计算机组织结构

# 6 浮点数运算

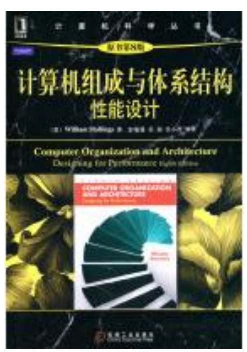
任桐炜

2022年10月18日

南京大学
NANJING UNIVERSITY

# 教材对应章节


第3章 运算方法和运算部件




第9章 计算机算术

# 回顾：IEEE 754浮点数表示

# 回顾：IEEE 754浮点数表示

| | Single Precision (32 bits) | | | | Double Precision (64 bits) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Sign** | **Biased exponent** | **Fraction** | **Value** | **Sign** | **Biased exponent** | **Fraction** | **Value** |
| **positive zero** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **negative zero** | 1 | 0 | 0 | $-0$ | 1 | 0 | 0 | $-0$ |
| **plus infinity** | 0 | 255 (all 1s) | 0 | $\infty$ | 0 | 2047 (all 1s) | 0 | $\infty$ |
| **minus infinity** | 1 | 255 (all 1s) | 0 | $-\infty$ | 1 | 2047 (all 1s) | 0 | $-\infty$ |
| **quiet NaN** | 0 or 1 | 255 (all 1s) | $\neq 0$ | NaN | 0 or 1 | 2047 (all 1s) | $\neq 0$ | NaN |
| **signaling NaN** | 0 or 1 | 255 (all 1s) | $\neq 0$ | NaN | 0 or 1 | 2047 (all 1s) | $\neq 0$ | NaN |
| **positive normalized nonzero** | 0 | $0 < e < 255$ | f | $2^{e-127}(1.f)$ | 0 | $0 < e < 2047$ | f | $2^{e-1023}(1.f)$ |
| **negative normalized nonzero** | 1 | $0 < e < 255$ | f | $-2^{e-127}(1.f)$ | 1 | $0 < e < 2047$ | f | $-2^{e-1023}(1.f)$ |
| **positive denormalized** | 0 | 0 | $f \neq 0$ | $2^{e-126}(0.f)$ | 0 | 0 | $f \neq 0$ | $2^{e-1022}(0.f)$ |
| **negative denormalized** | 1 | 0 | $f \neq 0$ | $-2^{e-126}(0.f)$ | 1 | 0 | $f \neq 0$ | $-2^{e-1022}(0.f)$ |

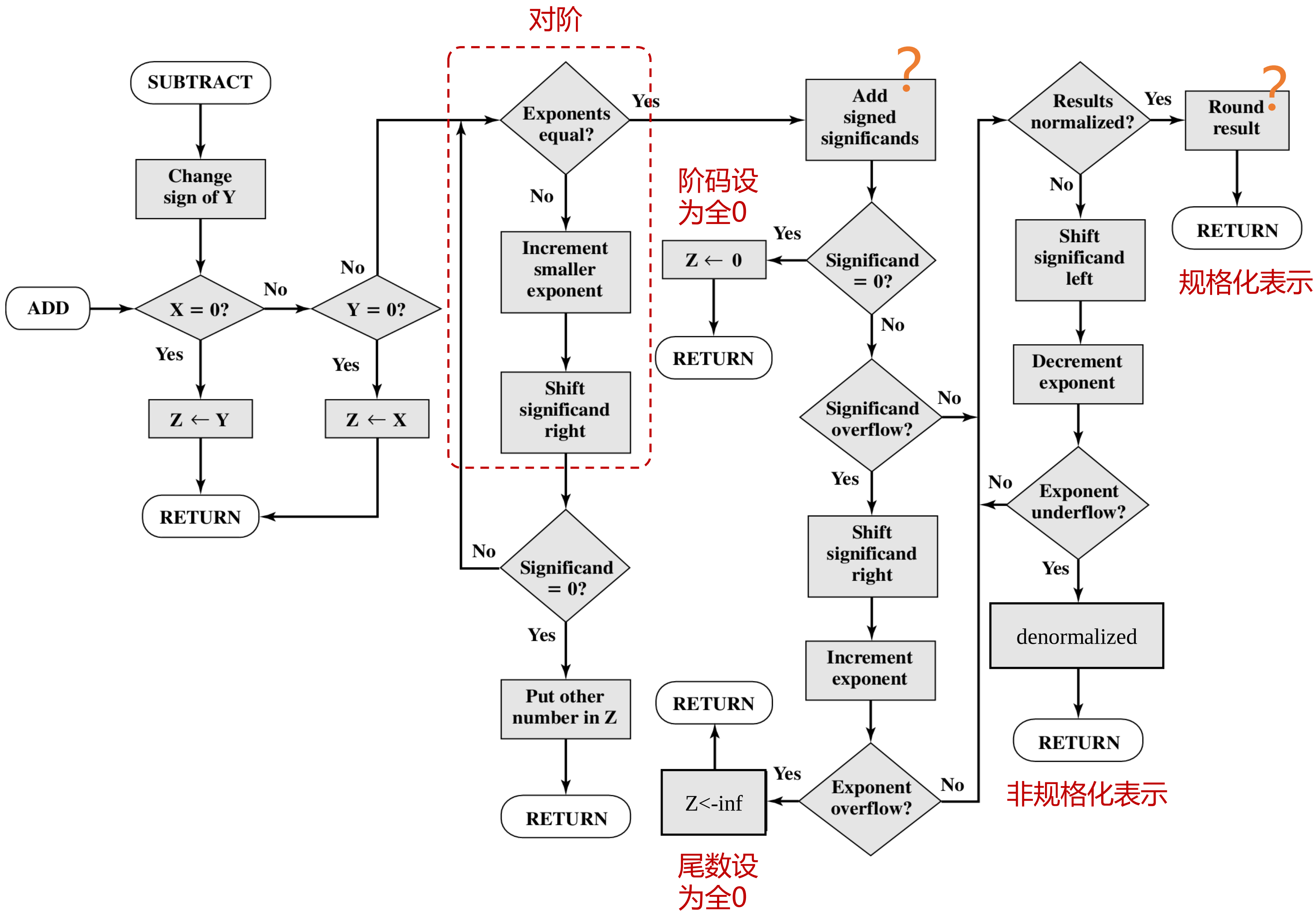
# 加法和减法

- 必须确保两个操作数具有相同的指数值

$$X + Y = (X_S \times B^{X_E - Y_E} + Y_S) \times B^{Y_E}$$
$$X - Y = (X_S \times B^{X_E - Y_E} - Y_S) \times B^{Y_E}$$
$$X_E \leq Y_E$$

- 步骤过程
  - 检查0
  - 对齐有效值
  - 加或减有效值
  - 规格化结果

# 加法和减法（续）



对阶
SUBTRACT
Change sign of Y
ADD
X = 0?
No
Yes
Z ← Y
RETURN
Y = 0?
No
Yes
Z ← X
Exponents equal?
Yes
No
Increment smaller exponent
Shift significand right
Significand = 0?
No
Yes
Put other number in Z
RETURN
Add signed significands
?
阶码设为全0
Z ← 0
RETURN
Significand = 0?
Yes
No
Significand overflow?
No
Yes
Shift significand right
Increment exponent
Exponent overflow?
Yes
No
Z<-inf
RETURN
尾数设为全0
Results normalized?
Yes
No
Round result
?
RETURN
规格化表示
Shift significand left
Decrement exponent
Exponent underflow?
No
Yes
denormalized
RETURN
非规格化表示

# 原码加法

- 如果两个操作数有相同的符号，做加法；否则，做减法
  - 做加法：直接相加
    - 如果最高位有进位，则溢出
    - 符号和被加数（被减数）相同
  - 做减法：加第二个操作数的补数
    - 如果最高位有进位，正确 (符号与被减数相同)
    - 否则，计算它的补码 (符号与被减数相反)

[明鑫, 171250553]

# 原码加法（续）

- 例子

0.8125+0.625 = 1.4375

```
   1101
+  1010
-------
  10111
```

0.4375

0.625-0.8125=-0.1875

```
   1010
+  0011
-------
   1101
    ↓
   0011
```

- 0.1875

0.8125-0.625 = 0.1875

```
   1101
+  0110
-------
  10011
```

+ 0.1875

# 加法和减法（续）

- 例子 (续)

```
0.5 - (-0.4375) = 0.9375
0.5 - (-0.4375) = 0.5 + (+0.4375)

0.5       0 01111110 000…00 (23)

0.4375    0 01111101 110…00 (21)

01111110 - 01111101 = 01111110 + 10000011 = 00000001

      1 0000…00
    + 0 1110…00
    ------------
      1 1110…00

0 01111110 1110…00 (20)
```

[沈佳楠, 121250118]

# 加法和减法（续）

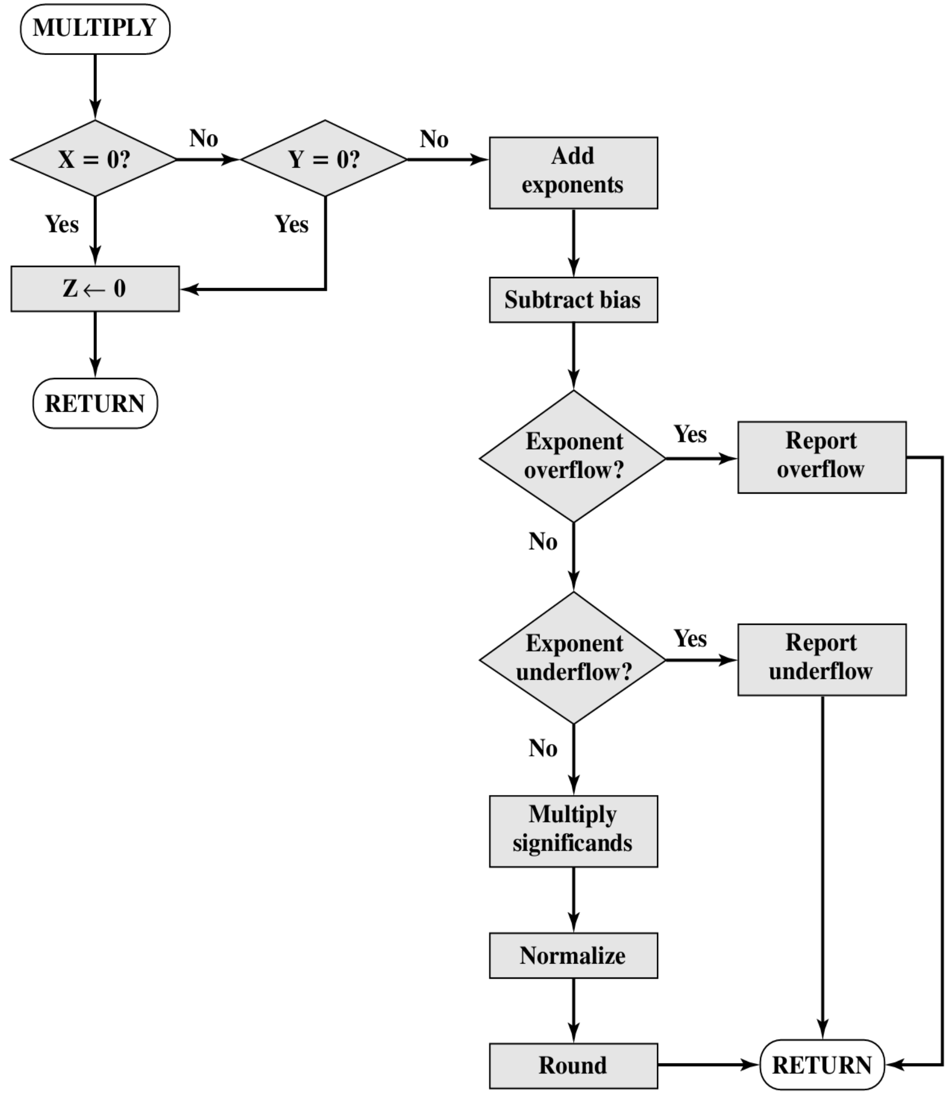
- 例子 (续)

```
0.5 + (-0.4375) = 0.0625
0.5         0 01111110 000…00 (23)
-0.4375     1 01111101 110…00 (21)

01111110 – 01111101 = 01111110 + 10000011 = 00000001

            1 0000…00
          + 1 0010…00
        ---------------
          1 0 0010…00


        0 01111011 000…00 (23)
```

[沈佳楠, 121250118]

# 乘法

- 无论哪个操作数是0，乘积即为0
- 从阶值的和中减去一个偏移量
- 有效值相乘
- 结果的规格化和舍入处理
  - 规格化可能导致阶值下溢



# 乘法（续）

- 例子

$0.5 \times 0.4375 = 0.21875$

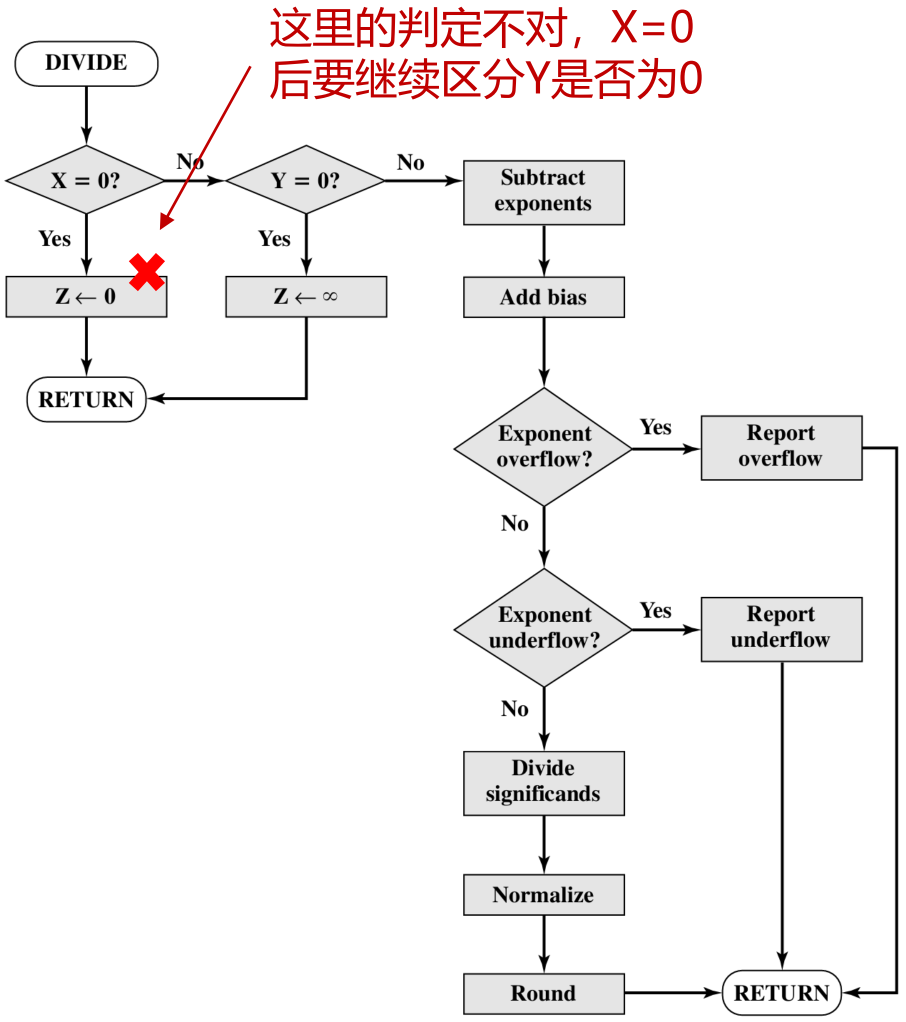
```
   01111110
+  01111101
-----------
   11111011
-  01111111
-----------
   01111100
```

| | | 乘积 | Y |
|---|---|---|---|
| initial | | 0000…00 | 1110…00 |
| 0 | -> | 0000…00 | 01110…0 |
| | | …… | |
| 0 | -> | 0000…00 | 00…0111 |
| 1 | + | 1000…00 | 00…0111 |
| | -> | 0100…00 | 00…0011 |
| 1 | + | 1100…00 | 00…0011 |
| | -> | 0110…00 | 00…0001 |
| 1 | + | 1110…00 | 00…0001 |
| | -> | 0111…00 | 00…0000 |

0 01111100 110…00 (21)

# 除法

- 如果除数为0，则报告出错，或将结果设置为无穷大
- 如果被除数是0，则结果是0
- 被除数的阶值减除数的阶值，加上偏移量
- 有效值相除
- 结果规格化和舍入处理




[张许妍，181250187]

# 除法（续）

除数 1000…00

- 例子

  0.4375/0.5=0.875

```
   01111101
 - 01111110
 ----------
   11111111
 + 01111111
 ----------
   01111110
```

| | | 余数 | 商 | |
|---|---|---|---|---|
| initial | | 1110…00 | 00…0000 | |
| enough | - | 0110…00 | 00…0000 | 1 |
| | <- | 1100…00 | 00…0001 | |
| enough | - | 0100…00 | 00…0001 | 1 |
| | <- | 1000…00 | 00…0011 | |
| enough | - | 0000…00 | 00…0011 | 1 |
| | <- | 0000…00 | 00…0111 | |
| not | | 0000…00 | 00…0111 | 0 |
| | <- | 0000…00 | 0…01110 | |
| | | …… | | |
| not | | 0000…00 | 01110…0 | 0 |
| | <- | 0000…00 | 11100…0 | |

0 01111110 110…00 (21)

# 精度考虑

- 保护位
  - 寄存器的长度几乎总是大于有效值位长与一个隐含位之和
  - 寄存器包含的这些附加位，称为**保护位**
  - 保护位用0填充，用于扩充有效值的右端

$$x = 1.00\ldots00 \times 2^1, y = 1.11\ldots11 \times 2^0$$

$$\begin{array}{rcll}
x & = & 1.000\ldots\ldots00 & \times\ 2^{1} \\
\underline{-y} & = & \underline{0.111\ldots\ldots11} & \times\ 2^{1} \\
z & = & 0.000\ldots\ldots01 & \times\ 2^{1} \\
 & = & 1.000\ldots\ldots00 & \times\ 2^{-22}
\end{array}$$

不使用保护位

$$\begin{array}{rcll}
x & = & 1.000\ldots\ldots00\ 0000 & \times\ 2^{1} \\
\underline{-y} & = & \underline{0.111\ldots\ldots11\ 1000} & \times\ 2^{1} \\
z & = & 0.000\ldots\ldots00\ 1000 & \times\ 2^{1} \\
 & = & 1.000\ldots\ldots00\ 0000 & \times\ 2^{-23}
\end{array}$$

使用保护位

# 精度考虑（续）

- 舍入
  - 对有效值操作的结果通常保存在更长的寄存器中
  - 当结果转换回浮点格式时，必须要去掉多余的位
    - 就近舍入：结果被舍入成最近的可表示的数
    - 朝+∞舍入：结果朝正无穷大方向向上舍入
    - 朝−∞舍入：结果朝负无穷大方向向下舍入
    - 朝 0 舍入：结果朝 0 舍入

# 精度考虑（续）

- 例子
  - 假设用16位表示一个浮点数，其中1位为符号，9位为有效值，6位为阶值（偏移量为31）
  - 代表 652.13 和 -7.48

| | | |
|---|---|---|
| +652.13 | 0 101000 010001100 | + 652.0 |
| -7.48 | 1 100001 110111101 | - 7.4765625 |

# 精度考虑（续）

- 例子 (续)
  - 假设 ALU 有 16 位，分别用使用保护位和不使用保护位的方法计算下面式子
    - 652.13 + (-7.48)
    - 652.13 -(-7.48)

# 精度考虑（续）

- 例子 (续)：652.13 + (-7.48)
  = (+652.0)+(-7.4765625)=644.523438

101000 – 100001 = 000111

```
    1 010001100
 -  0 000000111
 ---------------
    1 010000101
```

```
    1 010001100 000000
 -  0 000000111 011110
 ----------------------
    1 010000100 100010
```

0 101000 010000101

645.0

0 101000 010000101

645.0　　就近/朝+∞舍入

0 101000 010000100

644.0　　朝−∞/朝0舍入

# 精度考虑（续）

- 例子 (续)：652.13 - (-7.48) =
  (+652.0)-(-7.4765625)=659.4765625

101000 – 100001 = 000111

```
   1 010001100
+  0 000000111
--------------
   1 010010011
```

```
   1 010001100 000000
+  0 000000111 011110
---------------------
   1 010010011 011110
```

0 101000 010010011

659.0

0 101000 010010011

659.0 就近/朝−∞/朝0舍入

0 101000 010010100

660.0 朝+∞舍入

# 总结

- 浮点算数运算
  - 加法
  - 减法
  - 乘法
  - 除法
- 精度考虑

# 谢谢

rentw@nju.edu.cn