斐波那契数列的矩阵方法求解第 n 项函数

斐波那契数列 $\{F_n\}$ 定义如下：

- $F_0 = 0$
- $F_1 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 对于 $n \geq 2$

我们的目标是找到一个使用矩阵运算来计算 F_n 的函数表达式。

1. 建立矩阵递推关系

Let's consider the aquation: $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$。我们希望找到一个 2 $\times$2 的矩阵 $\mathbf{M}$，使得：

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

为了满足斐波那契数列的递推关系，我们得到矩阵 $\mathbf{M}$ 为：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

验证矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot F_{n-1} + 1 \cdot F_{n-2} \\ 1 \cdot F_{n-1} + 0 \cdot F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. 迭代矩阵递推关系

迭代应用矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^2 \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} = \cdots = \mathbf{M}^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

使用初始值 $F_1 = 1$ 和 $F_0 = 0$，得到：

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. 求矩阵 M 的特征值和特征向量

特征方程为 $\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=0$:

$$\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(-\lambda)-(1)(1)=\lambda^2-\lambda-1=0$$

解二次方程得到特征值 $\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。令 $\lambda_1=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\lambda_2=1-\phi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

对于 $\lambda_1=\phi$，特征向量 $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}\phi\\ 1\end{pmatrix}$。对于 $\lambda_2=1-\phi$，特征向量 $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1-\phi\\ 1\end{pmatrix}$.

4. 构建矩阵 P, D, 和 $\mathbf{P}^{-1}$

令 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\phi & 1-\phi\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\phi & 0\\ 0 & 1-\phi\end{pmatrix}$. 计算 $\det(\mathbf{P})=\phi\cdot 1-(1-\phi)\cdot 1=2\phi-1=\sqrt{5}$. 逆矩阵 $\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -(1-\phi)\\ -1 & \phi\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & \phi-1\\ -1 & \phi\end{pmatrix}$.

5. 计算 $\mathbf{M}^{n-1}=\mathbf{P}\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{P}^{-1}$

$\mathbf{D}^{n-1}=\begin{pmatrix}\phi^{n-1} & 0\\ 0 & (1-\phi)^{n-1}\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{n-1}=\mathbf{P}\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{P}^{-1}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\phi & 1-\phi\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^{n-1} & 0\\ 0 & (1-\phi)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \phi-1\\ -1 & \phi\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\phi^n & (1-\phi)^n\\ \phi^{n-1} & (1-\phi)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \phi-1\\ -1 & \phi\end{pmatrix}\end{aligned}$$

F_n 是 $\mathbf{M}^{n-1}$ 的第一列第一个元素：

$$F_n=(\mathbf{M}^{n-1})_{11}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n\cdot 1+(1-\phi)^n\cdot(-1)\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n-(1-\phi)^n\right)$$

6. 斐波那契数列第 n 项的函数表达式 (Binet's Formula)

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

这就是斐波那契数列第 n 项的 Binet's Formula。

三项和递推数列的矩阵方法求解第 n 项函数

考虑数列 $\{F_n\}$，前三项为 $F_0 = 0, F_1 = 0, F_2 = 1$，递推关系为 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$ 对于 $n \geq 3$。

1. 建立矩阵递推关系

对于三项和递推关系，我们需要扩展状态向量以包含前三项。我们考虑向量 $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix}$。我们希望找到一个 \$3 $\times 3$ 的矩阵 $\mathbf{M}$，使得：

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix}$$

为了满足递推关系 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$，矩阵 $\mathbf{M}$ 的第一行乘以向量 $\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix}$ 应该得到 $F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-3}$。因此，$\mathbf{M}$ 的第一行应该是 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。

为了得到 $F_{n-1} = F_{n-1} + 0 \cdot F_{n-2} + 0 \cdot F_{n-3}$，矩阵 $\mathbf{M}$ 的第二行应该是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

为了得到 $F_{n-2} = 0 \cdot F_{n-1} + 1 \cdot F_{n-2} + 0 \cdot F_{n-3}$，矩阵 $\mathbf{M}$ 的第三行应该是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

所以，我们得到矩阵 $\mathbf{M}$ 为：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

验证矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} \\ F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

2. 迭代矩阵递推关系

迭代应用矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^2 \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \\ F_{n-4} \end{pmatrix} = \cdots = \mathbf{M}^{n-2} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

对于 $n \geq 2$，我们有：

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{n-2} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. 求矩阵 M 的特征值

特征方程为 $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = 0$:

$$\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-0)-1(-\lambda-0)+1(1-0) = \lambda^2-\lambda^3+\lambda+1 = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 = 0$$

或者 $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为此三次方程的三个根。(求解三次方程根比较复杂，此处我们假设已经求出)

4. 使用特征值分解 (假设 M 可对角化)

假设矩阵 $\mathbf{M}$ 可对角化,则存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 和对角矩阵 $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

使得 $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$。则 $\mathbf{M}^{n-2} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{n-2}\mathbf{P}^{-1}$,其中 $\mathbf{D}^{n-2} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{n-2} \end{pmatrix}$.

5. 计算 F_n

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{n-2}\mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

F_n 将是矩阵 $\mathbf{M}^{n-2}$ 的第一列的第一个元素。设 $\mathbf{P}^{-1} = [c_{ij}]_{3\times3}$，$\mathbf{P} = [p_{ij}]_{3\times3}$。令 $\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$. 则 $\mathbf{D}^{n-2}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-2}c_{11} \\ \lambda_2^{n-2}c_{21} \\ \lambda_3^{n-2}c_{31} \end{pmatrix}$. 最后 $\mathbf{M}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\mathbf{P}(\mathbf{D}^{n-2}\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-2}c_{11} \\ \lambda_2^{n-2}c_{21} \\ \lambda_3^{n-2}c_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}\lambda_1^{n-2}c_{11} + p_{12}\lambda_2^{n-2}c_{21} + p_{13}\lambda_3^{n-2}c_{31} \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

因此，

$$F_n = p_{11}c_{11}\lambda_1^{n-2} + p_{12}c_{21}\lambda_2^{n-2} + p_{13}c_{31}\lambda_3^{n-2}$$

令 $A = p_{11}c_{11}, B = p_{12}c_{21}, C = p_{13}c_{31}$. 则

$$F_n = A\lambda_1^{n-2} + B\lambda_2^{n-2} + C\lambda_3^{n-2}, \quad n \geq 2$$

需要通过初始条件 $F_2 = 1, F_3 = F_2 + F_1 + F_0 = 1, F_4 = F_3 + F_2 + F_1 = 2$ (或 F_2, F_3, F_4) 来确定系数 A, B, C。对于 $n = 2, 3, 4$:

$$F_2 = A\lambda_1^0 + B\lambda_2^0 + C\lambda_3^0 = A + B + C = 1$$

$$F_3 = A\lambda_1^1 + B\lambda_2^1 + C\lambda_3^1 = A\lambda_1 + B\lambda_2 + C\lambda_3 = 1$$

$$F_4 = A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 + C\lambda_3^2 = 2$$

解这个线性方程组可以得到 A, B, C 的值。

6. 斐波那契数列第 n 项的函数表达式

最终，斐波那契数列第 n 项的函数表达式为：

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 0, 1 \\ A\lambda_1^{n-2} + B\lambda_2^{n-2} + C\lambda_3^{n-2}, & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ 的根，系数 A, B, C 由初始条件确定。

n 项和递推数列的矩阵方法求解第 k 项函数

考虑数列 $\{F_k\}$，其递推关系是 **m 项和 ** 的形式：

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} + \cdots + F_{k-m}$$

对于 $k \geq m$，并给定前 m 项初始值 $F_0, F_1, \ldots, F_{m-1}$。

1. 建立矩阵递推关系

定义状态向量为：

$$\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \\ \vdots \\ F_{k-m+1} \end{pmatrix}$$

构建 $m \times m$ 的矩阵 $\mathbf{M}$ 使得 $\mathbf{v}_k = \mathbf{M}\mathbf{v}_{k-1}$：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中，第一行全为 1，第二行到第 m 行，对角线下方一个位置为 1，其余为 0。

2. 迭代矩阵递推关系

迭代关系为：

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{M}^{k-m+1}\mathbf{v}_{m-1}$$

初始状态向量为：

$$\mathbf{v}_{m-1} = \begin{pmatrix} F_{m-1} \\ F_{m-2} \\ \vdots \\ F_0 \end{pmatrix}$$

3. 特征值分解

1. 求解特征方程 $\det(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I})=0$，得到特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$。2. 求对应于每个特征值的特征向量。3. 构建矩阵 $\mathbf{P}$ (特征向量作为列) 和对角矩阵 $\mathbf{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$。4. 计算 $\mathbf{P}^{-1}$。

4. 计算 $\mathbf{M}^{k-m+1}$ 和 F_k

$$\mathbf{M}^{k-m+1}=\mathbf{P}\mathbf{D}^{k-m+1}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{v}_k=\mathbf{M}^{k-m+1}\mathbf{v}_{m-1}=\mathbf{P}\mathbf{D}^{k-m+1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}_{m-1}$$

F_k 是结果向量 $\mathbf{v}_k$ 的第一个元素。

5. 斐波那契数列第 k 项的函数表达式

如果 $\mathbf{M}$ 可对角化，则 F_k 的函数表达式为：

$$F_k=C_1\lambda_1^{k-m+1}+C_2\lambda_2^{k-m+1}+\cdots+C_m\lambda_m^{k-m+1},\quad k\geq m-1$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ 是矩阵 $\mathbf{M}$ 的特征值，系数 $C_1,C_2,\ldots,C_m$ 由初始条件 $F_0,F_1,\ldots,F_{m-1}$ 确定。通过解线性方程组来确定系数。