代数

基础的数学

孙晟瑜

2023

目录

第 I 部分 初等代数及函数

第 0.1 节 介绍

本部分内容我们来复习或学习中学部分知识
首先我们先做个介绍:
第一:中学数学:重要的学习目标,在中学数学我们围绕代数,几何和函数来展开
第二:高中数学:仍十分重要,我们要学习更难的几何和函数,接触重要的集合,数列,方法,更多的公式……(本笔记将涉及集合和数列,几何很少涉及到)
而接下来我们开始学习线性代数和高等微积分(数学分析)
在线性代数中我们加入范畴论和抽象代数的内容,请读者酌情观看
而数学分析内容相对温和,采用的是国内国外的一流教材汇编,加入自己的内容和定义理解
提示:本笔记为自用笔记,暂时不对外推广;可在我个人网盘阅览,本笔记大部分内容是基础内容;针对机构教育的讲义使用,本笔记会给初中同学使用,中学生可以放心观看

第 0.2 节 乘法公式

开始学习了，我们在学习乘法公式之前来先学习一个很重要的概念，数轴！

定义 1. 一条规定了原点、正方向和单位长度的直线，原点即为 0

例题 0.1
一个数轴需要确定原点和正方向以及单位长度，单位长度取决两数之间的距离

现在我们针对数轴来进行讨论，首先是用数轴进行比大小，让我们看一道例题

问题 0.1. 比较 -5 和 4 的大小

解. 很显然，$4>-5$，而我们在数轴上便可以清晰的看出来两值的大小关系，这就是数轴的第一个用处 ■

现在我们引入一个数轴图片，来观察一下数轴

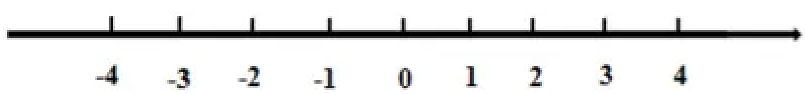

图 1: 数轴

我们可以看到原点，正方向和一些数，现在我们针对这些数进行定义

定义 2. 当 $a>0$ 且为整数时，我们称 a 为正整数 a，当 $a=0$ 时我们称 a 为 0，当 a<0 时，且 a 为整数，我们称 a 为负整数

定义 3. 0 很特殊，0 没有正负，也就是说不存在-0 和 +0

现在我们已经明白什么是数轴了，接下来我们引入概念

定义 4 (数的分类). 数分为有理数，无理数以后会学到超越数，有理数和无理数统称为实数，有理数包括分数，整数，整数包括正整数，负整数，0；小数也是分数，是分数的一种。
无理数为无限不循环小数，如 π，$\sqrt{2}$ 等等

针对数我们进行了分类接下来我们来学习数的运算，先来看到例题

例题 0.2
计算 3+5，4—6，98/2，99*88，12^2

显然的，答案分别是 8，-2，49，8712, 144
我们分别把这五种基础运算称之为，加减乘除，乘方。在小学的时候我们就已经学习了前四种合称四则运算，在本课程我们重点学习乘方的运算

定义 5. 所谓乘方是多个相同因数相乘的简便运算，即 a^n 可写成为 a*a*a* (n 个)*a、

例题 0.3
3^3 等于几?

显然，等于 $3*3*3$=27，这便是我们要学的乘方运算，接下来我们引入二项式定理

定理 1 (二项式定理).

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_r^1 a^{n-1} b + \dots C_n^r a^{a-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n \, (n \in N^*)$$

第 0.3 节 运算和方程

第 0.4 节 函数

第 1 章 集合

第 1.1 节 构造辅助函数

定理 2 (构造辅助函数方法 (联想 ♣!!)). 看到 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)$, 应该想到 $f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$, 因为

$$\left[f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}\right]'=\left[f'(x)+f(x)g(x)\right]e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$$

证明. 看到 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)$, 应该想到 $f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$, 因为

$$\left[f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}\right]'=\left[f'(x)+f(x)g(x)\right]e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$$

■

第 1.2 节 子空间的交与和、直和

例题 1.1 真子空间的任意并不等于 V

设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是域 F 上线性空间 V 上的真子空间,证明:如果域 F 的特征为 0, 即 $\mathrm{Char}\,F=0$, 那么

$$V_1\bigcup V_2\bigcup\cdots\bigcup V_s\neq V.$$

证明. 对真子空间的个数 s 作数学归纳法。当 $s=1$ 时，由于 V_1 是 V 的真子空间，因此 $V_1\neq V$。假设命题对于 $s-1$ 的情形为真。现在来看 s 的情形，根据归纳假设得

$$V_1\bigcup V_2\bigcup\cdots\bigcup V_{s-1}\neq V,$$

因此 V 中存在 $\alpha\notin V_1\bigcup V_2\bigcup\cdots\bigcup V_{s-1}$。若 $\alpha\notin V_s$, 则 $V_1\bigcup V_2\bigcup\cdots\bigcup V_{s-1}\bigcup V_s$。接下来设 $\alpha\in V_s$。由于 $V_s\neq V$, 因此存在 $\beta\notin V_1\bigcup V_2\bigcup\cdots\bigcup V_{s-1}$，则 ■

第 II 部分 线性代数

第 III 部分 数学分析

第 2 章 行列式

第 2.1 节 行列式的性质与计算方法

例题 2.1

看到 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)$, 应该想到 $f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$, 因为

$$\left[f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}\right]' = [f'(x)+f(x)g(x)]\, e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$$

问题 2.1. 看到 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)$, 应该想到 $f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$, 因为例题 2.1

$$\left[f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}\right]' = [f'(x)+f(x)g(x)]\, e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$$

解. 看到 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)$, 应该想到 $f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$, 因为例题 2.1

$$\left[f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}\right]' = [f'(x)+f(x)g(x)]\, e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$$

■

第 2.2 节 多项式理论

第 2.3 节 矩阵方程

1	2
3	4

表 2.1: Caption

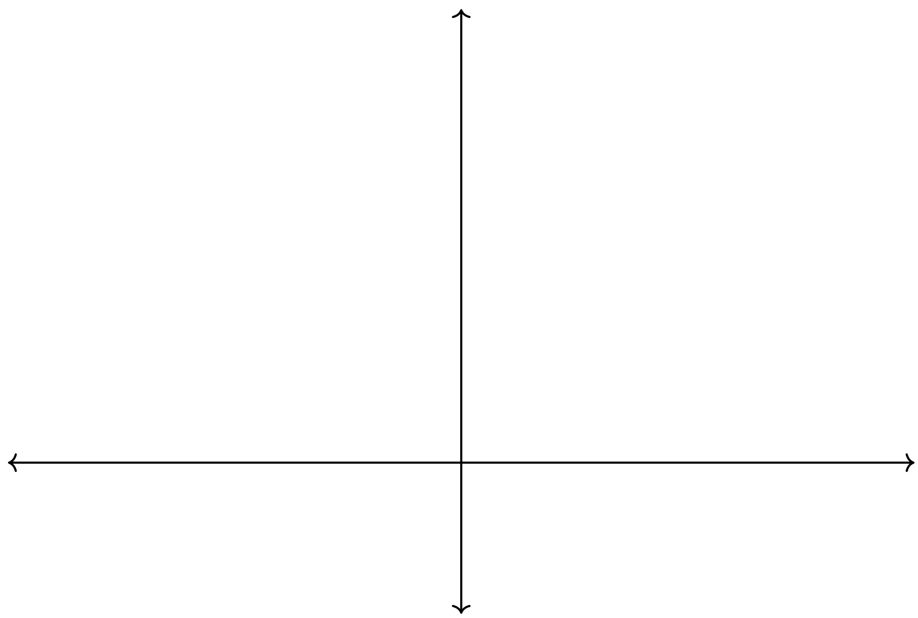

图 2.1: 图片

定义 6. 看到 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)$, 应该想到 $f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$, 因为例题 2.1

$$\left[f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}\right]' = \left[f'(x)+f(x)g(x)\right]e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$$

定义 7. 看到 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)$, 应该想到 $f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$, 因为

$$\left[f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}\right]' = \left[f'(x)+f(x)g(x)\right]e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$$

从而 [6, 1, 3, 2, 4, 5]

第 A 章 附录

第 A.1 节 好的

参考文献

[1] Kahneman Amos Tversky. Prospect theory: An analysis of decision under risk. Econometrica, 47(2):263–291, 1979.

[2] 丘维声. 高等代数: 大学高等代数课程创新教材. 下册. 高等代数: 大学高等代数课程创新教材. 下册, 2010.

[3] 华东师范大学数学系. 数学分析. 第 4 版. 数学分析. 第 4 版, 2010.

[4] 孙建峰. 上海交通大学 2021 年硕士研究生入学考试《数学分析》解答.

[5] 维拉尼. 一个定理的诞生. 一个定理的诞生, 2015.

[6] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法. 第 2 版. 数学分析中的典型问题与方法. 第 2 版, 2006.

索引