

Morphologie mathématique

- Chapitre 2 – Filtrage morphologique

Télécom Saint Etienne – Image 2

Christophe Ducottet
d'après les diapositives de Cécile Barat

Sommaire

1. Introduction au filtrage morphologique
2. Filtres standards : ouverture et fermeture
3. Top-Hat
4. Construction de nouveaux filtres
5. Analyse granulométrique
6. Exemple applicatif de synthèse

Filtrer ?

En traitement linéaire du signal

Filtrage = opération linéaire,
invariante par translation
⇒ convolution

Exemple d'application =
Élimination des composantes
ayant certaines caractéristiques
fréquentielles tout en préservant
les autres

En morphologie mathématique

Filtrage = non linéaire

2 applications =

⇒ Bruit
⇒ Objets insignifiants

Élimination de certaines
structures géométriques tout en
préservant les autres

Propriétés

2 propriétés nécessaires et suffisantes

Ψ filtre morphologique $\Leftrightarrow \Psi$ idempotente et croissante

Idempotence :

- stabilité des filtres morphologiques

Remarque :

idempotence atteinte en une seule passe, soit comme limite d'itérations

Une séquence d'opérations peut être idempotente.

Croissance :

- relation d'ordre conservée

Filtres élémentaires

Ouverture :

filtre morphologique anti-extensif

Fermeture :

filtre morphologique extensif

En sélectionnant judicieusement les tailles et formes des éléments structurants,

⇒ construction de filtres supprimant des structures selon leurs tailles, formes, orientations.

Construction de nouveaux filtres

⇒ Combinaison de filtres élémentaires :
ouverture et fermeture

ATTENTION :

toutes les combinaisons ne sont pas possibles

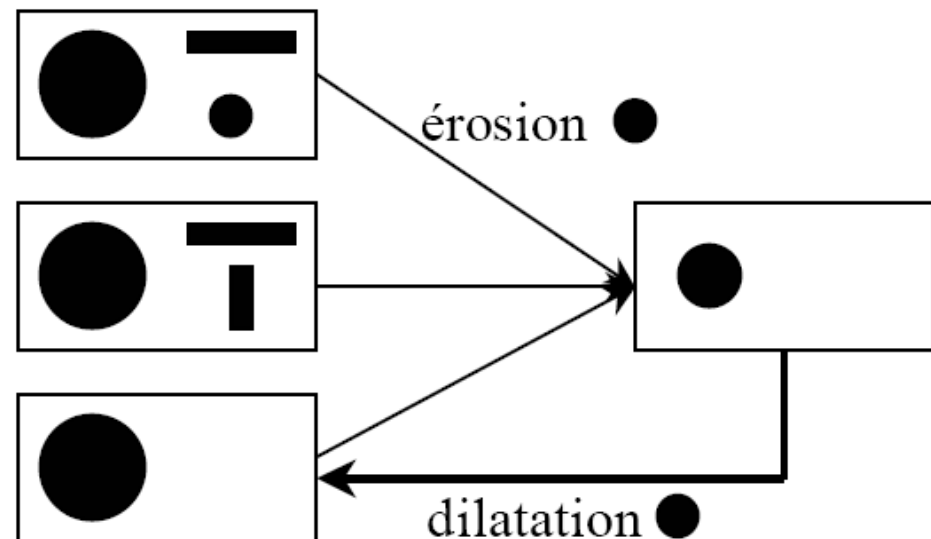
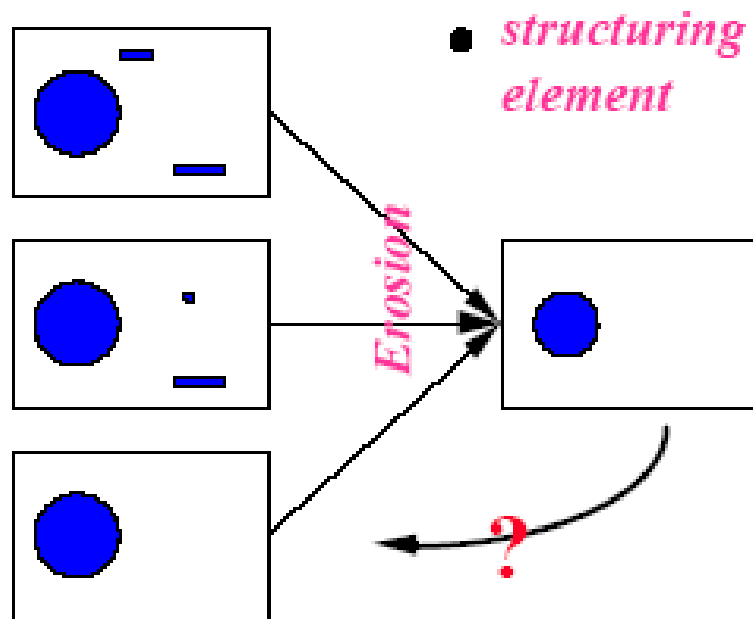
Filtrage inverse

En traitement linéaire du signal

En morphologie mathématique

Inversion de la fonction de transfert

Erosion et dilatation sont duales,
mais pas inverses



Sommaire

1. Introduction au filtrage morphologique
2. Filtres standards : ouverture et fermeture
3. Top-Hat
4. Construction de nouveaux filtres
5. Analyse granulométrique
6. Exemple applicatif de synthèse

Ouverture

Principe :

après érosion, pas de transformation inverse

ouverture \Rightarrow retrouver autant que possible l'information initiale

Définition :

érosion suivie d'une dilatation

Notation : $\gamma_B(X)$ (ouverture de X par B)

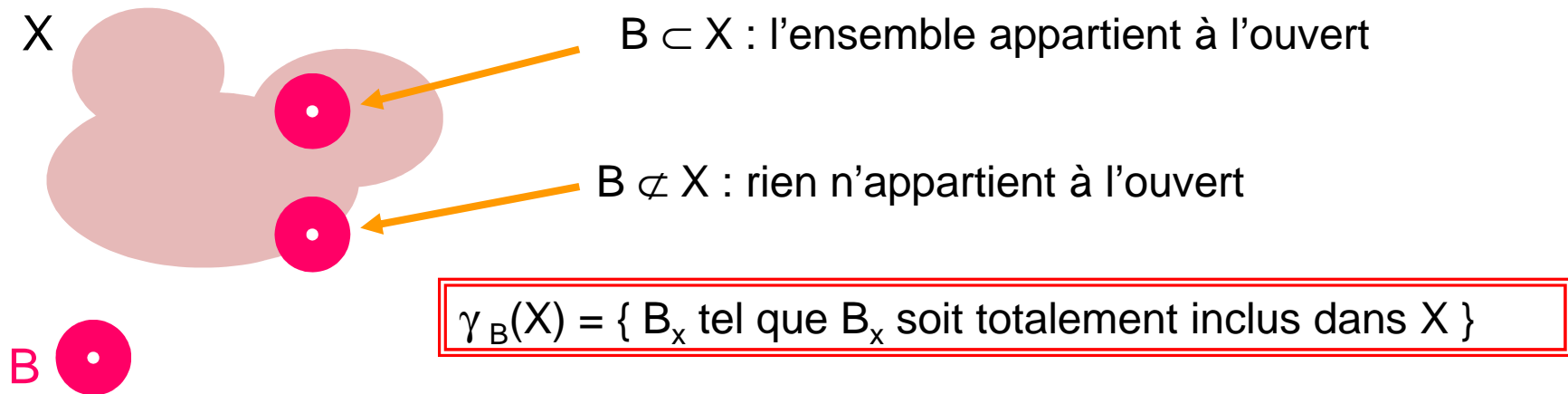
X : ensemble objet étudié

B : élément structurant servant à analyser X .

Ouverture

Principe :

- Question posée : inclusion de B dans X ? (pour toutes les positions de B)

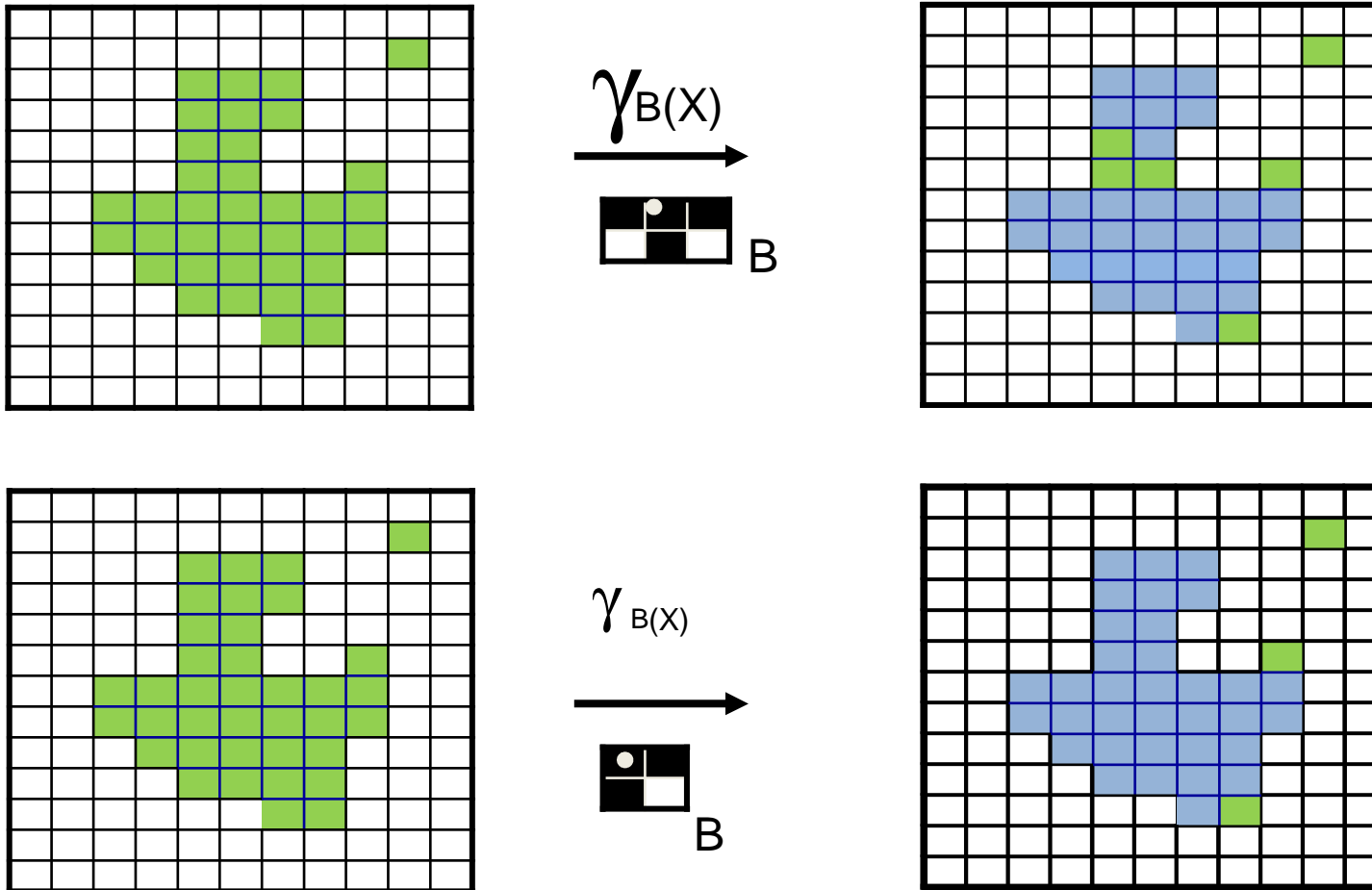


Définition mathématique :

$$\gamma_B(X) = X \circ B = \delta_{\tilde{B}}(\varepsilon_B(X)) = \bigcup_x \{ B_x \mid B_x \subseteq X \}$$

Ouverture

Exercise :



Ouverture

Exemple binaire :



X (256 * 256)

par $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ =
B (3 * 3)
(400%)

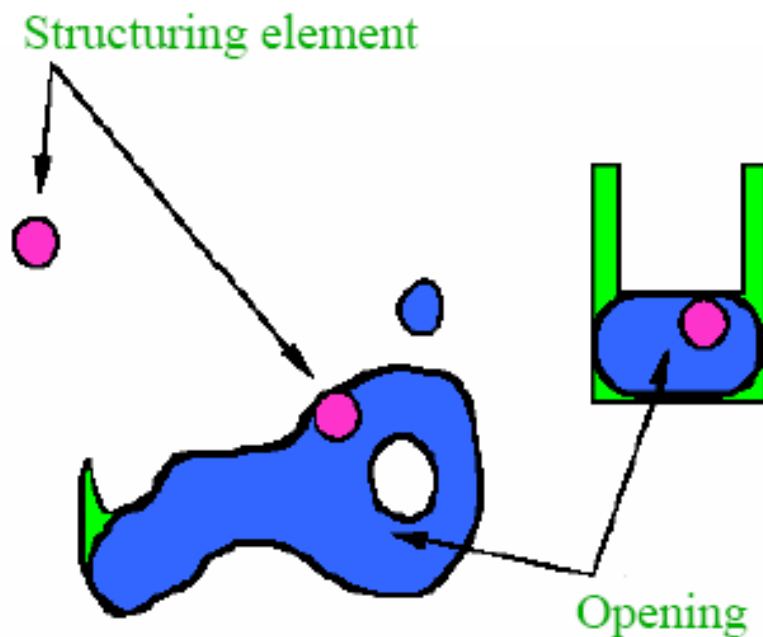


par $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ =
B (7 * 7)
(217%)



Ouverture

Effets constatés :




- Élimine les objets de taille inférieure à l'élément structurant
- Les gros objets sont partiellement préservés :
 - Les contours sont lissés : les excroissances trop fines pour contenir l'ES sont supprimées
 - Les objets présentant un étranglement sont séparés en plusieurs composantes

Ouverture

Exemple fonctionnel :




→
3*3 plan



Ouverture

Exercise

20	20	20	17	20	47	82	92
15	15	15	20	37	75	92	130
15	15	20	37	90	101	115	165
17	20	35	105	157	127	145	145
40	55	112	205	200	170	152	147
112	147	215	230	185	157	137	147
205	237	250	237	187	150	142	145
237	247	250	240	220	205	182	177

$$\min\{15, 20, 15, 20, 20\} = 15$$

$$\min\{15, 15, 15, 20, 20\} = 15$$

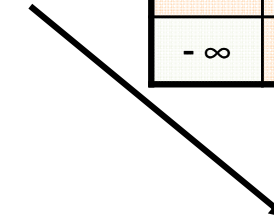
$$\min\{15, 15, 20, 35, 37\} = 15$$

$$\min\{20, 20, 35, 112, 105\} = 20$$

$$\min\{20, 20, 37, 105, 90\} = 20$$

$$\max\{15, 15, 15, 20, 20\} = 20 \quad \text{résultat}$$

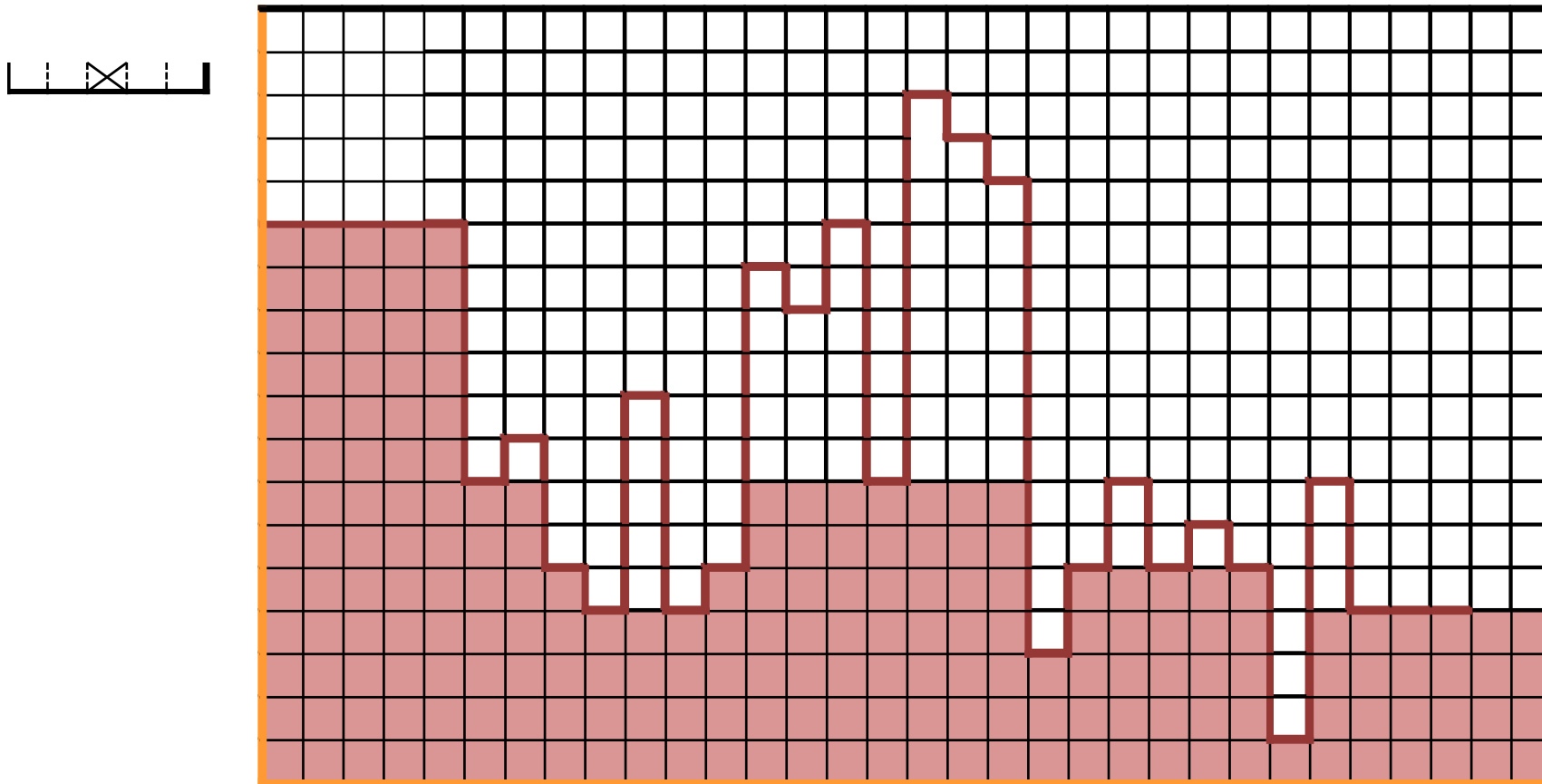
$-\infty$	0	$-\infty$
0	0	0
$-\infty$	0	$-\infty$



		15					
	15	20	20				
		20					

Ouverture

Tracer l'ouverture de la fonction image par un élément structurant de 5 pixels, origine au centre.



Fermeture

Principe :

après dilatation, pas de transformation inverse

fermeture \Rightarrow retrouver autant que possible l'information initiale

Définition :

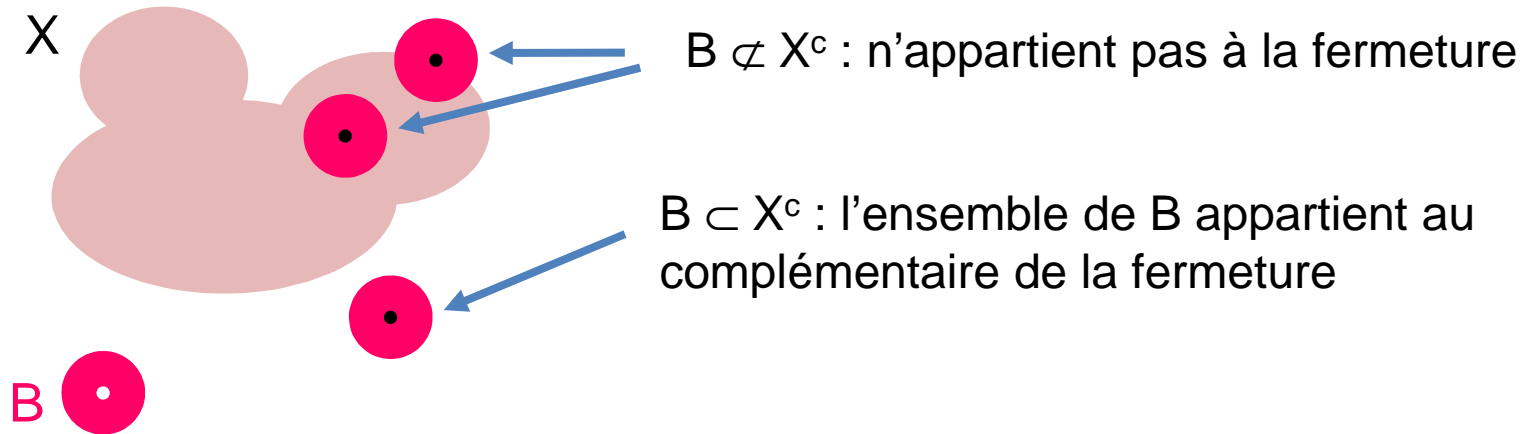
dilatation suivie d'une érosion

- **Notation :** $\phi_B(X)$ (fermeture de X par B)
 X : ensemble objet étudié
 B : élément structurant servant à analyser X .

Fermeture

Principe :

- Question posée : est-ce que B tient dans le complémentaire de l'ensemble X ? (pour toutes les positions de B)

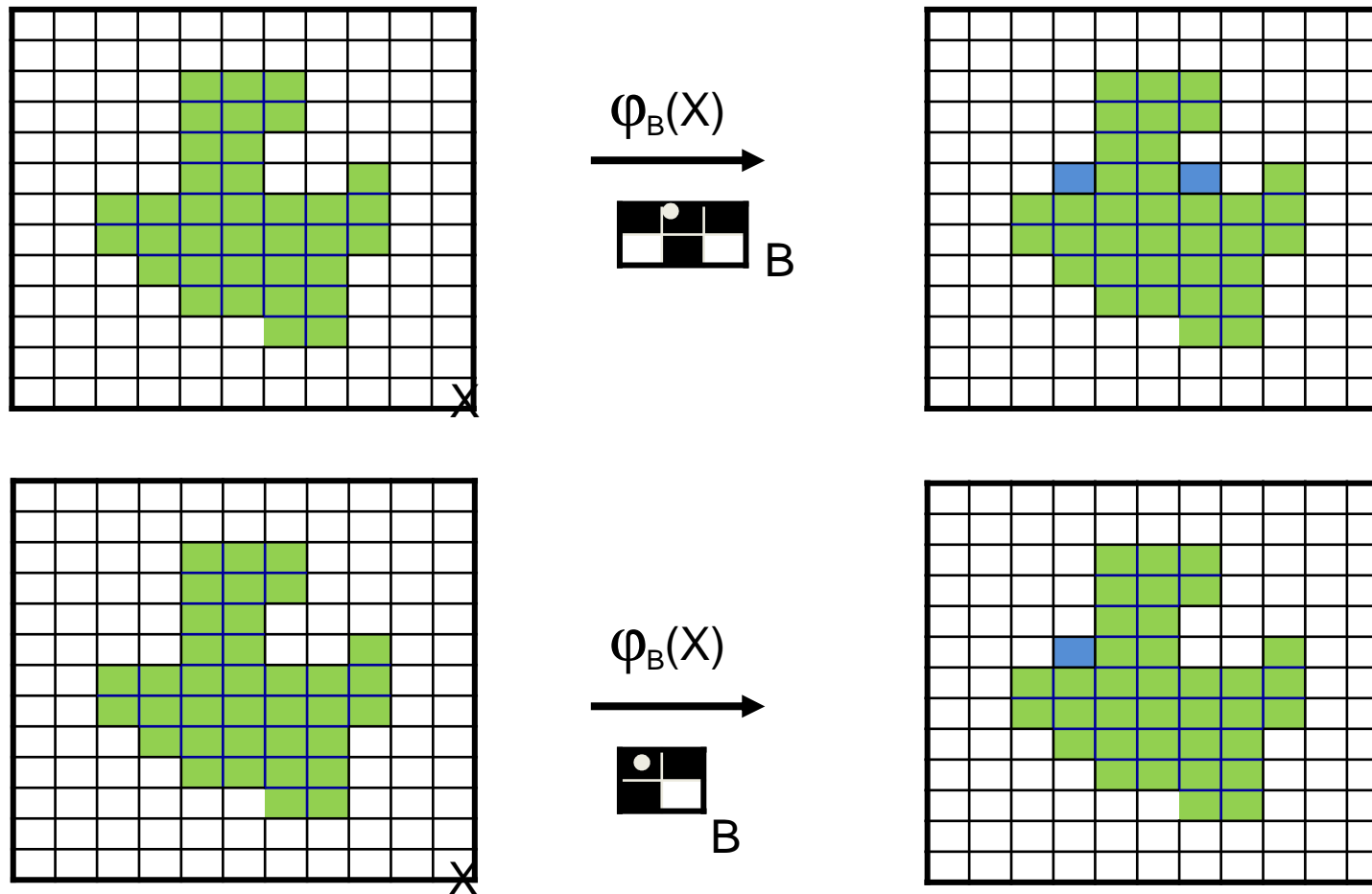


Définition mathématique :

$$\varphi_B(X) = X \bullet B = \varepsilon_{\tilde{B}}(\delta_B(X)) = \left[\bigcup_x \{B_x \mid B_x \subseteq X^c\} \right]^c$$

Fermeture

Exercice :



Fermeture

Exemple binaire :



par $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ =

B (7 * 7)
(217%)



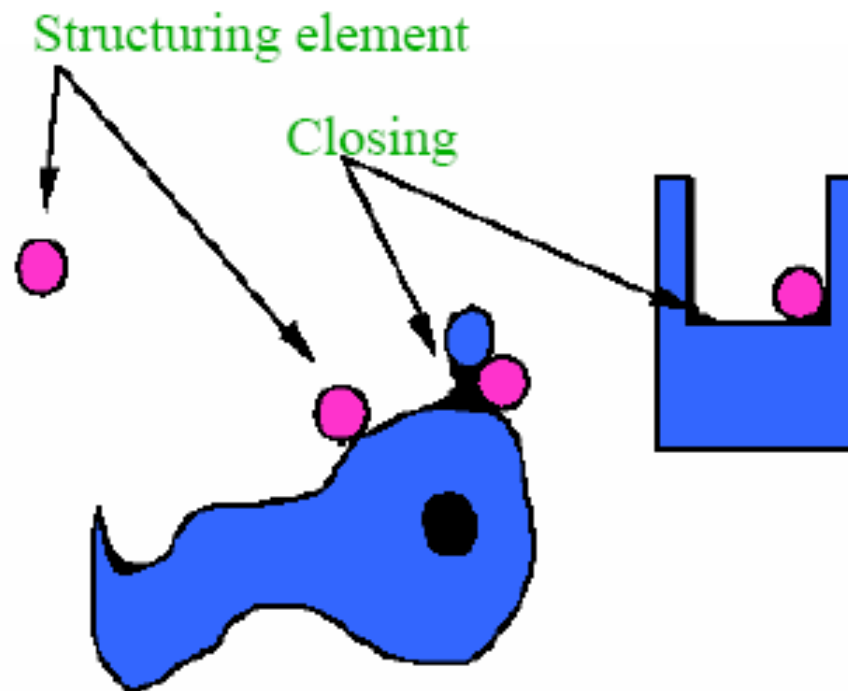
par $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ =

B (7 * 7)
(217%)



Fermeture

Effets constatés :




- réduit les pics, supprime les petits objets et ouvre les isthmes
 - Comble toutes les zones de taille inférieure à celle du SE
 - > bouche les petits trous
 - > ferme les détroits
- Les trous de grande taille sont partiellement préservés
- > les contours sont lissés
 - > les particules proches sont connectées

Fermeture

Exemple fonctionnel :




→
3*3 plan

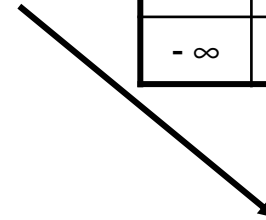


Fermeture

Exercise

20	20	20	17	20	47	82	92
15	15	15	20	37	75	92	130
15	15	20	37	90	101	115	165
17	20	35	105	157	127	145	145
40	55	112	205	200	170	152	147
112	147	215	230	185	157	137	147
205	237	250	237	187	150	142	145
237	247	250	240	220	205	182	177

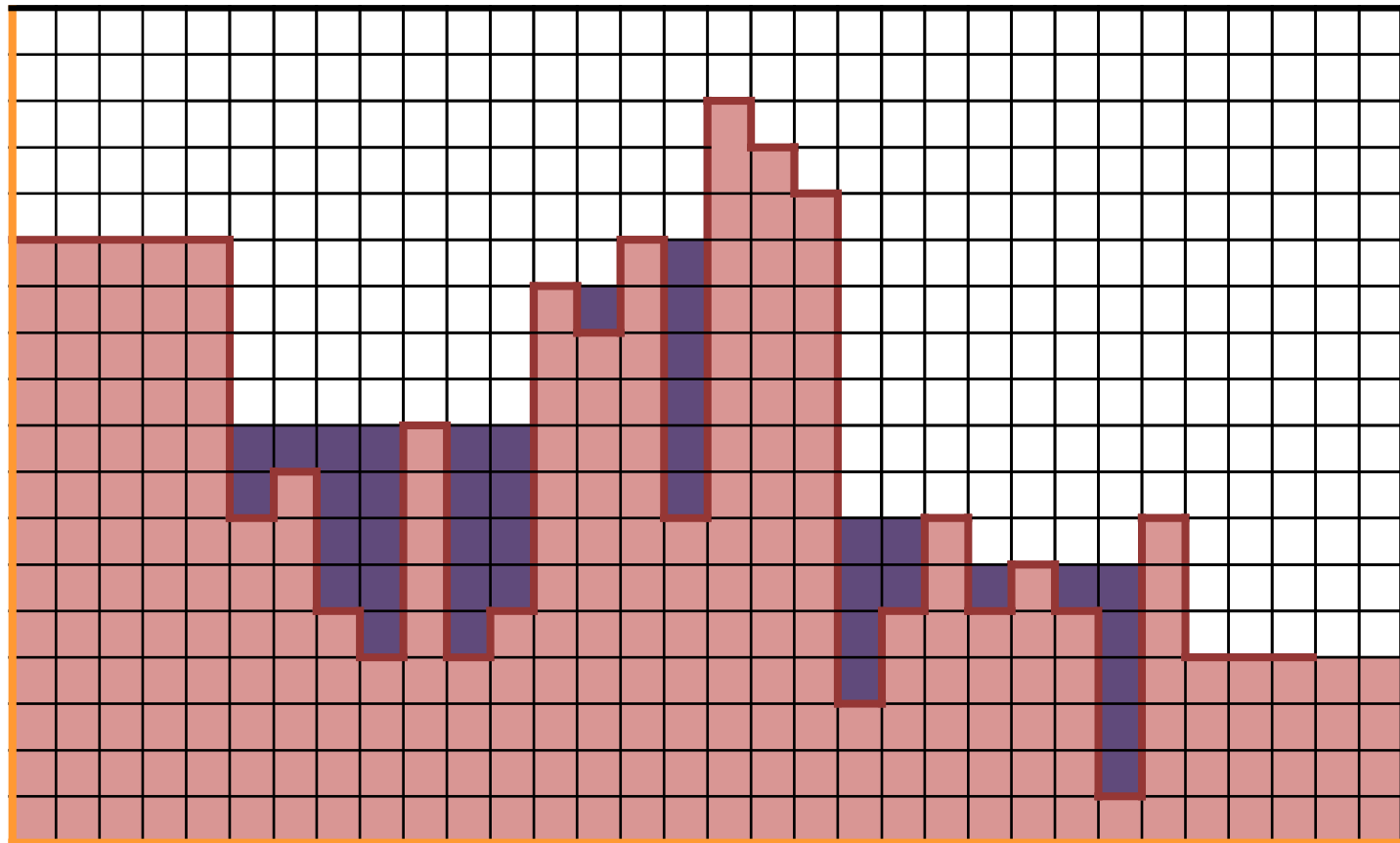
$-\infty$	0	$-\infty$
0	0	0
$-\infty$	0	$-\infty$



		?					

Fermeture

Tracer l'ouverture de la fonction image par un élément structurant de 5 pixels, origine au centre.



Fermeture

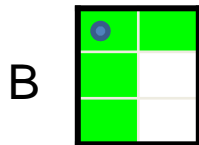
Au fait,

Définition mathématique :

$$\varphi_B(X) = X \bullet B = \mathcal{E}_{\tilde{B}}(\mathcal{S}_B(X)) = \left[\bigcup_x \{B_x \mid B_x \subseteq X^c\} \right]^c$$

pourquoi ?

Prenons un exemple ...



- 1) Dilatation de X par B ? $\rightarrow X_d$
- 2) Erosion de X_d par B
- 3) Erosion de X_d par B réfléchi

Propriétés

- croissance

$$X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(X) \subset \gamma_B(Y) \\ \varphi_B(X) \subset \varphi_B(Y) \end{cases}$$

- extensivité / anti-extensivité :

si B contient son origine :

l'ouverture est anti-extensive $\gamma_B(X) \subset X$

la fermeture est extensive $X \subset \varphi_B(X)$

- idempotente :

$$\gamma_B(\gamma_B(X)) = \gamma_B(X)$$

$$\varphi_B(\varphi_B(X)) = \varphi_B(X)$$

Ouverture et
fermeture sont bien
des filtres
morphologiques.

Propriétés

- Dualité :

si le même élément structurant est utilisé, ouverture et fermeture sont duales :

$$\varphi_B (X) = \left(\gamma_B (X^c) \right)^c$$

$$\gamma_B (X) = \left(\varphi_B (X^c) \right)^c$$

Sommaire

1. Introduction au filtrage morphologique
2. Filtres standards : ouverture et fermeture
3. Top-Hat
4. Construction de nouveaux filtres
5. Analyse granulométrique
6. Exemple applicatif de synthèse

Objectifs du Top-hat

- 1) Éliminer les variations lentes d'un signal
- 2) Amplifier le contraste

Images cibles :

images à niveaux de gris

Définition

Top – Hat : résidu de l'ouverture (ES plan en général)

$$TH_g = id - \gamma_g$$

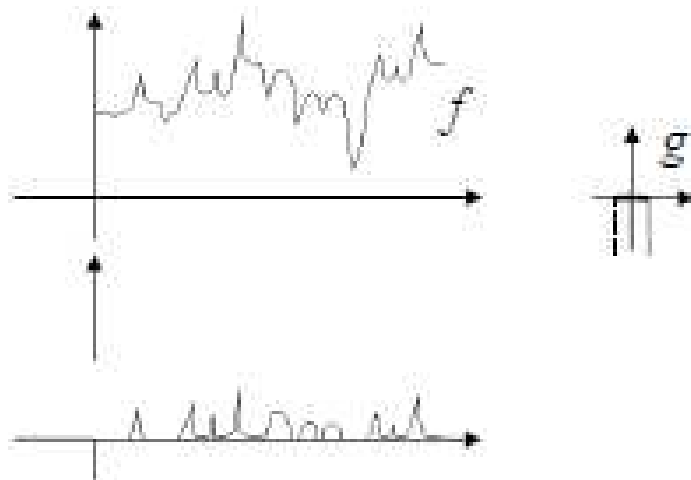
Top – Hat conjugué : résidu de la fermeture

$$TH_g^* = \varphi_g - id$$

Exemple 1D

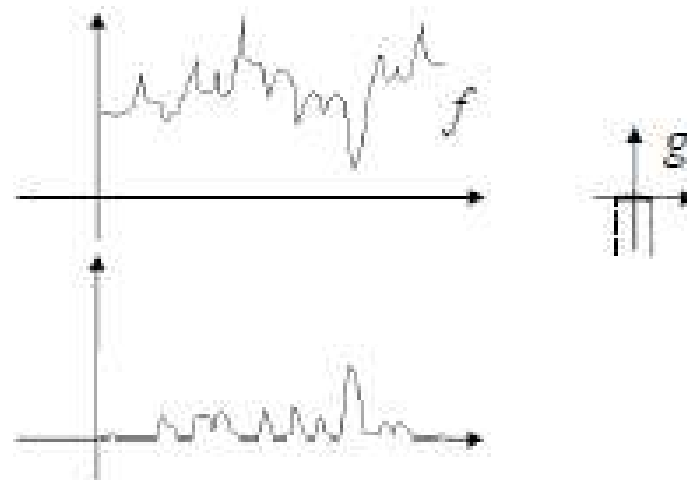
Top-hat

$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \gamma_y(x)$$

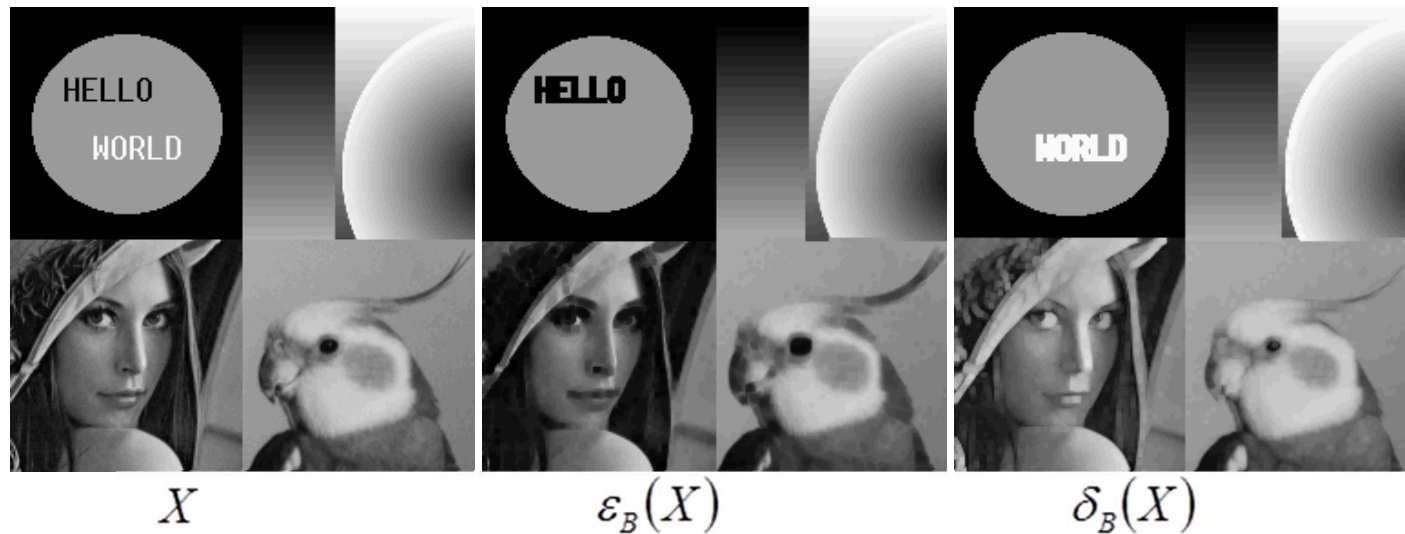


Top-hat conjugué

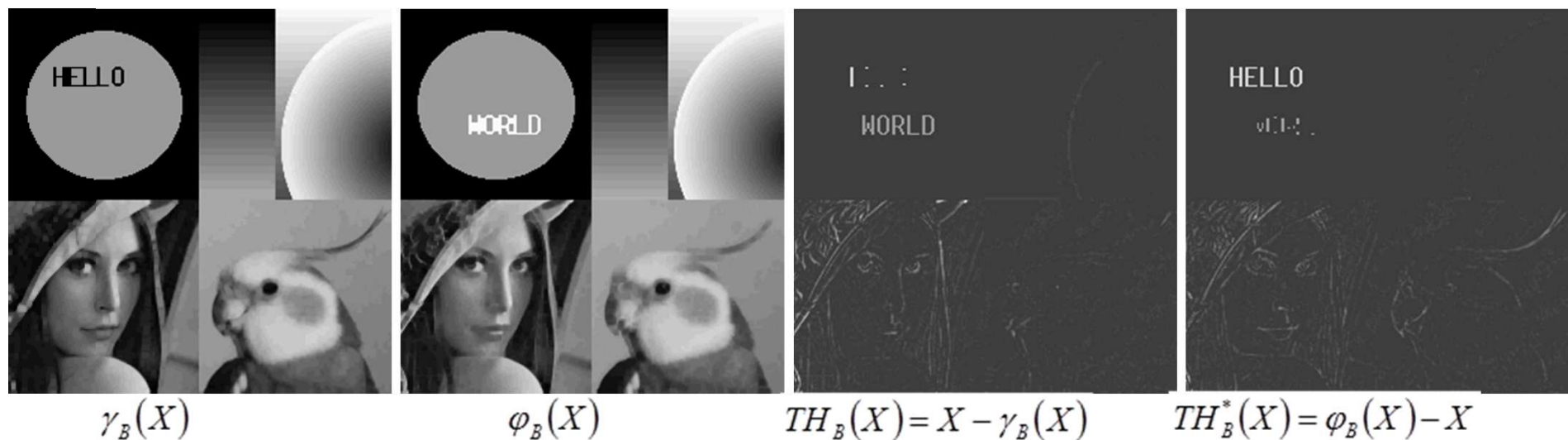
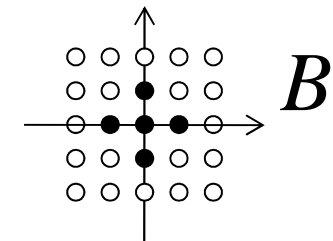
$$\Phi(x) = \varphi_y(x) \quad \Psi(x) = x$$



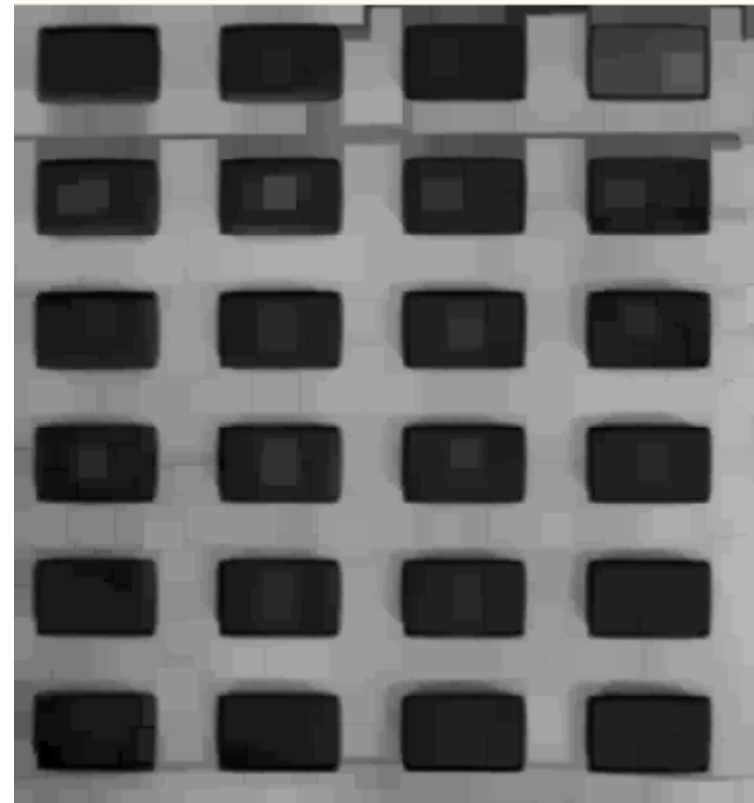
Exemple 2D



(A.Manzanera)



Exemple 2D

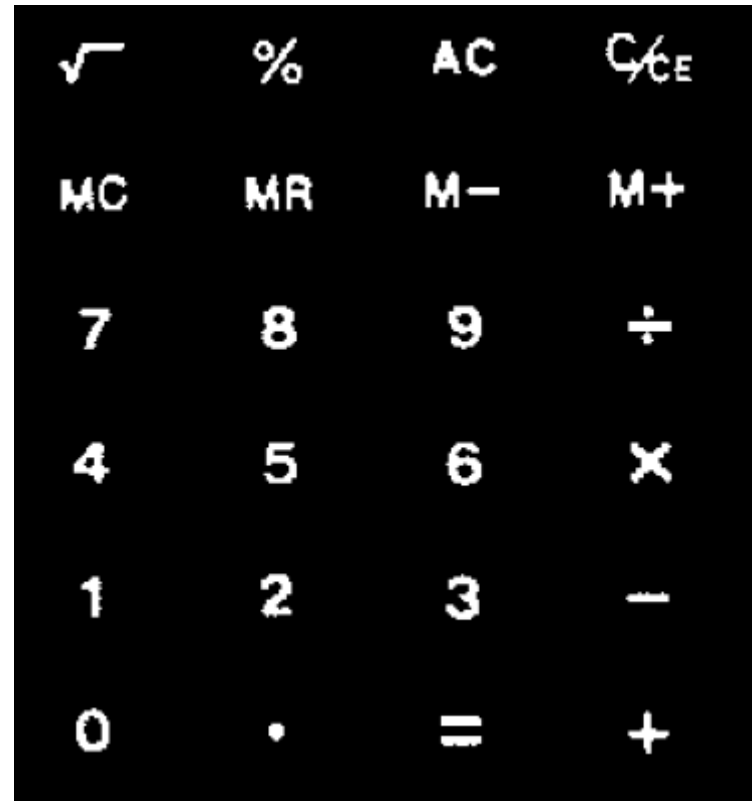


ouverture

Exemple 2D



Top-hat



Seuillage

Effets et propriétés

Effets :

extraction de toutes les structures qui ne contiennent pas l'élément structurant

Propriétés :

- idempotent $TH (TH (f)) = TH (f)$

- si $f > 0$, anti-extensif

$$TH (f) < f$$

Remarque : Top-Hat avec ES non-plan = rolling ball

Applications

1) Correction de dérive d'éclairement

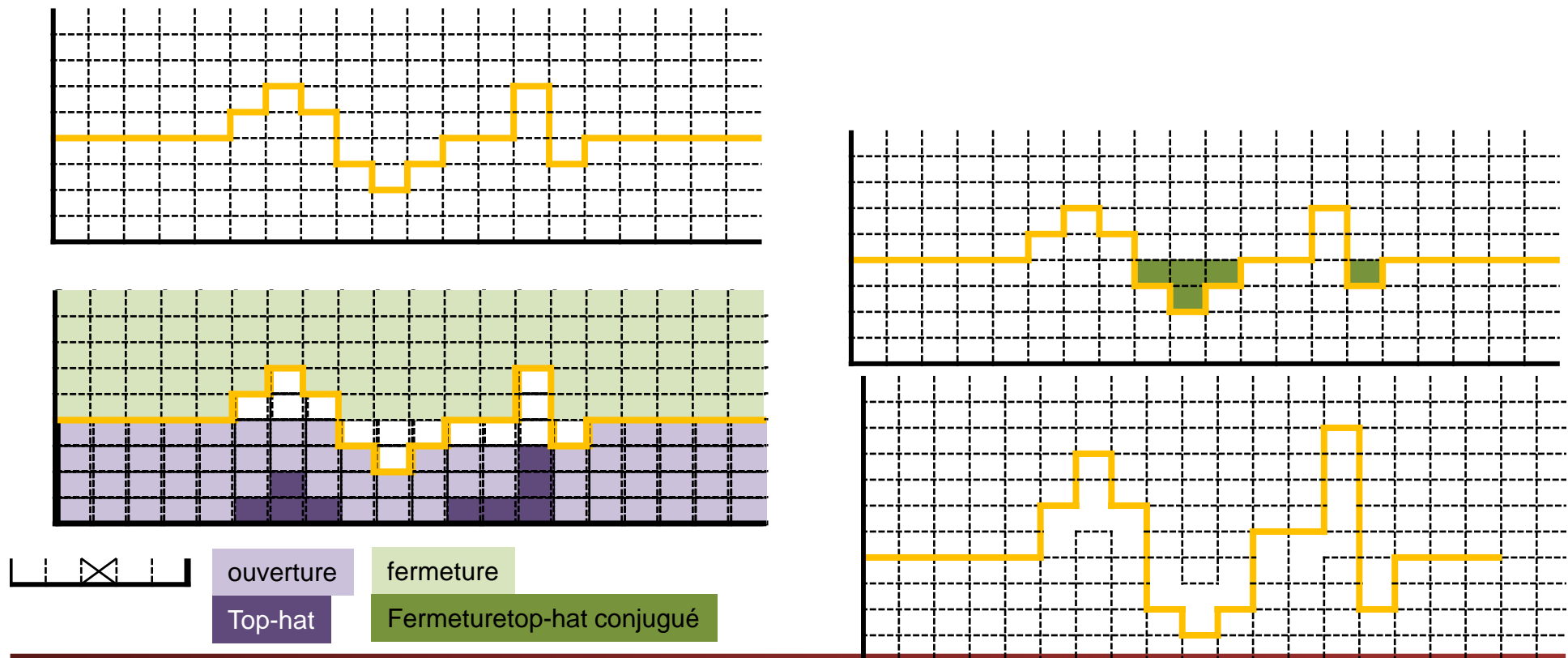
2) Amplification de contraste

$$K^{TH} = \underbrace{id + TH_g}_{\text{Mise en valeur des objets clairs}} - \underbrace{TH_g^*}_{\text{Mise en valeur des objets sombres}}$$

Applications

2) Amplification de contraste

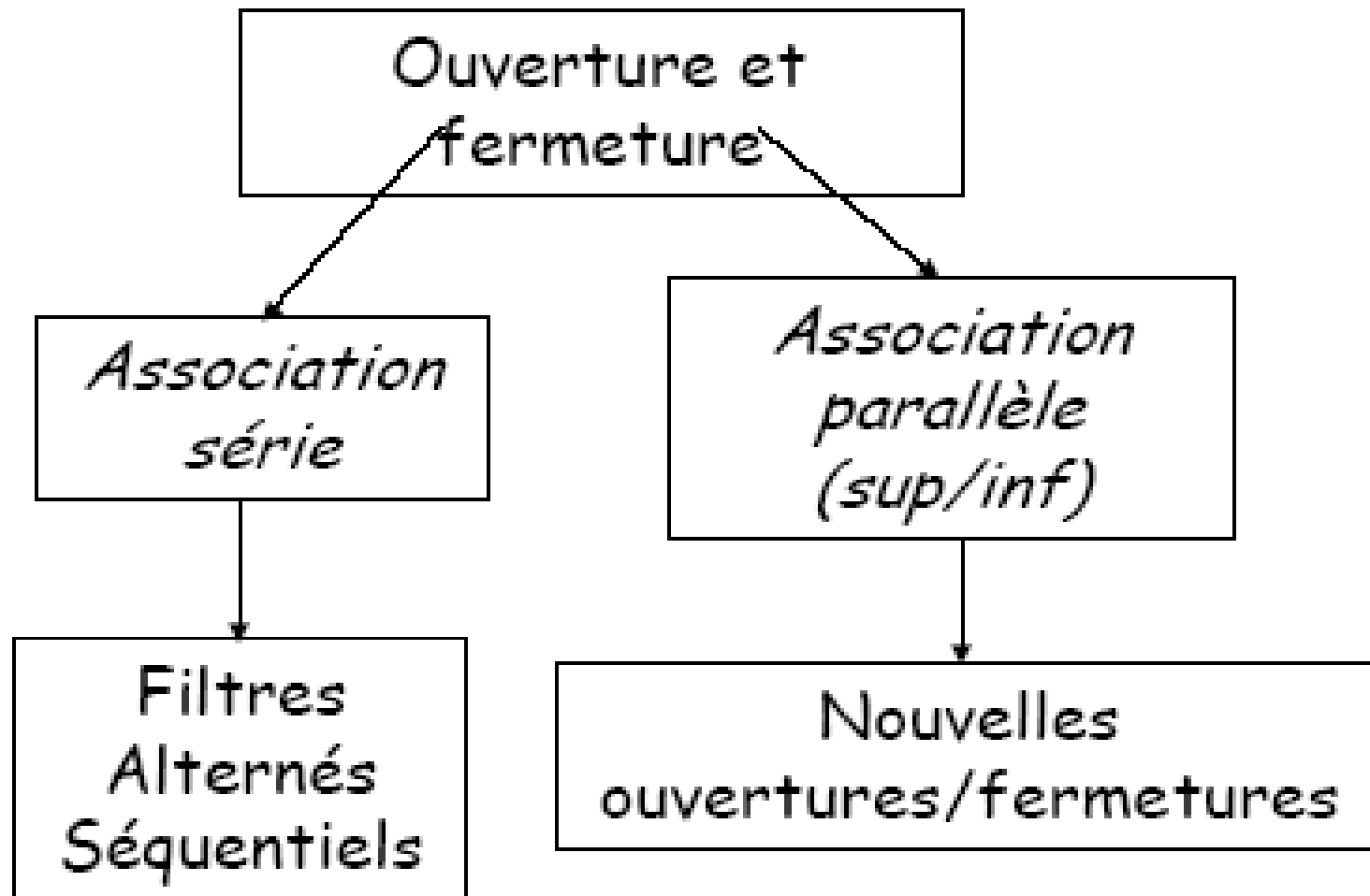
Application de K^{TH} avec un élément structurant de taille 5



Sommaire

1. Introduction au filtrage morphologique
2. Filtres standards : ouverture et fermeture
3. Top-Hat
4. Construction de nouveaux filtres
5. Analyse granulométrique
6. Exemple applicatif de synthèse

Construction de nouveaux filtres



Sup d'ouvertures / inf de fermetures

Théorème :

Tout sup d'ouvertures est une ouverture.

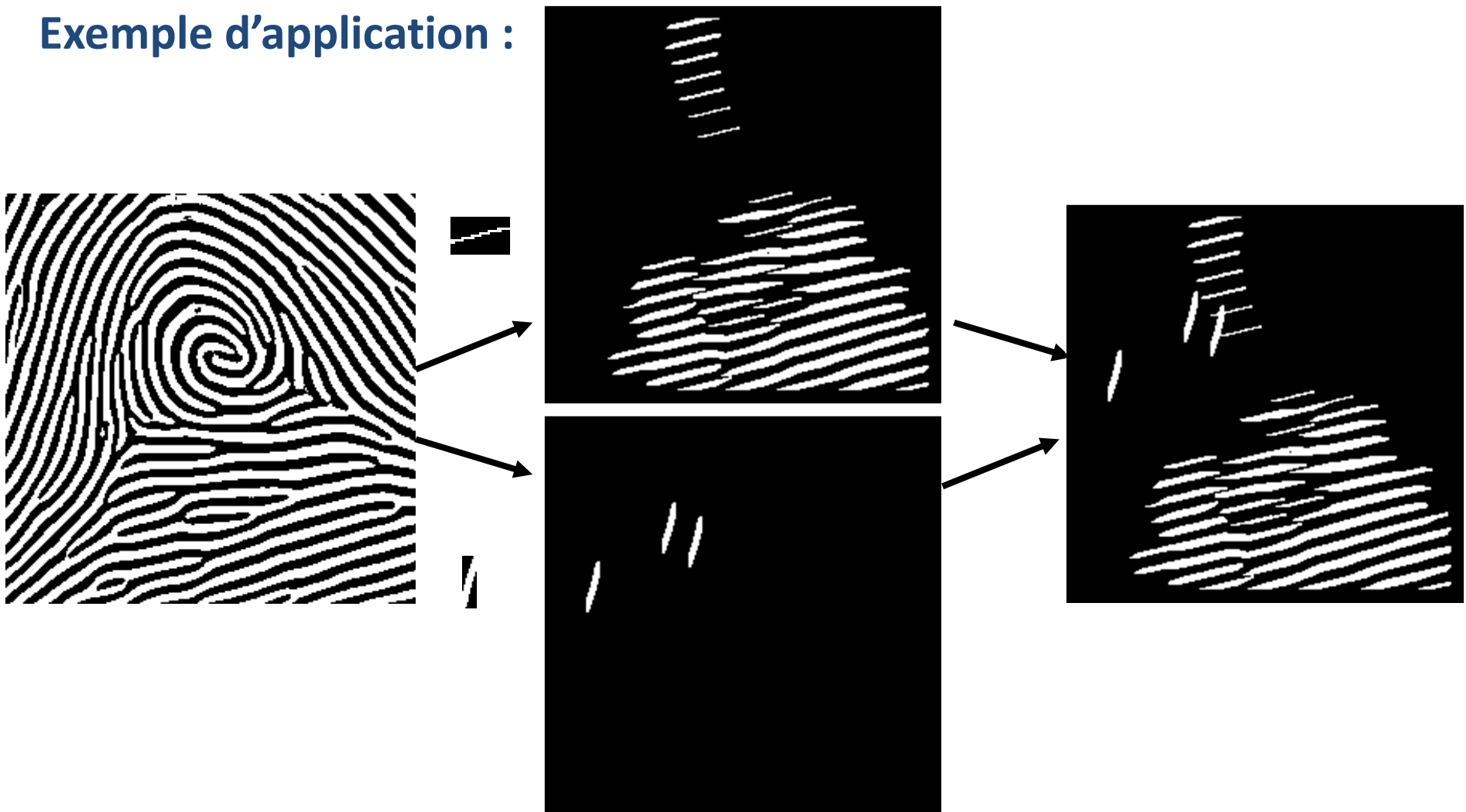
Tout inf de fermetures est une fermeture.

Exemple d'application :

Extraction de structures directionnelles d'une image avec des ouvertures / fermetures par des segments

Sup d'ouvertures / inf de fermetures

Exemple d'application :



Ouverture / fermeture algébriques

Ouverture / fermeture algébriques généralisent les opérateurs d'ouverture / fermeture morphologiques.

Définition :

Une ouverture algébrique est un filtre morphologique anti-extensif.

Une fermeture algébrique est un filtre morphologique extensif.

Propriétés :

Un sup d'ouvertures morphologiques est une ouverture algébrique.

Un inf de fermetures morphologiques est une fermeture algébrique.

Autre exemple : ouverture / fermeture par aire

Ouverture / Fermeture par aire

En binaire, parfois petits objets \cong bruit, éléments non pertinents

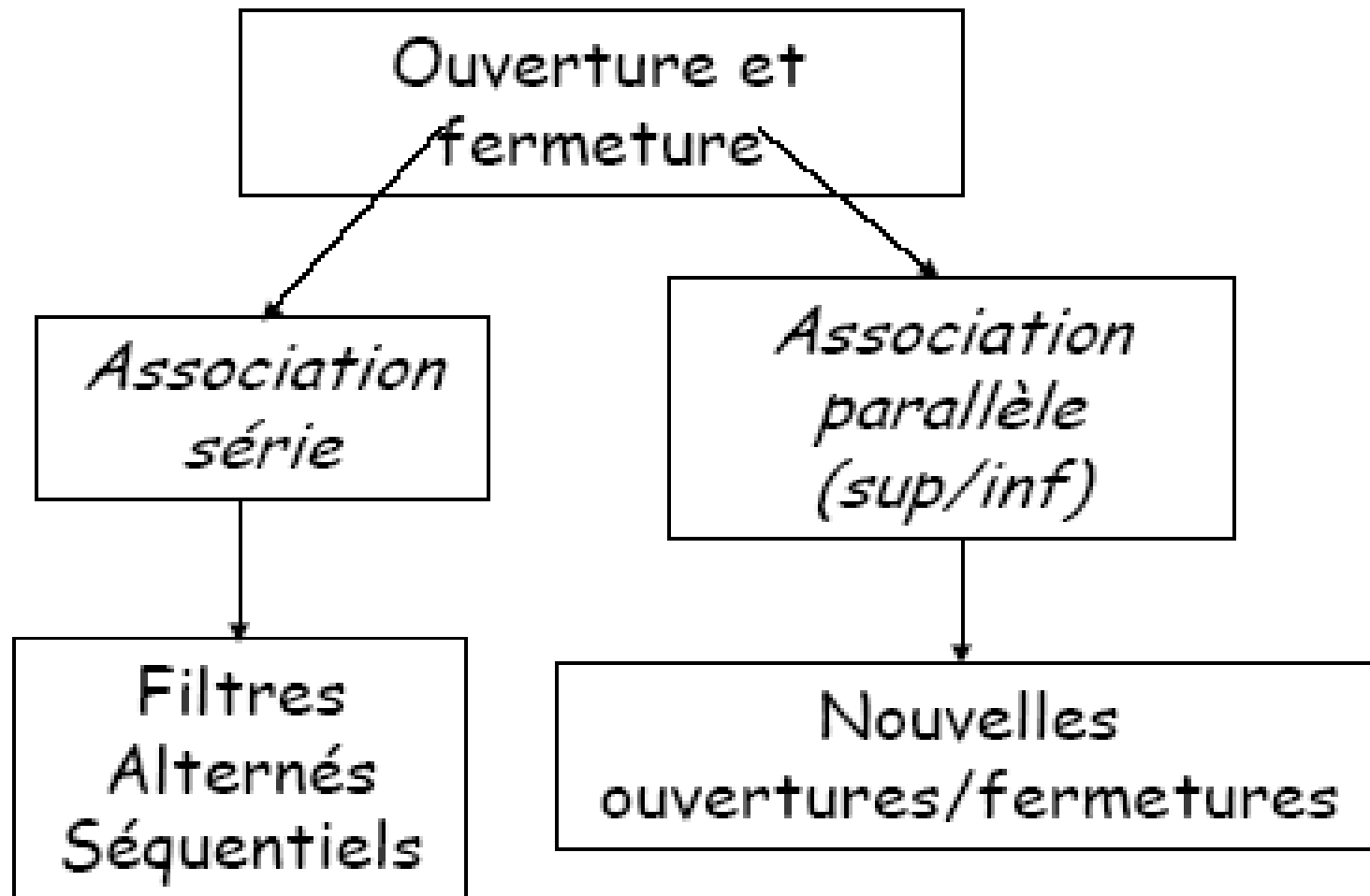
\Rightarrow Opération de filtrage : suppression des composantes connexes dont la surface (nombre de pixels) est plus petite qu'une valeur de seuil donnée.

\Rightarrow Opération de filtrage par aire : γ_λ

Remarques :

Pas de restriction sur la forme de l'élément structurant

Construction de nouveaux filtres



Filtres alternés séquentiels

Idée des FAS :

Ouverture \Rightarrow structures claires
Fermeture \Rightarrow structures sombres

} association

Définition des filtres alternés :

Composition d'ouvertures et de fermetures de taille i (taille du support de g plan)

$$\Psi_i^1 = \varphi_i \gamma_i \quad \Psi_i^2 = \gamma_i \varphi_i$$

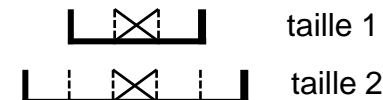
Ou encore :

$$\Psi_i^3 = \varphi_i \gamma_i \varphi_i \quad \Psi_i^4 = \gamma_i \varphi_i \gamma_i$$

Filtres alternés séquentiels

Définition des filtres alternés séquentiels :

Un filtre alterné séquentiel de taille i est défini comme une suite de filtres alternés de taille croissante, en commençant la séquence par une taille égale à 1 et en terminant par i .



Exemple :

$$\Psi_i^{1*} = \Psi_i^1 \dots \Psi_2^1 \Psi_1^1 = \varphi_i \gamma_i \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$$

Propriétés :

Ni extensif, ni anti-extensif

L'original et le signal transformé ne sont pas comparables

Propriété d'absorption

$$i \leq j \Rightarrow FAS_j FAS_i = FAS_j \text{ et } FAS_i FAS_j \leq FAS_j$$

Filtres alternés séquentiels

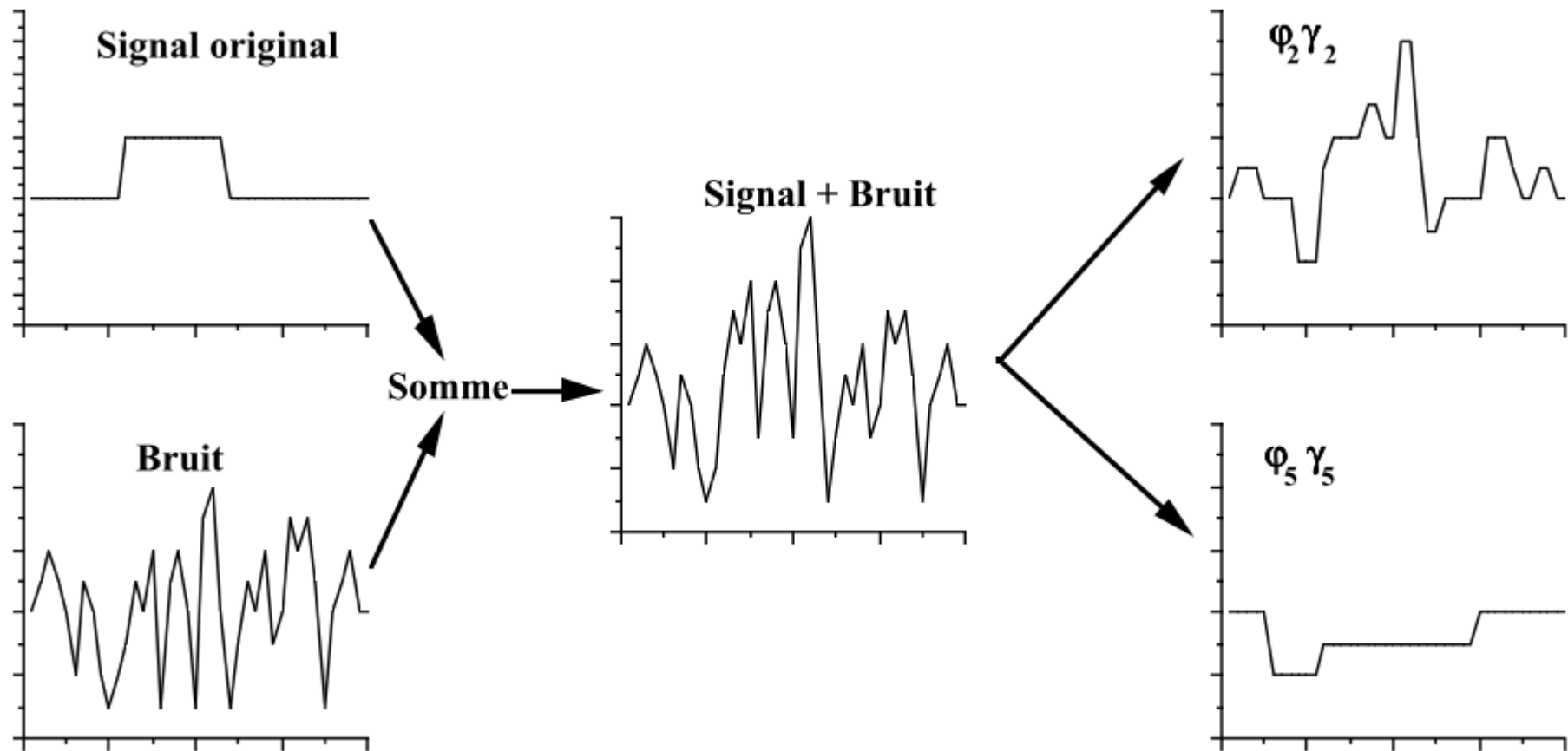
Application principale des FAS :

Réduction de bruit

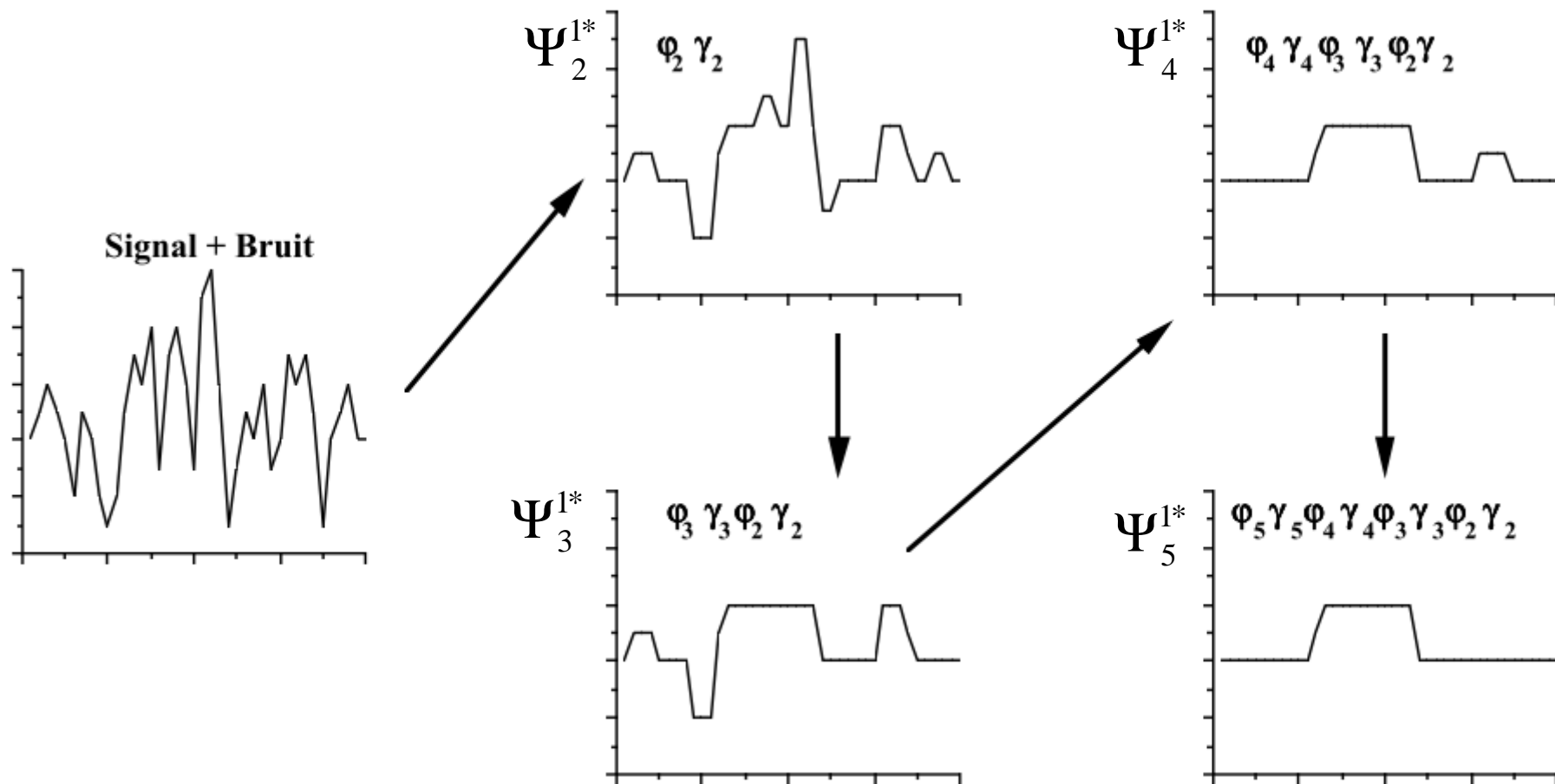
- permettent d'éliminer les pics et les creux de petite surface
- La taille du dernier élément éliminé est déterminée en fonction de la taille minimale des objets de l'image que l'on veut conserver après filtrage.
- Souvent utilisés en pré-traitement, notamment avant les opérateurs gradients.

Filtres alternés séquentiels

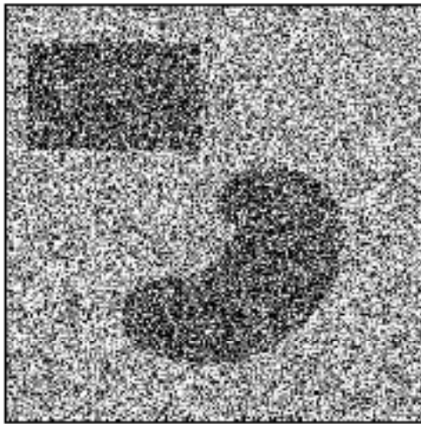
⇒ Un simple $\phi\gamma$ ne permet pas toujours d'éliminer un bruit, quelle que soit la taille des éléments structurants (J.Serra)



Filtres alternés séquentiels

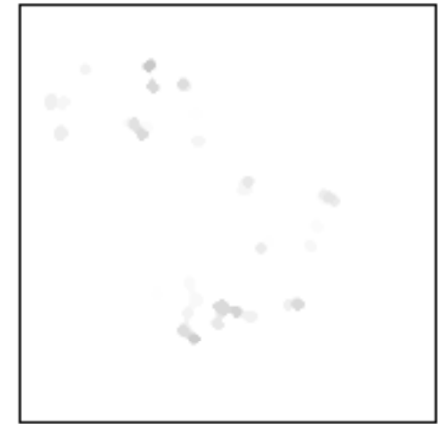


Filtres alternés séquentiels

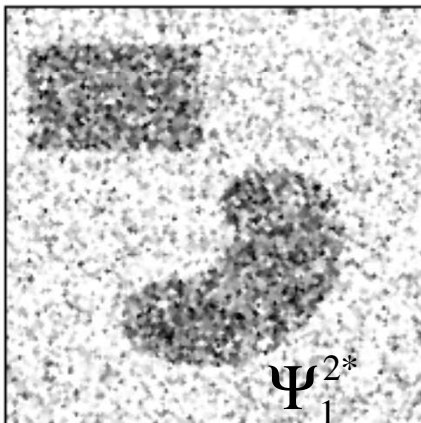


Original

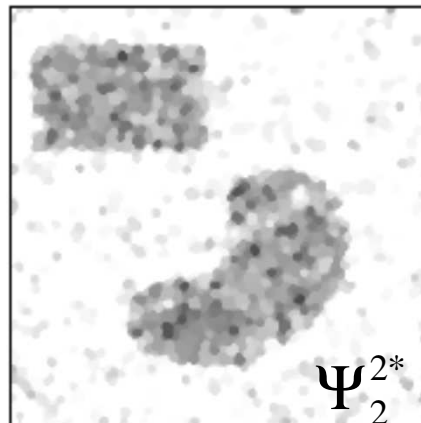
Les filtres alternés séquentiels conduisent à une bonne réduction du bruit grâce à une élimination progressive des pics et des creux de faible surface.



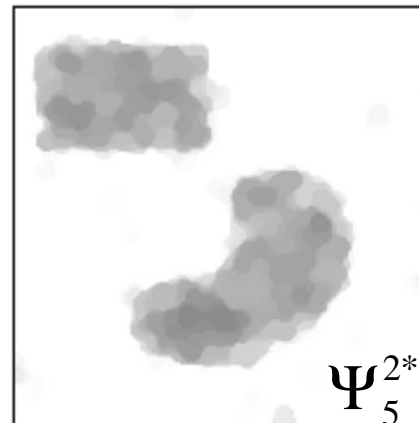
Application directe
du filtre alterné $\gamma_4 \phi_4$



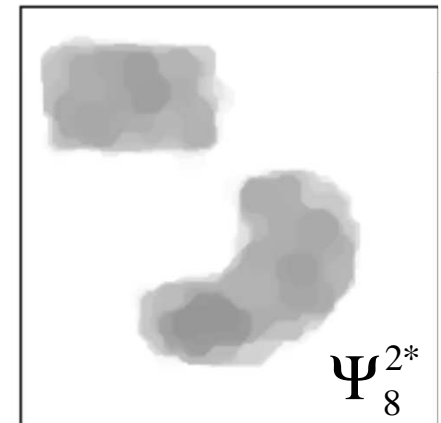
Ψ_1^{2*}



Ψ_2^{2*}



Ψ_5^{2*}

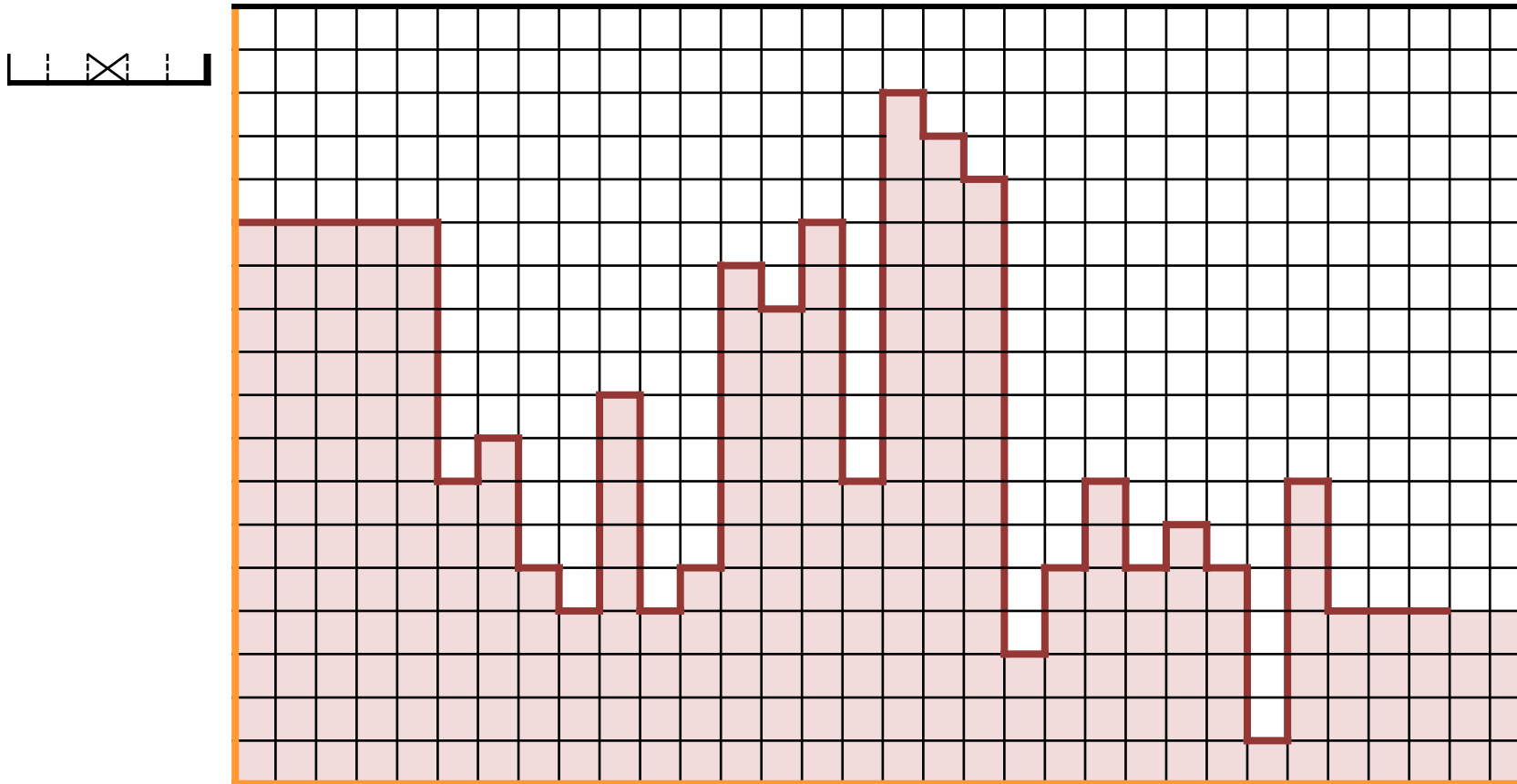


Ψ_8^{2*}

Filtres alternés séquentiels

Signal d'entrée : créneau entre niveaux 5 et 10,
bruité par du BBG de moyenne 5 et d'écart-type 2

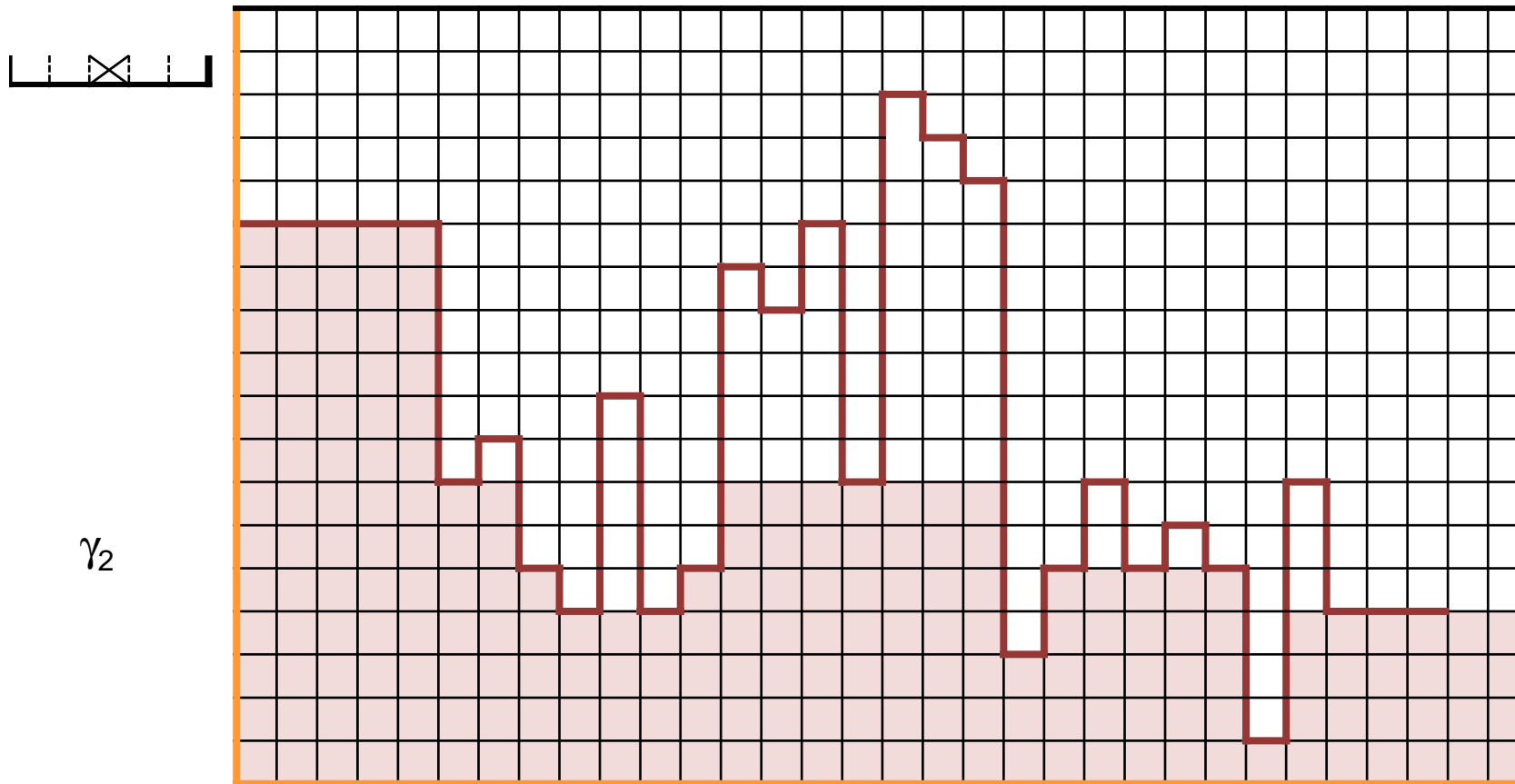
Application de $\phi_2 \gamma_2 = \Psi^1_2$



Filtres alternés séquentiels

Signal d'entrée : créneau entre niveaux 5 et 10,
bruité par du BBG de moyenne 5 et d'écart-type 2

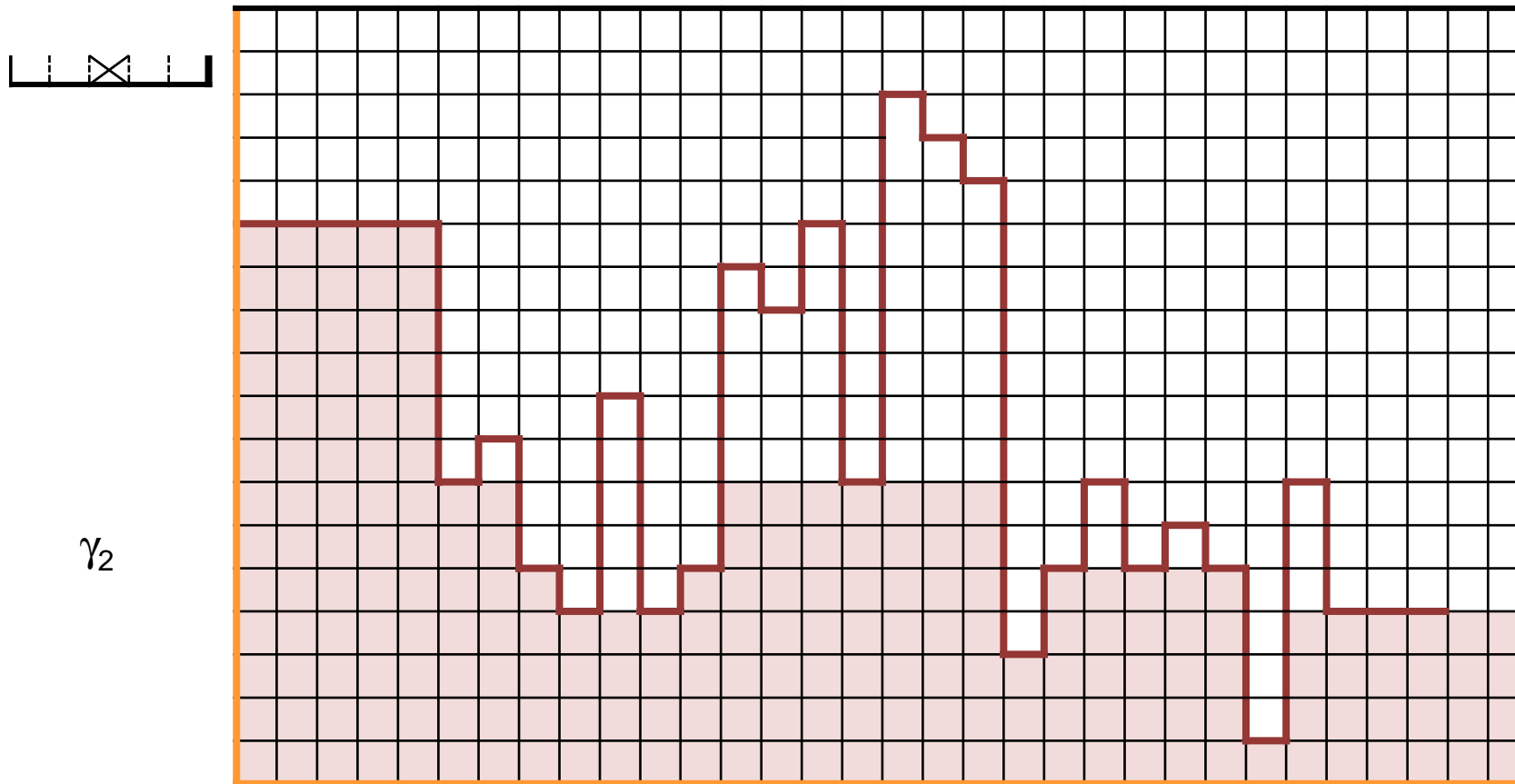
Application de $\phi_2 \gamma_2 = \Psi^1_2$



Filtres alternés séquentiels

Signal d'entrée : créneau entre niveaux 5 et 10,
bruité par du BBG de moyenne 5 et d'écart-type 2

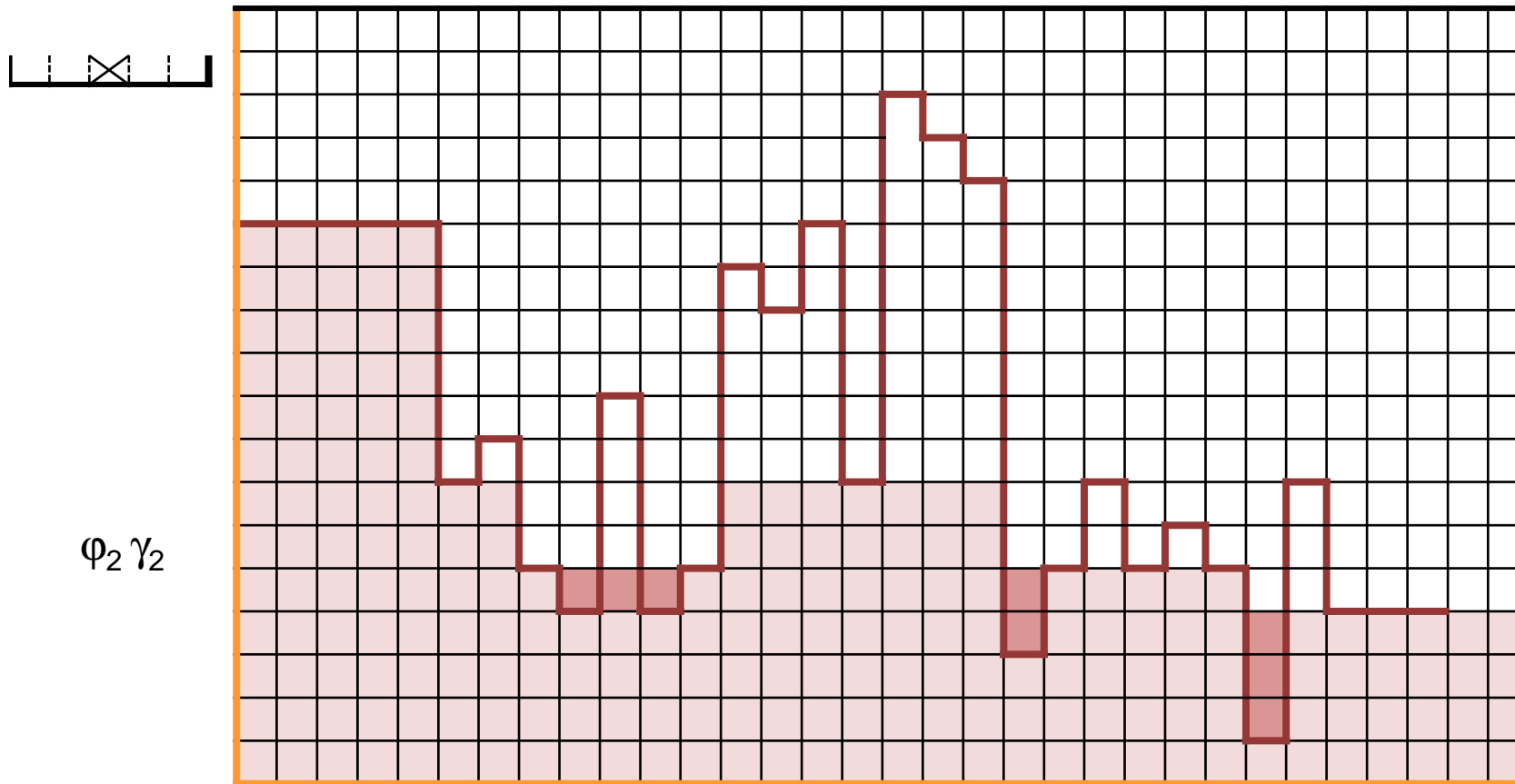
Application de $\phi_2 \gamma_2 = \Psi^1_2$



Filtres alternés séquentiels

Signal d'entrée : créneau entre niveaux 5 et 10,
bruité par du BBG de moyenne 5 et d'écart-type 2

Application de $\phi_2 \gamma_2 = \Psi^1_2$



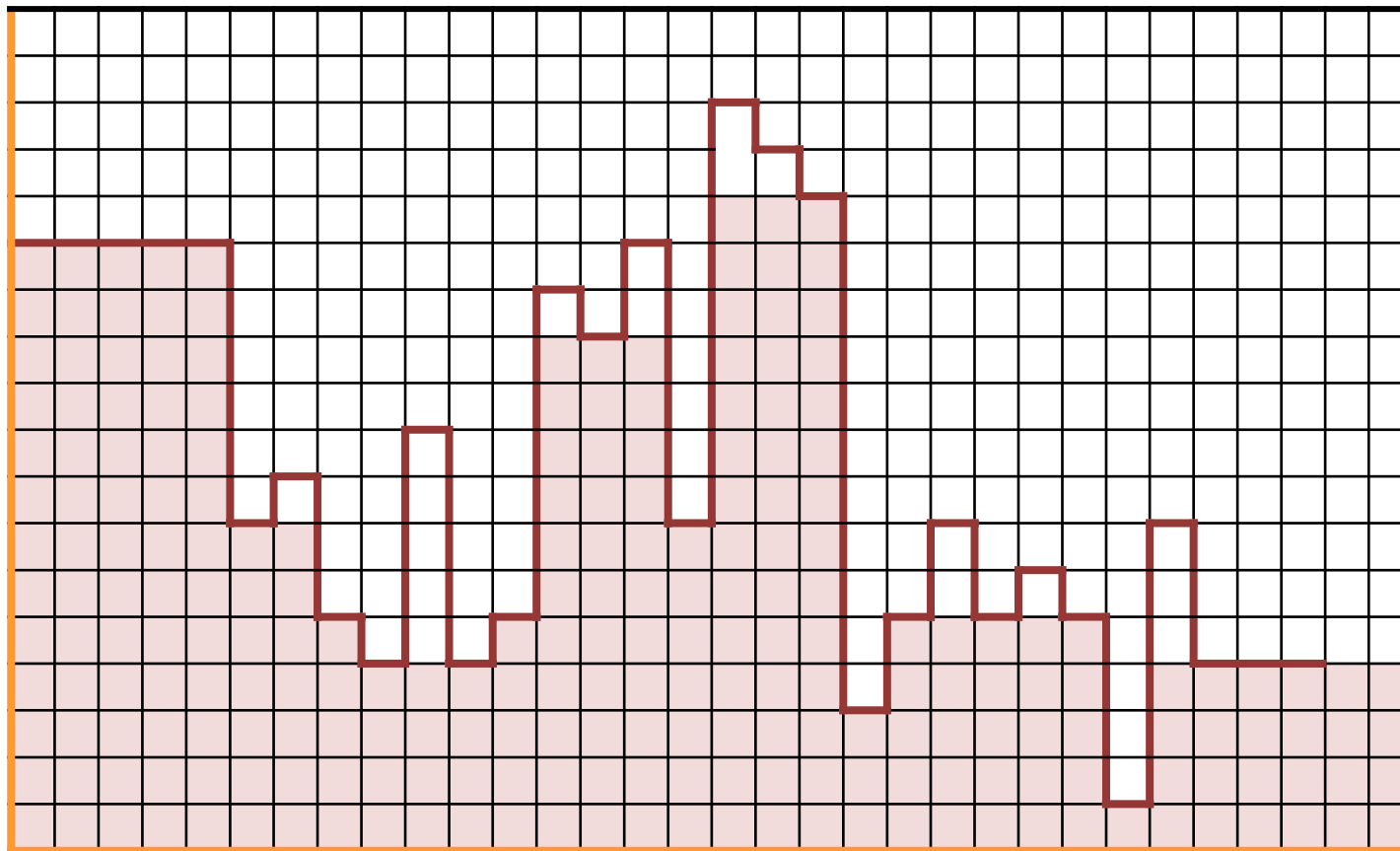
Filtres alternés séquentiels

Signal d'entrée : créneau entre niveaux 5 et 10,
bruité par du BBG de moyenne 5 et d'écart-type 2

Application de $\phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1 = \Psi^1_2$



γ_1



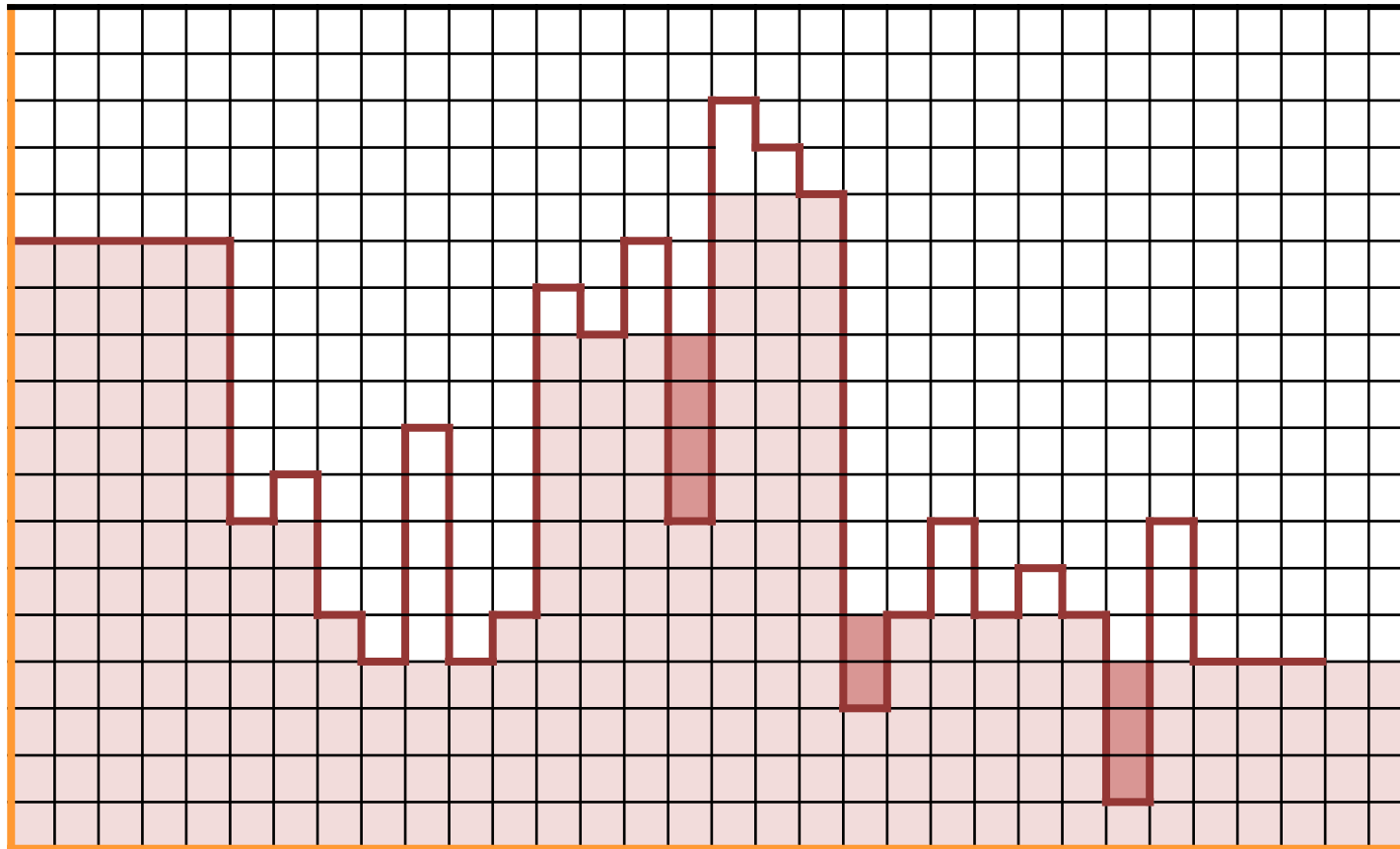
Filtres alternés séquentiels

Signal d'entrée : créneau entre niveaux 5 et 10,
bruité par du BBG de moyenne 5 et d'écart-type 2

Application de $\phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1 = \Psi^1_2$



$\phi_1 \gamma_1$



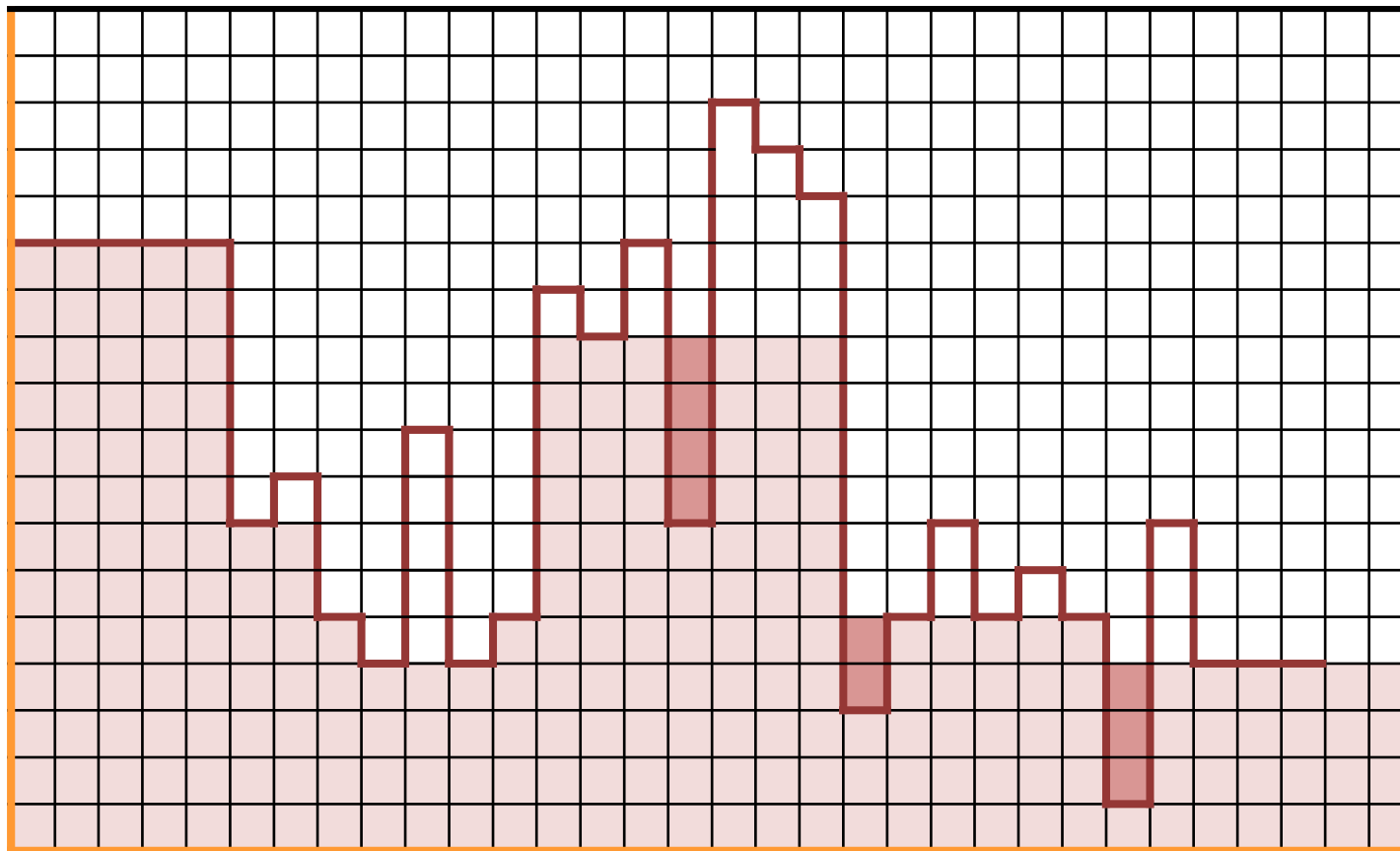
Filtres alternés séquentiels

Signal d'entrée : créneau entre niveaux 5 et 10,
bruité par du BBG de moyenne 5 et d'écart-type 2

Application de $\varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 = \Psi^1_2$



$\gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$



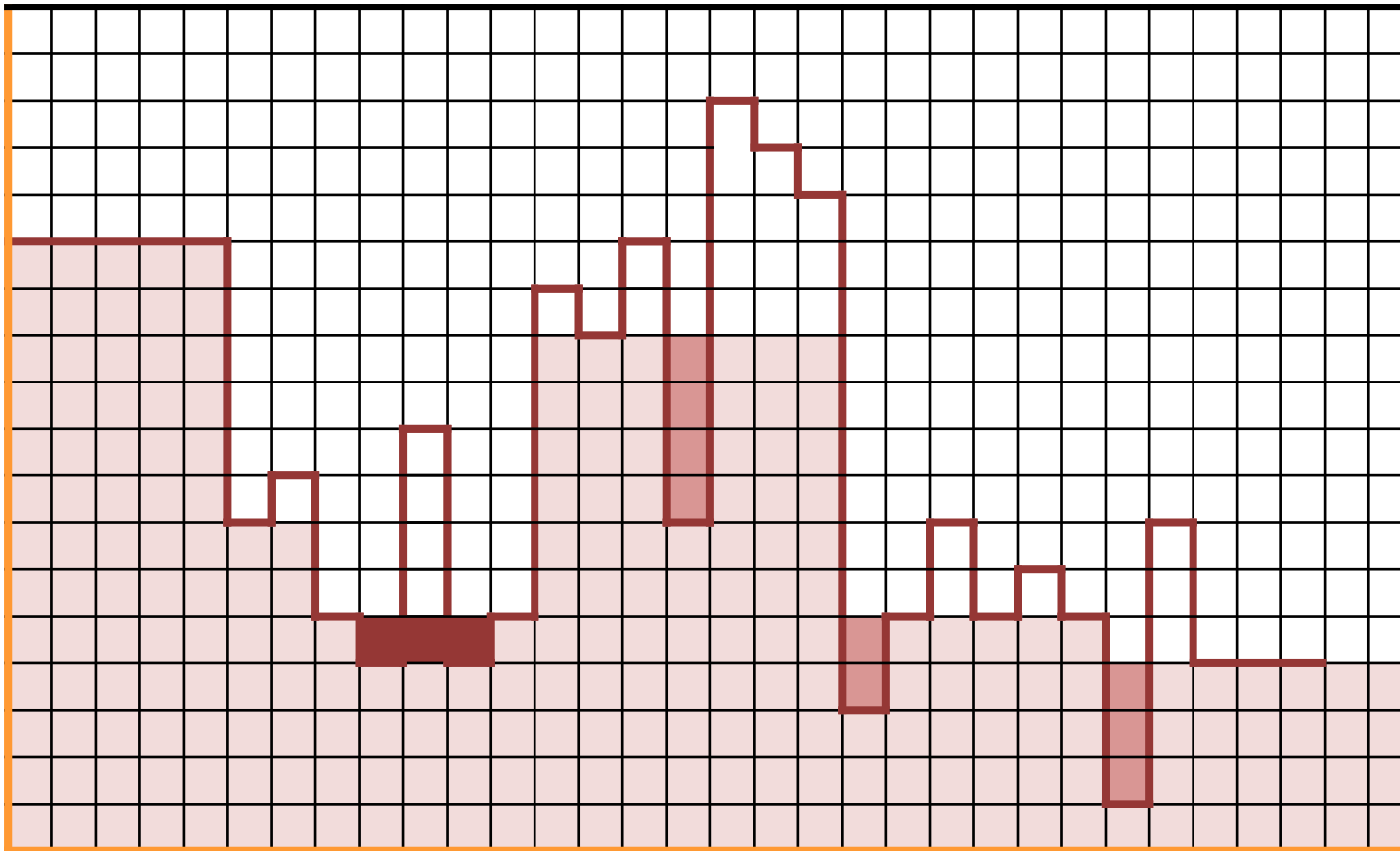
Filtres alternés séquentiels

Signal d'entrée : créneau entre niveaux 5 et 10,
bruité par du BBG de moyenne 5 et d'écart-type 2

Application de $\varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 = \Psi^1_2$



$\varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$



Filtres alternés séquentiels

Comparaison des résultats:

Signal d'entrée : créneau entre
niveaux 5 et 10,
bruité par du BBG de
moyenne 5 et d'écart-type 2

Application de $\phi_2 \gamma_2 \phi_1 \gamma_1 = \Psi_2^{1*}$

Application de $\phi_2 \gamma_2 = \Psi_2^1$

Sommaire

1. Introduction au filtrage morphologique
2. Filtres standards : ouverture et fermeture
3. Top-Hat
4. Construction de nouveaux filtres
5. Analyse granulométrique
6. Exemple applicatif de synthèse

Analyse granulométrique

En traitement linéaire du signal

Filtres passe-haut

⇒ Seules les composantes de haute fréquence sont préservées, les autres sont éliminées

Analyse fréquentielle

= mesure de la contribution de chaque composante à la constitution globale du signal

En morphologie mathématique

Ouvertures / fermetures

⇒ Seules les composantes de grande taille sont préservées, les autres sont éliminées

Analyse granulométrique

= mesure de la contribution de chaque composante à la constitution globale du signal

Analyse granulométrique

Principe :

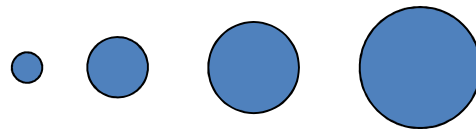
Étude de la taille des objets fondée sur le principe du tamisage :
sélection progressive des objets de tailles données croissantes

Définition :

Formellement, une granulométrie peut être définie par une famille d'ouvertures :

$$(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0} \quad \text{et} \quad \text{si } \lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \gamma_\lambda \leq \gamma_\mu$$

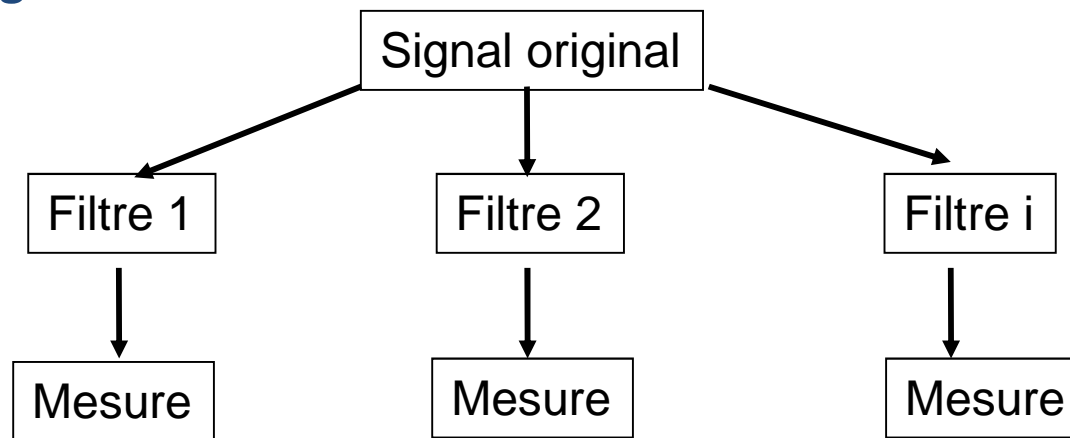
La famille d'ouvertures par des boules de rayon r définit une granulométrie.



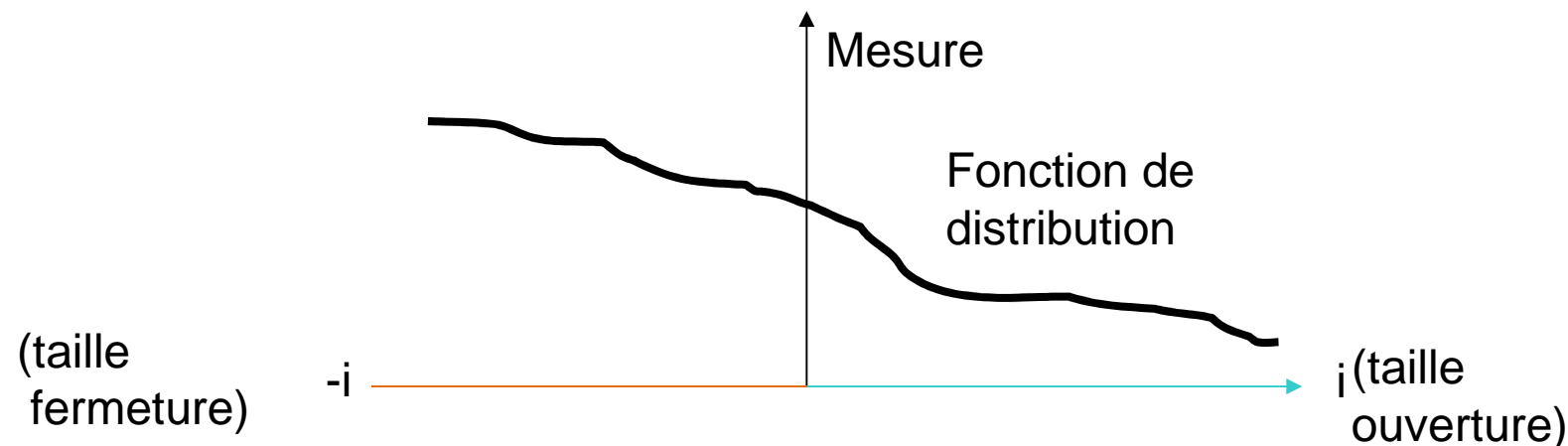
Ainsi, sélection des petites particules, puis des particules de plus en plus grosses.

Analyse granulométrique

Courbe de granulométrie



on reporte la mesure en fonction de la taille du filtre :



Analyse granulométrique

Interprétation de la courbe (application binaire)

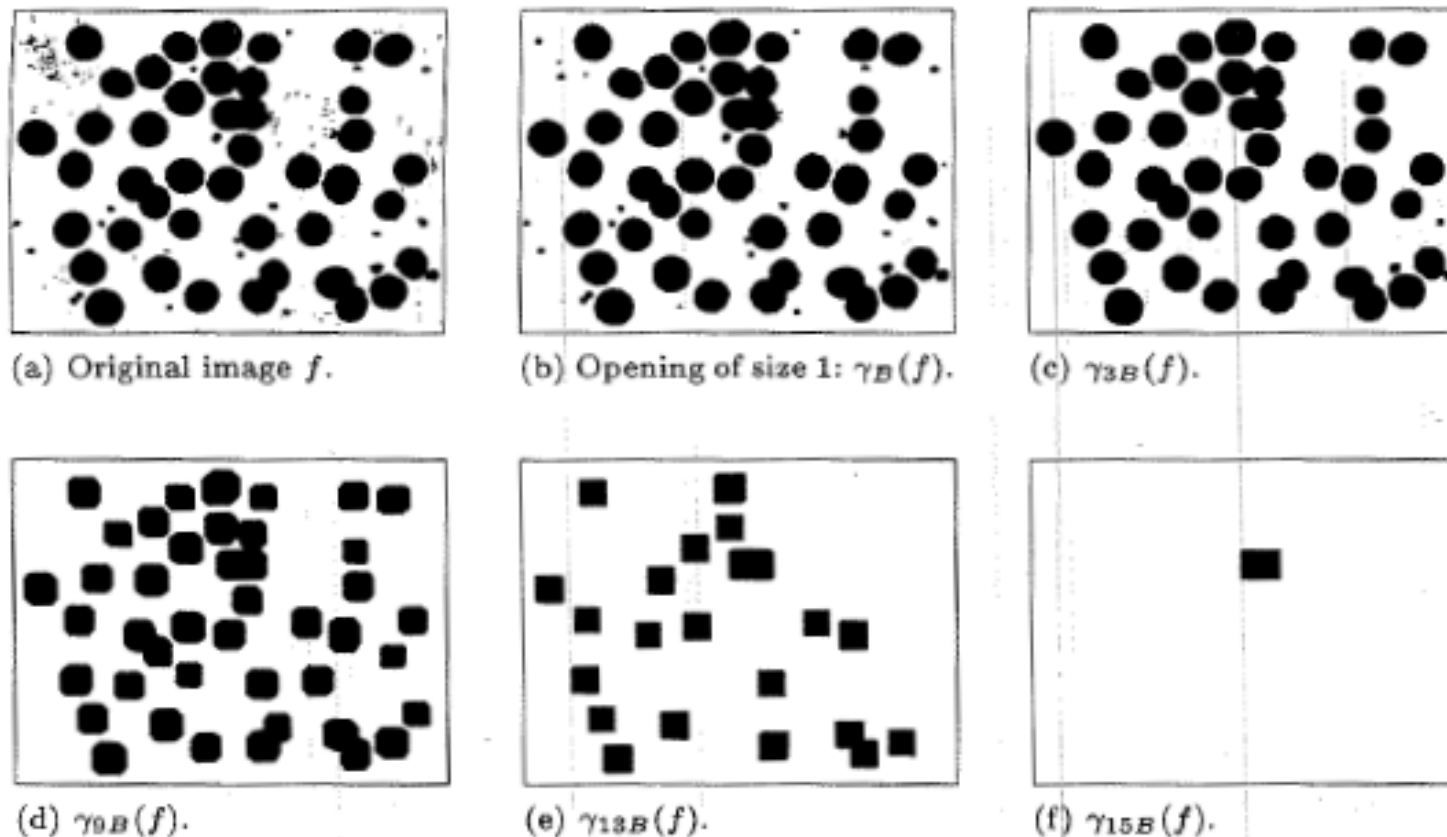


Fig. 4.21. Successive openings of a binary image of blood cells or granulometry (using square SEs of increasing size).

(Soille, p.112)

Analyse granulométrique

Interprétation de la courbe (application binaire)

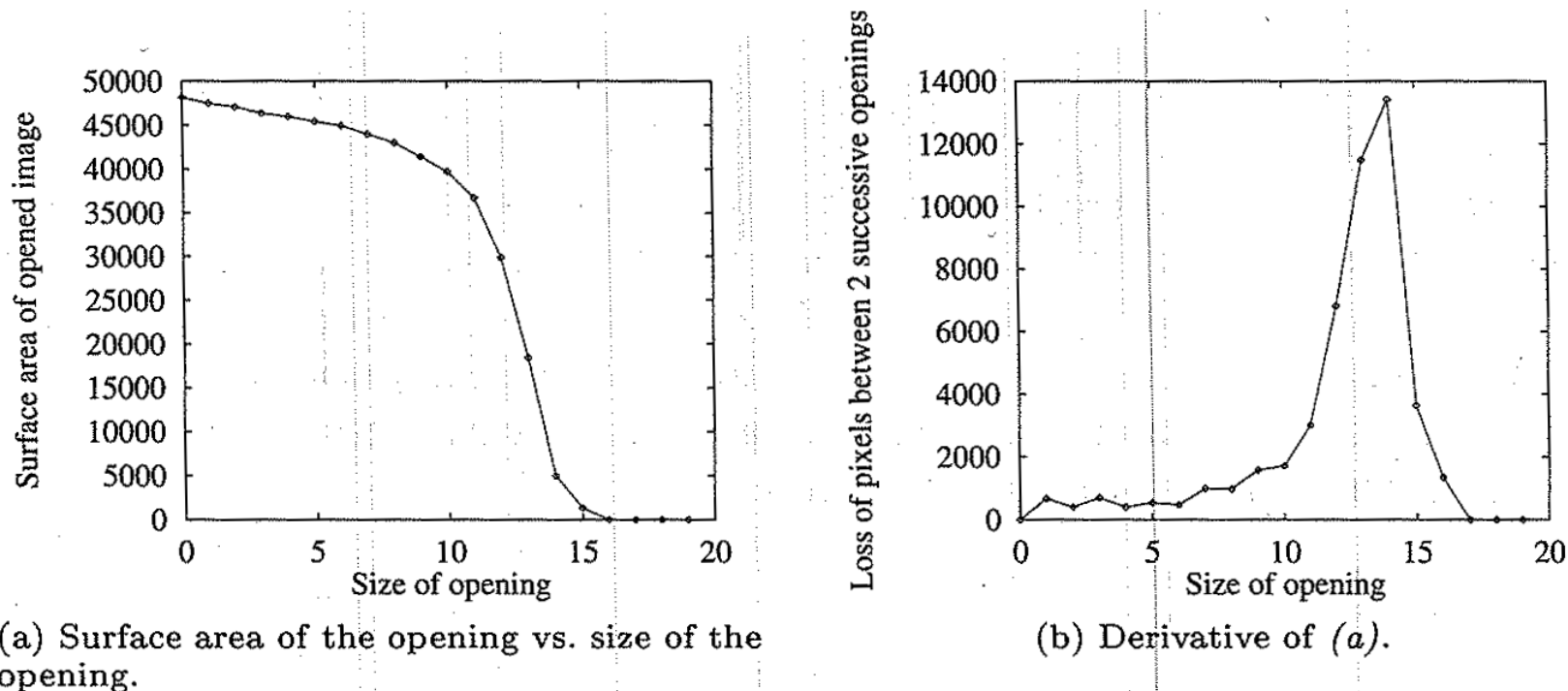


Fig. 4.22. Granulometric curves corresponding to Fig. 4.21. These curves reflect the size distribution of the sample. The high peak observed in the pattern spectrum (b) indicates that most cells of Fig. 4.21a are at this size.

Mesure = aire

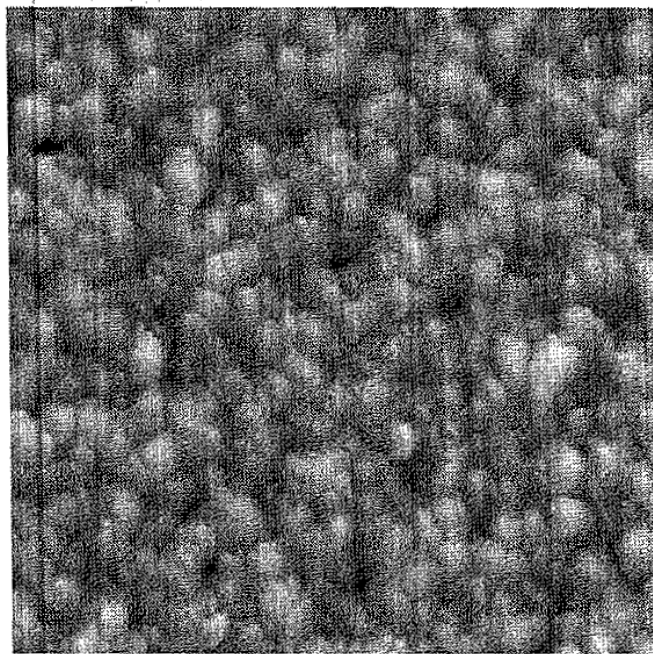
(Soille, p.112)

Analyse granulométrique

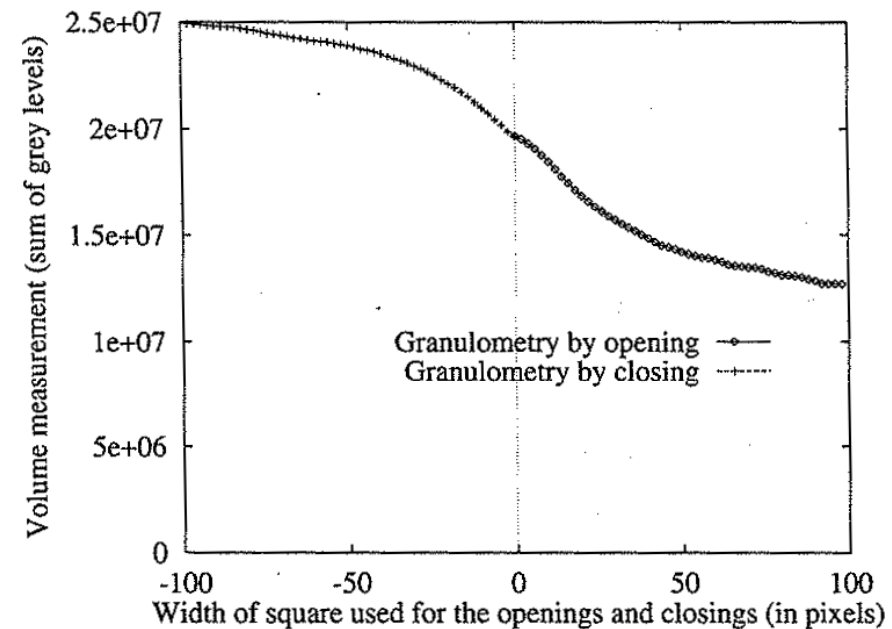
Interprétation de la courbe (application niveaux de gris)

Mesure = volume

Application : analyse de texture



(a) Roughness image



(b) Granulometry of (a)

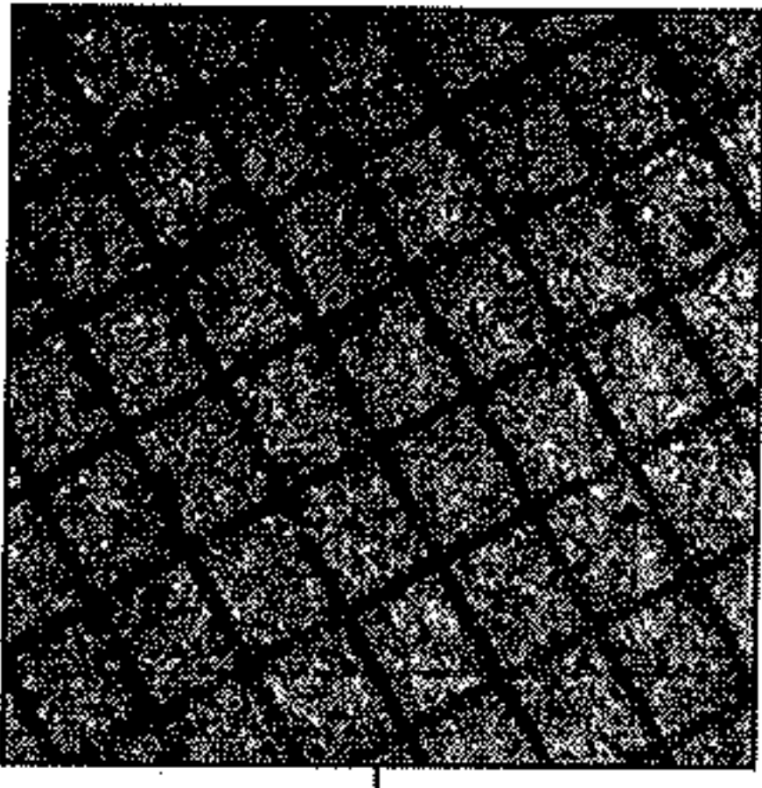
Fig. 4.23. Grey scale granulometry by closing and opening of an image representing the roughness of a cylinder used for producing metal sheets.

Sommaire

1. Introduction au filtrage morphologique
2. Filtres standards : ouverture et fermeture
3. Top-Hat
4. Construction de nouveaux filtres
5. Analyse granulométrique
6. Exemple applicatif de synthèse

Exemple d'application industrielle

- **Contexte** : Mesure de la déformation de matériau
- **Objectif** : extraire les nœuds de la grille (à partir de l'extraction des structures linéaires de l'image)



Quelle chaîne de traitements morphologiques pour extraire les structures linéaires?