

Morphologie Mathématique - TD1

Erosion, covariance et analyse de texture

Christophe Ducottet, Cécile Barat

Pour répondre aux questions et faciliter la compréhension de cet exercice, vous pourrez utiliser le script `td1.m` fourni sur le portail, avec l'énoncé ci-joint.

Objectifs :

1. Acquérir des connaissances sur la notion de covariance en analyse de texture.
2. Utiliser des éléments structurants particuliers tels que les bipoints.
3. Illustrer l'opérateur d'érosion avec une application à l'analyse de texture.

1 Définition de l'opération de covariance

La covariance d'une image, notée K , consiste à mesurer le volume d'une image érodée par une paire de points $P_{1,\vec{v}}$:

$$K(f, P_{1,\vec{v}}) = Vol[\epsilon_{P_{1,\vec{v}}}(f)]$$

avec :

\vec{v} : vecteur 2D constant

Vol : fonction de calcul du volume d'une image, le volume étant égal à la somme des niveaux de gris de tous les pixels de l'image.

$P_{1,\vec{v}}$: une paire de points (bipoint) définie par l'expression :

$$P_{1,\vec{v}} = \bigcup_{i=0}^{i=1} i \vec{v}$$

1. Rappeler le sens mathématique de la notion de covariance. **En statistiques, la covariance est une méthode mathématique permettant d'évaluer le sens de variation de deux variables, et par là, de qualifier l'indépendance de ces variables.**

$$cov(x, y) = \frac{1}{n} \sum_n^{i=1} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Intuitivement, la covariance est une mesure de la variation simultanée

de deux variables aléatoires. C'est-à-dire que la covariance devient plus positive pour chaque couple de valeurs qui diffèrent de leur moyenne dans le même sens, et plus négative pour chaque couple de valeurs qui diffèrent de leur moyenne dans le sens opposé.

2. Quelle information cherche-t-on à obtenir lorsque l'on mesure la covariance d'une image ? **la répétition de motif formé de 2 pixels séparés par une certaine distance d dans une direction particulière theta par rapport à l'horizontale.**
3. Représenter les éléments $P_{1,(1,0)}$, $P_{1,(2,0)}$, $P_{1,(1,1)}$, $P_{1,(1,2)}$.
4. Expliquer le principe de la mesure de covariance K donnée ci-dessus. **les bipoints permettent d'analyser la dépendance spatiale des niveaux de gris.**

2 Application à l'analyse de texture

La covariance est un outil informant sur la périodicité d'une texture. L'exemple de la figure ?? est tiré du livre de Pierre Soille, intitulé *Morphological Image Analysis*, Springer. Lire le texte, compléter et exécuter le script `td1.m` et répondre aux questions.

1. Commenter et expliquer les Fig. 3.22b et 3.22c (en s'appuyant sur des schémas éventuellement). **On applique des érosions avec des bipoints dont l'espacement, dans la même direction horizontale, augmente entre la figure b et la figure c. Sur la figure b, les traits disparaissent car l'écart entre les traits ne correspond pas à l'écart entre les 2 points de l'ES. Comme l'érosion revient à prendre la valeur min entre les 2 valeurs des bipoints, on retient la valeur du fond. Dans le 2ème cas, l'écart entre les bipoints correspond à l'écart entre les tirets. Donc, on retrouve l'image initiale avec un fond nettoyé.**
2. Est-ce que la Fig. 3.22b pourrait être utilisée pour effectuer une soustraction de fond ? **Non, en soustraction de fond, on veut retrancher la valeur du fond locale. Or, ici, localement on récupère le min du bipoint, qui peut être plus petit que la valeur de fond locale. On ne corrige donc pas le fond.**
3. Que représente la Fig. 3.23 ? **volume de l'image érodée en fonction de la distance entre les 2 points de l'ES.**
4. D'après le texte, quelle information recherche-t-on avec ce graphique ? **information sur la périodicité des structures**
5. A l'aide du texte et de la Fig. 3.22, commenter la Fig. 3.23 (donner des éléments quantitatifs sur la texture - Pourquoi, entre 2 pics, les valeurs ne sont pas nulles ?

Pourquoi les pics décroissent ? Pourquoi observet-on une périodicité intermédiaire ?) écart de **21 pixels** environ entre les tirets. **Décroissance** : Au départ, on mesure le volume sous toute l'image (c'est la référence). Ensuite, dès que l'on utilise un bipoint distant de 1, on diminue le volume puisque avec l'érodé on diminue la largeur des pics. On ne peut mesurer la covariance que lorsque le bipoint 'tient' dans l'image (problème de bord). Donc lorsque le bipoint est séparé de 100 px, il occupe la moitié de l'image et on ne reconstitue avec le bipoint que la moitié gauche de la texture (en considérant l'origine du bipoint comme le point de gauche). Donc au niveau du volume, on divise par 2 l'amplitude du pic par rapport au fond et la hauteur du pic est réduite puisque l'on ne traite que la moitié des pixels de l'image. On a en fait une info réduite d'un facteur 2. La décroissance s'explique par le fait que l'on traite de moins en moins de pixel. Le niveau du fond diminue comme l'amplitude des pics puisque l'on considère de moins en moins de segments.

On observe une périodicité intermédiaire car les objets se chevauchent.

6. Expliquer pourquoi une information de taille des éléments de la texture peut être déduite de la pente du covariogramme à l'origine. **on obtient une info de largeur des traits de la texture. Plus largeur est grande, moins la pente sera importante puisque l'on reconstruira quasiment toute l'épaisseur des tirets sauf la dernière colonne. On perdra le nombre de pixels correspondant au nombre de pixels sur la hauteur d'un segment. Au début, si le segment est large, les bipoints de distance 1, puis 2 puis 3 tiendront, donc 1 colonne, puis 2 seront reconstituées. Si il ne fait qu'une colonne d'épaisseur, le nombre pixels reconstruits est directement réduit puisque le bipoint ne tient pas dedans tout de suite. On récupère tout de suite le volume sous le fond.**

3 Analyse selon l'orientation

Dans le nouvel extrait sur la figure ??, on explique comment utiliser la covariance pour obtenir une information d'orientation sur la texture. Lire le texte, compléter et exécuter le script td1.m et répondre aux questions.

1. D'après le texte, comment utiliser la covariance pour obtenir une information d'orientation des structures de l'image? **il faut utiliser une famille d'éléments structurants avec différentes directions**
2. Que représente la Fig. 3.24b ? Pourquoi parle-t-on d'aire et non plus de volume ? **volume de l'image érodée en fonction de l'orientation du bipoint dont l'écart est fixe.**

On parle d'aire car on traite une image binaire. On compte les pixels allumés.

3. D'après le graphique Fig. 3.24b, quelles sont les orientations principales de la Fig. 3.24a ? **-70, 30**
4. Quelle est l'influence du paramètre d'écart du bipoint ? **L'écart ne doit pas nécessairement coïncider avec les écartements de la grille. Si trop petit, on reconstruit localement, et on n'a pas d'information de direction. De plus, peu de directions peuvent être étudiées. Si trop grand, problème de bord et temps de calculs.**

An example of erosion by a pair of points is provided in Fig. 3.22. In practice,

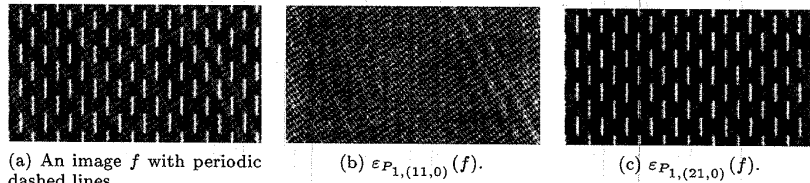


Fig. 3.22. Erosion of an image with points separated by an increasing distance along the horizontal direction. When the distance equals the periodicity of the dashed lines, these are not eroded.

a family of pair of points is considered such as pair of points in a given direction separated by an increasing distance. A diagram “Volume of erosion by a pair of points versus distance between these points” is then plotted and interpreted for determining the periodicity of periodic image structures. For example, the sum of the grey levels for erosions by points separated by an increasing distance along the horizontal direction applied to Fig. 3.22a are shown in Fig. 3.23. The peaks of this diagram are located at multiple of the

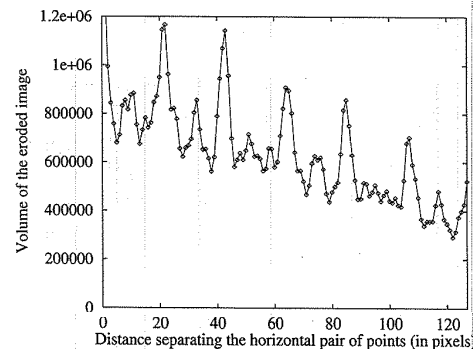


Fig. 3.23. Use of covariance for determining the periodicity of periodic image structures: sum of grey levels of erosion of Fig. 3.22a by the horizontal pair of points $P_{1,(i,0)}$ versus i (i denotes the distance separating the pair of points).

distance separating two successive dashed lines, i.e., about 21 pixels (see also Fig. 3.22c). In addition, information about the size of the texture elements can be derived from the decreasing rate of the covariogram at the origin: the faster the decrease, the smaller the size of the texture elements.

Figure 1: Analyse de la périodicité d’une texture

The covariance can also be used to automatically determine the orientation of image structures by considering a family of erosions by a pair of equidistant points in various directions. For example, Fig. 3.24a is a binary image with parallel lines along two principal directions. The surface area measurements of the eroded image by the pair of points versus the direction of these pairs of points are shown in Fig. 3.24b. When the pair of points are in the same direction as the grid lines, the image is not as much eroded as for other directions. Therefore, the directions of the two peaks of the diagram correspond to the directions of the lines. Notice that the surface area

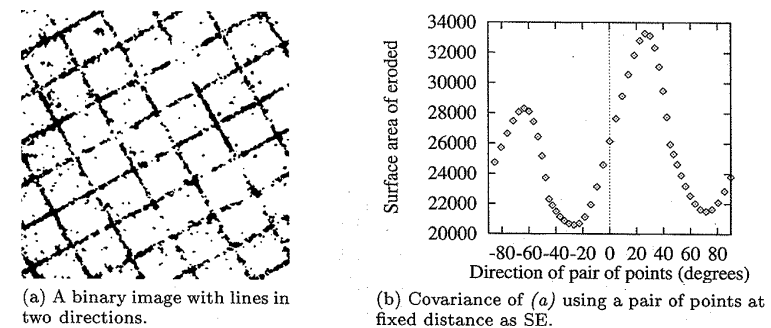


Fig. 3.24. The measure of the surface area of the original image eroded by a pair of points in various directions can be used for determining the two main directions of the grid.

of erosions by pairs of points separated by a fixed distance but with varying orientations are sometimes represented in a polar diagram which is called a *rose of directions* (by erosions with pairs of points).

Notice that the covariance on binary images is directly related to the autocorrelation defined in linear signal processing (i.e., the convolution of an image by its translated for increasing translations).

Figure 2: Analyse de l’orientation d’une texture