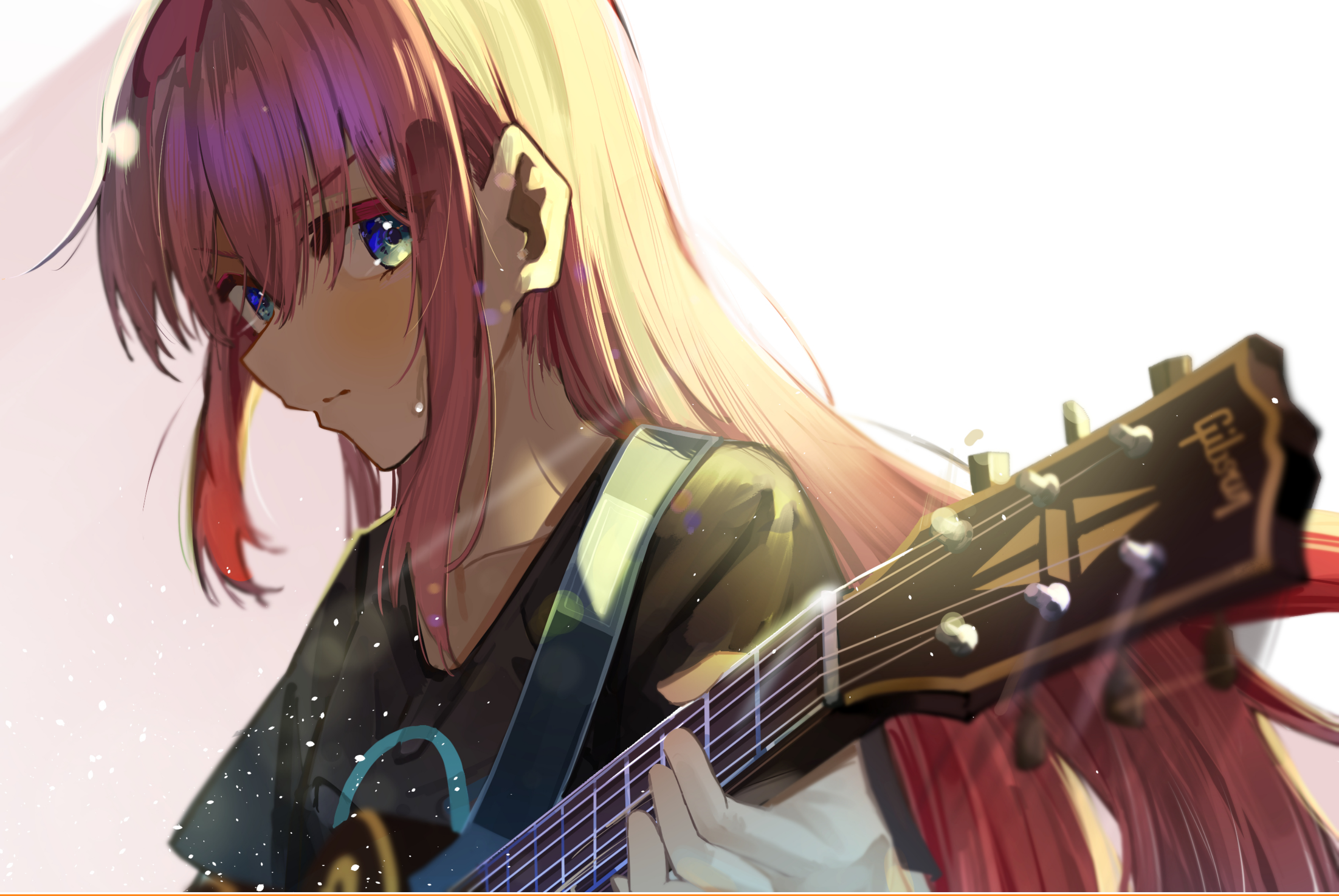


线性代数笔记

纯数学启蒙，中学生也可以看懂的线性代数

作者：魔法の小さなモンスター (小怪)

组织：PMRC 数学工作室

时间：January 11, 2022

适用人群：中学生数学爱好者刚进入大学对线性代数发愁

迟序之数，非出神怪，有形可检，有数可推。——祖冲之

目录

第 1 章 写在前面的话

你好, 这里是后期的小怪, 是 PMRC 的一位成员, 主要学习的是代数方面和分析方面, 现初一. 本计划会使用到 PMRC 在进行的线性代数课所使用教材, 本讲义是一本非常适合初学者的, 其中从集合出发, 学习了 LADR 抛开了行列式的一个好主意, 分为六个部分, 其中后三个部分是辅助资料, 面对的是中学生人群进行的讲解. 课程安排不详,PMRC 是一家打造良好的竞赛学习和优质竞赛课程的工作室, 很多学员在刘老师的带领下进入集或者在 CMO 上夺得佳绩. 同时本讲义是 PMRC 的主课环节, 后续课程围绕分析和代数还有一些数论进行讨论, 相信学员可以获得好成绩. 本讲义结束时间大概在 23 年的 10 月份, 总时长大约在 10 个月左右

由于本人是一名初一学生, 在学业方面需要重点培养, 主要在于小科, 所以开学以后会在 9 月进行短暂停更, 本讲义或许延期一个月到 24 年寒假也是有可能的

本科课程需要同学重点看的部分是第一部分 3 和 4 知识点, 第二部分和第三部分期间穿插一些小知识点

第 2 章 集合

集合，简称集，是数学中一个基本概念，也是集合论的主要研究对象。

2.1 定义

我们首先进行定义

定理 2.1 (集合)

集合是指具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇总而成的集体。其中，构成集合的这些对象则称为该集合的元素

在高中的时候我们知道集合有一些性质

集合有确定性，互异性，无序性

相同, 在我们知道集合性质的时候, 自然也可知道其中的表示方式

命题 2.1 (列举法)

列举法:$A = \{a_1, a_2 .... a_n\}$

也可以写成 $A = \{a_i, i \in \mathbb{N}^*\}$

命题 2.2 (描述法)

将集合的所有元素都具有的性质(满足条件)表示出来,写成 $\{x \mid p\,(x)\}$ 其它的一般形式是 $\{x \in A \mid p(x)\}$x 表示集合的元素，A 表示 x 的取值范围。$P(x)$ 表示元素应满足的关系。

描述法也是有步骤的

在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值（变化范围），画一竖线
在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

通常我们在很多数学分析, 数学教材, 甚至一些科普书籍上常见用图表示集合, 这种方法叫图示法

命题 2.3 (图示法)

用一条封闭的曲线所围成的图形的内部来表示集合的方法，这种方法叫做图示法

常见的集合我们可以联想到群, 在这里我们针对幺半群进行群的一个表示, 用字母表示

定理 2.2 (幺半群)

是存在单位元,且满足二元运算和结合律的半群

结合律:$\forall a, b, c \in S, (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

$\exists e \in S, \forall a \in S, a \times e = e \times a = a$

再次, 幺半群定义完毕, 二元运算是什么呢?
二元运算是由两个元素形成的第三个元素的一种定律, 我们常看见数的加法, 乘法, 这就是二元运算,, 是一种法则
这里我们举两个例子吧

定理 2.3

非空集合 S 上的二元运算可定义为 $S \times S \to S$

命题 2.4 (简单的二元运算)

简单的二元运算 $a+b=c$

命题 2.5 (矩阵的二元运算)

矩阵在线性代数很重要的，这里请当了解，跳过，当然我们在第二章详细讲矩阵是什么

$$\begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa+Bd & Ad+Ee \\ Da+Ed & Db+Ee \end{pmatrix}$$

2.2 关系和复习

在第一小节中我们简单了解了集合, 并且简单引出了以后要学的代数只是, 现在我们进入到第二小节, 第二小节是在进一步复习集合, 并且穿插入数学分析的内容, 同时进行关系的复习

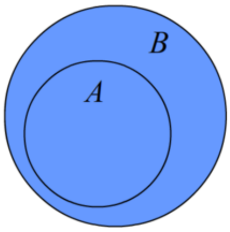
2.2.1 基础关系

定理 2.4 (包含)

在一个随机现象中有两个事件 A 与 B

写成 $A \subseteq B$,A 包含于 B.

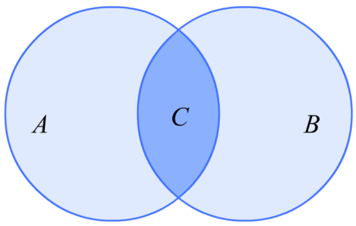
$B \supseteq A$,B 包含 A



A⊆B

定理 2.5 (交集)

设 A，B 是两个集合，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合. 写成 $A \cap B$. 中间部分可以写作 $C = A \cap B$

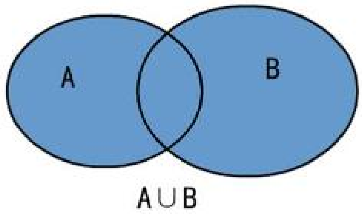


$C = A \cap B$

定理 2.6 (并集)

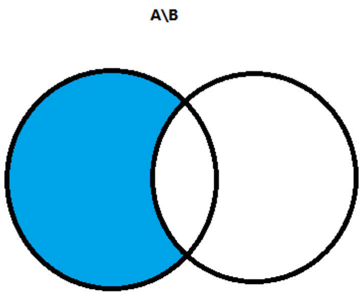
集合 A 和集合 B 的并集是指集合 $A \cup B$

他由全部至少属于集合 A,B 之一的元素组成



定理 2.7 (并集)

集合 A 和 B 的差集指的是集合 $A \setminus B$ 它由全部属于 A 但不属于 B 的元素组成



2.2.2 群的定义, 子群, 群同态

我们在认识集合以后我们便复习成功了, 如果觉得还是不理解就请移步到高中数学或者阅读卓里奇的《数学分析》接下来我们开始讲一个比较重要但是并不需要这个时间段掌握的知识，群

令（G，·）是一个幺半群，当G中所有的元素都是可逆的。若·是G上的一个二元运算，则（G，·）是个群，或G对·构成群，当这个运算满足结合律，存在单位元，且每个元素具有逆元，我们就称（G，·）是一个群

定理 2.8 (单位元,Identity Element)

假设 (S, ·) 是一个幺半群

$$\exists e \in S, \forall a \in S \tag{2.1}$$

$$a \cdot e = e \cdot a = a \tag{2.2}$$

我们称 e 为乘法单位元, 乘法单位元是 1, 加法单位元则是 0

那么单位元解释完毕, 有的朋友就会问了逆元是什么?

定理 2.9 (逆元，Inverse element)

假设 (S, ·) 是一个幺半群，$X \in S$。我们说 x 是可逆的，当且仅当

$$\exists y \in S, x \cdot y = y \cdot x = e \tag{2.3}$$

其中 y 被称为 x 的逆元，记作 x^{-1}，($\frac{1}{x}$)

现在我们来正式定义群

定理 2.10 (群 group)

群（G，·）是由集合 G 和二元运算 · 构成的，符合以下四个性质（称“群公理”）的数学结构。群公理包含下述四个性质，分别是封闭性、结合律、单位元和对于集合中所有元素存在逆元素。

$$\forall x, y, z \in G, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y \cdot z \tag{2.4}$$

$$\exists e \in S, \forall x \in S, x \cdot e = e \cdot x \tag{2.5}$$

$$\exists y \in S, x \cdot y = y \cdot x = e \tag{2.6}$$

即可定义群，其中群（G，·）通常使用 G 来代替，紧挨着的有 H 和 K 群 G 的基数 $|G|$ 成为它的阶 ♡

我们说群就需要满足二元运算，结合律，单位元，元素存在逆运算这四大点对于单位元，有一个性质，那就是单位元唯一，现在我们来证明一下

命题 2.6

若（S，·）是一个幺半群，则单位元是唯一的。此即，若 e，$e^,$ 都是单位元，则 $e = e^,$.

证明：假设 e，$e^,$ 都是（S，·）的单位元考虑乘积 $e \cdot e^,$，一方面 e 是单位元，所以它等于 $e^,$ 但是 $e^,$ 是单位元，同理等于 e，故

$$e = e \cdot e^, = e^, \tag{2.7}$$

因此便证明了单位元的唯一性

我们在证明完毕单位元唯一性的时候，我们就会发现，逆元是不是也有唯一性质能，答案是显然的，接下来我们证明逆元的唯一性

命题 2.7

假设（S，·）是一个幺半群。假设 $x \in S$，x 是可逆的，则其单位元唯一。也就是说，如果 $yy^, \in S$ 都是它的逆元，则 $y = y^,$

证明：假设 y，$y^,$ 都是 x 的逆元。则 y·$x = e$　x·y'=e 下面用代数变形来证明 y=$y^,$

$$y = y \cdot e = y \cdot x \cdot y^, = e \cdot y^, = y^, \tag{2.8}$$

这里我们利用了 e 是单位元，以及（广义）结合律，不直接加括号了

两个有趣，简短，重要的证明已经证明完毕，现在我们针对逆元做出一些文章

命题 2.8

令（G，·）是一个群，令 x∈ G　$(x^{-1})^{-1}$ =x

证明：$y = x^{-1}, x \cdot y = y \cdot x = ey^{-1} = x, x \cdot y = y \cdot x = e$

那么这个命题证明的是什么呢,这不就是逆元的逆元吗，那么逆元的逆元是什么呢，是自身，我们证明的符合我们的预期

讲述完群的，我们现在开始讲子群，那什么是子群呢，现在我们来定义

定理 2.11 (子群)

假设有有一个群（G，·)，H 是 G 的非空子集，H 与相同的二元运算 · 记作 $H \subset G$，则（H，·）是 (G，·) 的子群，H 是 G 的子群，记作 $H < G$

♡

现在我们开始学习群同态，群同态是群论很重要的一项内容

定理 2.12 (群同态)

在数学中给定两个（G，*）（H，·）群，从 G 到 H 的群同态 $h : G* \to H$ 使得对于所有 G 中的 u 和 v 下述等式成立

$$h\left(u * v\right) = h\left(u\right) \cdot h\left(v\right) \tag{2.9}$$

♡

同时，在定义完毕群同态的时候，我们来介绍核和像，在以后的学习线性代数的过程中，我们便可一笔带过

定理 2.13 (核和像)

我们定义 h 的核被映射到 H 中单位元 e_h 上的 G 中元素的集合

$$ker\left(h\right) = \{u \in G : h\left(u\right) = e_h\} \tag{2.10}$$

定义 h 的像：

$$im\left(h\right) = \{h\left(u\right) : u \in G\} \tag{2.11}$$

核是 G 的正规子群，而像是 H 的子群我们还可以这样认为：令 $f : (G) \to \left(G^{'}, *\right)$ 是一个群同态，我们定义 f 的核与像，分别为

$$ker(f) = \left\{x \in G : f\left(x\right) = e^{'}\right\} \subset G \tag{2.12}$$

$$im(f) = \{y \in G' : \exists x \in G, y = f\left(x\right)\} = \{f(x) : x \in G\} \subset G' \tag{2.13}$$

♡

我们看定义 2，这里我们注意到核是在定义域中，而像是在陪域中，实际上像就是值域，那么我们说

定理 2.14

核是定义域的子群，像是陪域的子群，即

$$ker\left(f\right) < G$$

$$im\left(f\right) < G$$

♡

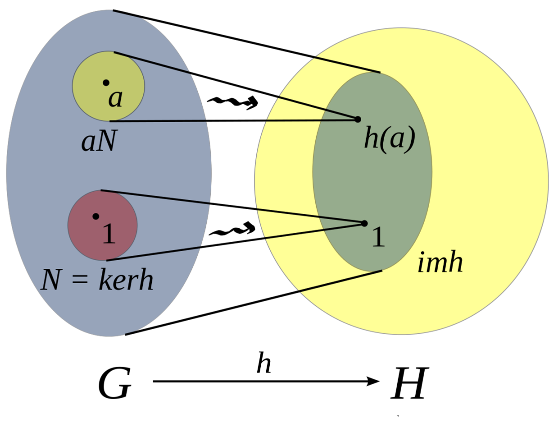


图 2.1: 核与像的关系示意图，来自于维基百科

我们在本小章节是一个简单且基础的群论，现在我们正式开启线性代数的学习，我们现在现开始讲向量空间

2.3 从向量空间出发

2.3.1

2.4 子空间向量空间

第 3 章 有限维向量空间

第 4 章 本征值, 本征空间

4.1 不变子空间

第 5 章 中学数学和线性代数的关联

5.1 行列式

第 6 章 函数

第 7 章 范畴基础

第 8 章 参考书目