

Morphologie mathématique

- Chapitre 5 –

Ligne de partage des eaux (watershed transform)

Christophe Ducottet
d'après les diapositives de Cécile Barat

Introduction

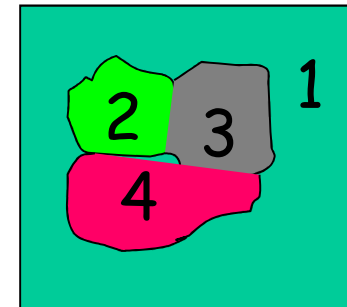
Ligne de Partage des Eaux (LPE)

⇒ Outil de segmentation

Segmentation ?

Une segmentation est une partition R_1, R_2, \dots, R_n telle que:

- $\cup R_i = I$
- $R_i \cap R_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
- $H(R_i) = \text{VRAI} \quad \forall i$
- $H(R_i \cup R_j) = \text{FAUX} \quad \forall i \neq j \quad R_i \text{ adjacente à } R_j$



H : fonction qui évalue la similarité entre pixels d'une région

$H(R)$ – homogénéité de la région R

intensité moyenne, variance, couleur,

texture, taille, mouvement, profondeur

Introduction

3 approches pour la segmentation :

- **Approches globales**

 - Histogrammes

- **Approches régions**

 - Croissance de régions

 - Division-fusion (split and merge)

 - Classification statistique

- **Approches contours**

 - Détection de contours

 - Contours actifs

Ligne de partage des eaux



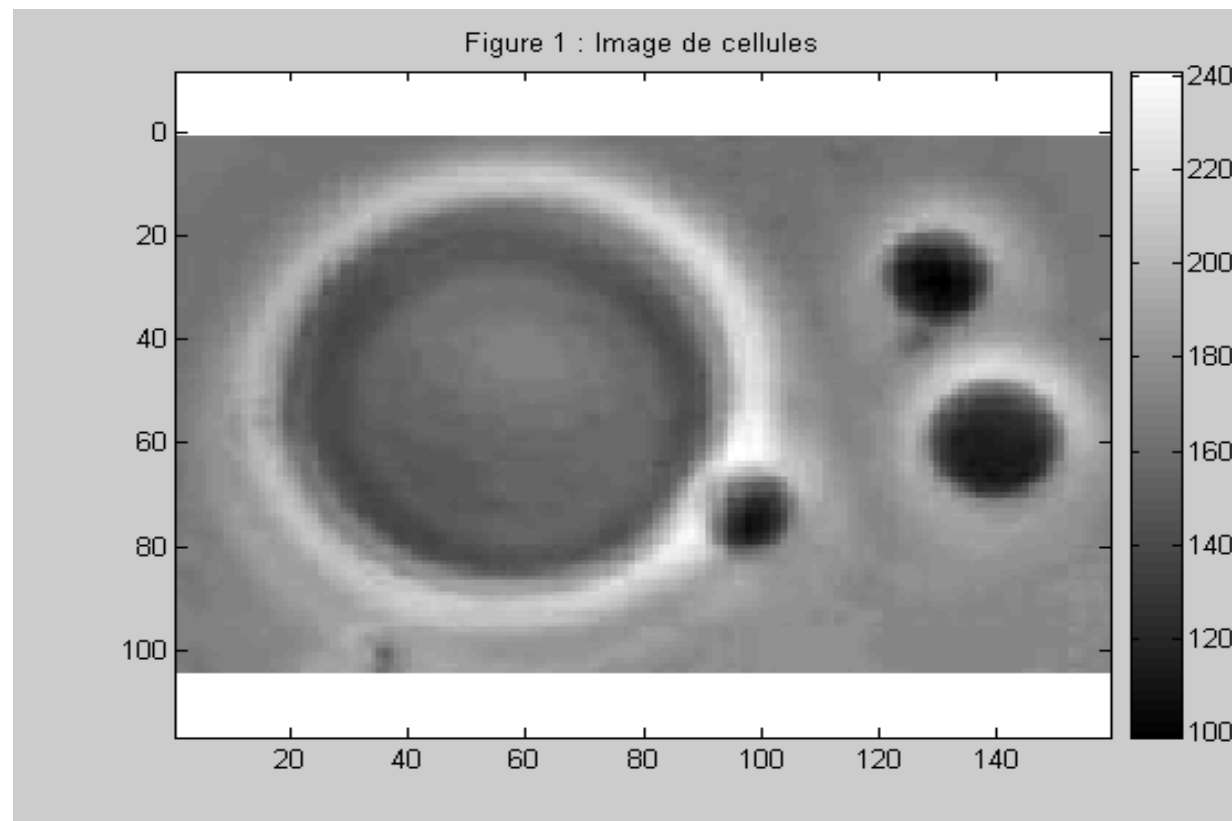
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

Plan du cours

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications de la LPE
4. LPE par filtrage
5. LPE sous contraintes

Caractère topographique d'une image

Image interprétée comme une surface topographique
➔ niveau de gris = altitude



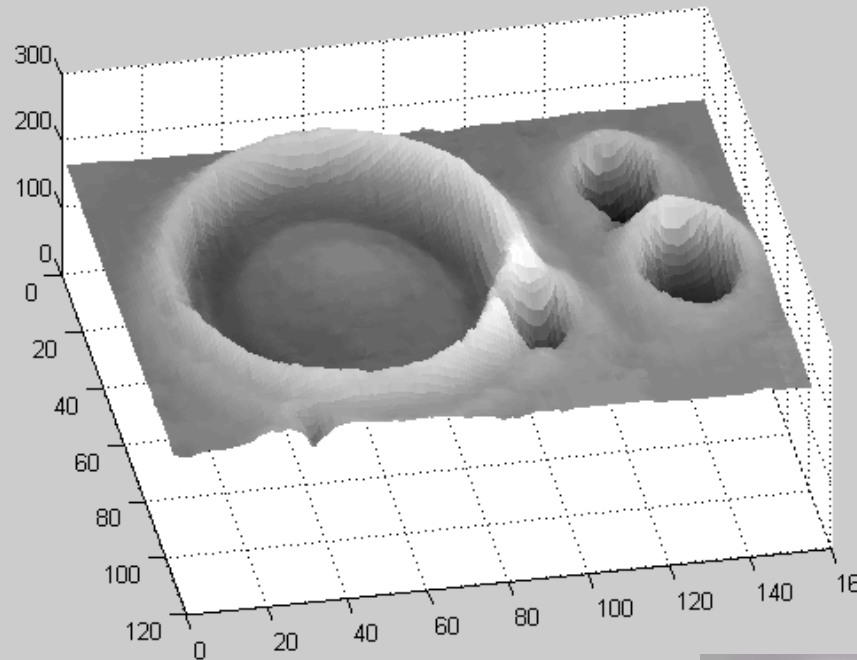
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

1.1. Caractère topographique d'une image

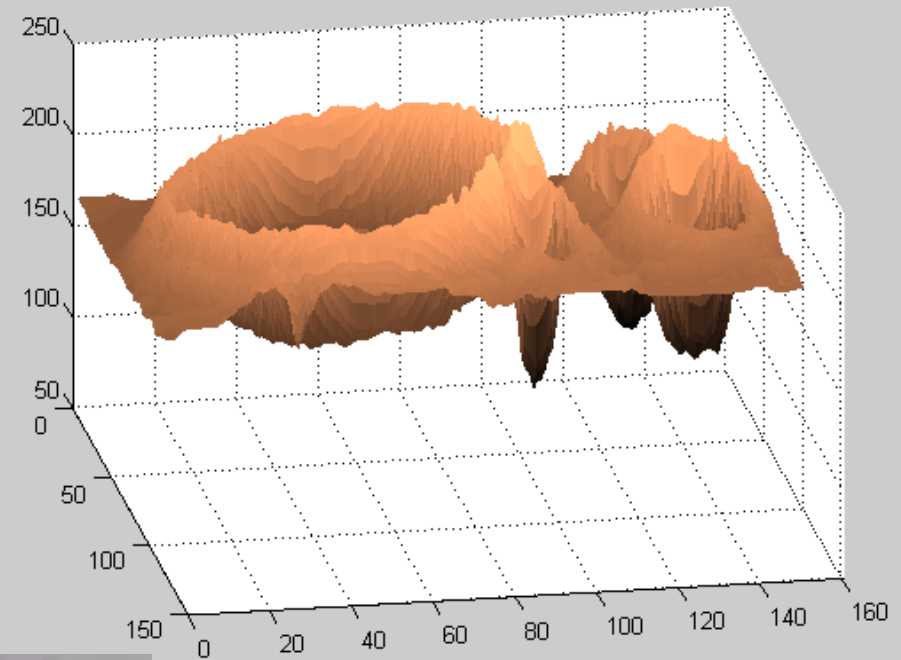
Caractère topographique d'une image

Figure 2 : Surface associée à cells3.bmp



1ère vue 3D

Figure 3 : Surface associée à cells3.bmp : seconde vue



2ème vue 3D



➔ Analogie image / relief justifie interprétation et terminologie de l'algorithme de LPE

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

- 1.1. Caractère topographique d'une image
- 1.2. Construction par inondation

Construction par inondation

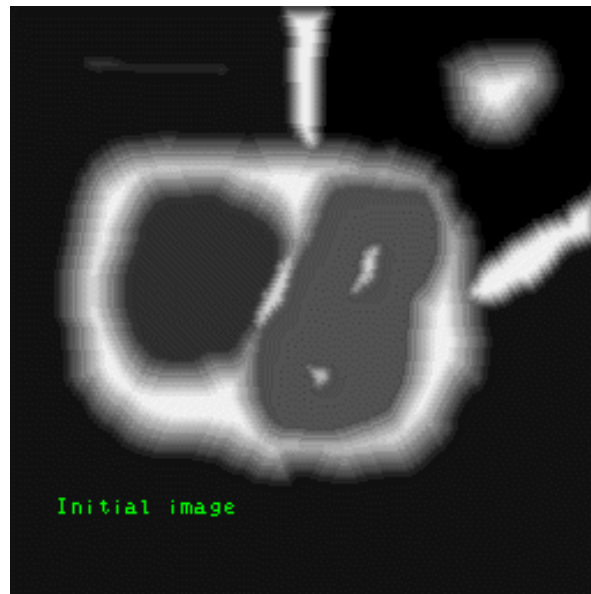


Image initiale



Image topographique

(S.Beucher)

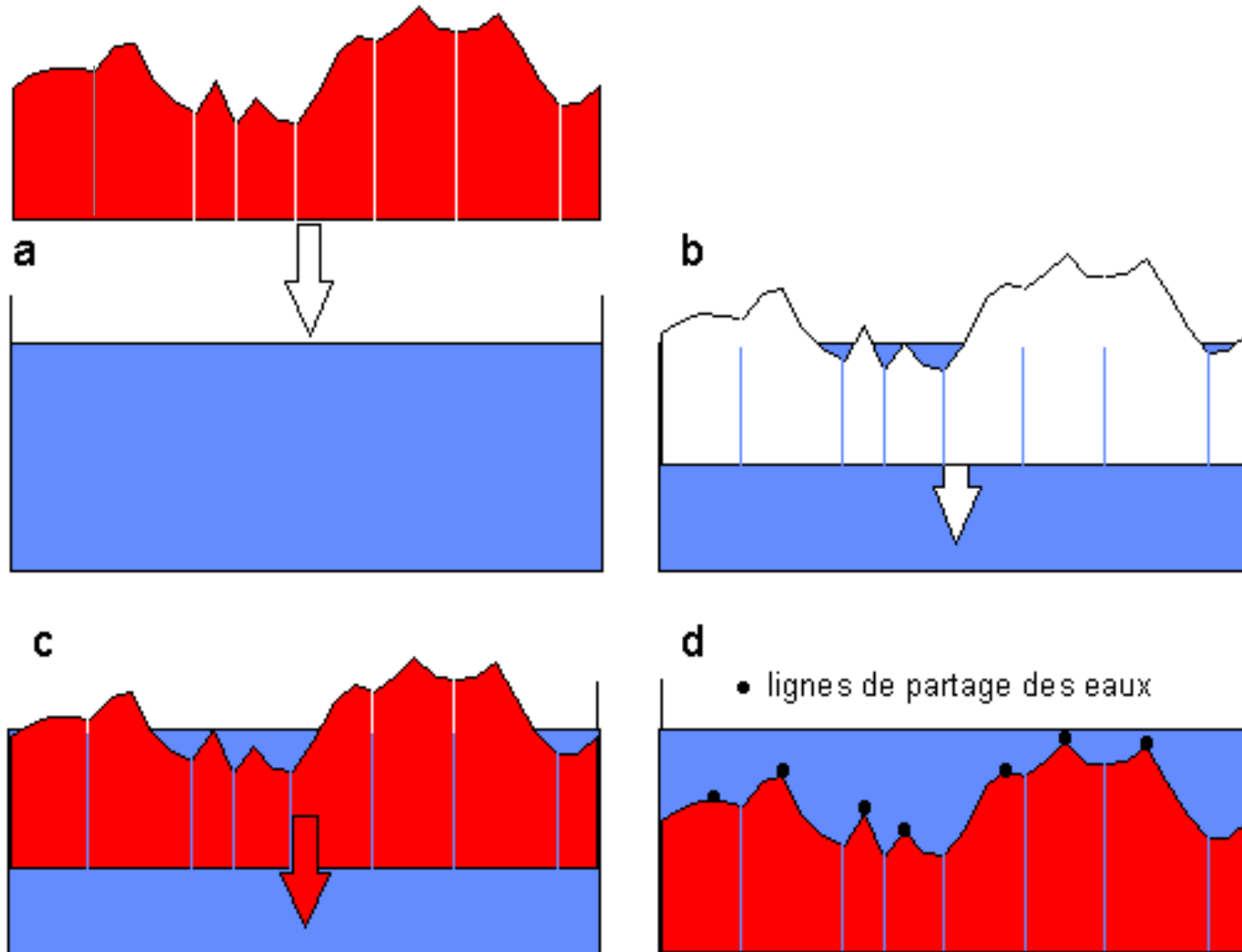
On inonde cette surface à partir de ses minima,
et on empêche les eaux provenant de deux sources de se
mélanger ...

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

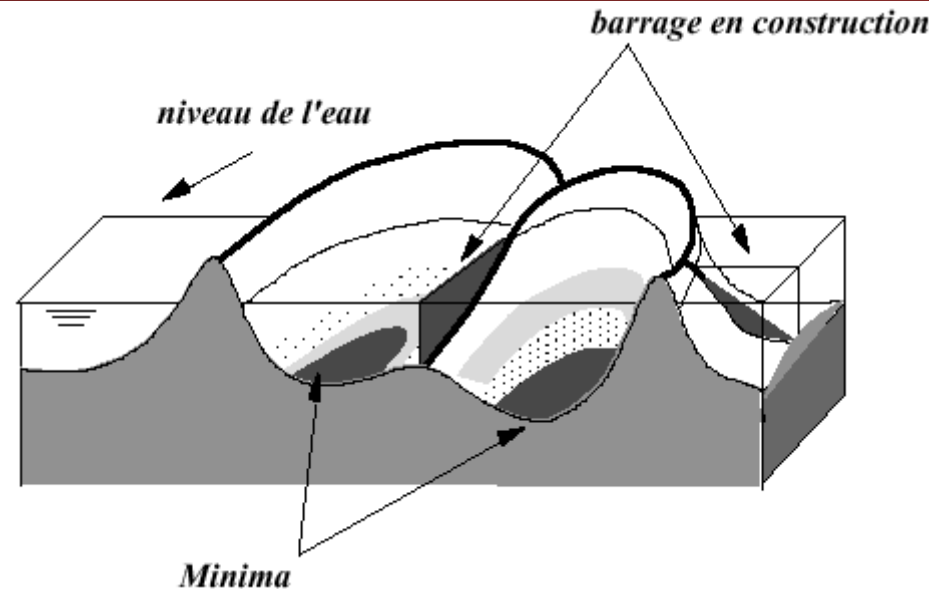
- 1.1. Caractère topographique d'une image
- 1.2. Construction par inondation

Construction par inondation (1D)



(Ressources ENST)

Etapes de construction par inondation



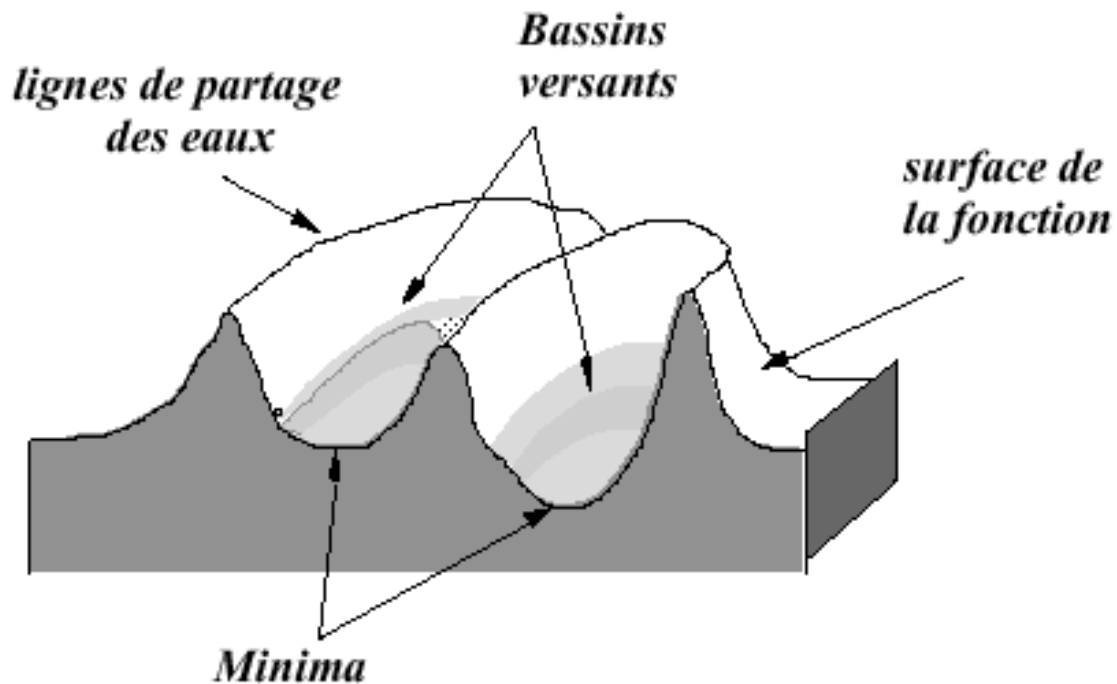
(S.Beucher)

- L'eau jaillit de chaque minimum
- La surface est progressivement inondée par ces sources : remplissage des **bassins versants**
- Pour empêcher le mélange des eaux provenant de minima différents : construction de **barrages** en chaque point de contact.
- L'eau continue de s'élever.
- A la fin, ne restent que les digues achevées entourées d'eau,

Etapes de construction par inondation

Résultat de la LPE : **partition** de l'image en :

- **lignes de partage des eaux** = barrages
- **bassins versants** (régions uniformes)



(Cours S.Beucher)

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

1.1. Caractère topographique d'une image

1.2. Construction par inondation

Construction par inondation (2D)

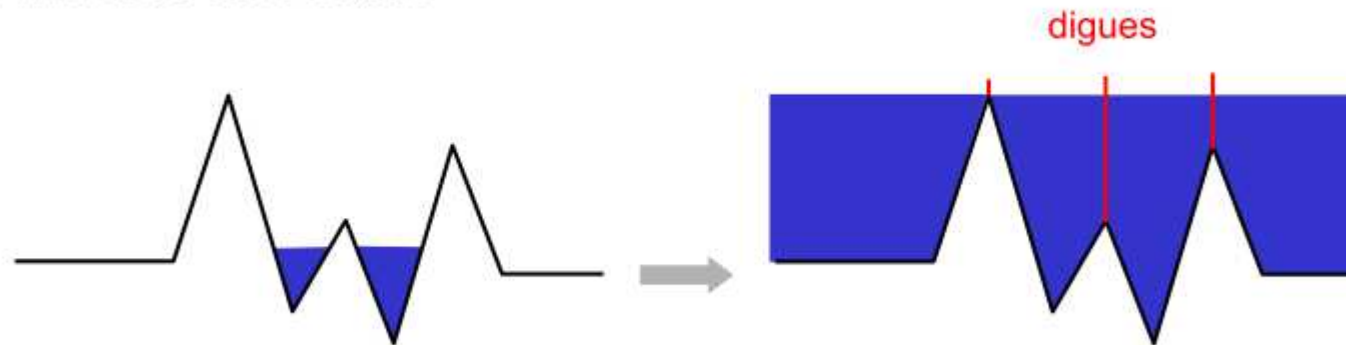


(S.Beucher)

- ... on partitionne l'image en deux ensembles :
- les bassins versants
 - les lignes de partage des eaux (barrages)

2 classes d'algorithmes

- Par montée des eaux



- Par amincissement homotopique



1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

- 1.1. Caractère topographique d'une image
- 1.2. Construction par inondation
- 1.3. Étapes de la construction

Plan du cours

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications de la LPE
4. LPE par filtrage
5. LPE sous contraintes

Notions utiles et notations

Transfo. MINR_h + $\text{BV}(M)$ + SKIZ géodésique



Algorithme de LPE

MINR_h : minima régionaux d'élévation h

$\text{BV}(M)$: bassin versant associé au minimum M

SKIZ : squelette par zone d'influence géodésique

h_{\min} et h_{\max} valeurs minimales et maximales de l'image

Notions utiles et notations

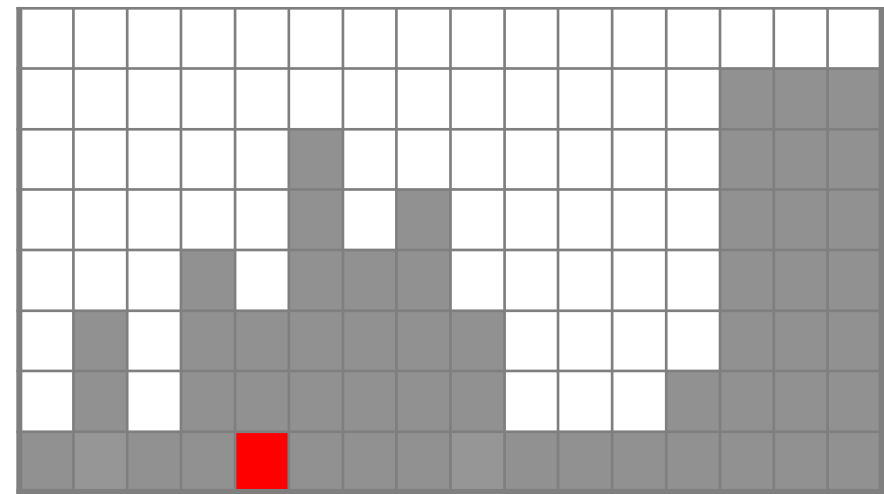
MINR_h ensemble des points appartenant au minima régional d'élévation h .

$$\begin{aligned}\text{MINR}_h(f) &= \text{MINR}(f) \cap T_h(f) \\ &= (R_f^\epsilon(f+1) - f) \cap T_h(f)\end{aligned}$$

T_h : opérateur de seuillage au niveau $= h$



- Reconstruction par érosion
- Minima régionaux
- T_3



— $\text{MINR} \cap T_3$

Notions utiles et notations

$BV(M)$: bassin versant associé au minimum M .

- Notons $BV_h(M)$ les points de ce bassin versant ayant une altitude inférieure ou égale à h :

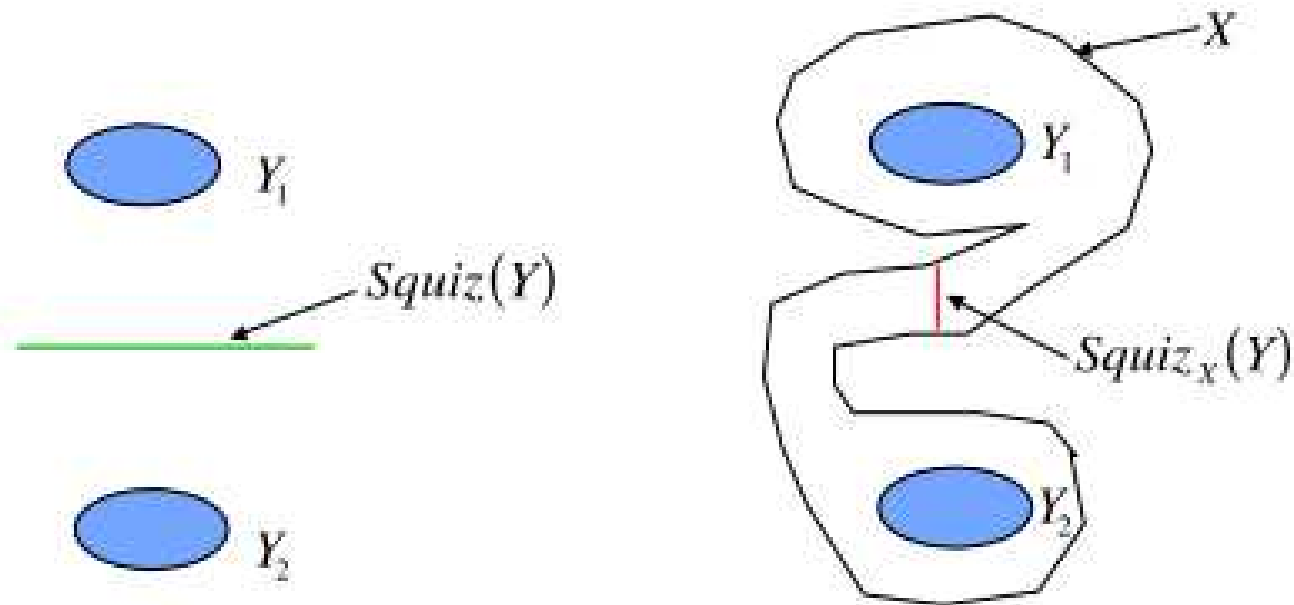
$$BV_h(M) = \{p \in BV(M) \mid f(p) \leq h\} = BV(M) \cap T_{t \leq h}(f)$$

- Notons X_h le sous-ensemble de tous les bassins versants ayant une valeur inférieure ou égale à h :

$$X_h = \bigcup_i BV_h(M_i)$$

Notions utiles et notations

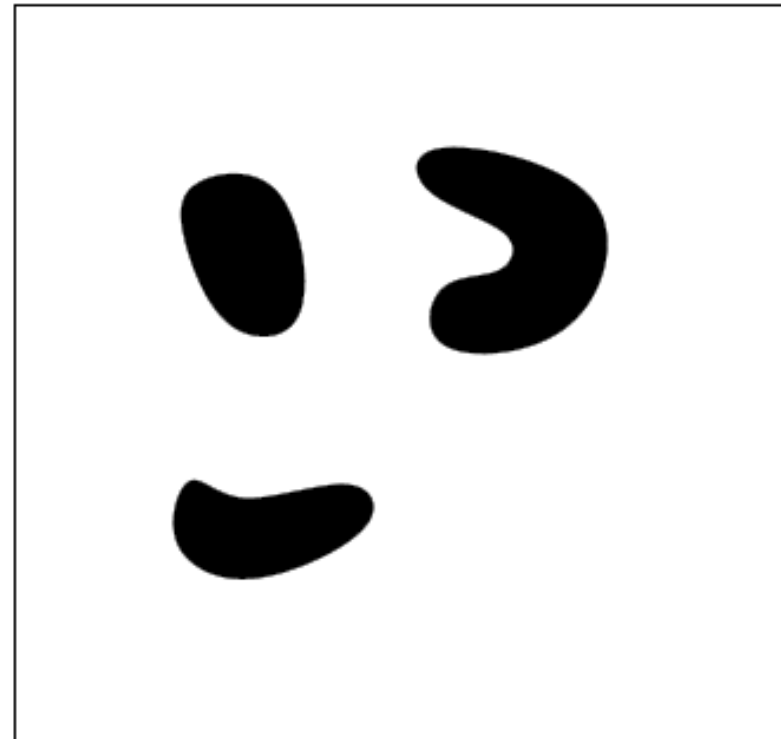
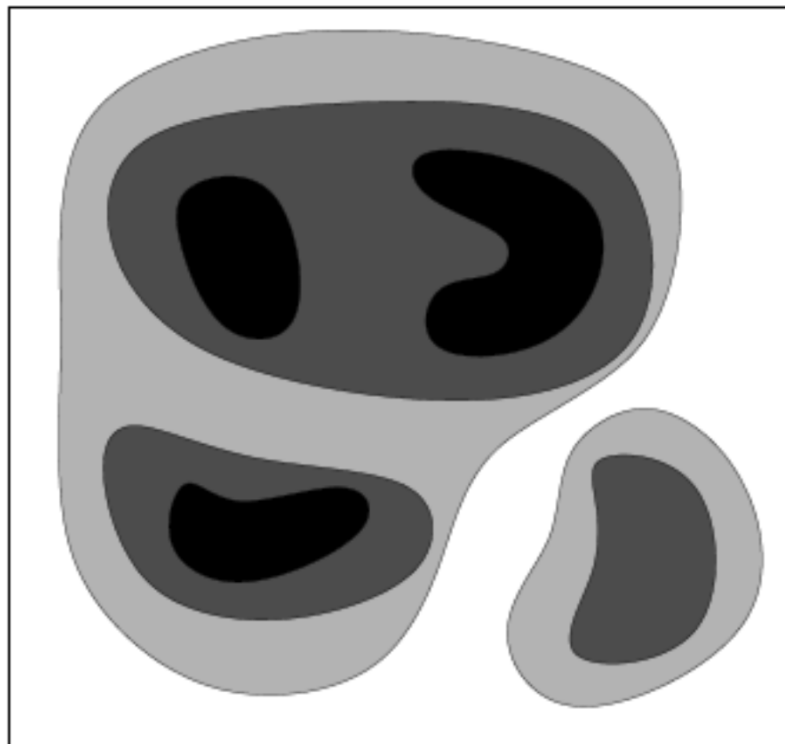
SKIZ géodésique



Algorithme

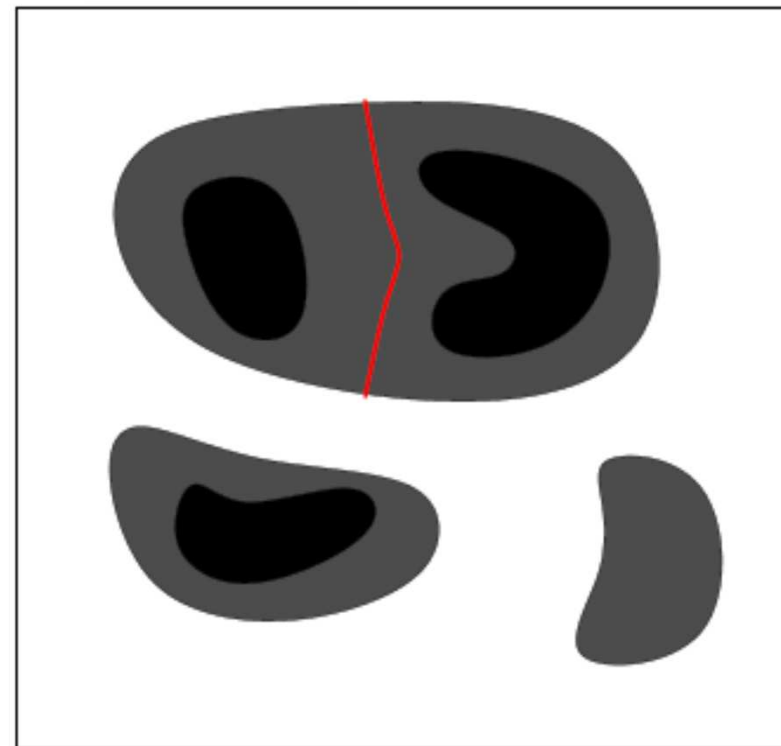
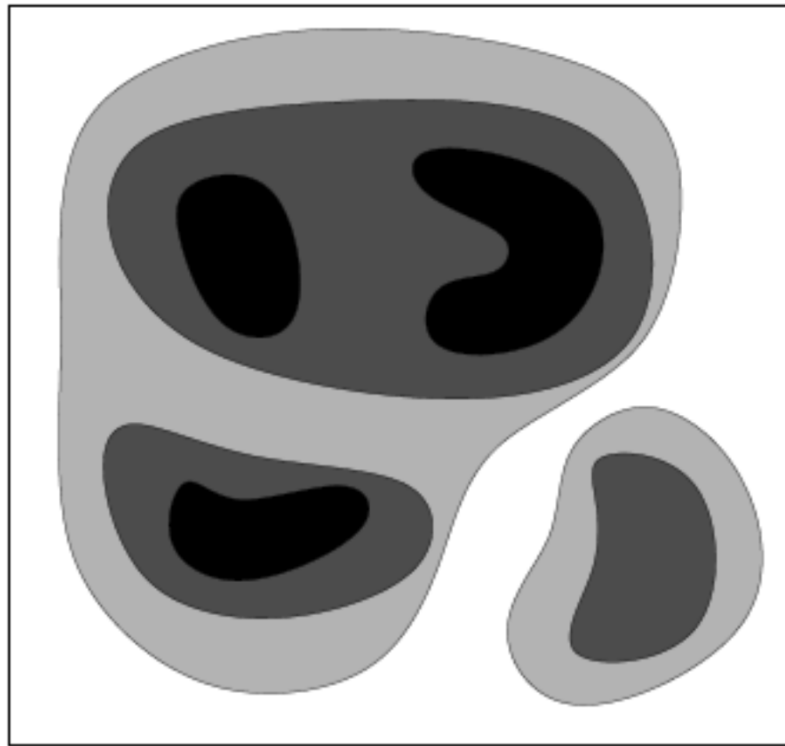
Les bassins versants se remplissent progressivement

→ premiers points atteints
= points appartenant aux minima régionaux de niveau h_{\min}
= ensemble $X_{h_{\min}} = MINR_{h_{\min}}(f)$



Algorithme

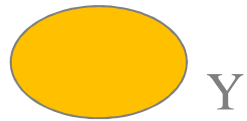
- inondation jusqu'au niveau $h_{\min} + 1$
- soit l'eau s'étend dans les bassins déjà atteints
 - soit elle commence d'inonder les BV de min égaux à $h_{\min} + 1$
- Appelons Y une composante connexe de $T_{t \leq h_{\min} + 1}(f)$



3 types possibles d'intersection entre Y et $X_{h_{\min} + 1}$

Algorithme

- a) $Y \cap X_{h_{\min}} = \emptyset$ (= Composante connexe de Y ne contenant aucune composante de $X_{h_{\min}}$)

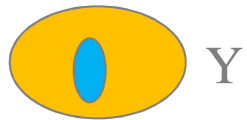


Y est un nouveau minimum régional de f au niveau $h_{\min} + 1$

L'ensemble de tous les minima au niveau $h_{\min} + 1$

défini par $MINR_{h_{\min}+1}(f)$, permet de définir $X_{h_{\min}+1}$.

- b) $Y \cap X_{h_{\min}} \neq \emptyset$ et est connecté.



Y correspond aux pixels appartenant au bassin versant associé au minimum $Y \cap X_{h_{\min}}$ et ayant un niveau de gris inférieur ou égal à $h_{\min} + 1$

$$Y = BV_{h_{\min}+1}(Y \cap X_{h_{\min}}) = IZ_Y(Y \cap X_{h_{\min}})$$

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

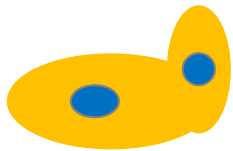
4. LPE sous contraintes

2.1. Notions utiles et notations

2.2. Algorithme

Algorithme

c) $Y \cap X_{h_{\min}} \neq \emptyset$ et est non-connecté.



Y contient plus d'un minimum de f du niveau h_{\min}

Appelons Z_1, Z_2, Z_3 , etc.. ces minima.

Meilleure approximation du BV à ce niveau pour un Z_i

$$BV_{h_{\min}+1}(Z_i) = IZ_Y(Z_i)$$

Algorithme

- cas b) et c) = cas d'expansion de l'eau dans des bassins déjà atteints par l'eau.
- Expansion totale modélisée par une unique équation :

$$X_{h_{\min}+1} = MINR_{h_{\min}+1}(f) \cup IZ_{T_{t \leq h_{\min}+1}(f)}(X_{h_{\min}})$$

C'est l'union des nouveaux minima régionaux avec les zones d'influence géodésiques.

- Cette récursivité tient pour tous les niveaux h.

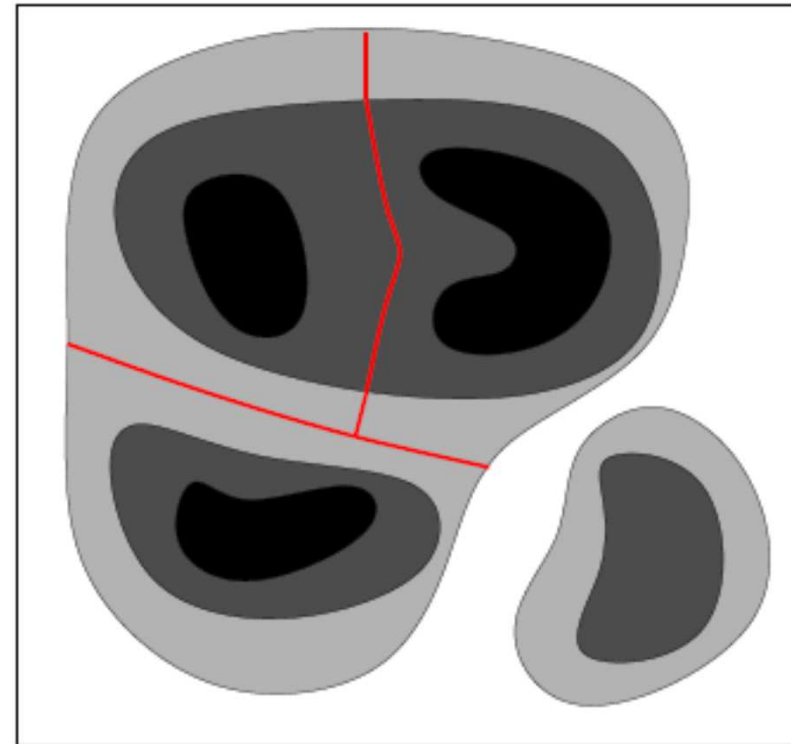
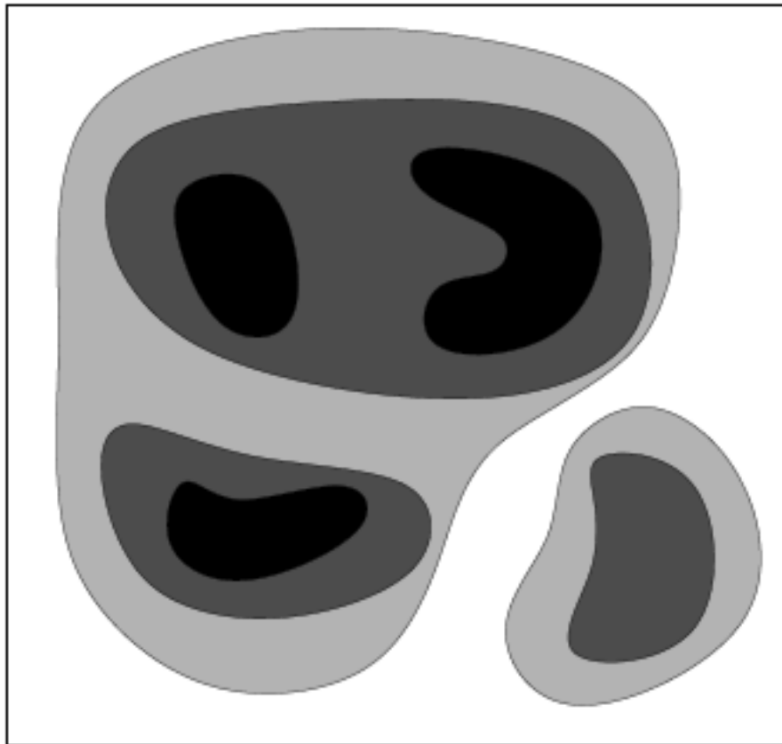
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

2.1. Notions utiles et notations

2.2. Algorithme

Algorithme



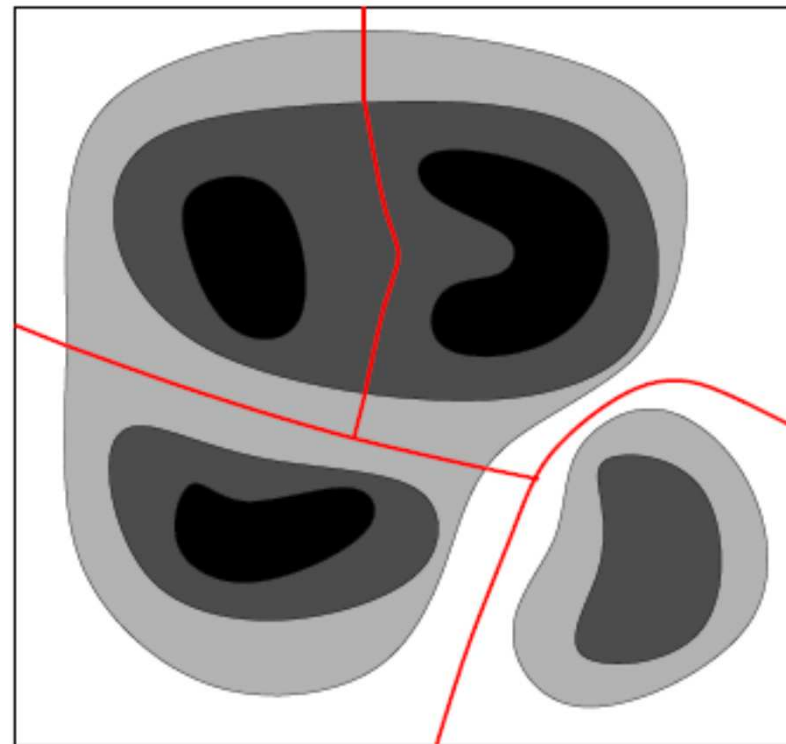
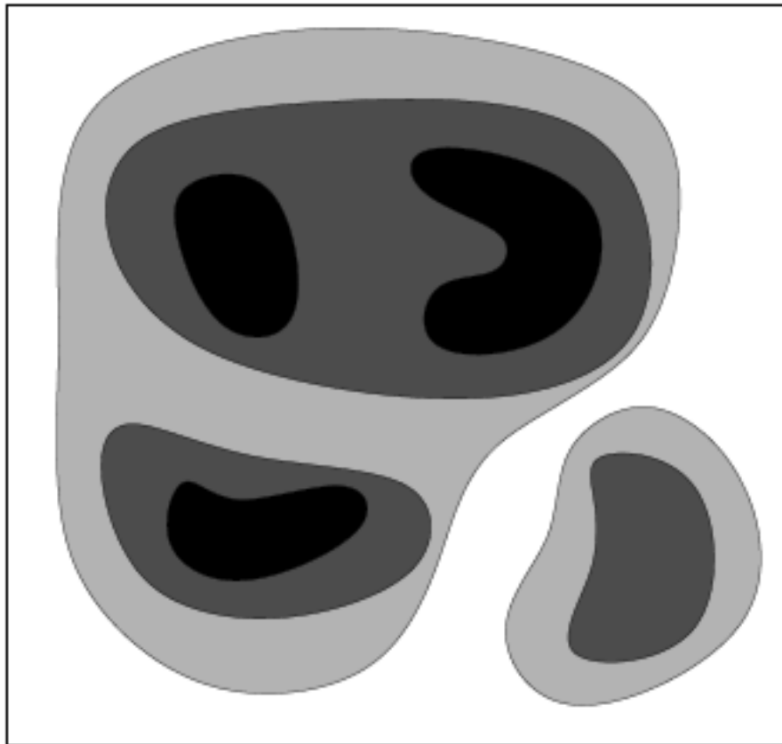
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

2.1. Notions utiles et notations

2.2. Algorithme

Algorithme



Algorithme

Résultat : l'ensemble des bassins versants d'une image f est égal à $X_{h_{\max}}$, une fois que tous les niveaux ont été remplis.

$$(i) X_{h_{\min}} = T_{h_{\min}}(f)$$

$$(ii) \forall h \in [h_{\min}, h_{\max} - 1], X_{h+1} = RMIN_{h+1}(f) \cup IZ_{T_{\leq h+1}(f)}(X_h)$$

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

- 2.1. Notions utiles et notations
- 2.2. Algorithme
- 2.3. Exemple simple

Exemple simple

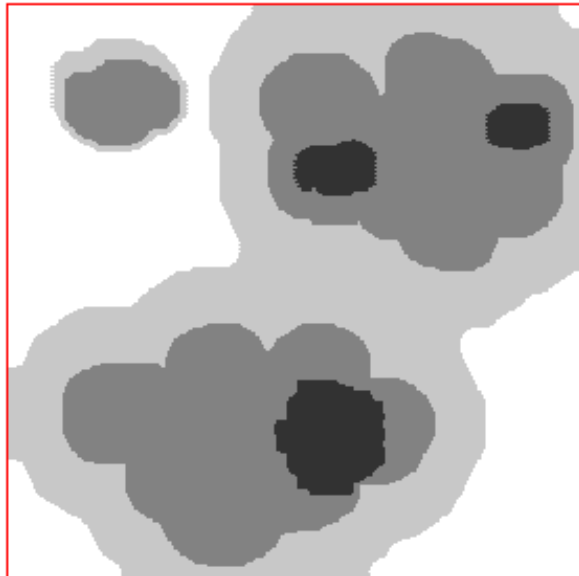
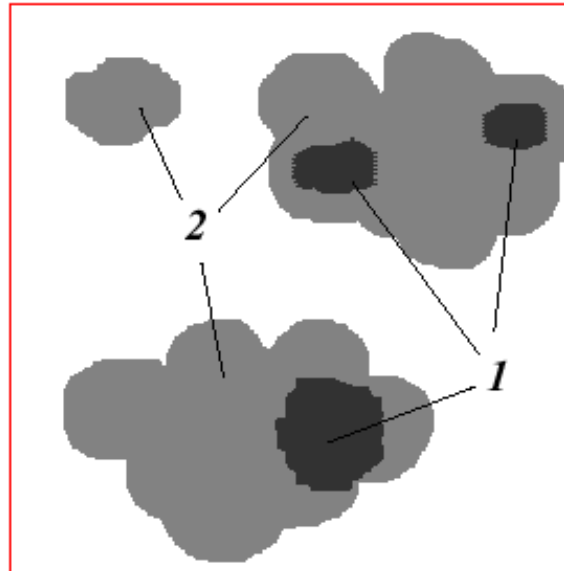


Image initiale.



*Minima (1), et
niveau suivant (2).*



*Skiz géodésique
de (1) dans (2)
(en trait blanc).*

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

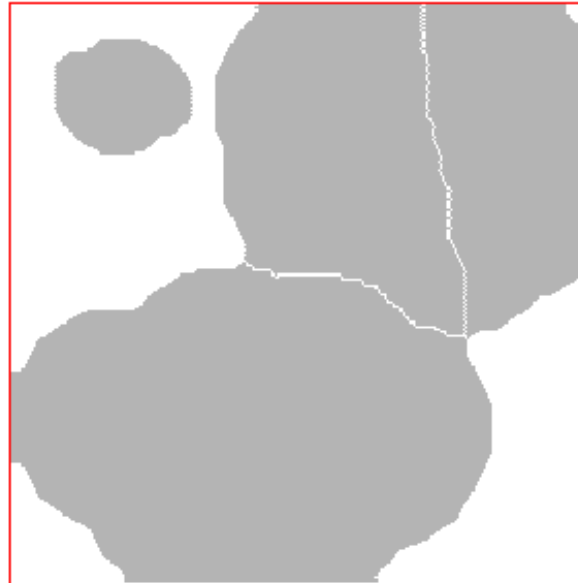
4. LPE sous contraintes

- 2.1. Notions utiles et notations
- 2.2. Algorithme
- 2.3. Exemple simple

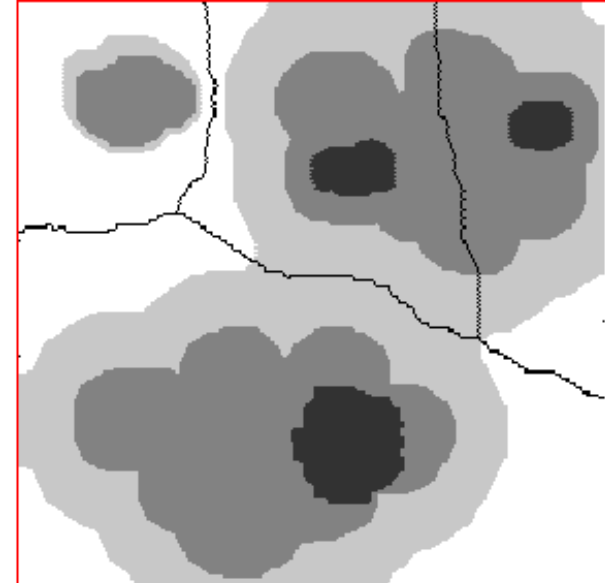
Exemple simple



*Niveau (2), diminué
du premier skiz,
et niveau (3).*



*Deuxième skiz
(on notera qu' il
prolonge le premier).*



*L.P.E. finale
(le résultat est significatif
malgré le faible nombre
de niveaux).*

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

- 2.1. Notions utiles et notations
- 2.2. Algorithme
- 2.3. Exemple simple

Plan du cours

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications de la LPE
4. LPE par filtrage
5. LPE sous contraintes

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

3.1. Segmentation

Applications

Segmentation :

identification des zones homogènes de l'image

Séparation d'objets

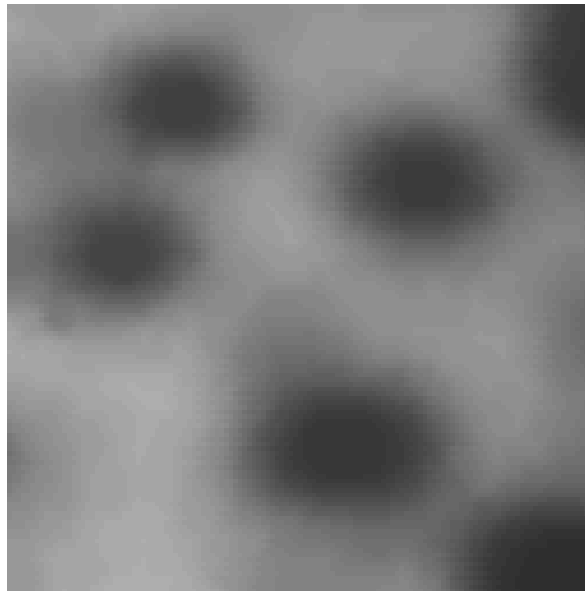
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

3.1. Segmentation

Segmentation par LPE

Problème : segmentation des tâches noires



Démarche ?

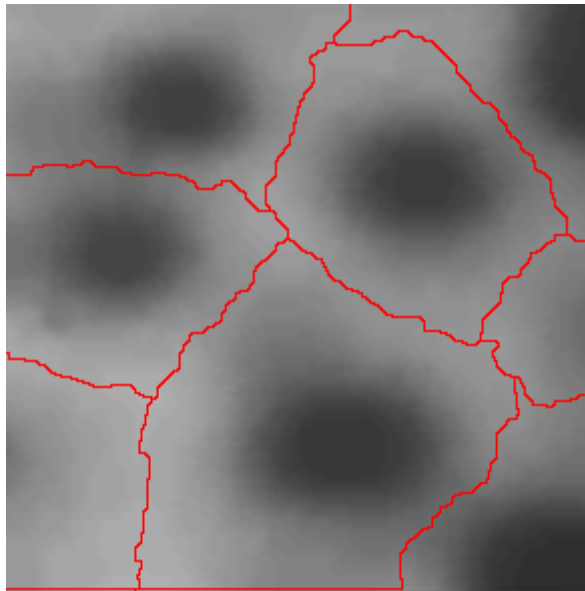
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

3.1. Segmentation

Segmentation par LPE

LPE de l'image



Comment segmenter plus précisément ?

Segmentation par LPE

LPE : remplissage des « bassins » de la fonction de gris



La limite des bassins doit correspondre aux bords de l'objet : il faut calculer le gradient de l'image
(par exemple, gradient morphologique)



souvent : LPE sur l'image gradient plutôt que sur l'image originale (afin de segmenter les objets)

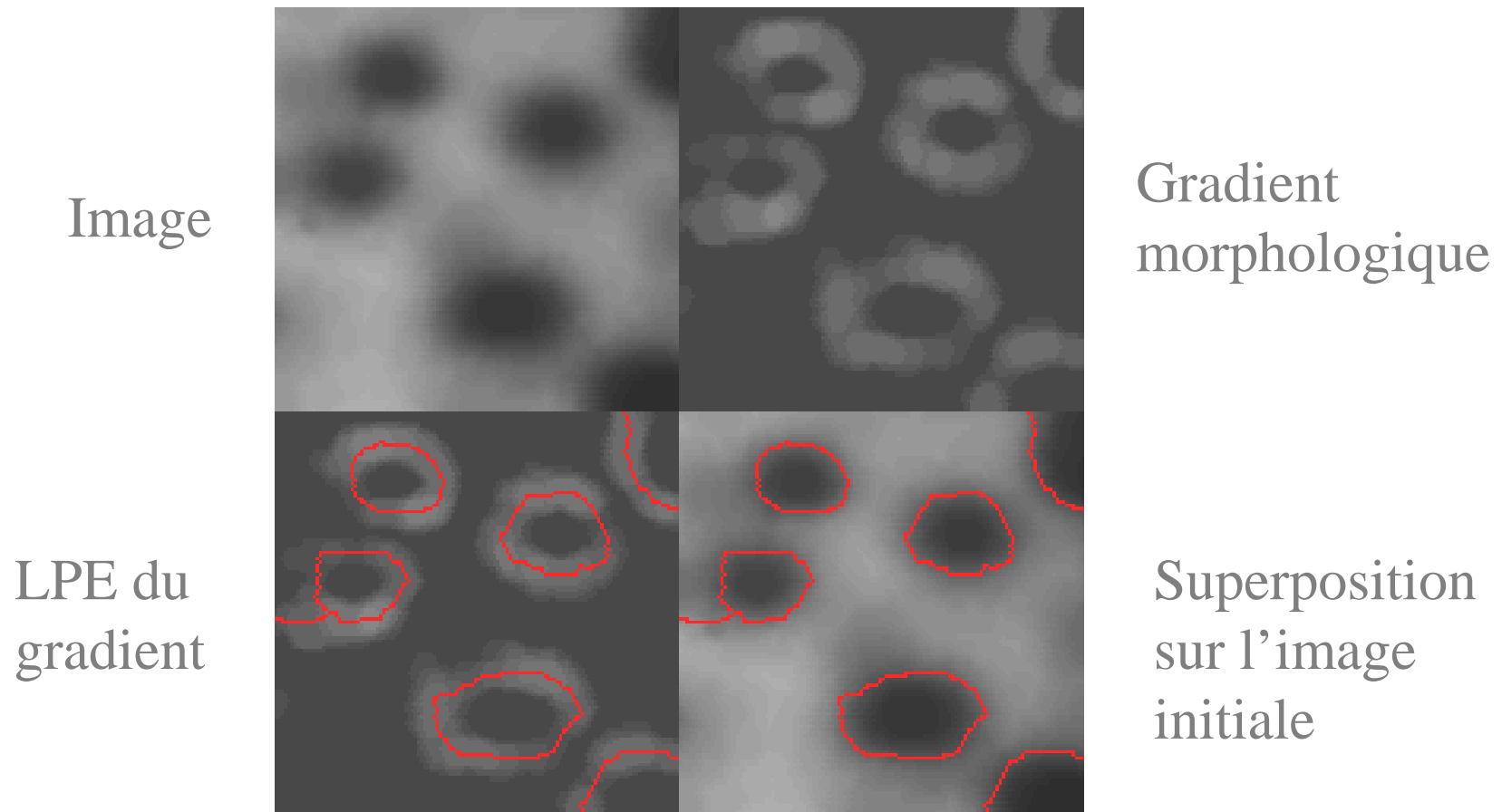
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

3.1. Segmentation

Segmentation par LPE

Résultats: segmentation des tâches noires



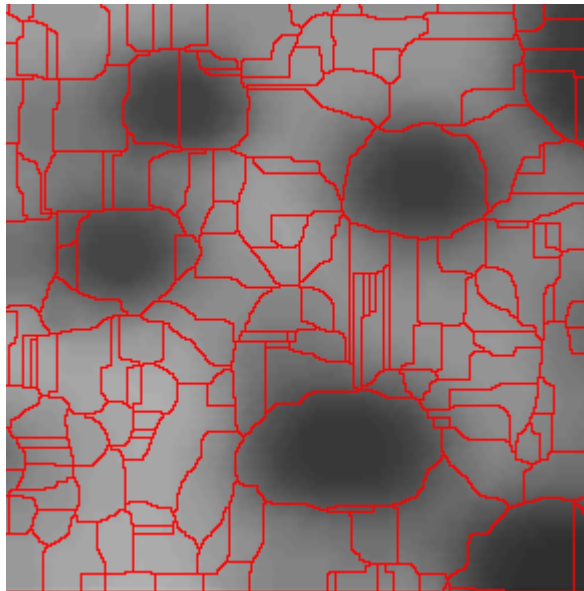
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

3.1. Segmentation

Segmentation par LPE

Résultats sans prétraiter le gradient :



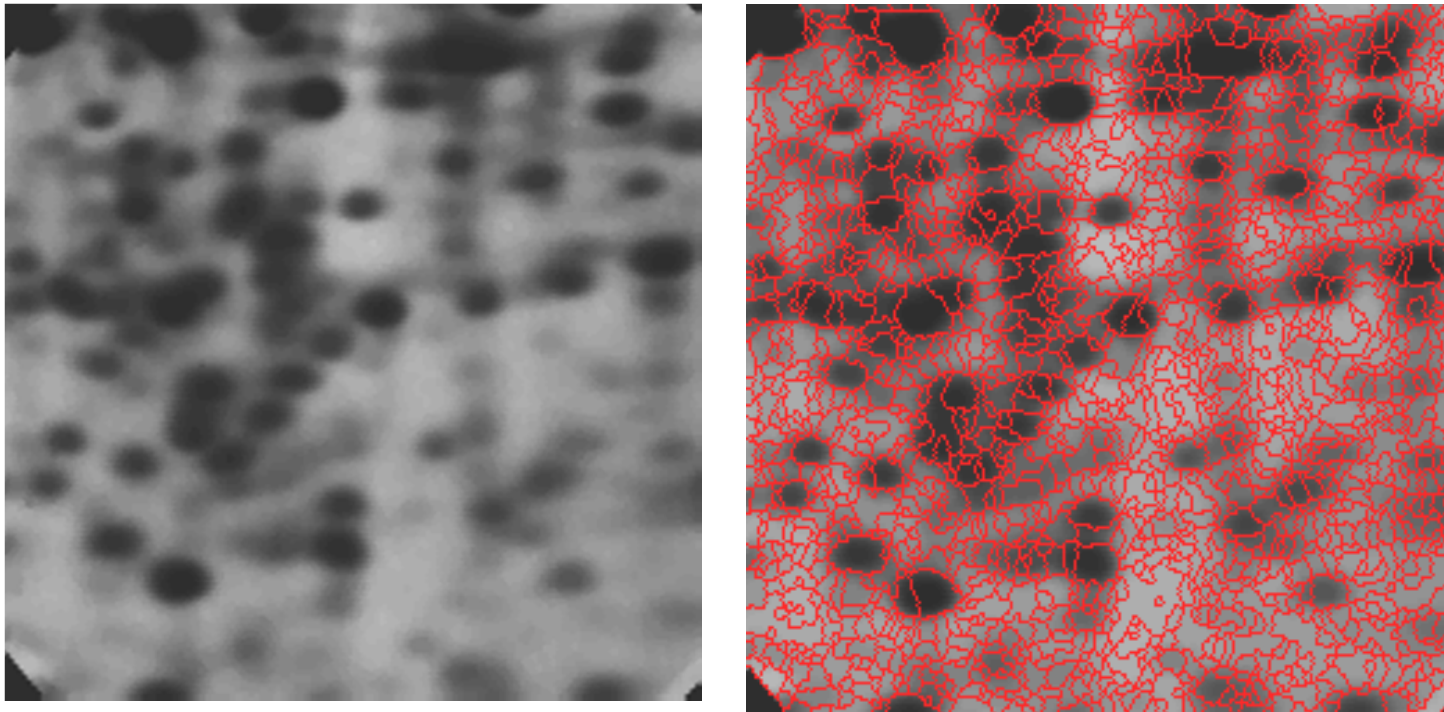
Sur-segmentation : chaque minimum local produit un bassin versant !

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

- 3.1. Segmentation
- 3.2. Problème de sursegmentation

Segmentation par LPE

Problème : sursegmentation



Electrophoresis gel image and watershed transformation of the gradient image.

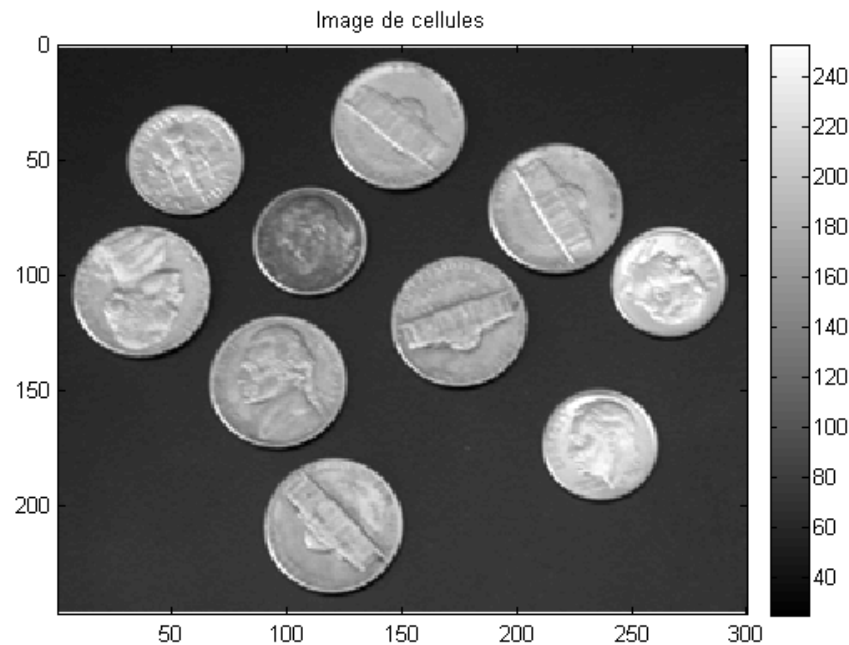
Remarque : le gradient ne fait qu'augmenter le bruit et accentue le phénomène de sursegmentation

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

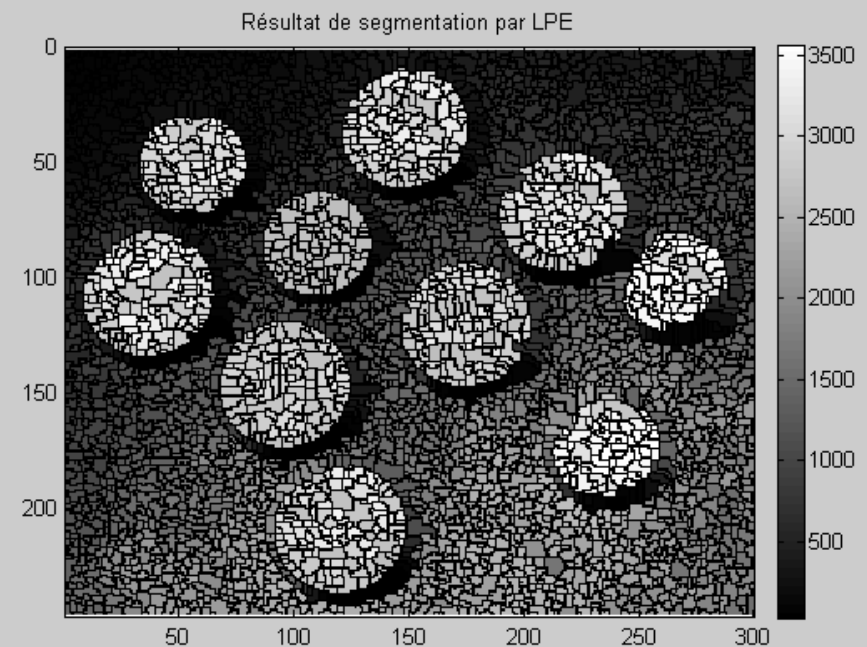
- 3.1. Segmentation
- 3.2. Problème de sursegmentation

Segmentation par LPE

- Problème : sursegmentation



Autre exemple de sursegmentation

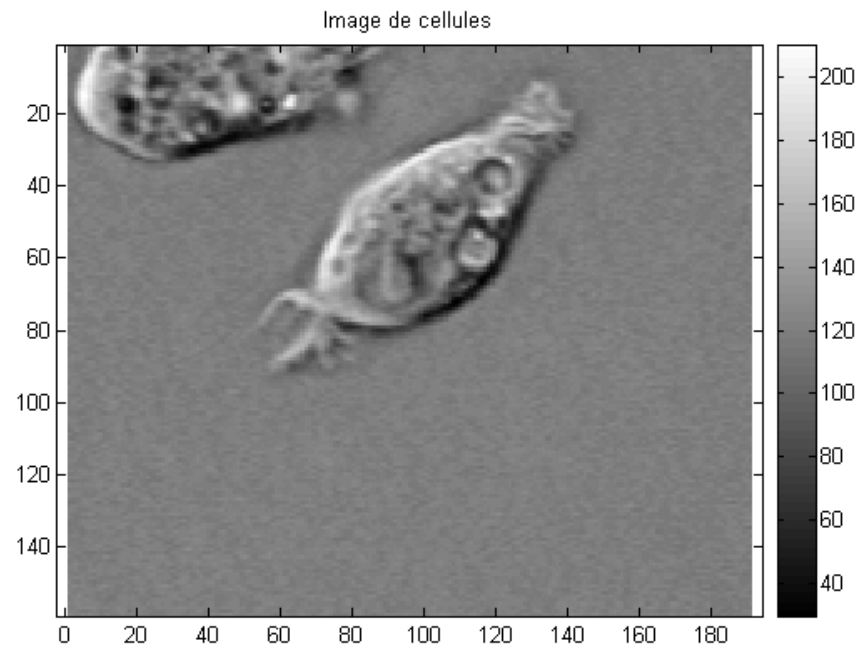


1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

- 3.1. Segmentation
- 3.2. Problème de sursegmentation

Segmentation par LPE

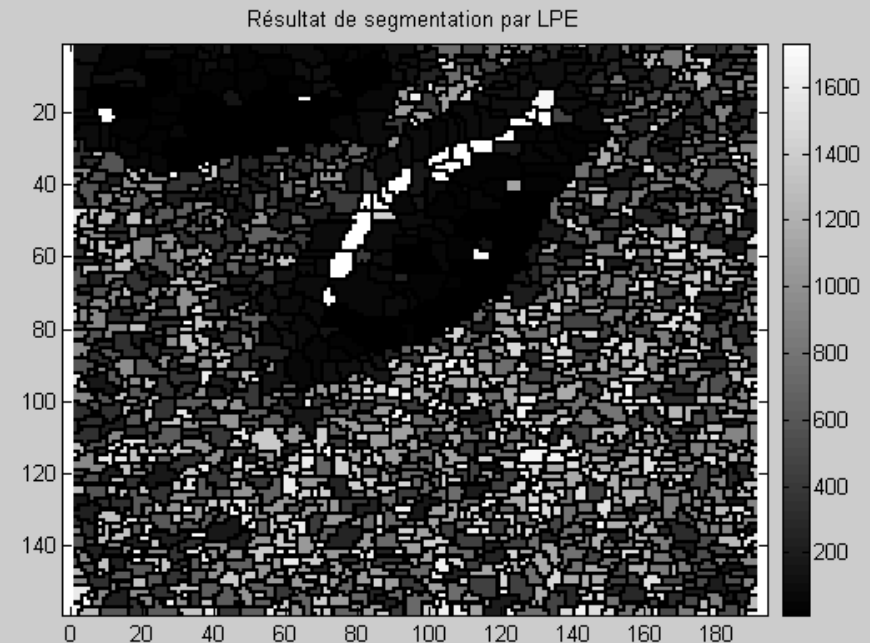
- Problème : sursegmentation



(lié à la non uniformité du fond)

Solutions ?

Problème de sursegmentation
car grand nombre de minima
locaux



Segmentation par LPE

- Solutions à la sursegmentation

2 approches :

1. Approche filtrage :

- permet de supprimer les minima non-significatifs.
- filtre moyenneur : fournit la moyenne sur les voisins d'un point (calcul par convolution)
- filtre alterné séquentiel

2. Approche marqueurs :

- permet de choisir le nombre de minima significatifs (et donc le nombre de zones que l'on veut mettre en évidence)

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

Plan du cours

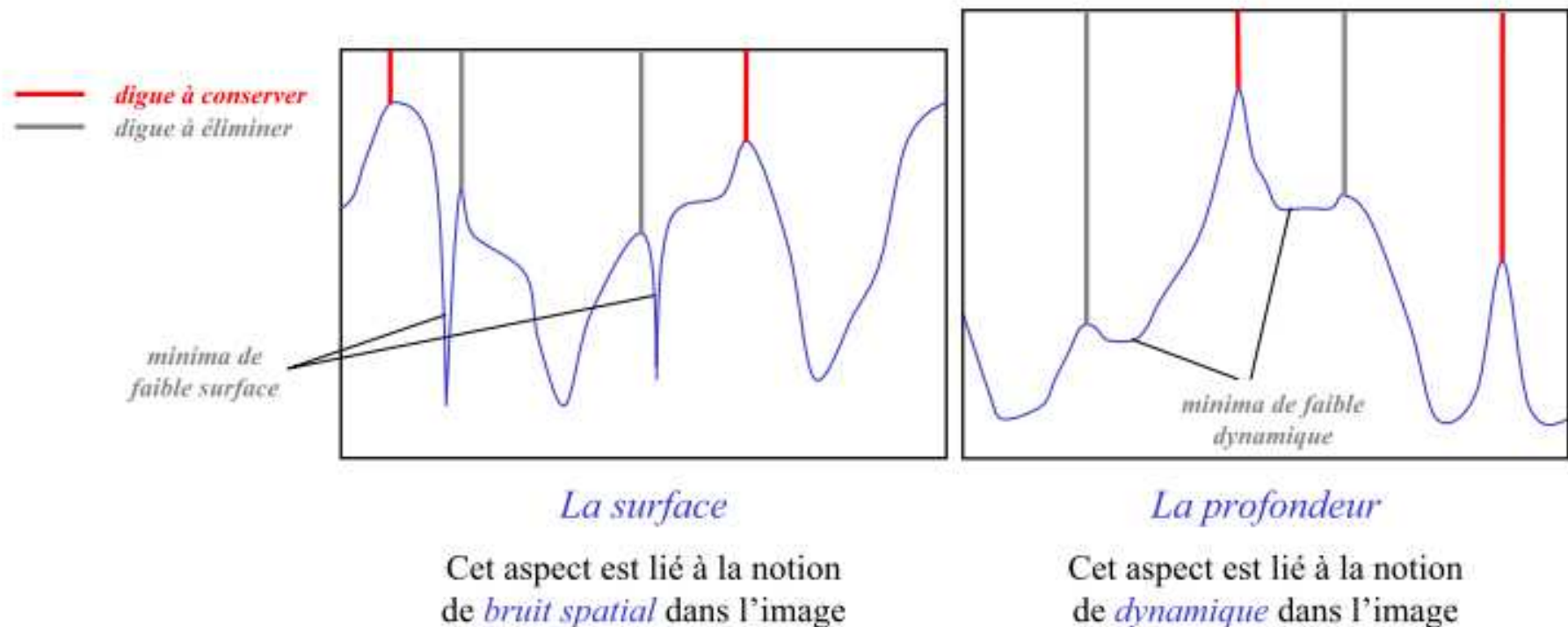
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications de la LPE
4. LPE par filtrage
5. LPE sous contraintes

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

LPE par filtrage

Idée : sélection des bassins versants qui apparaîtront dans la LPE en fonction de leur « importance »

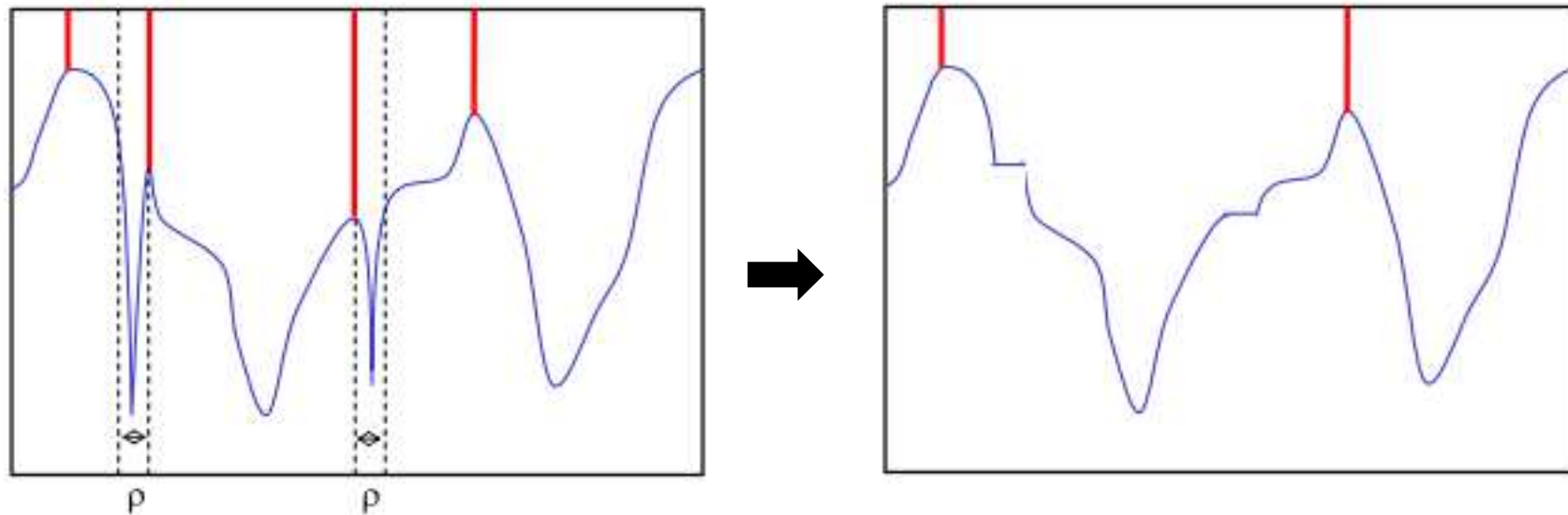
2 possibilités :



1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

LPE par filtrage spatial

But : élimination des digues produites par des bassins de faible surface par filtrage morphologique spatial



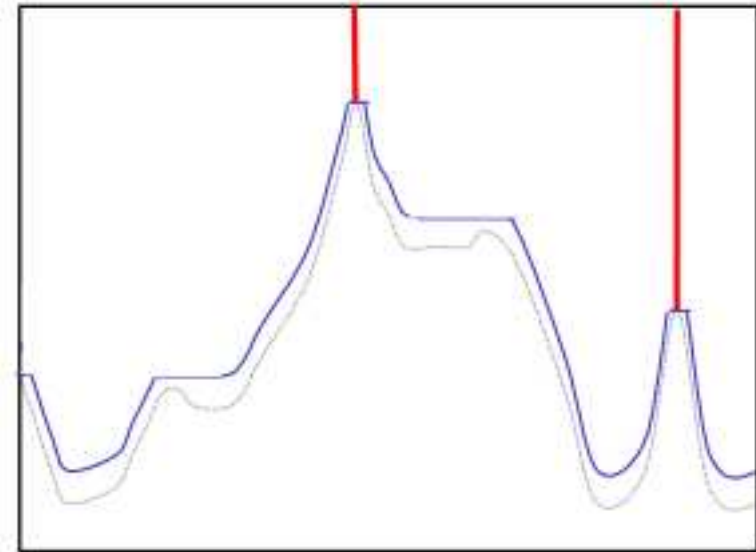
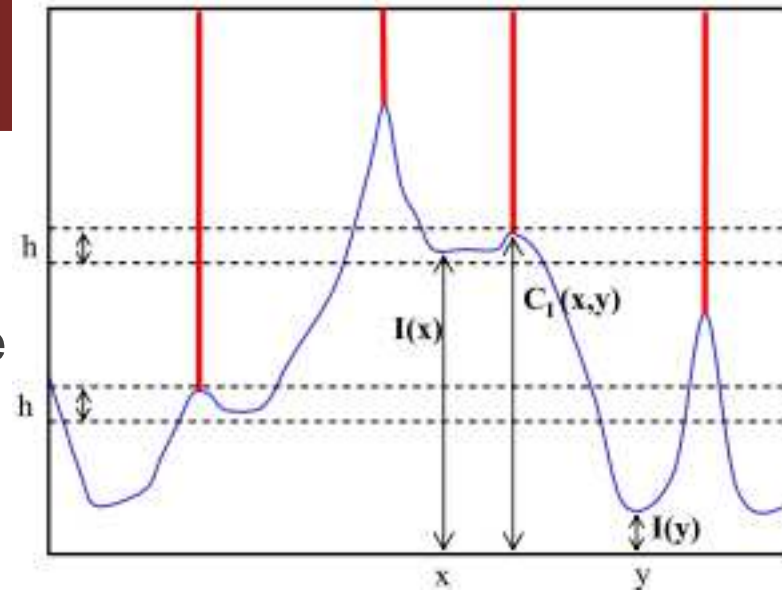
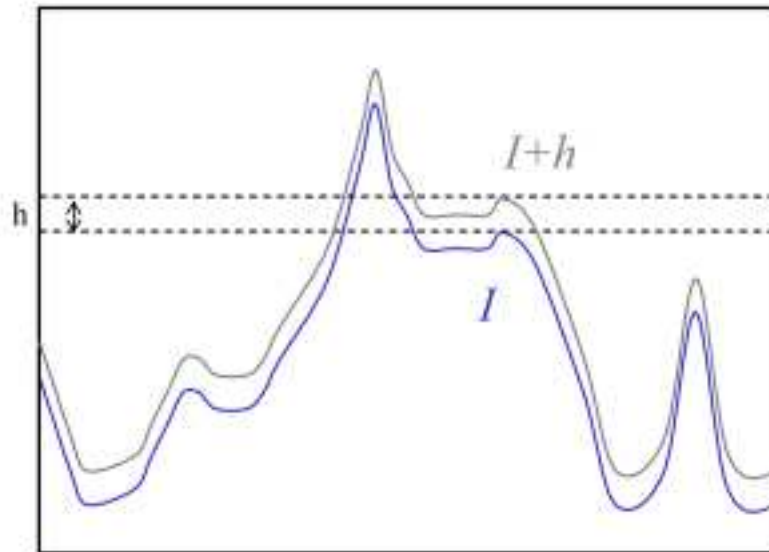
**fermeture par reconstruction
par une boule de diamètre ρ .**

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

LPE par filtrage de dynamique

But : élimination des digues produites par des bassins de faible dynamique par filtrage morphologique de dynamique

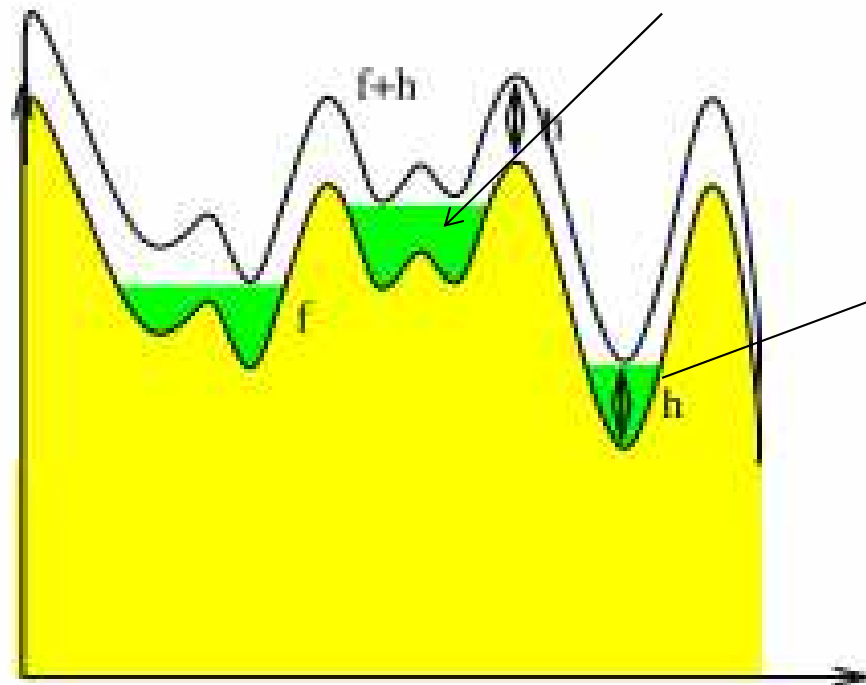
La reconstruction de la fonction I dans la fonction $I+h$ élimine les minima régionaux de dynamique inférieure à h :



1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

LPE par filtrage

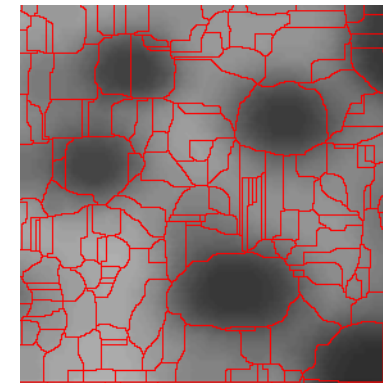
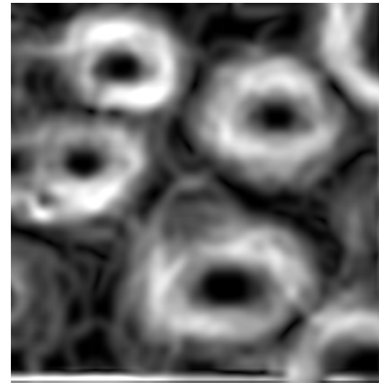
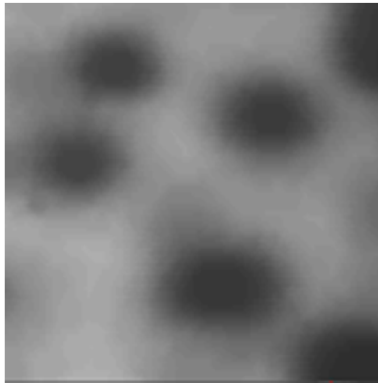
2 bassins fusionnés



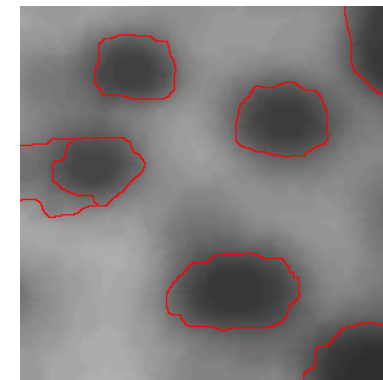
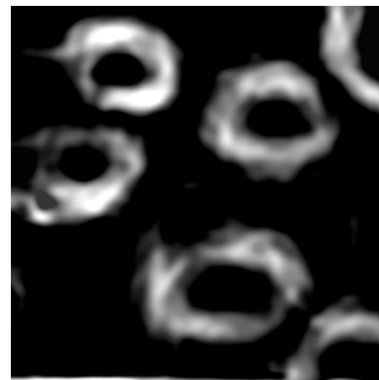
Bassin rempli
à partir du point
le plus bas

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

LPE par filtrage : résultats



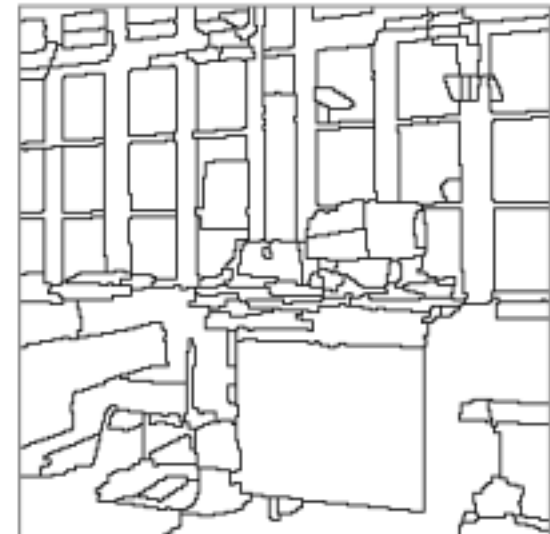
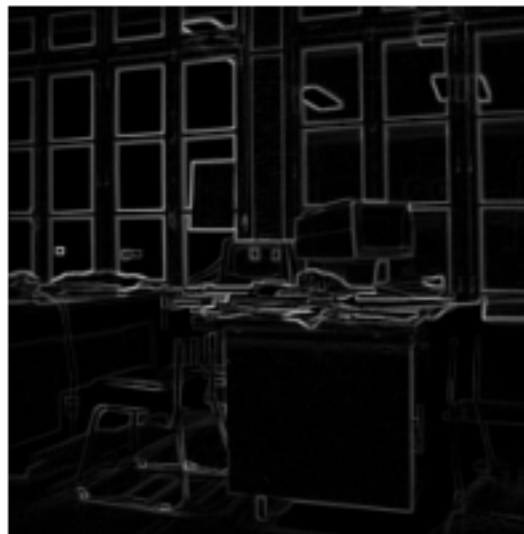
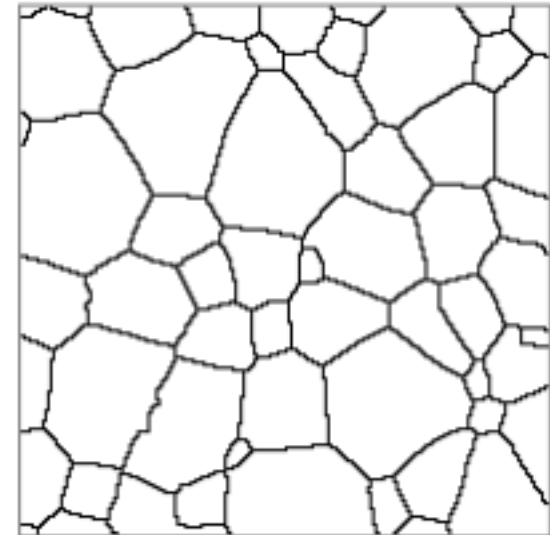
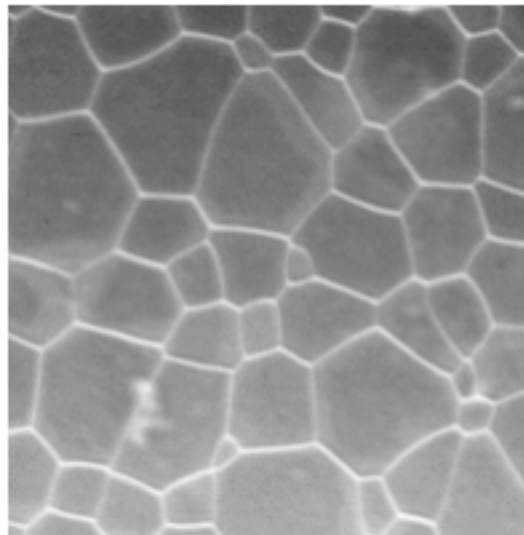
Opérateur
MinH sur
le gradient



1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

LPE par filtrage : résultats

En appliquant les deux filtres précédents sur l'image (uranium) ou sur le gradient morphologique de l'image (bureau), on élimine dans la LPE les bassins *non significatifs*.



1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications
4. LPE sous contraintes

Plan du cours

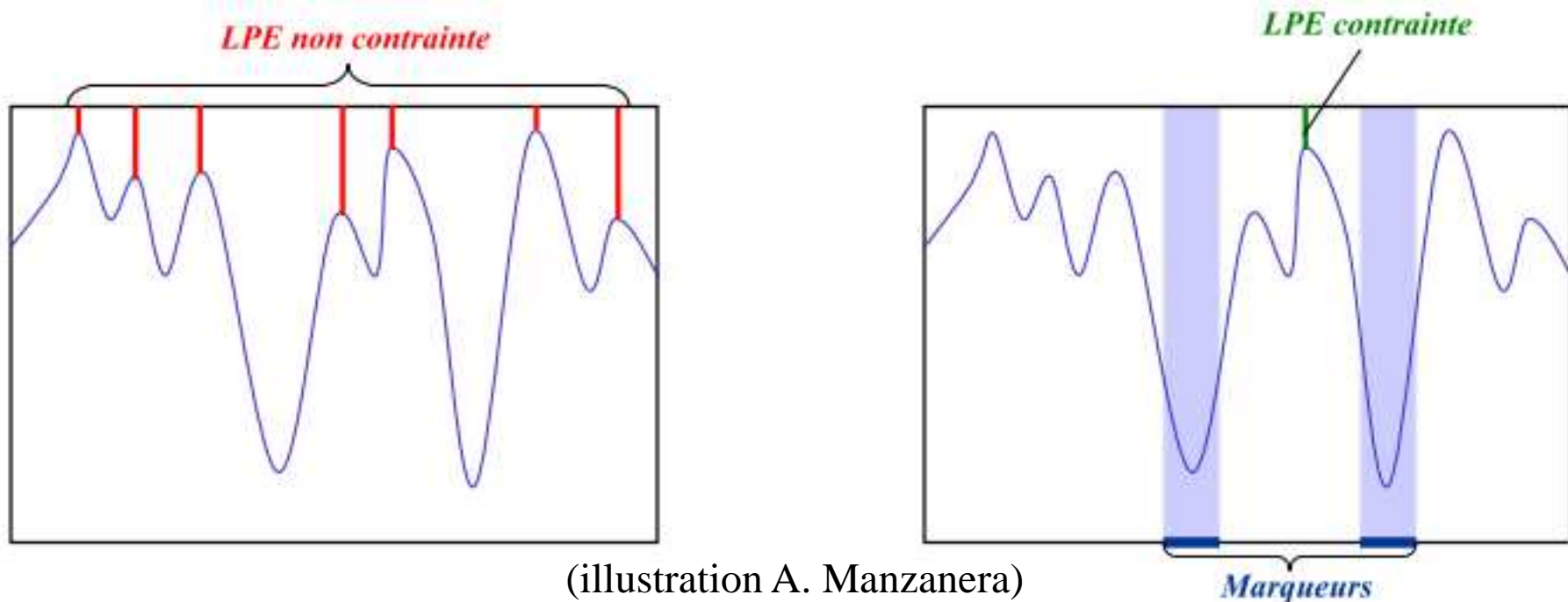
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications de la LPE
4. LPE par filtrage
5. LPE sous contraintes

Méthode

- choisir le nombre de minima locaux
↔ le nombre de zones que l'on souhaite mettre en évidence

Ainsi, suppression des informations non-significatives.

Un seul minimum doit être imposé par région à détecter.



Méthode d'imposition des minima

opérateur permettant de placer sur une image f des minima régionaux aux seuls endroits où l'image des marqueurs g est maximum

⇒ assure aucun autre minimum régional que ceux présents dans l'image des marqueurs g .

technique de swamping

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

- 4.1. Principe
- 4.2. Imposition des minima

Méthode d'imposition des minima

Image des marqueurs : f_m

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in g \\ t_{\max} & \text{sinon} \end{cases}$$

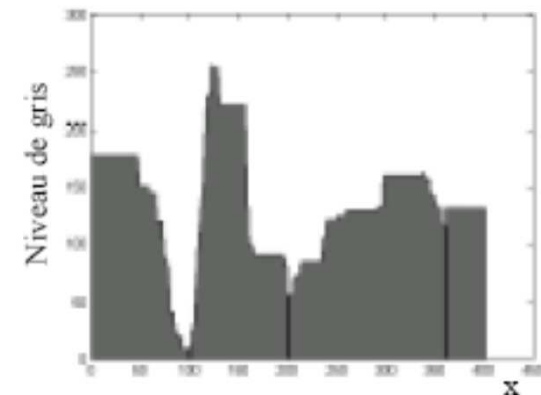
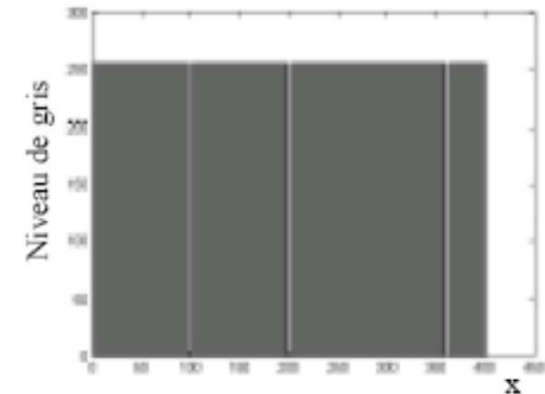
Reconstruction par érosion

$$R_{\min(f+1, f_m)}^{\varepsilon}(f_m)$$

2 étapes :

- $\min(f+1, f_m)$
- reconstruction par érosion de f_m dans le résultat précédent

f_m



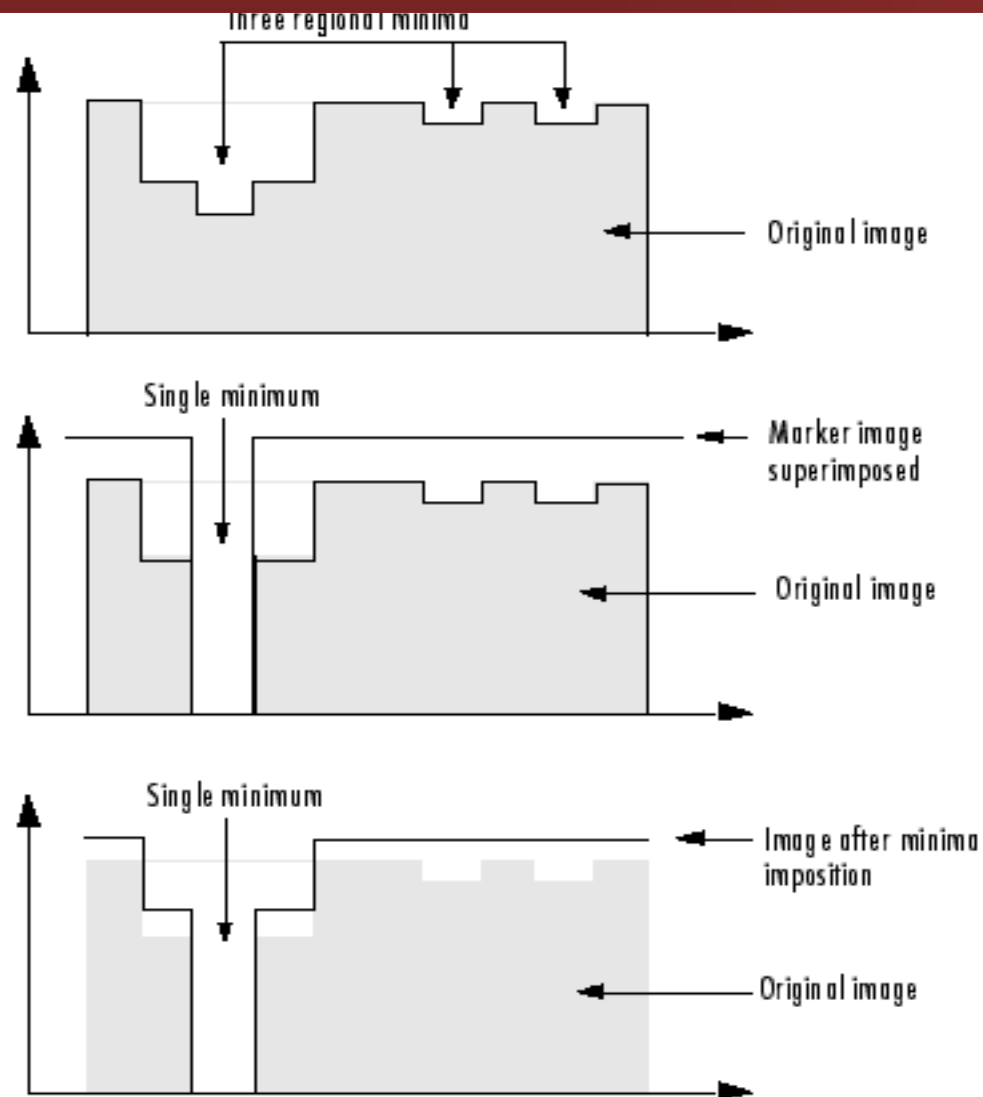
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

- 4.1. Principe
- 4.2. Imposition des minima

Méthode d'imposition des minima

Exemple :

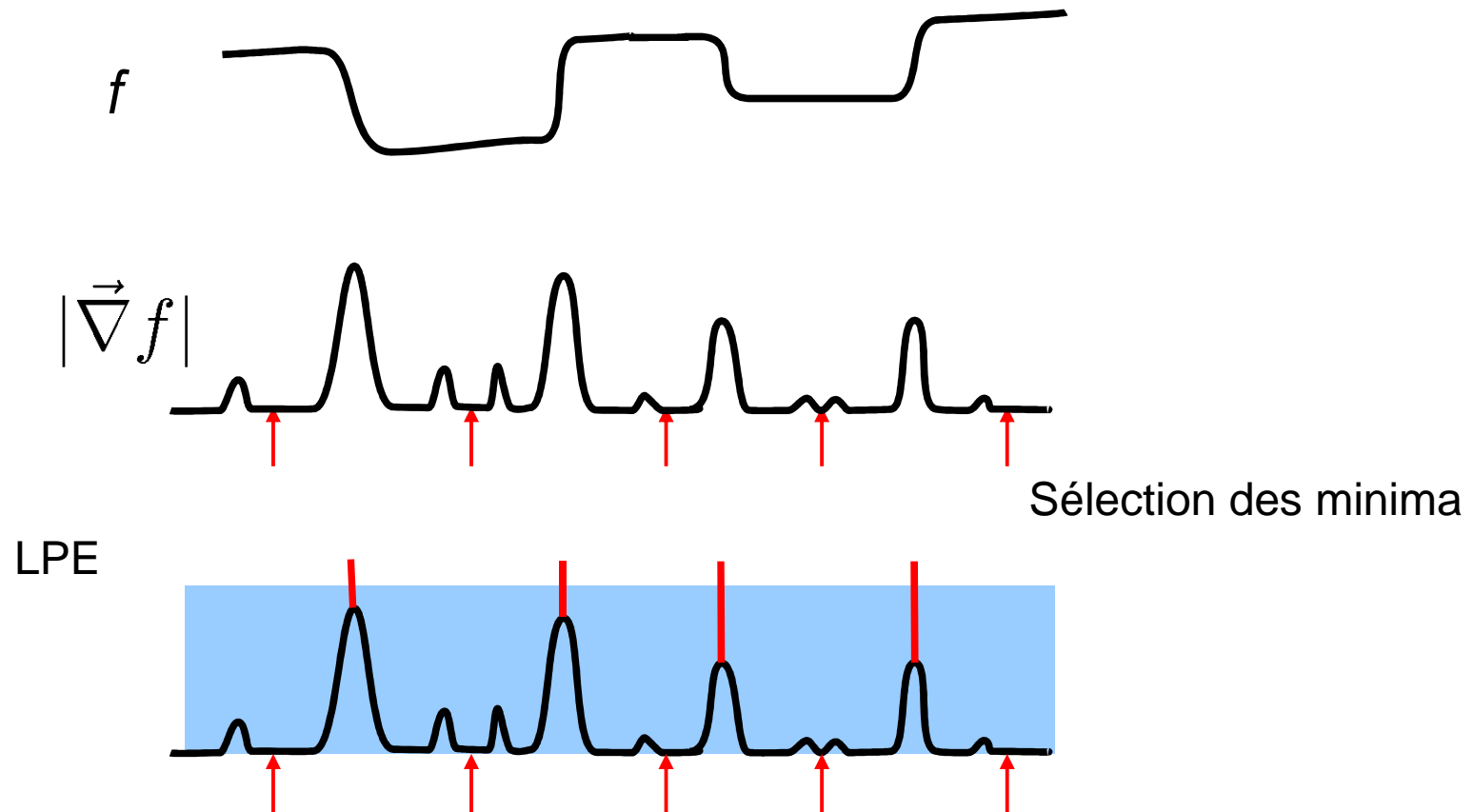


1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

- 4.1. Principe
- 4.2. Imposition des minima

Principe de la LPE sous contraintes

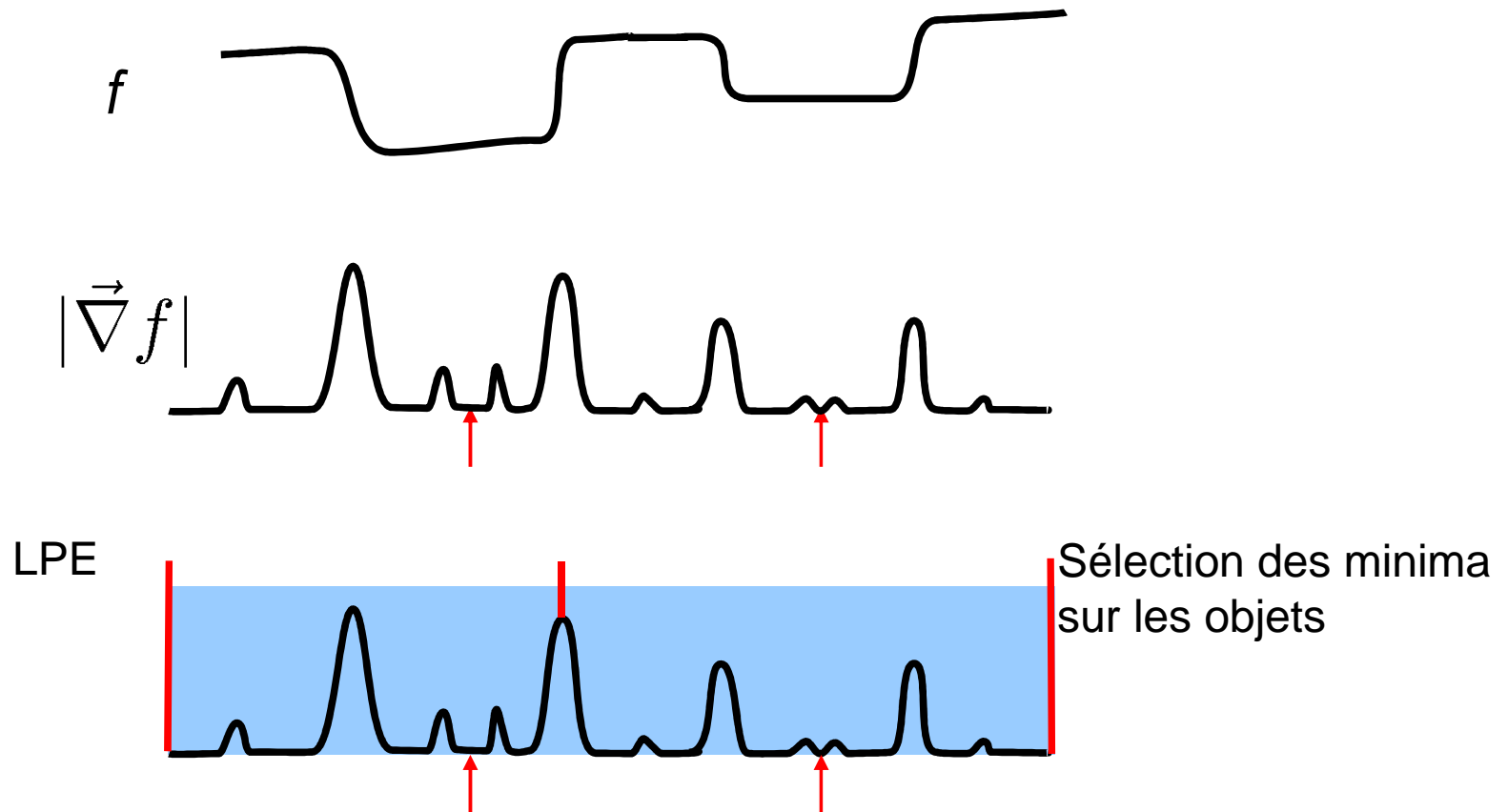


1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

- 4.1. Principe
- 4.2. Imposition des minima

Principe de la LPE sous contraintes



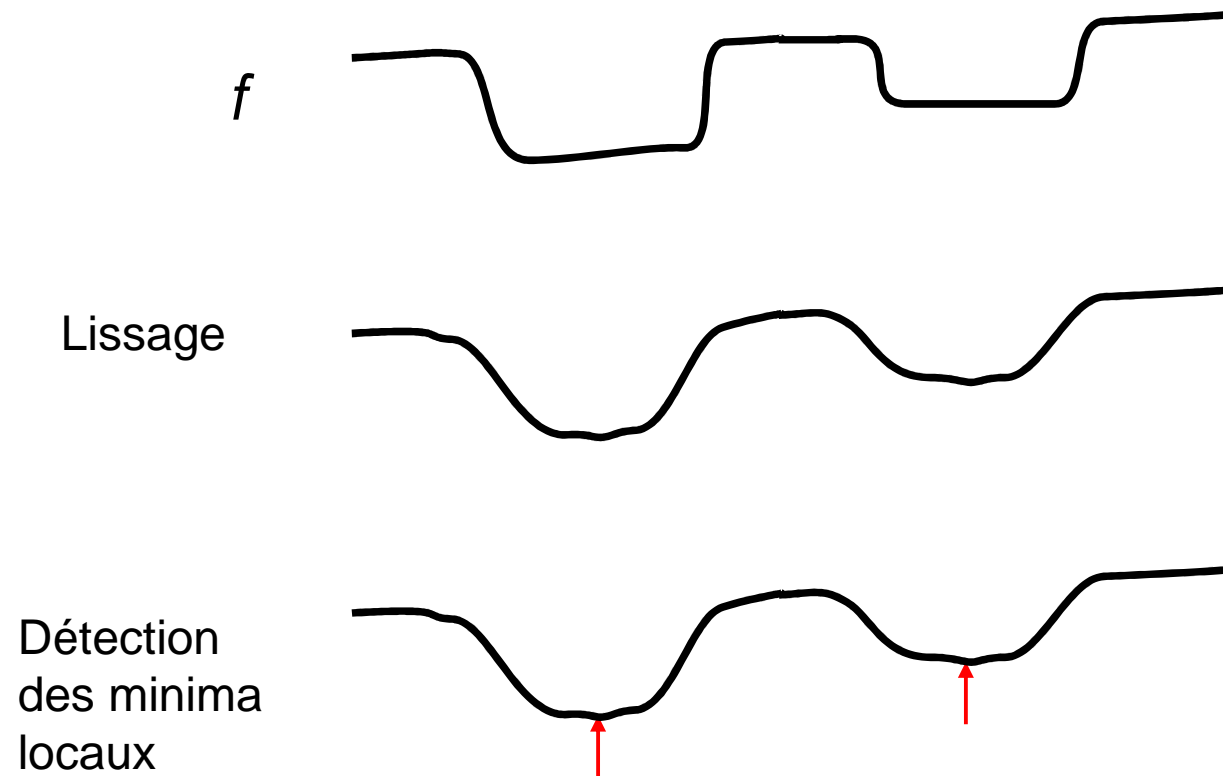
Il faut aussi marquer l'extérieur

Principe de la LPE sous contraintes

- Sélection des marqueurs internes
 - A partir de l'image originale
 - Min ou max locaux
 - Pré-segmentation
- Sélection des marqueurs externes
 - Déduts à partir des marqueurs internes
 - LPE sur l'image originale
 - Avec marqueurs internes
- LPE sur le gradient
 - Avec marqueurs internes+externes

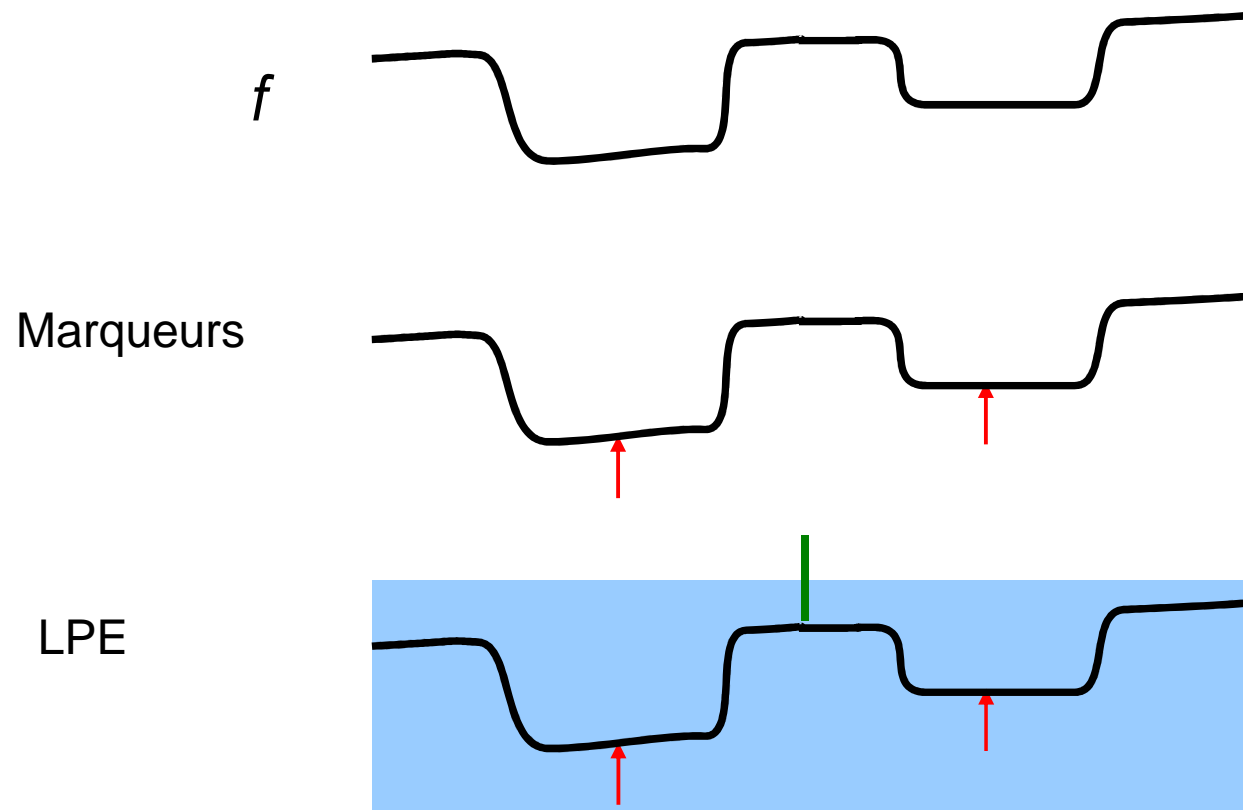
Principe de la LPE sous contraintes

1. Sélection des marqueurs internes



Principe de la LPE sous contraintes

2. Sélection des marqueurs externes



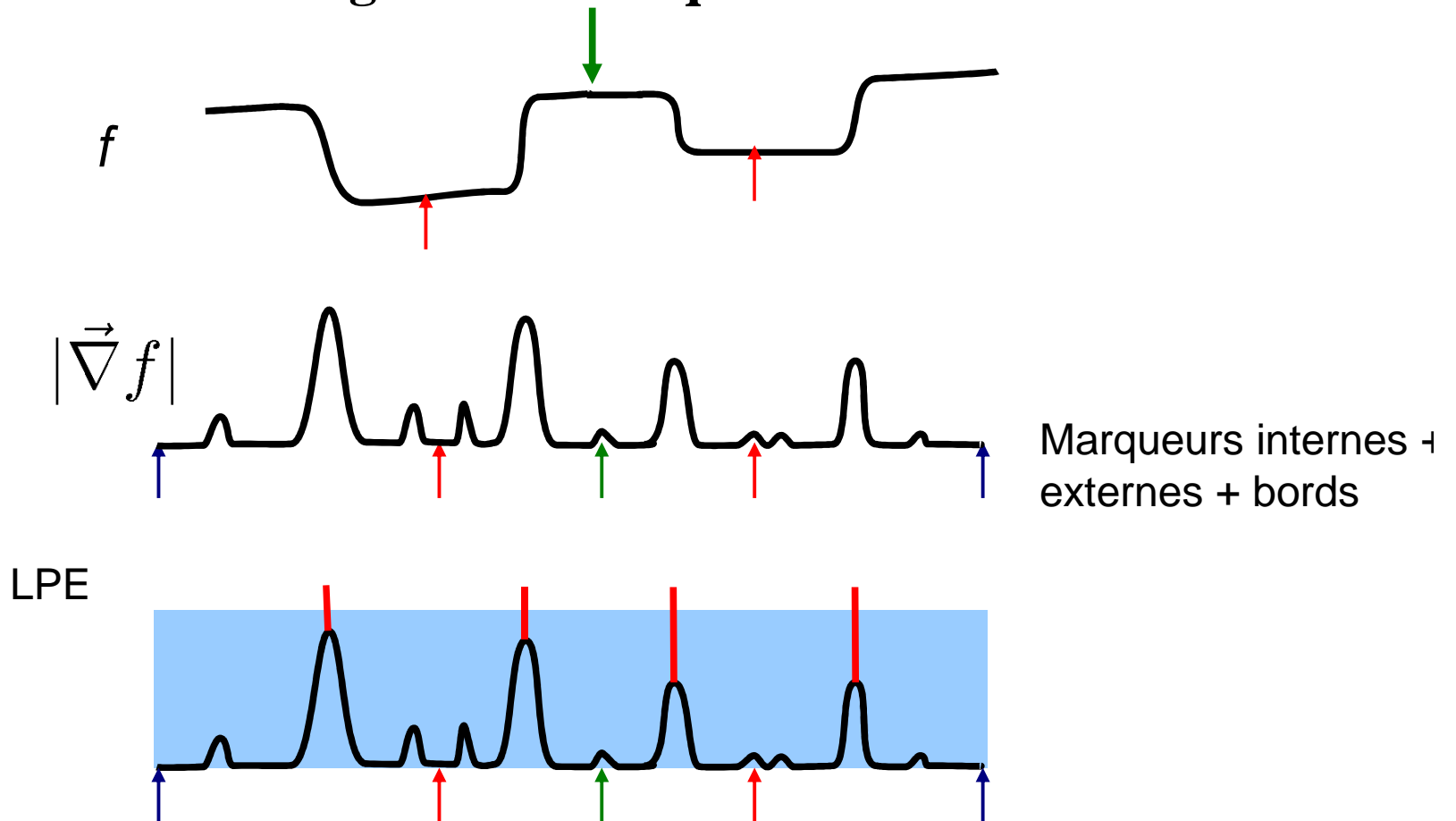
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

- 4.1. Principe
- 4.2. Imposition des minima

Principe de la LPE sous contraintes

3. LPE sur le gradient marqué



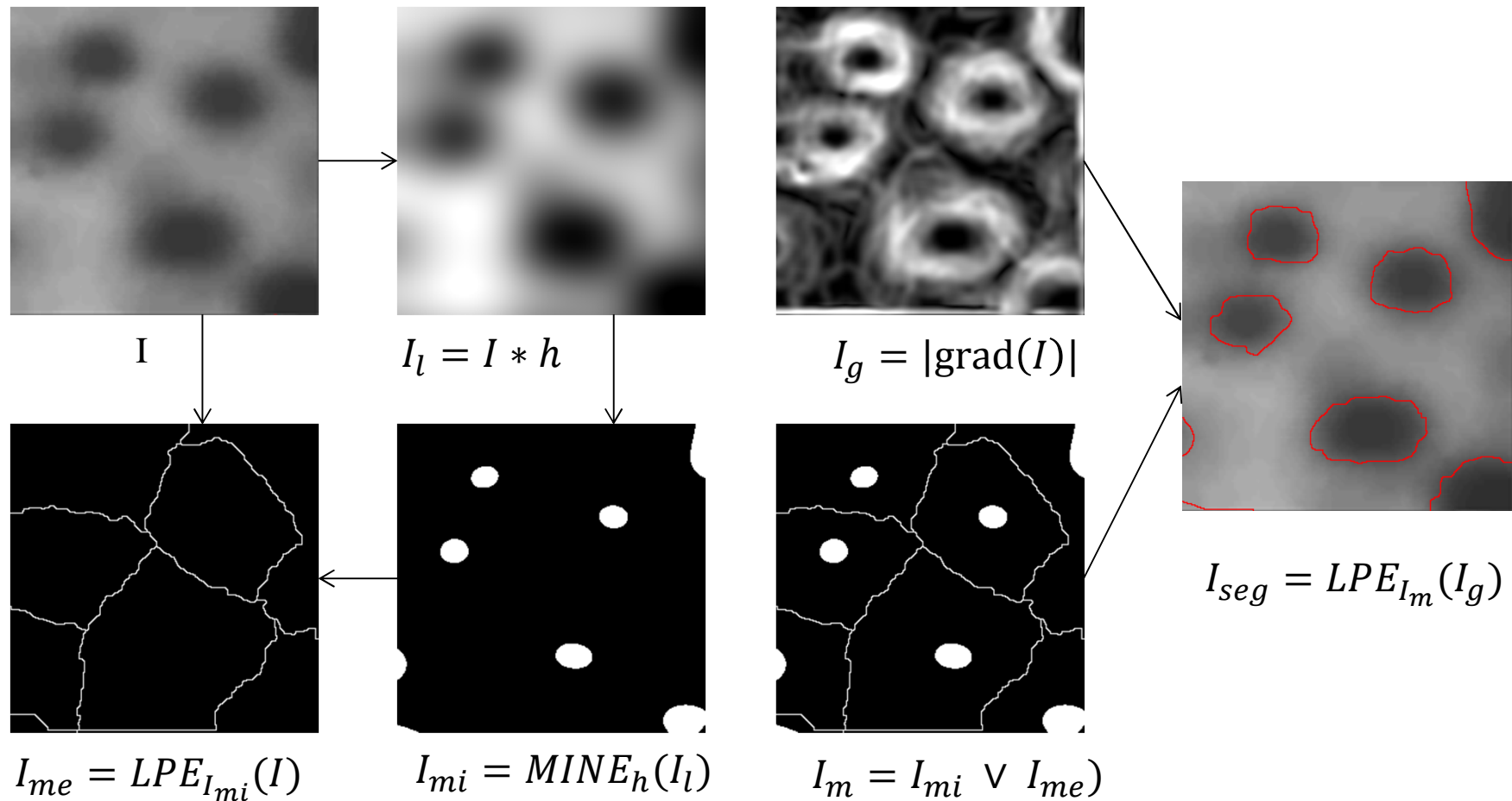
1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

- 4.1. Principe
- 4.2. Imposition des minima

Principe de la LPE sous contraintes

Sur les images :



1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

4. LPE sous contraintes

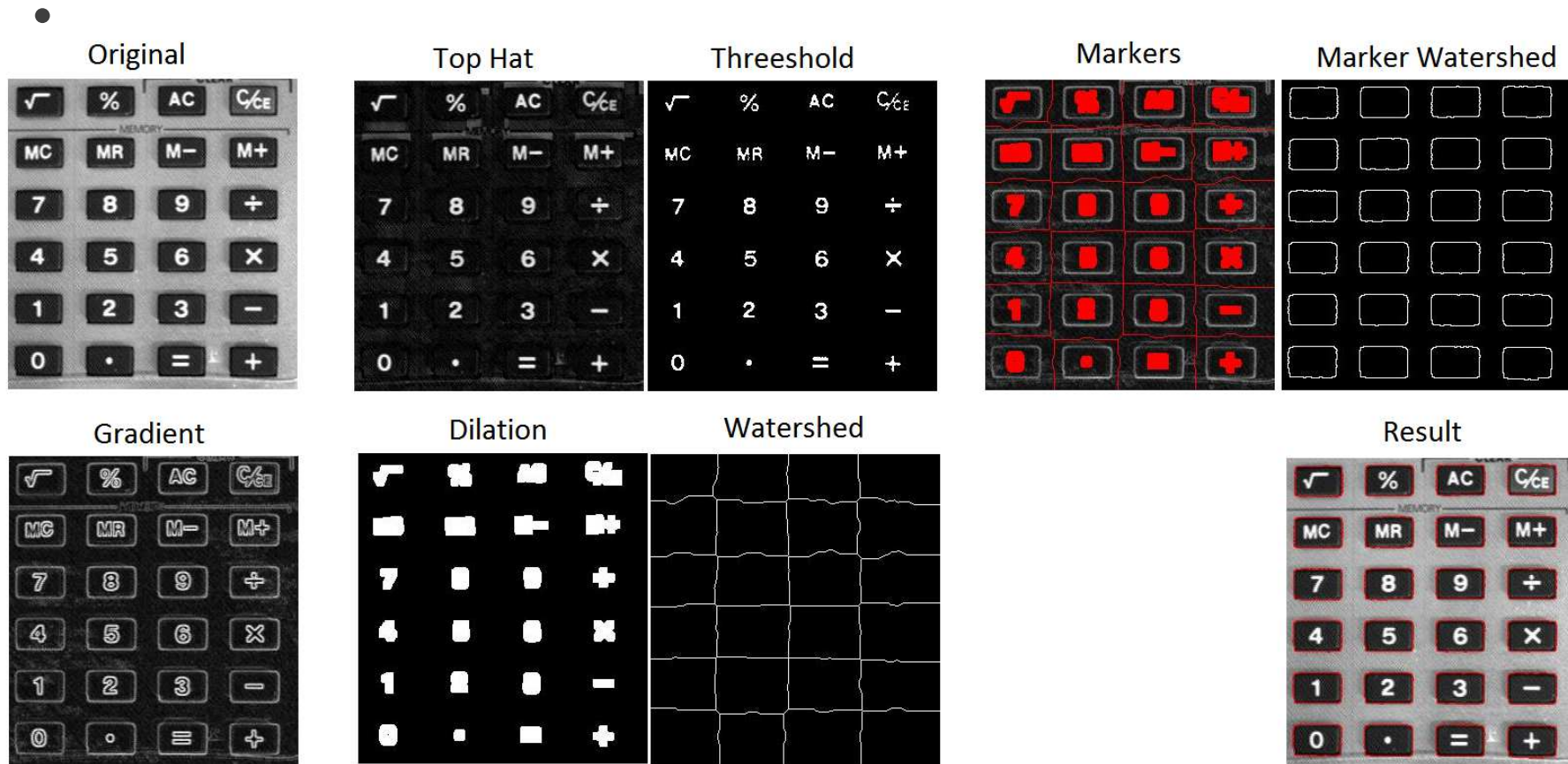
4.1. Principe

4.2. Imposition des minima

4.3. Séparation d'objets connectés

4.4. Marqueurs intérieurs/extérieurs

Autre exemple de segmentation



- <http://www.mmorph.com/mxmorph/html/mmdemos/mmdcalc.html>

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

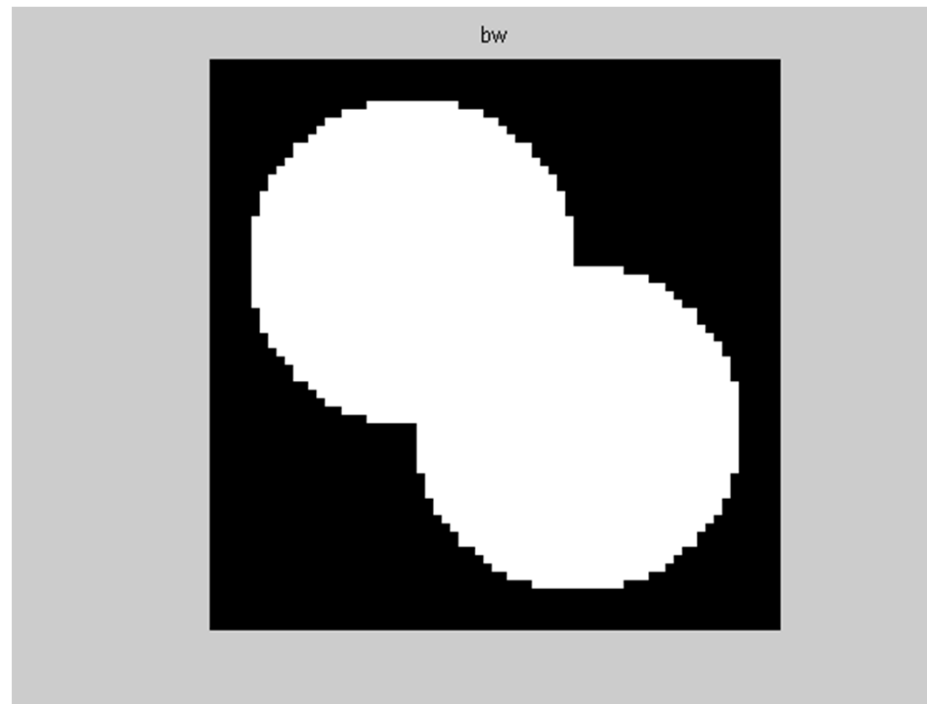
4. LPE sous contraintes

- 4.1. Principe
- 4.2. Imposition des minima
- 4.3. Séparation d'objets connectés

LPE et fonction distance

Séparation d'objets connectés

Problème :



1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

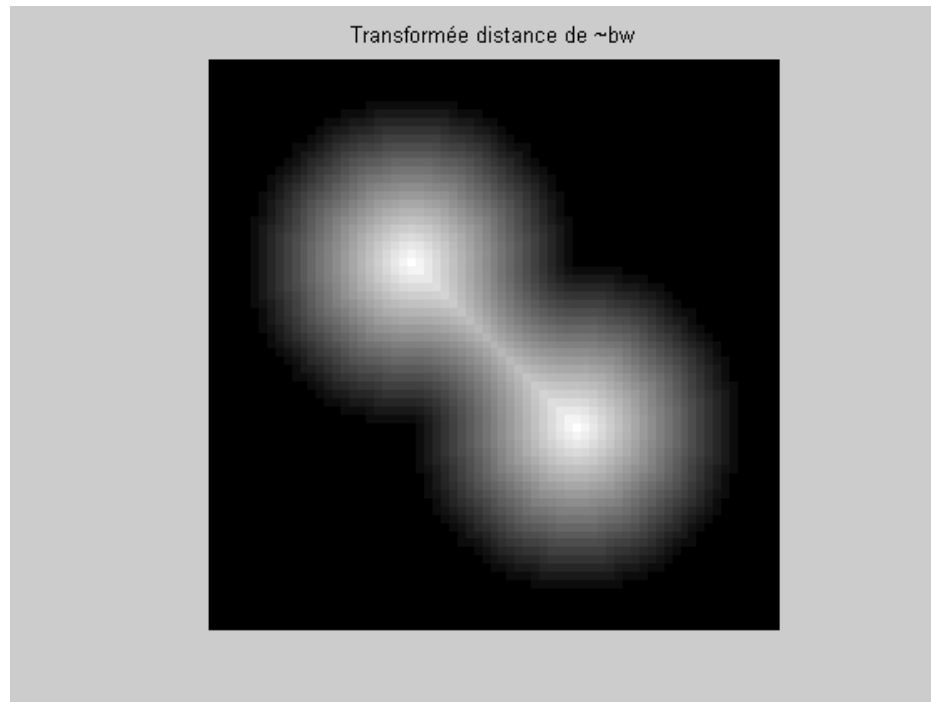
4. LPE sous contraintes

- 4.1. Principe
- 4.2. Imposition des minima
- 4.3. Séparation d'objets connectés

LPE et fonction distance

Séparation d'objets connectés

LPE sur le négatif de la fonction distance



Résultat ?

1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

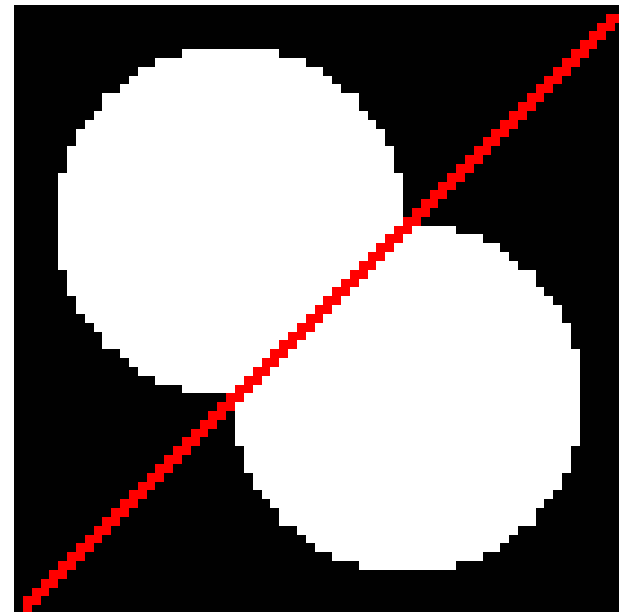
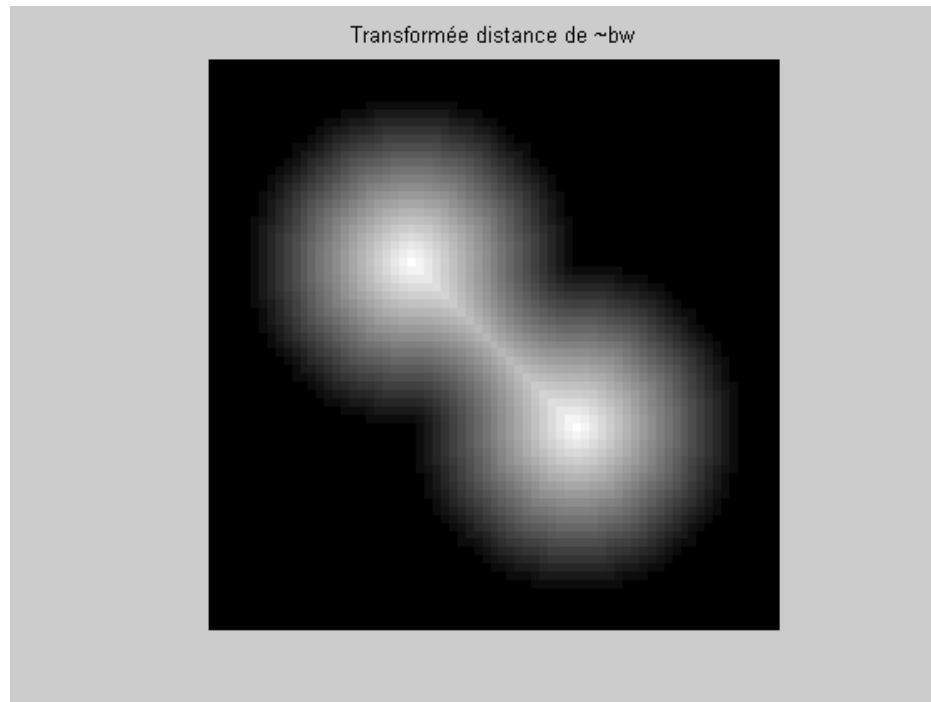
4. LPE sous contraintes

- 4.1. Principe
- 4.2. Imposition des minima
- 4.3. Séparation d'objets connectés

LPE et fonction distance

Séparation d'objets connectés

LPE sur le négatif de la fonction distance

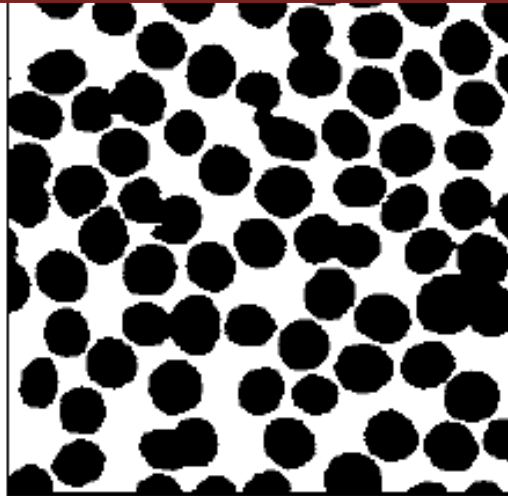


1. Principe de la LPE
2. Algorithme de LPE
3. Applications

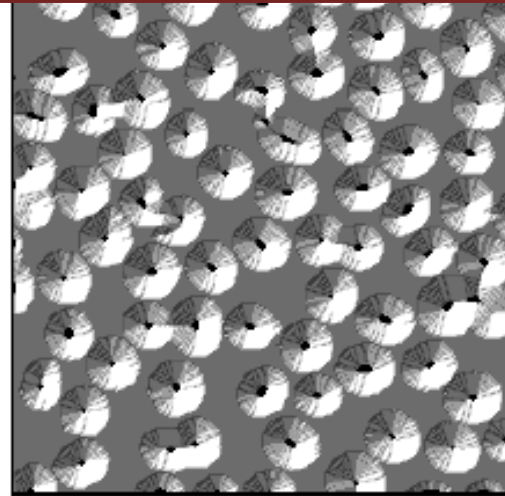
4. LPE sous contraintes

- 4.1. Principe
- 4.2. Imposition des minima
- 4.3. Séparation d'objets connectés

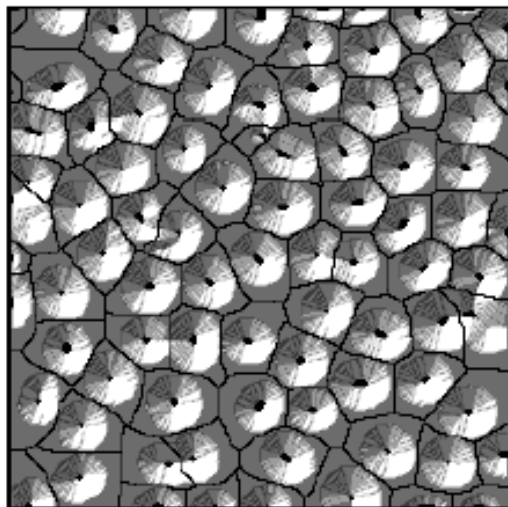
LPE et fonction distance



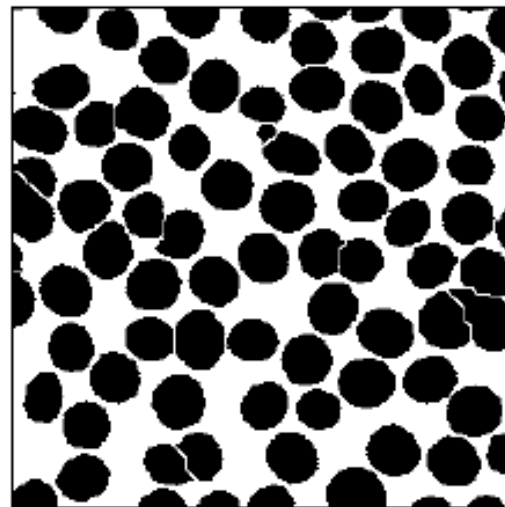
(a)



(b)



(c)



(d)

Séparation d'objets connectés

- a) Image initiale
- b) Fonction distance et marqueurs de maxima régionaux
- c) LPE à partir des marqueurs de b) et du négatif de b)
- d) Lignes de partage des eaux séparant les cellules