Morphologie mathématique

- Chapitre 3 – Transformée Hit-or-Miss & opérateurs dérivés -

Télécom Saint Etienne – Image 2

Christophe Ducottet

d'après les diapositives de Cécile Barat

Sommaire

Introduction

- Principe des transformées vues jusqu'ici :

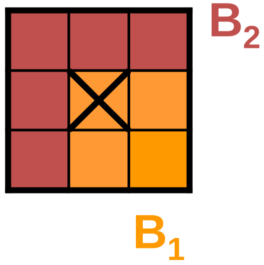
  examiner si un E.S. B vérifie une relation particulière avec l'objet

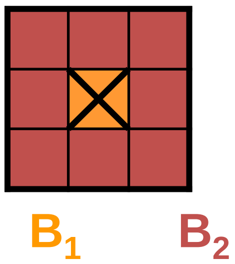
- Particularité de la transformée Hit-Or-Miss :

  E.S. composé de deux parties (B_1, B_2) disjointes ayant la même origine

$$B=(B_1, B_2)$$

Exemples :





Introduction

- Principe de la transformée Hit-Or-Miss :

  examiner si B_1 vérifie une relation avec l'objet et B_2 avec le complémentaire de l'objet.

  $\Rightarrow$ Est-ce que B_1 est inclus dans l'objet, pendant que simultanément B_2 est inclus dans le complémentaire ?

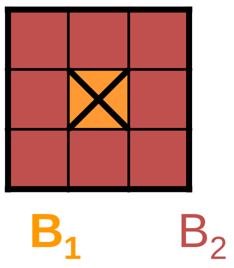
  Si réponse positive : le point image correspondant à l'origine de B est un point de la transformation Hit-or-Miss de l'image.

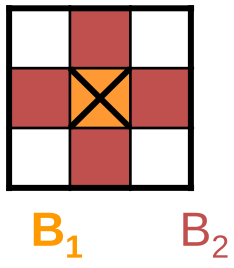
Introduction

- Applications :

  - détection de configurations particulières de voisinage

    (ex : pixels isolés dans le fond ou dans l'objet)





  - reconnaissance d'objets

Définition mathématique

- Notation : $HMT_B(X)$ (Hit-or-Miss Transform de X par B) ou $(X \otimes B)$

  X : ensemble objet étudié

  B : élément structurant servant à analyser X.

  composite $B=(B_1, B_2)$

- Traduction du principe sous forme mathématique :

$$HMT_B(X) = X \otimes B = \left\{ x \middle| B_{1x} \subseteq X, B_{2x} \subseteq X^c \right\}$$

En termes d'opérateurs morphologiques ?

Définition mathématique

- Autre écriture mathématique :

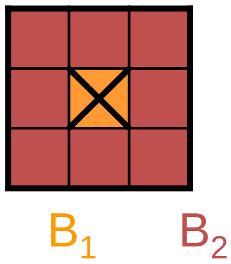
$$HMT_B(X) = X \otimes B = \varepsilon_{B_1}(X) \cap \varepsilon_{B_2}\left(X^c\right)$$

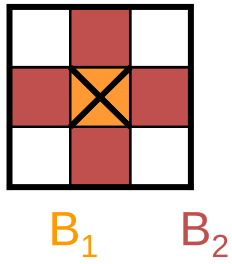
- Remarque :

$$HMT_B(X) = HMT_{B^c}\left(X^c\right)$$

Exemples

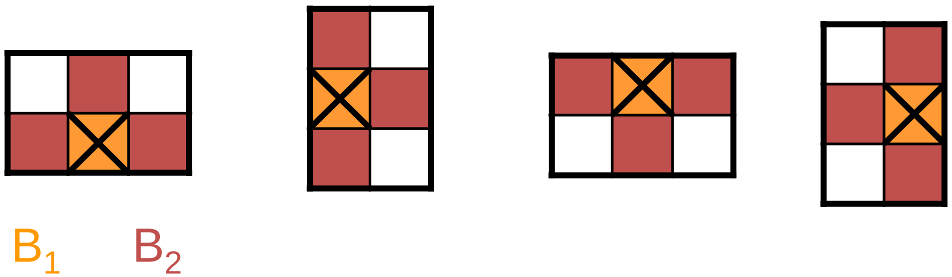
E.S permettant de détecter les pixels isolés :



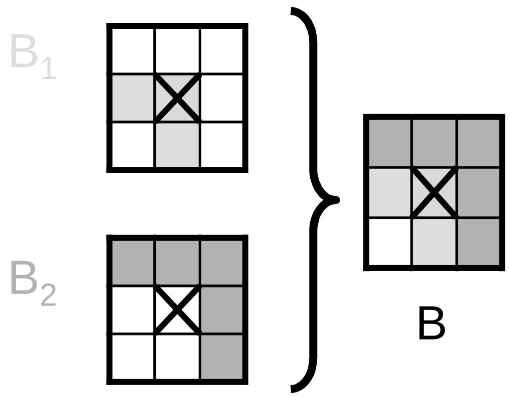


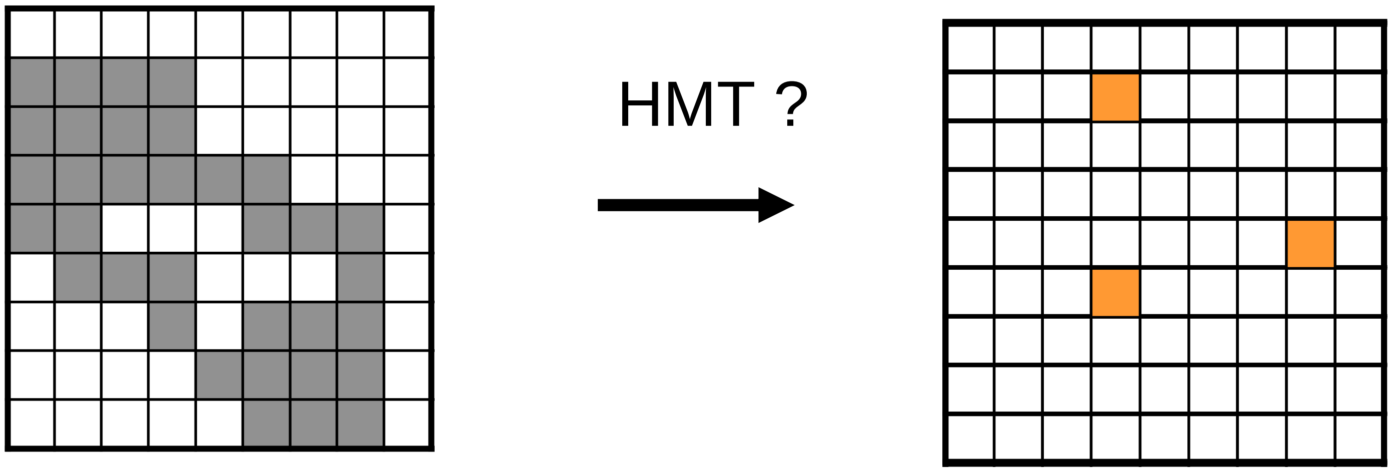
E.S permettant de détecter les points terminaux :

(points ayant au plus un autre objet pixel dans leur voisinage, pour des courbes de 1 px d’épaisseur)



Exercice





Ouverture Hit-or-Miss

Comment faire pour conserver tous les points de l'objet détectés plutôt que seulement son origine ?

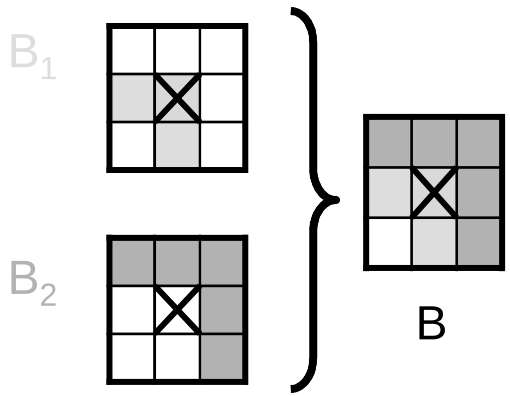
$\Rightarrow$ on applique une ouverture de HMT :

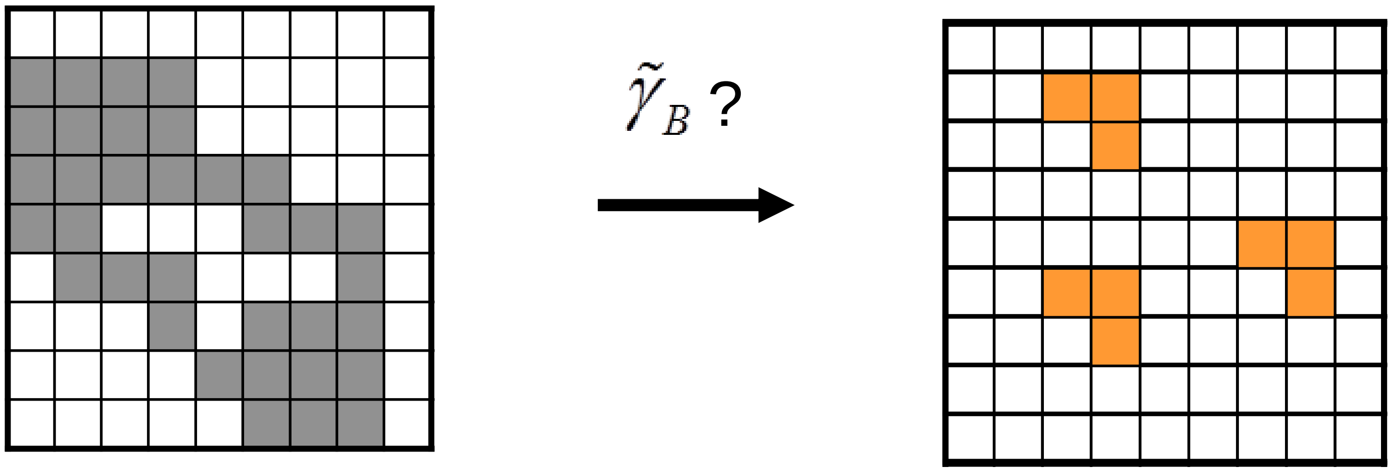
$$\tilde{\gamma}_B = \delta_{\breve{B}_1}\left(HMT_B\right)$$

transformation anti-extensive et idempotente

ne vérifie pas la propriété de croissance

Ouverture Hit-or-Miss





Sommaire

1. Transformée Hit-Or-Miss
2. Amincissement et épaississement
3. Squelettes morphologiques
4. Application pratique

Introduction

Transformée Hit-Or-Miss

⇒ Amincissement
⇒ Epaississement

Homotopie

⇒ Amincissement homotopique
⇒ Epaississement homotopique

Amincissement

- Principe :

  supprimer les pixels « objet » qui vérifient la configuration de l'élément B composite

  (suppression des pixels détectés par la transformée Hit-or-Miss)

- Définition binaire :

$$X \,\underline{\circ}\, B = X \setminus HMT_B(X)$$

!!! L'origine doit appartenir à B_1

Amincissement

- Propriété :

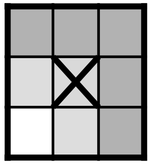
  opération anti-extensive

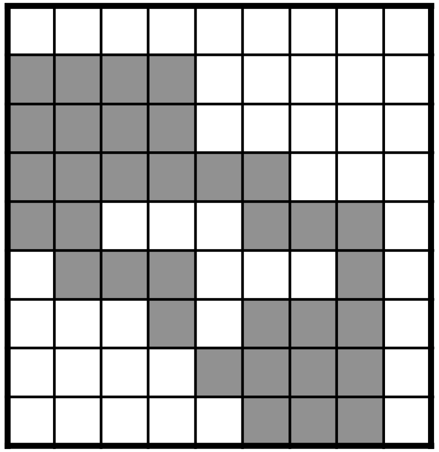
- Remarque :

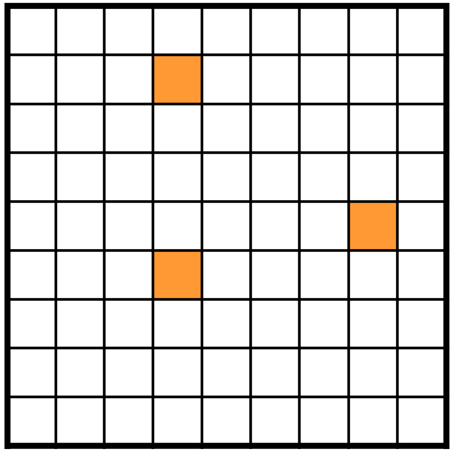
  Il est possible de réaliser un amincissement à partir de l'ouverture de la transformée HMT :

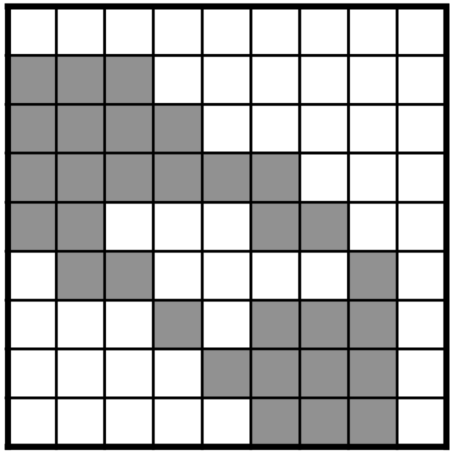
$$X \,\underline{\tilde{\circ}}\, B = X - \tilde{\gamma}_B\left(X \right)$$

Exemple d'amincissement binaire

B


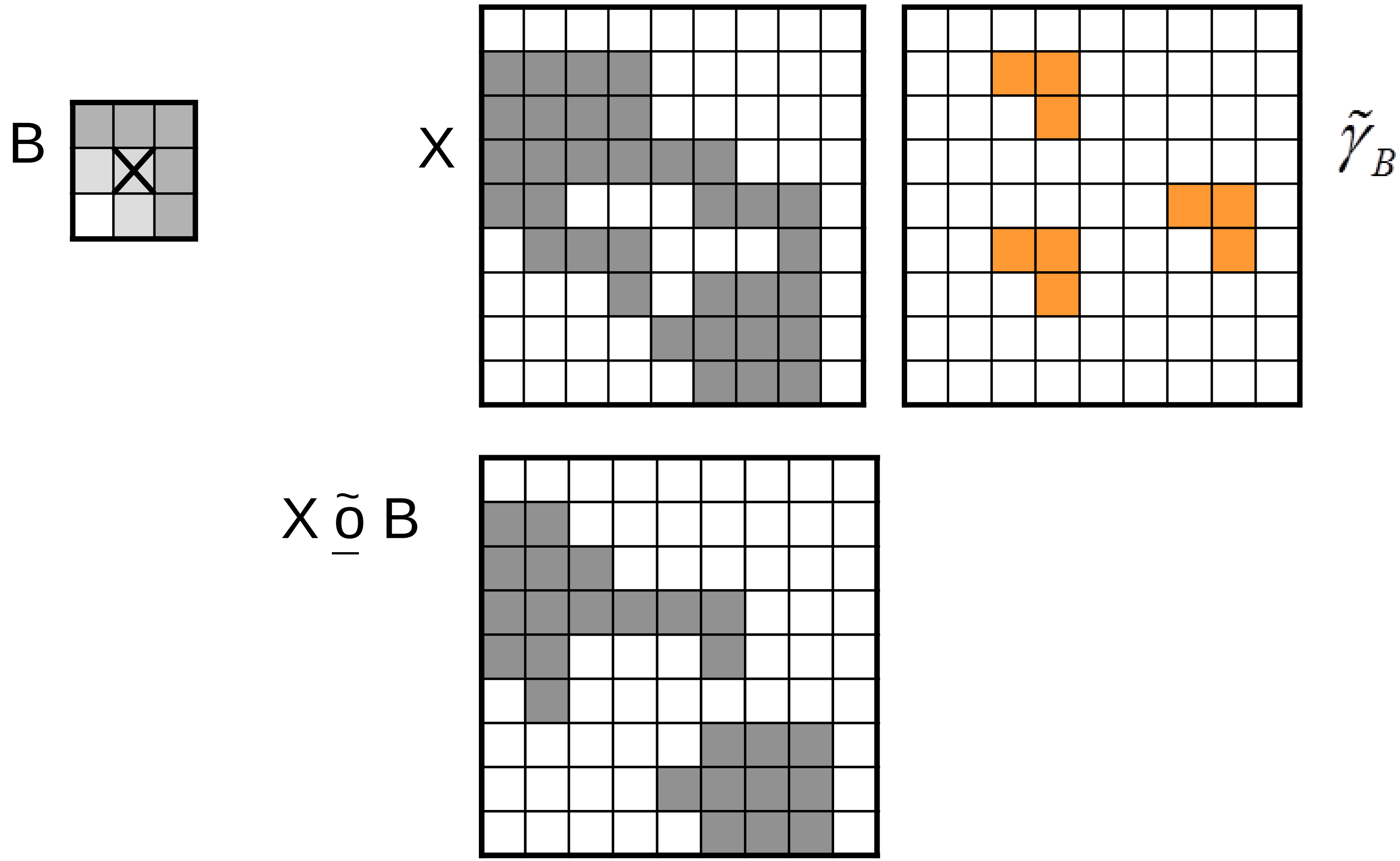
X



HMT

X o B


Exemple d’amincissement binaire

À partir de l’ouverture Hit-or-Miss



Amincissement à niveaux de gris

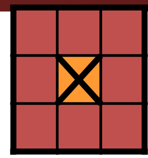
- Définition fonctionnelle :

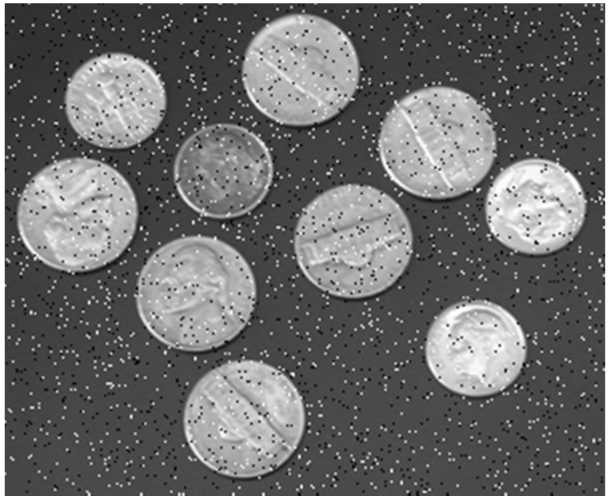
$$\left(f \mathbin{\underline{\circ}} B \right)\left(x \right) =$$

$$\begin{cases} \left[\delta_{B_2}\left(f \right) \right]\left(x \right), \text{si } \left[\delta_{B_2}\left(f \right) \right] < f\left(x \right) \text{ et } f\left(x \right) = \left[\varepsilon_{B_1}\left(f \right) \right] \\ f\left(x \right) \end{cases}$$

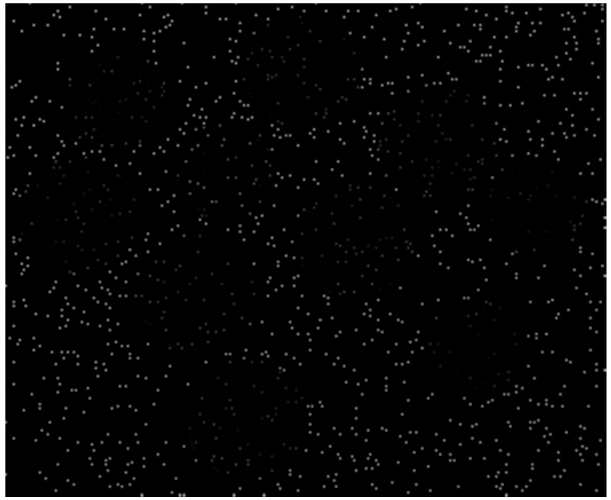
Amincissement à niveaux de gris

- Exemple : B permettant de supprimer les pixels isolés

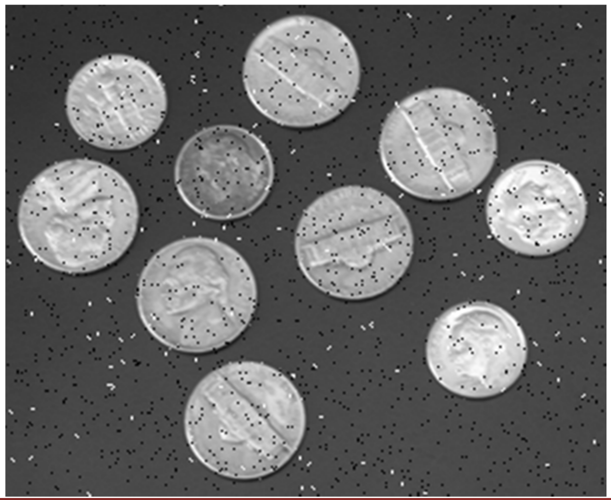

B_1
B_2



HMT



Amincissement



Epaississement

- Principe :

  ajouter des pixels à l'objet lorsqu'ils vérifient la configuration de l'élément B composite

  (ajouter les pixels détectés par la transformée Hit-or-Miss)

- Définition binaire :

$$X \odot B = X \cup HMT_B(X)$$

!!! L'origine doit appartenir à B_2

Epaississement

- Propriété :

  opération extensive

- Remarque :

  Il est possible de réaliser un épaississement à partir de l'ouverture de la transformée HMT :

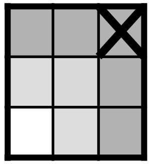
$$X \tilde{\odot} B = X \cup \tilde{\gamma}_{B^c}\left(X^c\right)$$

- Dualité :

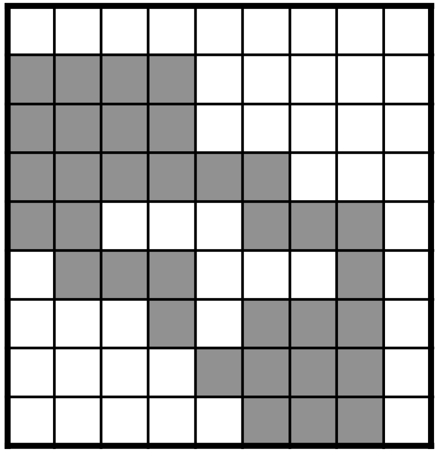
$$X \underline{\circ} B = \left(X^c \odot B^c\right)^c$$

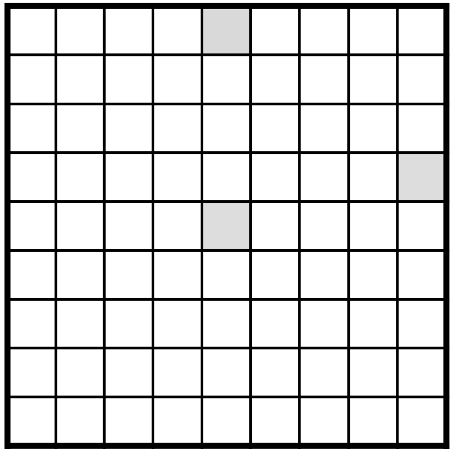
Exemple d’épaississement binaire

B



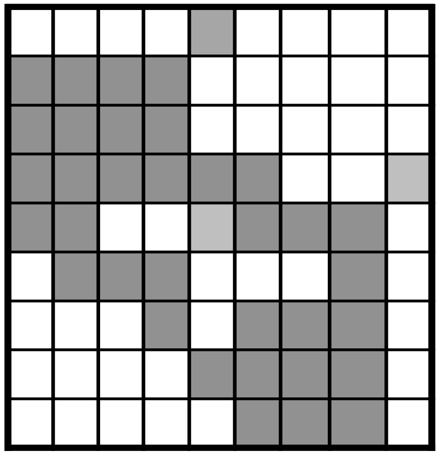
X





HMT

X B



Epaississement binaire

Application : obtention de l’enveloppe convexe d’une forme

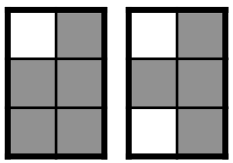
Enveloppe convexe :

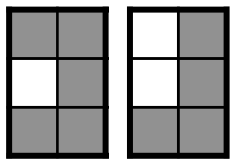
Un ensemble X du plan est dit *convexe* si pour tout couple de points $A,B \in X$, le segment AB appartient aussi à X, c'est-à-dire:

$$\forall \alpha \in [0,1],\ \ \alpha A + (1-\alpha)B \in X$$

L'*enveloppe convexe* d'un ensemble X, notée Env(X) est définie comme l'intersection de tous les ensembles convexes contenant X.

Voici 2 ensembles convexes et 2 non convexes :



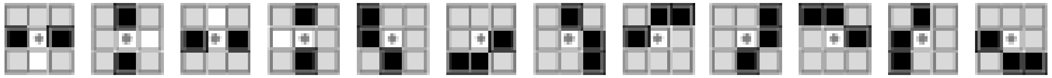


Epaississement binaire

Application : obtention de l'enveloppe convexe d'une forme

- **Construction**

L'enveloppe convexe d'une composante connexe X peut être construite par un procédé itératif au moyen des masques Mk (k=1 ,2 ,..., 12) suivants:



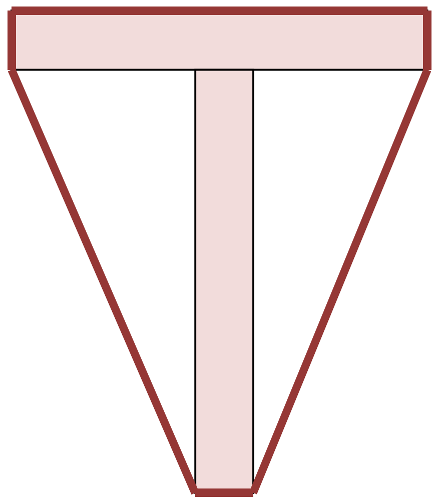
noir : objet
blanc : fond
gris : rien

- **Algorithme**

$i \leftarrow 0$
$X_i \leftarrow X$, $X_{i+1} \leftarrow X$,
Arret $\leftarrow 0$

TantQue Arret=0
  Pour k = 1 à 12 //mise à jour de X_{i+1}
    $X_{i+1} := HMT_{Mk}(X_{i+1}) \cup X_{i+1}$
  FinPour
  Si $X_{i+1} \neq X_i$ Alors
    $i=i+1$, $X_i=X_{i+1}$,
  Sinon
    Arret $\leftarrow 1$
  FinSi
FinTantQue
Env(X) $\leftarrow X_i$

Application :
Caractérisation de formes

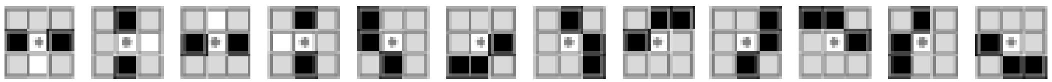


Epaississement binaire

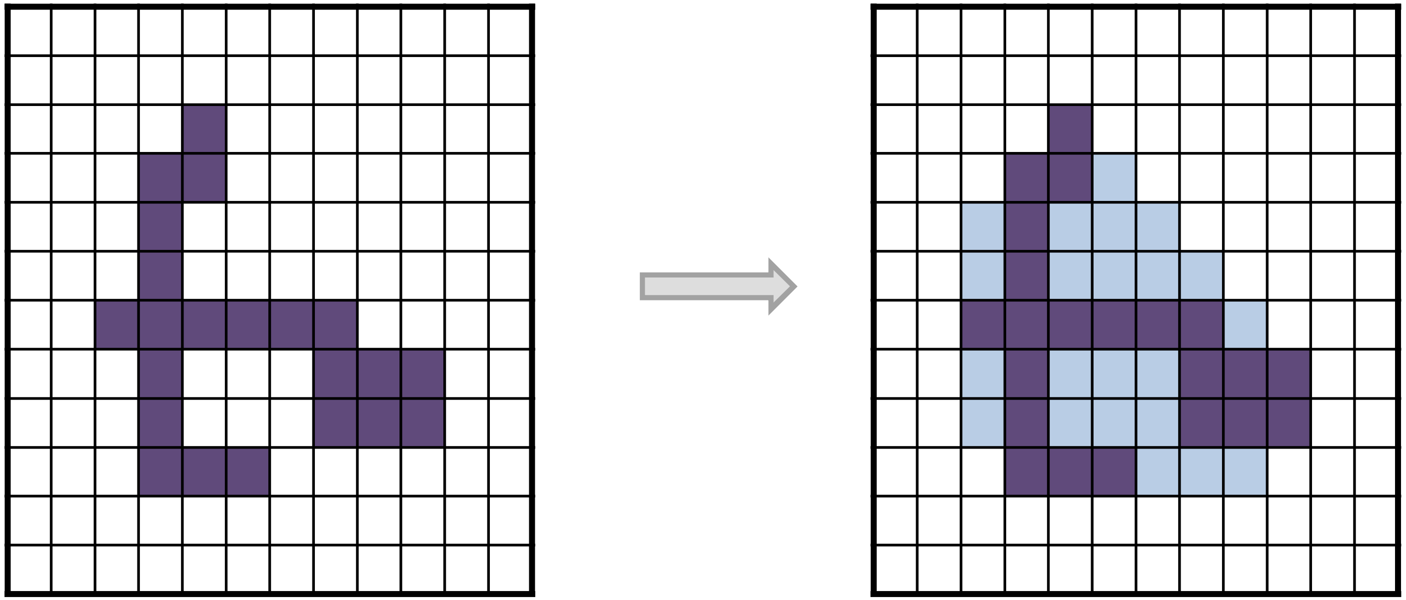
Application : obtention de l'enveloppe convexe d'une forme

Construction

L'enveloppe convexe d'une composante connexe X peut être construite par un procédé itératif au moyen des masques Mk (k=1 ,2 ,..., 12) suivants:



noir : objet
blanc : fond
gris : rien

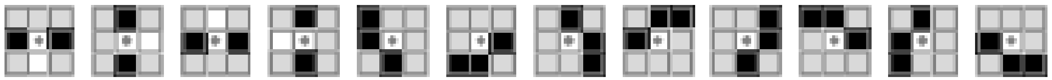


Epaissisement binaire

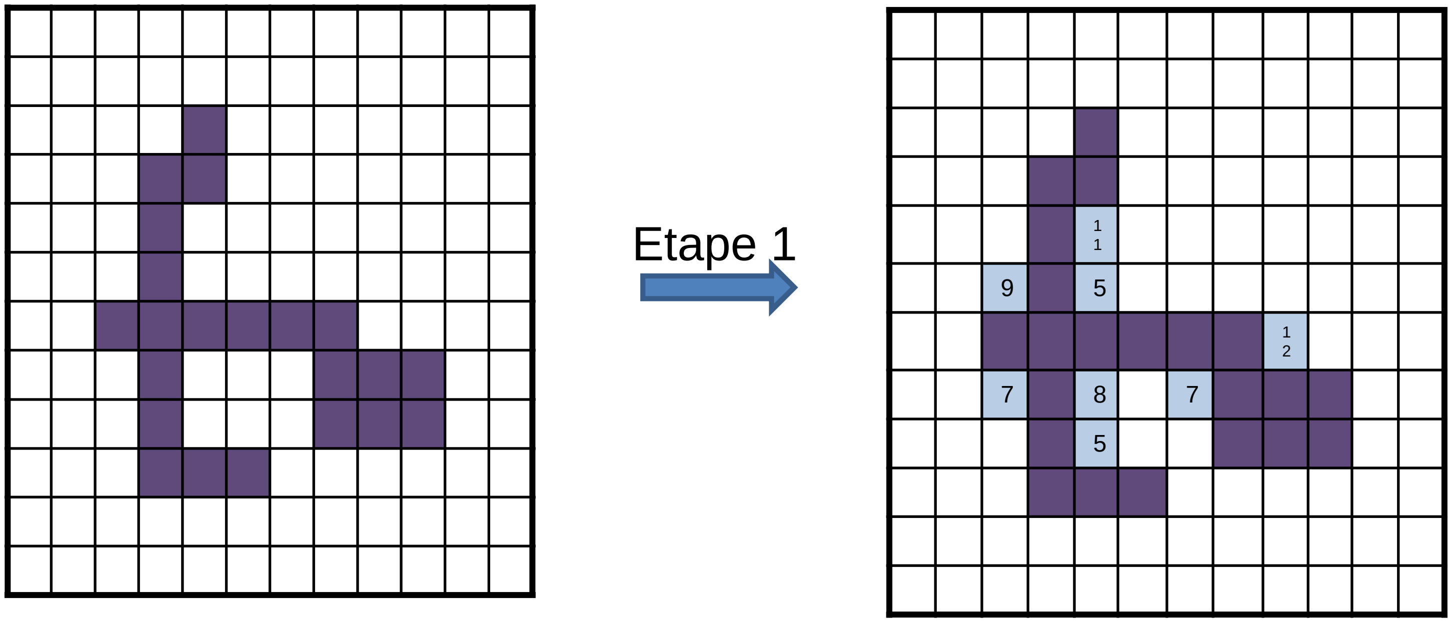
Application : obtention de l'enveloppe convexe d'une forme

- **Construction**

L'enveloppe convexe d'une composante connexe X peut être construite par un procédé itératif au moyen des masques Mk (k=1 ,2 ,..., 12) suivants:



noir : objet
blanc : fond
gris : rien

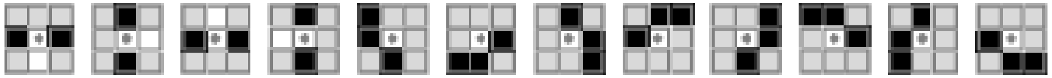


Epaissisement binaire

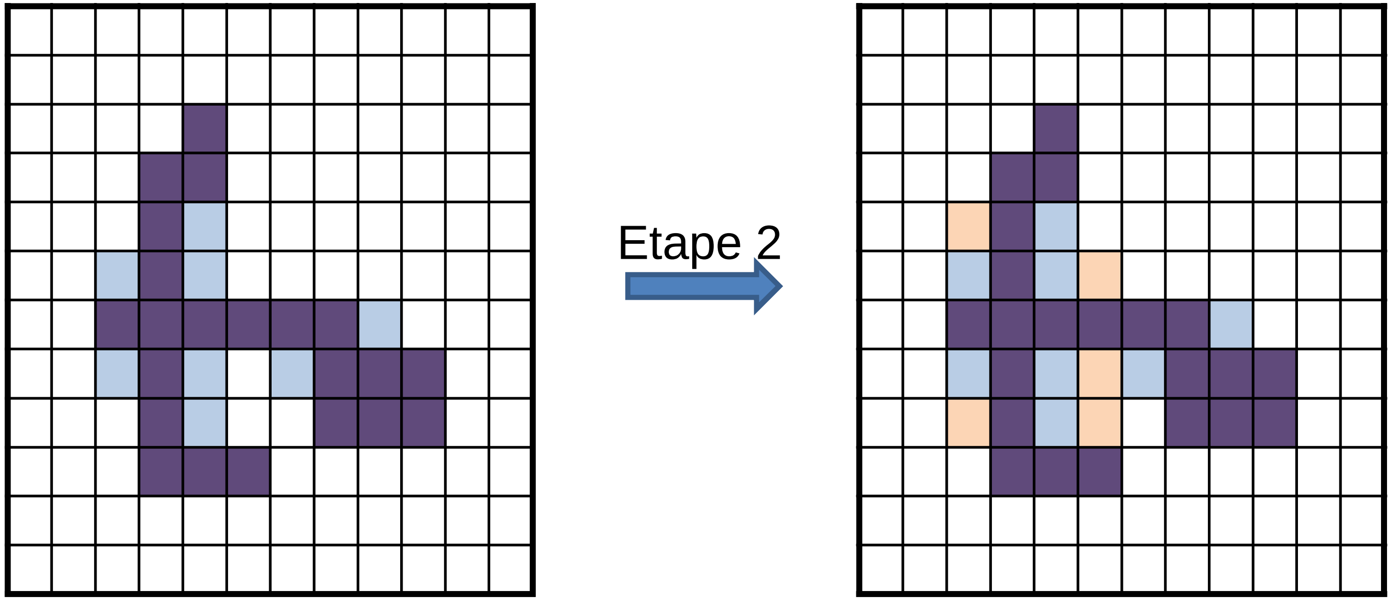
Application : obtention de l'enveloppe convexe d'une forme

- **Construction**

L'enveloppe convexe d'une composante connexe X peut être construite par un procédé itératif au moyen des masques Mk (k=1 ,2 ,..., 12) suivants:



noir : objet
blanc : fond
gris : rien

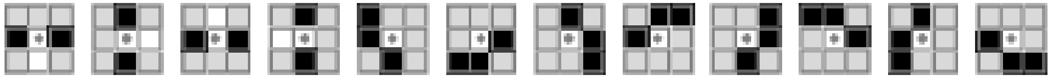


Epaississement binaire

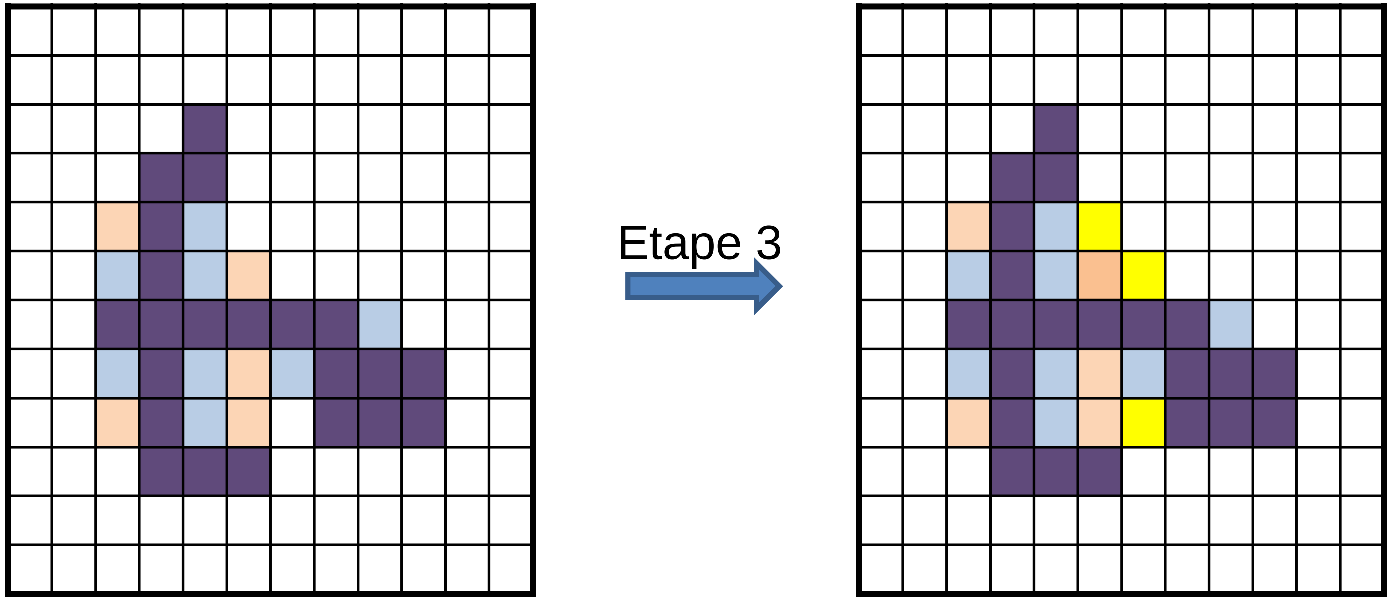
Application : obtention de l’enveloppe convexe d’une forme

- **Construction**

L'enveloppe convexe d'une composante connexe X peut être construite par un procédé itératif au moyen des masques Mk (k=1 ,2 ,..., 12) suivants:



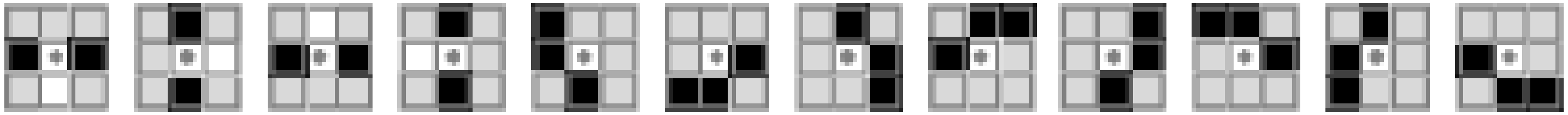
noir : objet
blanc : fond
gris : rien



Etc…

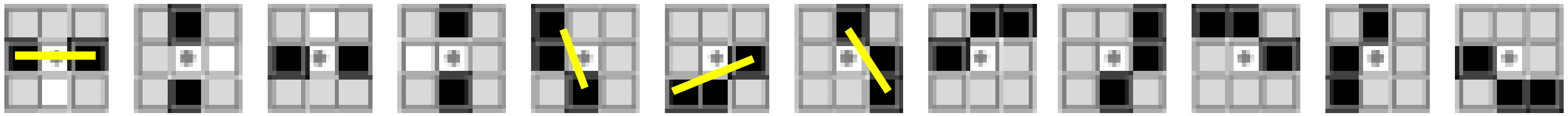
Epaissisement binaire

Pourquoi ces éléments structurants ?



noir : objet
blanc : fond
gris : rien

→ On voit qu'ils permettent de détecter des configurations de pixels d'une forme qui rendent la forme non convexe



Epaississement bin

Exemple d’application :

Image (I) → enveloppe convexe (Ich)

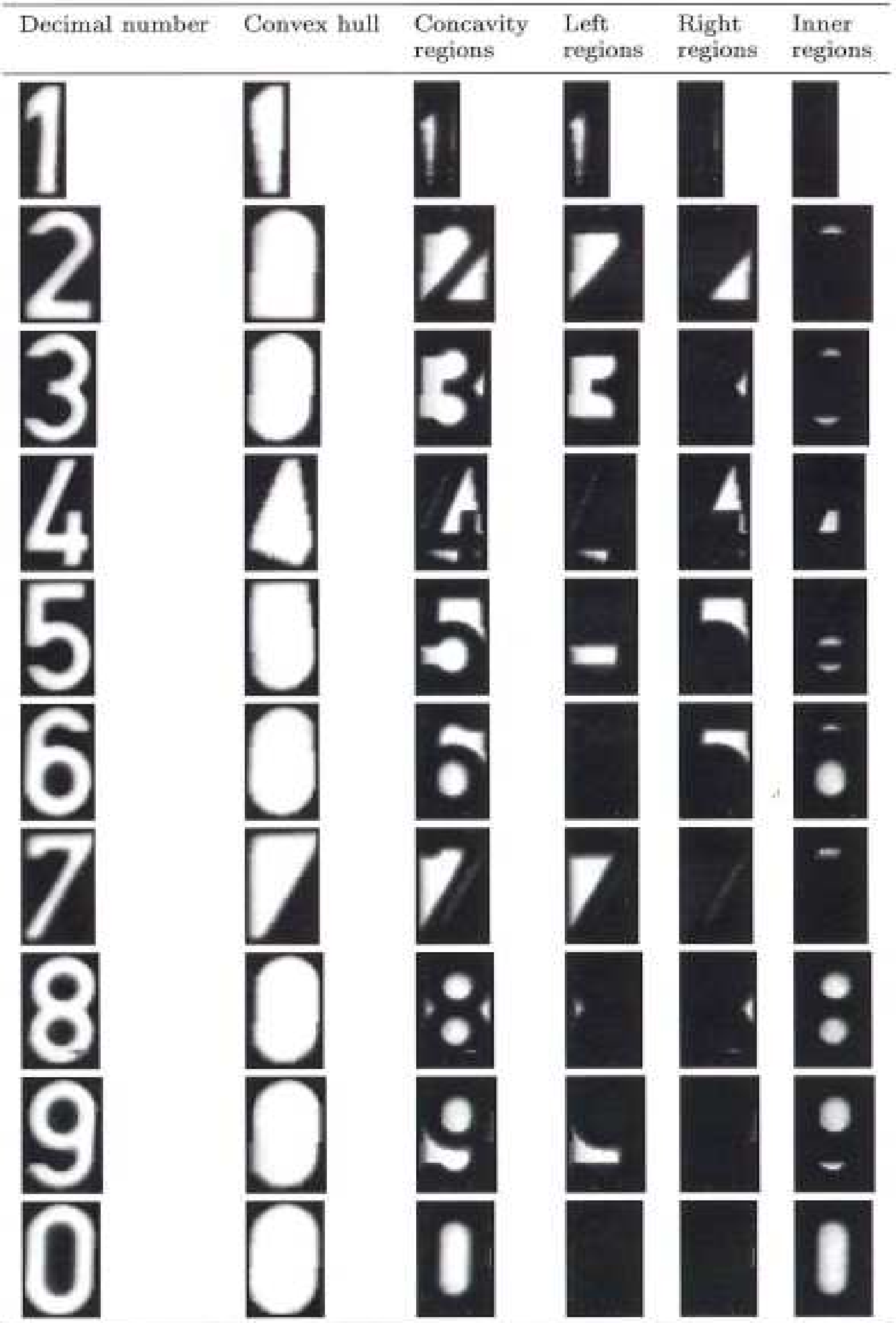
Concavity (Ico) = Ich-I;

Left : composantes connexes de Ico vues du bord gauche.

Right : composantes connexes de Ico vues du bord droit

Inner : composantes connexes de Ico vues ni de gauche, ni de droite

Table 4.1. Decimal numbers extracted from car plates together with their convex hulls and the corresponding concavity regions.



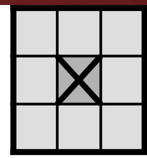
Epaissisement fonctionnel

- Définition fonctionnelle :

$$\left(f \odot B \right)(x) =$$

$$\begin{cases} \left[\varepsilon_{B_2}\left(f \right) \right](x), \text{si } \left[\delta_{B_1}\left(f \right) \right] = f\left(x \right) \text{ et } f\left(x \right) < \left[\varepsilon_{B_2}\left(f \right) \right] \\ f\left(x \right) \end{cases}$$

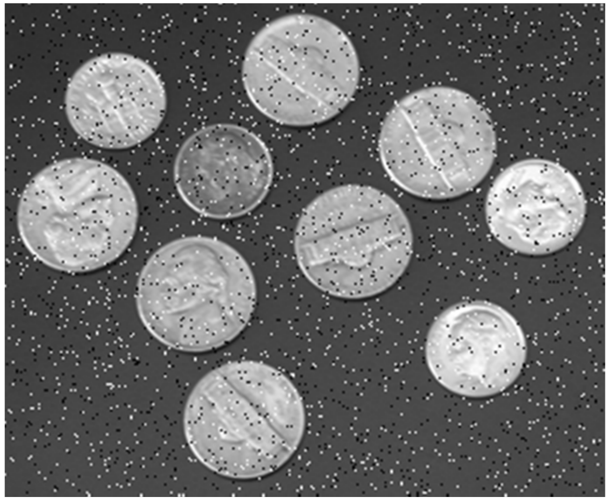
Epaississement fonctionnel



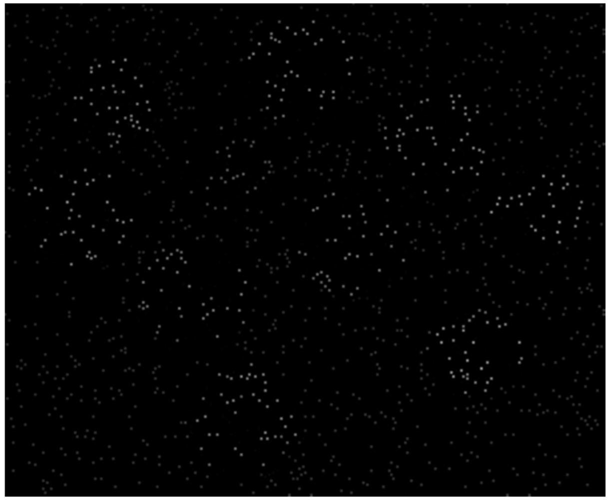
B_1

B_2

Exemple : B permettant d'ajouter les pixels isolés

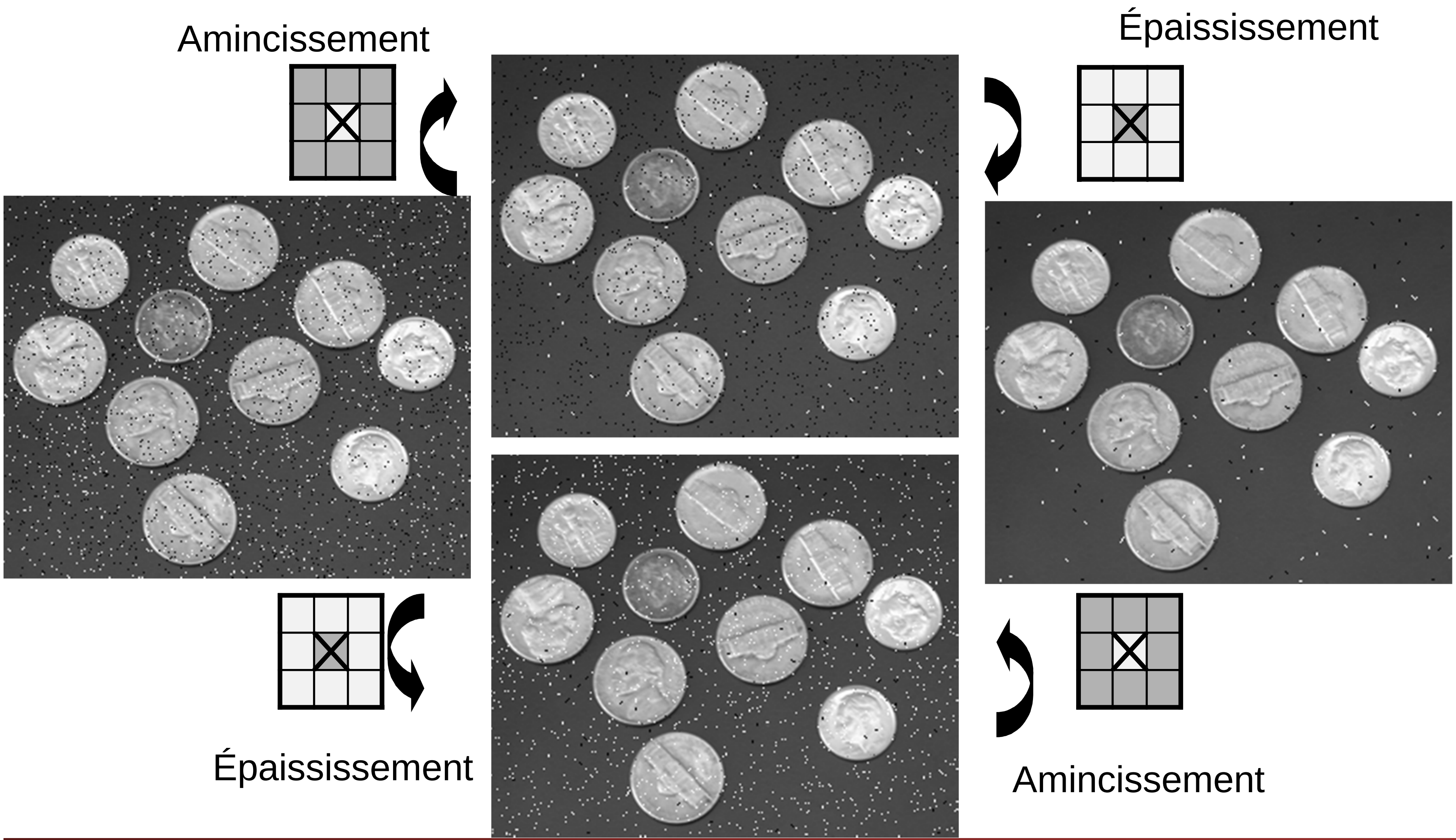


HMT



Épaississement

Exemple d’application



Opérateurs homotopiques

Transformée Hit-Or-Miss

⇒ Amincissement
⇒ Epaississement

Homotopie

⇒ Amincissement homotopique
⇒ Epaississement homotopique

Homotopie sur les ensembles

- Homotopie :

  une transformation T est dite homotopique

  si elle préserve le nombre de composantes connexes et

  le nombre de trous dans chaque composante connexe.

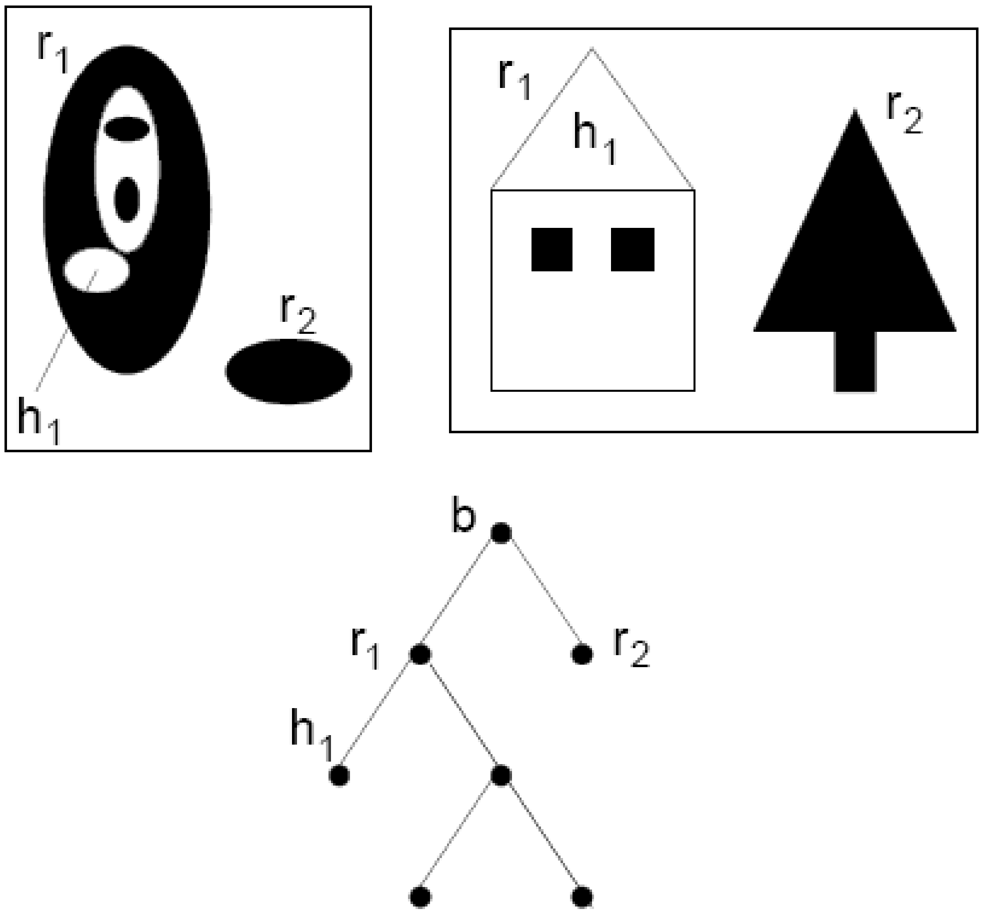
ou si elle ne modifie pas l'arbre de connexité d'un ensemble

Arbre de connexité ?

Un ensemble et son arbre de connexité

Homotopie sur les ensembles

- Homotopie :

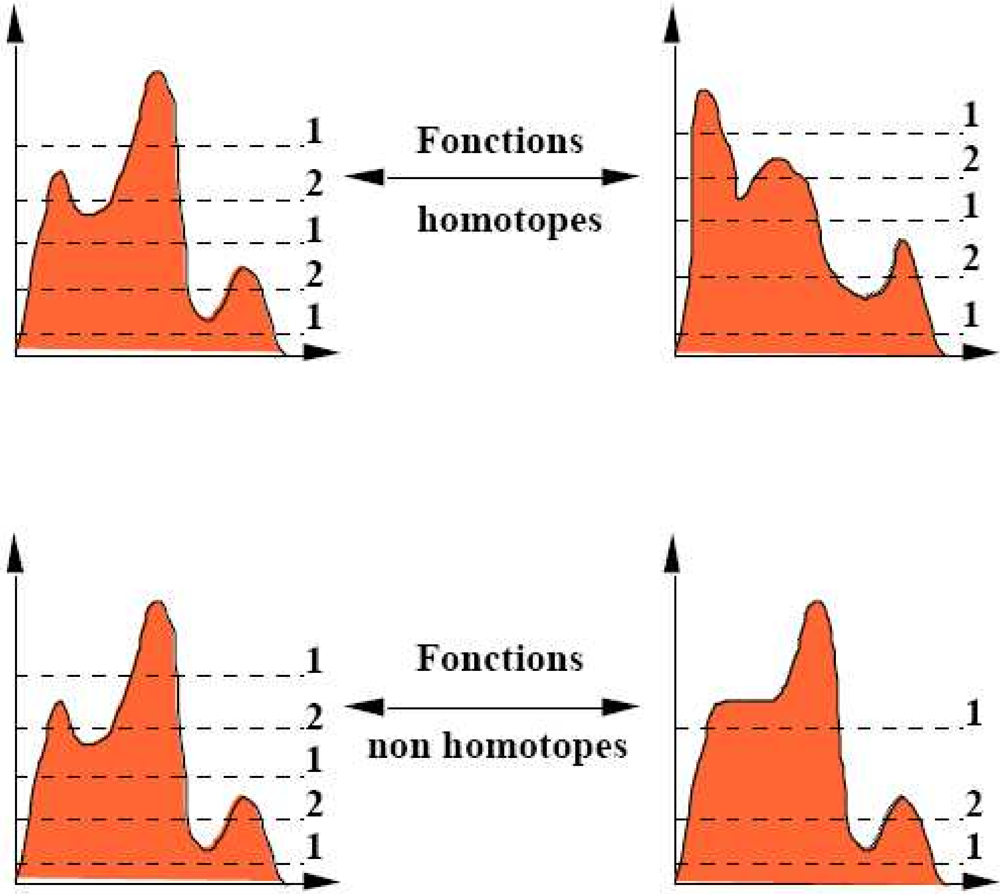


Homotopie sur les images à ndg

- Étudiée à partir de leurs sections planes.
- Chaque fonction est décomposée en une série de coupes binaires.
- Un opérateur homotopique doit conserver la topologie d'une image.

On dit qu'un opérateur conserve la topologie d'une image à ndg si la topologie de chaque section binaire est conservée.

Homotopie sur les images à ndg



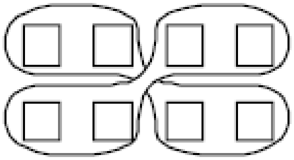
Cours J. Serra

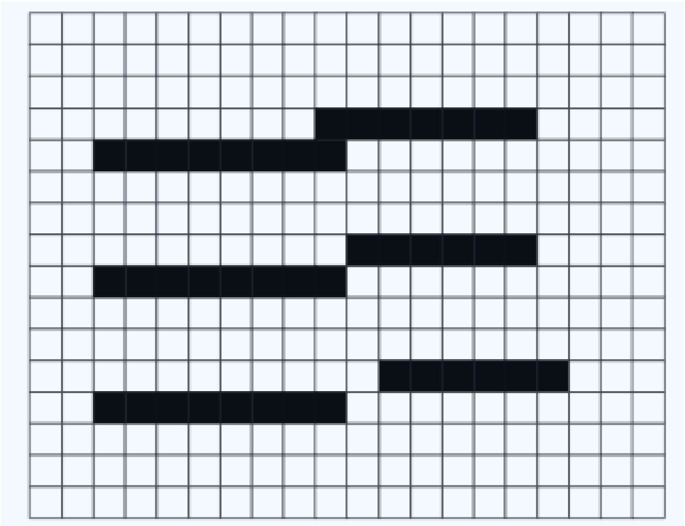
L'homotopie caractérise la structure des pics, des vallées et des cols.

Homotopie sur les images

⇒ Nécessaire de définir des règles de connexité interdisant les croisements forme / fond

⇒ 3 configurations possibles

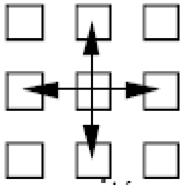


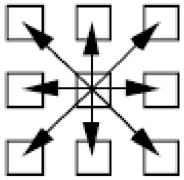


Règles de connexité

Plusieurs cas possibles :

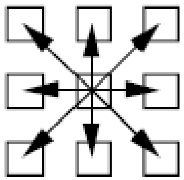
1) 4-connexité pour le fond et une 8-connexité pour la forme

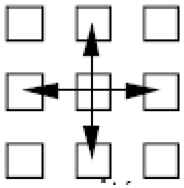




(adapté aux objets convexes)

2) 8-connexité pour le fond et une 4-connexité pour la forme

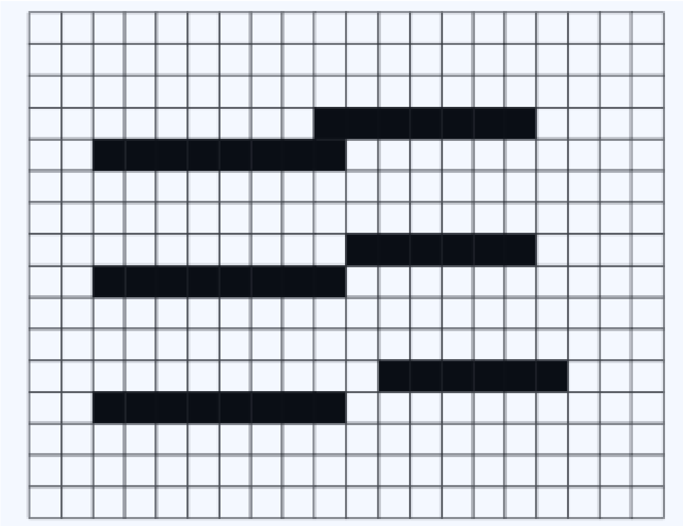




(adapté au fond convexe)

Règles de connexité

Pour chaque cas, combien d’objets en 4-connexité pour l’objet ?
en 8 connexité pour l’objet ?



Opérateurs homotopiques

Transformée Hit-Or-Miss

⇒ Amincissement
⇒ Epaississement

Homotopie

⇒ Amincissement homotopique
⇒ Epaississement homotopique

Amincissement épaississement homotopiques

Un amincissement ou un épaississement est homotopique s’il utilise un élément structurant B=(B1,B2) qui préserve l’homotopie.

Règles de construction de tels éléments structurants :

- le pixel central est à 1 (amincissement) ou 0 (épaississement)
- l’inversion de la couleur du point central ne doit pas modifier la topologie associée

0	0	0
	1	
1	1	1

Transformation homotopique

0		0
	1	
1	1	1

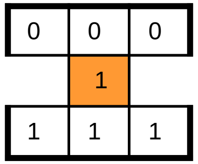
Transformation non-homotopique

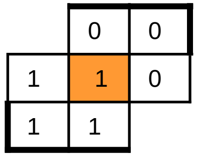
quel que soit le système de connexité pour le fond et la forme

Amincissement épaississement homotopiques

Configuration de voisinage

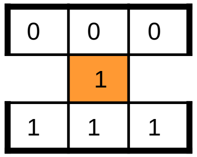
En 4-connexité pour l'objet : 2 familles peuvent être utilisées



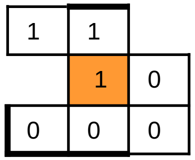


(et leurs 4 rotations possibles)

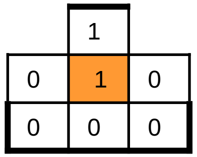
En 8-connexité pour l'objet: (et leurs 8 rotations possibles)



(L)



(M)

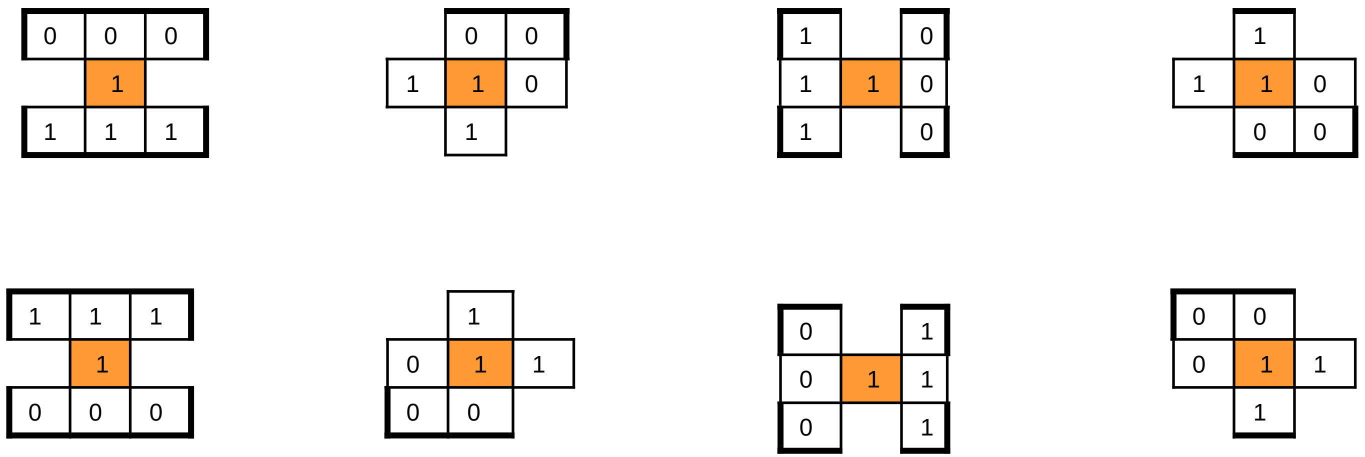


(E)

(alphabet de Golay)

Amincissement épaississement homotopiques

Exemple de famille complète (L-8 Golay)



Amincissement épaississement homotopiques

Applications :

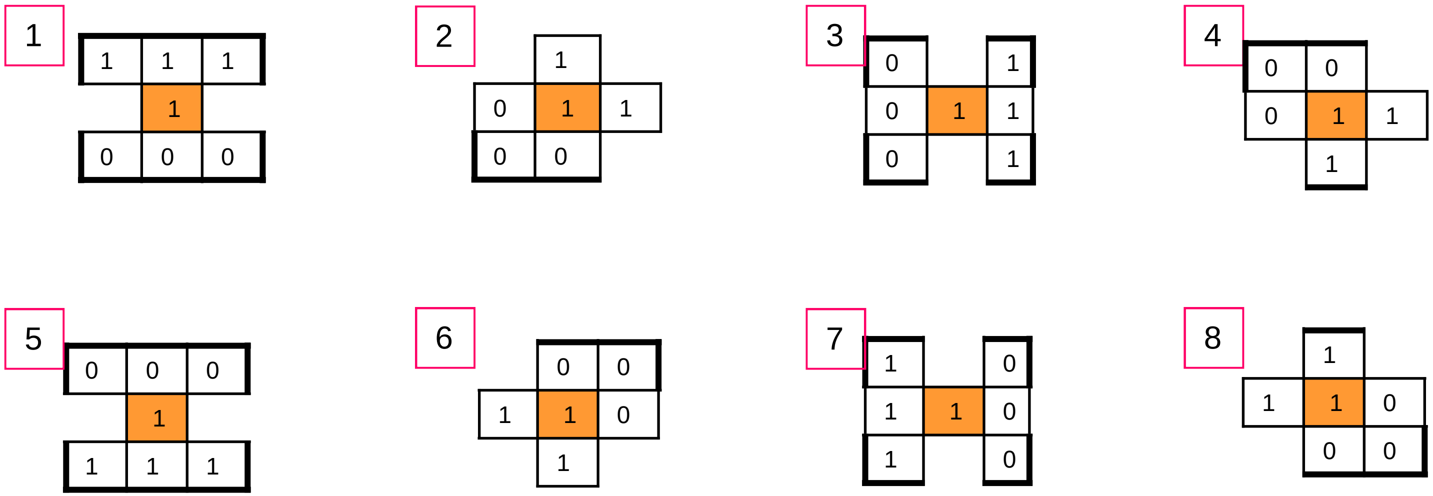
- Obtention du squelette d’une forme
- Rendre filiforme une région peu épaisse (ex : écriture).
- Caractériser une forme.

- Inconvénients : parfois instable

Amincissement épaississement homotopiques

Exemple d'application : rendre filiforme une forme

Utilisation successive des 8 éléments suivants :

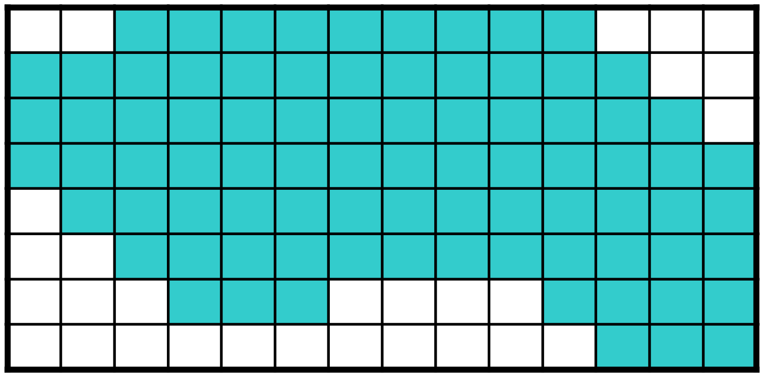


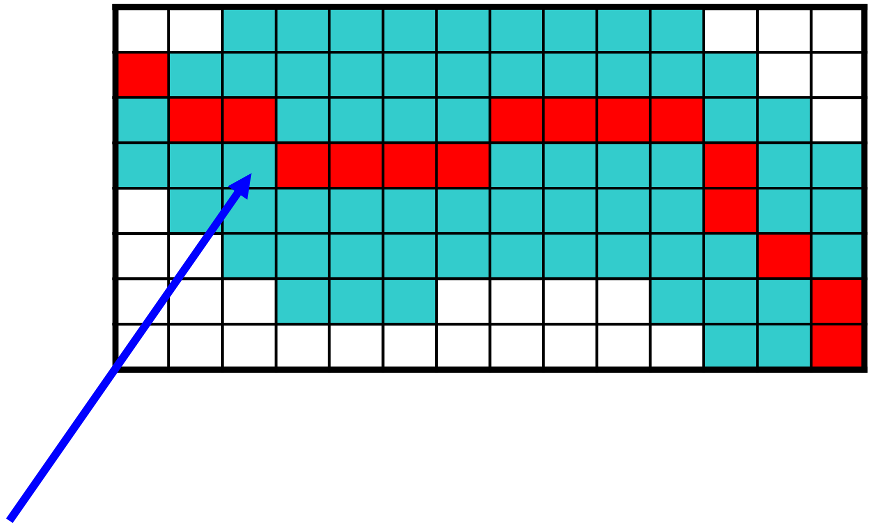
Le résultat dépend de l'ordre

Amincissement épaississement homotopiques

Si on applique ces 8 éléments structurants successivement :

suppression du contour de la forme





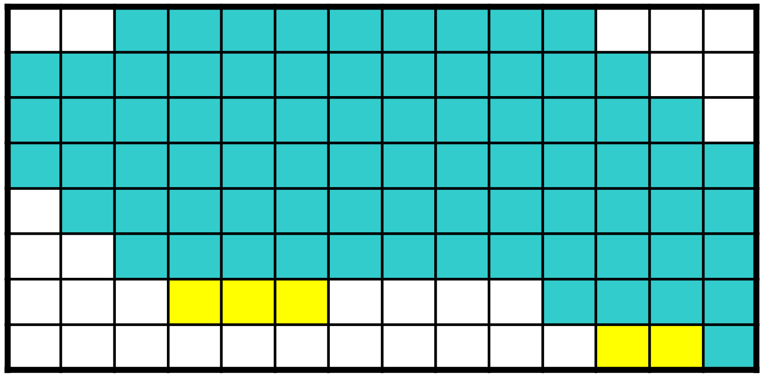
Avec itérations :
contour obtenu à la dernière itération
(stabilisation)

Amincissement épaississement homotopiques

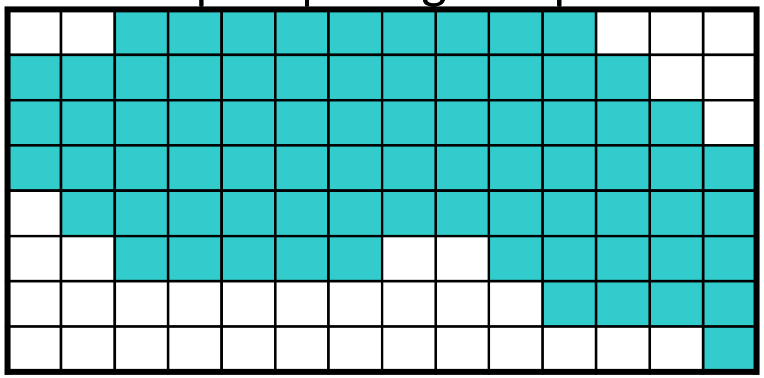
Si on applique ces 8 éléments structurants successivement :

suppression du contour de la forme

1	1	1
	1	
0	0	0



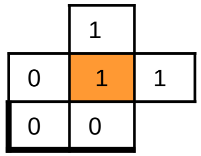
Résultat après passage du premier ES :

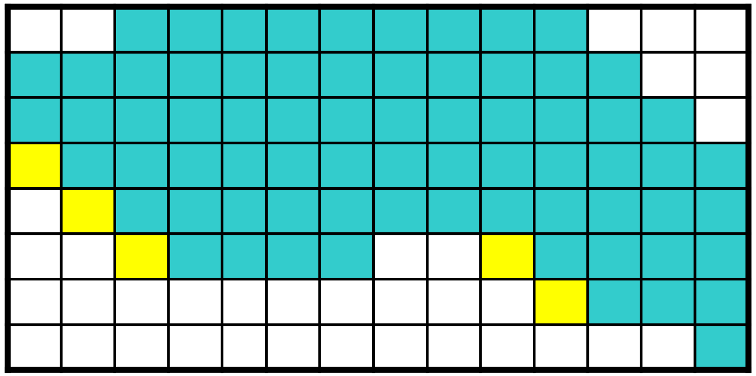


Amincissement épaississement homotopiques

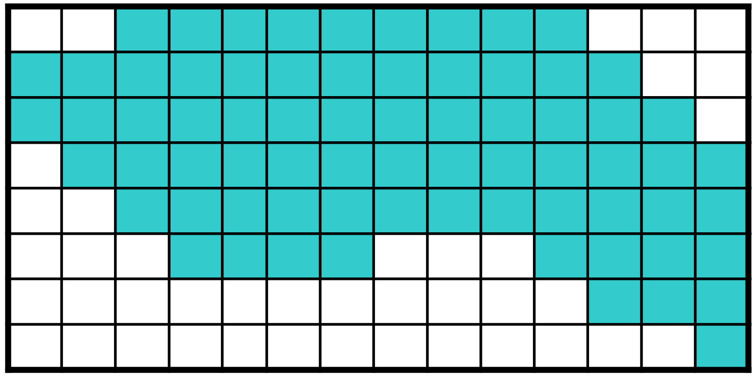
Si on applique ces 8 éléments structurants successivement :

suppression du contour de la forme





Résultat après passage du deuxième ES :



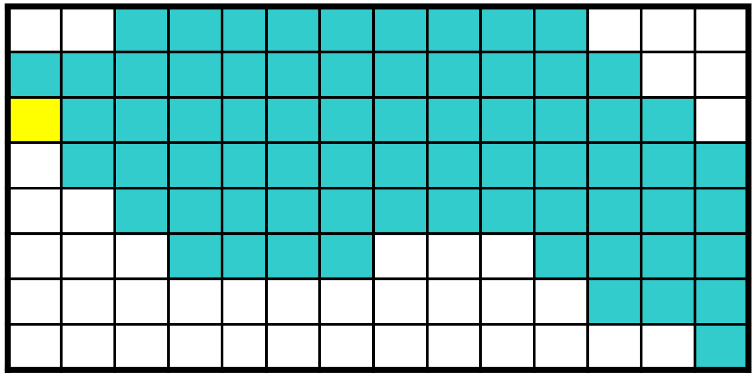
Amincissement épaississement homotopiques

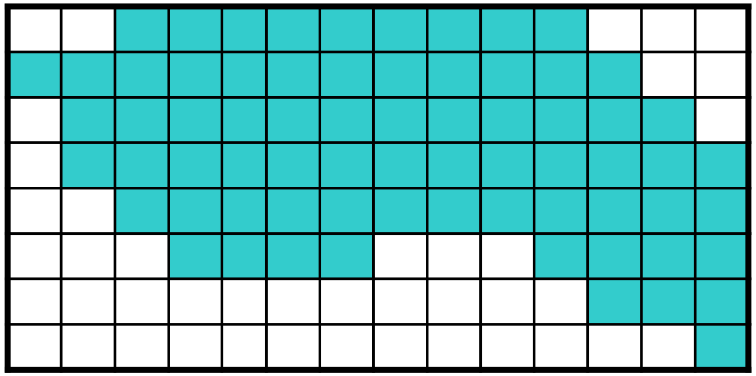
Si on applique ces 8 éléments structurants successivement :

suppression du contour de la forme

0		1
0	1	1
0		1

Résultat après passage du 3è ES :





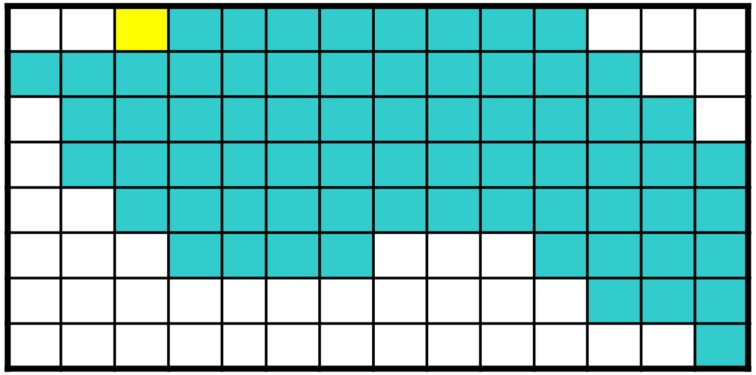
Amincissement épaississement homotopiques

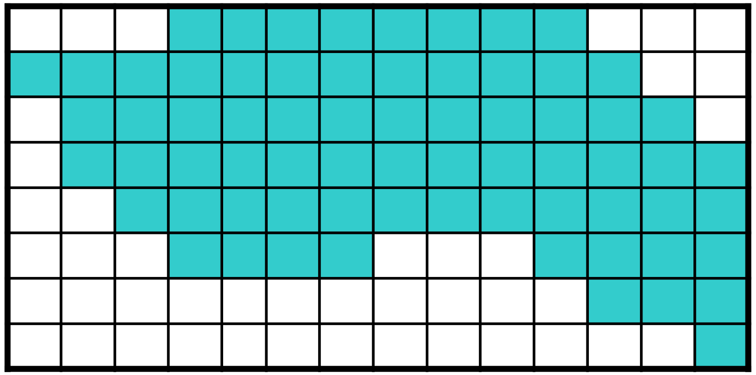
Si on applique ces 8 éléments structurants successivement :

suppression du contour de la forme

0	0	
0	1	1
	1	

Résultat après passage du 4è ES :





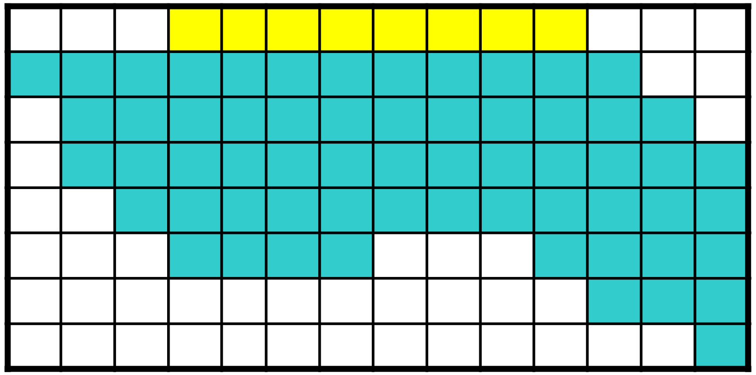
Amincissement épaississement homotopiques

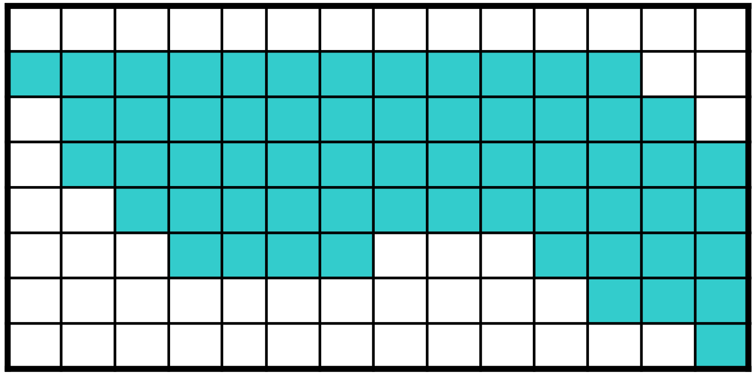
Si on applique ces 8 éléments structurants successivement :

suppression du contour de la forme

0	0	0
	1	
1	1	1

Résultat après passage du 5è ES :



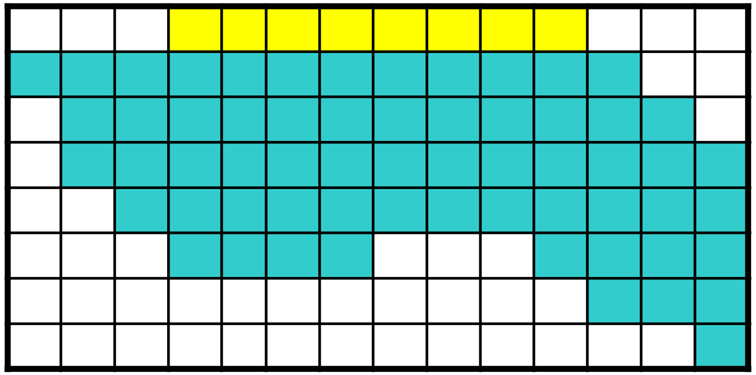


Amincissement épaississement homotopiques

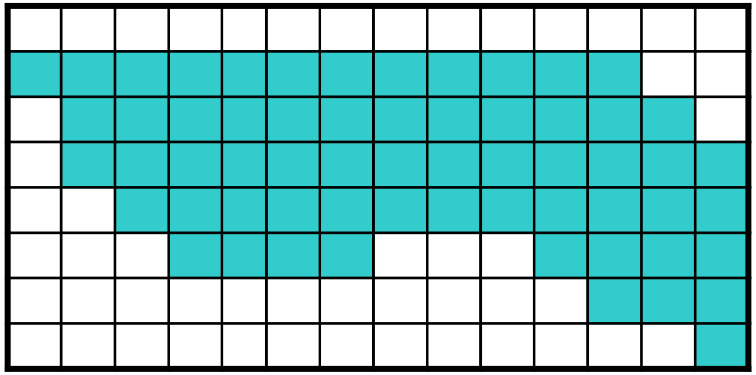
Si on applique ces 8 éléments structurants successivement :

suppression du contour de la forme

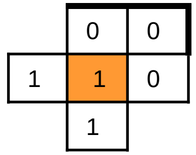
0	0	0
	1	
1	1	1



Résultat après passage du 5è ES :



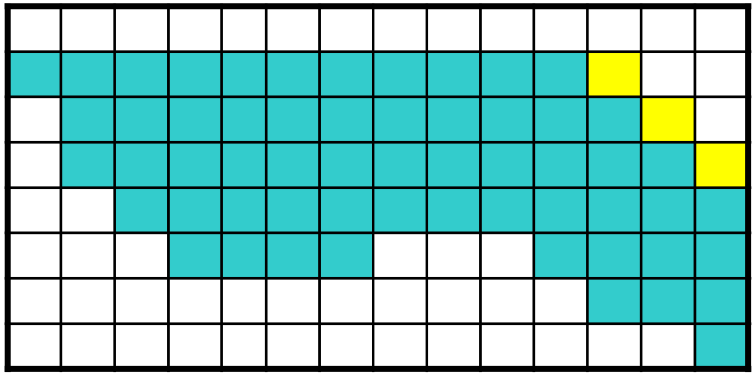
Amincissement épaississement homotopiques

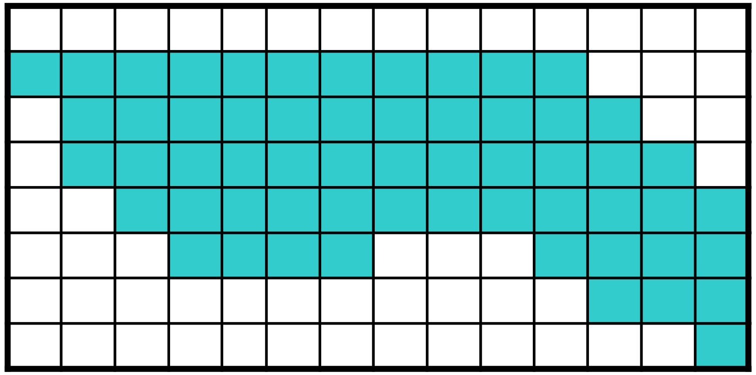


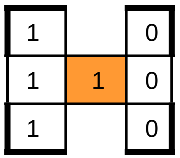
Si on applique ces 8 éléments structurants successivement :

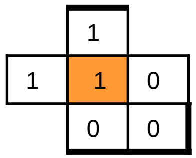
suppression du contour de la forme

Résultat après passage du 6è ES :

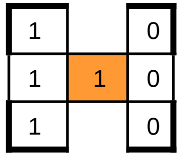








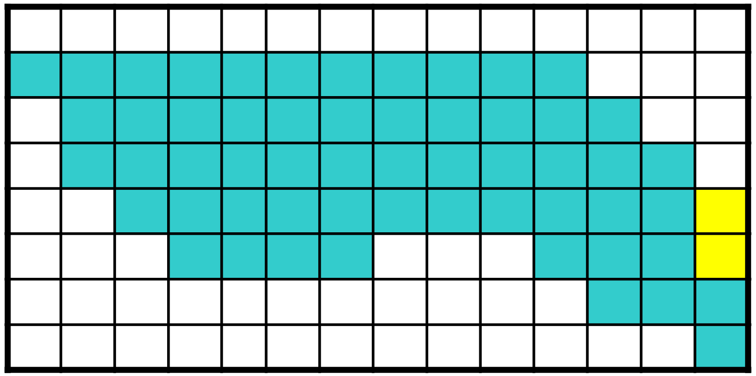
Amincissement épaississement homotopiques

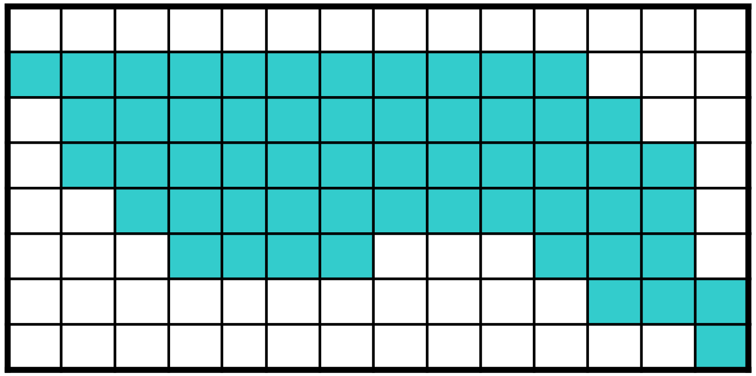


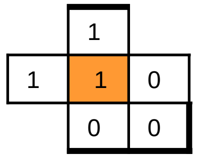
Si on applique ces 8 éléments structurants successivement :

suppression du contour de la forme

Résultat après passage du 7è ES :





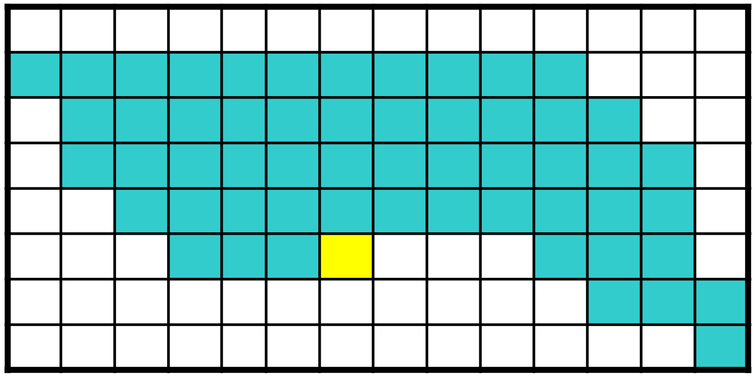


Amincissement épaississement homotopiques

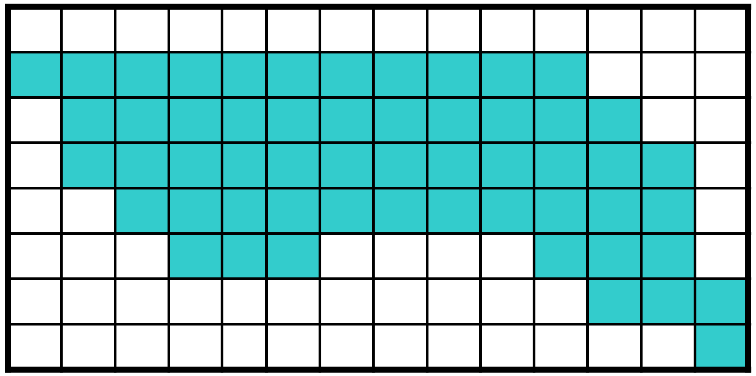
	1	
1	1	0
	0	0

Si on applique ces 8 éléments structurants successivement :

suppression du contour de la forme



Résultat après passage du 8è ES :



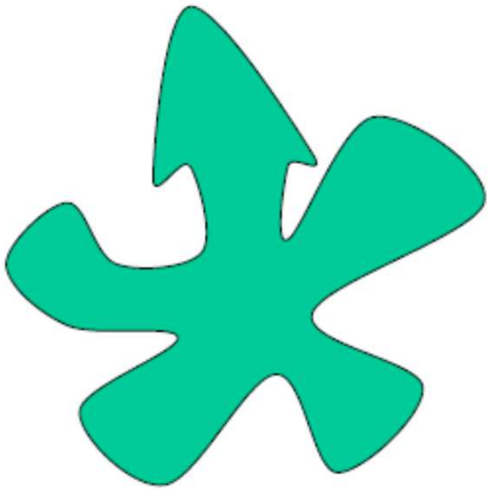
Fin de la 1ère itération
..on recommence jusqu'à stabilité

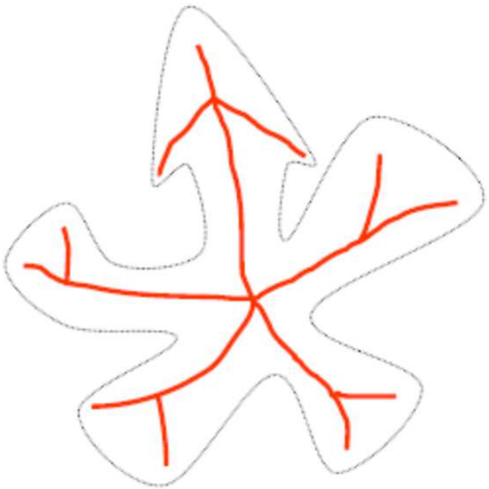
Sommaire

Introduction

Objectifs de la squelettisation :

Représenter les formes avec un minimum d'information, sous une forme simple à extraire et commode à manipuler





Remarque : dans ce cours, on se limitera aux ensembles 2D (images binaires 2D)

Propriétés recherchées

Préservation de la géométrie :

Le squelette doit rendre compte des propriétés géométriques de la forme : ramifications, parties allongées, courbures, etc.

Épaisseur nulle :

Le squelette doit être constitué de courbes sans épaisseur.

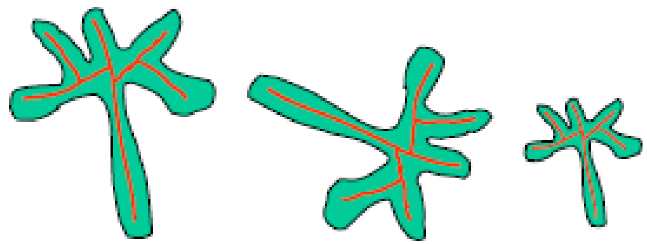
Propriétés recherchées

Préservation de la topologie :

Le squelette doit conserver les relations de connexité : même nombre de composantes connexes, même nombre de trous par composante connexe.

Invariance aux transformations affines :

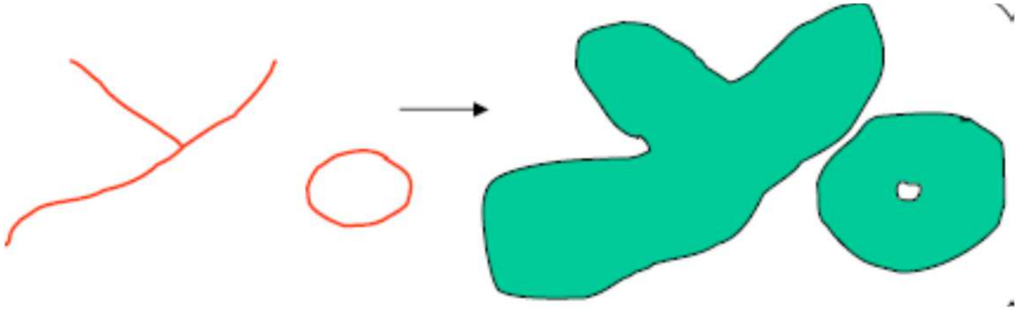
Le squelette doit commuter avec la translation, la rotation, l’homothétie.



Propriétés recherchées

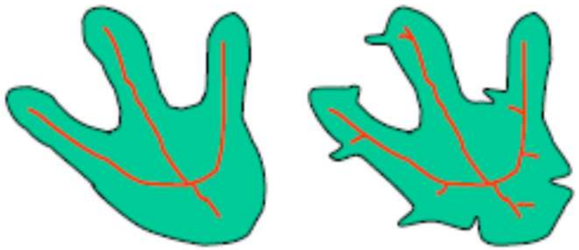
Réversibilité :

Le squelette doit permettre de retrouver la forme originale.



Continuité :

Une petite modification de la forme doit induire une petite modification du squelette.



Introduction

Différents types de squelettes :

- squelettes euclidiens ou squelettes morphologiques (cas continu)

- squelettes discrets

- squelettes par zone d'influence

Squelette euclidien

a) Squelette par boules maximales

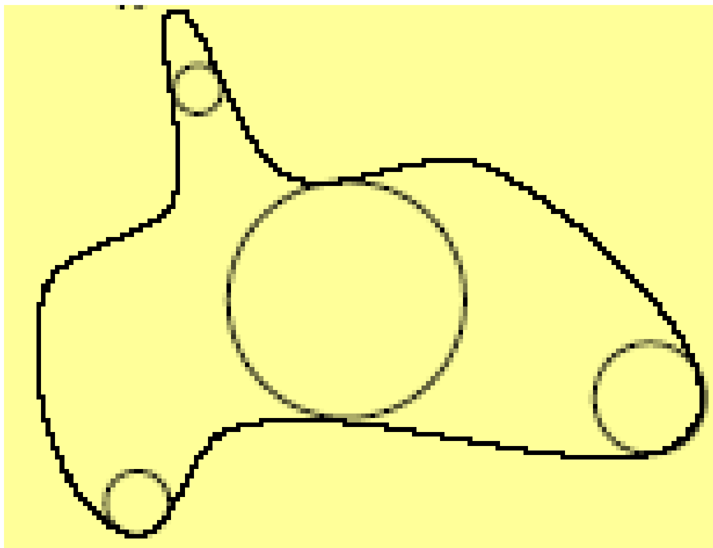
Boule maximale :

Une boule B est dite maximale dans X si :

$\forall B' \subset X, B \subset B' \subset X \Rightarrow B' = B$

Aucune autre boule ne peut contenir une boule maximale.

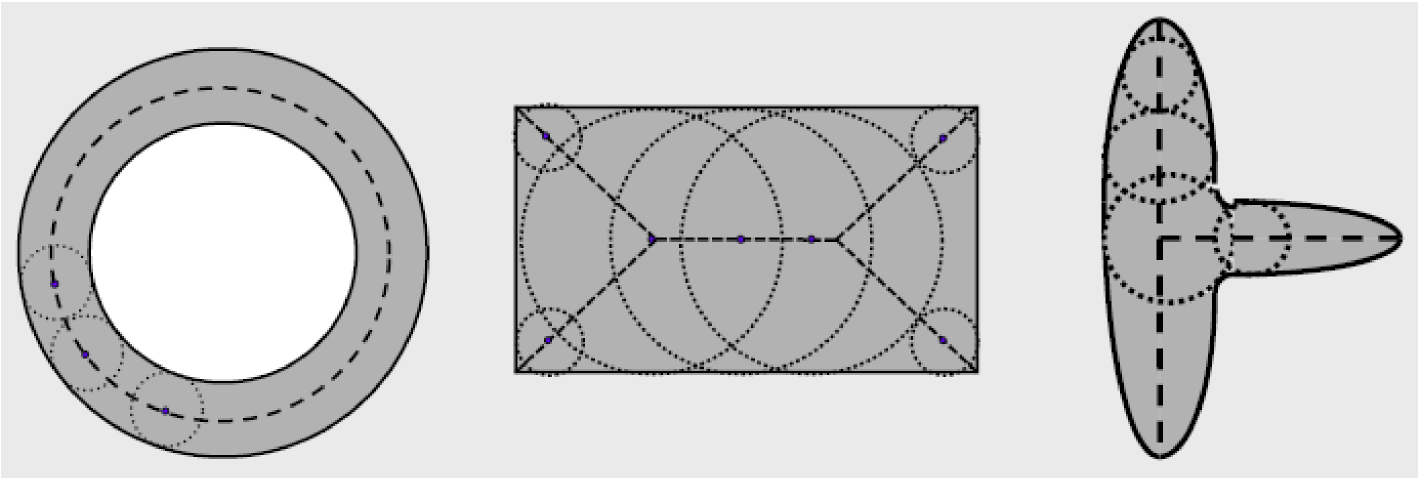
Propriété :
une boule maximale touche la frontière de l'objet en au moins 2 points distincts.



Squelette euclidien

a) Squelette par boules maximales

Le squelette d'un ensemble X est défini comme l'union des centres des boules maximales incluses dans X.



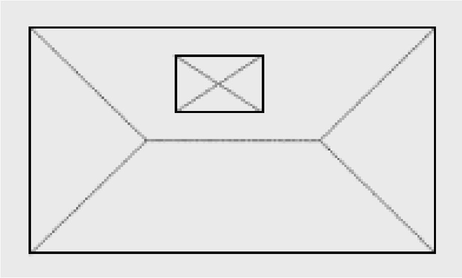
Squelette euclidien

a) Squelette par boules maximales

Propriétés :

- respecte la géométrie de la forme initiale
- invariant par homothétie
- sans épaisseur (ligne d'épaisseur nulle)
- anti-extensif
- idempotent
- ni croissante, ni décroissante

$$X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} S(X) \subset S(Y) \\ S(Y) \subset S(X) \end{cases}$$

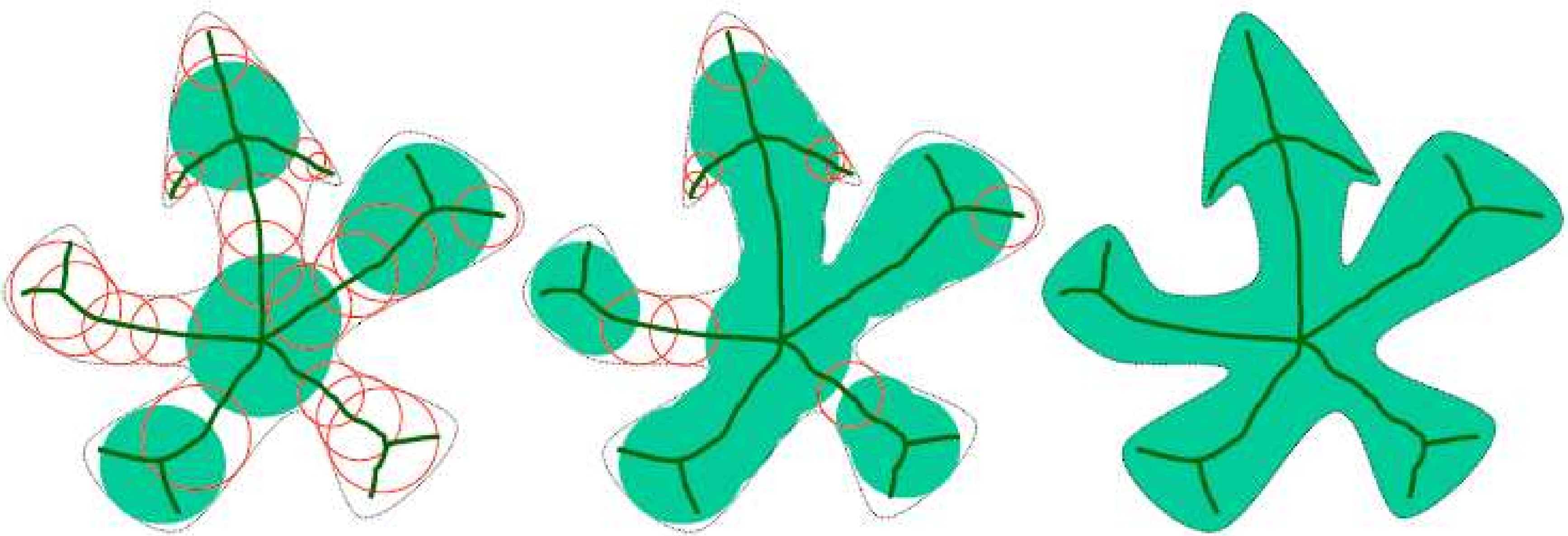


Squelette euclidien

a) Squelette par boules maximales

Propriétés :

- réversible : les centres et les rayons des boules maximales décrivent entièrement X. A partir du squelette de X, on peut reconstruire exactement X.

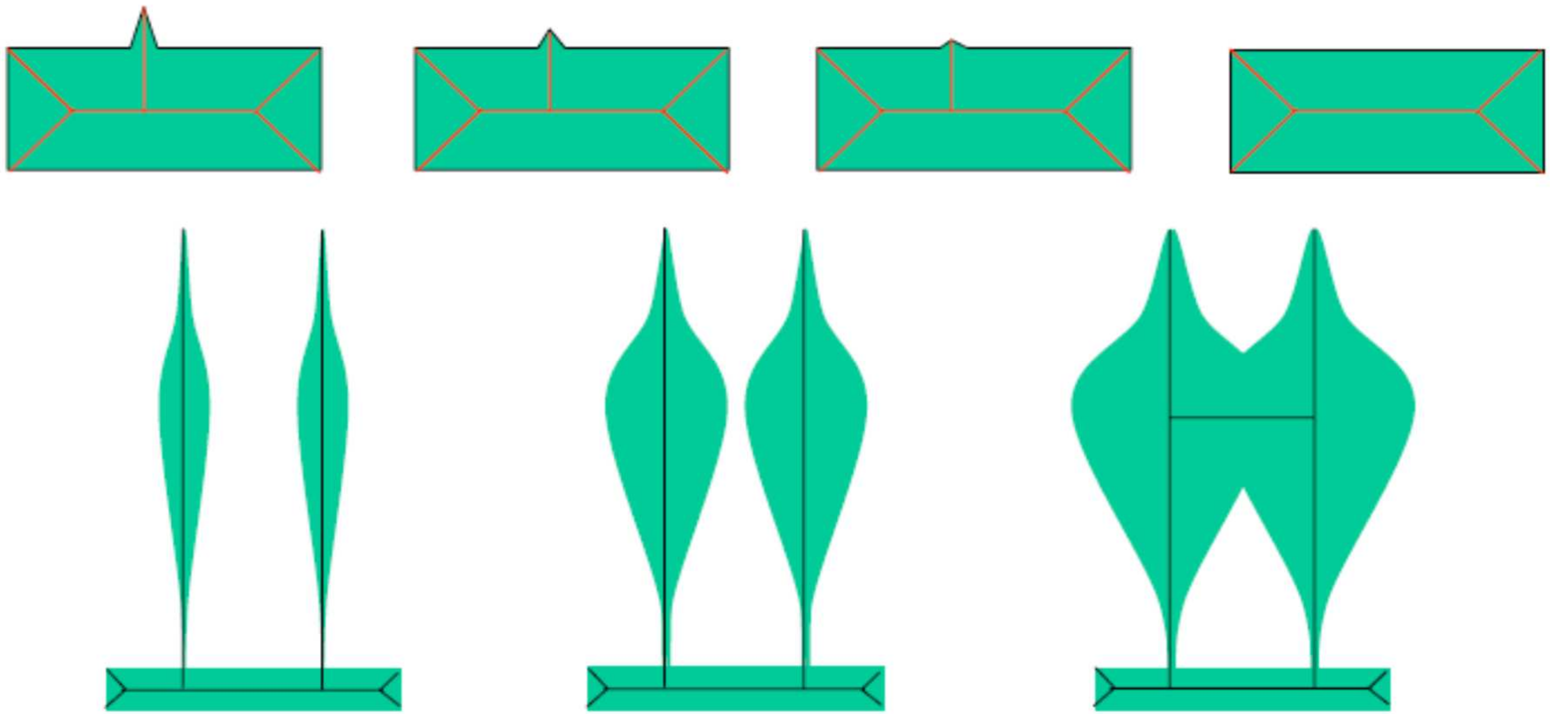


Squelette euclidien

a) Squelette par boules maximales

Propriétés :

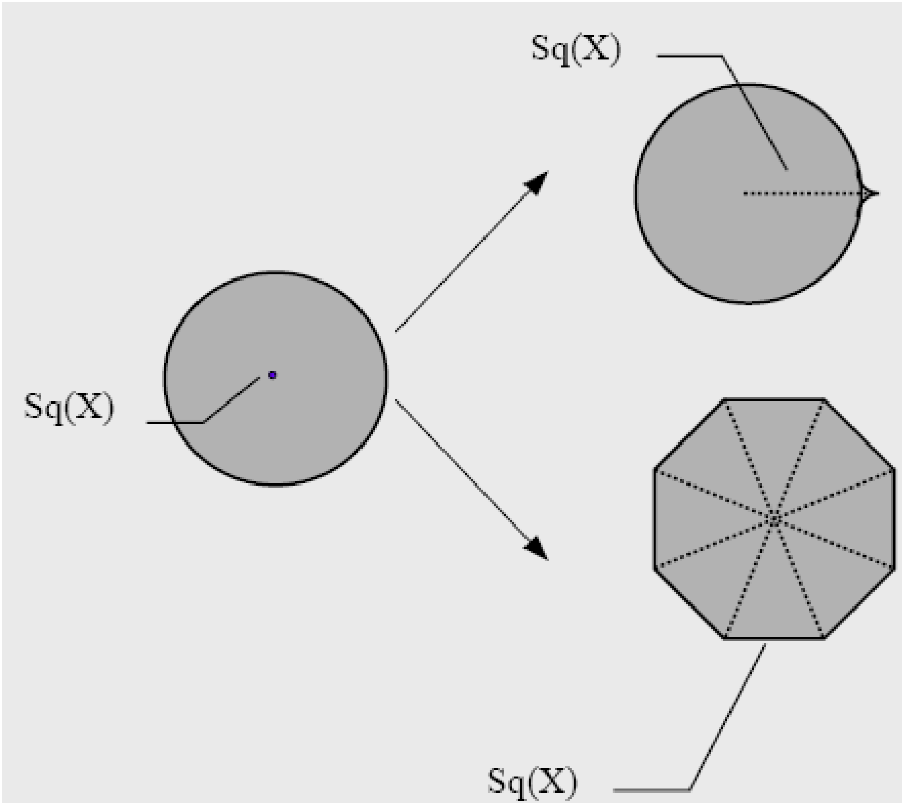
- non-continuité : une petite variation de l'ensemble initial peut induire de grandes modifications du squelette.



Squelette euclidien

a) Squelette par boules maximales

Autre illustration de la non-continuité :



Squelette euclidien

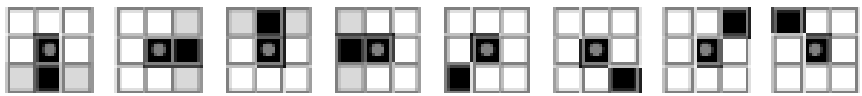
a) Squelette par boules maximales

Ebarbulage :

squelette très sensible à une petite variation sur le contour
Donc, conseillé de filtrer les objets :
- avant d'en chercher le squelette

- ou après pour supprimer des branches non-significatives du squelette
$\Rightarrow$ ébarbulage

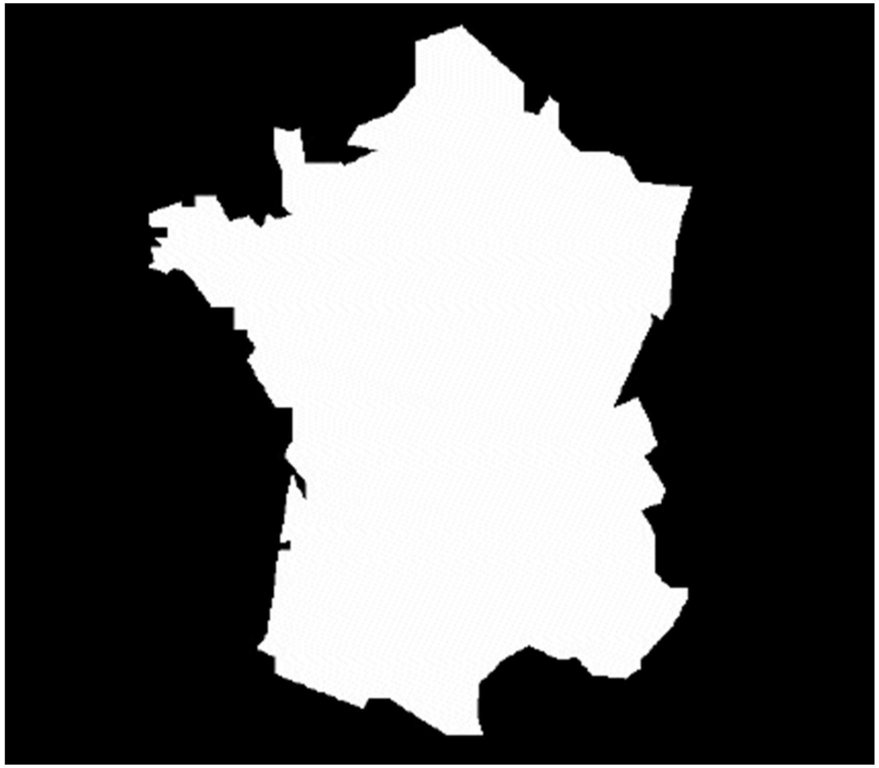
(Méthode simple : suppression itérative des points extrémités)

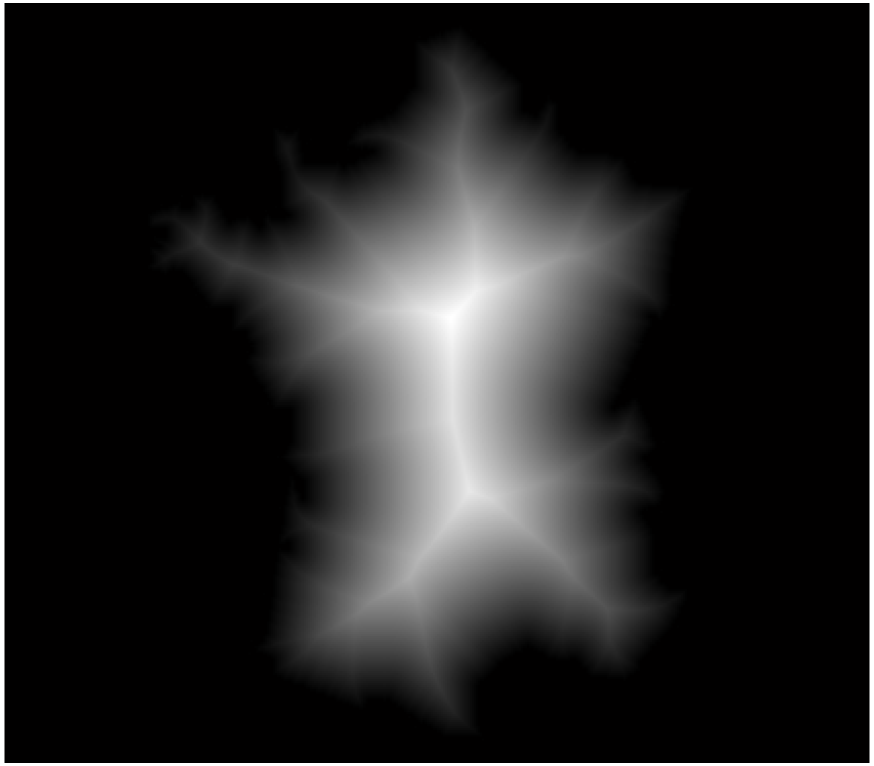


Squelette euclidien

b) Squelette par fonction distance

squelette = lignes de crêtes de la fonction distance





Squelette euclidien

c) Squelette par ouvertures

Formule de Lantuéjoul (1975) : squelette calculé à partir des érodés et des ouverts des érodés d'une forme

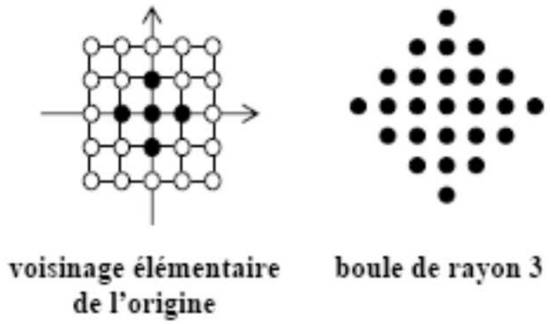
Formule : $$S(X) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \bigcap_{\mu > 0} \left\{ \varepsilon_{B_\lambda}(X) \setminus \gamma_{B_\mu}\left(\varepsilon_{B_\lambda}(X)\right) \right\}$$

Exemple :

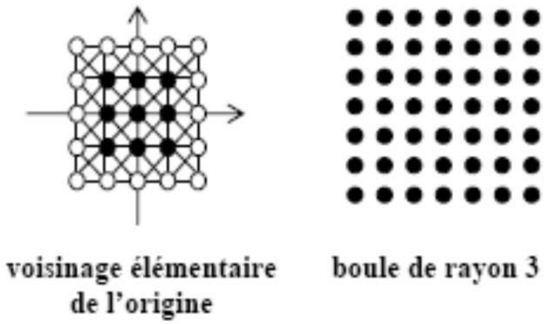
Squelette discret

Extension non-directe car :

- les boules sont discrètes (V4, V8)



Distance d_4



Distance d_8

- les lignes ne peuvent avoir une épaisseur nulle (au moins 1px)
- les lignes ne peuvent pas toujours être centrées (squelette d'une ligne d'épaisseur 2 pixels ??).

Squelette discret

Il existe plusieurs squelettes discrets :

- squelette par ouvertures
- squelette par amincissement
- squelette par zones d'influence

Mais problème

pas de définition satisfaisante dans le cas discret !

Néanmoins le squelette peut être construit par un procédé itératif qui transforme une composante connexe X en une composante filiforme ayant les mêmes caractéristiques topologiques.
La *squelettisation* sera ainsi effectuée par une suite de transformations homotopes

Squelette discret

a) Squelette par ouvertures

Adaptation de la formule continue au discret :

$B_\mu = B_1$ On considére l'ES élémentaire sur trame (ex V8)

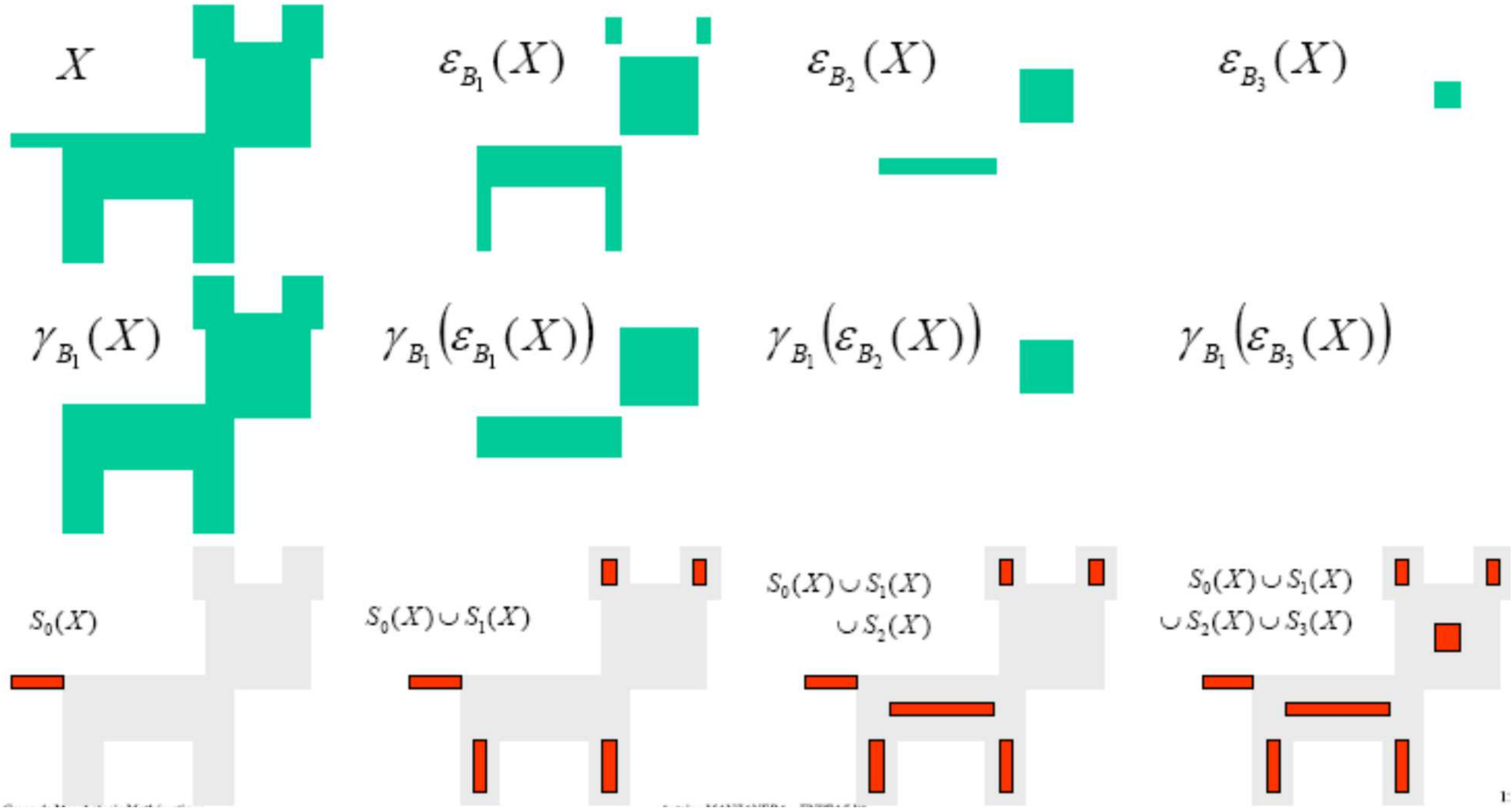
$B_\lambda = \lambda B$ ES homothétique de la forme de référence (carré de côté 2λ+1)

$$S(X) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \left\{ \varepsilon_{B_\lambda}(X) \setminus \gamma_B\left(\varepsilon_{B_\lambda}(X)\right) \right\}$$

$$= \bigcup_{\lambda \geq 0} \left\{ TH_B\left(\varepsilon_{B_\lambda}(X)\right) \right\}$$

Squelette discret

a) <u>Squelette par ouvertures</u>



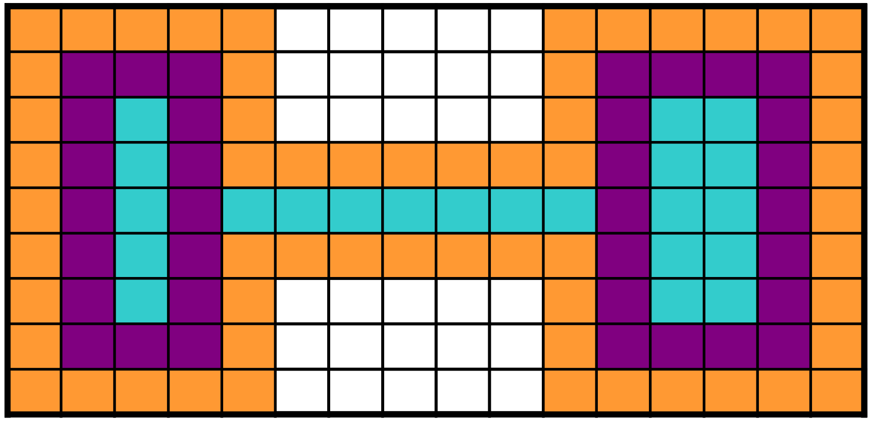
Squelette discret

a) Squelette par ouvertures

Exercice : (utilisation d'un v8)

1ère itération

Résultat de la 1ère itération



2ème itération

Résultat de la 2ème itération

3ème itération

Résultat de la 3ème itération

Squelette discret

a) Squelette par ouvertures

Propriétés :

- squelette ne préserve pas la topologie initiale (homotopie)
- largeur des branches égales à un ou deux pixels selon que la largeur de l'objet est paire ou impaire.
- l'ensemble des résidus d'ouverture coïncide avec l'ensemble des maxima locaux de la transformée en distance,

$\Rightarrow$ squelette morphologique discret = maxima locaux de la transformée en distance

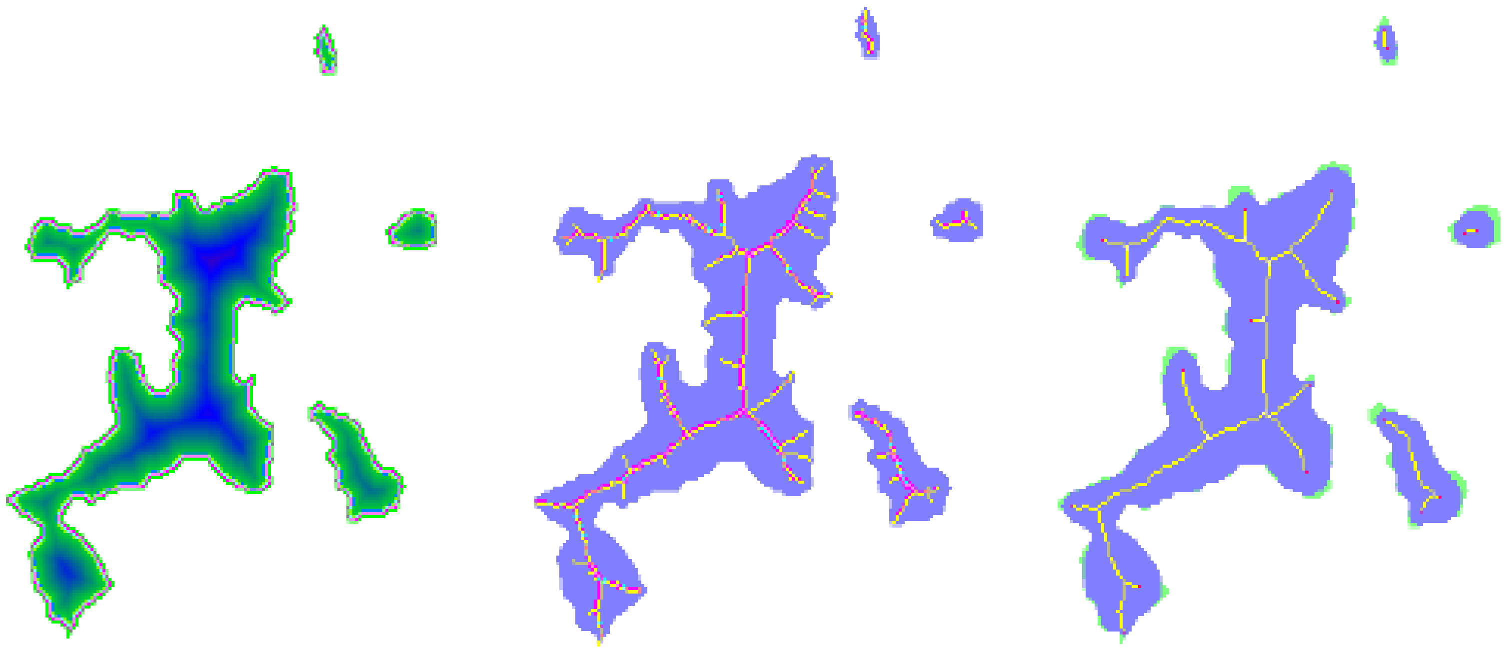
Application de la transformée distance avec un V8 :

1	1	1	1	1						1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	1						1	2	2	2	2	1
1	2	3	2	1						1	2	3	3	2	1
1	2	3	2	1	1	1	1	1	1	1	2	3	3	2	1
1	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	1
1	2	3	2	1	1	1	1	1	1	1	2	3	3	2	1
1	2	3	2	1						1	2	3	3	2	1
1	2	2	2	1						1	2	2	2	2	1
1	1	1	1	1						1	1	1	1	1	1

Squelette discret

a) <u>Squelette par ouvertures</u>

Illustration de la propriétés : squelette morphologique discret = maxima locaux de la transformée en distance



Squelette discret

b) <u>Squelette par amincissements</u>

Principe

- séquence d'amincissements homotopiques qui suppriment des points de l'objet (points simples et points terminaux) sans changer sa topologie

Le squelette par amincissement utilise une famille d'ES qui préservent l'homotopie (M,L ou D). La famille est obtenue par rotation de la configuration L,M ou D.

L'amincissement s'arrête quand il n'y a plus de modification des pixels de l'image.

Squelette discret

b) Squelette par amincissements

Mathématiquement :

On considère l'ES B(B_1,B_2) et toutes ses rotations possibles.

Amincissement de X par toutes les rotations discrètes possibles de B :

$$X \underline{\circ} B = \left(\left(\left(\left(\left(X \right) \underline{\circ}\, \theta_1 B \right) \underline{\circ}\, \theta_2 B \right) \underline{\circ} \ldots \right) \underline{\circ}\, \theta_n B \right)$$

Squelette :

$$S\left(X\right) = \left(X \underline{\circ} B\right)^{\infty}$$

Remarque

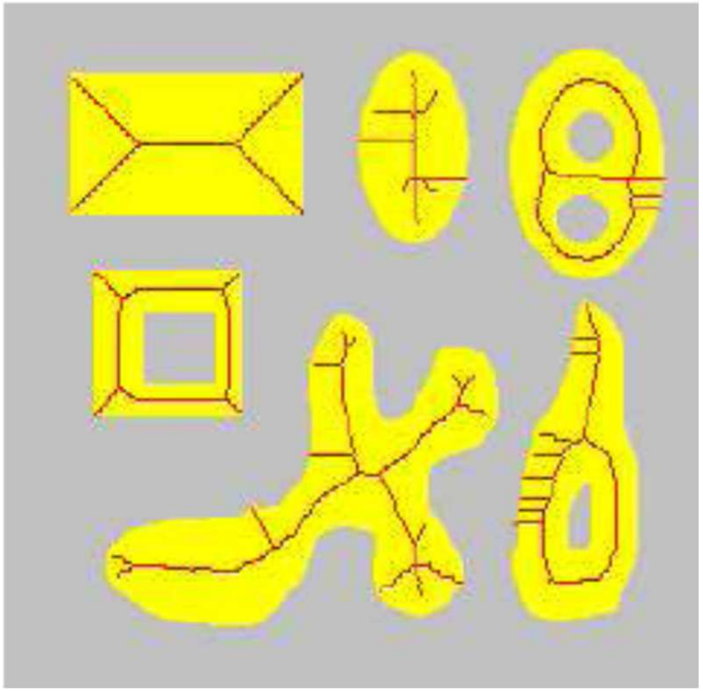
Les squelettes homotopiques préservent la topologie :

peuvent être utilisés pour faire des comparaisons de formes.

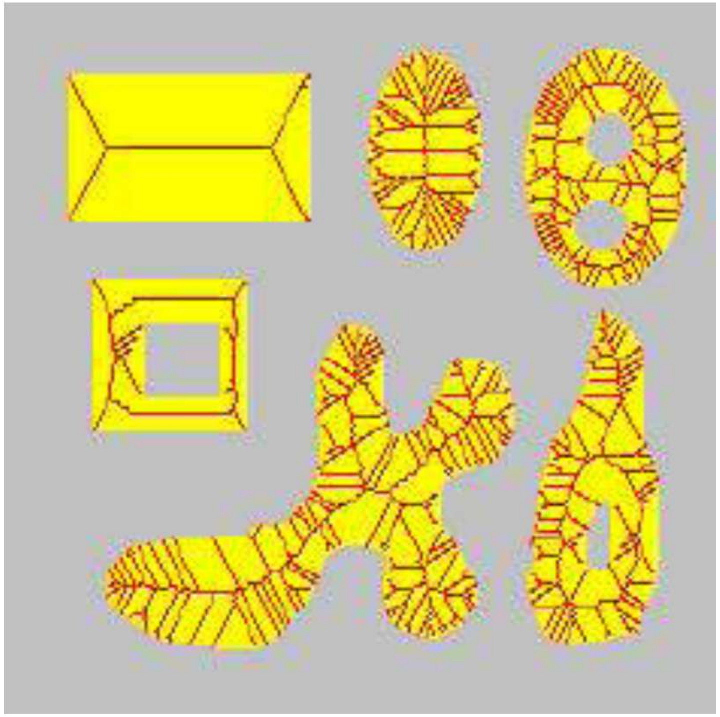
Squelette discret

b) Squelette par amincissements

Exemple :



S(X) : L

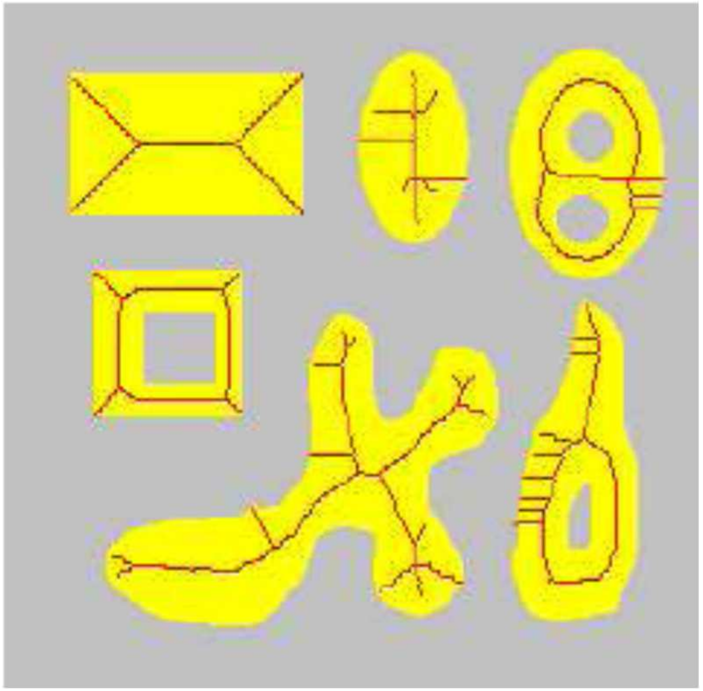


S(X) : M

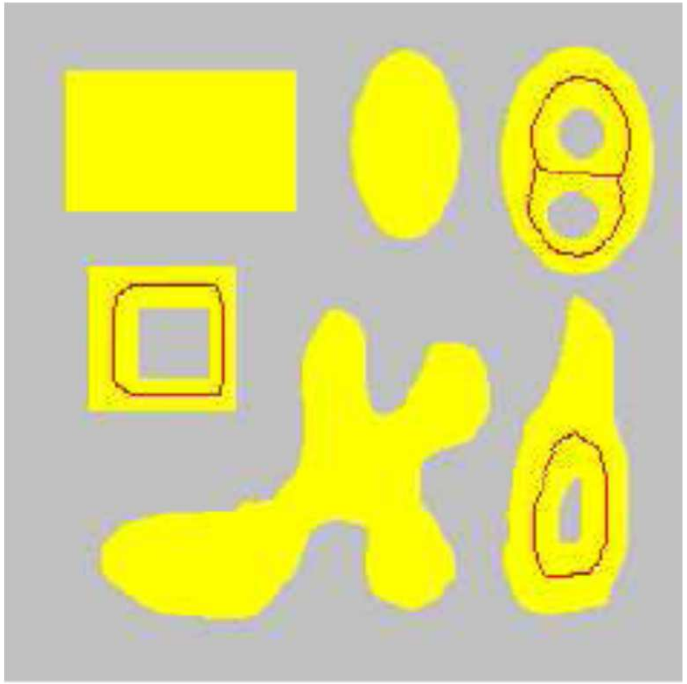
Squelette discret

b) <u>Squelette par amincissements</u>

Exemple :



S(X) : L



S(X) : L ébarbulé par E

Squelette par zone d'influence (SKIZ)

Soit un ensemble X composé d'objets disjoints X_i. $X = \bigcup_i X_i$

A chaque objet X_i, on peut associer une zone d'influence ZI, telle que chaque point x de ZI est plus proche de X_i que de tout autre objet X_j ($i \neq j$).

$$ZI(X_i) = \left\{ x \middle| \forall j \neq i, d\left(x, X_i\right) < d\left(x, X_j\right) \right\}$$

Le squelette par zone d'influence (ou SKIZ) de X est l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucune des ZI :

$$SKIZ(X) = X \setminus \bigcup_i ZI(X_i)$$

Squelette par zone d'influence (SKIZ)

Exemples :

original

SKIZ + original

Squelette par zone d'influence (SKIZ)

Propriétés :

- partage l'espace en autant de parties qu'il y a de composantes connexes.

- transformation non homotopique (la ZI d'un objet est une composante simplement connexe que l'objet soit sans trou ou avec trou)

- transformation non croissante

- transformation plus stable que la squelettisation

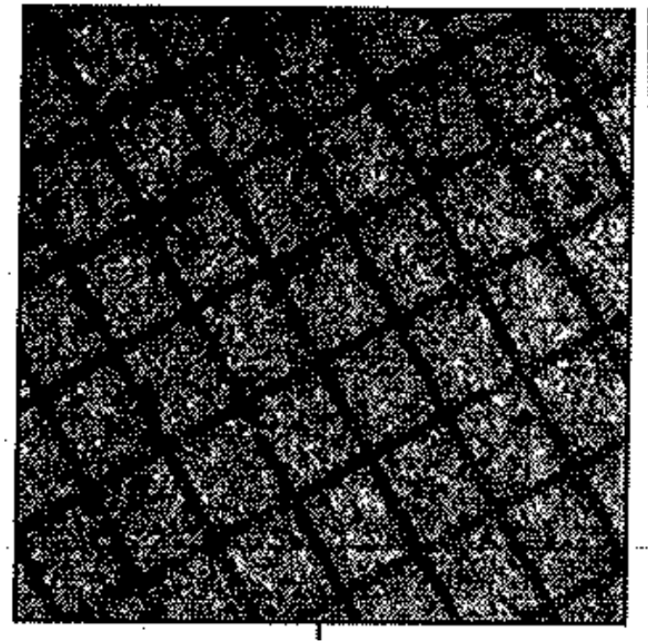
Sommaire

1. Transformée Hit-Or-Miss
2. Amincissement et épaississement
3. Squelettes morphologiques
4. Application pratique

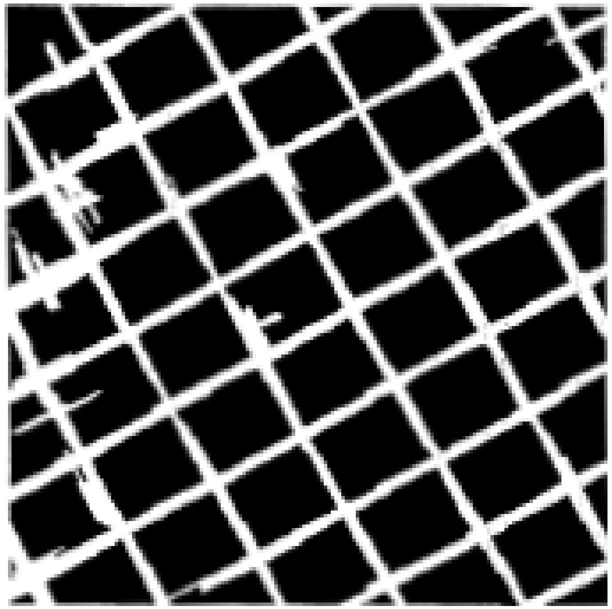
Application pratique

Etape finale de l'extraction de grille sur les surfaces métalliques

Rappel :



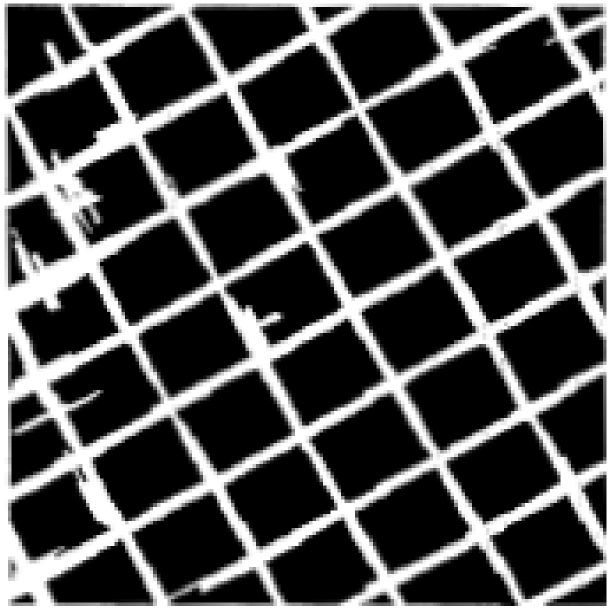
$\Rightarrow$



Extraction du masque de la grille

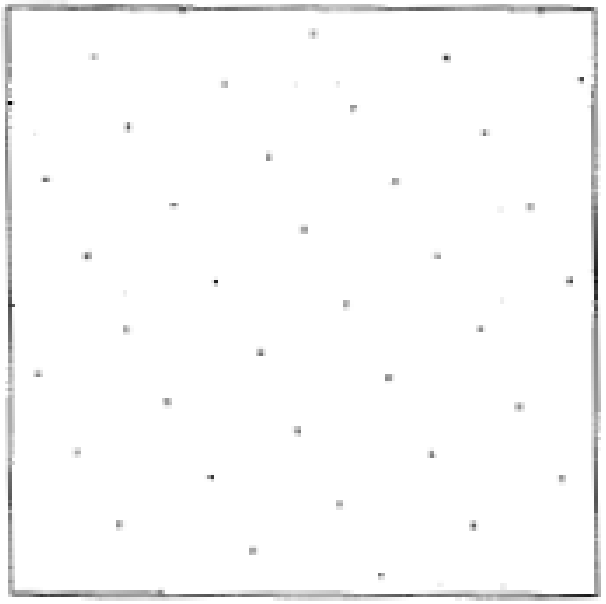
Application pratique

Etape finale de l'extraction de grille sur les surfaces métalliques



Extraction du masque de la grille

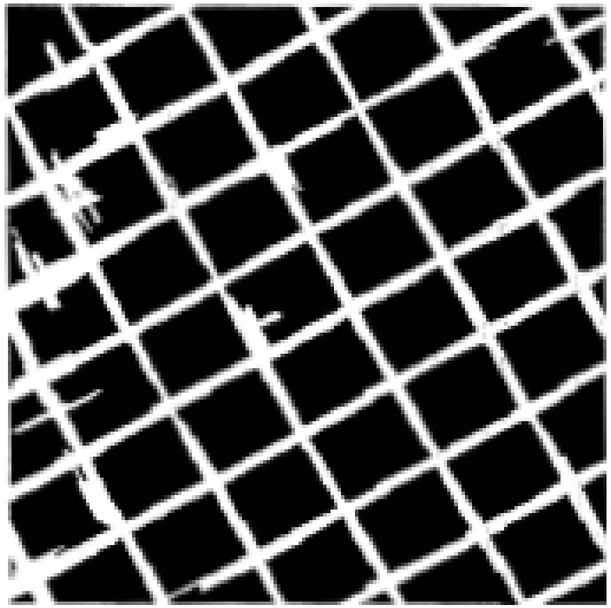
? $\Rightarrow$



Extraction des nœuds du masque de la grille

Application pratique

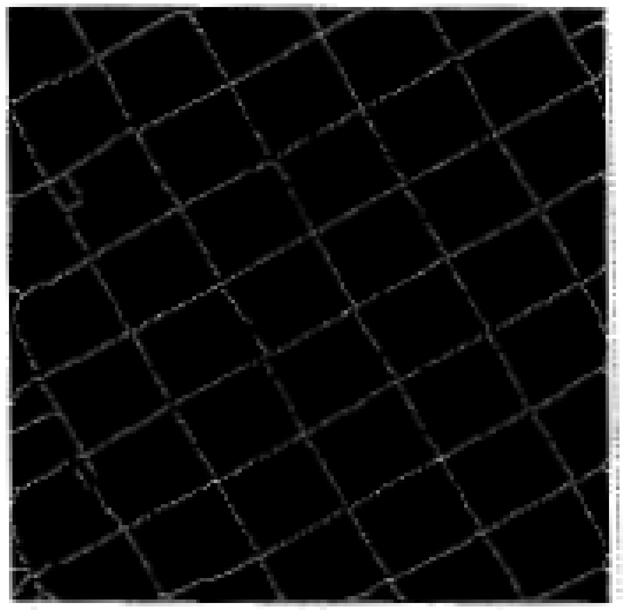
Etape finale de l'extraction de grille sur les surfaces métalliques



1) Squelette par amincissement homotopique

2) Ebarbulage jusqu'à idempotence

$\Rightarrow$

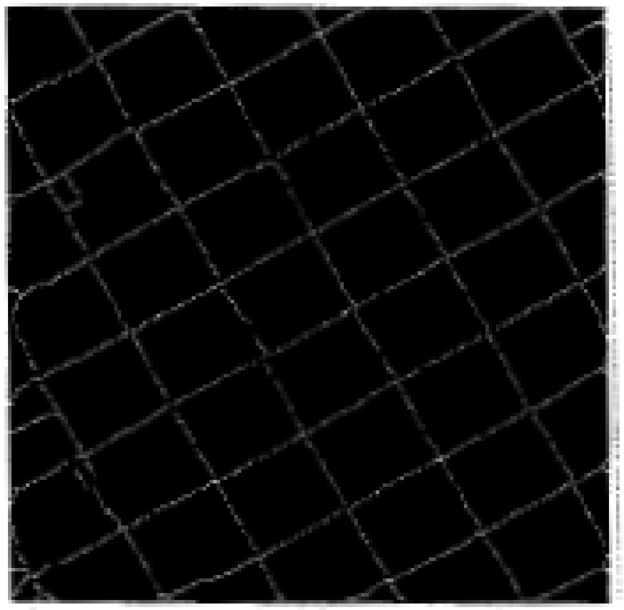


Extraction du masque de la grille

Extraction des nœuds du masque de la grille

Application pratique

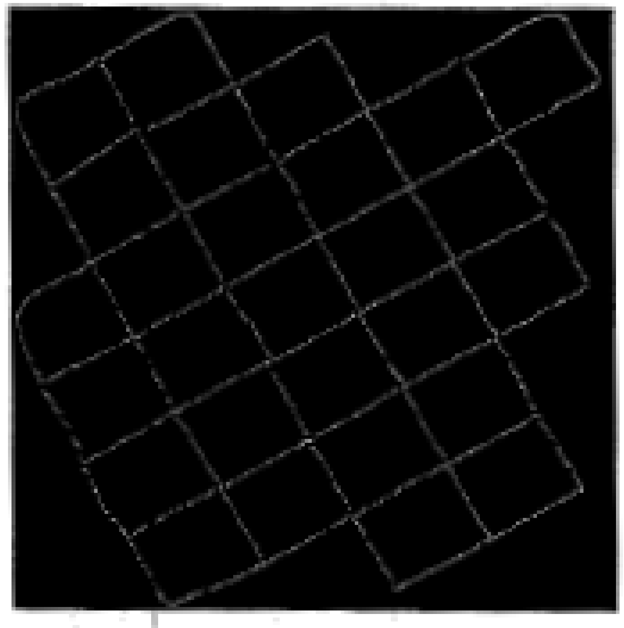
Etape finale de l’extraction de grille sur les surfaces métalliques



Extraction du masque de la grille

3) Filtrage des branches inutiles

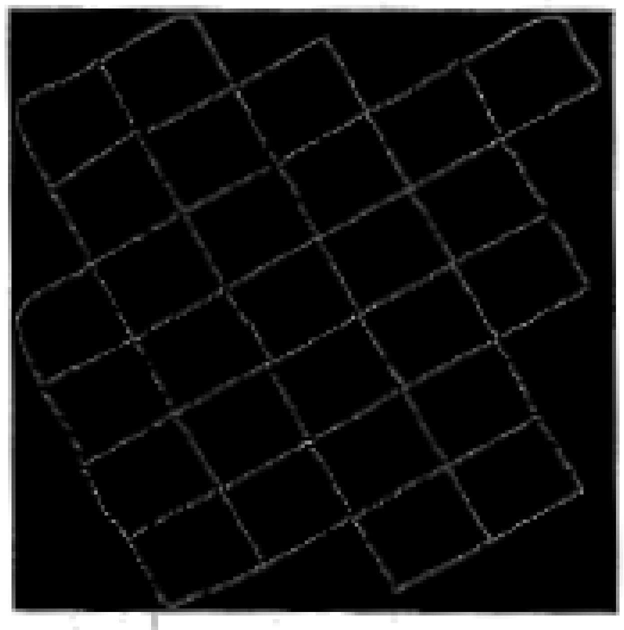
⇒



Suppression des composantes du fond du squelette dont l’aire est inférieure à un seuil donné

Application pratique

Etape finale de l'extraction de grille sur les surfaces métalliques



5) Détection des points multiples

$\Longrightarrow$