

カラー超伝導におけるCFL相

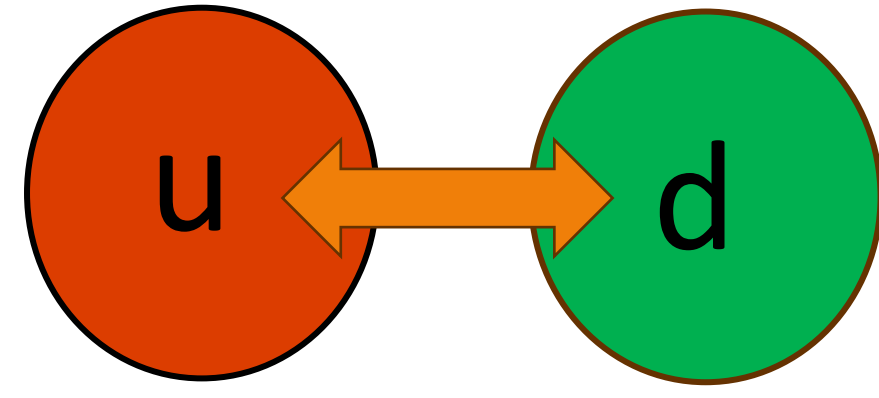
Introduction: カラー超伝導とは？

2-flavor カラー超伝導 (2SC)

クォークとクォークによるカラークーロン引力
性質

- スピン0 (反対称)
- カラークーロン (反対称)

$$\sum_{i=1}^{N_c^2-1} T_{\alpha\alpha'}^i T_{\beta\beta'}^i = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} + \frac{1}{2N_c} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}$$
$$= -\frac{N_c+1}{4N_c} (\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\alpha'\beta}) + \frac{N_c-1}{4N_c} (\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} + \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\alpha'\beta})$$



- フレーバー (パウリ原理から反対称)

Coupling constantがQCDにおいては正→クォーク間に引力
BCS理論によってカラー超伝導の実現

2-flavor CSC (2SC):

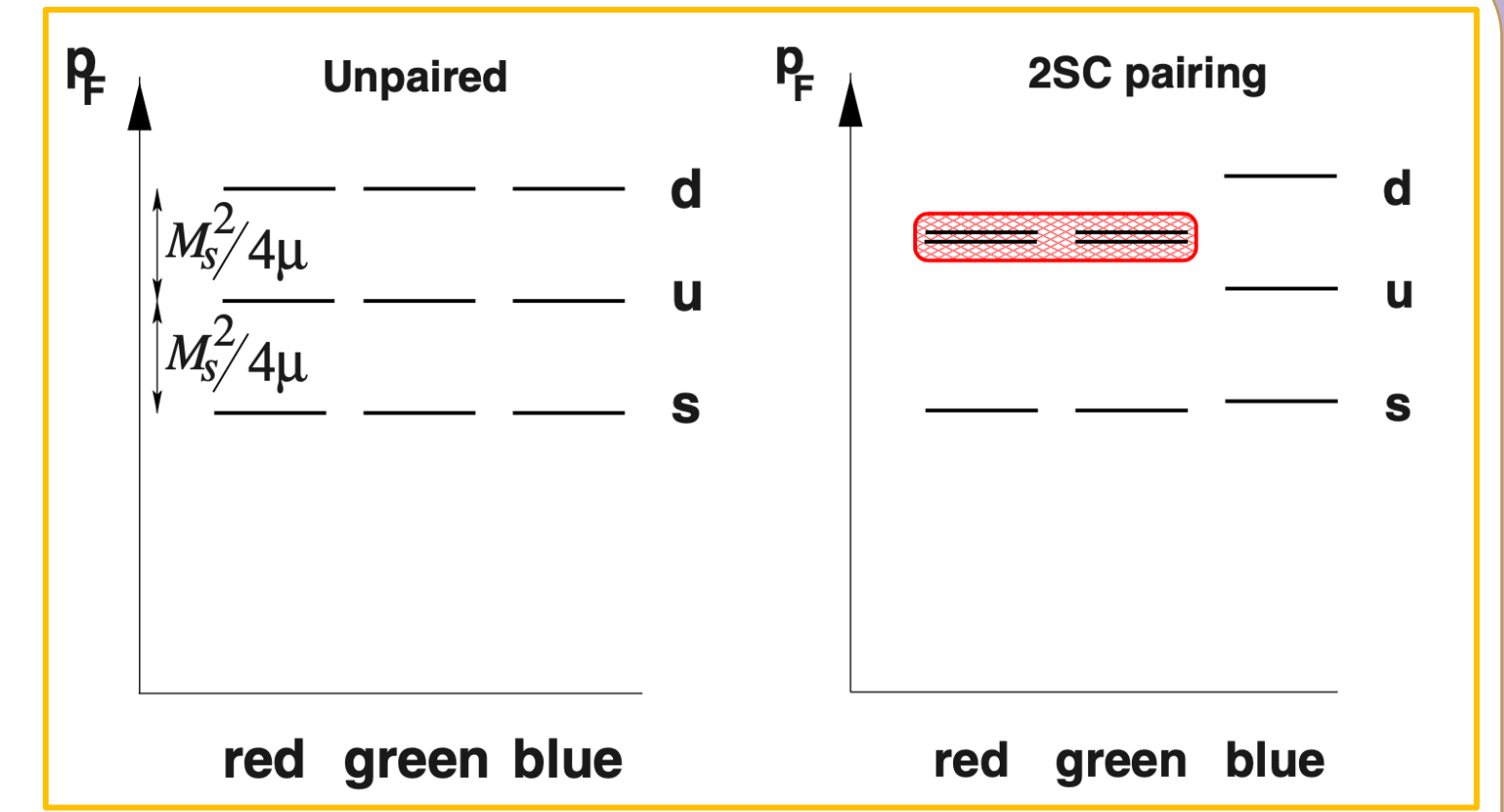
u,dクォーククーペーペア
秩序変数

$$\langle q_i^\alpha C \gamma_5 q_j^\beta \rangle \propto \epsilon_{ij} \epsilon^{\alpha\beta 3}$$

対称性の破れ

カラーゲージ: SU(3)

カイラル対称性: SU(2)



$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_B \rightarrow SU(2)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{\tilde{B}}$$

2-flavor≠3-color で自由度が不一致→colorの間で非対称性
→ u,d,sの3-flavorに拡張

CFL相の提唱

Color flavor locking(CFL): 3-flavor u,d,s 全ての組み合わせ[1]

秩序変数

$$\langle q_{Lia}^\alpha q_{Ljb}^\beta \epsilon^{ab} \rangle = -\langle q_{Ria}^\alpha q_{Rjb}^\beta \epsilon^{ab} \rangle = \kappa_1 \delta_i^\alpha \delta_j^\beta + \kappa_2 \delta_j^\alpha \delta_i^\beta$$

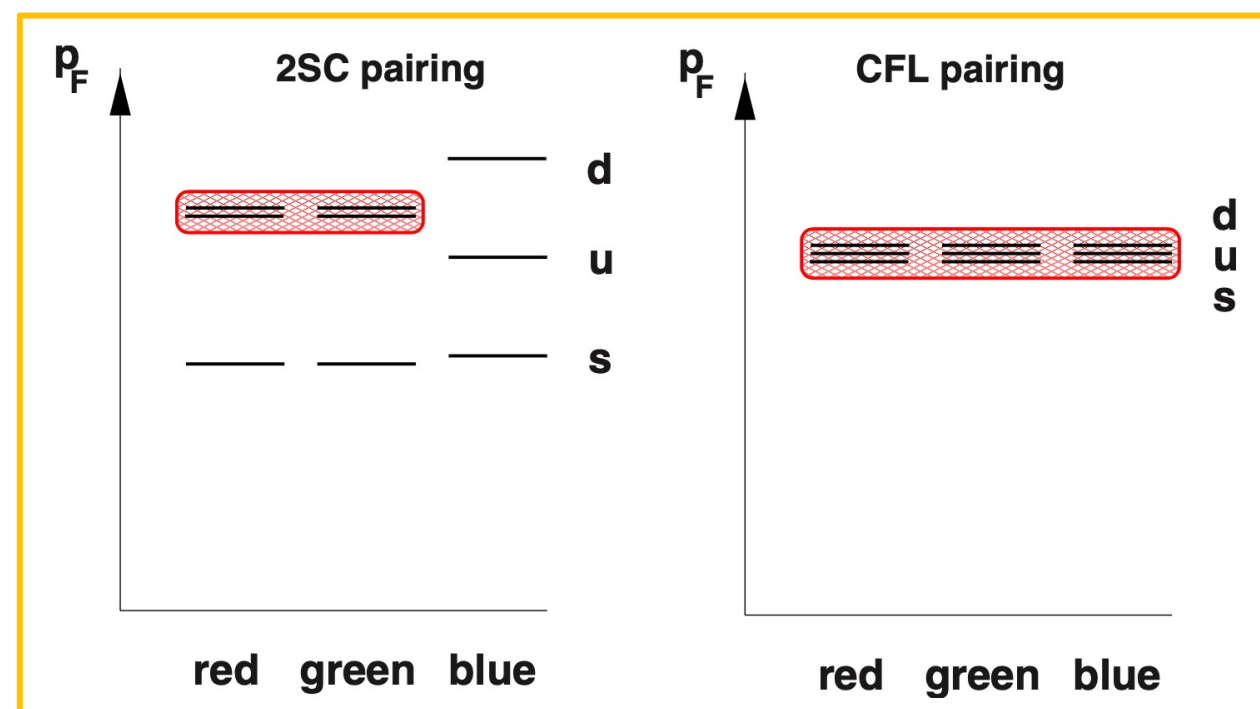
Gell-Mann行列を用いた表現

$$\Delta_{AA'} = \langle q^T C \gamma_5 \tau_A \lambda'_A q \rangle$$

$\left\{ \begin{array}{l} \tau_A : \text{color SU}(3) \\ \lambda_A : \text{flavor SU}(3) \end{array} \right.$

カラー、フレーバーは反対称 $A, A' = 2, 5, 7$ のみに限定

$$A=2 \quad (u_r, d_g)(u_g, d_r)$$
$$A=5 \quad (d_g, s_b)(d_b, s_g)$$
$$A=7 \quad (s_b, u_r)(s_r, u_b)$$



カラーとフレーバーの組み合わせが特定のパターンに固定

→Color と flavorの固定(locking)された相の実現

対称性の破れ

$$\langle q_{Lia}^\alpha q_{Ljb}^\beta \epsilon^{ab} \rangle = -\langle q_{Ria}^\alpha q_{Rjb}^\beta \epsilon^{ab} \rangle = \kappa_1 \delta_i^\alpha \delta_j^\beta + \kappa_2 \delta_j^\alpha \delta_i^\beta$$

カラーのみ、フレーバーのみの回転に対しては対称性がない

カラーとフレーバの同時回転に対しては対称→SU(3)

$$SU(3)_{\text{color Local}} \times SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B \rightarrow SU(3)_{C+L+R \text{ Global}} \times Z_2$$

$\supset U(1)_{\tilde{Q} \text{ Local}}$

SU(3)_{C+L+R}:

- カラーとカイラルベクトルの同時回転
 - カラーとカイラル軸性ベクトルは破れる
- SU(3)ゲージ場の7個
グルーオンと光子の線型結合
- ゲージ場8個がmassive

- カイラル軸性ベクトルから8個のNG Boson生成 (擬スカラー)

U(1)_Q → U(1)_{Q̃}: グルーオンと光子の線型結合で対称性保持

ゲージ場1個がmassless

電荷Qではなく線形結合したQ̃が保存
λ_i (i = 2, 8)はGell-Mann行列

$$\tilde{Q} = Q - \frac{1}{2} \lambda_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_8$$
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

バリオン数U(1)の破れ

- Z₂ になる ($q \rightarrow -q$ の対称性)
- NG Bosonが生成 (スカラー)

数値計算:CSCギャップ方程式

モデルハミルトニアン

$$H = \int \bar{\psi} (\nabla - \mu \gamma_0) \psi + K \sum_{\mu, A} \int d^3 x \bar{\psi} \gamma_\mu T^A \psi \bar{\psi} \gamma^\mu T^A \psi$$

$\left\{ \begin{array}{l} T^A : \text{color SU}(3) \\ K = \frac{4\pi\alpha}{\Lambda^2} \end{array} \right.$

ℱ はForm factor, 運動量表示では

$$F(p) = \left(1 + \exp\left(\frac{p - \Lambda}{w}\right) \right)^{-1} \text{ or } F(p) = \left(\frac{\Lambda^2}{p^2 + \Lambda^2} \right)^\nu$$

秩序変数

$$\langle \psi | \psi_{\alpha a}^\dagger \psi_{\gamma c}^\dagger \epsilon^{ac} | \psi \rangle = \frac{3}{4K} P_{\alpha\gamma}^{ij} \quad 9 \times 9 \text{ 行列}$$

固有値は1つのΔ₈ + 1/4 Δ₁と8つの±1/8 Δ₁

$$P_{\alpha\gamma}^{ij} = \frac{1}{3} (\Delta_8 + \frac{1}{8} \Delta_1) \delta_\alpha^i \delta_\gamma^j + \frac{1}{8} \Delta_1 \delta_\gamma^i \delta_\alpha^j$$

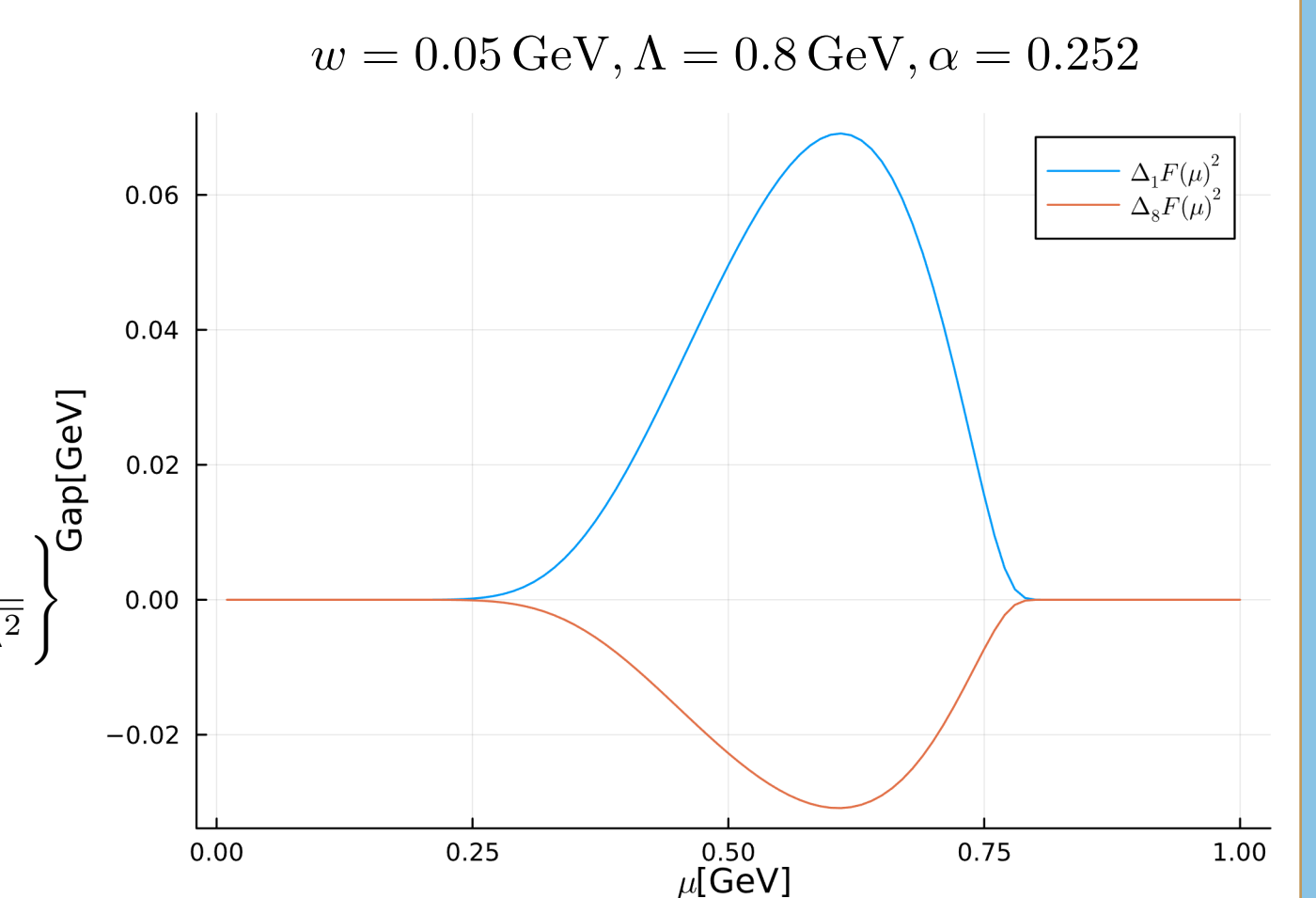
CSC ギャップ方程式

$$\begin{cases} \Delta_8 + \frac{1}{4} \Delta_1 = \frac{4}{3} \tilde{K} G(\Delta_1) \\ \frac{1}{8} \Delta_1 = \frac{4}{3} \tilde{K} G(\Delta_8) \end{cases}$$

$$G(\Delta) = -\frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{F(k)^4}{\sqrt{(k-\mu)^2 + F(k)^4 \Delta^2}} + \frac{F(k)^4}{\sqrt{(k+\mu)^2 + F(k)^4 \Delta^2}} \right\}$$

μを変えた時のギャップ

$$\mu_{\text{max}} = 0.605 \text{ GeV}$$
$$\text{Max gap} = 0.0691 \text{ GeV}$$



発展:クォーク・ハドロン連続性

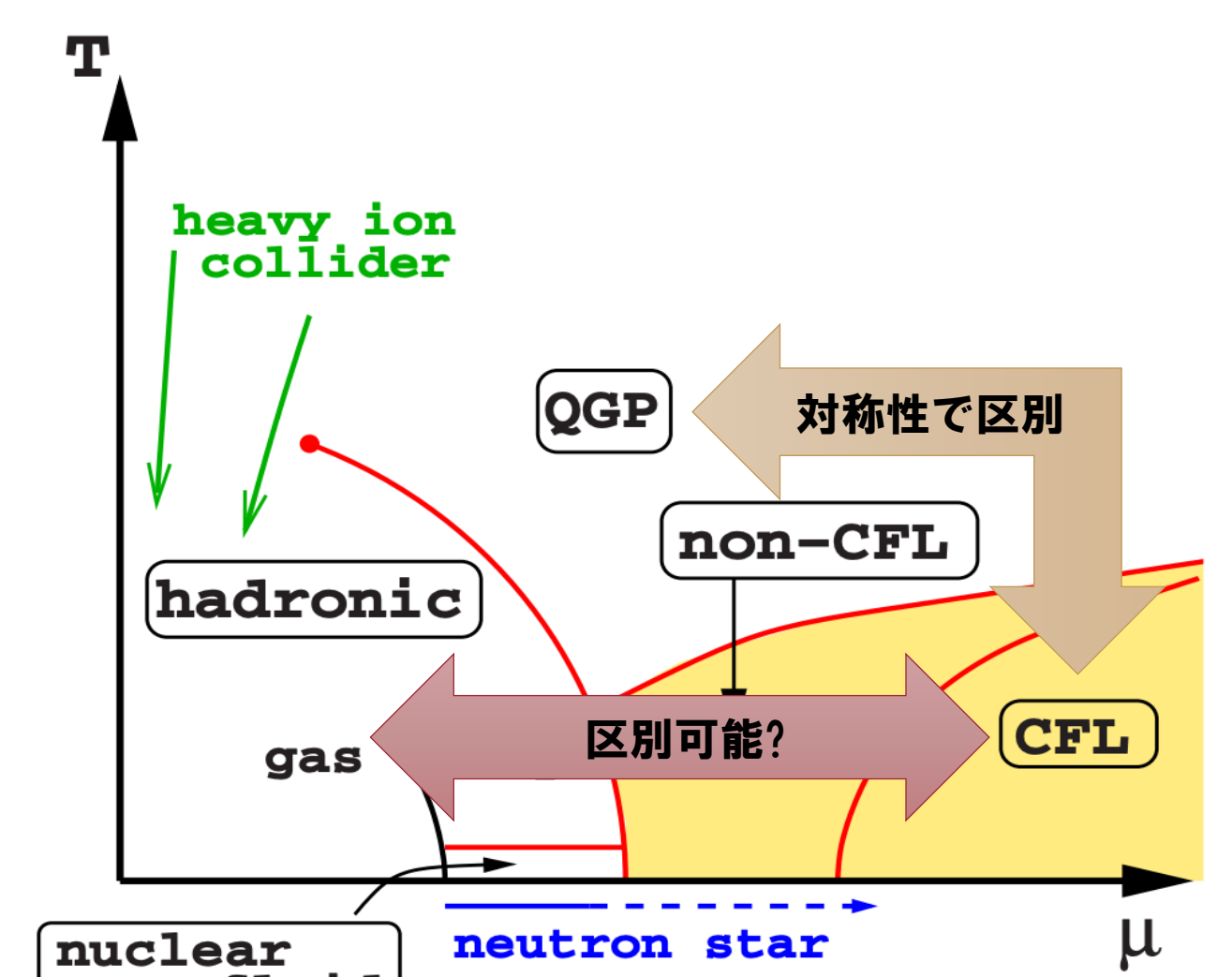
- ハドロン相(χSB相)とCFL相はGlobal対称性が似ている
→QGPよりハドロン相(χSB)に近い[3]

| Phase | Hadron | CFL |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Quark | Confined | Condensed |
| Coupling Constant | Strong | Weak |
| Order Parameter | Chiral Condensate ($\bar{q}q$) | Diquark Condensate (qq) |
| Symmetry | $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B$ → $SU(3)_{L+R} \times U(1)_B$ | $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B$ → $SU(3)_{C+L+R} \times Z_2$ |
| Fermions | 8 baryons | 8+1 quarks |
| Vectors | 8+1 vector mesons | 8 gluons |
| NG Boson | 8 pions ($\bar{q}q$) | 8+1 pions ($\bar{q}q\bar{q}q$) |

アイソスピン対称性の破れから
電荷を考えることができる

- クォーク:8重項と1重項
4個が±1の電荷,残りは中性
- グルーオン:8重項
4個が±1の電荷,残りは中性
- NGボソン:8重項と1重項
4個が±1の電荷,残りは中性

→ クォーク・ハドロン連続性



Reference

- [1] M. Alford. Et al., "Color-flavor locking and chiral symmetry breaking in high density QCD", Nuclear Phys B, Vol.537, No. 1-3, pp. 443-458(1999)
- [2] M. Alford and A. Schmitt, "Color superconductivity in dense quark matter", Rev. Mod. Phys. Vol.80, No 4, pp. 1255-1515 (2008)
- [3] T. Schafer and F. Wilczek, "Continuity of Quark and Hadron Matter", PRL, Vol. 82, No. 20, pp. 3956-3959(1999)

| Phase | Hadron | CFL |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| Quark | Confined | Condensed |
| Coupling Cosntant | Strong | Weak |
| Order Parameter | Chiral Condensate | Diquark Condensate |
| Symmetry | | |
| Fermions | 8 baryons | 8+1 quarks |
| Vectors | 8+1 vector mesons | 8 gluons |
| NG Boson | 8 pions | 8+1 pions |