T_6-\frac{6l_0+5d_0}{d_0}(T_7-T_6), && x\in[6l_0+5d_0,6l_0+6d_0]\\
&T(x)\equiv T_7, && x\in[6l_0+6d_0,7l_0+6d_0]\\
&T(x)=\frac{T_{8\sim9}-T_7}{d_0}x+T_7-\frac{7l_0+6d_0}{d_0}(T_{8\sim9}-T_7), && x\in[7l_0+6d_0,7l_0+7d_0]\\
&T(x)\equiv T_{8\sim9}, && x\in[7l_0+7d_0,9l_0+8d_0]\\
&T(x)=\frac{T_{10\sim11}-T_{8\sim9}}{d_0}x+T_{8\sim9}-\frac{9l_0+8d_0}{d_0}(T_{10\sim11}-T_{8\sim9}), && x\in[9l_0+8d_0,9l_0+9d_0]\\
&T(x)\equiv T_{10\sim11}, && x\in[9l_0+9d_0,11l_0+10d_0]
\end{aligned}
$$

由此可得传送带各位置达到稳态时的温度分布 $T_\infty(x)=T_\infty(v_0t)$。

因为金属板与空气的传热 (对流) 系数 h 一般在 $5\sim500\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$ 内，金属的导热系数 λ 一般在 $100\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$ 左右，而厚度 2δ 很小，所以 $Bi=\frac{\delta h}{\lambda}\ll 0.1$，因此可以用集中参数法（即可以将物体内部温度分布始终看作均匀）。

因为题目只给了金属板厚度 2δ，所以我们忽略水平方向的热对流，只考虑垂直于金属板方向的热对流对金属板温度的影响。根据对称性，我们只须考虑金属板上半部分的热对流即可。

垂直于金属板建立一维坐标系, 垂直金属板向上为正方向.

建立 PDE：

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2T(x,t)}{\partial x^2}(0<x<\delta,t>0)$$

其中 $a=\frac{\lambda}{\rho c}$.ρ 为金属板密度,c 为金属板热容. 记 $A=\rho c$, 则 $a=\frac{\lambda}{A}$. 边界 (初值) 条件（热传导方程第三边界条件）:

$$T(x,0)=T_0(=25^\circ\mathrm{C})(0\leqslant x\leqslant\delta)$$

$$\text{对称边界条件：}\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$

$$\text{对流边界条件：}h(T(\delta,t)-T_\infty(v_0t))=-\lambda\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\delta}$$

引入过余温度：$\theta(x,t)=T(x,t)-T_\infty(v_0t)$ 原方程可化为:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}(0<x<\delta,t>0)\\
&\theta_0(t)=\theta(x,0)=T(x,0)-T_\infty(v_0t)=T_0-T_\infty(v_0t)\\
&\left.\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0\\
&h\theta(\delta,t)=-\lambda\left.\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\delta}
\end{aligned}
$$

于是利用 PDE 理论可得到解析解：

$$\frac{\theta(\eta,t)}{\theta_0(t)}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp(-\mu_n^2F_O)\cos(\mu_n\eta) \tag{1.1}$$

其中各变量和参数如下：

$$\begin{aligned}
&\theta(x,t)=T(x,t)-T_\infty(v_0t)\\
&\theta_0(t)=\theta(x,0)=T(x,0)-T_\infty(v_0t)=T_0-T_\infty(v_0t)\\
&C_n=\frac{2\sin(\mu_n)}{\mu_n+\cos(\mu_n)\sin(\mu_n)}\\
&\tan(\mu_n)=\frac{Bi}{\mu_n},n=1,2,\cdots\\
&\eta=\frac{x}{\delta},F_O=\frac{at}{\delta^2},Bi=\frac{h\delta}{\lambda}
\end{aligned}$$

因此只需用最小二乘法估计参数 a,λ,h 即可.

$$\left(\widehat{A},\widehat{\lambda},\widehat{h}\right)=\arg\min_{A,\lambda,h}\left(T\left(A,\lambda,h,\delta,t\right)-T\left(\delta,t\right)\right)$$

假设空气是低速 (静止) 空气, 则实际上, 空气与金属板的对流系数 h 会只随着温差的改变而改变. 根据传热学公式可知, 当我们只考虑热对流时, 根据自然对流系数的经验公式就有

$$\begin{aligned}
&h=\frac{\lambda\cdot Nu}{\delta}\\
&Nu=B\cdot(Gr\cdot Pr)^m,B=1.076,m=\frac{1}{6}\\
&Gr=\frac{g\left|T\left(\delta,t\right)-T_\infty\left(t\right)\right|\delta^4}{T_fv^2}\\
&T_f=\frac{T\left(\delta,t\right)+T_\infty\left(t\right)}{2}\\
&10^4<Gr\cdot Pr<10^9
\end{aligned}$$

其中 v,Pr 均为常数. 从而 h 实际上是一个随时间变化的变量. 将上式代入(1.1)式得

$$\frac{T(\eta,t)-T_\infty\left(v_0t\right)}{T_0-T_\infty\left(v_0t\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp\left(-\mu_n^2F_O\right)\cos\left(\mu_n\eta\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,t)=T_\infty\left(v_0t\right)+\left(T_0-T_\infty\left(v_0t\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp\left(-\mu_n^2F_O\right)\cos\left(\mu_n\eta\right)$$

其中各变量和参数如下:

$$\begin{aligned}
&C_n=\frac{2\sin\left(\mu_n\right)}{\mu_n+\cos\left(\mu_n\right)\sin\left(\mu_n\right)}\\
&\tan\left(\mu_n\right)=\frac{Bi}{\mu_n},n=1,2,\cdots\\
&\eta=\frac{x}{\delta},F_O=\frac{at}{\delta^2},Bi=\frac{h\delta}{\lambda}=Nu\\
&Nu=B\cdot(Gr\cdot Pr)^m,B=1.076,m=\frac{1}{6}\\
&Gr=\frac{g\left|T\left(\delta,t\right)-T_\infty\left(t\right)\right|\delta^4}{T_fv^2}\\
&T_f=\frac{T\left(\delta,t\right)+T_\infty\left(t\right)}{2}\\
&10^4<Gr\cdot Pr<10^9
\end{aligned}$$

于是我们根据题目给的一组数据, 利用最小二乘法估计的参数应该为 a,λ,v,Pr, 故

$$\left(\widehat{a},\widehat{\lambda},\widehat{v},\widehat{Pr}\right)=\arg\min_{a,\lambda,v,Pr}\left(T\left(a,\lambda,v,Pr,\delta,t\right)-T\left(\delta,t\right)\right)$$

$$10^4 < Gr \cdot Pr < 10^9$$

计算得到参数 a, λ, v, Pr 的最优值, 即拟合优度 R^2 最接近 1 的取值. 再将最优参数代入(1.1)得到炉温曲线.

后续三问就是分别做单目标优化而已, 后续的模型建立不难, 重点是模型求解的算法.