

# Morphologie mathématique

- Chapitre 1 –  
Erosion et Dilatation

Télécom Saint Etienne – Image 2

Christophe Ducottet  
d'après les diapositives de Cécile Barat

- 1. Cadre binaire
- 2. Cadre fonctionnel
- 3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

# Plan du cours

1. Cadre binaire

2. Cadre fonctionnel

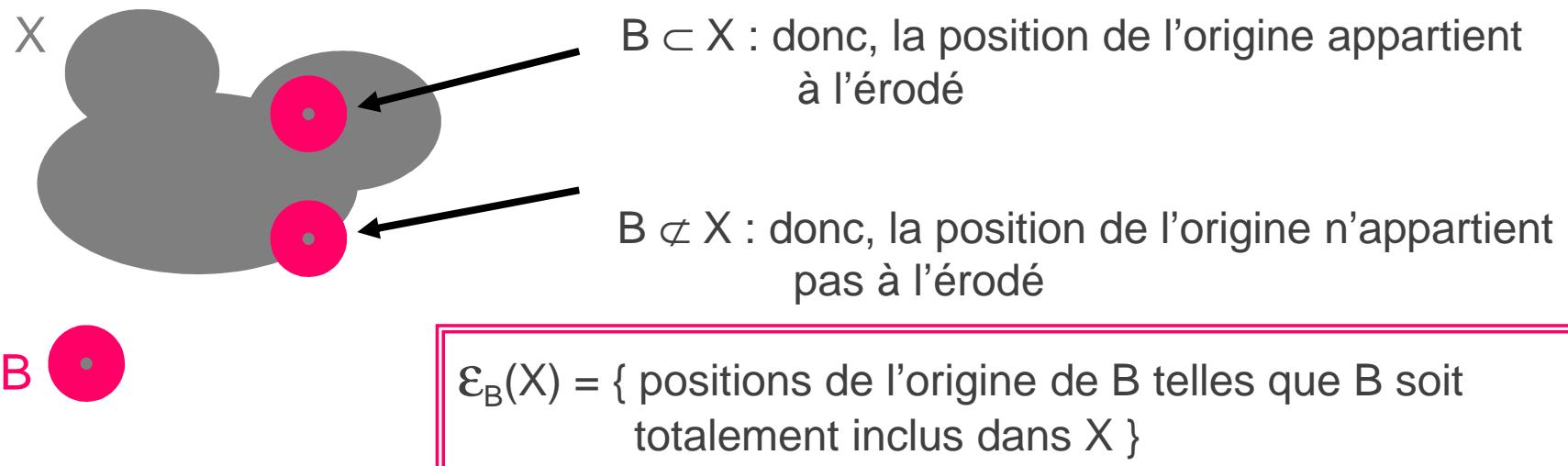
3. Applications

# Erosion binaire

- Notation :  $\mathcal{E}_B(X)$  (érosion de X par B)
  - X : ensemble objet étudié
  - B : élément structurant servant à analyser X.
- Principe :
  - Transformation Tout-ou-Rien
  - Question posée : inclusion de B dans X ? (pour toutes les positions de B)

# Erosion binaire

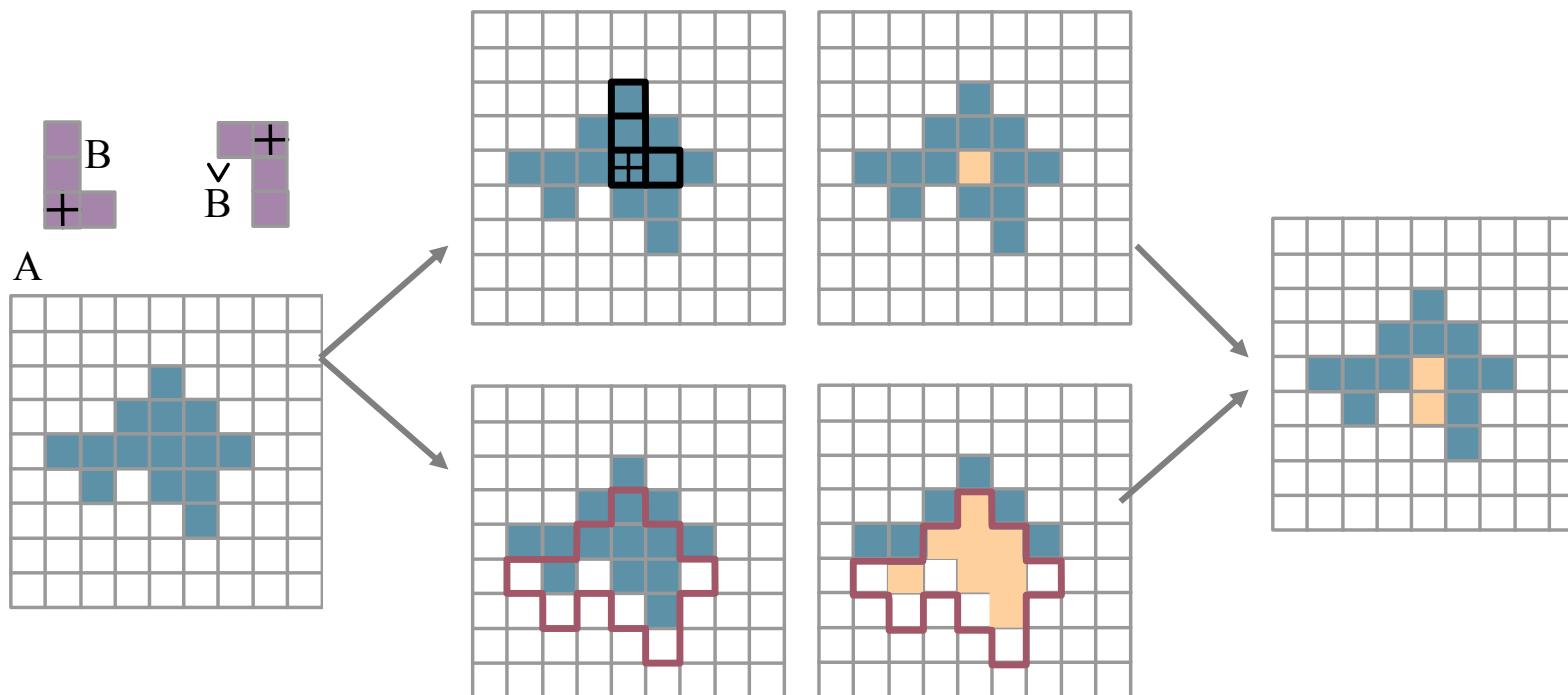
- Notation :  $\mathcal{E}_B(X)$  (érosion de X par B)
  - X : ensemble objet étudié
  - B : élément structurant servant à analyser X.
- Principe :
  - Transformation Tout-ou-Rien
  - Question posée : inclusion de B dans X ? (pour toutes les positions de B)



# Erosion binaire

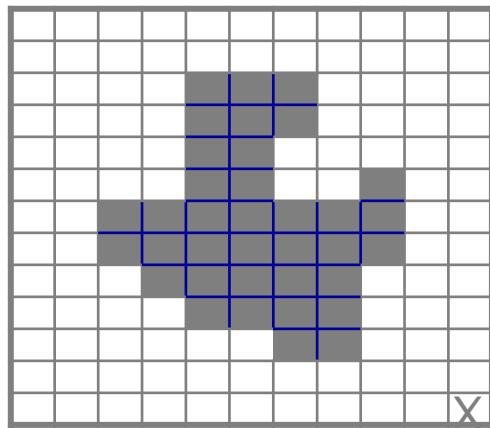
- Définition mathématique :

$$\mathcal{E}_B(X) = \left\{ x \in E \mid B_x \subseteq X \right\} = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$$

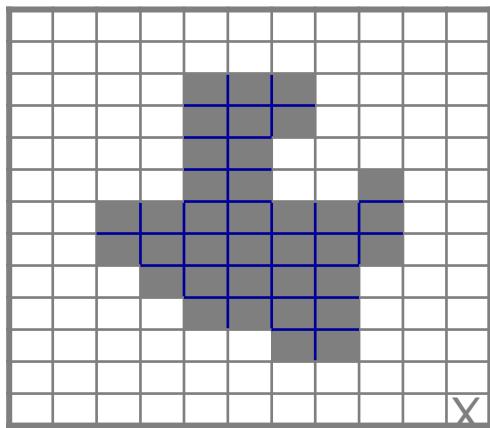
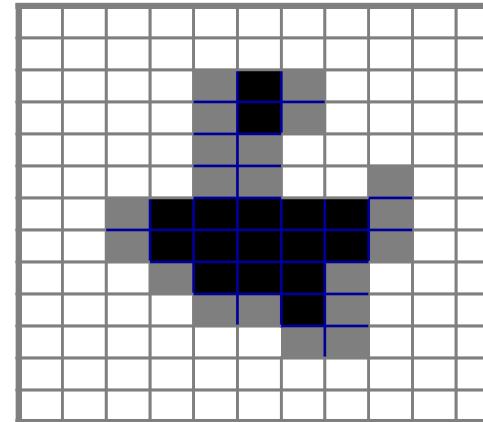


# Erosion binaire

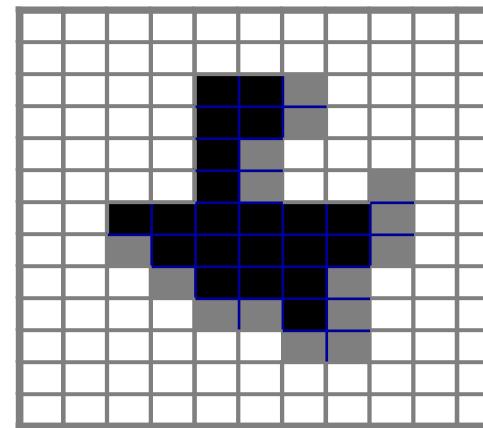
- Exercice :



$$\xrightarrow{\mathcal{E}_B(X)} B$$



$$\xrightarrow{\mathcal{E}_B(X)} B$$



# Erosion binaire

- Effets :



$X$  ( $256 \times 256$ )

par ::  
 $B$  ( $7 \times 7$ )  
(217%)



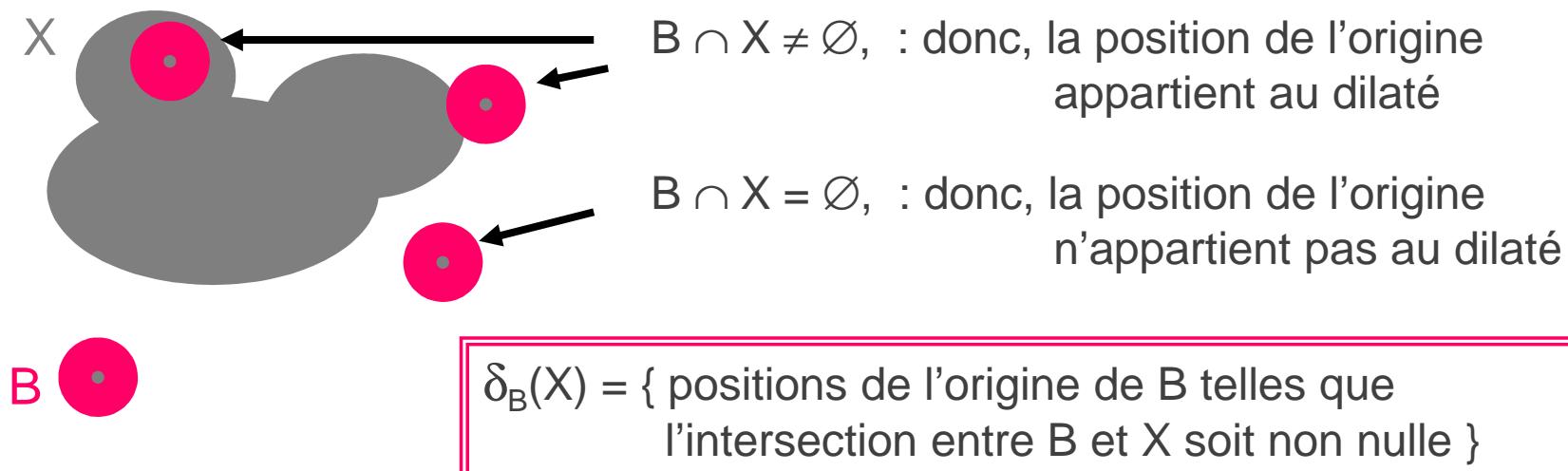
- Objets de taille inférieure à l'élément structurant disparaissent
- Les autres éléments sont amputés d'une partie.
- Si il existe des trous dans les objets, ils sont accentués
- Les objets reliés sont déconnectés

# Dilatation binaire

- Notation :  $\delta_B(X)$  (dilatation de X par B)  
X : ensemble objet étudié  
B : élément structurant servant à analyser X.
- Principe :
  - Transformation Tout-ou-Rien
  - Question posée : intersection entre B et X nulle ou non?

# Dilatation binaire

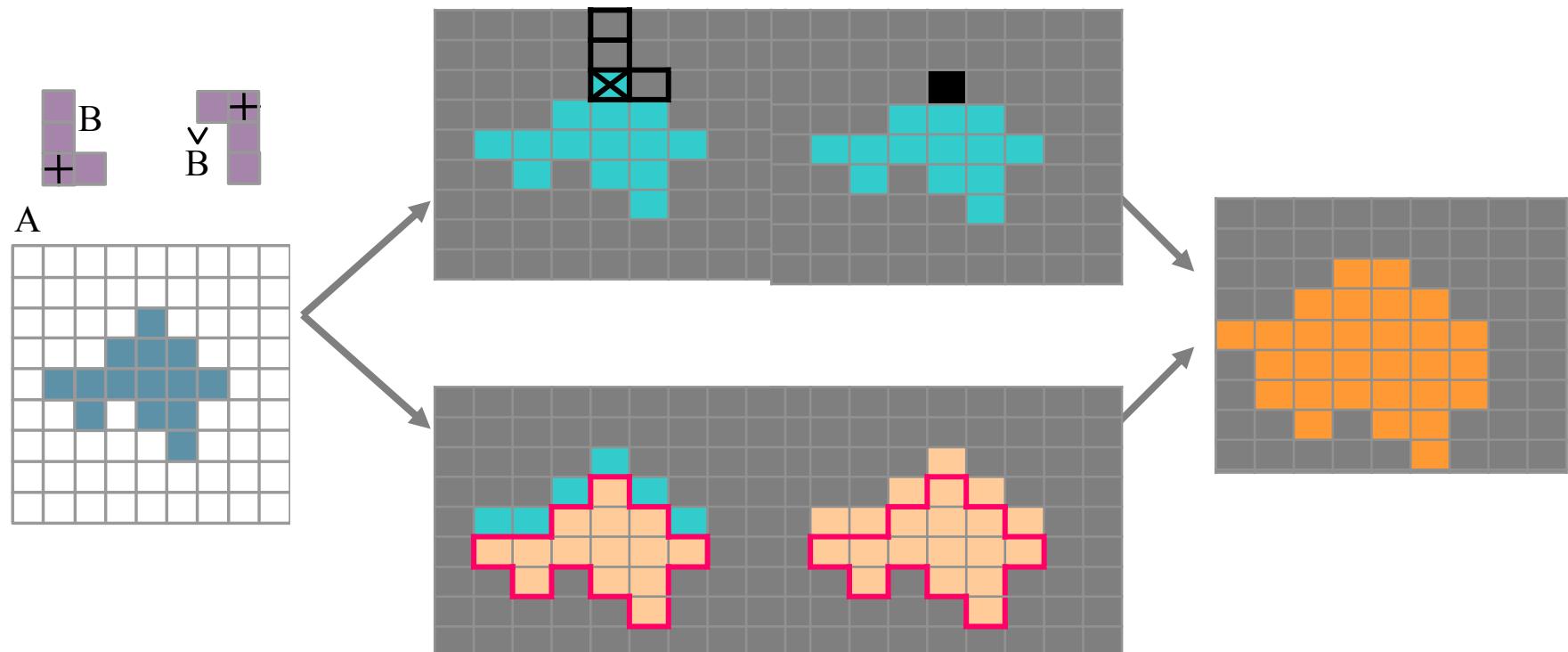
- Notation :  $\delta_B(X)$  (dilatation de X par B)  
X : ensemble objet étudié  
B : élément structurant servant à analyser X.
- Principe :
  - Transformation Tout-ou-Rien
  - Question posée : intersection entre B et X nulle ou non?



# Dilatation binaire

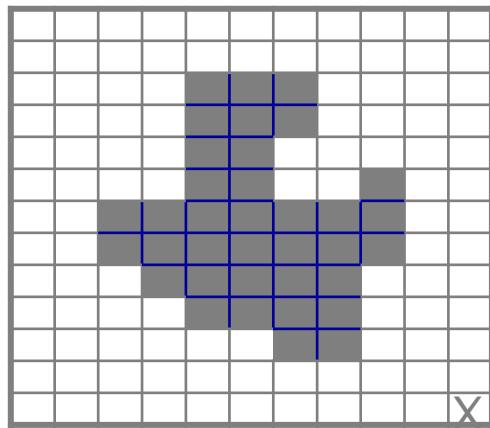
- Définition mathématique :

$$\delta_B(X) = \{x \in E \mid B_x \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup_{b \in B} X_{-b}$$



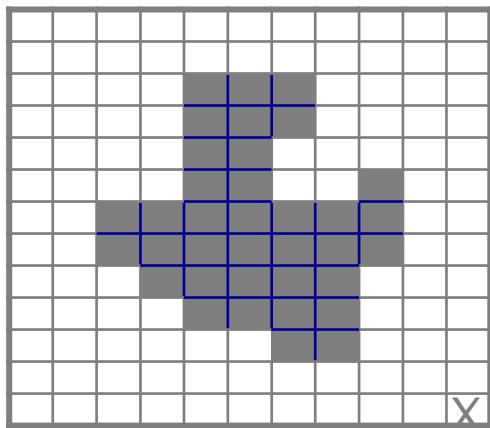
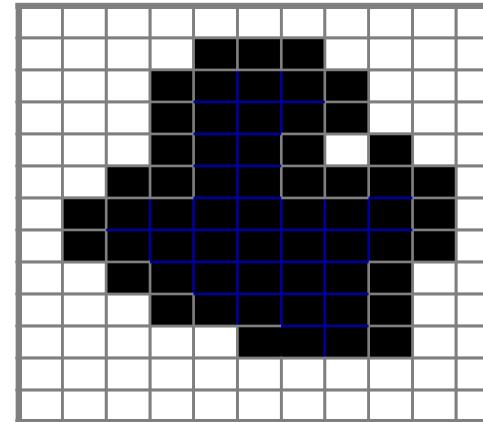
# Dilatation binaire

- Exercice :



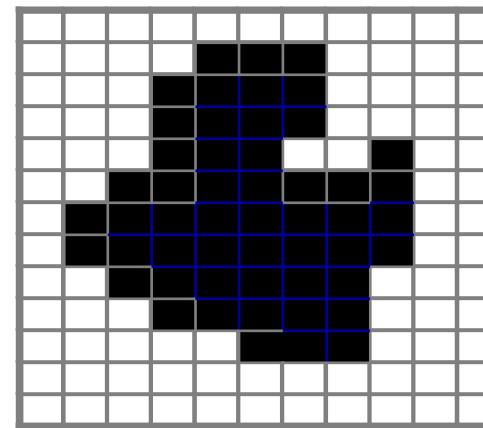
$$\xrightarrow{\delta_B(X)} \text{B}$$

A diagram showing the dilation operation. An arrow points from the input image 'X' to a structuring element 'B'. Below the arrow is a 3x3 structuring element matrix with a central black dot (representing a white pixel) and white squares around it.



$$\xrightarrow{\delta_B(X)} \text{B}$$

A diagram showing the dilation operation. An arrow points from the input image 'X' to a structuring element 'B'. Below the arrow is a 3x3 structuring element matrix with a central black dot (representing a white pixel) and black squares in the neighborhood, except for the center.



# Dilatation binaire

- Effets :



$X$  ( $256 \times 256$ )

par ::  
 $B (7 \times 7)$   
(217%)



- Les objets grossissent de la taille de l'élément structurant
- Si il existe des trous dans les objets, ils sont comblés
- Si les objets sont situés à une distance moins grande que la taille de l'élément structurant, ils vont fusionner.

# Propriétés de l'érosion et de la dilatation

- Propriétés :
  - croissance

$$X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} \delta_B(X) \subset \delta_B(Y) \\ \varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y) \end{cases}$$

- extensivité / anti-extensivité :

si B contient son origine :

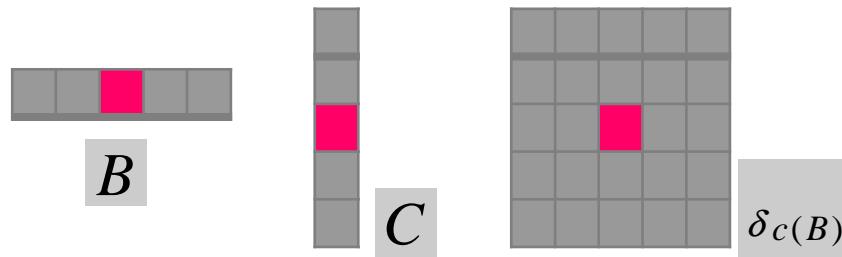
l'érosion est anti-extensive  $\varepsilon_B(X) \subset X$

la dilatation est extensive  $X \subset \delta_B(X)$

# Propriétés de l'érosion et de la dilatation

- Propriétés :
  - associativité

$$\delta_{\delta_C(B)}(A) = \delta_C(\delta_B(A)) \quad \epsilon_{\delta_C(B)}(A) = \epsilon_C(\epsilon_B(A))$$



impact sur la complexité ?

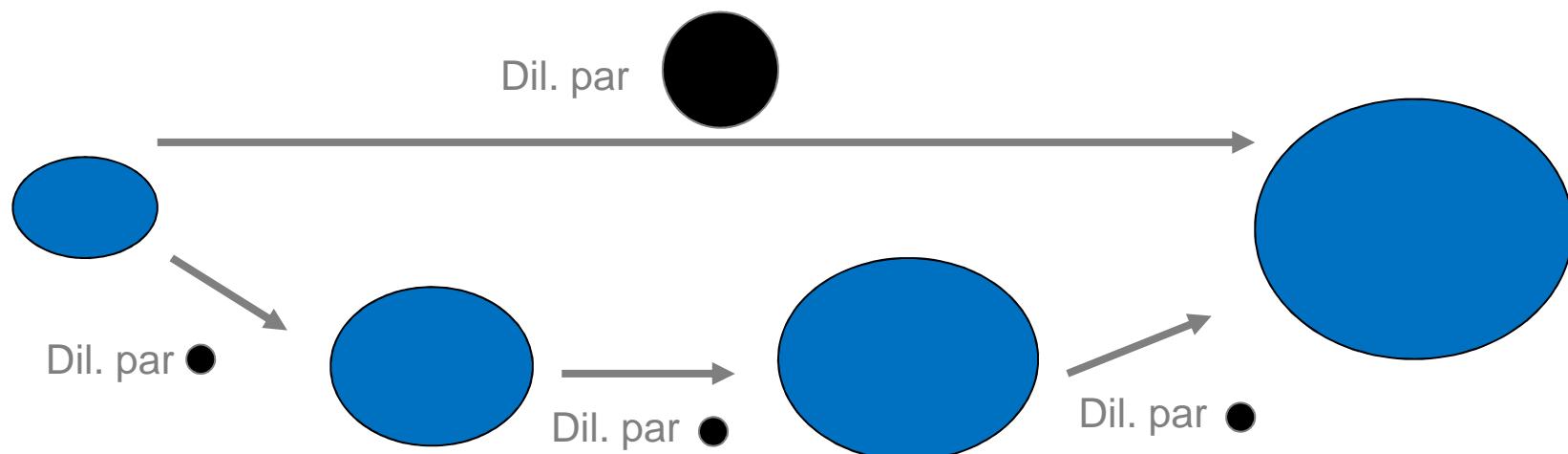
- invariance par translation

# Propriété de l'érosion et de la dilatation

- Eléments structurants convexes

Soit  $\lambda B$  l'homothétique de  $B$  de rapport  $\lambda$ .

La dilatation (l'érosion) par l'élément structurant  $\lambda B$  peut être décomposée en  $\lambda$  dilatations (érosions) par l'élément structurant  $B$ .



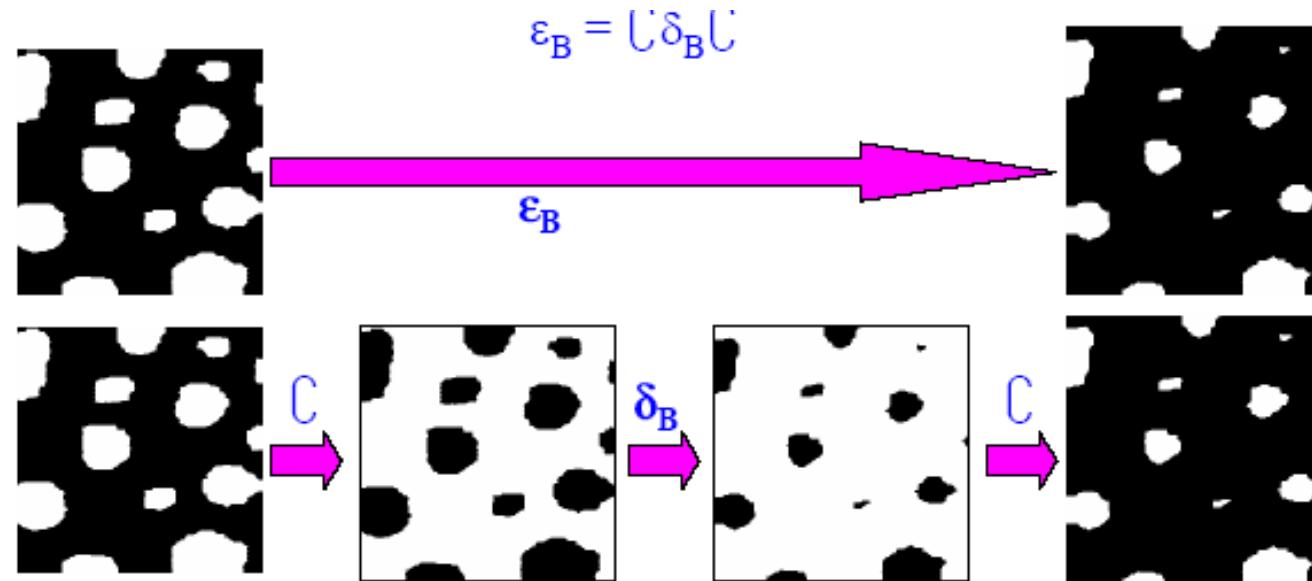
L'itération agit comme un facteur d'homothétie.

# Propriétés de l'érosion et de la dilatation

- Dualité :

$$\varepsilon_B(X) = (\delta_B(X^c))^c$$

$$\delta_B(X) = (\varepsilon_B(X^c))^c$$

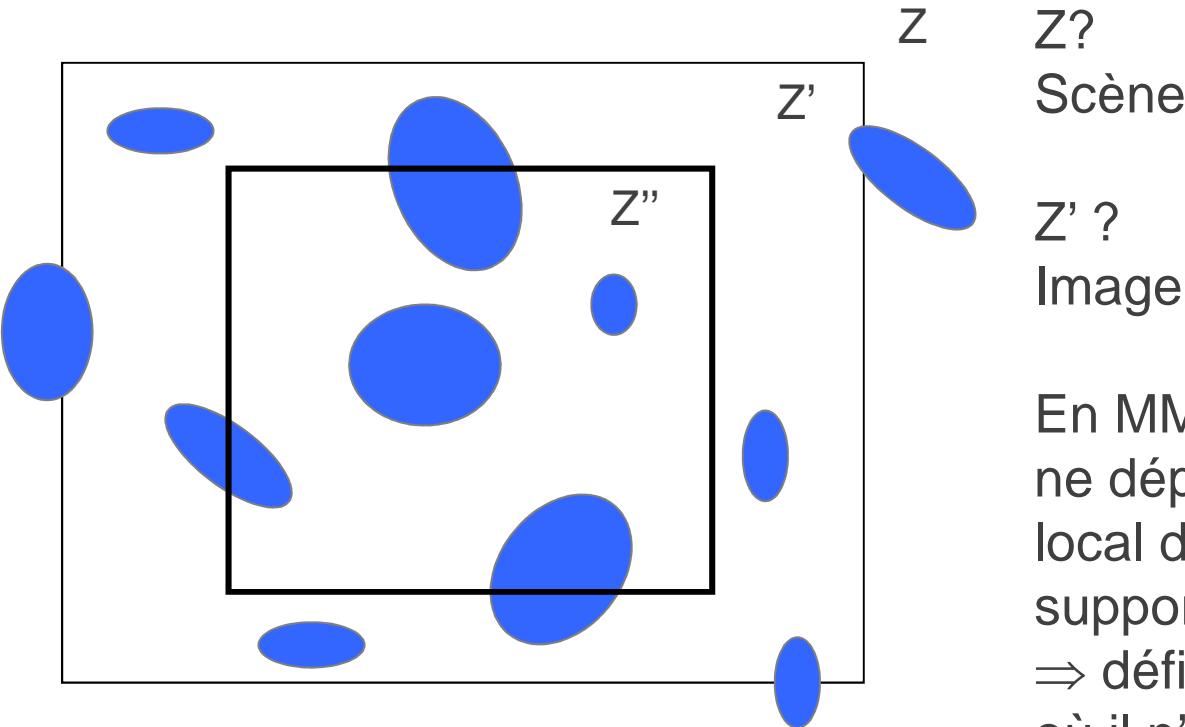


**Attention :** Érosion et dilatation ne préservent pas la connexité.  
Elles ne sont pas inversibles.

# Effets de bords

La plupart des objets d'étude sont les restrictions, à un rectangle  $Z'$ , d'un ensemble plus vaste  $Z$ .

⇒ On ne peut accéder expérimentalement qu'à :  $X \cap Z'$



En MM, le résultat en un point ne dépend que du voisinage local de ce point, défini par le support de l'élément structurant  
⇒ définit un sous-ensemble  $Z''$  où il n'y a pas d'effets de bord.

# Effets de bords

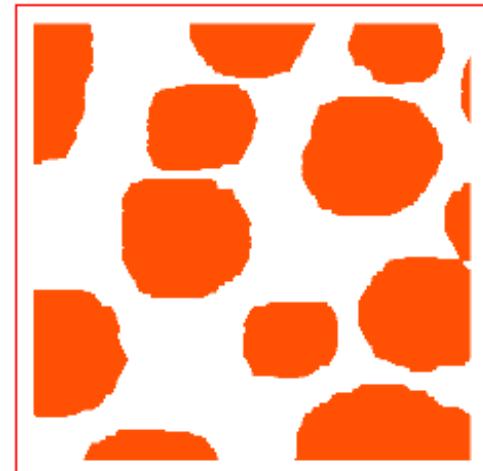
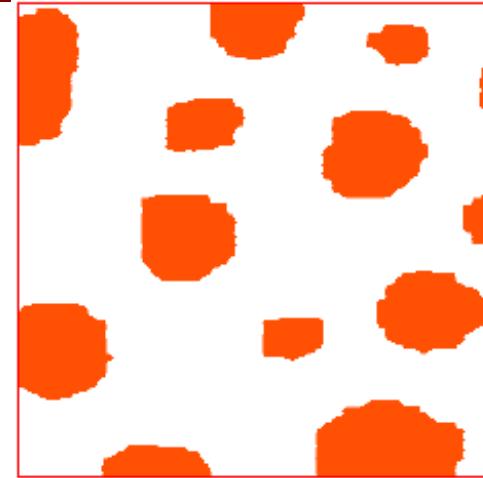
La plupart des objets d'étude sont les restrictions,  
à un rectangle  $Z'$ , d'un ensemble plus vaste  $X$ .

On ne peut accéder expérimentalement qu'à :

$$X \cap Z'$$

Les transformées  $\varepsilon_B(X)$  et  $\delta_B(X)$  ne sont connues sans erreur qu'à l'intérieur du masque  $Z'$  érodé lui-même par  $B$ .

Si on concatène une suite de transformations, on se retrouve vite avec un masque réduit à l'ensemble vide .



1. Cadre binaire
2. Cadre fonctionnel
3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

# Effets de bords



Ensemble initial  $X \cap Z$

$\xrightarrow{\text{SE } 10 \times 10}$



Erosion Itér. 1



Erosion Itér. 3



Dilatation Itér. 1



Dilatation Itér. 3

# Effets de bords

Théorème du masque de mesure :

Le résultat d'une transformation en tout ou rien avec un élément structurant  $B$ , sur un ensemble  $X$  connu dans le masque, n'est connu sans biais que dans le masque  $Z'' = \varepsilon_B(Z')$ .

En effet,  $B_x$  n'est totalement connu dans  $Z'$  que pour tout point  $x$  appartenant à l'érodé de  $Z'$  par  $B$ .

# Effets de bords

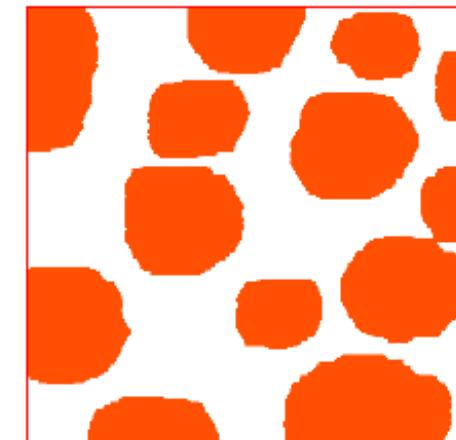
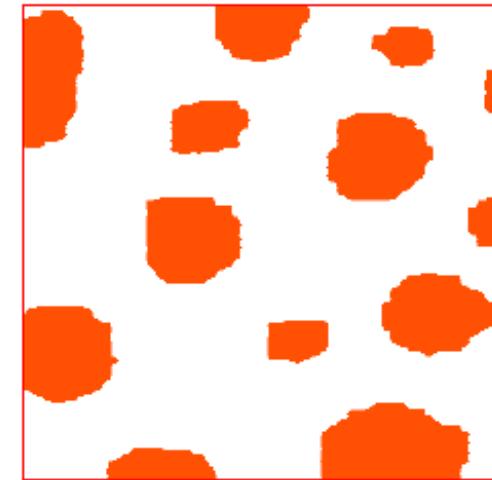
Idée :

réduire progressivement l'ES quand il s'approche des bords du champ.

On perd (progressivement..) l'invariance par translation, mais le résultat est connu dans la totalité du masque  $Z$ .

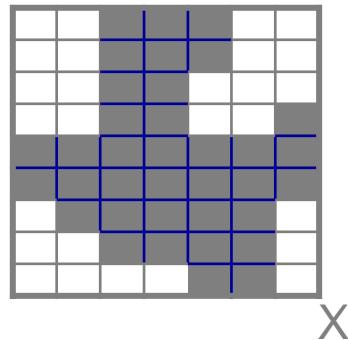
Dans cette démarche standard, où l'ES  $x \rightarrow B_x$  devient  $x \rightarrow B_x \cap Z'$ , érosion et dilatation s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_B(X) &= \{x \mid B_x \cap Z' \subseteq X \cap Z'\} \\ \delta_B(X) &= \delta_B(X) \cap Z'\end{aligned}$$

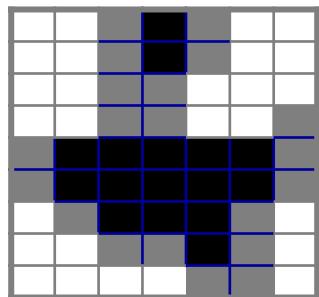
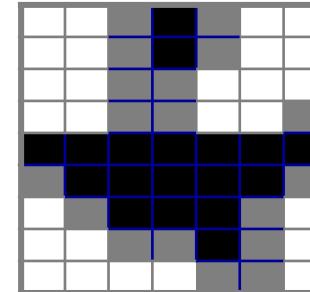


# Erosion binaire

- Exercice :



$$\xrightarrow{\mathcal{E}_B(X)}$$
  
A 3x3 binary structuring element labeled 'B'. It has a central black pixel (1) and eight white pixels (0) around it.



Résultat obtenu sans  
problème de bords (T.6)

# Opérateurs de Minkowski

Attention aux confusions avec les opérateurs de Minkowski d'addition et de soustraction, notés  $\oplus$  et  $\ominus$ .

Les définitions ne sont équivalentes que lorsque  $B$  est symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} B &= \bar{B} \\ X \ominus B &= \bigcap_{b \in B} X_b \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_B(X) = X \ominus \bar{B} \\ X \oplus B &= \bigcup_{b \in B} X_b \quad \Rightarrow \quad \delta_B(X) = X \oplus \bar{B} \end{aligned}$$

# Opérateurs généralisés / régularisés

- **Définitions :**

opérateurs qui intègrent un paramètre de régularité  $s$  pour contrôler la sensibilité au bruit et aux petits artefacts sur les contours de formes

→ empêchent les dilatations / érosions excessives

Erosion binaire généralisée :

$$\varepsilon_B^s(X) = \{x \in E \mid |(X_c \cap B_x)| < s, \quad s \in [1, \#B]\}$$

Dilatation binaire généralisée :

$$\delta_B^s(X) = \{x \in E \mid |(X \cap \check{B}_x)| \geq s, \quad s \in [1, \min(\#A, \#B)]\}$$

# Opérateurs généralisés / régularisés

Exemple de dilatation binaire généralisée :

$$\delta_B^s(X) = \{x \in E \mid (X \cap \check{B}_x) \geq s, \quad s \in [1, \min(\#X, \#B)]\}$$

G. Agam, I. Dinstein / Pattern Recognition 32 (1999) 947–971

949

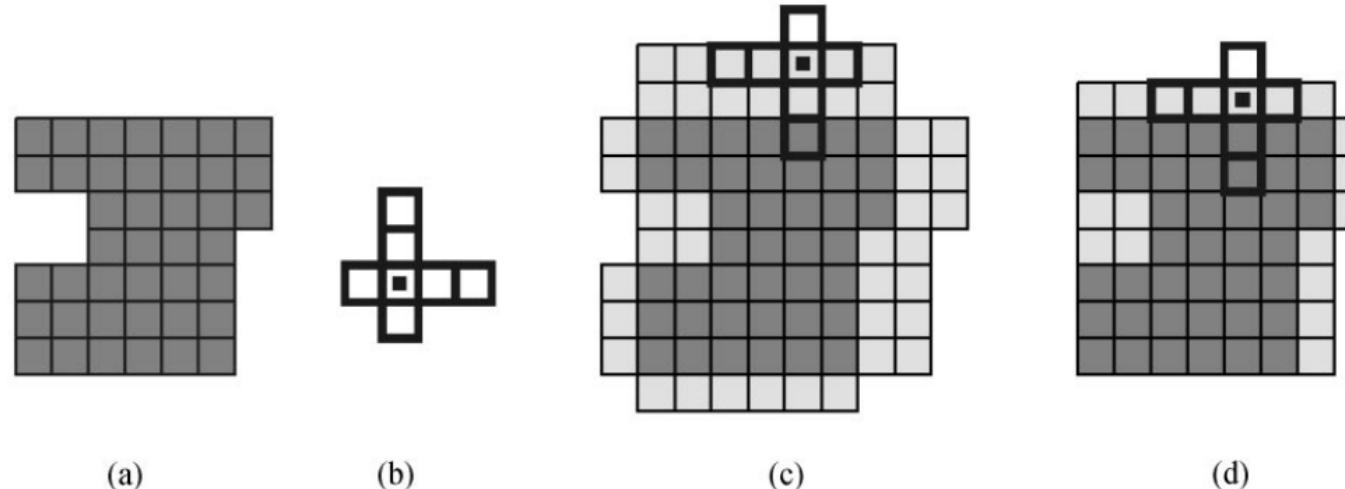
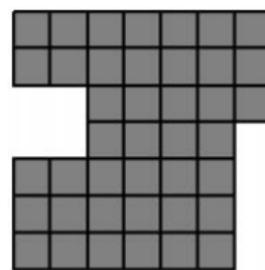


Fig. 1. The fitting interpretation of the ordinary and the regulated dilation. (a) The original shape, (b) the kernel set, (c) the result of an ordinary dilation obtained as the union of all the possible shifts of the reflected kernel for which the intersection with the original shape is not empty, (d) the result of a regulated dilation with a strictness of two, obtained as the union of all the possible shifts of the reflected kernel for which the size of the intersection with the original shape is greater than or equal to two. The elements that were added by the dilation operations are marked in light gray. As can be observed, the result obtained by the regulated dilation is smaller than the result obtained by the ordinary dilation.

# Opérateurs généralisés / régularisés

Exemple d'érosion binaire généralisée (publication des auteurs):

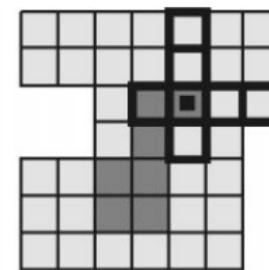
$$\varepsilon_B^s(X) = \{x \in E \mid (X_c \cap B_x) < s, \quad s \in [1, \#B]\}$$



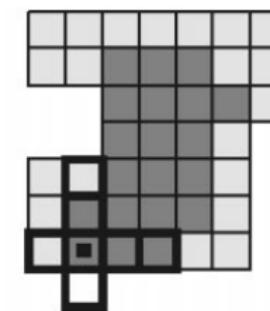
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 2. The fitting interpretation of the ordinary and the regulated erosion: (a) The original shape, (b) the kernel set, (c) the result of an ordinary erosion obtained as the union of all the possible shifts of the kernel that are contained completely within the original shape, (d) the result of a regulated erosion with a strictness of two obtained as the union of all the possible shifts of the kernel for which the size of the intersection with the background of the original shape is less than two. The elements that were removed by the erosion operations are marked in light gray. As can be observed, the result obtained by the regulated erosion is larger than the result obtained by the ordinary erosion.

# Opérateurs généralisés / régularisés

- Lien entre érosion et dilatation généralisées

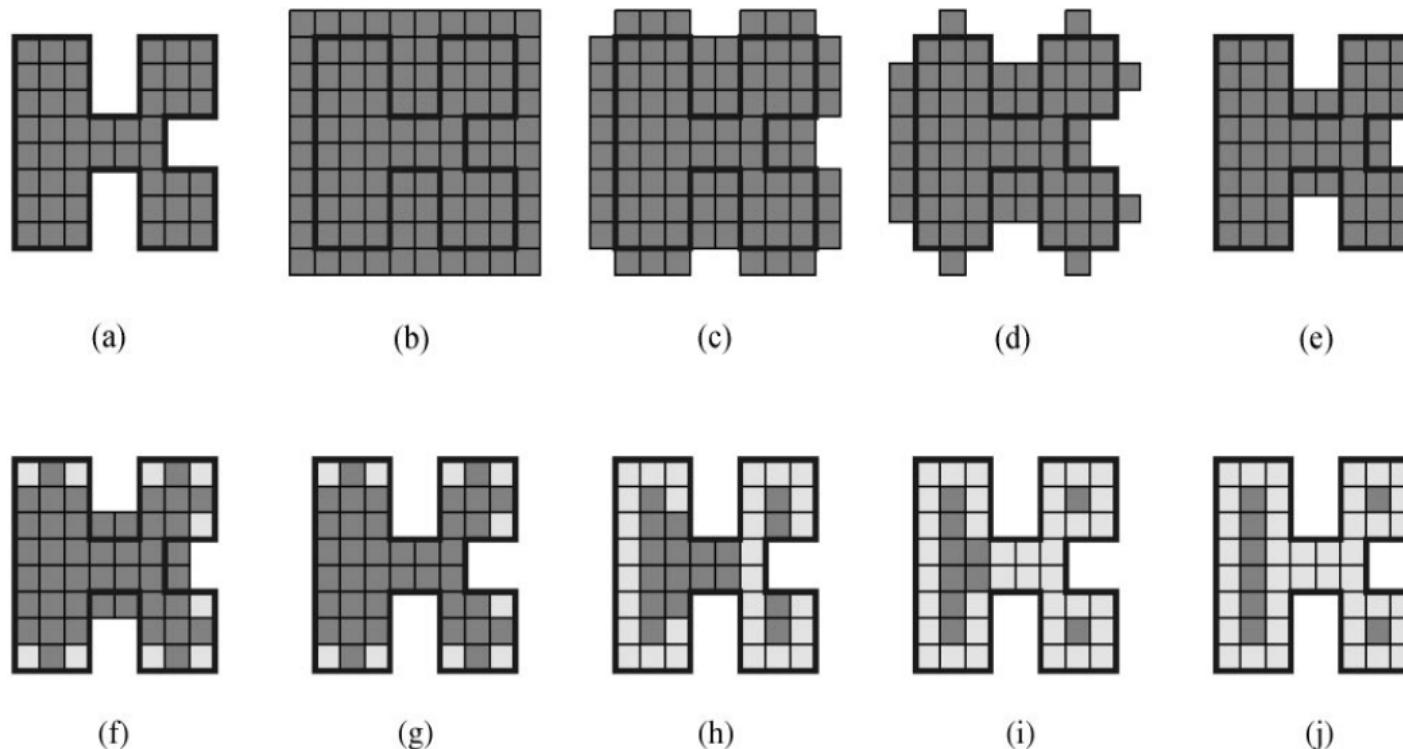


Fig. 3. Demonstration of the regulated dilation and erosion operations. (a) The original shape, (b)–(j) the results obtained by a regulated dilation with a strictness of 1–9, respectively. The kernel that is used in this example is a  $3 \times 3$  square, with the origin at its center. Since the kernel used in this example is invariant under reflection, these results are identical to those obtained by a regulated erosion with a strictness of 9–1, respectively. The elements that were removed from the original shape are marked in light gray.

- 1. Cadre binaire
- 2. Cadre fonctionnel
- 3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

# Plan du cours

1. Cadre binaire

2. Cadre fonctionnel

3. Applications

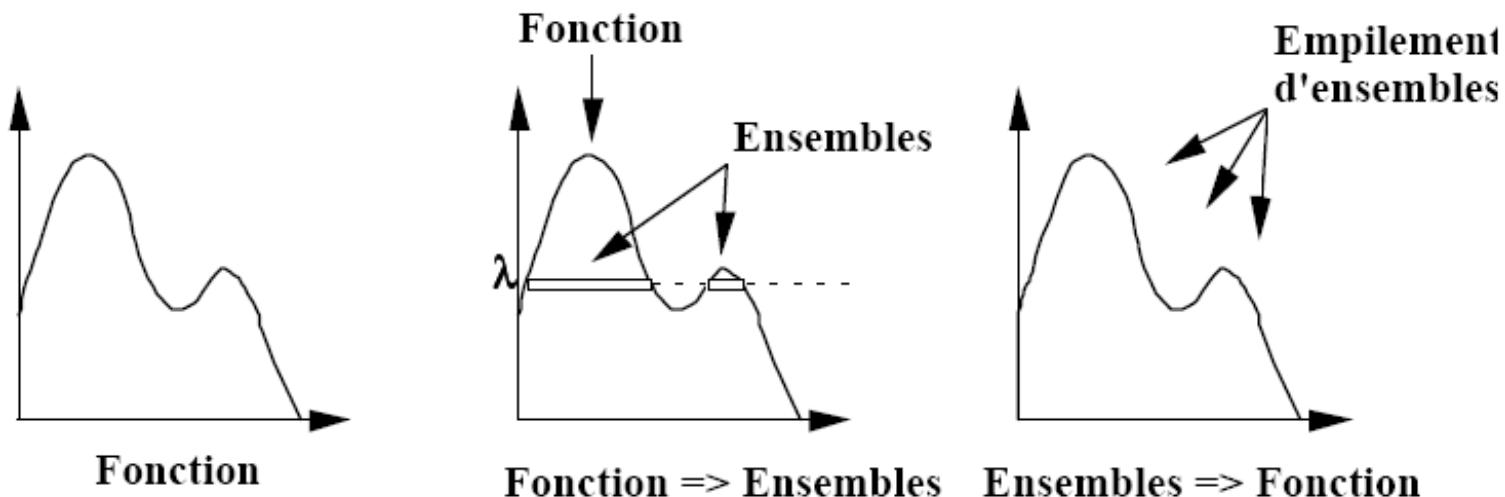
# Des ensembles vers les fonctions

Deux approches :

1. Soit on utilise les équivalences entre opérateurs
2. Soit on décompose l'image en un ensemble ordonné d'images binaires et on empile les résultats.

Chaque ensemble est la section du sous-graphe de  $f$  par le plan de cote  $\lambda$ .

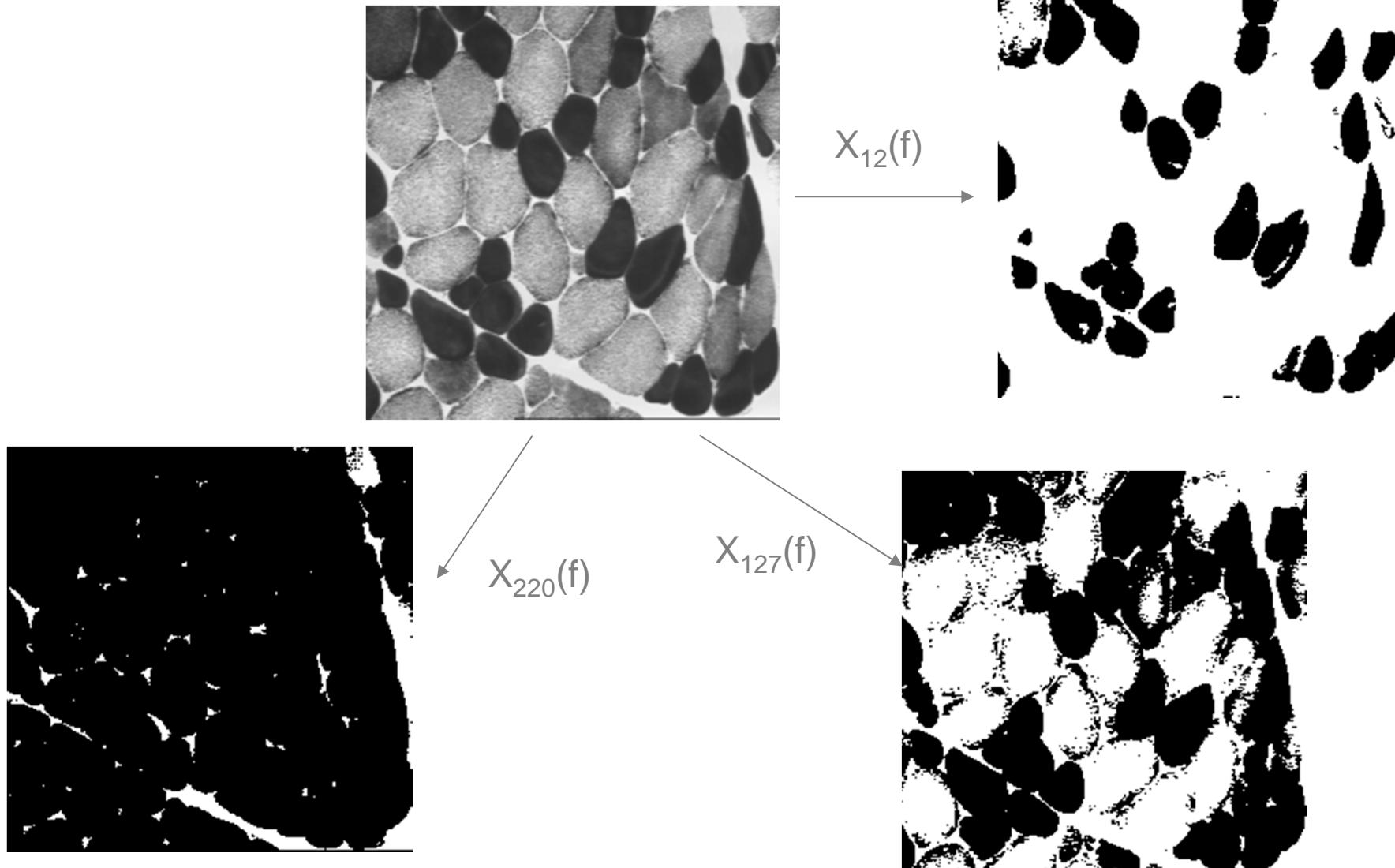
$$X_\lambda(f) = \{x \in D \mid f(x) \geq \lambda\} \Leftrightarrow f(x) = \sup \{\lambda \mid x \in X_\lambda(f)\}$$



1. Cadre binaire
2. Cadre fonctionnel
3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

# Des ensembles vers les fonctions



# Erosion fonctionnelle

- Notation :  $\mathcal{E}_t(f)$  (érosion de  $f$  par  $t$ )  
 $f$  : fonction image, définie sur un domaine  $D$ , à valeurs dans  $[0, M[$ .  
 $t$  : élément structurant, défini sur  $T$ , servant à analyser  $f$ .
- Définition :

$$\mathcal{E}_t(f)(x) = \min_{\substack{x+y \in D \\ y \in T}} \{ f(x+y) - t(y) \}$$

Cas d'un élément structurant plan :

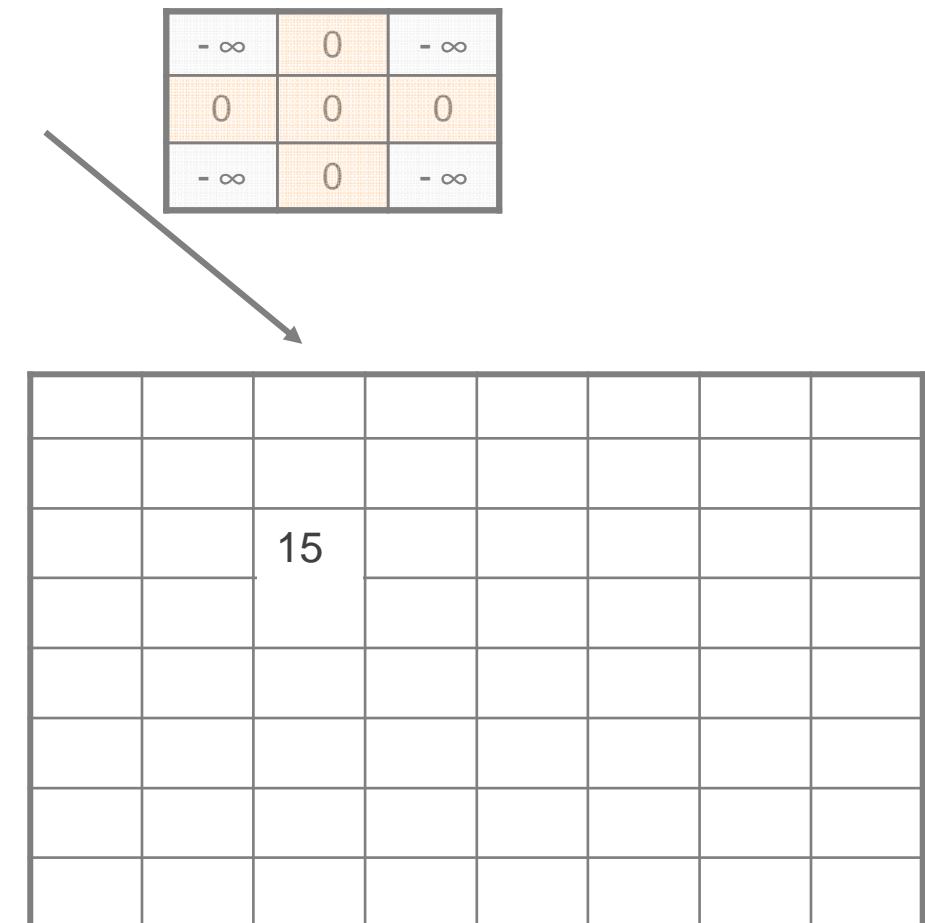
$$\mathcal{E}_t(f)(x) = \min_{\substack{x+y \in D \\ y \in T}} \{ f(x+y) \}$$

# Erosion fonctionnelle

- Exercice :

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 20  | 20  | 20  | 17  | 20  | 47  | 82  | 92  |
| 15  | 15  | 15  | 20  | 37  | 75  | 92  | 130 |
| 15  | 15  | 20  | 37  | 90  | 101 | 115 | 165 |
| 17  | 20  | 35  | 105 | 157 | 127 | 145 | 145 |
| 40  | 55  | 112 | 205 | 200 | 170 | 152 | 147 |
| 112 | 147 | 215 | 230 | 185 | 157 | 137 | 147 |
| 205 | 237 | 250 | 237 | 187 | 150 | 142 | 145 |
| 237 | 247 | 250 | 240 | 220 | 205 | 182 | 177 |

$$\text{Min}\{15, 15, 20, 35, 37\} \\ = 15$$



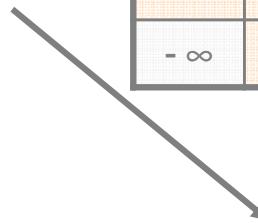
# Erosion fonctionnelle

- Exercice :

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 20  | 20  | 20  | 17  | 20  | 47  | 82  | 92  |
| 15  | 15  | 15  | 20  | 37  | 75  | 92  | 130 |
| 15  | 15  | 20  | 37  | 90  | 101 | 115 | 165 |
| 17  | 20  | 35  | 105 | 157 | 127 | 145 | 145 |
| 40  | 55  | 112 | 205 | 200 | 170 | 152 | 147 |
| 112 | 147 | 215 | 230 | 185 | 157 | 137 | 147 |
| 205 | 237 | 250 | 237 | 187 | 150 | 142 | 145 |
| 237 | 247 | 250 | 240 | 220 | 205 | 182 | 177 |

$$\begin{aligned} \text{Min}\{15-(-10), 15-(-40), 20, 35-(-10), \\ 37-(-40)\} \\ = 20 \end{aligned}$$

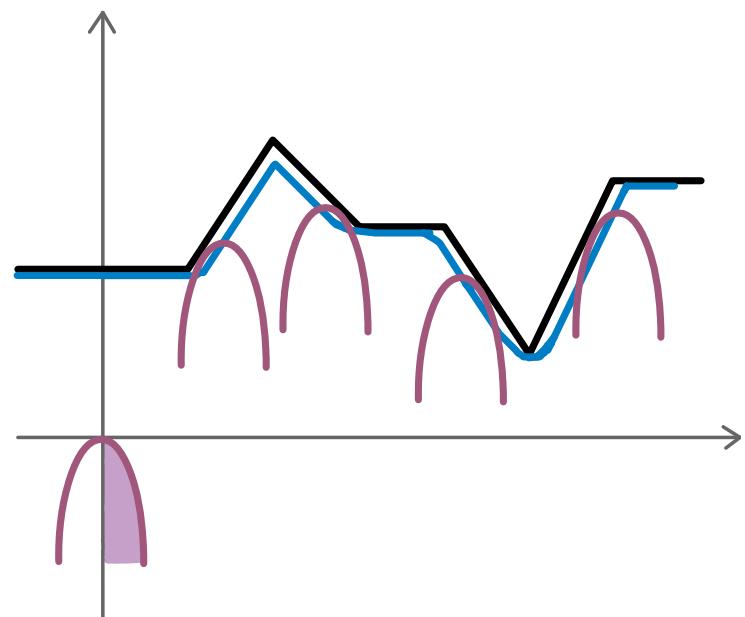
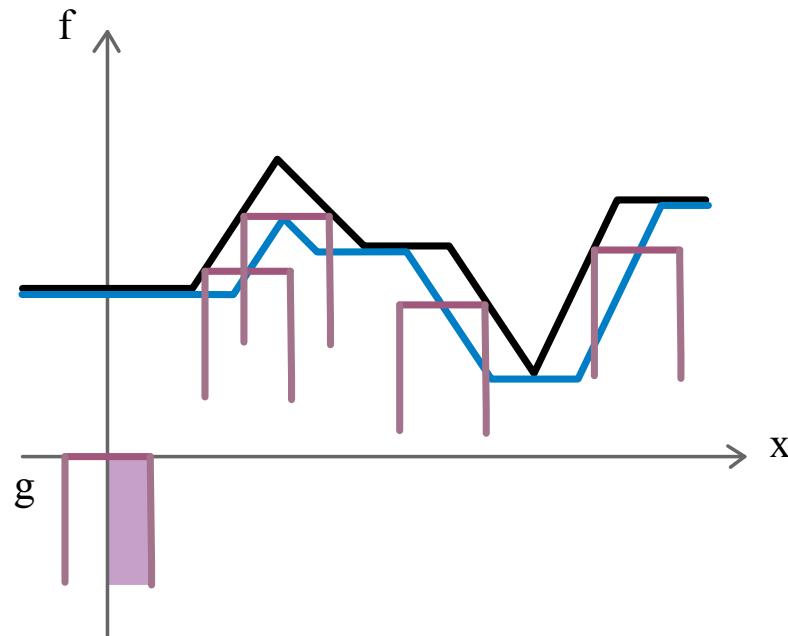
|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| - ∞ | -10 | - ∞ |
| -40 | 0   | -40 |
| - ∞ | -10 | - ∞ |



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

# Erosion fonctionnelle

- Interprétation géométrique :

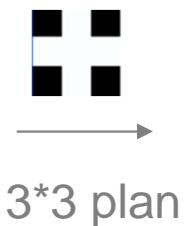


1. Cadre binaire
2. Cadre fonctionnel
3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

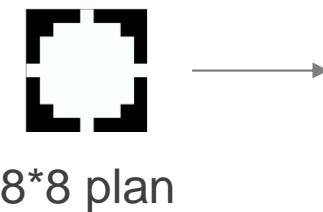
# Erosion fonctionnelle

- Effets :



# Erosion fonctionnelle

- Effets :



L'érosion :

- rétrécit les pics et les lignes de crête
- les pics plus étroits que l'ES disparaissent.
- élargit les vallées et les minima

# Dilatation fonctionnelle

- Notation :  $\delta_t(f)$  (dilatation de  $f$  par  $t$ )  
 $f$  : fonction image, définie sur un domaine  $D$ , à valeurs dans  $[0, M[$ .  
 $t$  : élément structurant, défini sur  $T$ , servant à analyser  $f$ .
- Définition :

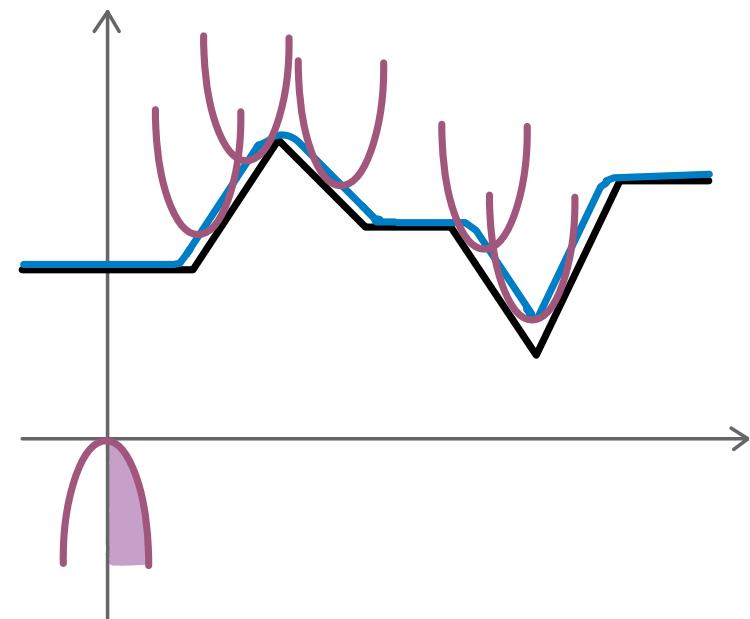
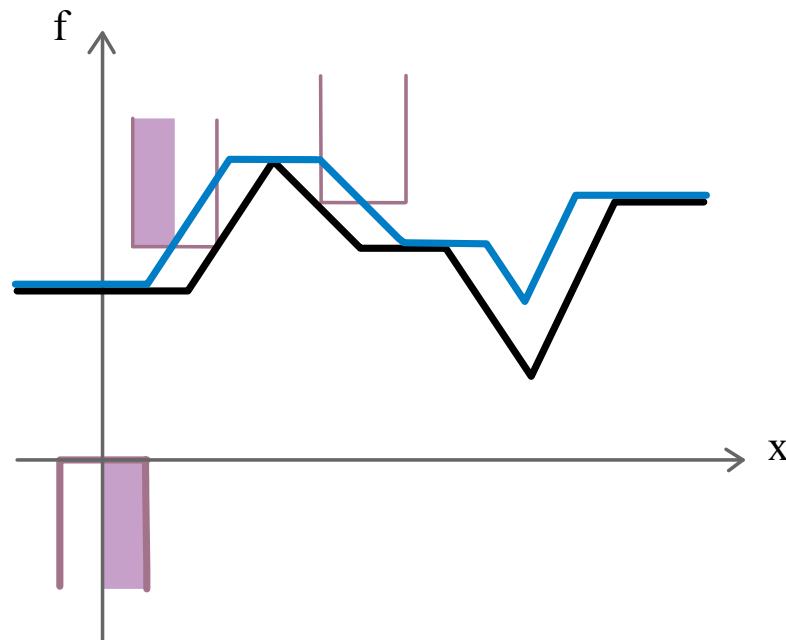
$$\delta_t(f)(x) = \max_{\substack{x+y \in D \\ y \in T}} \{ f(x+y) + t(y) \}$$

Cas d'un élément structurant plan :

$$\delta_t(f)(x) = \max_{\substack{x+y \in D \\ y \in T}} \{ f(x+y) \}$$

# Dilatation fonctionnelle

- Interprétation géométrique :

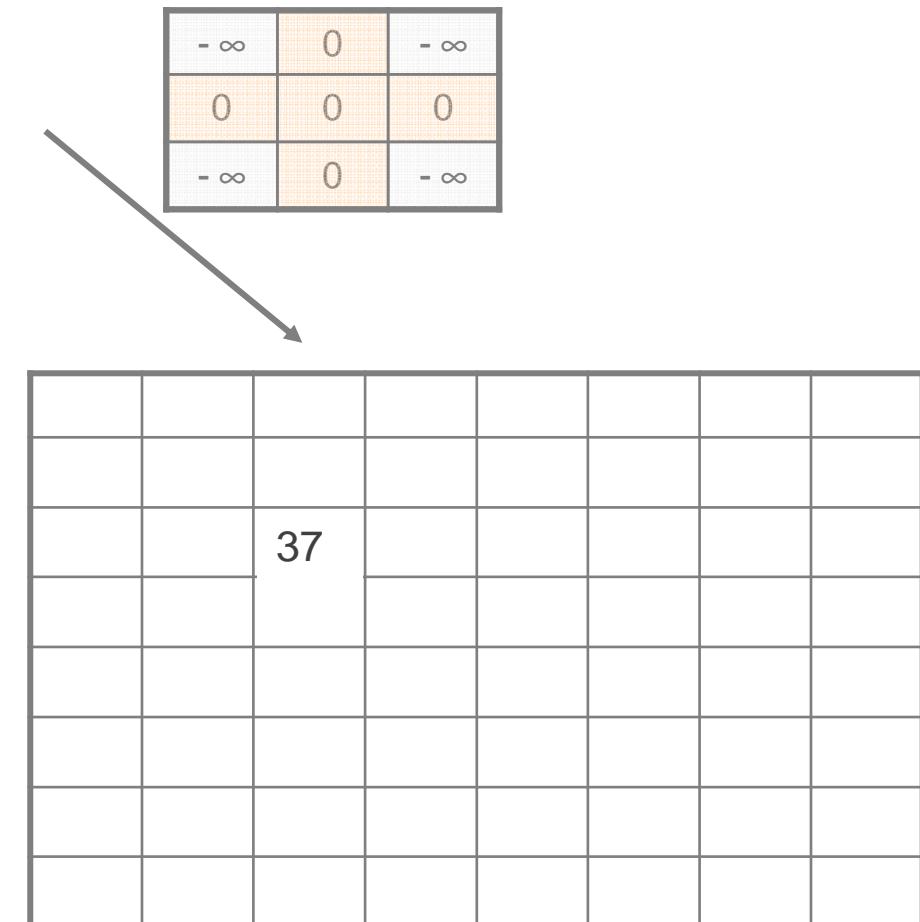


# Dilatation fonctionnelle

- Exercice :

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 20  | 20  | 20  | 17  | 20  | 47  | 82  | 92  |
| 15  | 15  | 15  | 20  | 37  | 75  | 92  | 130 |
| 15  | 15  | 20  | 37  | 90  | 101 | 115 | 165 |
| 17  | 20  | 35  | 105 | 157 | 127 | 145 | 145 |
| 40  | 55  | 112 | 205 | 200 | 170 | 152 | 147 |
| 112 | 147 | 215 | 230 | 185 | 157 | 137 | 147 |
| 205 | 237 | 250 | 237 | 187 | 150 | 142 | 145 |
| 237 | 247 | 250 | 240 | 220 | 205 | 182 | 177 |

$$\begin{aligned} \text{Max}\{15, 15, 20, 35, 37\} \\ = 37 \end{aligned}$$

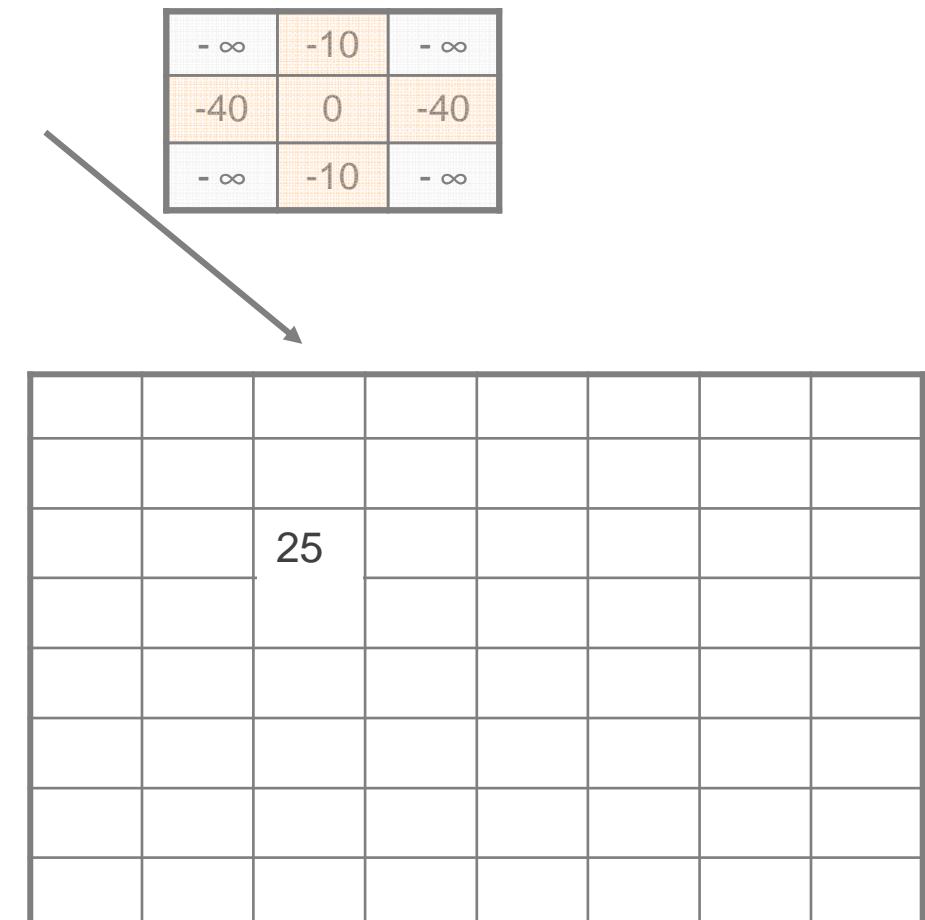


# Dilatation fonctionnelle

- Exercice :

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 20  | 20  | 20  | 17  | 20  | 47  | 82  | 92  |
| 15  | 15  | 15  | 20  | 37  | 75  | 92  | 130 |
| 15  | 15  | 20  | 37  | 90  | 101 | 115 | 165 |
| 17  | 20  | 35  | 105 | 157 | 127 | 145 | 145 |
| 40  | 55  | 112 | 205 | 200 | 170 | 152 | 147 |
| 112 | 147 | 215 | 230 | 185 | 157 | 137 | 147 |
| 205 | 237 | 250 | 237 | 187 | 150 | 142 | 145 |
| 237 | 247 | 250 | 240 | 220 | 205 | 182 | 177 |

$$\begin{aligned} & \text{Max}\{15+(-40), 15+(-10), 20, 35+(-10), \\ & 37+(-40)\} \\ & = 25 \end{aligned}$$

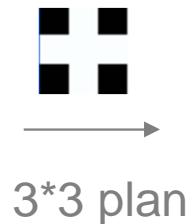


1. Cadre binaire
2. Cadre fonctionnel
3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

# Dilatation fonctionnelle

- Effets :



1. Cadre binaire
2. Cadre fonctionnel
3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

# Dilatation fonctionnelle

- Effets :



8\*8 plan



# Propriétés de l'érosion et dilatation

- Mêmes propriétés que dans le cas binaire quel que soit le type d'ES.
- L'utilisation d'ES planaire fournit de plus des avantages spécifiques :
  - Stabilité
  - Implémentation
- Remarque :  
Dans le cas des éléments structurants non-plans, s'agissant de phénomènes physiques, il faut veiller à ce que  $f$  et  $t$  soient définies dans des unités cohérentes.

- 1. Cadre binaire
- 2. Cadre fonctionnel
- 3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

# Plan du cours

1. Cadre binaire

2. Cadre fonctionnel

3. Applications

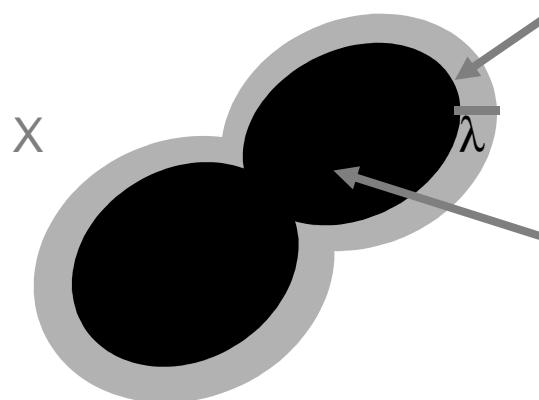
# Applications binaires

3 applications :

- fonction distance
- érodé ultime
- lissage de contours bruités

# Binaire : Fonction distance

Définition:



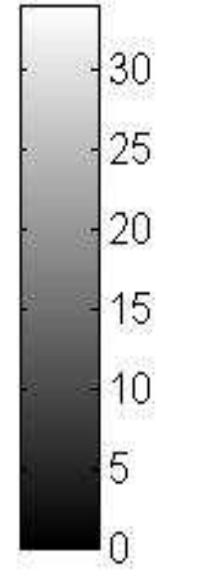
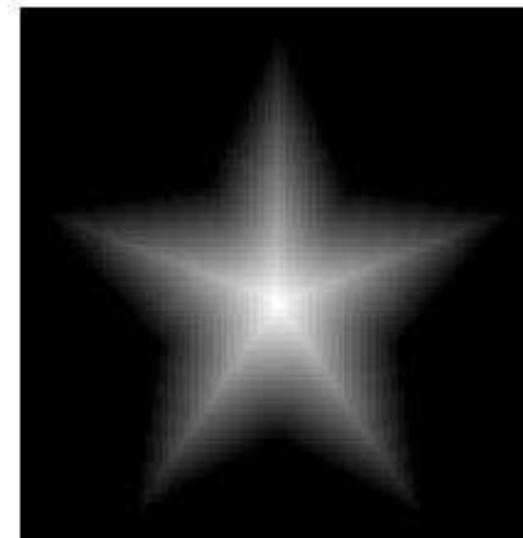
A chaque point  $p$  de  $X$ , on associe sa distance à la frontière de  $X$ .

On considère le sous-ensemble  $X_\lambda$  constitué des points  $p$  de  $X$  situés à une distance  $> \lambda$  de la frontière de  $X$ .

Si  $\lambda$  augmente, les sous-ensembles  $X_\lambda$  sont inclus les uns dans les autres.



Morphologie mathématique

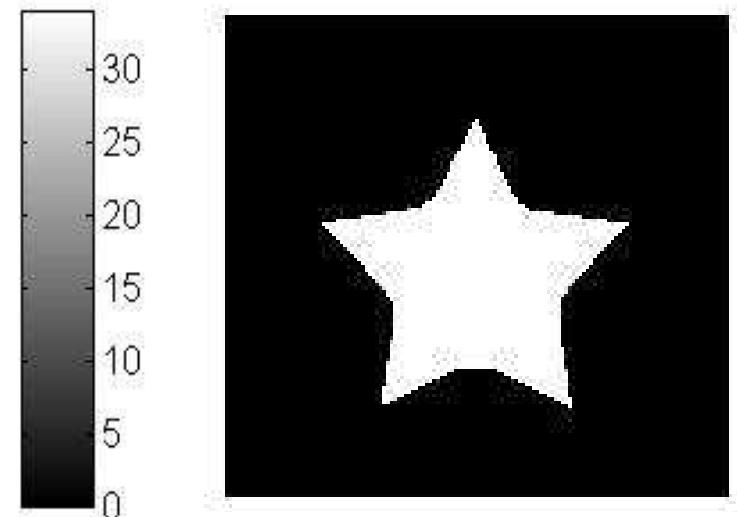


;

# Binaire : Fonction distance

- Eléments sur la fonction distance :

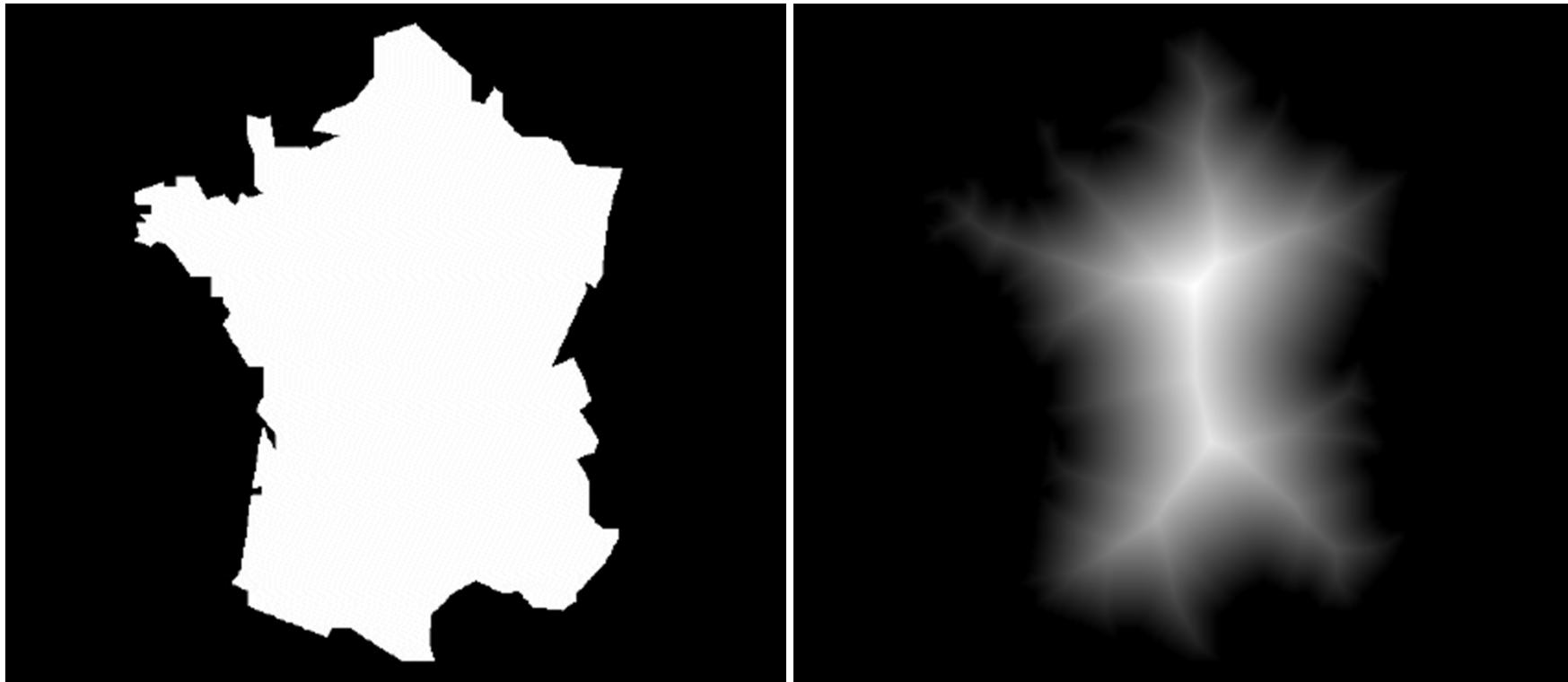
Les sous-ensembles peuvent être interprétés comme les sections horizontales d'une fonction telle que  $f(p) = \lambda$ , si  $p$  est à la distance  $\lambda$  de la frontière de  $X$ .



Fonction distance seuillée à 20

# Binaire : Fonction distance

- Qu'est-ce qui apparaît ??



# Binaire : Fonction distance

- Lien entre érosion et fonction distance :

Les sous-ensembles  $X_\lambda$  correspondent aux érodés de  $X$  par une boule de rayon  $\lambda$ .

ATTENTION, vrai si l'ES utilisé correspond à une boule de distance discrète.

$$B(0, r) = \{x \mid d(x, 0) \leq 1\}$$

Exemples :

voisinage  $V_4$

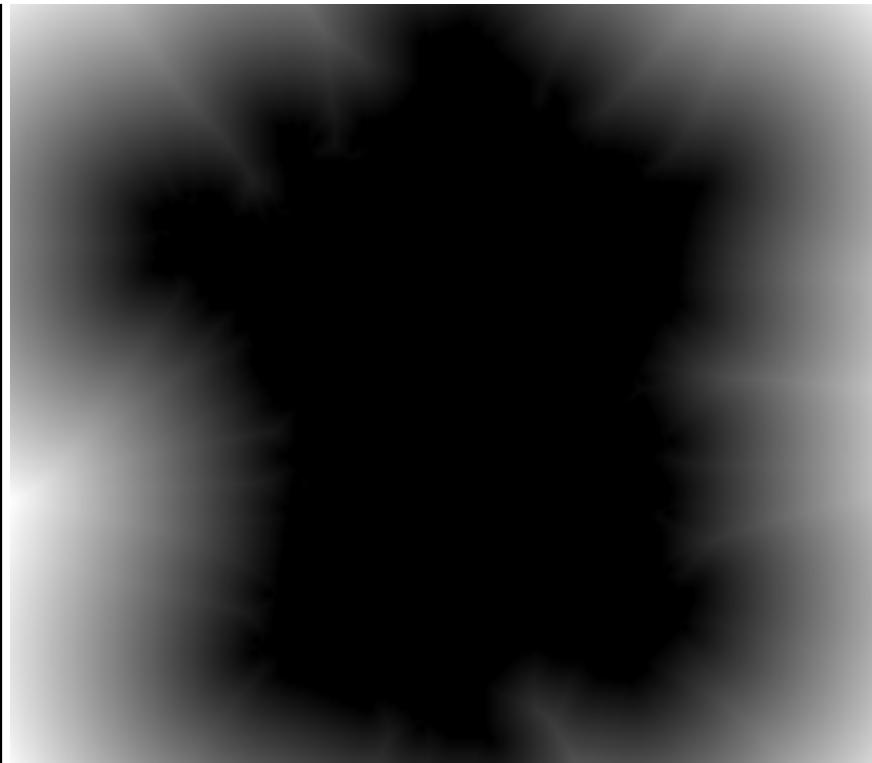
$$d_4(a, b) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

voisinage  $V_8$

$$d_8(a, b) = \max(|x_a - x_b|, |y_a - y_b|)$$

# Binaire : Fonction distance

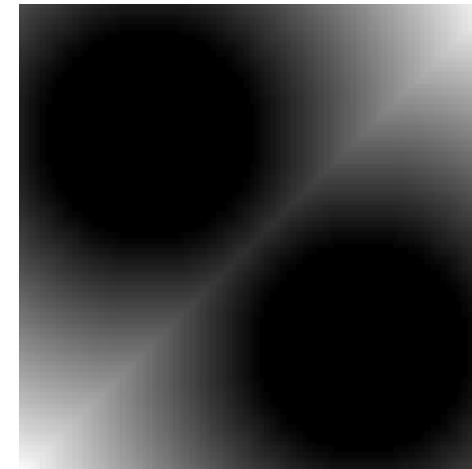
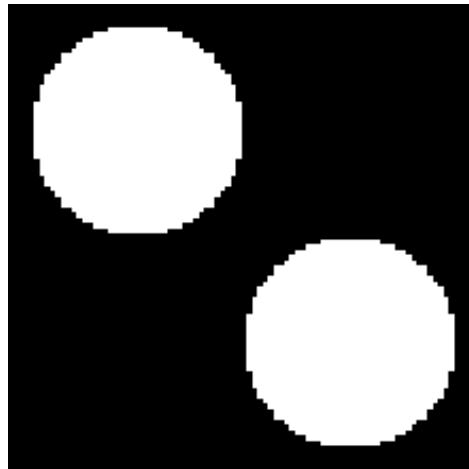
- De même, on peut considérer les points à une distance  $\lambda$  de la frontière de l'extérieur de l'objet.



1. Cadre binaire
2. Cadre fonctionnel
3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

# Binaire : Fonction distance



La fonction distance fournit les courbes de niveaux autour de l'objet qui correspondent exactement aux points qui seraient ajoutés par dilatations successives.

# Binaire : Fonction distance

- **Remarque :**

Érosions et dilatations successives permettent de calculer la fonction distance sur une image.

→ coûteux en calculs

→ existent des algorithmes rapides de calcul de distances sur trame (Borgefors, Danielson, etc.)

Par contre,

intéressant d'utiliser une fonction distance pour calculer rapidement des érosions et dilatations de taille quelconque.

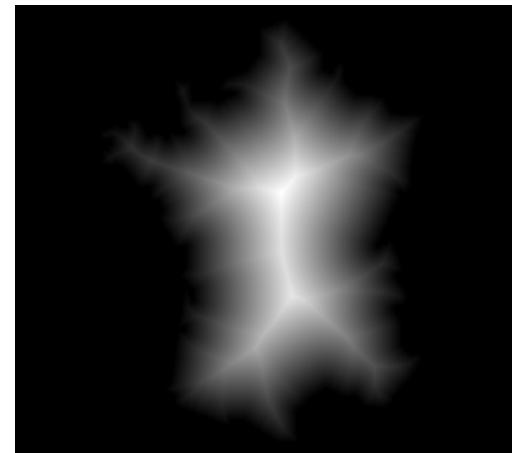
→ il suffit de seuiller la fonction distance à la taille d'érosion (ou dilatation) souhaitée pour obtenir l'érodé (ou le dilaté).

# Binaire : Fonction distance

- Applications :

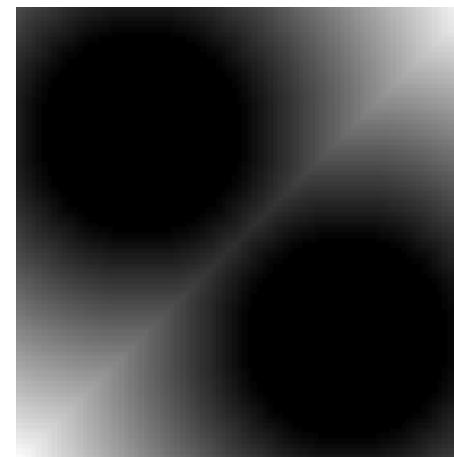
*fonction distance et érosion :*

- érodé ultime
- squelette d'une forme



*fonction distance et dilatation :*

- zone d'influence d'une forme



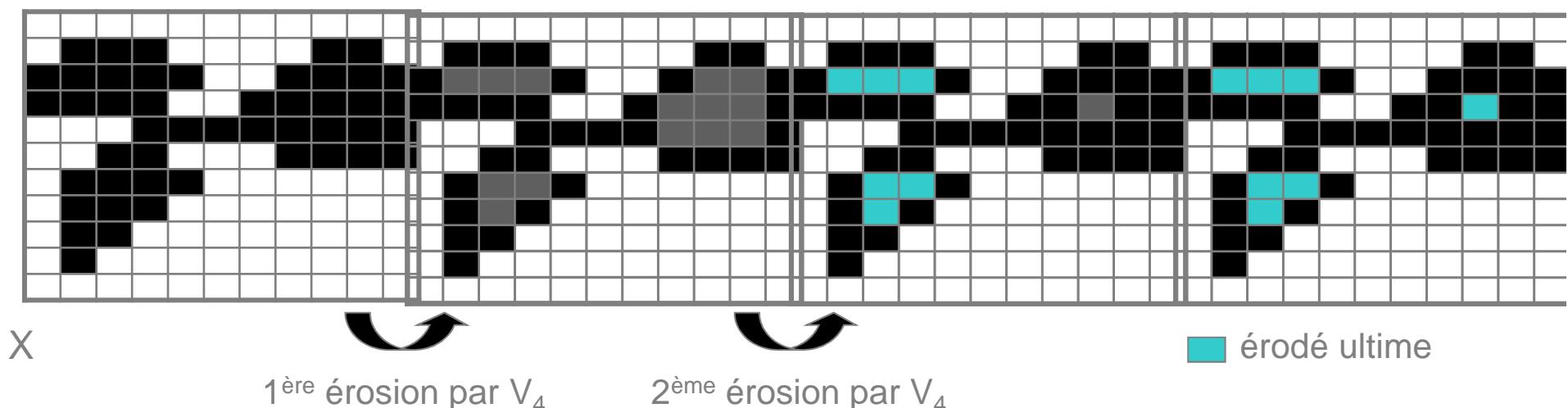
# Applications binaires

3 applications :

- fonction distance
- érodé ultime
- lissage de contours bruités

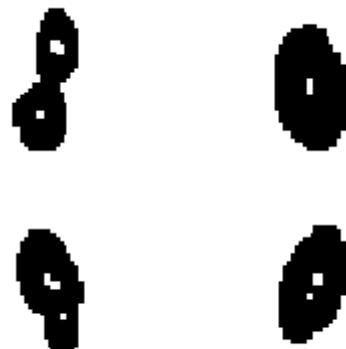
# Binaire : Erodé ultime

- Principe :
  - obtenu par érosions successives
    - A chaque étape d'érosion, des composantes connectées de pixels peuvent disparaître.
    - L'éradié ultime d'un ensemble  $X$  correspond à l'union des composantes qui disparaissent d'une érosion à l'autre.



# Binaire : Erodé ultime

- Exemple d'application :  
objets convexes → 1 seul érodé ultime  
objets concaves → 2 ou plus  
  
→ application à la séparation d'amas

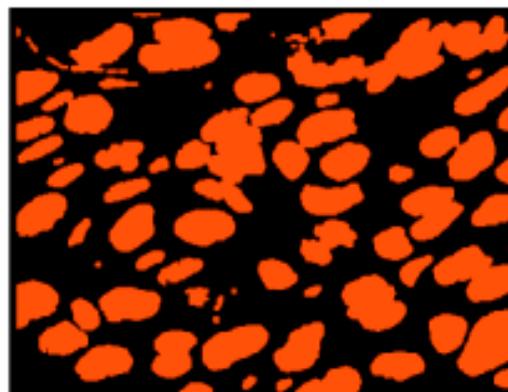


1 objet théoriquement → 1 seul e.u.  
1 amas → plusieurs e.u.

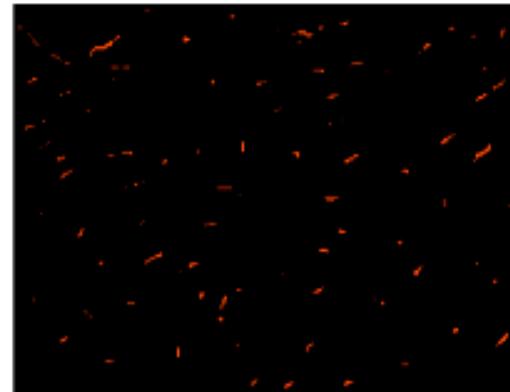
# Binaire : Erodé ultime

- Exemple d'application :

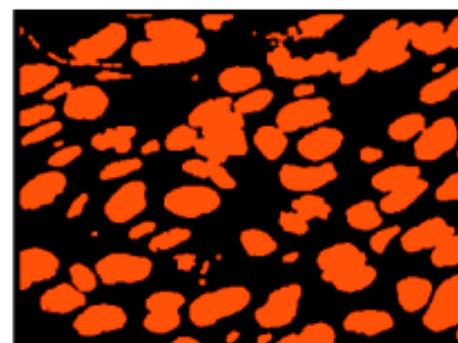
- création d'une image de marqueurs (1 point par objet)
- étape préliminaire à d'autres traitements morphologiques



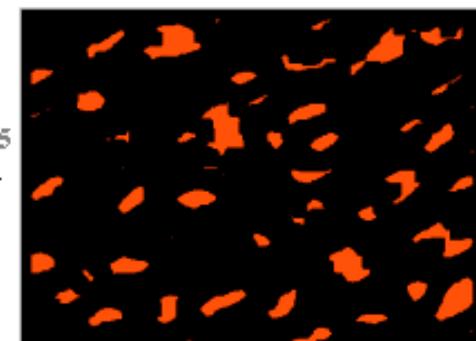
érodé ultime  
→



Avec l'érosion ,  
perte d'objets au fur  
et à mesure



érosion  
de taille 5  
→



*image de départ*

*image A*

# Binaire : Erodé ultime

- Implantation :
  - érosions successives
  - seuillage de la fonction distance (lorsque l'élément structurant est une boule d'une distance discrète)  
érodé ultime = maxima locaux de la fonction distance

# Applications binaires

3 applications :

- fonction distance
- érodé ultime
- lissage de contours bruités

1. Cadre binaire
2. Cadre fonctionnel
3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

# Binaire : lissage de contours bruités

Illustration de la dilatation généralisée

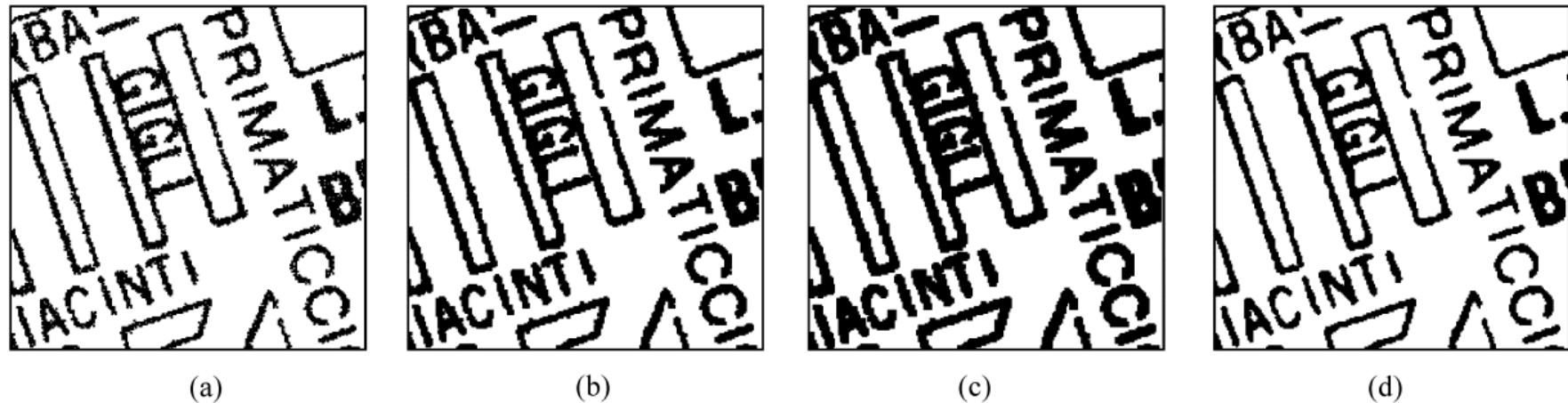


Fig. 6. Demonstration of objects boundary smoothing by a regulated dilation operation. (a) The initial map image, in which the boundaries of the objects are noisy, (b)–(c) the results of an ordinary dilation of the image in (a) by a  $2 \times 2$  and a  $3 \times 3$  square kernels, respectively, (d) the result of a regulated dilation of the same image by a  $3 \times 3$  square kernel when using a strictness parameter of 4. As can be observed, the ordinary dilation operations result in thicker objects with noisy boundaries, whereas the regulated dilation smoothes the boundary of shapes without thickening them.

# Applications fonctionnelles

4 applications :

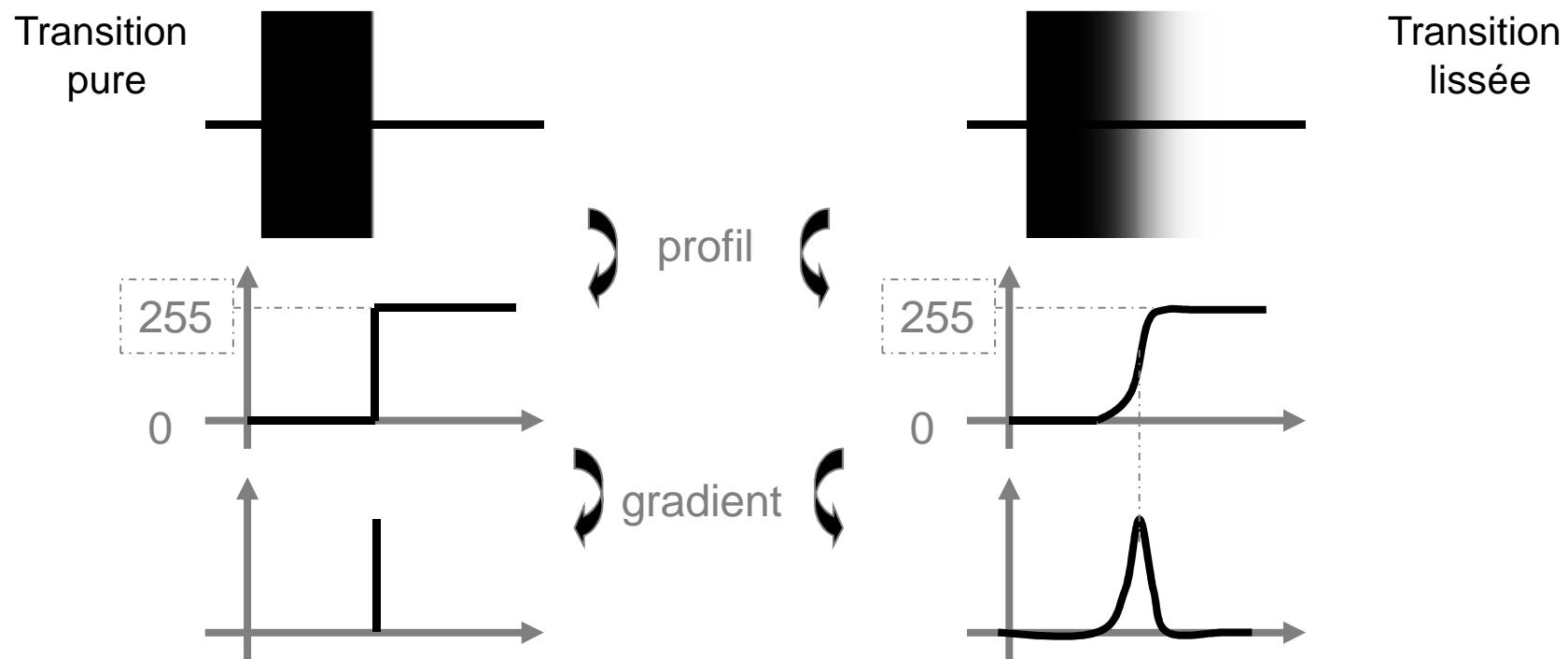
- détection de contours
  - gradient morphologique
  - laplacien morphologique
- lissage
- augmentation de contraste
- mesure de la covariance

# Fonctions de gris : Détection de contours

- Opérateurs gradients :

Rôle : mettre en évidence les variations d'intensité, donc les contours

Opérateur gradient linéaire :



# Fonctions de gris : Détection de contours

- Opérateurs gradients morphologiques :  
permettent de mettre en relief les variations d'intensité dans un voisinage défini par un élément structurant plan

Érosion → minimum des valeurs de l'image dans le voisinage défini par l'ES

Dilatation → maximum des valeurs de l'image dans ce même voisinage

Pour mettre en valeur les variations d'intensité :

3 combinaisons possibles

- a) différence entre dilatation et érosion
  - b) différence entre dilatation et image originale
  - c) différence entre érosion et image originale
- } demi-gradients

Nécessitent des éléments structurants symétriques, contenant leur origine, souvent de taille 1 .

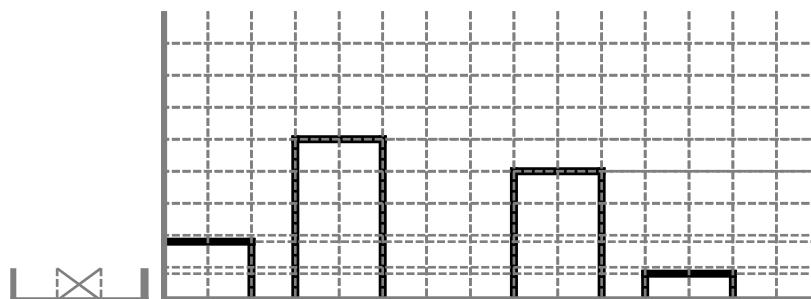
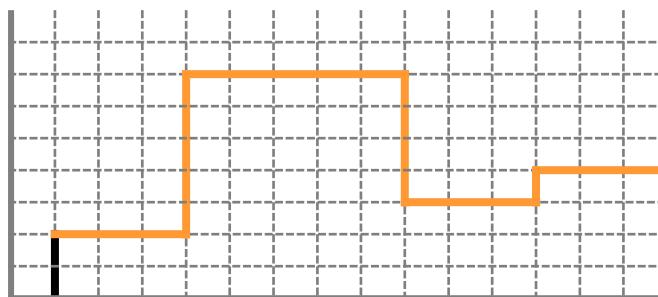


# Fonctions de gris : Détection de contours

- Gradient de Beucher:

$$\rho_t = \delta_t - \varepsilon_t$$

- donne la variation maximale d'intensité des pixels dans le voisinage défini par l'élément structurant t



Réponse :

- contours d'une épaisseur de 2 pixels
- similaire à celle obtenue par des filtres traditionnels comme Sobel ou Canny

# Fonctions de gris : Détection de contours

- Exemple d'application du gradient de Beucher:



Gradient de Beucher

# Fonctions de gris : Détection de contours

- Comparaison gradient de Beucher et Sobel



Gradient de Beucher

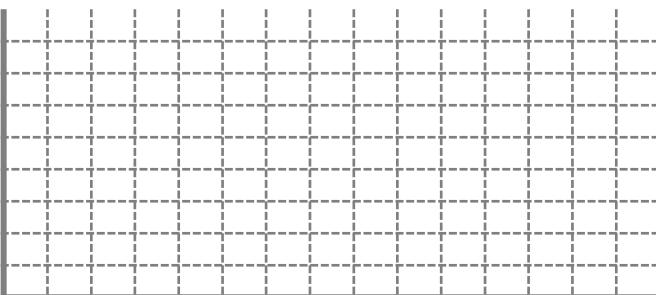
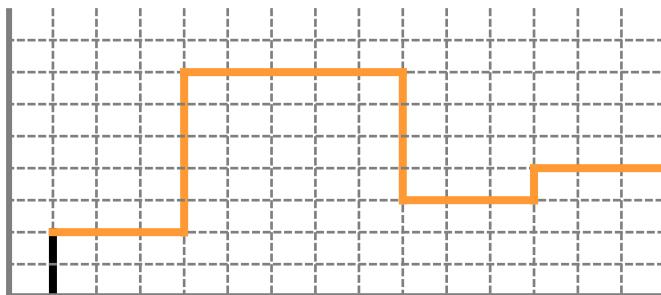


Gradient de Sobel

# Fonctions de gris : Détection de contours

- Demi-gradient par dilatation ou gradient externe :

$$\rho_t^+ = \delta_t - id$$



Réponse :

- Contours d'épaisseur 1 px
- frontière extérieure des objets



# Fonctions de gris : Détection de contours

- Demi-gradient par dilatation ou gradient externe :



Gradient externe (ES 3\*3)

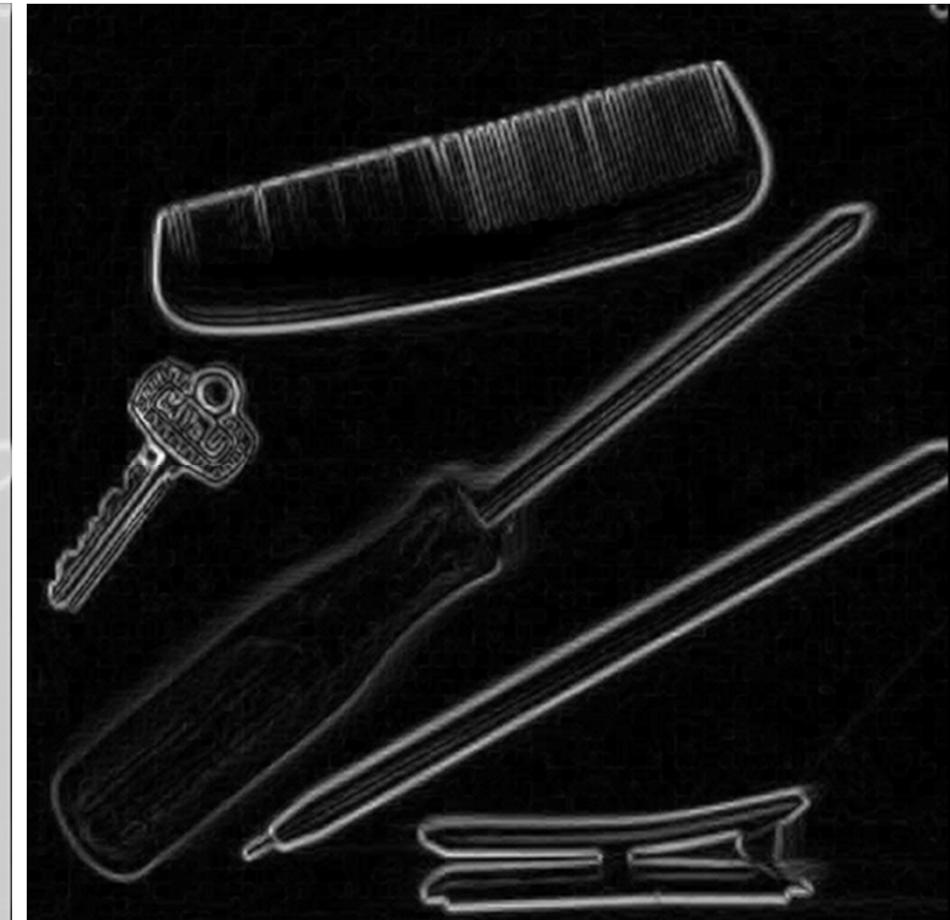
# Fonctions de gris : Détection de contours

- Comparaison gradient de Beucher et demi-gradient par dilatation



Gradient externe (ES 3\*3)

Morphologie mathématique - Chapitre 1 - TSE - Image 2

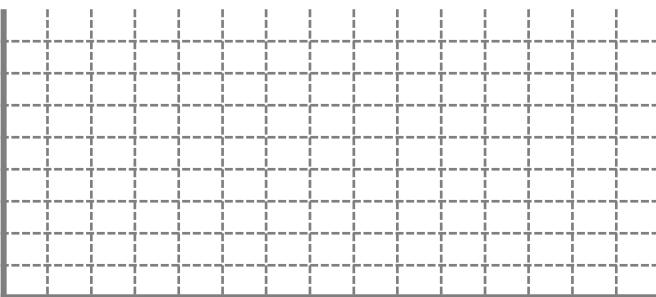
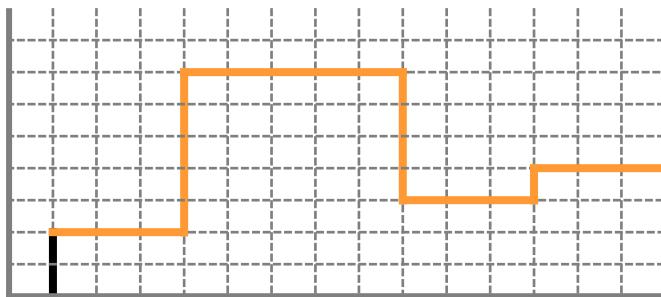


Gradient de Beucher (ES 3\*3)

# Fonctions de gris : Détection de contours

- Demi-gradient par érosion ou gradient interne :

$$\rho_t^- = id - \varepsilon_t$$



Réponse :

- Contours d'épaisseur 1 px
- frontière intérieure des objets

# Fonctions de gris : Détection de contours

- Demi-gradient par érosion ou gradient interne :



Gradient interne (ES 3\*3)

# Fonctions de gris : Détection de contours

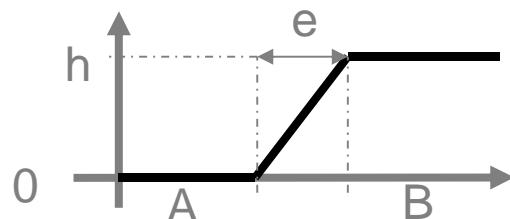
- Remarques :
- $\rho_+$  et  $\rho_-$  sont des opérateurs complémentaires :

$$\begin{aligned}\rho_t^-(X) &= \rho_t^+(X^c) \\ \rho &= \rho_t^+ + \rho_t^-\end{aligned}$$

- si la taille des ES est supérieure à 1, on parle de gradients épais

$$\rho_{nt} = \delta_{nt} - \varepsilon_{nt}$$

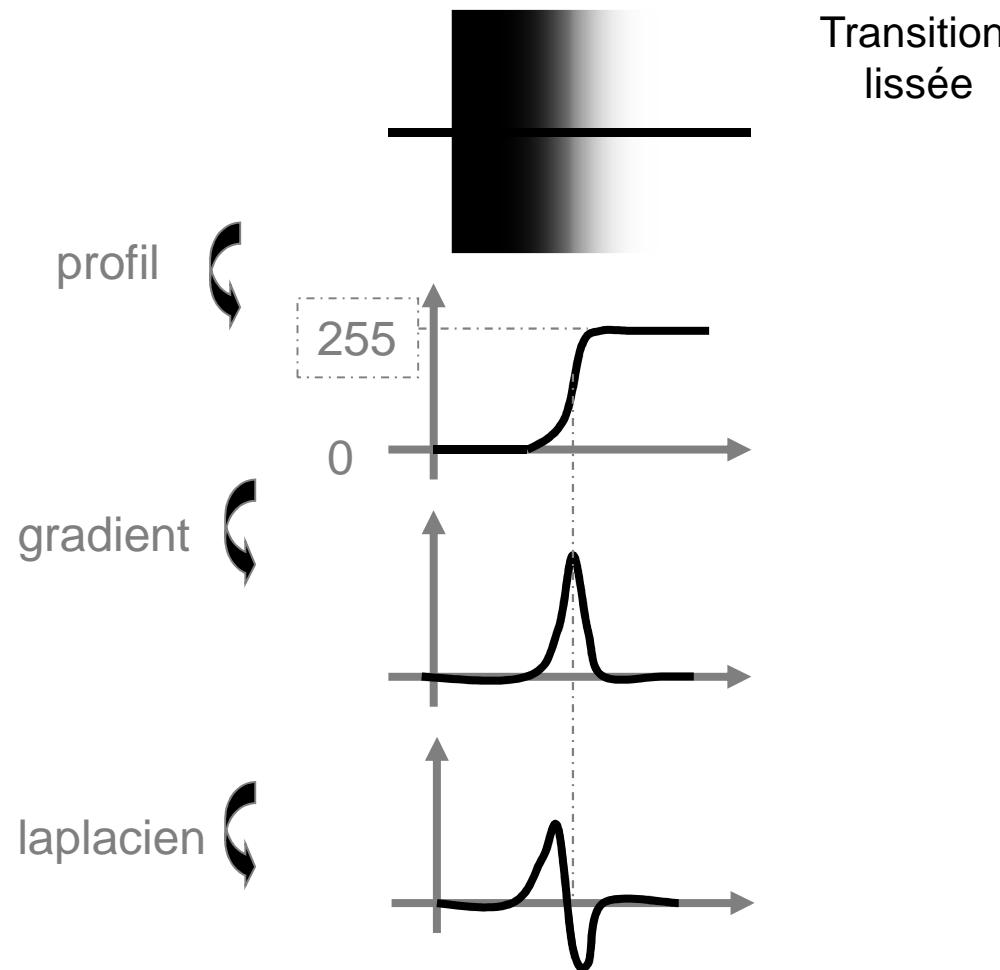
- on obtient la variation maximale de la fonction dans un voisinage de taille n
- recommandés lorsque les transitions sont douces



Si  $e=n$ , on obtient le contraste  $h$  entre les 2 régions A et B

# Fonctions de gris : Détection de contours

- Laplacien linéaire :



# Fonctions de gris : Détection de contours

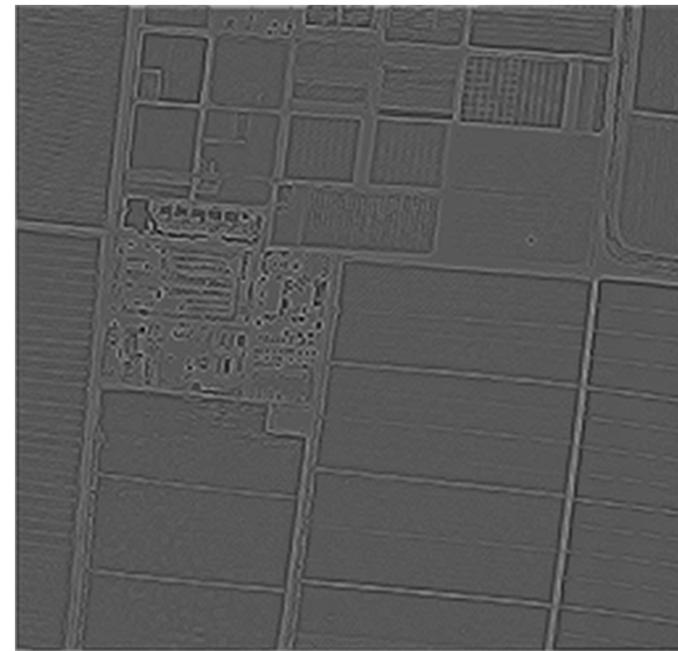
- Laplacien morphologique :  
différence arithmétique entre  $\rho^+$  et  $\rho^-$

$$\varphi_t = \rho_t^+ - \rho_t^-$$

→ contours définis par les passages à 0 du filtre de Laplace

# Fonctions de gris : Détection de contours

- Laplacien morphologique :



# Applications fonctionnelles

4 applications :

- détection de contours
  - gradient morphologique
  - laplacien morphologique
- lissage
- augmentation de contraste
- mesure de la covariance

# Fonctions de gris : Lissage

- Opérateur de lissage :

$$\varsigma_t = \frac{\delta_t + \varepsilon_t}{2}$$

permet de réduire le bruit

# Applications fonctionnelles

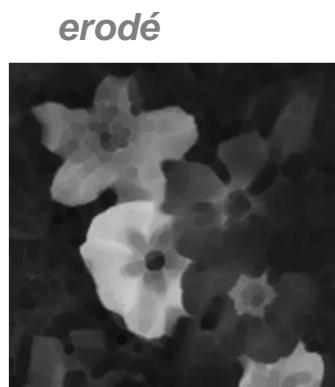
4 applications :

- détection de contours
  - gradient morphologique
  - laplacien morphologique
- lissage
- augmentation de contraste
- mesure de la covariance

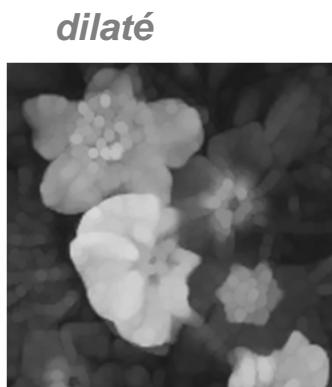
# Fonctions de gris : Augmentation de contraste

- Définition (toggle operator):

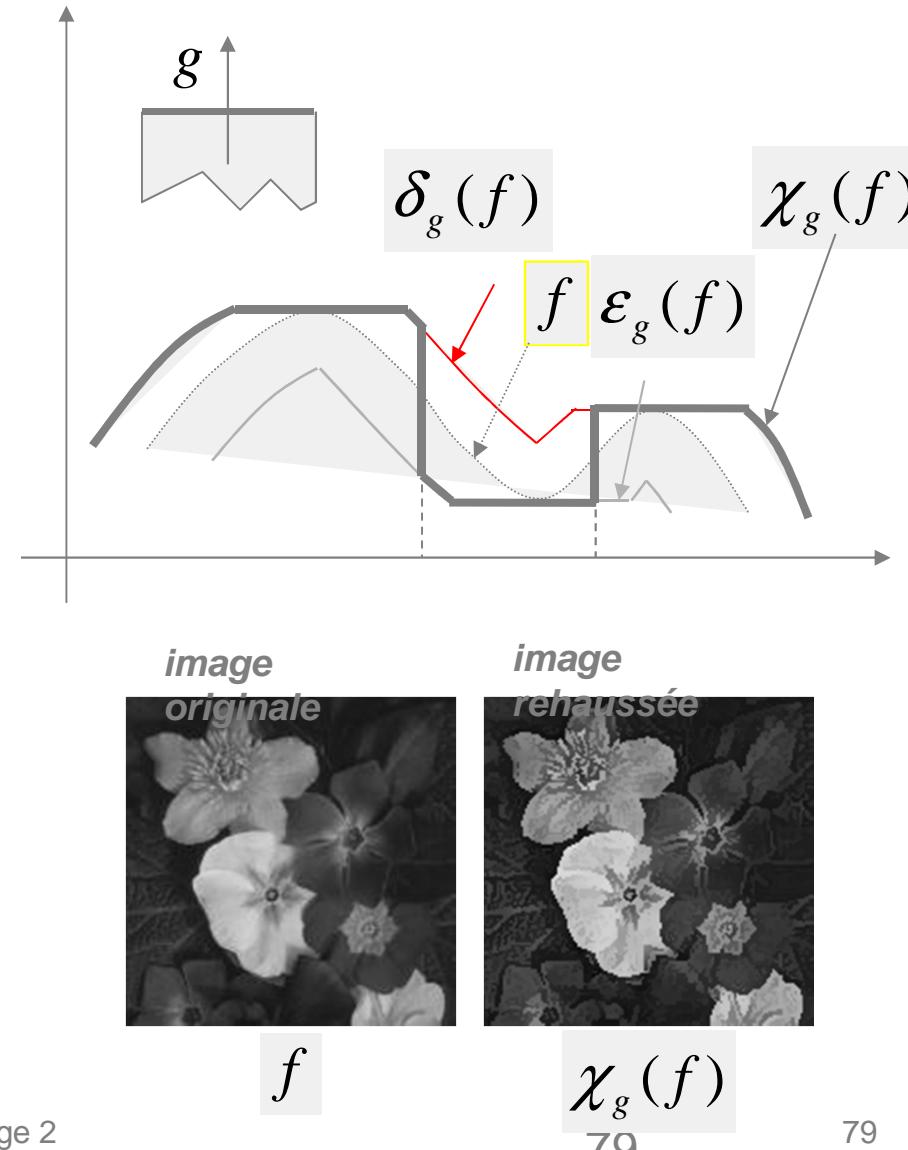
$$\begin{cases} \chi_t(f) = \delta_t(f) \text{ si } (\delta_t(f) - f) < (f - \varepsilon_t(f)) \\ \chi_t(f) = \varepsilon_t(f) \text{ si } (\delta_t(f) - f) > (f - \varepsilon_t(f)) \end{cases}$$



$\varepsilon_g(f)$



$\delta_g(f)$



1. Cadre binaire
2. Cadre fonctionnel
3. Applications

- 1.1. Érosion binaire
- 1.2. Dilatation binaire

# Fonctions de gris : Augmentation de contraste

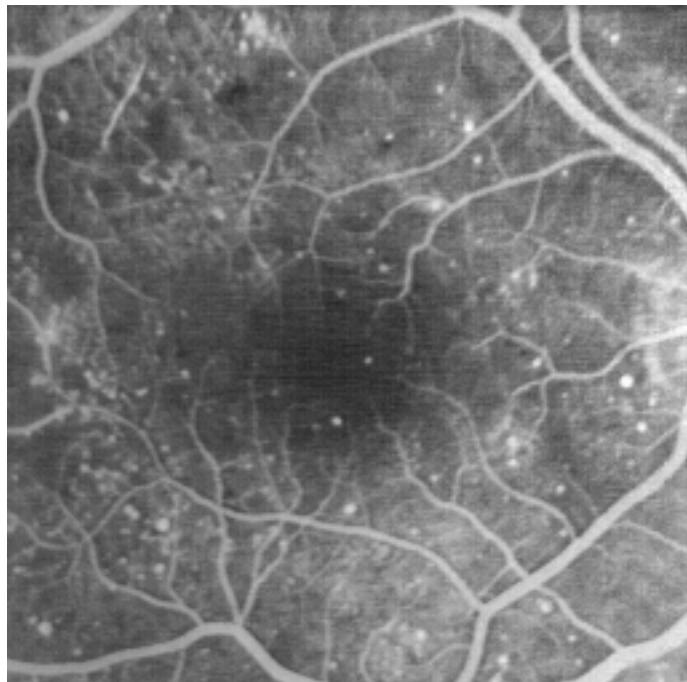


Image originale

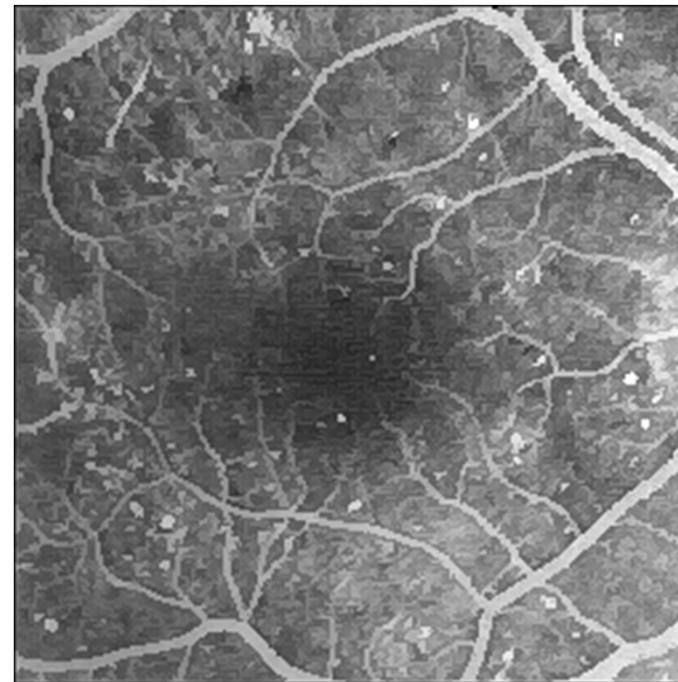


Image réhaussée

# Fonctions de gris : Covariance

- covariance = mesure  
(Objectif d'une mesure : réduire l'information image à des valeurs numériques pertinentes)
- Définition de la covariance, K :  
La covariance K d'une image consiste à mesurer le volume d'une image érodée par une paire de points  $P_{1,\vec{v}}$ :

avec

$$K(f, P_{1,\vec{v}}) = \text{Vol}[\mathcal{E}_{P_{1,\vec{v}}}(f)]$$

$$P_{1,\vec{v}} = \bigcup_{i=0}^{i=1} i\vec{v}$$

$\vec{v}$  : vecteur constant

Vol = somme des valeurs à niveaux de gris de tous les pixels

- Application :
  - analyse de texture

# Bilan

- Érosion et dilatation éliminent de l'information
- Ce ne sont pas des filtres
  - impossible de revenir en arrière
  - filtrage inverse impossible car structures supprimées

## A retenir

- Définitions des opérateurs
- Interprétations géométriques
- Effets des opérateurs
- Propriétés
- Applications