

# 比較 ARMA-GARCH、Prophet、LSTM 模型預測加密 貨幣波動度之準確率

## Predicting the accuracy of cryptocurrency volatility with ARMA-GARCH, Prophet and LSTM models

### 摘要

現今的技術允許人們使用加密貨幣進行投資或消費，為現代熱門的金融資產之一；截至 2022 年 11 月，根據幣安（Binance）統計，成交量排行前三名的幣種為：比特幣（BTC）、以太幣（ETH）和幣安幣（BNB）。但加密貨幣市場價格存在高波動性、非常態分佈、長尾以及存在極端事件的特性，為了避免過度損失，透過預測波動度可以提供投資人在做投資決策時重要的參考依據。本研究以比特幣（BTC）、以太幣（ETH）和幣安幣（BNB）為研究對象，使用 3 分鐘、5 分鐘、15 分鐘之歷史價格建構每日實際波動度（Realized Volatility, RV），分別比較 ARMA-GARCH、Prophet 以及 LSTM 模型在滑動窗口算法（Sliding Window Algorithm）預測下一日、下兩日、下三日及下五日的實際波動度（Realized Volatility, RV）之準確率。研究結果顯示總體而言 LSTM 擁有較佳的預測能力。

**關鍵字：**加密貨幣、實際波動度 (*Realized Volatility, RV*)、ARMA-GARCH 模型、Prophet 模型、LSTM 模型

# 壹、前言

## 一、研究背景與動機

科技的快速發展衝擊了傳統金融市場以及對支付系統產生結構性的變化。近年來，全球的金融市場皆邁向全面數位化。現今的技術允許人們使用加密貨幣進行投資或消費，也成為現代熱門的金融資產之一，儘管在過去十年來，從第一種加密貨幣：比特幣（BTC）出現後，比特幣（BTC）迅速成為加密貨幣市場上數百種加密貨幣中最受歡迎和最常用的。截至 2022 年 11 月，根據幣安（Binance）統計，成交量排行前三名的幣種為：比特幣（BTC）、以太幣（ETH）和幣安幣（BNB），其市值分別達到 5,180 億、2,184 億和 480 億美元。Gbadebo et al. (2021) 研究指出加密貨幣市場具有不規則高波動性、非常態分佈、長尾以及存在極端事件的共同特徵。Koutmos (2023) 指出加密貨幣市場波動加劇表明，隨著風險厭惡投資者情緒的變化，投資人將會在短時間內迅速賺取或損失大量資金。Zahid et al. (2022) 提到現階段絕大多數經濟學家和研究人員認為加密貨幣是投機性金融資產，主要用於短期投資。在投機動機下，Balaban et al. (2006) 提出金融商品的波動度對資產定價、投資組合以及風險管理的有效性有關鍵性的影響。因此，波動度預測不論是在學術研究或實際交易上都有重要意義。隨著金融市場邁向全球化，對於加密貨幣市場的決策，投資人需了解它在市場上風險，同時具備投資分析能力以及使用適當的預測工具。

近年來人工智慧（Artificial Intelligence, AI）熱潮興起，其快速進步的原因，主要歸功於「資料量爆炸式成長」、「運算力提高」及「演算法進步」。OpenAI 推出的 ChatGPT 更大幅改變人們的網路使用習慣，2023 年也被譽為「生成式 AI 元年」。而機器學習（Machine Learning, ML）、深度學習（Deep Learning, DL）等技術更大幅地被應用在金融領域的研究，在足夠大的資料量下，基於統計學習模型來進行識別，可以對未知的數據進行更快速、精確的預測或分析。在波動度預測上，Aker (2022) 用 LSTM 及 Prophet 來預測 BIST 100 指數波動度，其發現 LSTM 模型錯誤率更低；Liu et al. (2022) 比較 LSTM 和 GARCH 模型預測 S&P 指數，使用 BARRA 官方數據作為實證數據。結果為 LSTM 模型優於 GARCH；Shen et al. (2021) 選擇 LSTM、ARMA (2,2) -GARCH (1,2) 和 EWMA 來預測下一天、下五天及下十天比特幣（BTC）報酬率的波動度，研究結果發現 LSTM 模型在捕捉波動度趨勢和波動群聚效果方面比計量模型更優秀，但會大幅低估波動性並降低預測準確度。

進一步比較上述模型，ARMA-GARCH 結合了自迴歸移動平均模型（ARMA）和廣義自迴歸條件異方差（GARCH），假設時間序列資料有線性趨勢，首先建構 ARMA 模型預測未來價值，然後根據 ARMA 模型的殘差使用 GARCH 模型對未來的波動性進行預測。Prophet 模型是一種廣義加性模型（Generalized Additive Model, GAM）。和 ARMA-GARCH 模型最大的區別為不假設時間序列為線性，根據時間的推移會具有不同的變化，其產生變化的時間點稱為變點（Change point），故根據變點的數量會包含多個線性子區間，而整個時間區間則不為線性；在週期項上是選擇傅立葉級數轉換，用正弦函數（sin）、餘弦函數（cos）將非週期性的資料轉換成線性組合，並可以對不同週期進行加權，可以更好地反映季節性變化；對於節日帶來的影響，假設這個衝擊為可預期且每年類似，每個節日皆為獨立影響，故只要有節日發生就會有一個定值產生；透過同時考慮週期、趨勢及節日三種影響預測下一期。LSTM 模型為遞迴式神經網絡（Recurrent Neural Network, RNN）的一種。和上述兩種模型相比，LSTM 模型是基於深度學習方法建模，並利用模擬神經網路的記憶能力及非線性的特性進行預測，將輸入資料區分為受前期影響的長期記憶（cell state）和以雙曲正切函數（tanh）轉換並映射在 $[-1,1]$ 這個區間上的短期記憶（hidden state），當進入一層神經網路時則會將短期記憶搭配 sigmoid 函數選擇進行遺忘、輸入及輸出。和 ARMA-GARCH 基於傳統統計學方法來建模有很大的不同，故不需要對數據進行平穩化、差分或對數化處理，即可以通過學習輸入資料的非線性特徵適應資料的變化，只要輸入學習的歷史資料量越大通常就會有更好的表現。但取而代之的會喪失可解釋性及需要大量的訓練時間。因此，本研究想探討近年來交易量最大的加密貨幣：比特幣（BTC）、以太幣（ETH）及幣安幣（BNB）的實際波動度（RV）預測上，比較三種模型的預測能力優劣。

## 二、研究目的

誠如上述研究動機，故本研究將分別以 3 分鐘、5 分鐘及 15 分鐘為區間，使用 ARMA-GARCH (1,1)、Prophet 以及 LSTM 模型預測下 1 期、下 2 期、下 3 期和下 5 期的實際波動度，並分別比較在比特幣（BTC）、以太幣（ETH）及幣安幣（BNB）的預測成效優劣。

## 貳、文獻回顧

Kumar et al. (2022) 比較 Prophet 和 LSTM 模型預測 SBI 下 60 天的股價，研究期間為 2013-1-1 到 2018-12-31，一共六年；比較 RMSE（均方根誤差）、MAE（平均絕對誤差）及 MSE（均方誤差）。研究結果發現，LSTM 模型不論是在 MAE、MSE 或 RMSE 上皆遠勝於

Prophet 模型。LSTM 的 MAE 約為 4，而 Prophet 的 MAE 為 17.62。另一方面，LSTM 的 MSE 為 25.25 低於 Prophet 的 475.36。

Liu et al. (2022) 以 LSTM 和 GARCH 模型來預測 S&P 指數，使用 BARRA 官方數據作為實證數據。在本文中，作者將風險輸入模型，並以此預測未來的波動性。將整個數據集分成 70% 訓練集 30% 測試集，設計 2 層 LSTM，其中學習率為 0.001，捨棄率為 0.0001，根據 MAE（平均絕對誤差）、MSE（均方誤差）評估。研究結果發現，在 GARCH 模型中，MAE 和 MSE 分別為 0.1904、0.0380；LSTM 模型則是 0.0730、0.0063。LSTM 比傳統的 GARCH 模型具有更好的預測能力。

## 參、研究方法與模型介紹

此章節主要介紹本研究中所使用的研究方法與模型介紹，其中包含資料前處理、使用模型以及模型評估標準。

### 一、 資料預處理

#### （一）實際波動度（Realized Volatility, RV）

實際波動度（Realized Volatility, RV）是一個衡量價格波動程度具代表性的指標。透過計算價格在一定時間內的標準差（即價格變動的幅度）來評估此價格的波動性。下方為此模型算法。

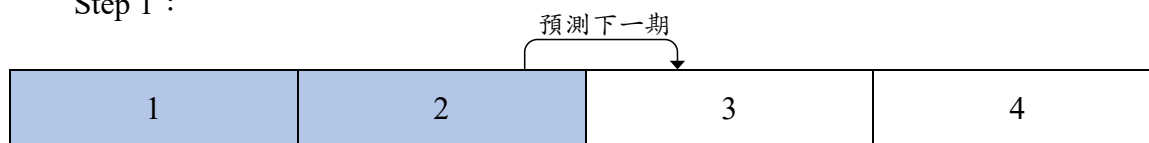
$$RV_t = \sqrt{\sum_{i=1}^n [\ln(P_{i,t}) - \ln(P_{i-1,t})]^2} \quad (1)$$

其中，下標  $t$  代表期數；下標  $i$  代表日內區間資料，以本研究為例，日內區間資料分為 3 分鐘、5 分鐘及 15 分鐘。

#### （二）滑動窗口算法（Sliding Window Algorithm）

用於描述透過在時間序列資料上移動固定大小的窗口（window）來解決問題的方法。不斷更新窗口（window）內的資料，以最終找到最佳解之前對整個序列進行遍歷。

Step 1 :



Step 2 :

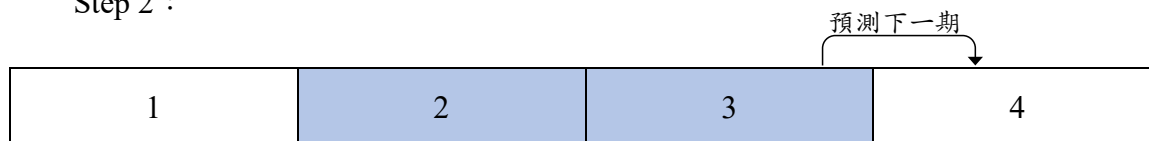


圖 1 滑動窗口算法 (Sliding Window Algorithm) 架構

### (三) 單根檢定 (Augmented Dickey-Fuller, ADF<sup>1</sup>)

David A. Dickey 和 Wayne W. Fuller (1979) 年提出的 ADF (Augmented Dickey-Fuller) 單根檢定是一種用於檢定時間序列的隨機變量在長期內是否保持不變。如果數據具有單根性，代表它是平穩的，因此可以進行更有效的預測和分析。下方為此模型算法。

虛無假設 ( $H_0$ ) 為  $y_t$  具單根，對立假設 ( $H_1$ )  $y_t$  為定態進行檢定：

$$H_0 : \delta = 0 \text{ vs. } H_1 : \delta < 0 \quad (2)$$

檢定統計量為：

$$ADF_{-t} = \frac{\hat{\delta}}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\delta})}} \quad (3)$$

### (四) 決定落後期數 (Lag)

在建構時間序列模型 (例：ARIMA、GARCH 等) 時，落後期數的決定相當重要，因為它直接影響預測結果的準確性和穩定性。Engle & Yoo (1987) 提出用 AIC 準則來決定最適落後項表現較佳。因此本研究最適落後期數選取以 AIC 準則為標準，將 AIC 值最小視為最適的落後期數。下方為此模型算法。

$$AIC = -2 \ln(L) + 2k \quad (4)$$

其中， $L$  代表概似函數 (likelihood function)； $k$  代表參數數量。

<sup>1</sup> 本研究使用之 Python 套件 (Package) 為 statsmodels.tsa.stattools.adfuller 進行檢定。參考連結如下：  
<https://www.statsmodels.org/dev/generated/statsmodels.tsa.stattools.adfuller.html>

## 二、建立預測模型

### (一) ARMA-GARCH<sup>2</sup>

傳統的計量經濟學常常會假設時間序列變量的條件變異數為固定，但資產報酬的波動幅度理應會隨著時間而變化，且具有持續性。直到 Engle 在 1982 年提出自迴歸條件變異數 (Autoregressive conditional heteroskedasticity model) ARCH 模型，解決了時間序列波動性的問題。而在 1986 年 Bollerslev 提出的 (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) GARCH 模型稱為廣義 ARCH 模型，將落後期條件變異數加入模型中，此舉使原先的 ARCH 模型具有一般化 (generalized) 的結構，擁有更好的解釋力及彈性。而結合 ARMA 和 GARCH 的 ARMA-GARCH 模型，在描述時間序列的自相關性和波動性以外，額外考慮到長期趨勢、異質變異數等因素。下方為本篇模型算法介紹。

ARMA(m,n)-GARCH(1,1) model :

$$R_t = c + \sum_{i=1}^m \phi_i y_{t-i} + u_t + \sum_{j=1}^n \theta_j u_{t-j} \quad (5)$$

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (6)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (7)$$

$$\varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) \quad (8)$$

其中， $R_t$ 代表第  $t$  期的觀測值； $c$ 代表常數項； $\varepsilon_t$ 代表白噪音 (white noise) 的干擾項，此項為常態分佈； $\sigma_t$ 代表與  $\varepsilon_t$ 獨立下的第  $t$  期條件變異數並為正數。另外亦假設  $\alpha_0$ 、 $\alpha_i$ 、 $\beta_j$ 皆大於 0 同時滿足共變異數介於  $0 < \alpha + \beta < 1$  的穩定條件。

### (二) Prophet<sup>3</sup>

Sean J. Taylor & Benjamin Letham 於 2018 年提出的時間序列預測模型 Prophet，是一種基於 Harvey et al. (1990) 提出的時間序列分解 (time-series decomposition) 及 Hastie et al.

(1987) 發表機器學習的廣義加性模型 (Generalized Additive Model, GAM)，整合多個時間

---

<sup>2</sup> 本研究使用之 Python 套件 (Package) 為 arch 中的 arch model 進行建模預測，並指定波動度模型參數 (vol) 指定為 GARCH 模型。參考連結如下：<https://arch.readthedocs.io/en/latest/univariate/introduction.html>

<sup>3</sup> 本研究使用之 Python 套件 (Package) 為 prophet 中的 Prophet 進行建模預測，此模型主要透過 Sklearn 的 API 進行串接。參考連結如下：[https://facebook.github.io/prophet/docs/quick\\_start.html](https://facebook.github.io/prophet/docs/quick_start.html)

序列預測的線性與非線性模型，其優點是很容易分解並根據需要增加成分項，具有很高的靈活性及可解釋性且訓練速度相對快。以本研究為例，此模型主要將序列 $\overline{RV}_t$ 分解成 $g(t)$ ：趨勢項（trend）、 $s(t)$ ：週期項（seasonality）、 $h(t)$ ：節日項（holiday）和 $\epsilon_t$ ：誤差項（error），下方為本篇模型算法介紹。

Prophet model：

$$\overline{RV}_t = g(t) + s(t) + h(t) + \epsilon_t \quad (9)$$

### 1. 趨勢（trend）

在現實的時間序列中，曲線的走勢並不會保持不變，在經過特定期間或存在某種潛在的週期現象後也會發生變化。代表在每個子區間內函數都是線性，但在整條區間時則並不完全是線性。稱為分段線性成長（piecewise linear growth）。此分段線性成長模型如下：

$$g(t) = (k + \alpha(t)^T \delta)t + (m + \alpha(t)^T \gamma) \quad (10)$$

其中， $k$ 代表成長率（growth rate）； $\delta$ 代表成長率的調整項（change in rate）； $m$ 代表抵銷參數（offset parameter）； $\gamma$ 代表抵銷參數的調整項。

### 2. 週期（seasonality）

對於週期的描述，本模型使用傅立葉級數來呈現季節性的變化。下方模型以矩陣表達方式。

$$X(t) = [\cos\left(\frac{2\pi 1t}{P}\right), \dots, \sin\left(\frac{2\pi Nt}{P}\right)] \quad (11)$$

$$s(t) = X(t) \beta \quad (12)$$

其中， $\beta$ 為 $[a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_N, b_N]^T$ ， $P$ 代表時間序列的週期（例： $P=7$ ，表示以週為週期）。

### 3. 節日（holiday）

模型假設特定節日（以臺灣為例：農曆春節、中秋節等）對於時間序列的影響，提供了某種程度上可預期且相似的衝擊，並且不會遵循其他週期的模式。因此本模型透過假設每個節日 $i$ 皆為獨立影響， $D_i$ 為受影響期間的集合。

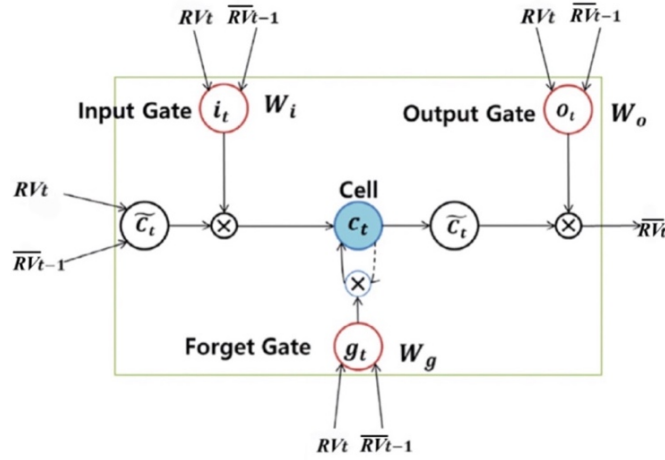
$$h(t) = Z(t)\kappa \quad (13)$$

$$Z(t) = [1(t \in D_1), \dots, 1(t \in D_L)] \quad (14)$$

其中， $\kappa$ 代表節日的影響程度，且符合常態分佈。

### (三) LSTM<sup>4</sup>

Hochreiter & Schmidhuber 在 1997 年提出的 LSTM (Long Short-Term Memory) 是一種長短期記憶模型，為遞迴式神經網絡 (Recurrent Neural Network, RNN) 的一種。其核心是將數據區分為長期記憶單元 (cell state) 及短期記憶單元 (hidden state) 並通過使用輸入門 (input gate)、遺忘門 (forget gate) 和輸出門 (output gate) 等不同的門來管理訊息，從而提高神經網絡的長期記憶能力。以本研究為例，在  $t$  期的輸入值 (input) 為  $RV_t$ ，輸出值 (output) 為  $\overline{RV}_t$ ，下方為本篇模型算法介紹。



註：本圖參考 Kim, H. Y., & Won, C. H. (2018). Forecasting the volatility of stock price index: A hybrid model integrating LSTM with multiple GARCH-type models. *Expert Systems with Applications*, 103, 25-37.

圖 2 LSTM 模型每層記憶區塊 (memory block) 架構圖

LSTM model :

#### 1. 記憶單元 (memory cell) :

##### (1) 長期記憶 (cell state) :

$$C_t = g_t * C_{t-1} + i_t * \tilde{C}_t \quad (15)$$

<sup>4</sup> 本研究使用之 Python 套件 (Package) 為透過 TensorFlow 呼叫 Keras API 中的 LSTM layer 搭建模型。參考連結如下：[https://www.tensorflow.org/api\\_docs/python/tf/keras/layers/LSTM](https://www.tensorflow.org/api_docs/python/tf/keras/layers/LSTM)



(2) 短期記憶 (hidden state) ，又稱輸出值 (output) ：

$$\overline{RV}_t = o_t * \tanh(C_t) \quad (16)$$

使用雙曲正切函數 ( $\tanh$ ) 將值映射在 $[-1,1]$ 區間上，此函數特性可以有效的捕捉數據間的非線性關係，並使輸入值的分佈更均勻，在計算梯度時可以避免梯度消失的問題（當值非常接近 0 和 1），導致有無法收斂的問題。

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (17)$$

$\tanh$  函數示意圖如下：

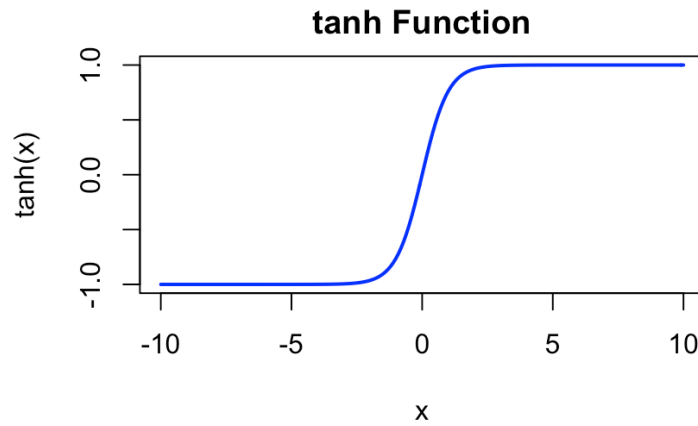


圖 3  $\tanh$  函數示意圖

使用二焦點曲線函數 (sigmoid) 將取值範圍映射在 $[0,1]$ 之間且輸出與輸入維度一致，假設當輸出值取 sigmoid 後越接近 1 代表越重要，可以進入長期記憶中；反之，當輸出值取 sigmoid 後越接近 0 代表重要低則不會記住。因此，LSTM 模型可以更好的學習和捕捉時間序列資料中的長期依賴關係，具有很好的記憶和表達能力。

$$\text{sigmoid}(x) = \frac{1}{1 + e^x} \quad (18)$$

sigmoid 函數示意圖如下：

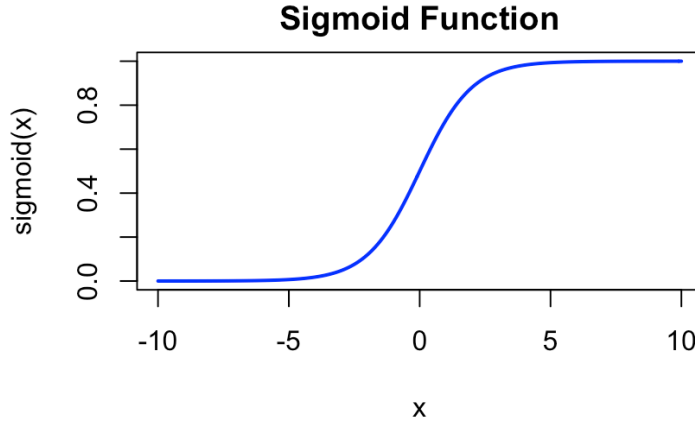


圖 4 sigmoid 函數示意圖

2. 輸入門 (input gate) :

$$i_t = \text{sigmoid}(U_i RV_t + W_i \overline{RV}_{t-1} + b_i) \quad (19)$$

其中， $U_i$ 、 $W_i$  分別代表輸入門的權重矩陣 (weight matrix)； $b_i$  代表輸入門的偏誤項 (bias)。

3. 遺忘門 (forget gate) :

控制在  $t$  期時更新前一期記憶單位 ( $C_{t-1}$ ) 的訊息。

$$g_t = \text{sigmoid}(U_g RV_t + W_g \overline{RV}_{t-1} + b_g) \quad (20)$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(U_c RV_t + W_c \overline{RV}_{t-1} + b_c) \quad (21)$$

其中， $U_g$ 、 $U_c$ 、 $W_g$ 、 $W_c$  分別代表遺忘門的權重矩陣 (weight matrix)； $b_g$ 、 $b_c$  分別代表遺忘門的偏誤項 (bias)。

式 20 說明輸入資料通過遺忘門後會被投射在  $[0,1]$  之間，當值等於 1 時代表所有資訊皆通過，沒有資訊會被遺忘；相對的，當值等於 0 時則代表沒有資訊通過，此資訊被遺忘。式 21 說明在  $t$  期的新加入的實際波動度 ( $RV_t$ )，透過  $\tanh$  函數轉換至  $[-1,1]$  之間。結合通過遺忘門 (forget gate) 後前一期的長期記憶 ( $C_{t-1}$ ) 並通過輸入門 (input gate) 可得式 15 中的長期記憶 ( $C_t$ )。

4. 輸出門 (output gate) :

$$o_t = \text{sigmoid}(U_o RV_t + W_o \overline{RV}_{t-1} + b_o) \quad (22)$$

其中， $U_o$ 、 $W_o$ 分別代表輸出門的權重矩陣（weight matrix）； $b_o$ 表示輸出門的偏誤項（bias）。

對  $t$  期的長期記憶（ $C_t$ ）透過使用  $\tanh$  函數轉換至  $[-1,1]$  之間並乘上式 22，以此更新  $t-1$  期的長期記憶（ $C_{t-1}$ ），此過程將不重要的訊息刪除只儲存重要的資訊，即為輸出值（式 16）。

### 三、模型評估指標

模型評估的目的是確定模型對樣本外資料的預測效果，以及是否能夠解決目前面臨的問題。本研究使用的指標如下：

（一）平均絕對誤差（Mean Absolute Error, MAE）

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - \bar{y}_t| \quad (23)$$

（二）均方根誤差（Root Mean Squared Error, RMSE）

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2} \quad (24)$$

（三）平均絕對百分比誤差（Mean Absolute Percentage Error, MAPE）

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_t - \bar{y}_t}{y_t} \right| \quad (25)$$

## 肆、研究方法與模型介紹

本章節將敘述本研究的實證結果。首先介紹研究資料來源、研究時間範圍以及前處理後的結果；接著說明以上三種模型分別在預測下一期、下兩期、下三期和下五期的預測能力以及比較模型的優劣。

### 一、資料來源與資料前處理

本章節將比較使用 ARMA-GARCH (1,1)、Prophet 及 LSTM 在預測比特幣（BTC）、以太幣（ETH）與幣安幣（BNB）實際波動率（RV）的成效優劣。資料期間為 2017/11/06 到

2022/11/27 內每三分鐘、五分鐘和十五分鐘之盤中交易的成交價<sup>5</sup>，分別有 879,952 筆、529,153 筆及 176,783 筆資料；總共 1,848 個交易日中，前 1,293 筆為樣本內資料（2017/11/06 ~ 2021/05/21），剩餘的 555 筆則為樣本外資料（2021/05/22 ~ 2022/11/27）；本研究皆使用 Python 進程式撰寫，資料來源為幣安（Binance），幣安（Binance）為全球最大且知名的加密貨幣交易所，透過串接 API 的方式獲取比特幣（BTC）、以太幣（ETH）、幣安幣（BNB）的成交價。下圖每日收盤價、日收益率以及每日收益率敘述統計表。

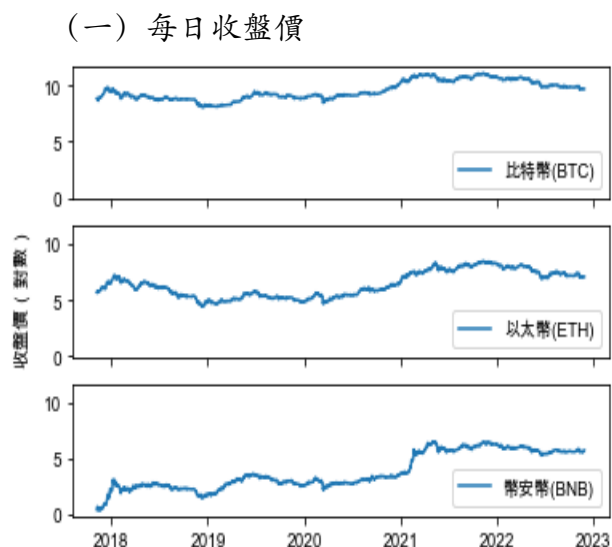


圖 5 2017/11/06~2022/11/27 每日收盤價

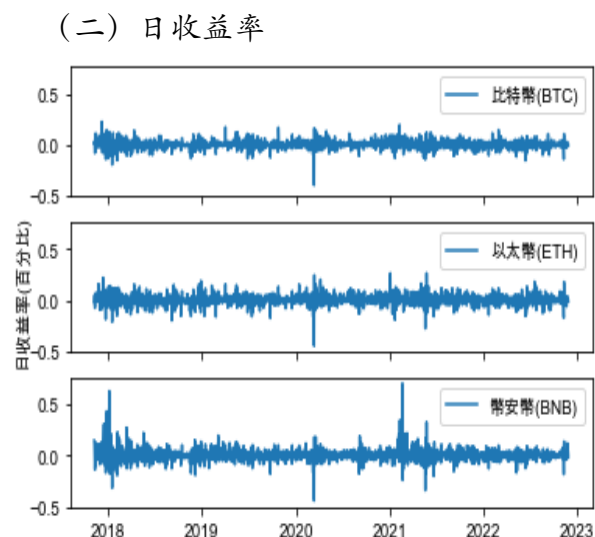


圖 6 2017/11/06~2022/11/27 每日收益率

### (三) 每日收益率敘述統計表

表 1 日收益率敘述統計表

Type	Count	Mean	Std	25%	50%	75%	Min	Max
比特幣 (BTC)	1848	0.0013	0.0408	-0.0164	0.0011	0.0187	-0.3950	0.2250
以太幣 (ETH)	1848	0.0021	0.0521	-0.0225	0.0014	0.0285	-0.4460	0.2633
幣安幣 (BNB)	1848	0.0047	0.0625	-0.0226	0.0015	0.0295	-0.4414	0.7030

### (四) ADF 檢定結果

<sup>5</sup> 比特幣 (BTC) 首次發行時間為 2009 年 1 月 3 日；以太幣 (ETH) 首次發行時間為 2015 年 7 月 30 日；幣安幣 (BNB) 首次發行時間為 2017 年 7 月 14 日。在幣安 (Binance) 交易所資料庫中，比特幣 (BTC)、以太幣 (ETH) 的首筆交易資料皆為 2017 年 8 月 17 日；幣安幣 (BNB) 的首筆交易資料為 2017 年 11 月 6 日。

表 2 ADF 檢定表

Type	ADF-Statistic	P-Value
比特幣 (BTC)	-76.1017	0.0000***
以太幣 (ETH)	-74.3572	0.0000***
幣安幣 (BNB)	-75.3072	0.0000***

其中，\*\*\*、\*\*、\*分別代表 1%、5%、10%。

由表 2 可得知，本文研究資料皆通過單根檢定，使用資料為定態資料。

#### (五) 最適落後期

本文研究主要以比較 ARMA(0,1)、ARMA(1,0)、ARMA(1,1) 中選取 AIC 最小點來決定最適落後期。經過計算得出比特幣 (BTC) 和以太幣 (ETH)，在  $p=0$  且  $q=1$  時 AIC 皆最小；而幣安幣 (BNB) 則在  $p=1$  且  $q=0$  時 AIC 最小。故本研究比特幣 (BTC) 和以太幣 (ETH) 將以 ARMA(0,1)-GARCH (1,1) 做為基準，而幣安幣 (BNB) 則是以 ARMA(1,0)-GARCH (1,1) 做研究。

表 3 AIC 值比較

AIC	比特幣 (BTC)	以太幣 (ETH)	幣安幣 (BNB)
ARMA (0,1) -GARCH (1,1)	<b>-4667.0678</b>	<b>-4089.6986</b>	-3447.1975
ARMA (1,0) -GARCH (1,1)	-4667.0654	-4089.6961	<b>-3447.4836</b>
ARMA (1,1) -GARCH (1,1)	-4664.9524	-4087.6978	-3446.2421

註：粗體表示 AIC 值最小

## 肆、實證結果

本節將展示模型及比較各模型以 3 分鐘、5 分鐘、15 分鐘為資料區間在預測比特幣 (BTC)、以太幣 (ETH) 及幣安幣 (BNB) 波動度下一期、下兩期、下三期以及下五期的表現。由於本研究使用滑動窗口算法 (Sliding Window Algorithm) 進行下期預測，故主要以 3 分鐘為區間之下一期預測的首個模型做展示。

### 一、ARMA-GARCH (1,1)

模型及預測結果整理如下：

#### (一) 比特幣 (BTC)

$$R_t = 0.0012 - 0.0086 u_{t-1} + u_t \quad (26)$$

$$\sigma_t^2 = 4.3290 * 10^{-5} + 0.1000 u_{t-1}^2 + 0.8800 \sigma_{t-1}^2 \quad (27)$$

(二) 以太幣 (ETH)

$$R_t = 0.0016 - 0.0081 u_{t-1} + u_t \quad (28)$$

$$\sigma_t^2 = 1.6443 * 10^{-4} + 0.1358 u_{t-1}^2 + 0.8092 \sigma_{t-1}^2 \quad (29)$$

(三) 幣安幣 (BNB)

$$R_t = 0.0051 + 0.0742 y_{t-1} + u_t \quad (30)$$

$$\sigma_t^2 = 1.0215 * 10^{-4} + 0.1998 u_{t-1}^2 + 0.7802 \sigma_{t-1}^2 \quad (31)$$

## 二、Prophet

透過本模型的時間序列分解 (time-series decomposition) 技術可以發現不論比特幣 (BTC)、以太幣 (ETH) 或幣安幣 (BNB)，樣本內資料波動度從 2017 年後有下降的趨勢；每年的 11 月到隔年 1 月波動變化大；在星期六、星期日的波動性大幅下降，其原因可能是因為雖然加密貨幣交易市場的交易時間是每週 7 天、每天 24 小時開放，但是實際上周末假日的流動性較低，交易量非常小。圖 5 到圖 7 從上至下，分別為趨勢圖、週期 (週) 圖及週期 (年) 圖。

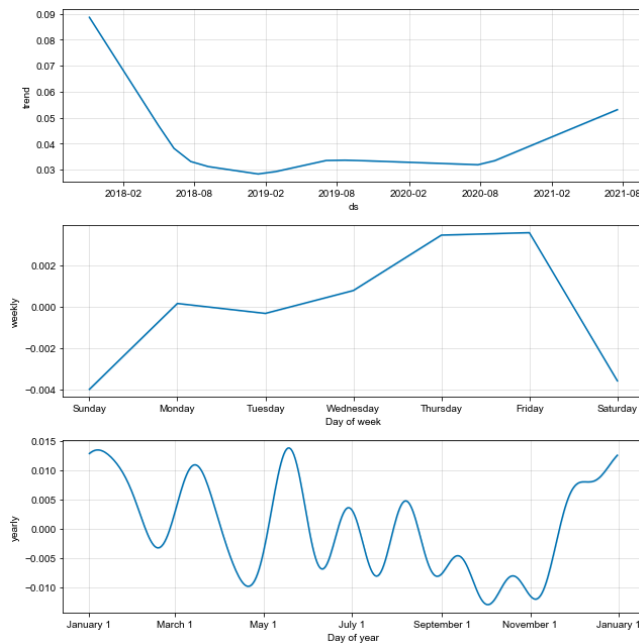


圖 7 Prophet 樣本內資料趨勢圖 (BTC)

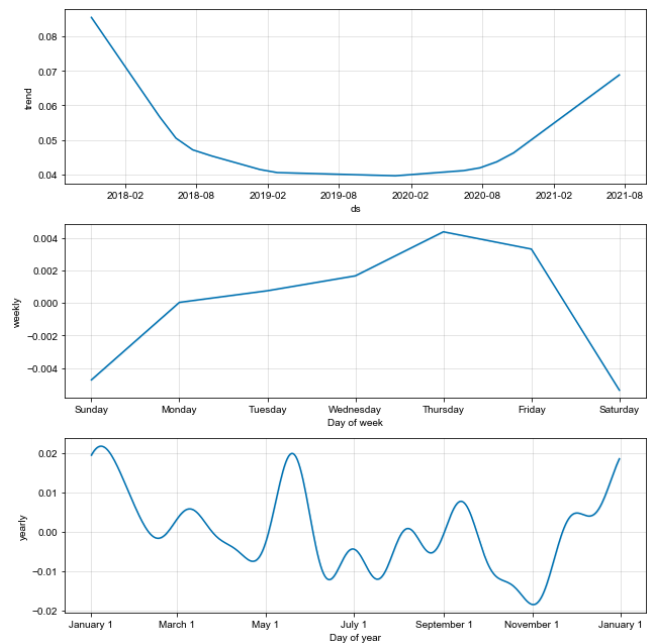


圖 8 Prophet 樣本內資料趨勢圖 (ETH)

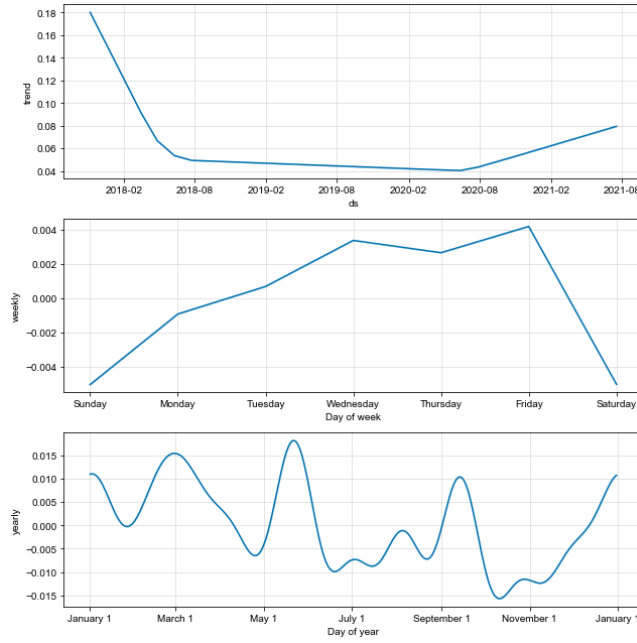


圖 9 Prophet 樣本內資料趨勢圖 (BNB)

模型及預測結果整理如下：

(一) 比特幣 (BTC)

$$g(t) = (-0.9417 + (RV_{1349 \times 1})^T * 4.2252 * 10^{-8}) t + (0.3313 + (RV_{1349 \times 1})^T) \quad (32)$$

$$s(t) = X(t) * 0.0166 \quad (33)$$

(二) 以太幣 (ETH)

$$g(t) = (-0.7779 + (RV_{1349 \times 1})^T * -1.5990 * 10^{-8}) t + (0.3197 + (RV_{1349 \times 1})^T) \quad (34)$$

$$s(t) = X(t) * 0.0114 \quad (35)$$

(三) 幣安幣 (BNB)

$$g(t) = (-1.2263 + (RV_{1349 \times 1})^T * 2.0747 * 10^{-8}) t + (0.1803 + (RV_{1349 \times 1})^T) \quad (36)$$

$$s(t) = X(t) * 0.0055 \quad (37)$$

### 三、LSTM

基於 Kim et al. (2018) 之研究方法，作者透過反覆實驗指出使用 3 層 LSTM 搭配 2 層連接層，學習率 (learning rate) 設為 0.0001，3 層 LSTM 內的神經元的個數 (node) 以及捨棄率 (dropout rating) 分別是 (10, 4, 2) 和 (0.3, 0.8, 0.8) 加上捨棄率是為了避免模型發生過度擬合 (overfitting)；2 層連接層內的神經元個數為 (5, 1)，主要進行維度變換，方便透過評

估標準模型計算損失 (loss) ，根據輸入資料發現具有最高的準確度，故本文將參考此模型架構進行<sup>6</sup>。

本研究透過輸入前 1349 個實際波動度 ( $RV_{1349,1}$ ) 預測下期的實際波動度 ( $\overline{RV}_t$ ) ，以下展示第一層 LSTM 的第一個記憶區塊 (memory block) 模型及預測下期結果整理：

#### (一) 比特幣 (BTC)

$$\text{Input gate : } i_t = \text{sigmoid}(0.0033 RV_t + 0.1967 \overline{RV}_{t-1} - 0.0105) \quad (38)$$

$$\text{Forget gate : } g_t = \text{sigmoid}(9.6754 * 10^{-2} * RV_t + 0.2056 \overline{RV}_{t-1} + 0.9893) \quad (39)$$

$$\tilde{C}_t = \text{sigmoid}(0.1612 * RV_t + 0.1746 \overline{RV}_{t-1} - 0.0062) \quad (40)$$

$$\text{Output gate : } o_t = \text{sigmoid}(-0.0890 * RV_t + 0.3006 \overline{RV}_{t-1} - 0.0105) \quad (41)$$

#### (二) 以太幣 (ETH)

$$\text{Input gate : } i_t = \text{sigmoid}(-0.089 RV_t + 0.0082 \overline{RV}_{t-1} - 0.0064) \quad (42)$$

$$\text{Forget gate : } g_t = \text{sigmoid}(0.0991 * RV_t + 0.2104 \overline{RV}_{t-1} + 0.9939) \quad (43)$$

$$\tilde{C}_t = \text{sigmoid}(0.1657 * RV_t + 0.1774 \overline{RV}_{t-1} - 0.0063) \quad (44)$$

$$\text{Output gate : } o_t = \text{sigmoid}(-0.0883 * RV_t + 0.3044 \overline{RV}_{t-1} - 0.0064) \quad (45)$$

#### (三) 幣安幣 (BNB)

$$\text{Input gate : } i_t = \text{sigmoid}(0.1968 RV_t + 0.0041 \overline{RV}_{t-1} - 0.0091) \quad (46)$$

$$\text{Forget gate : } g_t = \text{sigmoid}(0.0975 * RV_t + 0.2075 \overline{RV}_{t-1} + 0.9913) \quad (47)$$

$$\tilde{C}_t = \text{sigmoid}(0.1632 * RV_t + 0.1745 \overline{RV}_{t-1} - 7.1100 * 10^{-3}) \quad (48)$$

$$\text{Output gate : } o_t = \text{sigmoid}(-8.9949 * 10^{-2} * RV_t + 0.3006 \overline{RV}_{t-1} - 0.0091) \quad (49)$$

#### (四) 模型比較

##### 1. 比特幣 (BTC)

---

<sup>6</sup> 經過實驗發現，不論是比特幣 (BTC) 、以太幣 (ETH) 或是幣安幣 (BNB) 建三層 LSTM 模型其準確率在多數的情況下確實高過僅建一、兩層。



表 4 各模型波動度預測誤差比較表 (BTC)

BTC		T+1	T+2	T+3	T+5
以 3 分鐘為區間					
ARMA-GARCH	MAE	<b>0.0098</b>	0.0104	0.0108	0.0112
	RMSE	<b>0.3208</b>	0.3433	<b>0.3522</b>	<b>0.3584</b>
	MAPE	32.8955	35.0356	36.5557	38.6602
Prophet	MAE	0.0110	0.0110	0.0120	0.0120
	RMSE	0.3680	0.3700	0.3710	0.3750
	MAPE	34.2400	34.9050	35.3870	36.3580
LSTM	MAE	0.0101	<b>0.0096</b>	<b>0.0105</b>	<b>0.0108</b>
	RMSE	0.3503	<b>0.3159</b>	0.3583	0.3590
	MAPE	<b>32.6905</b>	<b>32.7267</b>	<b>34.2259</b>	<b>36.2720</b>
以 5 分鐘為區間					
ARMA-GARCH	MAE	<b>0.0102</b>	0.0108	0.0112	0.0115
	RMSE	<b>0.3344</b>	0.3565	<b>0.3658</b>	<b>0.3719</b>
	MAPE	33.8643	36.0840	37.5877	39.5629
Prophet	MAE	0.0120	0.0120	0.0120	0.0120
	RMSE	0.3860	0.3880	0.3900	0.3930
	MAPE	35.5670	36.2260	36.8970	37.8400
LSTM	MAE	0.0106	<b>0.0101</b>	<b>0.0111</b>	<b>0.0113</b>
	RMSE	0.3654	<b>0.3318</b>	0.3772	0.3749
	MAPE	<b>33.7883</b>	<b>34.2769</b>	<b>36.1108</b>	<b>37.4292</b>
以 15 分鐘為區間					
ARMA-GARCH	MAE	0.0104	0.0110	0.0114	0.0118
	RMSE	<b>0.3231</b>	0.3449	<b>0.3534</b>	0.3623
	MAPE	38.1823	40.4793	41.9523	44.1009
Prophet	MAE	0.0110	0.0110	0.0120	0.0120
	RMSE	0.3640	0.3650	0.3680	0.3710
	MAPE	36.1230	36.7840	37.3630	<b>38.3240</b>
LSTM	MAE	<b>0.0102</b>	<b>0.0100</b>	<b>0.0106</b>	<b>0.0108</b>
	RMSE	0.3484	<b>0.3401</b>	0.3568	<b>0.3530</b>
	MAPE	<b>34.5918</b>	<b>34.6360</b>	<b>37.1787</b>	38.6353

註：粗體表示同組比較誤差值最小

## 2. 以太幣 (ETH)

表 5 各模型波動度預測誤差比較表 (ETH)

ETH		T+1	T+2	T+3	T+5
以 3 分鐘為區間					
ARMA-GARCH	MAE	<b>0.0122</b>	0.0132	0.0137	0.0142
	RMSE	<b>0.3933</b>	0.4296	<b>0.4439</b>	0.4540
	MAPE	31.3464	34.1632	35.6963	37.6210
Prophet	MAE	0.0150	0.0150	0.0150	0.0150
	RMSE	0.4940	0.4970	0.4990	0.5010
	MAPE	34.4920	35.2020	35.8220	36.8320
LSTM	MAE	<b>0.0122</b>	<b>0.0121</b>	<b>0.0131</b>	<b>0.0134</b>
	RMSE	0.4316	<b>0.4021</b>	0.4613	<b>0.4495</b>
	MAPE	<b>29.6541</b>	<b>31.4800</b>	<b>32.8696</b>	<b>34.6336</b>
以 5 分鐘為區間					
ARMA-GARCH	MAE	<b>0.0124</b>	0.0134	0.0139	0.0144
	RMSE	<b>0.4094</b>	0.4449	<b>0.4589</b>	<b>0.4684</b>
	MAPE	31.6730	34.4507	35.9901	37.8810
Prophet	MAE	0.0150	0.0150	0.0160	0.0160
	RMSE	0.5170	0.5190	0.5220	0.5250
	MAPE	35.2930	36.0800	36.6910	37.9130
LSTM	MAE	0.0126	<b>0.0126</b>	<b>0.0138</b>	<b>0.0139</b>
	RMSE	0.4498	<b>0.4222</b>	0.4848	0.4725
	MAPE	<b>30.4219</b>	<b>32.4651</b>	<b>34.2449</b>	<b>35.4198</b>
以 15 分鐘為區間					
ARMA-GARCH	MAE	0.0129	0.0140	0.0146	0.0150
	RMSE	<b>0.4059</b>	<b>0.4405</b>	<b>0.4548</b>	0.4639
	MAPE	35.2207	38.1672	39.9551	41.8731
Prophet	MAE	0.0150	0.0150	0.0150	0.0150
	RMSE	0.4960	0.4960	0.4990	0.4980
	MAPE	35.3150	36.0260	36.5570	37.6340
LSTM	MAE	<b>0.0127</b>	<b>0.0129</b>	<b>0.0134</b>	<b>0.0137</b>
	RMSE	0.4428	0.4427	0.4588	<b>0.4511</b>
	MAPE	<b>32.6149</b>	<b>33.4984</b>	<b>34.9890</b>	<b>36.9142</b>

註：粗體表示同組比較誤差值最小

### 3. 幣安幣 (BNB)

表 6 各模型波動度預測誤差比較表 (BNB)

BNB		T+1	T+2	T+3	T+5
以 3 分鐘為區間					
ARMA-GARCH	MAE	0.0127	0.0137	0.0152	0.0166
	RMSE	0.4148	0.4499	0.4769	0.5013
	MAPE	35.4406	37.5265	43.4184	48.7153
Prophet	MAE	0.0170	0.0170	0.0170	0.0170
	RMSE	0.5420	0.5450	0.5480	0.5530
	MAPE	40.7870	41.7270	42.6110	44.1860
LSTM	MAE	<b>0.0110</b>	<b>0.0110</b>	<b>0.0119</b>	<b>0.0137</b>
	RMSE	<b>0.4116</b>	<b>0.4089</b>	<b>0.4343</b>	<b>0.4626</b>
	MAPE	<b>27.7438</b>	<b>28.4159</b>	<b>31.5409</b>	<b>39.7572</b>
以 5 分鐘為區間					
ARMA-GARCH	MAE	0.0131	0.014	0.0156	0.0169
	RMSE	<b>0.4405</b>	0.4724	0.4988	0.5204
	MAPE	36.6142	38.7847	44.6785	50.0592
Prophet	MAE	0.0170	0.0180	0.0180	0.0180
	RMSE	0.5720	0.5730	0.5780	0.5810
	MAPE	42.6550	43.6840	44.6560	46.4210
LSTM	MAE	<b>0.0116</b>	<b>0.0118</b>	<b>0.0127</b>	<b>0.0143</b>
	RMSE	0.4441	<b>0.4381</b>	<b>0.4304</b>	<b>0.4919</b>
	MAPE	<b>28.9924</b>	<b>30.6622</b>	<b>37.6908</b>	<b>41.5207</b>
以 15 分鐘為區間					
ARMA-GARCH	MAE	0.0138	0.0147	0.0163	0.0176
	RMSE	0.4501	0.4827	0.509	0.535
	MAPE	40.3644	42.6148	48.6657	54.2861
Prophet	MAE	0.0170	0.0170	0.0170	0.0170
	RMSE	0.5520	0.5520	0.5570	0.5610
	MAPE	42.1340	43.0820	43.9800	45.5540
LSTM	MAE	<b>0.0117</b>	<b>0.0118</b>	<b>0.0122</b>	<b>0.0143</b>
	RMSE	<b>0.4366</b>	<b>0.4318</b>	<b>0.4442</b>	<b>0.4792</b>
	MAPE	<b>31.3470</b>	<b>32.1653</b>	<b>33.5821</b>	<b>43.3087</b>

註：粗體表示同組比較誤差值最小

由表 4 到表 6 可知，實驗結果發現，總體而言 LSTM 模型的表現最好，可以明顯看出準確率明顯優於其他兩者。而 Prophet 模型在這次的表現最差。

## 伍、結論與建議

本論文以比特幣 (BTC)、以太幣 (ETH) 及幣安幣 (BNB) 為研究對象，比較使用 3 分鐘、5 分鐘、15 分鐘之歷史價格建構每日實際波動度 (RV)，以滑動窗口算法 (Sliding Window Algorithm) 預測下一、兩、三及五日的實際波動度 ( $\overline{RV}$ )；比特幣 (BTC)、以太幣 (ETH) 及幣安幣 (BNB) 的資料期間為 2017/11/06 到 2022/11/27，分別有 879,952 筆、529,153 筆及 176,783 筆資料；總共 1,848 個交易日中，前 1,293 筆為樣本內資料 (2017/11/06 ~ 2021/05/21)，剩餘的 555 筆則為樣本外資料 (2021/05/22 ~ 2022/11/27)。實驗結果顯示，總體而言 LSTM 模型的表現最好，可以明顯看出準確率明顯優於其他兩者。Prophet 模型在本次研究表現最差，其原因可能為模型沒有捕捉到節日效果，在缺少一個變量下僅剩趨勢項 (trend)、週期項 (seasonality) 進行預測。透過預測波動度可以提供投資人在做投資決策時一個參考依據；在預測波動度較高時，代表可能產生的不確定性和風險較大，此時投資人可以考慮調整投資策略，縮小倉位或減少交易頻率以及選擇相對較穩定的投資商品，避免過度損失。

整體而言根據本研究，我們雖可以建議投資人使用哪個模型可預期有更準確的預測效果，但是仍無法斷言有任一模型皆適用於所有情況；其原因可能跟時間點的選擇以及資料長度有關，2020-2021 年 Covid-19 病毒肆虐、中美貿易戰持續延燒，以及 2022 年 3 月後 Fed 為了打擊通膨的連續升息等，不論是黑天鵝或灰犀牛事件都為加密貨幣市場帶來數次的大幅震盪。此外，由於本研究僅考慮價格進行預測，未來研究方向可考量納入成交量，增加預測準確率；或比較更多幣種（例：狗狗幣、萊特幣等）確認模型預測能力在多數加密貨幣上的結果是否有一致的結果。

## 參考文獻

- Aker, Y. (2022). Analysis of Price Volatility in BIST 100 Index With TimeSeries:Comparison of Fbprophet and LSTM Model. *European Journal of Science and Technology*, 35, 89-93. <https://doi.org/10.31590/ejosat.1066722>.
- Balaban, E., Bayar, A., Faff, R.W. (2006). Forecasting stock market volatility: Further international evidence. *The European Journal of Finance* 12, 171-188.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307-327.
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American statistical association*, 74(366a), 427-431.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 987-1007.
- Engle, R. F., & Yoo, B. S. (1987). Forecasting and testing in co-integrated systems. *Journal of econometrics*, 35(1), 143-159.
- Gbadebo, Adedeji D., Ahmed O. Adekunle, Adedokun Wole, Adebayo-Oke A. Lukman, and Joseph Akande. (2021). BTC price volatility: Fundamentals versus information. *Cogent Business & Management* 8: 1.
- Hastie, T. & Tibshirani, R. (1987), 'Generalized additive models: some applications', *Journal of the American Statistical Association* 82(398), 371-386.
- Harvey, A. & Peters, S. (1990), 'Estimation procedures for structural time series models', *Journal of Forecasting* 9, 89-108.
- Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory. *Neural computation*, 9(8), 1735-1780.
- Kim, H. Y., & Won, C. H. (2018). Forecasting the volatility of stock price index: A hybrid model integrating LSTM with multiple GARCH-type models. *Expert Systems with Applications*, 103, 25-37.
- Koutmos, D. (2023). Investor sentiment and bitcoin prices. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 60(1), 1-29.
- Liu, R., Jiang, Y., & Lin, J. (2022). Forecasting the Volatility of Specific Risk for Stocks with LSTM. *Procedia Computer Science*, 202, 111-114.
- Shen, Z., Wan, Q., & Leatham, D. J. (2021). Bitcoin return volatility forecasting: A comparative study between GARCH and RNN. *Journal of Risk and Financial Management*, 14(7), 337.
- N. Kumar, R. Chauhan and G. Dubey(2022). Forecasting of Stock Price Using LSTM and Prophet Algorithm, *Applications of Artificial Intelligence and Machine Learning*, pp. 141-155, 2021.
- Taylor, S. J., & Letham, B. (2018). Forecasting at scale. *The American Statistician*, 72(1), 37-45.
- Zahid, M., Iqbal, F., Raziq, A., & Sheikh, N. (2022). Modeling and Forecasting the Realized Volatility of Bitcoin using Realized HAR-GARCH-type Models with Jumps and Inverse Leverage Effect. *Sains Malaysiana*, 51(3), 929-942.