

# 博士 学位 论 文

## 建筑几何中的网格与光滑曲面构造

**Construction of Mesh and Smooth Surfaces in Architectural  
Geometry**

作 者 姓 名: 王 慧

学 号: 11501015

指 导 教 师: 朱春钢 教授

学 科、专 业: 计算数学

答 辩 日 期: 2020 年 3 月 18 日

**大连理工大学**

Dalian University of Technology

## 摘要

建筑几何 (*Architectural Geometry*) 源于建筑中待解决的自由曲面造型问题, 目前已逐渐成为一门新兴的交叉研究领域且备受关注。从设计分析、数字建模到加工建造, 几何都是关键因素。随着现代科技的发展, 几何计算为自由曲面建模带来变革, 挑战工程和设计上的规模和建造技术。反之, 材料和技术的进步也对几何模型探索提供了更大和更灵活的空间。这些源自实际建筑的需求为工业几何、图形图像和几何处理带来了新的问题和研究目标。

建筑几何涉及计算几何、计算机辅助几何设计 (CAGD)、计算机辅助设计 (CAD)、计算机辅助制造 (CAM) 等学科领域, 其核心理论来源于微分几何。微分几何着眼于几何的局部性质分析, 如一般三维曲线和曲面的局部曲率行为。常见的特殊曲线和曲面有测地线、曲率线、渐近线、可展曲面、常平均曲率曲面、旋转面等, 它们因其微分特性而在建筑几何中具有很重要的研究价值。

研究建筑几何的主要手段是离散微分几何 (*DDG*)。它是经典微分几何的离散化, 依赖于光滑理论但具有更直观和更简单的表示。它的研究对象是多边形、多面体面、非多面体网格等。离散曲线曲面的表示不需要全局的精确代数表示, 往往局部格点、边线或面片的性质就决定了全局的几何意义, 而且其微分表示也只依赖局部的特征。这极大丰富了曲线曲面的造型可能性, 为直观交互的几何建模提供了条件, 也方便设计者灵活探索自由曲面以满足实际建筑要求。

建筑几何的研究不仅对理论研究发展提供了新的方向, 而且对实际建筑设计也具有重要应用价值。本文对建筑几何中的网格与光滑曲面构造理论与应用进行研究。基于建筑上的应用, 本文首先建立插值特殊边界线的光滑曲面模型, 这为具有一定边界约束的防水曲面的建造提供理论依据。其次, 对应经典微分几何中的曲线和曲面, 研究特殊的离散参数网面, 主要研究内容包括离散常平均曲率曲面、离散测地平行坐标系参数网、离散测地线参数网、离散曲率线参数网、离散渐近线参数网等, 研究这些离散参数曲面不仅极大丰富了离散微分几何理论, 同时还表现出在实际建筑中的理论支持作用。最后, 利用几何结构上的良好性质, 应用这些结论到建筑几何, 帮助实现面向建造为意识的几何设计。

本文主要工作如下:

- (1) **插值渐近四边形的光滑曲面重构。**首先, 本文给出构造渐近四边形的判定条件。在给定角点数据(角点坐标、单位切向量、曲率值), 设计 Bézier 渐近四边形、有理 Bézier 渐近四边形和 B-spline 渐近四边形。其次, 依据插值的兼容性, 本文构造以这些封闭曲线为边界线的张量积 Bézier 曲面、有理 Bézier 曲面和 B-spline 曲面。随后利用能

量函数对自由参数进行优化, 保证了曲面的光滑性与能量极小性. 几何理论上, 如上模型的建立推广了曲面插值特殊边界线(测地线或曲率线)的研究; 实际应用上, 为满足特殊边界线的防水表面的建造提供了依据.

- (2) **构造球面格点星四边网.** 该网格满足在每个格点星处格点及其相邻边四个点共球, 构成了关于主法曲率线对称的网格, 兼容离散常平均曲率曲面和极小曲面. 当所有球半径相同且网格是正交网时, 该网格是主法曲率线网的对角线网, 即离散常平均曲率曲面. 特别地, 当所有球半径无限大时, 成为离散极小曲面. 建筑应用上, 可以使用边界为圆弧状或平直状的可展钢薄片构造网壳结构. 这些薄片沿着这个(虚拟的)曲面的主法向量构成网壳的支撑梁柱结构且彼此正交于无挠节点. 实际构造的弯曲支撑结构模型和直支撑结构模型具有良好的微分几何特性, 使得在交互设计上存在丰富空间, 在节点、板材和框架上存在大量重复性元素, 在加工模具和组合集装方面节省大量成本.
- (3) **建立离散测地平行坐标系参数网.** 测地平行坐标系是曲面上的正交网, 满足其中一族参数线是测地线. 该特殊曲面参数化的离散形式展现出非常明确的应用价值, 特别在建筑上的曲面设计和制造方面. 离散测地平行坐标系参数网很自然地分解为以测地线为边界的曲面条, 控制测地条带宽度, 有助于使用来源于平直板材的条带进行曲面包层、设计测地网壳结构或木筋壳结构. 同时, 还可以构造近似可展曲面, 生成由可拉伸或压缩的材料(如毛毡、皮革或木板等)制造的形状. 最重要的, 等宽度测地条带面帮助建立一类内蕴对称的曲面. 此时, 曲面不再只是可展曲面, 而是能等距变形到旋转曲面的双弯曲曲面, 为自由的建筑表面设计提供了空间. 可以通过适当的曲面片或板面组合成防水的表皮并用双弯曲的面板覆层. 这些用于建造的面板可以是类似金属板的灵活材料, 其生产制造只用一些模具即可. 该工作解决了来自平板材料构成自由曲面的问题, 理论上能极大地减少建造成本.
- (4) **设计特殊离散参数网面.** 研究离散四边网格局部格点星条件, 推广构造离散测地线参数网、离散曲率线参数网、离散渐近线参数网. 使用 Guided Projection 算法快速高效地实现不同离散网格的交互设计, 为自由曲面、可展曲面、旋转曲面、极小曲面、Weingarten 曲面等及其相应的等距变形曲面的造型提供可视化保证.

**关键词:** 建筑几何; 计算几何; 曲线曲面造型; 离散微分几何; 网格曲面; 参数线网

## ABSTRACT

*Architectural geometry* is an emerging and interdisciplinary field starting from the problem solving freeform surface modeling in architecture. It has attracted much attention these days. Geometry lies at the core of design, analysis, digital modeling, and fabrication. With the development of modern science, on the one hand, geometry computation brings revolution to freeform surface modeling, posing challenges to scale and construction technologies of engineering and design. On the other hand, the progress in materials and technologies offers bigger and more flexible space for the exploration of geometry modeling. The needs originated from actual architecture yields new questions and goals for industry geometry, graphics and images, and geometry processing.

Architectural geometry involves computational geometry, Computer-Aided Geometric Design (CAGD), Computer-Aided Design (CAD), Computer-Aided Manufacturing (CAM) and so on. The core of it is *differential geometry*, which focuses on the local analysis of geometry properties, such as the local curvatures of general spacial curves and surfaces. Some special but also common curves and surfaces, such as geodesics, asymptotes, curvature lines, developable surfaces, surfaces of constant mean curvature, surfaces of revolution et al., own important research meanings in architectural geometry thanks to their differential properties.

The methodology to explain architectural geometry modelings is *Discrete Differential Geometry (DDG)*, which is the discrete counterpart of classic differential geometry, loyal to smooth theories and has a more direct and simpler representation. The research objects of DDG are polygons, polyhedron faces, and non-polyhedron meshes. The representations of discrete curves and surfaces don't need global accurate algebraic expression. Usually, local properties of vertices, edges, and faces contribute to global geometry meanings. Furthermore, their differential expressions only depend on local characters. This enriches the possibilities of curves and surfaces constructions, paves a way for direct and interactive geometry modelings, and is convenient for

designers to explore freeform surfaces with actual architectural requirements.

Architectural geometry is significant for the future development of both theoretical research and practical architectures. This paper focuses on both the theory and the application of the construction of mesh and smooth surfaces in architectural geometry. Aiming at architectural applications, we first construct smooth surfaces interpolating special boundaries, which provides a theoretical basis for modeling waterproof architectural skin with boundary constraints. Then we research some special discrete parametric curve nets corresponding to the smooth cases in classical differential geometry, such as discrete constant mean curvature surface, discrete surface parameterized by discrete geodesic parallel coordinates, discrete geodesic curve net, discrete curvature lines net, discrete asymptotic curve net. These results not only enrich the theory of DDG but also present theoretical support for actual architectural application. Finally, thanks to the good properties of mesh and surface geometry, these conclusion helps to realize fabrication-aware geometry designs.

The main contents of this thesis are as follows:

1. **Smooth surface interpolating asymptotic quadrilateral.** Firstly, this paper presents the necessary and sufficient conditions for a quadrilateral. With given corner data including corner coordinates, unit tangent vectors and curvatures, we design Bézier, rational Bézier, and B-spline asymptotic quadrilaterals. Secondly, compatible interpolation leads to corresponding tensor-product Bézier, rational Bézier and B-spline surfaces through these closed quadrilaterals as boundaries. The prerequisite of the construction of free and continuous surfaces lies on the existence of free parameters left, then optimization of energy functions keeps the smoothness of curves and surfaces. Theoretically, this model generates the research on surfaces interpolating special boundaries such as geodesics and curvature lines. Practically, it provides ways to produce waterproof surfaces with the satisfaction of specific conditions on boundaries.

2. **Construction of meshes with spherical vertex star.** Such mesh is symmetric about principal curvature lines, satisfying that each vertex and its four edge-shared neighbor vertices are in the same sphere at each vertex star. This geometry setting is compatible with discrete constant mean curvature surface and discrete minimal surface. When all the radii are the same and the network is orthogonal, the mesh surface becomes a discrete constant mean curvature surface. Especially, it becomes discrete minimal surfaces if the radii are infinity. In architectural applications, strained gridshell could be built from circular or straight developable steel lamellas. These lamellas, served as supporting beams structure, aligned normal to this (imaginary) discrete surface and intersect orthogonally with each other at torsal-free knots. The differential geometric advantages of actual curved and straight support structures enrich interactive designs and present a large number of repetitive parameters at knots, panels, and frame, which saves cost in fabrication and assembly.
3. **Construction of surfaces parametrized by discrete parallel coordinates.** Geodesic parallel coordinates are orthogonal nets on surfaces where one of the two families of parameter lines are geodesic curves. The discrete version of these special surface parameterizations shows very useful for specific applications, most of which are related to the design and fabrication of surfaces in architecture. With the new discrete surface model, it is easy to control strip widths between neighboring geodesics. This facilitates tasks such as cladding a surface with strips of originally straight flat material or designing geodesic gridshells and timber rib shells. It is also possible to model nearly developable surfaces. They are characterized by geodesic strips with almost constant strip widths and are used for generating shapes that can be manufactured from materials which allow for some stretching or shrinking like felt, leather, or thin wooden boards. Most importantly, we show how to constrain the strip width parameters to model a class of intrinsically symmetric surfaces, which are isometric to surfaces of revolution and can be covered with doubly-curved panels that are produced with only a few molds when working with flexible materials like

metal sheets. This helps to solve the problem that freeform surfaces constructed from flat materials, which theoretically saves fabrication costs.

**4. Construction of special discrete surfaces parametrization.** We study the local vertex of discrete quad meshes and model discrete surfaces parametrized by geodesics, curvature lines and asymptotes. The Guided Projection algorithm helps us to realize interactive designs of different discrete meshes in a very effective and speedy way, which makes it possible for us to visualize freeform surfaces, developable surfaces, surfaces of revolution, minimal surfaces, Weingarten surfaces, and their isometric deformation.

**Key Words:** Architectural geometry; Computational geometry; Curve and surface construction; Discrete differential geometry; Mesh surface; Parametric curve net

## 目 录

1 绪论 .....	1
1.1 微分几何简介 .....	1
1.1.1 特殊曲线 .....	1
1.1.2 特殊曲面 .....	5
1.2 离散微分几何简介 .....	11
1.3 建筑几何简介 .....	15
1.4 本文主要工作 .....	17
2 插值渐近四边形的曲面构造 .....	21
2.1 研究背景 .....	21
2.2 渐近四边形的判定条件 .....	23
2.2.1 渐近线 .....	23
2.2.2 相交渐近线 .....	26
2.2.3 渐近四边形 .....	28
2.3 插值 Bézier 渐近四边形的 Bézier 曲面 .....	28
2.3.1 5 次 Bézier 渐近四边形 .....	29
2.3.2 Bézier 渐近四边形插值条件 .....	32
2.3.3 双 11 次 Bézier 插值曲面 .....	34
2.4 插值有理 Bézier 渐近四边形的有理 Bézier 曲面 .....	36
2.4.1 $n$ 次有理 Bézier 渐近四边形 .....	38
2.4.2 有理 Bézier 渐近四边形插值条件 .....	40
2.4.3 双 $(5n - 7)$ 次有理 Bézier 插值曲面 .....	40
2.5 插值 B 样条渐近四边形的 B 样条曲面 .....	43
2.5.1 3 次 B 样条渐近四边形 .....	44
2.5.2 B 样条渐近四边形插值条件 .....	46

2.5.3 双 13 次 B 样条插值曲面.....	47
3 特殊离散网格构造 .....	50
3.1 研究背景 .....	50
3.1.1 基本网格 .....	54
3.2 离散常平均曲率曲面.....	60
3.2.1 弯曲支撑结构 .....	60
3.2.2 S-网格点星条件 .....	64
3.2.3 构造方法 .....	65
3.2.4 应用实例 .....	70
3.3 离散测地平行坐标系.....	75
3.3.1 几何性质 .....	75
3.3.2 格点星条件 .....	77
3.3.3 测地条带面 .....	82
3.3.4 应用实例 .....	85
3.4 离散测地线参数网 .....	89
3.4.1 正交测地网面 .....	91
3.4.2 等角测地网面 .....	92
3.4.3 应用实例 .....	93
3.5 离散曲率线参数网 .....	95
3.5.1 圆网 .....	95
3.5.2 锥网 .....	96
3.5.3 等温网 .....	100
3.5.4 蒙日网 .....	101
3.5.5 应用实例 .....	103
3.6 离散渐近线参数网 .....	104
3.6.1 A-网格点星条件 .....	105

3.6.2 几何性质 .....	106
3.6.3 极小曲面 .....	106
3.6.4 具有常主法曲率比的曲面 .....	108
3.6.5 应用实例 .....	110
3.7 算法说明 .....	111
3.7.1 变量列表 .....	114
3.7.2 约束函数说明 .....	115
3.7.3 计算时间 .....	118
4 面向制造意识的几何设计 .....	119
4.1 研究背景 .....	119
4.2 自由曲面结构 .....	120
4.3 可展曲面结构 .....	122
4.3.1 离散可展条件 .....	123
4.3.2 离散测地平行可展网 .....	125
4.3.3 可展曲面直母线向量域 .....	127
4.4 旋转曲面结构 .....	130
4.4.1 等距于旋转面的曲面 .....	132
4.4.2 提取旋转面 .....	132
4.4.3 测量等距变换 .....	134
4.4.4 旋转面模具 .....	136
4.5 测地网壳结构 .....	138
5 结论与展望 .....	142
5.1 结论 .....	142
5.2 创新点摘要 .....	143
5.3 展望 .....	144
参考文献 .....	146

附录.....	154
攻读博士学位期间科研项目及科研成果.....	155
致谢.....	157
作者简介.....	159

## TABLE OF CONTENTS

1	Introduction.....	1
1.1	Introduction of Differential Geometry .....	1
1.1.1	Special Curves .....	1
1.1.2	Special Surfaces .....	5
1.2	Introduction of Discrete Differential Geometry .....	11
1.3	Introduction of Architectural Geometry .....	15
1.4	Main Work .....	17
2	Design of Surfaces through Asymptotic Quadrilateral.....	21
2.1	Background.....	21
2.2	Identification of Asymptotic Quadrilateral .....	23
2.2.1	Asymptotic Curves.....	23
2.2.2	Crossing Asymptotic Curves.....	26
2.2.3	Asymptotic Quadrilateral .....	28
2.3	Bézier Surface Interpolating Bézier Asymptotic Quadrilateral .....	28
2.3.1	Quintic Bézier Asymptotic Quadrilateral.....	29
2.3.2	Bézier Asymptotic Quadrilateral Interpolation .....	32
2.3.3	Interpolating Bézier Surface of Bi-11 Degree .....	34
2.4	Rational Bézier Surface Interpolating Rational Bézier Asymptotic Quadrilateral	36
2.4.1	Rational Bézier Asymptotic Quadrilateral of Degree $n$ .....	38
2.4.2	Rational Bézier Asymptotic Quadrilateral Interpolation .....	40
2.4.3	Interpolating Bézier Surface of Bi-( $5n - 7$ ) Degree .....	40
2.5	B-spline Surface Interpolating B-spline Asymptotic Quadrilateral .....	43
2.5.1	Cubic B-spline Asymptotic Quadrilateral .....	44
2.5.2	B-spline Asymptotic Quadrilateral Interpolation.....	46

2.5.3	Interpolating B-spline Surfaces of Bi-13 Degree .....	47
3	Construction of Special Discrete Surfaces.....	50
3.1	Background.....	50
3.1.1	Basic Meshes .....	54
3.2	Discrete Constant Mean Curvature Surfaces .....	60
3.2.1	Curved Support Structure .....	60
3.2.2	Spherical Vertex Star .....	64
3.2.3	Construction Method .....	65
3.2.4	Applications.....	70
3.3	Discrete Geodesic Parallel Coordinates .....	75
3.3.1	Geometry Properties.....	75
3.3.2	Vertex Star.....	77
3.3.3	Geodesic Strips.....	82
3.3.4	Applications.....	85
3.4	Discrete Geodesic Nets .....	89
3.4.1	Orthogonal Geodesic Nets .....	91
3.4.2	Isogonal Geodesic Nets.....	92
3.4.3	Applications.....	93
3.5	Discrete Curvature Line Nets .....	95
3.5.1	Circular Meshes.....	95
3.5.2	Conical Meshes .....	96
3.5.3	Isothermic Meshes .....	100
3.5.4	Monge Meshes .....	101
3.5.5	Applications.....	103
3.6	Discrete Asymptotic Nets .....	104
3.6.1	Vertex Star.....	105

3.6.2	Geometry Properties .....	106
3.6.3	Minimal Surfaces .....	106
3.6.4	Surfaces with Constant Ratio of Principal Curvatures .....	108
3.6.5	Applications .....	110
3.7	Algorithm .....	111
3.7.1	Variables .....	114
3.7.2	Constraints List .....	115
3.7.3	Running Time .....	118
4	Towards Fabrication-aware Geometric Design .....	119
4.1	Background .....	119
4.2	Freeform Surface Structure .....	120
4.3	Developable Surface Structure .....	122
4.3.1	Conditions for Discrete Developable Surfaces .....	123
4.3.2	Discrete Developable Surfaces Parameterized by Geodesic Parallel Coordinates .....	125
4.3.3	Ruling Vector Field Of Developable Surfaces .....	127
4.4	Rotational Surface Structure .....	130
4.4.1	Surfaces Isometric to Surface of Revolution .....	132
4.4.2	Extracting Surface of Revolution .....	132
4.4.3	Measurement of Isometric Transformation .....	134
4.4.4	Surfaces of Revolution As Molds .....	136
4.5	Geodesic Gridshell Structure .....	138
5	Conclusions and Future Works .....	142
5.1	Conclusion .....	142
5.2	Innovation .....	143
5.3	Future Work .....	144

Appendix .....	154
Achievements .....	155
Acknowledgements.....	157
Author Information .....	159

## 图目录

图 1.1 曲面上测地线.....	2
图 1.2 极小曲面正交渐近线参数网.....	5
图 1.3 等距变换.....	5
图 1.4 折纸模型.....	8
图 1.5 常平均曲率曲面.....	9
图 1.6 Enneper 曲面.....	9
图 1.7 旋转曲面.....	10
图 1.8 具有相同 Gauss 曲率却不等距的两个曲面.....	10
图 1.9 离散可展曲面.....	12
图 1.10 褶皱的纸张是离散可变平的但不是离散可展的.....	13
图 1.11 半离散曲面.....	14
图 1.12 Frank Gehry 代表建筑作品.....	16
图 1.13 自由建筑表面.....	16
图 1.14 具有重复元素的建筑结构.....	17
图 1.15 类 Gehry 自由建筑表面.....	20
图 2.1 INSIDE\OUT 亭子.....	22
图 2.2 带角点向量的四边形曲线.....	27
图 2.3 Bézier 渐近四边形.....	31
图 2.4 Bézier 渐近四边形上插值面的法向量.....	32
图 2.5 沿 Bézier 渐近四边形的两排控制顶点.....	35
图 2.6 Bézier 曲面插值 Bézier 渐近四边形.....	35
图 2.7 Bézier 曲面插值含直线的 Bézier 渐近四边形.....	37
图 2.8 有理 Bézier 曲面插值有理 Bézier 渐近四边形.....	43
图 2.9 B 样条曲面插值 B 样条渐近四边形.....	49

图 3.1 两次 Catmull-Clark 细分后近似光滑的曲面.....	51
图 3.2 三角网格面.....	52
图 3.3 四边网格面.....	53
图 3.4 切比雪夫网面结构.....	54
图 3.5 切比雪夫网.....	55
图 3.6 等角网面.....	57
图 3.7 正交网面.....	57
图 3.8 网格平直度定义.....	59
图 3.9 共轭网格.....	59
图 3.10 平面化 Yas 酒店外表面.....	60
图 3.11 格点星处的 Meusnier 球.....	61
图 3.12 可展条带面的直母线 $r$ 一般不平行于法向量 $n$ .....	62
图 3.13 由初始 unduloid 曲面构造近似等温网 $M_1$ 和 CMC 网 $M_2$ .....	66
图 3.14 格点星处离散曲线切向量.....	69
图 3.15 主法曲率对称参数网.....	70
图 3.16 S-网建筑表面.....	71
图 3.17 优化常法曲率网上的弯曲支撑条带面.....	71
图 3.18 具有弯曲支撑结构的 S-网实际模型变化过程.....	72
图 3.19 从 Ocean 曲面逐渐构造等温网、常法曲率网和初始条带面.....	73
图 3.20 两次细分和优化后的弯曲条带面.....	73
图 3.21 TU Munich 校园内具有直可展支撑结构的渐近网壳结构细节.....	74
图 3.22 平面直线族和同心圆及其各自的正交轨线.....	76
图 3.23 测地平行线截取的测地线段等长.....	76
图 3.24 测地平行坐标系.....	77
图 3.25 格点星处单位边向量和夹角.....	78
图 3.26 格点星处局部标准正交基.....	79

---

图 3.27 离散测地平行坐标系几何特征.....	81
图 3.28 两条测地线间的测地条带面.....	82
图 3.29 提取旋转面.....	85
图 3.30 离散测地平行坐标系参数网.....	86
图 3.31 离散测地平行坐标系参数网近似兔子局部曲面.....	86
图 3.32 离散测地平行坐标系参数网近似自由曲面.....	87
图 3.33 对离散测地平行坐标系网验证 Clairaut 公式.....	88
图 3.34 离散近似可展曲面(上)及其高斯像(下).....	88
图 3.35 离散旋转曲面(上)及其等距变换曲面(下).....	89
图 3.36 离散 Voss-网格点星.....	90
图 3.37 离散测地网格点星处的 Frenet 标架.....	90
图 3.38 离散正交测地网.....	92
图 3.39 离散成 $60^\circ$ 夹角的测地网.....	93
图 3.40 三个环面片满足 DOG 参数化的结果.....	94
图 3.41 三个环面片由离散成 $75^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ 角测地网参数化后的结果.....	94
图 3.42 切比雪夫网由离散成 $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ 角测地网参数化后的结果.....	95
图 3.43 四边形四点共圆.....	96
图 3.44 圆网.....	97
图 3.45 锥网格点星.....	97
图 3.46 自由的锥网面.....	98
图 3.47 锥网的法向量构成离散可展曲面.....	99
图 3.48 锥网的 Gauss 像是圆网.....	99
图 3.49 等温网四边形.....	100
图 3.50 S-等温网的内切圆和格点球面.....	101
图 3.51 S-等温网.....	101
图 3.52 离散等角模具面.....	103

图 3.53 曲率线网结构.....	103
图 3.54 Eiffel 铁塔上的曲率网结构.....	104
图 3.55 A-网格点星.....	105
图 3.56 从螺旋网构造 A-网.....	106
图 3.57 从 unduloid 网格构造 A-网及其等距面.....	107
图 3.58 离散极小曲面及其离散直可展结构.....	107
图 3.59 离散极小曲面(上), 等距面(中) 及其 Gauss 像(下).....	108
图 3.60 具有常主法曲率比的 A-网及其直可展结构.....	109
图 3.61 交互设计离散 Weingarten 网及其直可展结构.....	110
图 3.62 Ingolstadt 的 Intergroup 酒店前的渐近网壳结构.....	111
图 3.63 网格约束条件.....	116
 图 4.1 自由曲面.....	121
图 4.2 有重复性元素的表面.....	121
图 4.3 现实可展曲面模型.....	123
图 4.4 可展弯曲支撑结构.....	123
图 4.5 离散可展曲面格点星.....	124
图 4.6 3D 扫描毛毡面获得均匀三角网格数据.....	126
图 4.7 离散测地平行坐标系网近似毛毡曲面.....	127
图 4.8 构造新的平面.....	128
图 4.9 由直母线构造新的分片平面.....	129
图 4.10 内部木质墙面包层的渲染图.....	130
图 4.11 旋转建筑结构.....	130
图 4.12 等距于旋转面的曲面的条带模型.....	131
图 4.13 木质墙面包层的渲染图.....	132
图 4.14 条带面展开图.....	133

图 4.15 曲面满足离散旋转面条件及其近似旋转面.....	134
图 4.16 对一个平面片交互设计得到不同曲面(上)及其相应旋转面(下).....	135
图 4.17 等距变形塑料瓶及其模拟效果.....	135
图 4.18 对旋转面片的自由等距变形.....	136
图 4.19 旋转面模具.....	137
图 4.20 类 Frank Gehry 建筑设计.....	137
图 4.21 等距于旋转面的曲面嵌板.....	138
图 4.22 网壳结构.....	139
图 4.23 测地网壳结构.....	140
图 4.24 测地网壳结构模型制作过程.....	140

## 表目录

表 3.1 离散测地平行坐标系变量数.....	114
表 3.2 离散测地平行坐标系计算效率.....	118



# 1 绪论

## 1.1 微分几何简介

微分几何有着悠久的历史, 并与多个领域有着密切的联系, 比如计算机图形图像、机械工程、航空航天等自然科学. 一般而言, 微分几何研究  $n$  维流形, 但是人们每日接触的几何主要是低维的, 比如  $n = 1$  维的曲线,  $n = 2$  维的曲面和  $n = 3$  维的体. 因体的边界仍然是曲面, 所以微分几何的核心研究对象是光滑的曲线和曲面. 对于曲线或曲面的表达有很多种方式<sup>[1]</sup>, 如切平面上的高度函数、局部参数化、Christoffel 记号、微分形式、活动标架、黎曼曲面等. 这些表达方式都是研究曲线和曲面微分性质的有效手段.

曲线映射可以理解为一个皮筋从一条直线到一条曲线发生的拉伸或压缩的变化. 其上的切向量被拉伸或压缩的方式就是曲线的微分. 推广到曲面映射, 则可以理解为一块橡胶片从一个空间到另一个空间发生的弯曲、扭转、拉伸或压缩等的变化. 其上切向量被改变的方式就是曲面沿着该方向的微分.

弧长  $s$ 、曲率  $k$ 、挠率  $\tau$  是刻画曲线形状的几何不变量<sup>[2]</sup>, 它们通过 Frenet 标架确定了空间曲线的形状特征. Darboux 标架关联测地曲率  $k_g$ , 主法曲率  $k_n$  和测地挠率  $\tau_g$ , 刻画了曲线在曲面上的形状特征. Frenet 标架和 Darboux 标架不依赖于坐标系的选取, 是研究曲线和曲面局部微分性质非常重要的工具. 不同的曲率和挠率值决定了曲线在曲面上的弯曲程度和几何性质, 其中非常重要的三种曲线是测地线 ( $k_g = 0$ )、曲率线 ( $\tau_g = 0$ ) 和渐近线 ( $k_n = 0$ ).

### 1.1.1 特殊曲线

#### 测地线

曲面上两点间最短距离的线是测地线<sup>[1]</sup>. 例如, 如果在一个凸曲面上的两点拉伸一个皮筋, 则皮筋一定会沿着曲面上的测地线路径(如图 1.1-左). 平面和球面的测地线都是平面曲线, 这也构成了平面和球面的特征, 即如果曲面上的每条测地线都是平面曲线, 则曲面是平面或球面的一部分.

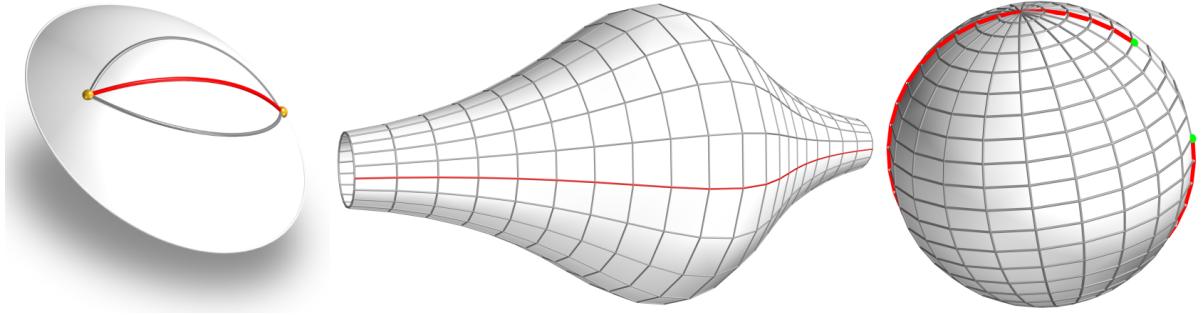


图 1.1: 曲面上测地线.

Fig. 1.1: Geodesics on surfaces.

类似于 Gauss 曲率只依赖于曲面的度量, 测地曲率只依赖于曲线的度量, 是等距变换下的不变量. 测地线的一个简单性质是它具有常速率, 即假设曲线  $\mathbf{r}(t)$  是曲面  $\mathbf{S}$  上的一条测地线, 对速率  $v = \|\mathbf{r}'\|$  进行简单的平方再微分得  $(v^2)' = 2\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0$ . 这样  $\mathbf{r}'' = \mathbf{0}$  是判断欧式几何中曲线  $\mathbf{r}$  是曲面上的测地线的主要特征方法. 一个简单的例子是曲面上过点  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  的直线  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q}$ , 因为满足  $\mathbf{r}'' = \mathbf{0}$  故是一条测地线.

另一个例子是旋转面上的曲线. 假设一条单位速率参数曲线  $\mathbf{r}(u) = (g(u), h(u), 0)$ , 绕  $x$ -轴旋转得到的曲面参数化方程为  $\mathbf{S}(u, v) = (g(u), h(u) \cos v, h(u) \sin v)$ , 满足  $E = \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_u = 1, F = 0, G = \mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_v = h^2 > 0$ . 经计算,  $\mathbf{S}_{uu}$  垂直于曲面切平面, 则说明曲面上所有经线都是测地线 (如图 1.1-中). 也可以通过唯一性证明位于旋转面的同一条经线上的两个点的极小距离即是以这两个点为端点的经线弧长<sup>[3]</sup>. 如图 1.1-中展示的是三次 Agnesi 曲线:  $\mathbf{r}(u) = (2 \tan u, 2 \cos u^2, 2 \cos u^2)$  绕  $x$ -轴旋转得到曲面  $\mathbf{S}(u, v) = (2 \tan u, 2 \cos u^2 \cos v, 2 \cos u^2 \sin v)$ , 这里  $g(u) = 2 \tan u, h(u) = 2 \cos u^2$ .

研究曲面上的测地线, 特别是任意旋转面上的一般的 (非经线或纬线) 测地线的性质, Clairaut 关系式是非常重要的参考. 它表示的是旋转面上的任一光滑测地线满足以下关系式:

$$\mathbf{r}(t) \cos \alpha(t) = \text{const.}, \quad (1.1)$$

其中  $\mathbf{r}(t)$  是测地线到旋转轴的距离,  $\alpha(t)$  测量了测地线和纬线之间的夹角. 实际上该关系式来源于正交曲面上的 Clairaut 参数化的构造. 如果  $\mathbf{S}(u, v)$  是  $u$ -Clairaut 参数化, 曲

线  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{S}(u(t), v(t))$  是单位速度测地线, 则 Clairau 关系式是常数  $\sqrt{G} \cos \alpha$ , 这也说明曲线  $\mathbf{r}$  不能离开曲面上满足  $G \geq \text{const.}^2$  的区域. Clairaut 参数化与测地线密切相关, 如果  $E_v = 0, G_v = 0$ , 则正交曲面片  $\mathbf{S}(u, v)$  是一个  $u$ -Clairaut 参数化. 类似地,  $v$ -Clairaut 参数化的条件为  $E_u = 0, G_u = 0$ . 反之,  $u$ -Clairaut 曲面片的  $u$ -参数线是测地线. 而一般情况下  $v$ -参数线  $\mathbf{S}(u_0, v)$  并不是测地线, 否则, 需要测地方程满足  $G_u(u_0)/E = 0$ , 当且仅当  $G_u(u_0) = 0$ . 特别地, 针对上面的旋转面方程  $G(u) = h(u)^2$ , 在  $u = u_0$  的  $v$ -参数线是测地线, 则要求  $h'(u_0) = 0$ . Clairaut 关系式是判断在离散旋转面上构造测地参数线的质量评价标准, 本文将其应用于离散测地平行坐标系参数网近似旋转面的效果说明上(见 § 3.3.4).

尽管通过曲面上两点间最短弧长定义测地线是找测地线的主要想法, 但是这个定义本身并不严格. 因为不是每条测地线都是面上两点间最短的路径, 比如球面上的两点间的测地线就不止一条. 实际是两条均位于这两点所确定的大圆上的两段弧线, 其中大于半圆长的测地线却并不是面上两点间最短的那条, 如图 1.1-右球面上两绿点之间的大弧线(红色)也是测地线.

这也说明测地线可能是条封闭曲线. 这样, 由于这种直观的定义的不严谨性, 在找寻曲面上的测地线时, 就会使用测地线的数学描述, 即曲面  $\mathbf{S}$  上的测地线  $\mathbf{r}$  满足在线上的每一个点主法向量与曲面在该点的面法向量一致, 也就是说, 线上的每一点处的测地曲率为零. 反之, 如果曲面上的一条曲线上的主法向量与曲面在该点的法向量一致, 或线上所有点处的测地曲率  $k_g = 0$ , 则曲线为曲面的测地线. 显然, 曲面上的任意直线都是曲面的测地线.

## 曲率线

曲面  $\mathbf{S}$  上的曲率线  $\mathbf{r}$  具有如下等价定义<sup>[1]</sup>:

- $\mathbf{r}$  在曲面  $\mathbf{S}$  上某点的切方向为曲线在该点曲率取极大或极小的方向;
- $\mathbf{r}$  具有零测地挠率 ( $\tau_g = 0$ );
- 沿着  $\mathbf{r}$  的面法向量构成的曲面是可展的.

曲面上的曲率线成对出现, 是唯一确定的, 构成过非奇点和非平点的正交曲率线网. 特殊地, 在由双曲点形成的区域, 曲率线网和渐近线网互为对角线. 曲率线是共形映射和 Möbius 变换下的不变量. 对于平面和球面, 其上任何曲线都是曲率线. 其他常见的例子如旋转面上的子午线和平行线, 可展曲面的直母线和其正交轨线, 蒙日曲面的母线和准线, 杜邦环面的圆线等.

## 渐近线

曲面上的渐近线具有零法曲率 ( $k_n = 0$ )<sup>[1]</sup>. 这也就意味着, 曲线每点处的切向量和曲面在该点处的法向量张成的曲面与曲线的密切平面正交, 即等价于密切面和切平面重合. 渐近线只能经过曲面的双曲点或者抛物点, 且过这样的点分别只存在一条或两条渐近线. 最简单的例子是曲面上任意一条直线都是曲面的渐近线. 对于可展曲面, 其上的渐近线只能是直母线.

渐近线与极小曲面密切相关. 极小曲面在每个点处具有零平均曲率, 则对于非平凡极小曲面, 每个点都必须是双曲点. 曲面上曲线切于渐近方向的曲线就是渐近线. 在极小曲面上, 渐近线形成正交曲线网 (如图 1.2-左列), 而且与主法曲率线网是互为对角线的关系. 在每个双曲点处, 曲面的法向量与渐近线的副法向量共线, 故极小曲面的等距面由正交渐近线的副法向量生成 (如图 1.2-中列). 极小曲面一个特殊性质是其 Gauss 映射是共形映射, 即 Gauss 球像也是正交曲线网 (如图 1.2-右列).

从给定的边界线构造光滑的曲面是经典的曲面造型问题, 许多研究关注插值特殊曲线的曲面重构, 大多数被插值的曲线都是测地线或曲率线<sup>[4-14]</sup>. 对插值给定渐近边界四边形的曲面的构造还没有被研究, 而渐近线在建筑上具有潜在的应用价值<sup>[15-17]</sup>. Bayram 等<sup>[18]</sup> 和 Atalay 等<sup>[19]</sup> 受渐近线应用在建筑设计上的启发, 分别构造了过一条渐近线的参数曲面和判定插值一条渐近线的曲面族. 不过这些插值都只是关于至多两条渐近线的研究, 且大多数曲面是直纹面. 如何推广到构造过封闭渐近线的一般光滑曲面是值得研究的几何问题.

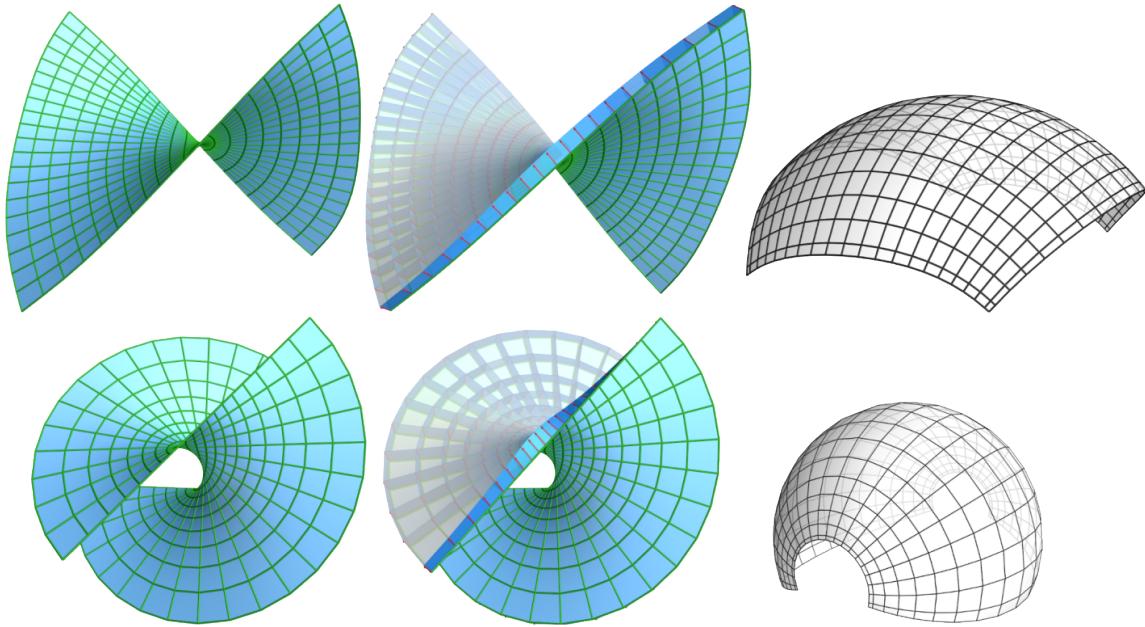


图 1.2: 极小曲面正交渐近线参数网.

Fig. 1.2: Orthogonal asymptotic parametrization on minimal surfaces.

### 1.1.2 特殊曲面

#### 可展曲面

可展曲面是微分几何中的非常重要研究内容, 也是实际应用最广泛的曲面, 只因它们局部等距于平面, 即可以由平面弯曲或扭转而没有拉扯变形得到(如图 1.3-左).

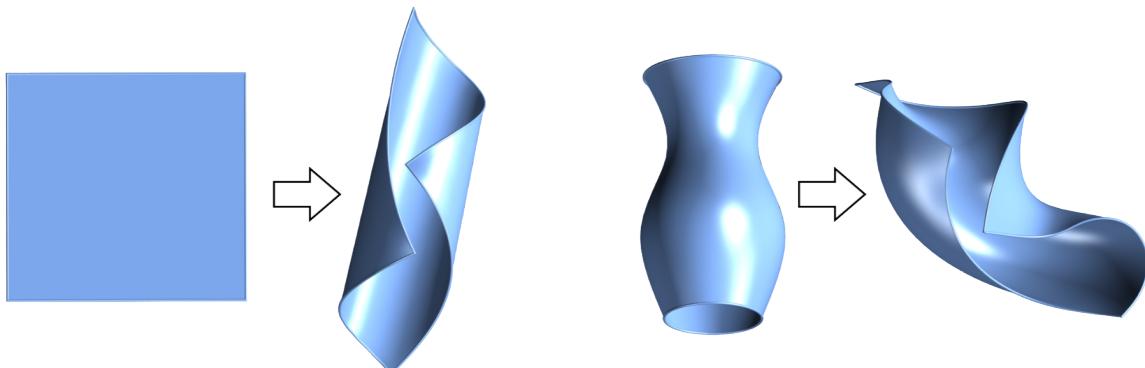


图 1.3: 等距变换.

Fig. 1.3: Isometry deformation.

几何上讲,  $C^2$  光滑的可展曲面具有零 Gauss 曲率<sup>[1]</sup>, 直观的结果是曲面的 Gauss 像是单位球面上的点或者曲线这样至多一维的图像. 本质上可展曲面是直纹面且满足沿着直母线具有相同切平面这一特性的特例, 即当直纹面

$$\mathbf{S}(u, v) = (1 - v)\mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$$

对于所有的  $u$  在点  $\mathbf{S}(u, 0) = \mathbf{a}(u)$  和  $\mathbf{S}(u, 1) = \mathbf{b}(u)$  具有相同切平面时的曲面, 满足

$$d(u) := \det(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}') = 0,$$

这等价于存在辅助的沿着直母线的法向量域  $\mathbf{n}(u)$  使得

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{a}' \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b}' \rangle = 0.$$

这样的直纹面也被称为无挠曲面 (*torsal-free surface*)<sup>[20]</sup>. 因此, 可展曲面的局部是一片平面或无挠曲面.

非平面的可展曲面依据直母线方向的不同有三种不同分类<sup>[1]</sup>: 当直母线平行时是柱面; 当直母线相交于一点时是锥面; 剩余其他情况, 当直母线相交于一条曲线时是切线面. Leopoldseder 等<sup>[21]</sup> 曾用锥样条曲面近似可展曲面. 无挠曲面可以由简单曲线构造, 它可以是曲率线和与之平行的 Bishop 框架构造<sup>[22]</sup>, 也可以由测地线和它的 Frenet 框架构造<sup>[23]</sup>. 对于一般的可展曲面, 可能有无穷多不同的平面或无挠面组成<sup>[20]</sup>.

以上是可展曲面的数学定义, 由于可展曲面高度非线性的代数表达, 在 CAD 系统进行几何造型, 除了通过对边界线进行扫略得到可展曲面外, 其他方法均不易实现构造.

从给定的边界线构造可展曲面属于曲面插值问题, 这一类数学研究是直接利用以上数学表达进行的. 这样得到的可展曲面因边界线的特殊几何性质而具有理论和应用上的价值<sup>[9]</sup>. Aumann<sup>[24,25]</sup> 和 Maekawa 等<sup>[26]</sup> 构造了边界线位于平行平面的样条可展面, 基于 Wang 等<sup>[27]</sup> 参数表示的过给定空间测地线的曲面, Zhao 等<sup>[28,29]</sup> 提出了可展曲面过给定测地线的条件. 随后 Li 等<sup>[6,7]</sup> 找到了可展曲面满足插值测地线或曲率线的等价数学表达.

除以上工作之外, 对可展曲面的数学研究文献也非常丰富. Lang 等<sup>[30]</sup> 提出了任意次的有理 Bézier 曲面可展性的条件. Chu 等<sup>[31]</sup> 讨论了 Bézier 曲面可展性的条件并给出了不

超过三次的显式限制条件。之后 Chu 等<sup>[32]</sup> 继续给出了构造样条曲面可展性的自由度。基于平面四边样条面<sup>[33]</sup>, Pottmann 等<sup>[34]</sup> 通过优化目标函数得到的近似样条可展面等。不同于以上构造方法, 还可以使用对偶表示方法建模, 其中可展面被表示成切平面的包络, 则可以看成空间曲线的射影对偶<sup>[35]</sup>。这一观点被 Pottmann 等<sup>[20,36–38]</sup> 详细讨论; Peterzell<sup>[39]</sup> 用它求解拟合问题, 但是它也存在弊端, 即这种表达不够直接且很难控制奇异点; 可展曲面还被建模成了函数图像, 如 Chen 等<sup>[40]</sup> 试图通过多项式函数构造不含奇异点的柱面, 但是却不容易分析可展面显著的几何性质。Solomon 等<sup>[41]</sup> 探索了从平面区域到可展面等距变形过程中可能出现的形状等。

可展曲面在数学理论和实际应用上都起着非常重要的作用, 一方面因为其理论的丰富性得以广泛应用, 反之又从实际应用的需求中找到其理论研究的必要。这样, 可展曲面成为理论与应用间重要的连接点。探索其几何和物理性质也是有趣的发现。

可展曲面在几何设计和工业制造上随处可见, 比如船壳<sup>[42]</sup> 和服装<sup>[40]</sup> 等。这种曲面可以非常容易获得, 只需要将类似于纸板、金属薄板等平的材料经过不拉扯或撕裂的变形便可得到各种形状。Narain 等<sup>[43]</sup> 使用可展面模拟了现实材料行为; 在增强现实<sup>[44]</sup>、3D 重构<sup>[45]</sup>、网格分割<sup>[46,47]</sup> 等方面, 也能看到可展曲面的应用。

对于低次数光滑拼接的可展曲面, 比如  $C^0, C^1$  光滑拼接的可展曲面研究, 是自 Huffmann<sup>[48]</sup> 的工作之后新的热门研究领域。这些几何见解也促使了更多优美的数学模型的构造<sup>[49–51]</sup>。关于低次数可展面造型的活跃研究是折纸 (origami)。折纸研究本质上一种组合几何学。折纸技术早已突破传统的手工制作, 一张纸在 Lang<sup>[52]</sup> 的计算设计下已经是结合数学和文化的艺术品。折纸研究已经开始应用在艺术设计、建筑结构、医疗设备、机械制造、甚至太空领域如宇宙飞船太阳能板、太空折叠望眼镜<sup>[53]</sup> 等。Huffmann<sup>[48]</sup> 对纸张的局部数学行为的探索启发了后续对光滑折叠纸张的条件的确定<sup>[54]</sup>, 即折痕曲线的内蕴曲率关于临近的可展条带面必须一致才能保证它们在可展状态下兼容的很好。不过关于折纸的几何性质, 更多是  $C^0$  连接的可展曲面。重复进行折叠得到的最终曲面是分片可展的。

计算折纸<sup>[55–57]</sup> 是目前广泛研究的内容。特别地, Tachi<sup>[58–60]</sup> 构造了刚体折纸模拟器,

Mitani<sup>[57]</sup> 使用软件生成了具有旋转对称性质的折纸模型. 在计算折纸研究中占有重要的地位是弯曲折叠 (curve folding)<sup>[61,62]</sup>, 它们通过折叠蚀刻着曲线折痕的平板获得精美的自由型形状 (如图 1.4<sup>[61]</sup>). 艺术家和设计者在创造的过程中只考虑静态的曲曲面, 提出了大

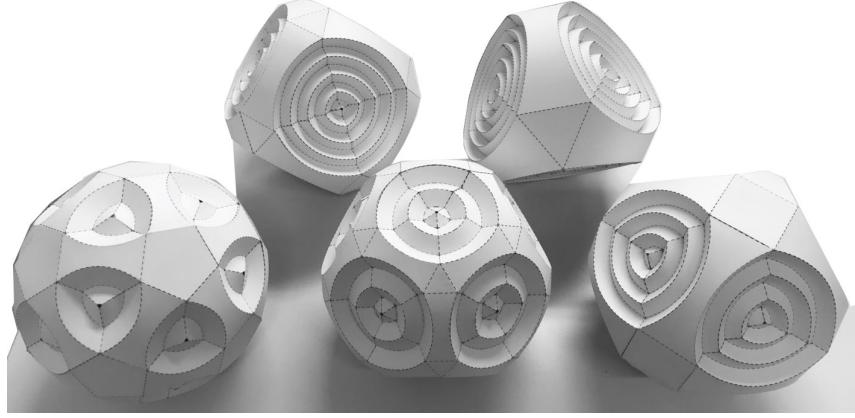


图 1.4: 折纸模型.

Fig. 1.4: Origami models.

量有趣的折叠图案. 但是同时折叠带有多个弯曲折痕的平面达到预想的图案并不容易, Kilian<sup>[63]</sup> 等提出了借助弦网的办法折叠曲面, 极大地简化了创作的过程, 同时折叠动态过程不失设计的美感. 直的折叠纸张折痕是一条直线, 也是曲面的测地线, 弯曲折叠的折痕是纸张上任意的曲线, 后者比前者更为严格. 因为沿着测地线进行的折痕还可以对曲面进行进一步的弯曲, 而通过曲线分割曲面为两部分, 然后对曲线的一侧进行曲面折叠, 局部上就直接决定了另一侧的形状<sup>[64]</sup>. 因此, 弯曲折叠介于微分几何中  $C^2$  连续的可展曲面与组合学中折纸折叠之间, 且与它们密切相关.

### 常平均曲率曲面

常平均曲率曲面 (简称 CMC) 指曲面的平均曲率  $H = (k_1 + k_2)/2$  不随主法曲率  $k_1, k_2$  改变的曲面. 经典 CMC 曲面有 unduloid, trinoid 和 tетranoid 曲面, 如图 1.5. 当平均曲率  $H = 0$  时, CMC 曲面退化为极小曲面.

经典的 Plateau 问题就是构造插值封闭边界面积最小的曲面. 常平均曲率曲面是现实中如肥皂泡、轮胎等膨胀薄膜表面的数学表示, 它们的曲率行为对应由压力差引起的

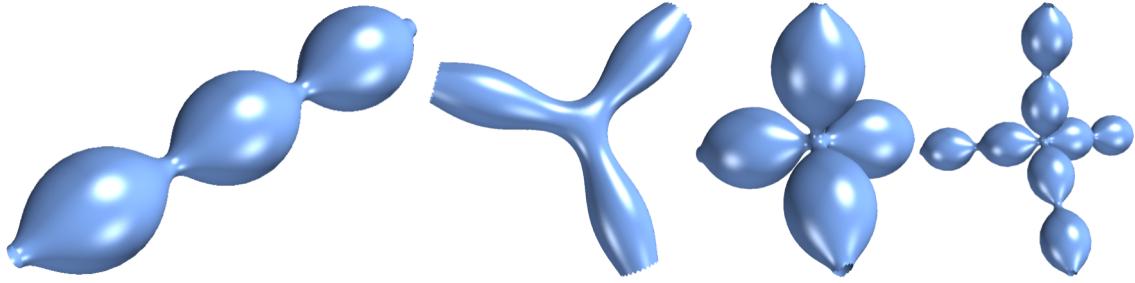


图 1.5: 常平均曲率曲面.

Fig. 1.5: Constant mean curvature surfaces.

静态平衡形状. 极小曲面是一种特殊的常平均曲率曲面, 对应现实中压力差为零的肥皂膜曲面. 最简单的多项式极小曲面是 Enneper 曲面,

$$x = x(u, v) = 3u + 3uv^2 - u^3, y = y(u, v) = v^3 - 3v - 3u^2v, z = z(u, v) = 3(u^2 - v^2),$$

其中等参线  $u, v$  是曲面的渐近线, 其对角线是曲面的主法曲率线, 二者都是三次曲线. 图 1.6 展示了  $u, v$  取不同区间值的一组 Enneper 曲面.

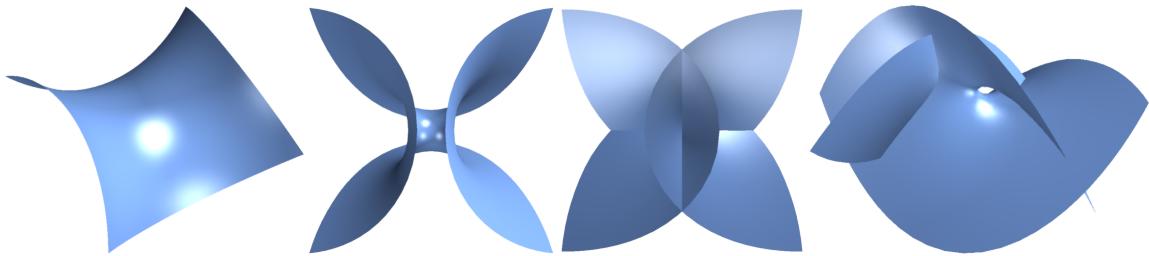


图 1.6: Enneper 曲面.

Fig. 1.6: Enneper surfaces.

类似 Plateau 这类找形问题, 许多推广变形问题在近些年被广泛研究. 比如, 插值封闭或开放的一条或多条曲线构成特殊曲面, 该曲面自然具有过这样的曲线的性质.

### 旋转曲面

旋转曲面是曲线绕固定轴旋转得到的曲面 (如图 1.7). 其具有非平凡的 Killing-域的特征. 该域是黎曼流形上保度量的向量域. 简单来说, 由 Killing-域生成的流形会产生对称性, 沿着 Killing-向量方向移动物体上的每个点之后得到的物体上的距离没有被改变.

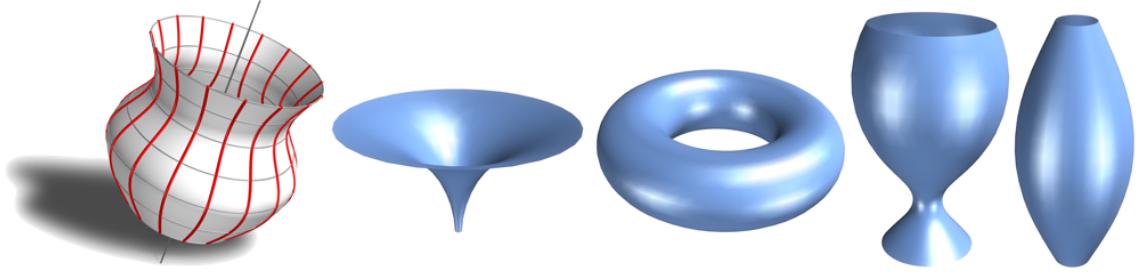


图 1.7: 旋转曲面.

Fig. 1.7: Rotational surface.

例如, 圆上指向逆时针方向且在每个点处都有相同的长度构成的向量域是一个 Killing-向量域, 因为圆上的点沿着这个向量域只是相对于圆而言只是进行了旋转.

等距变换是对曲面进行非拉扯的弯曲变换, 几何上会保证曲面上的任意两点间距不变和任意两线夹角不变. 图 1.3 分别对平面和旋转面进行等距变换得到不同的曲面. Gauss 绝妙定理说明 Gauss 曲率只依赖度量  $E, F, G$ , 是等距变化下的不变量, 对于两个等距面上的任意对应点处的 Gauss 曲率都相同. 一个简单而重要的例子是对直圆柱进行沿着直母线方向的切割和不拉扯的放平展开, 得到的是一个平面, 二者局部上具有相同的几何, 即相同的零 Gauss 曲率. 不过值得注意的是, 结论反之却不一定成立, 即具有相同 Gauss 曲率的两个曲面却可能具有不同的度量也因此并不等距. 例如, 参数曲面  $\mathbf{S}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ (如图 1.8-左) 和参数曲面  $\mathbf{S}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \ln u)$ (如图 1.8-中) 具有相同 Gauss 曲率  $K = -1/(1 + u^2)^2$  和俯视图(如图 1.8-右), 但是二者却具有不同的度量, 不能通过等距变换得到彼此.

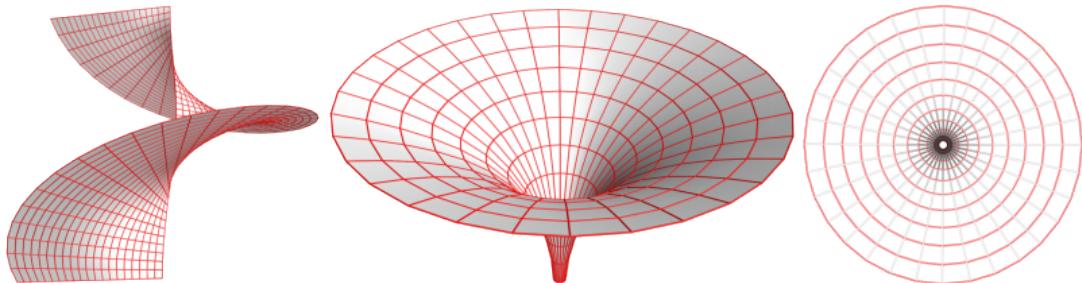


图 1.8: 具有相同 Gauss 曲率却不等距的两个曲面.

Fig. 1.8: Two surfaces with same  $K$  but not isometric to each other.

除了 Gauss 曲率这个等距不变量外, 测地线也是等距变换下的不变量, 具有等距变换前后都是所在平面的测地线的特性. 对于平均曲率, 等距变换前后却不一定保持不变, 仍以直圆柱和其等距平面为例, 平面的平均曲率是零, 但是直圆柱的平均曲率是平行圆半径的倒数. 说明平均曲率并不是等距不变量.

微分几何注重理论分析和性质研究, 对曲线或曲面的代数表达具有很强的依赖性, 一旦形式确定, 则得到的曲线和曲面就具有唯一性. 计算几何中的 Bézier、B 样条、NURBS 都是基于基函数或权因子确定的曲线或曲面的代数表达, 它们通过控制顶点或节点向量在几何形态上有直观的体现. 幸运的是, 调节曲线或曲面的次数、控制顶点坐标、节点向量等可以实现对曲线或曲面的可视化交互造型. 但是直接操作曲线或曲面上一点或局部片段进行自由构造仍具有很强的局限性和复杂性. 离散微分几何利用局部性质保证了很好的全局特征. 没有唯一固定的表达结构, 在交互探索方面有很大的可能性. 它突破了传统几何对形式的限制要求, 不拘泥于表达和坐标系的建立更在乎多边形或网格的几何特征, 是自由造型和几何处理的强有力工具.

几何处理的方法并没有和曲面的物理表达密切相连, 比如纸板或金属板的变形. 它们主要考虑的是光滑可展曲面的离散化几何结构, 这些理论的基础就是离散可展曲面模型. 离散几何理论为分析描述和计算提供桥梁. 对离散微分几何的研究也充满实际意义.

## 1.2 离散微分几何简介

早在 1937 年, Bell<sup>[65]</sup> 提到当今数学的主要任务是融合连续和离散为综合的数学并消除二者的模糊之处. 这一观点在几何研究中得以体现. 尽管经典微分几何强调着光滑连续的条件, 但是人们在想象和应用其中的几何理论时, 仍然是离散化的形式.

离散微分几何恰好出现在微分几何和离散几何交界处, 是经典理论的推广. 它研究光滑几何的离散等价性质, 为处理离散曲面表示提供了具有吸引力的工具. 近年来, 离散微分几何在几何建模中越来越受到重视, 被广泛应用在很多领域, 如计算机生物、计算机图形学、工业设计、建筑几何、和数字几何加工等.

离散微分几何是传统微分几何的离散化形式. Bobenko 和 Suris<sup>[66]</sup> 整体而详细地介绍了该理论. 它考虑离散物体的各个方面, 如多边形、多面体面、非多面体网格等, 在纯

数学、物理、计算机图形学、建筑等领域有一系列的应用。

离散微分几何不只是单纯地对光滑物体的离散近似，而是尽可能忠实于微分几何本身。不同于传统数值分析为了消除极限细分后的近似误差，离散微分几何更强调“仿真”的概念，即无论网格元素的大小而精准地保持几何系统的核心性质。如同模拟机械系统的算法为了精准地保证物理不变量（如完全能量函数），离散几何的保结构模型旨在精准地保持几何不变量（如全局曲率）。

总之，将现有成熟经典的光滑理论转化为离散定义应该能够充分灵活地探索大量的形状变化，同时兼容光滑曲面的重要性质。优良的离散化几何表示具有的特性应该有如下几点：

- 要保持几何结构，忠实其表达的几何意义，比如其对应的某种变化下的几何不变量等；
- 尽量收敛于光滑的情况，即在保有离散几何性质的同时，通过细分、取极限得到的是光滑的性质；
- 无论是表达还是构造都尽可能简单。

对离散可展曲面的定义主要是基于正则四边网（如图 1.9），但是更多是考虑局部条件，因为要求满足全局四边网曲面不能轻易地改变其几何形状。平面四边条带面是光滑

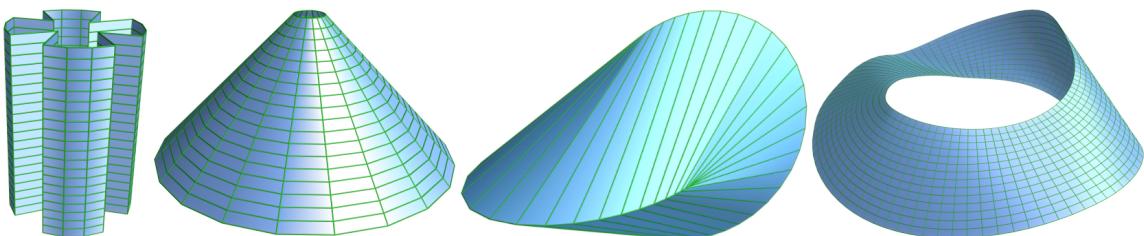


图 1.9：离散可展曲面。

Fig. 1.9: Discrete developable surfaces.

可展曲面的自然的离散化对应，它们能等距地变平且有很好的直母线向量<sup>[33]</sup>，且由它们建立的无挠曲面<sup>[67]</sup>可以看成是离散可展共轭网<sup>[64]</sup>，细分这些四边网的极限就是光滑可

展曲面. Wunderlich<sup>[68]</sup> 通过使用测地线参数化的共轭网建立离散 Voss 曲面, 受此启发, Rabinovich 等<sup>[69-71]</sup> 去掉共轭条件转而使用正交测地网建立了离散可展曲面. 该网格集中的对象也是四边网格. 它简单、局部、不需要指定直母线方向, 特别地, 还能构造一系列独立于无挠面或平面的可展曲面的等距变形. 其形状空间内的连续变换允许任意弯曲、拉扯、切割、弯曲折叠、以及细分等编辑操作<sup>[70]</sup>, 丰富了离散可展曲面的灵活变形.

除了使用四边网格构造离散可展曲面外<sup>[72]</sup>, 应用三角网格构造离散可展曲面的研究也不在少数. 例如 Mitani 等<sup>[57]</sup> 用可行的切割和形状展开计算三角网; Wang 等<sup>[27]</sup> 为了构造一个可展曲面变形三角网; Frey<sup>[73]</sup> 用三角网构造 buckled 曲面等.

若从离散三角网格局部格点星考虑, 一个看似自然的定义是角误差 (angle defect) 为零或消失的格点 Gauss 向量. 但是这些高度不规则的局部几何结构很难定义直母线. 同时这只是一个离散可变平 (discrete flattenable) 定义而全局并非是离散可展的, 因此只能满足局部是平的, 不能保证法向量收敛. 全局网格还可能存在噪点, 例如褶皱的纸张<sup>[74]</sup>(如图 1.10).

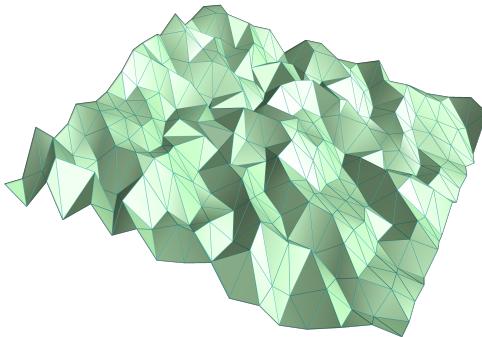


图 1.10: 褶皱的纸张是离散可变平的但不是离散可展的.

Fig. 1.10: Crumpled paper is discrete flattenable but not developable.

一个有效的办法是采用含有铰链 (*hinge*) 的局部格点星结构的三角网格<sup>[75]</sup>. 在每个格点星处两个平面相交于一条直线段, 即为铰链线, 线两侧的平面各含有三个共面角, 两个面法向量共面或者说它们的外积与铰链线共线. 该三角网格化的离散可展曲面既满足局部可变平条件, 又自然地指定了直母线(即铰链线)方向. 这种用简单的几何设定建立

了可展性的数学和计算基础, 可以有效地应用到分片可展近似模型上.

基于离散可展曲面相同的观点, 还可以考虑曲面的半离散可展性<sup>[34]</sup>. 半离散曲面是从一个离散光滑的参数到  $\mathbb{R}^3$  中映射,

$$\begin{aligned} f : Z \times \mathbb{R} \supset U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (k, t) &\longrightarrow f(k, t). \end{aligned}$$

可见一个半离散曲面包含曲面条带面 (如图 1.11), 这些条带通过用直线段 (灰色) 连接相邻光滑曲线 (红色) 上的对应点得到.

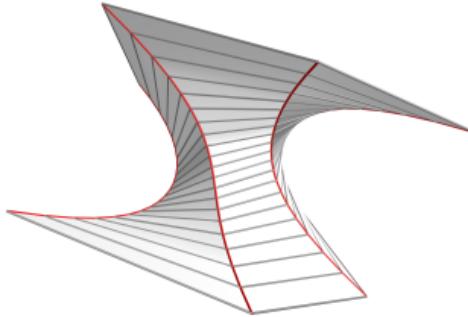


图 1.11: 半离散曲面.

Fig. 1.11: Semi-discrete surface.

半离散曲面是离散微分几何的一部分, 一方面从曲线变换的观点它可以看成曲线的离散演化或多边形的光滑演化, 另一方面, 是对一系列合并的条带面的近似或覆盖. 常见的半离散曲面包含半离散常平均曲率曲面<sup>[76]</sup>, 半离散等温面<sup>[77]</sup> 等, 其实际应用主要为推广后者理论概念到制造现实世界的建筑物体的自由型曲面上<sup>[78]</sup>.

光滑可展曲面是  $(1 \times m)$  次张量积样条曲面, 可被视为半离散曲面<sup>[76]</sup>, 即由直线沿着简单的曲线不连续的正交扫过的轨迹. 据此, 许多对可展曲面的变形处理都是通过显示表达其直母线<sup>[33,79]</sup>. 例如, 通过连接直纹面的两条 Bézier 曲线满足一族二次方程保证沿着直母线的常法向量构造可展曲面<sup>[67]</sup>. 还可以通过利用简单的直母线扫过简单的测地线生成无挠曲面<sup>[79]</sup>. 沿着多个直折痕近似光滑可展曲面进行折叠是基于折纸编辑系统的办法, 也是依赖于直母线的表示<sup>[80]</sup>.

### 1.3 建筑几何简介

建筑几何<sup>[81,82]</sup>是近些年新兴的一个研究领域,它来源于当代建筑设计中与几何复杂结构相关联的几何问题。它结合了应用几何和建筑,着眼于设计、分析、制造过程。几何计算涵盖许多分支,建筑也涉及到很多交叉领域,建筑几何恰好是密切联系几何和建筑的新兴领域。几何是建筑设计的核心,从初始的找形阶段到实际建造,它无处不在。离散几何是精确的几何定义和实际图形表示的主要媒介。现代计算技术为真实的几何表达带来变革,突破传统几何方法呈现几何形状的局限性。现代建筑充分利用急剧增长的设计可能性,挑战工程和设计上的规模和建造技术,而扎实的几何理解能有效的处理这些挑战问题。

2005 年左右,几何处理研究人员明显地发现自由形状建筑设计包含许多几何本质的问题有待解决,而且许多优化问题也需要几何解释。建筑几何因涉及图形和几何处理而产生了有趣的新问题和新目标。其中数值优化作用很大。建筑几何挑战着数字时代的建筑行为,它受微分几何、拓扑、分形几何等领域影响。建筑几何的研究涉及到许多领域,对数学家而言,它与离散微分几何关系密切,特别是从积分系统角度来看。另外,新的应用实现了许多过去建立的概念。总之,建筑几何对理论研究发展方向和实际建筑行为都有意义非凡的作用,是值得研究的领域。

在现实世界中,可展曲面随处可见,它们经常是由平薄的板材弯曲得到,这使得它们在制造<sup>[42]</sup>、建筑<sup>[83]</sup>和艺术<sup>[49]</sup>上获得了极大的关注度。有了这些可见的现实需求,设计自由型可展曲面就成了计算机图形学、计算机辅助设计和计算折纸等领域上近几十年热门的研究话题。早期特别重要的代表建筑师是 Frank O.Gehry<sup>[83]</sup>,他使用 CAGD 技术基于物理模型进行数字重构,其众所周知的建筑风格是使用金属材料做近似可展曲面的造型(如图 1.12)。

自由形状是当代建筑设计的主要趋势之一。随着技术的发展,越来越多的地标性建筑拥有复杂几何特征的表面和结构。如格拉茨美术馆创造了类生物形状自由曲面(如图 1.13-左),解构主义大师——扎哈·哈迪德的一系列建筑作品,如位于因斯布鲁克的缆车站(如图 1.13-中),以及布拉格的跳舞楼(如图 1.13-右)等。



图 1.12: Frank Gehry 代表建筑作品.

Fig. 1.12: Typical architecture by Frank Gehry.



图 1.13: 自由建筑表面.

Fig. 1.13: Freeform architectural skin surfaces.

建筑上利用现有工具进行自由曲面造型在实际建造上是个挑战. 必须将表皮分解成可制造的面板, 提供适当的支撑结构, 满足结构约束, 最重要的是确保成本不会过高. 实际上许多非常重要的问题本质在于几何. 因此, 建筑应用引起了几何建模和几何处理的注意. 建筑几何的目的是从几何设计与计算机图形学的角度来看这个领域, 重点不在由工程师以巧妙的方式运用最先进的技术实现的设计, 而是超越当前标准工具的研究贡献.

建筑几何的根基是微分几何和计算几何. 解决建筑几何问题的两个最重要的研究方法是离散微分几何和数值优化. 从离散微分几何角度处理一个问题的关键是如何成功地初始化和求解数值优化问题. 建筑上, 合理化 (Rationalization) 是用适合建造的曲面近似理想设计曲面<sup>[81]</sup>. 通常合理化比曲面的 3D 建模更难. 能自动生成可建造结构的数字模型比基于合理化的流行方法可能更有效, 但是后者包含更多未解的问题, 同时也超过了建筑范围. 因为弯曲的曲面需要更高的成本, 所以用钢化玻璃实现的自由形状的表面通常是由直线结构或者平板构成. 取得如平面面的几何结构需要用到全局优化. 各种数值

方法被使用求解此类问题,如约束极小、非线性最小二乘法、拉格朗日法等.

实现一个大的、完全光滑的双弯曲自由曲面造型是个挑战,如果简化建筑表面形状,用具有特殊几何性质的非完全自由的结构建造,如合理规划的平面四边网(Planar Quads,PQ),则问题会简单许多.这自然而然就离不开网格模型,数学上,就是对离散微分几何的理解和应用.十年前PQ的研究<sup>[33,84-87]</sup>标志着受工程和建筑引发的问题研究的起点,同时又促进离散微分几何的发展.

实现建筑自由几何的主要问题是建造元素的多元化.不过也存在各种获取重复元素的方式<sup>[88]</sup>.当用嵌板构造时,误差相对比较大可以允许重复的嵌板出现.如果将结构进行切割分片考虑,大多数边、角、大小等都是不同的元素.优化具有重复性元素的自由形式是一项艰巨的任务,甚至有时是不可能的.但有时某些结构是存在相同点和相似点的.即使不同的元素可能不是全等的,但却可能是由相同的模具或机械配置生产出来的,结合几何表示和构造过程能帮助我们分析哪些部分具有、并如何具有重复性结构,为初期精确分析建筑结构和新的模型的确立提供了思想指导,从而简化构造过程,节省成本.据我们所知,设计的内蕴重复性质是简化建筑自由型表皮构造的新的研究方向.常见的重复性元素包括节点、梁和框架、面板等(如图1.14).

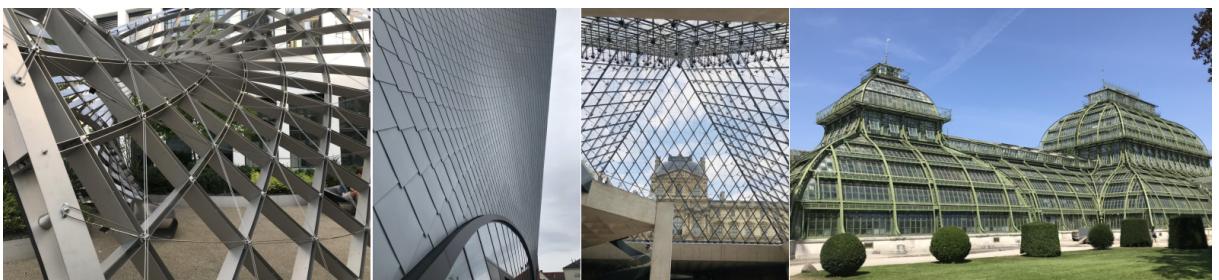


图 1.14: 具有重复元素的建筑结构.

Fig. 1.14: Architectural structures with repetitive parameters.

## 1.4 本文主要工作

本文的工作主要受建筑上的应用的启发,旨在构造具有不同几何性质的自由曲面,这些曲面结构有的是连续的,有的是离散的,最终目的都是为了指导实际建筑上的应用.

在第二章, 本文推广曲面插值测地线或曲率线的几何问题, 实现插值渐近四边形的曲面构造. 分别构造低次数的张量积 Bézier 曲面 (§ 2.3)、有理 Bézier 曲面 (§ 2.4) 和 B 样条曲面 (§ 2.5), 使其插值于给定角点数据下的渐近四边形曲线, 该构造兼容工业 CAD 系统. 主要构造过程包括以下几个步骤: 首先分析一片以渐近线为边界的曲面的局部性质作为渐近四边形的判定条件; 然后通过极小化限制能量函数, 对给定的初始边界数据优化确定剩余自由度而获得渐近四边形; 最后优化薄板样条能量函数获得光滑曲面. 本项研究除了具有数学意义之外, 应用于填充给定边界渐近线构造防水光滑曲面的构造也具有建造上的指导意义.

在第三章, 本文基于网格的局部性质, 研究不同离散网格的几何性质在建筑上的应用.

在 § 3.2, 本文引入离散常平均曲率曲面, 该网格是正交网, 关于主法曲率线网对称, 具有指定常半径的球面格点星, 即每个格点处的相邻五个点共球. 当球面半径无穷大, 五点共平面时, 离散常平均曲率曲面退化为极小曲面, 此时参数线网是渐近网 (§ 3.6). 沿着网格的法向量可以生成离散可展曲面. 这样的离散网格结构为现实网壳结构的建立创造了条件. 依据格点星的情况, 可以使用两族平的钢薄片彼此正交地垂直安放到该离散参数面上, 其中离散常平均曲率曲面对应的是圆弧状的薄片边线, 而离散极小曲面对应的是平直的矩形薄片边线. 这些弯曲的或直的边线是可展支撑结构的测地线. “渐近网壳结构” 就是应用该方法建造的实例. 其设计上存在的大量重复元素为加工、运输、集装、制造提供了便利.

在 § 3.3, 本文引入并研究一种新型的四边网格——离散测地平行坐标系参数网. 它离散化了一种特殊的参数曲面  $f(u, v)$ , 其中一族等参线  $v = \text{const.}$  是测地线, 另一族等参线  $u = \text{const.}$  是其正交轨线. 测地平行坐标系分割曲面为一组条带面, 控制条带宽度可以有效的获得具有常宽度的条带或全等的条带面. 该网格推广了用两族正交测地线刻画的离散可展曲面的研究<sup>[69–71]</sup>. 不同于他们着重构建全局可展曲面, 本文关注测地线族的构造, 这些测地线对后续指导测地网壳结构和测地条带宽度起着重要的作用, 不仅可以实现可展曲面建模, 还可以构建等距于旋转面的曲面. 在建筑应用上, 这种旋转条带面结

构能被应用在测地网壳、包层和嵌板等.

在 § 3.4, 本文探索从局部格点星角度构造的一般测地线网. 具有常距离的测地网面是可展曲面. 推广该离散正交测地网 (§ 3.4.1) 构造离散等角测地网 (§ 3.4.2), 同样也是离散可展曲面. 后者兼具测地线网和可展曲面的特性, 在网格样式上具有更强的操控性, 在类 Frank Gehry 的建筑可展曲表面的构造上有更多的选择性.

在 § 3.5, 本文实现离散曲率网模型构造, 如圆网 (§ 3.5.1)、锥网 (§ 3.5.2)、等温网 (§ 3.5.3)、蒙日网 (§ 3.5.4). 这些离散网格和锥面联系在一起, 在界面上具有美观性, 它们反映了曲面的基本形状特征, 所以从美学角度很受设计者的欢迎. 建筑上, 主法曲率线可以引导力流从而安放梁柱作为表面的支撑结构.

在 § 3.6, 本文利用平面格点星四边网构成渐近线参数网. 特殊地, 正交渐近线参数网构成极小曲面, 这也是离散常平均曲率曲面 (§ 3.2) 的退化形式. 推广到等角渐近线参数网, 得到具有常主法曲率比的离散 Weingarten 曲面. 其存在的实际应用价值源于常主法曲率比的曲面是具有单参数的二阶曲面元, 这在现实建造中可以使用较少的模具构造建筑表皮, 从而实现节省成本的目的.

在 § 3.7, 介绍本文利用 Guided Projection 算法设计离散网的计算信息.

第四章主要研究在第三章基础上构造的离散网格的建筑应用.

在 § 4.2, 充分利用算法在交互变形上的优势, 本文研究自由曲面结构. 自由曲面造型是建筑几何的研究方向, 满足几何和实际意义的网格交互变形是设计的主要手段. 几何模型的交互设计更注重对几何形状的探索, 不局限于曲面真实对应的代数表达, 也没有必要事先知道预构造的曲面结构的精确方程. 这种灵活性的探索, 只依赖于几何性质满足的限制条件, 最终的结构也受到交互者的构造意图、美学和空间感知的影响. 采用交互式的设定减少对曲面可能的变形的限制. 从设计者的角度来说, 更直观的方式是采用曲面上局部点作为把手进行编辑变形, 而不是全局上的变形.

在 § 4.3, 基于离散的 Jacobi 微分方程, 控制常宽度的条带面构造近似可展曲面. 测地条带模型具有防水组成部分的可展曲面条, 它们的平面展开几乎是直的. 实现用可展木条包层建筑的渲染构造.

在 § 4.4, 对离散测地平行坐标系参数网, 本文应用等宽度条带面构造等距于旋转面的曲面. 条面的宽度一般来说不是常数, 所以不同的条面会有不同的展开面. 不过, 仍然存在曲面的所有展开条面是彼此全等的. 其中一个例子是旋转条面模型, 首先沿着正则排列的平面进行过旋转轴的切割, 然后连接柱状条面构成的连续切片. 这种旋转条带面模型的各式等距变形本质上都只与被分解的一个平的条面具有相同的性质. 等距于旋转面具有显著的内蕴对称性, 它极大意义上扩展了用可弯曲材料如金属板等进行建筑表皮嵌板的可能性. 为了有效地节省成本的同时探索自由建筑表面, 本文已经不局限于只使用可展面进行构造了, 而是能从旋转面的一部分构成的一些模型生成双弯曲的面板. 本文应用离散测地平行坐标系参数面能构造类 Frank Gehry 风格的自由建筑表面 (如渲染效果图 1.15), 金属材质的表皮不是可展曲面, 而是由四个等距于同一个旋转面的曲面片组合而成.

在 § 4.5, 本文继续研究离散测地平行坐标系参数网的测地性质. 利用离散测地平行坐标系的测地线族特性对任意自由曲面近似, 实现曲面在整体上的离散测地坐标参数化. 提取测地线族构造测地网壳结构. 使用细长直的平木条进行实际构造.

在第五章, 总结本文主要工作、研究创新点和未来在面向建筑设计方面值得的研究内容.



图 1.15: 类 Gehry 自由建筑表面.

Fig. 1.15: Freeform architectural skin like Frank Gehry's.

## 2 插值渐近四边形的曲面构造

### 2.1 研究背景

插值给定曲线为其边界线的曲面构造一直是 CAGD 和 CAD 研究的重要内容之一<sup>[9]</sup>. 目前插值给定曲线为其测地线或曲率线这样特殊曲线的曲面构造被广泛研究. 例如, Wang 等<sup>[4]</sup> 过一条给定的空间曲线作为生成曲面的测地线; Li 等<sup>[6]</sup> 构造过给定边界线为其曲率线的曲面; Kasap 等<sup>[89]</sup> 和 Li 等<sup>[8]</sup> 分别推广参数曲面到一般的曲面族插值测地线和曲率线; Li 等设计过 Bézier 测地线<sup>[5]</sup> 和曲率线<sup>[7]</sup> 的可展曲面. 如上工作中, 这些给定的被插值曲线数最多有两条. Farouki 等<sup>[11]</sup> 推广如上的结论, 对曲面插值给定的封闭边界线的构造提出了充分必要条件. 随后, Farouki 等利用该判定条件分别来构造四边 Coons 曲面插值曲率边界线<sup>[90]</sup>、三角 Coons 曲面插值测地边界线<sup>[12]</sup> 和四边 Bézier 曲面片插值 Bézier 测地边界线<sup>[10]</sup>. 为了避免 Bézier 曲面出现的高次数的情况<sup>[10]</sup>, Yang 和 Wang 构造低次张量积 Bézier 曲面<sup>[14]</sup> 和 B 样条曲面<sup>[13]</sup> 分别插值 Bézier 和 B 样条测地四边形.

除上述测地线和曲率线外, 渐近线也是微分几何中曲面上的一类重要曲线. 目前, 对于渐近线的研究主要集中在如何计算或获得曲面上的渐近线<sup>[91]</sup>. 理论上, 如何构造曲面使其插值给定的曲线为其渐近线也是一项比较有意义的工作. Bayram 等<sup>[18]</sup> 基于建筑应用<sup>[15]</sup> 构造了插值渐近线的参数曲面. Liu 等<sup>[92]</sup> 推广了 Bayram 等<sup>[18]</sup> 和 Wang 等<sup>[4]</sup> 的工作, 设计一类过给定渐近线的可展曲面. Atalay 等<sup>[19]</sup> 利用 Cartan 标架给出一种判定过渐近线的曲面族的方法. 上述研究中的渐近线都不是封闭的, 因此理论上有必要研究构造插值封闭渐近线为其边界曲线的曲面.

渐近线除了在理论研究有兴趣外, 还广泛应用于数值优化<sup>[91]</sup>、机械<sup>[93]</sup>、天文<sup>[94]</sup>, 在建筑<sup>[15]</sup> 领域也存在潜在的应用价值.

建筑几何指出实现复杂自由结构的挑战, 探索了直纹面的技术优势. 一个典型的例子是有着负 Gauss 曲率的双曲抛物面. 实际上, 渐近线也只存在于这种负弯曲的曲面上, 且在反背曲面区域上的每个点处有两个渐近方向. 基于对这些渐近线的分析, 这个局部马鞍面的区域能被直母线近似表示. Flöry 和 Pottmann<sup>[15]</sup> 从给定的点云估计渐近方向推

导生产建造的嵌板的界面且沿着渐近线构造初始直纹面。除了分析渐近线或使用大的直纹曲面片或多个条带面插值一些点作为渐近边界线外, 实际应用中是否存在其他一般的曲面也是一个值得关注的问题。

实际上, 因为渐近线是唯一一种结合直可展和沿着双弯曲曲面形成正交节点这两个优点的曲线, 它在建筑设计上显示出了极大的优势。一个典型的实例是由 Schling 等人<sup>[16,88]</sup> 在 TU Munich 校园内建造的渐近网壳结构, 如图 2.1。



图 2.1: INSIDE\OUT 亭子。

Fig. 2.1: INSIDE\OUT pavilion.

可展的弯曲支撑结构垂直于虚拟的参考曲面并与其相交于参考曲面的渐近线, 它们沿着渐近线构成两族正交的网壳。因正交的渐近线参数网是极小曲面网, 故弯曲的可展曲面(钢薄片)过极小曲面在渐近线处的法向量<sup>[16]</sup>。在图 2.1 中的自由结构, 梁柱作为底层曲面的渐近线, 和可展的薄片一起展示了好的美学效果。如何推广成防水的结构表面, 也就是使用自由曲面作为格栏的覆盖是建筑几何中的常见问题。这里, 如果使用底层曲面片填充网壳结构, 则每个曲面片都以它本身的渐近线为边界线。这个局部的逆向重构就是在获取渐近网防水表面结构。这样, 就提出了一个基本的几何问题, 即如何构造拥有给

定曲线作为它渐近边界线的曲面.

本章节主要解决的问题是如何构造自由曲面填充给定渐近线作为其边界线的问题. 具体实现主要包括三个步骤: 首先确定构造渐近边界线的等价条件, 其次对给定的角点数据, 构造光滑渐近边界线, 最后建立插值该边界线的光滑曲面. 考虑工业设计的需求, 这里分别使用 Bézier、有理 Bézier 与 B 样条曲线构造渐近线边界线, 其对应的张量积曲面构造插值的曲面, 该建模过程兼容 CAD 系统. 曲线和曲面的构造并不是通过求唯一解确定, 而是在满足限定条件下, 通过对剩余自由度进行优化获得的优化结果, 因而存在一定的灵活性.

为了构造曲面插值四边形曲线作为其边界渐近线, 本章首先分析局部角点和全局边界兼容条件使边界线为插值曲面的渐近线 (§ 2.2), 随后分别设计 5 次 Bézier 渐近四边形 (§ 2.3)、 $n$  次有理 Bézier 渐近四边形 (§ 2.4) 和 3 次 B 样条渐近四边形 (§ 2.5) 及其对应的张量积插值曲面.

## 2.2 渐近四边形的判定条件

当边界四边形曲线是曲面的渐近线时, 我们称这样的四边形为渐近四边形. 为了构造渐近四边形, 本节首先分析渐近线的几何性质 (§ 2.2.1), 然后推广两条相交渐近线的构成条件 (§ 2.2.2) 到四条首尾相接的四边形所满足的局部和兼容插值曲面的全局条件 (§ 2.2.3).

### 2.2.1 渐近线

一条曲线称为是正则的, 如果在它上每一点处存在切线. 在接下来的讨论中, 假定所有的曲线都是正则曲线,  $\dot{\mathbf{r}}(s)$  和  $\mathbf{r}'(t)$  分别表示曲线  $\mathbf{r}$  关于弧长参数  $s$  和任意参数  $t$  的导数. 据此, 可以定义曲线和曲线在曲面上的局部 *Frenet* 和 *Darboux* 坐标系<sup>[1]</sup>.

*Frenet* 标架  $(\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$  由不含拐点 ( $\ddot{\mathbf{r}}(s) \neq 0$ ) 的空间曲线  $\mathbf{r}(s)$  在某点处的单位切向量  $\mathbf{e}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s)$ , 主法向量  $\mathbf{n}(s) = \ddot{\mathbf{r}}(s)/\|\ddot{\mathbf{r}}(s)\|$  和副法向量  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{e}(s) \times \mathbf{n}(s)$  构成. 它

满足如下关系式:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) \\ \dot{\mathbf{b}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix},$$

其中  $k(s) = \|\ddot{\mathbf{r}}(s)\|$  是曲率,  $\tau(s) = \frac{\det(\dot{\mathbf{r}}(s), \ddot{\mathbf{r}}(s), \dot{\mathbf{r}}(s))}{\|\ddot{\mathbf{r}}(s)\|^2}$  是挠率. 过该点且分别以  $\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$  为法向量的平面称为法平面、丛切平面和密切平面.

Darboux 标架  $(\mathbf{e}(s), \mathbf{h}(s), \mathbf{N}(s))$  是定义在曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  上的一条曲线在某点处的局部坐标系, 由曲线的单位切向量  $\mathbf{e}(s)$ , 向量  $\mathbf{h}(s) = \mathbf{N}(s) \times \mathbf{e}(s)$  和曲面的单位法向量  $\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{R}_u(u, v) \times \mathbf{R}_v(u, v)}{\|\mathbf{R}_u(u, v) \times \mathbf{R}_v(u, v)\|}$  定义. 它们与法曲率  $k_n(s) = \dot{\mathbf{e}}(s) \cdot \mathbf{N}(s)$ , 测地曲率  $k_g(s) = \dot{\mathbf{e}}(s) \cdot \mathbf{h}(s)$ , 和测地挠率  $\tau_g(s) = \dot{\mathbf{N}}(s) \cdot \mathbf{h}(s)$  一起满足

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}(s) \\ \dot{\mathbf{h}}(s) \\ \dot{\mathbf{N}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g(s) & k_n(s) \\ -k_g(s) & 0 & -\tau_g(s) \\ -k_n(s) & \tau_g(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{h}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{pmatrix}.$$

给定一般参数曲线  $\mathbf{r}: t \rightarrow \mathbf{r}(t)$ , 有类似弧长参数定义的局部 Frenet 和 Darboux 标架. Frenet 标架  $(\mathbf{e}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$  满足

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'(t) \\ \mathbf{n}'(t) \\ \mathbf{b}'(t) \end{pmatrix} = \|\mathbf{r}'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k(t) & 0 \\ -k(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix},$$

其中  $\mathbf{e}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ ,  $\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}$ ,  $\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{e}(t)$ . 曲线  $\mathbf{r}(t)$  的曲率  $k(t)$  和挠率  $\tau(t)$  是

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}. \quad (2.1)$$

同时, 在曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  曲线  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(u(t), v(t))$  在一点处的 Darboux 标架  $(\mathbf{e}(t), \mathbf{h}(t), \mathbf{N}(t))$  满足

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'(t) \\ \mathbf{h}'(t) \\ \mathbf{N}'(t) \end{pmatrix} = \|u' \mathbf{R}_u + v' \mathbf{R}_v\| \begin{pmatrix} 0 & k_g(t) & k_n(t) \\ -k_g(t) & 0 & -\tau_g(t) \\ -k_n(t) & \tau_g(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{N}(t) \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{e} = \frac{u' \mathbf{R}_u + v' \mathbf{R}_v}{\|u' \mathbf{R}_u + v' \mathbf{R}_v\|}, \mathbf{h} = \frac{\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v}{\|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\|} \times \mathbf{e}, \mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v}{\|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\|},$$

$$k_n(t) = \frac{\mathbf{e}'(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|u' \mathbf{R}_u + v' \mathbf{R}_v\|}, k_g(t) = \frac{\mathbf{e}'(t) \cdot \mathbf{h}(t)}{\|u' \mathbf{R}_u + v' \mathbf{R}_v\|}, \tau_g(t) = \frac{\mathbf{N}'(t) \cdot \mathbf{h}(t)}{\|u' \mathbf{R}_u + v' \mathbf{R}_v\|}.$$

**定义 1** [1] 曲线的渐近方向是沿着曲面上的曲线法曲率为零的方向. 如果在曲线  $\mathbf{r}$  上每一点处的切向量  $\mathbf{e}$  都是曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  的渐近方向, 则曲线是曲面的渐近线.

因此, 曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  上的曲线  $\mathbf{r}$  是渐近线, 则其上每一点法曲率  $k_n$  恒等于零.

**引理 1** [2] 曲面上一条曲线是其渐近线, 当且仅当曲线是直线, 或其上每一点处的密切平面都是曲面在该点的切平面.

这里考虑曲线  $\mathbf{r}$  为非直线的情况. 曲线曲率  $k$ , 法曲率  $k_n$  和测地曲率  $k_g$  满足  $k^2 = k_g^2 + k_n^2$ , 则  $k = \sigma k_g$ ,  $\sigma = \pm 1$ . 由 Frenet 和 Darboux 标架关系, 有对弧长参数和任意参数均满足的关系  $\mathbf{h} = \sigma \mathbf{n}, \mathbf{N} = \sigma \mathbf{b}$ , 则 Frenet 和 Darboux 标架对两种参数满足符号差别. 因此, 对一般参数曲面, 其上曲线是渐近线有如下判定条件.

**引理 2** [1] 一个无拐点的非线性正则曲线  $\mathbf{r}(t)$  是曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  上的渐近线当且仅当满足以下彼此等价的条件

- 曲线上点的法曲率恒等于零;
- 在曲线上每个非拐点处的副法向量垂直于曲面在该点处的切平面;
- 在曲线上每个非拐点处的从切平面垂直于曲面在该点处的切平面.

以上的分析需要正则曲线存在副法向量, 即  $\mathbf{r}''(t) \neq \mathbf{0}$ . 当对某个参数  $t_0$ ,  $\mathbf{r}''(t_0) = \mathbf{0}$  时,  $\mathbf{r}(t_0)$  是曲线  $\mathbf{r}(t)$  的拐点, 使得曲率  $k(t_0) = 0$ . 此时, 该点无插值解. 以下构造是基于边界曲线上非拐点处的分析.

### 2.2.2 相交渐近线

**引理 3** 对曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  上以弧长为参数的正则曲线  $\mathbf{r}(s)$ , 令  $\mathbf{N}(s) = \sigma \mathbf{b}(s)$ ,  $\sigma = \pm 1$ , 则有  $\mathbf{h}(s) = \sigma \mathbf{n}(s)$ ,  $k_n(s) = 0$ ,  $k(s) = \sigma k_g(s)$ ,  $\tau_g(s) = -\tau(s)$ , 其中  $\tau_g(s)$  和  $\tau(s)$  是曲线在曲面上的测地挠率和挠率.

**证明** 由  $\mathbf{N}(s) = \sigma \mathbf{b}(s)$  有  $\mathbf{h}(s) = \sigma \mathbf{n}(s)$ , 这意味着 Frenet 和 Darboux 标价满足模符号. 从 Frenet 标价关系式, 有如下等价条件:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}(s) \\ \dot{\mathbf{h}}(s) \\ \dot{\mathbf{N}}(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}(s) \\ \sigma \dot{\mathbf{n}}(s) \\ \sigma \dot{\mathbf{b}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -\sigma k(s) & 0 & \sigma \tau(s) \\ 0 & -\sigma \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -\sigma k(s) & 0 & \sigma \tau(s) \\ 0 & -\sigma \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{h}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma k(s) & 0 \\ -\sigma k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{h}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

与 Darboux 标价关系式对比有  $k_n(s) = 0$ ,  $k(s) = \sigma k_g(s)$ ,  $\tau_g(s) = -\tau(s)$ .  $\square$

**定理 1** 设曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  上两条不同弧长参数的曲线  $\mathbf{r}_1(s)$  和  $\mathbf{r}_2(s)$  相交在一个非拐点  $P = \mathbf{r}_1(s_1) = \mathbf{r}_2(s_2)$ , 且满足  $\mathbf{N}_P = \sigma_1 \mathbf{b}_1(s_1) = \sigma_2 \mathbf{b}_2(s_2)$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$ , 则

$$\tau_1(s_1) = -\tau_2(s_2),$$

其中  $\mathbf{N}_P$  是曲面法向量,  $\mathbf{b}_1(s_1), \tau_1(s_1)$  和  $\mathbf{b}_2(s_2), \tau_2(s_2)$  分别是曲线  $\mathbf{r}_1(s_1)$  和  $\mathbf{r}_2(s_2)$  在点  $\mathbf{P}$  的副法向量和挠率.

**证明** 对于同一曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  上的两个不同的渐近线  $\mathbf{r}_1(s)$  和  $\mathbf{r}_2(s)$ , 它们的法曲率是  $k_{n1}(s) = 0, k_{n2}(s) = 0$ , 则分别有  $\mathbf{N}_1(s) = \sigma_1 \mathbf{b}_1(s), \mathbf{N}_2(s) = \sigma_2 \mathbf{b}_2(s)$ . 由引理 3 有  $\tau_{g1}(s) = -\tau_1(s), \tau_{g2}(s) = -\tau_2(s)$ . 在点  $\mathbf{P}$  处切平面  $\Pi_p$  上指定夹角  $\alpha_1, \alpha_2$  的两个方向, 法曲率  $k_{n1}, k_{n2}$  和测地挠率  $\tau_{g1}, \tau_{g2}$  满足

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1)[\tau_{g1}(\alpha_1) + \tau_{g2}(\alpha_2)] = \cos(\alpha_2 - \alpha_1)[k_{n1}(\alpha_1) - k_{n2}(\alpha_2)],$$

则有  $\sin(\alpha_2 - \alpha_1)[\tau_{g1}(\alpha_1) + \tau_{g2}(\alpha_2)] = 0$ .  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$  表示两个曲线  $\mathbf{r}_1(s)$  和  $\mathbf{r}_2(s)$  在点  $\mathbf{P}$  处的定向夹角, 因其非零有  $\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0$ , 故  $\tau_1(s_1) = -\tau_2(s_2)$ .  $\square$

**注 1** 以上分析基于弧长参数, 对于一般参数同样适用. 接下来的讨论会使用一般参数, 并在不影响混淆的情况下省略表示.

定理 1 是两条曲线相交于一点成为渐近线的必要条件, 如果推广以上条件到四条曲线相交成四边形曲线, 不难得到四边形成为曲面渐近线的判定条件 (四条曲线的位置关系参看图 2.2).

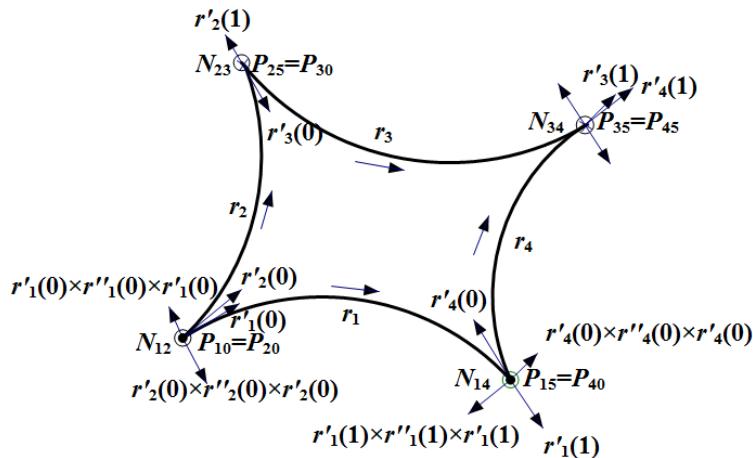


图 2.2: 带角点向量的四边形曲线.

Fig. 2.2: Quadrilateral curves with vectors at corners.

### 2.2.3 漸近四边形

**定理 2** 四条无拐点的曲线  $\mathbf{r}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 是曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  的边界漸近线, 当满足如下三个条件:

( $C_1$ ) 角点处的丛切限制: 四条曲线  $\mathbf{r}_i(t)$  在四个角点处的副法向量  $\mathbf{b}_i(t)$  必须满足模符号关系, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{12} &= \sigma_1(0)\mathbf{b}_1(0) = \sigma_2(0)\mathbf{b}_2(0), \quad \mathbf{N}_{14} = \sigma_1(1)\mathbf{b}_1(1) = \sigma_4(0)\mathbf{b}_4(0), \\ \mathbf{N}_{23} &= \sigma_2(1)\mathbf{b}_2(1) = \sigma_3(0)\mathbf{b}_3(0), \quad \mathbf{N}_{34} = \sigma_3(1)\mathbf{b}_3(1) = \sigma_4(1)\mathbf{b}_4(1),\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中  $\mathbf{N}_{12}, \mathbf{N}_{14}, \mathbf{N}_{23}, \mathbf{N}_{34}$  是曲面在四个角点处的单位法向量, 且  $\sigma_i(j) = \pm 1$  ( $i = 1, \dots, 4, j = 0, 1$ ).

( $C_2$ ) 角点处的漸近相交限制:

$$\tau_1(0) = -\tau_2(0), \tau_1(1) = -\tau_4(0), \tau_2(1) = -\tau_3(0), \tau_3(1) = -\tau_4(1).\tag{2.3}$$

( $C_3$ ) 沿边界线的法定向限制: 沿着边界线的法向量  $\mathbf{N}_i(t)$  是连续的且满足  $\mathbf{N}_i(t) = \pm \mathbf{b}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

曲面边界线为其漸近线这一条件只与边界曲线相关. 以上三个条件是必要的, 反之, 如果三个条件中任意一个不满足, 则无法构造曲面插值该漸近四边形. 因此, 这三个条件是判定存在插值曲面的充分必要条件.

从关系式 (2.2) 和 (2.3) 易得条件 ( $C_1$ ) 和 ( $C_2$ ) 是局部角点限制. 条件 ( $C_3$ ) 是与曲面兼容的全局边界条件. 为了构造边界线是曲面的漸近线, 条件 ( $C_1$ ) 和 ( $C_2$ ) 首先帮助构造漸近四边形, 然后结合条件 ( $C_3$ ) 构造插值曲面. 对于存在的剩余自由度, 可以通过能量函数进行优化确定.

## 2.3 插值 Bézier 漸近四边形的 Bézier 曲面

利用定理 2 确定的曲面上四边形曲线为相交漸近线的条件, 可以构造 5 次 Bézier 漸近四边形.

### 2.3.1 5 次 Bézier 渐近四边形

给定实际需求, 如角点位置、切向量和曲率等数据, 通过极小化能量函数优化剩余自由控制顶点, 进而构造优化的 Bézier 渐近四边形.

假定没有拐点的四条 5 次 Bézier 曲线(其中  $B_j^5(u), B_j^5(v)$  为 5 次 Bernstein 基函数)

$$\mathbf{r}_i(u) = \sum_{j=0}^5 \mathbf{P}_{ij} B_j^5(u), (i = 1, 3), \quad \mathbf{r}_i(v) = \sum_{j=0}^5 \mathbf{P}_{ij} B_j^5(v), (i = 2, 4),$$

满足角点位置关系(如图 2.2)

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{P}_{10} = \mathbf{P}_{20} = \mathbf{r}_2(0), \quad \mathbf{r}_1(1) = \mathbf{P}_{15} = \mathbf{P}_{40} = \mathbf{r}_4(0),$$

$$\mathbf{r}_2(1) = \mathbf{P}_{25} = \mathbf{P}_{30} = \mathbf{r}_3(0), \quad \mathbf{r}_3(1) = \mathbf{P}_{35} = \mathbf{P}_{45} = \mathbf{r}_4(1),$$

$$\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{14}, \mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{24}, \mathbf{P}_{31}, \mathbf{P}_{34}, \mathbf{P}_{41}, \mathbf{P}_{44},$$

和曲率值  $k_i(j)$  ( $i = 1, \dots, 4, j = 0, 1$ ). 则剩余八个控制顶点  $\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{P}_{23}, \mathbf{P}_{32}, \mathbf{P}_{33}, \mathbf{P}_{42}, \mathbf{P}_{43}$  未知, 需要进一步确定.

以上给定的角点数据是构造 5 次 Bézier 曲线的先决条件, 可以任意确定. 从以下的解分析中发现存在四个自由参数剩余. 这样, 可以通过适当地选择这些参数获得优化的结果. 存在更多自由参数的剩余意味着需要更高次的曲线代替 5 次, 使用的求解方法不变. 实际上, 5 次 Bézier 四边形曲线可以由更高次的曲线代替. 但是为了减少构造曲线和曲面的复杂度, 这里选择 5 次.

给定四条没有拐点的 Bézier 曲线, 期待构造一个 Bézier 曲面片插值这些曲线作为其渐近边界线. 以下讨论对应于命题 2 三个判定条件用来求解 5 次 Bézier 四边形的剩余未知控制顶点.

(a) 角点处的丛切限制.

以角点  $\mathbf{P}_{10}$  为例考虑丛切限制(2.2). 因为曲面的法向量  $\mathbf{N}_{12} = \frac{\mathbf{r}'_1(0) \times \mathbf{r}'_2(0)}{\|\mathbf{r}'_1(0) \times \mathbf{r}'_2(0)\|}$  平行于副法向量  $\mathbf{b}_1(0) = \frac{\mathbf{r}'_1(0) \times \mathbf{r}''_1(0)}{\|\mathbf{r}'_1(0) \times \mathbf{r}''_1(0)\|}$  和  $\mathbf{b}_2(0) = \frac{\mathbf{r}'_2(0) \times \mathbf{r}''_2(0)}{\|\mathbf{r}'_2(0) \times \mathbf{r}''_2(0)\|}$ , 则  $\mathbf{r}''_1(0)$  和  $\mathbf{r}''_2(0)$  均位于曲面在点  $\mathbf{P}_{10}$  处的切平面  $\Pi_{12}$ . 也就是要求点  $\mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}$  位于一个平面内, 即  $\mathbf{P}_{12}$  和  $\mathbf{P}_{22}$  可以

表示为

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{10} + \lambda_{12}(\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) + \mu_{12}(\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{20}),$$

$$\mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{20} + \lambda_{22}(\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) + \mu_{22}(\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{20}),$$

其中  $\lambda_{12}, \mu_{12}, \lambda_{22}, \mu_{22}$  是实数. 对于其他三个角点, 可以引入另外实参数  $\lambda_{32}, \mu_{32}, \lambda_{23}, \mu_{23}, \lambda_{13}, \mu_{13}, \lambda_{42}, \mu_{42}, \lambda_{33}, \mu_{33}, \lambda_{43}, \mu_{43}$  类似表示:

$$\mathbf{P}_{32} = \mathbf{P}_{30} + \lambda_{32}(\mathbf{P}_{24} - \mathbf{P}_{25}) + \mu_{32}(\mathbf{P}_{31} - \mathbf{P}_{30}),$$

$$\mathbf{P}_{23} = \mathbf{P}_{25} + \lambda_{23}(\mathbf{P}_{24} - \mathbf{P}_{25}) + \mu_{23}(\mathbf{P}_{31} - \mathbf{P}_{30}),$$

$$\mathbf{P}_{13} = \mathbf{P}_{15} + \lambda_{13}(\mathbf{P}_{41} - \mathbf{P}_{40}) + \mu_{13}(\mathbf{P}_{14} - \mathbf{P}_{15}),$$

$$\mathbf{P}_{42} = \mathbf{P}_{40} + \lambda_{42}(\mathbf{P}_{41} - \mathbf{P}_{40}) + \mu_{42}(\mathbf{P}_{14} - \mathbf{P}_{15}),$$

$$\mathbf{P}_{33} = \mathbf{P}_{35} + \lambda_{33}(\mathbf{P}_{34} - \mathbf{P}_{35}) + \mu_{33}(\mathbf{P}_{44} - \mathbf{P}_{45}),$$

$$\mathbf{P}_{43} = \mathbf{P}_{45} + \lambda_{43}(\mathbf{P}_{34} - \mathbf{P}_{35}) + \mu_{43}(\mathbf{P}_{44} - \mathbf{P}_{45}).$$

曲率表达式

$$k_1(0) = \frac{4\|(\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) \times (\mathbf{P}_{12} - \mathbf{P}_{10})\|}{5\|\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}\|^3},$$

只是关于  $\mu_{12}$  的式子, 故可得  $\mu_{12}$ . 类似地,  $\lambda_{13}, \lambda_{22}, \mu_{23}, \lambda_{32}, \mu_{33}, \lambda_{43}, \mu_{42}$  可以由其他七个角点处的曲率关系式确定.

(b) 角点处的渐近相交限制.

四个角点处的挠率应该满足条件 (2.3), 对应的四组表达式

$$\begin{aligned} \frac{\det(\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{12} - \mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{13} - \mathbf{P}_{10})}{\|(\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) \times (\mathbf{P}_{12} - \mathbf{P}_{10})\|^2} &= -\frac{\det(\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{20}, \mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{20}, \mathbf{P}_{23} - \mathbf{P}_{20})}{\|(\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{20}) \times (\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{20})\|^2}, \\ \frac{\det(\mathbf{P}_{15} - \mathbf{P}_{14}, \mathbf{P}_{13} - \mathbf{P}_{15}, \mathbf{P}_{15} - \mathbf{P}_{12})}{\|(\mathbf{P}_{15} - \mathbf{P}_{14}) \times (\mathbf{P}_{13} - \mathbf{P}_{15})\|^2} &= -\frac{\det(\mathbf{P}_{41} - \mathbf{P}_{40}, \mathbf{P}_{42} - \mathbf{P}_{40}, \mathbf{P}_{43} - \mathbf{P}_{40})}{\|(\mathbf{P}_{41} - \mathbf{P}_{40}) \times (\mathbf{P}_{42} - \mathbf{P}_{40})\|^2}, \\ \frac{\det(\mathbf{P}_{25} - \mathbf{P}_{24}, \mathbf{P}_{23} - \mathbf{P}_{25}, \mathbf{P}_{25} - \mathbf{P}_{22})}{\|(\mathbf{P}_{25} - \mathbf{P}_{24}) \times (\mathbf{P}_{23} - \mathbf{P}_{25})\|^2} &= -\frac{\det(\mathbf{P}_{31} - \mathbf{P}_{30}, \mathbf{P}_{32} - \mathbf{P}_{30}, \mathbf{P}_{33} - \mathbf{P}_{30})}{\|(\mathbf{P}_{31} - \mathbf{P}_{30}) \times (\mathbf{P}_{32} - \mathbf{P}_{30})\|^2}, \\ \frac{\det(\mathbf{P}_{35} - \mathbf{P}_{34}, \mathbf{P}_{33} - \mathbf{P}_{35}, \mathbf{P}_{35} - \mathbf{P}_{32})}{\|(\mathbf{P}_{35} - \mathbf{P}_{34}) \times (\mathbf{P}_{33} - \mathbf{P}_{35})\|^2} &= -\frac{\det(\mathbf{P}_{45} - \mathbf{P}_{44}, \mathbf{P}_{43} - \mathbf{P}_{45}, \mathbf{P}_{45} - \mathbf{P}_{42})}{\|(\mathbf{P}_{45} - \mathbf{P}_{44}) \times (\mathbf{P}_{43} - \mathbf{P}_{45})\|^2}, \end{aligned}$$

分别与双参数  $(\lambda_{23}, \mu_{13}), (\lambda_{33}, \mu_{22}), (\lambda_{12}, \mu_{43}), (\lambda_{42}, \mu_{32})$  相关. 化简之后, 可以分别使用  $\lambda_{23}, \lambda_{33}, \lambda_{12}, \lambda_{42}$  表示  $\mu_{13}, \mu_{22}, \mu_{43}, \mu_{32}$ .

(c) 沿边界线的法定向限制.

沿着正则曲线  $\mathbf{r}_i$ , 曲面的单位法向量  $\mathbf{N}_i$  和副法向量  $\mathbf{b}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 平行且连续, 则在四个角点处的定向转换数是偶数, 即

$$\prod_{i,j} \sigma_i(j) = 1, (i = 1, \dots, 4, j = 0, 1). \quad (2.4)$$

表达式  $\sigma_i(j)$  ( $i = 1, \dots, 4, j = 0, 1$ ) 的符号的选取基于方程 (2.2) 且兼容限制条件 (2.4). 限制  $C_3$  是全局边界条件, 与曲面的构造密切相关. 限制方程 (2.4) 是局部角点条件, 是限制  $C_3$  的必要条件, 可以用来构造渐近四边形.

至此, 求解八个未知点的问题转化为确定四个参数  $\lambda_{23}, \lambda_{33}, \lambda_{12}, \lambda_{42}$ . 因为这些参数是自由选取的, 可以得到一族渐近四边形满足以上限制. 通过极小化限制能量函数

$$\int_0^1 (||\mathbf{r}_1''(u)||^2 + ||\mathbf{r}_3''(u)||^2) du + \int_0^1 (||\mathbf{r}_2''(v)||^2 + ||\mathbf{r}_4''(v)||^2) dv, \quad (2.5)$$

可以求得参数  $\lambda_{23}, \lambda_{33}, \lambda_{12}, \lambda_{42}$  的值. 极小化能量函数 (2.5) 是获取优化边界渐近四边形的一种选择, 可以根据实际需求, 使用其他能量函数代替. 图 2.3 分别展示了在给定不同角点数据情况下四个优化的渐近四边形和它们的控制多边形.

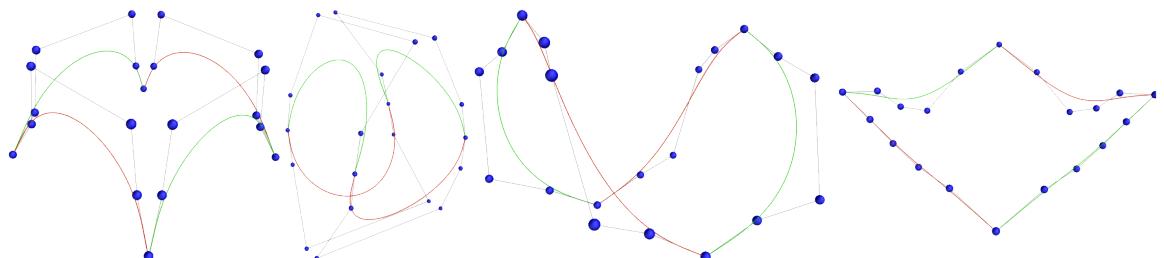


图 2.3: Bézier 渐近四边形.

Fig. 2.3: Bézier asymptotic quadrilateral.

如下算法 1 介绍了 5 次 Bézier 渐近四边形的构造过程.

**Algorithm 1** 构造 5 次 Bézier 渐近四边形**Require:** 给定角点曲率、控制顶点.**Ensure:** 优化的 5 次 Bézier 渐近四边形.

- 1: 待定  $\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{P}_{23}, \mathbf{P}_{32}, \mathbf{P}_{33}, \mathbf{P}_{42}, \mathbf{P}_{43}$ .
- 2: 指定边界法矢  $\mathbf{N}_i(t)$ , 使曲面定向.
- 3: 从切限制和角点渐近相交限制可以简化待定参数.
- 4: 利用 (2.5) 式确定剩余控制顶点  $\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{P}_{23}, \mathbf{P}_{32}, \mathbf{P}_{33}, \mathbf{P}_{42}, \mathbf{P}_{43}$  得到优化的 Bézier 渐近四边形.

## 2.3.2 Bézier 渐近四边形插值条件

在构造了满足局部角点限制条件的边界渐近四边形之后, 结合全局边界条件, 可以构造光滑曲面插值该渐近四边形曲线作为其边界线. 定理 2 判定了没有拐点的四条曲线  $\mathbf{r}_i(t)$  成为曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  边界渐近线的条件. ( $C_3$ ) 限制了法向量  $\mathbf{N}_i(t)$  是连续的且平行于副法向量  $\mathbf{b}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). 这样, 沿着插值曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  的边界曲线  $\mathbf{r}_i(t)$  上的切平面  $\Pi_i(t)$  是曲线的密切平面, 正交于曲面法向量  $\mathbf{N}_i(t)$ , 即  $\Pi_i(t) = [\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}'_i(t), \mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t) \times \mathbf{r}'_i(t)]$ . 图 2.4 分别展示了插值曲面在边线处的法向量.

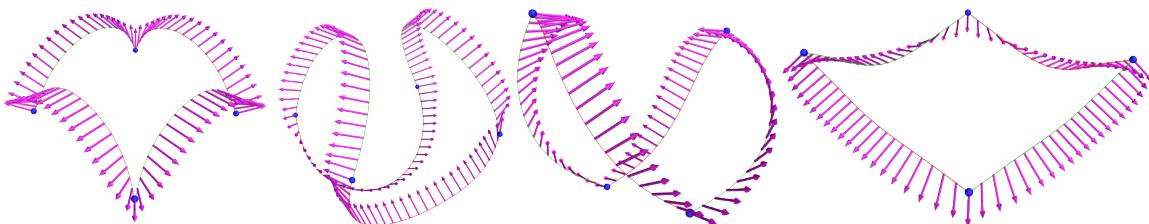


图 2.4: Bézier 渐近四边形上插值面的法向量.

Fig. 2.4: Normal vectors of the interpolated surface along Bézier asymptotic quadrilateral.

沿着插值曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  的边界线  $\mathbf{r}_i(t)$ , 为构造曲面, 定义切矢  $\mathbf{T}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ )

$$\mathbf{T}_1(u) = \mathbf{R}_v(u, 0), \mathbf{T}_3(u) = \mathbf{R}_v(u, 1), \mathbf{T}_2(v) = \mathbf{R}_u(0, v), \mathbf{T}_4(v) = \mathbf{R}_u(1, v).$$

因为它们位于切平面  $\Pi_i(t)$  且与向量  $\mathbf{r}'_i(t)$  和  $[\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t)] \times \mathbf{r}'_i(t)$  共平面, 所以它们可以由函数  $x_i(t)$  和  $y_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 线性表示. 即,

$$\mathbf{T}_i(t) = x_i(t)\mathbf{r}'_i(t) + y_i(t)[\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t)] \times \mathbf{r}'_i(t), t \in [0, 1]. \quad (2.6)$$

对于 5 次 Bézier 曲线  $\mathbf{r}_i(t)$ , 函数  $\mathbf{r}'_i(t)$  和  $[\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t)] \times \mathbf{r}'_i(t)$  分别是 4 次和 10 次的. 为了构造低次的插值曲面, 可以选择  $x_i(t) = \sum_{j=0}^7 \alpha_{ij} B_j^7(t)$ ,  $y_i(t) = \sum_{j=0}^1 \beta_{ij} B_j^1(t)$ , 其中系数  $\alpha_{ij}$  和  $\beta_{ij}$  是实数, 由接下来分析确定.

$\mathbf{T}_i(t)$  必须满足以下条件:

- 切矢相容性

$$\mathbf{T}_1(0) = \mathbf{r}'_2(0), \quad \mathbf{T}_1(1) = \mathbf{r}'_4(0),$$

$$\mathbf{T}_2(0) = \mathbf{r}'_1(0), \quad \mathbf{T}_2(1) = \mathbf{r}'_3(0),$$

$$\mathbf{T}_3(0) = \mathbf{r}'_2(1), \quad \mathbf{T}_3(1) = \mathbf{r}'_4(1),$$

$$\mathbf{T}_4(0) = \mathbf{r}'_1(1), \quad \mathbf{T}_4(1) = \mathbf{r}'_3(1).$$

以角点  $\mathbf{P}_{10}$  为例.  $\mathbf{T}_1(0) = \mathbf{r}'_2(0)$  等价于

$$\alpha_{10}(\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) + 20\beta_{10}[(\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) \times (\mathbf{P}_{12} - \mathbf{P}_{10})] \times (\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) = \mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{20}.$$

则  $\alpha_{10}$  和  $\beta_{10}$  可以表示为

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \frac{(\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) \cdot (\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{20})}{\|\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}\|^2}, \\ \beta_{10} &= \frac{\det((\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) \times (\mathbf{P}_{12} - \mathbf{P}_{10}), (\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}), (\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{20}))}{20\|(\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10}) \times (\mathbf{P}_{12} - \mathbf{P}_{10}) \times (\mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{10})\|^2}. \end{aligned}$$

函数  $x_i(t)$  和  $y_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 第一个和最后一个系数可以使用上式确定.

- 扭矢相容性

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_1(0) &= \mathbf{T}'_2(0) = \mathbf{R}_{u,v}(0, 0), \\ \mathbf{T}'_2(1) &= \mathbf{T}'_3(0) = \mathbf{R}_{u,v}(0, 1), \\ \mathbf{T}'_1(1) &= \mathbf{T}'_4(0) = \mathbf{R}_{u,v}(1, 0), \\ \mathbf{T}'_3(1) &= \mathbf{T}'_4(1) = \mathbf{R}_{u,v}(1, 1). \end{aligned} \tag{2.7}$$

方程组 (2.7) 中的每一个方程可以由对应坐标关系式拆分成两组等式. 如此可得  $\alpha_{i1}$  和  $\alpha_{i6}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). 进一步, 若令  $A_{12}$  表示  $\mathbf{r}'_1(0)$  和  $\mathbf{r}'_2(0)$  在角点  $\mathbf{P}_{10}$  处的夹角, 投影向量  $\mathbf{T}'_1(0)$  和  $\mathbf{T}'_2(0)$  到向量  $\mathbf{N}_{12}$  得

$$\mathbf{T}'_1(0) \cdot \mathbf{N}_{12} = \tau_1(0) \|\mathbf{r}'_1(0)\| \|\mathbf{r}'_2(0)\| \sin A_{12}$$

$$\mathbf{T}'_2(0) \cdot \mathbf{N}_{12} = -\tau_2(0) \|\mathbf{r}'_1(0)\| \|\mathbf{r}'_2(0)\| \sin A_{12},$$

自然满足条件  $\tau_1(0) = -\tau_2(0)$ . 使用相同的推导方法, 限制条件  $(C_2)$  中的其他关系也成立.

### 2.3.3 双 11 次 Bézier 插值曲面

不失一般性, 设定参数  $\alpha_{ij} = 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ,  $j = 2, \dots, 5$ ) 可得  $\mathbf{T}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). 条件  $\mathbf{T}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 是构造全局边界兼容条件下插值曲面的关键. 为了获得一个 Bézier 曲面插值四条 Bézier 曲线, 有必要表示  $\mathbf{T}_i(t)$  为 Bézier 形式. 因  $\mathbf{T}_i(t)$  是 11 次的, 则

$$\mathbf{T}_i(t) = \sum_{k=0}^{11} (\mathbf{E}_k^i + \mathbf{F}_k^i) B_k^{11}(t), \quad i = 1, \dots, 4,$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k^i &= 5 \sum_{j=\max(0,k-4)}^{\min(7,k)} \frac{\binom{7}{j} \binom{4}{k-j}}{\binom{11}{k}} \alpha_{ij} \cdot \Delta \mathbf{P}_{i,k-j}, \quad \mathbf{F}_k^i = \frac{k \beta_{i1}}{11} \mathbf{G}_{k-1}^i + (1 - \frac{k}{11}) \beta_{i0} \mathbf{G}_k^i, \\ \mathbf{G}_k^i &= 5 \sum_{j=\max(0,k-4)}^{\min(6,k)} \frac{\binom{6}{j} \binom{4}{k-j}}{\binom{10}{k}} \mathbf{H}_j^i \cdot \Delta \mathbf{P}_{i,k-j}, \quad \mathbf{H}_j^i = \frac{7}{7-j} (\mathbf{L}_j^i - \frac{j}{7} \mathbf{L}_{j-1}^i), \\ \mathbf{L}_k^i &= 100 \sum_{j=\max(0,k-3)}^{\min(4,k)} \frac{\binom{4}{j} \binom{3}{k-j}}{\binom{7}{k}} \Delta \mathbf{P}_{i,j} \times \Delta^2 \mathbf{P}_{i,k-j}, \quad \Delta \mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}, \\ \Delta^2 \mathbf{P}_{i,j} &= \Delta \mathbf{P}_{i,j+1} - \Delta \mathbf{P}_{i,j}. \end{aligned}$$

这样张量积 Bézier 曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  是双 11 次的, 即

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^{11} \sum_{j=0}^{11} \mathbf{Q}_{i,j} B_i^{11}(u) B_j^{11}(v),$$

其中  $\mathbf{Q}_{i,j}$  ( $i = 0, \dots, 11$ ,  $j = 0, \dots, 11$ ) 是曲面的控制顶点.

曲面外圈的控制顶点  $\mathbf{Q}_{0,i}$ ,  $\mathbf{Q}_{i,0}$ ,  $\mathbf{Q}_{11,i}$ ,  $\mathbf{Q}_{i,11}$  ( $i = 0, \dots, 11$ ) 能由边界四边形曲线确定. 提升 5 次 Bézier 曲线到 11 次

$$\mathbf{r}_i(t) = \sum_{j=0}^{11} \mathbf{M}_j^i B_j^{11}(t),$$

其中  $\mathbf{M}_j^i$  由 Bézier 曲线升阶公式确定<sup>[95]</sup>. 则

$$\mathbf{Q}_{0,i} = \mathbf{M}_i^1, \quad \mathbf{Q}_{i,0} = \mathbf{M}_i^2, \quad \mathbf{Q}_{11,i} = \mathbf{M}_i^3, \quad \mathbf{Q}_{i,11} = \mathbf{M}_i^4, \quad i = 0, \dots, 11.$$

由边界切矢有 ( $i = 1, \dots, 10$ )

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{1,i} &= \mathbf{M}_i^1 + \frac{1}{11}(\mathbf{E}_i^1 + \mathbf{F}_i^1), \quad \mathbf{Q}_{10,i} = \mathbf{M}_i^3 - \frac{1}{11}(\mathbf{E}_i^3 + \mathbf{F}_i^3), \\ \mathbf{Q}_{i,1} &= \mathbf{M}_i^2 + \frac{1}{11}(\mathbf{E}_i^2 + \mathbf{F}_i^2), \quad \mathbf{Q}_{i,10} = \mathbf{M}_i^4 - \frac{1}{11}(\mathbf{E}_i^4 + \mathbf{F}_i^4).\end{aligned}$$

这样曲面沿封闭边界曲线最外两排控制顶点可以被确定下来. 图 2.5 分别展示了沿四边形曲线的两排控制顶点.

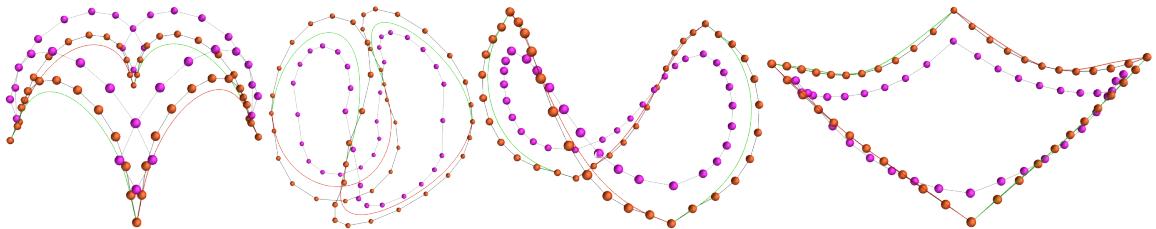


图 2.5: 沿 Bézier 渐近四边形的两排控制顶点.

Fig. 2.5: Two rows of control points along Bézier asymptotic quadrilateral.

至此, 切矢  $\mathbf{T}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 帮助满足全局兼容边界条件. 除了沿边界这两排控制顶点, 曲面剩余控制顶点可以自由选取, 这意味着将会存在一族曲面插值上面 (章节 2.3.1) 构造的 Bézier 渐近四边形. 为了获取这些控制顶点, 一个办法是极小化曲面的薄板能量函数

$$\int_0^1 \int_0^1 (||\mathbf{R}_{uu}(u, v)||^2 + 2||\mathbf{R}_{uv}(u, v)||^2 + ||\mathbf{R}_{vv}(u, v)||^2) dudv. \quad (2.8)$$

如此可以获取光顺的插值曲面. 图 2.6 分别展示了插值 Bézier 渐近四边形 (图 2.3) 的 Bézier 曲面.

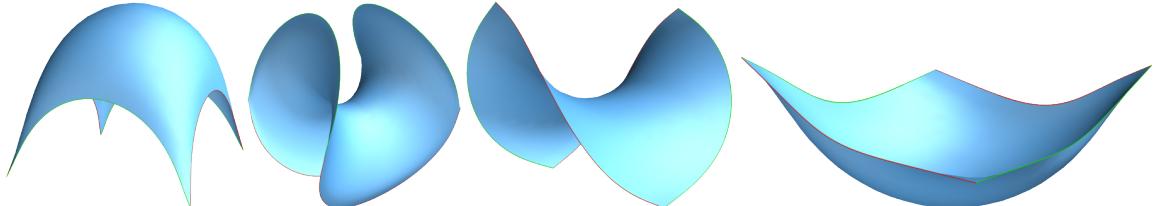


图 2.6: Bézier 曲面插值 Bézier 渐近四边形.

Fig. 2.6: Bézier surface interpolating Bézier asymptotic quadrilateral.

曲面上的直线也是曲面的渐近线(引理 1). 直线具有零曲率, 在线上每一点处有  $\mathbf{r}'' = 0$ . 假设边界四边形中存在一条直线, 即  $\mathbf{r}_1'' = 0, \mathbf{r}_i'' \neq 0, (i = 2, 3, 4)$ , 为了兼容上面的构造方法, 需要修改条件  $k_1(0) = 0, k_1(1) = 0, \lambda_{13} = 0, \mu_{12} = 0, \tau_2(0) = 0, \tau_4(0) = 0$ . 切矢  $\mathbf{T}_1(t)$  定义为

$$\mathbf{T}_1(t) = x_1(t)\mathbf{r}'_1(t) + y_1(t)\mathbf{r}'_2(t) + z_1(t)\mathbf{r}'_4(1-t), t \in [0, 1],$$

其中  $x_1(t) = \sum_{j=0}^5 \alpha_{1j} N_{j,3}(t), y_1(t) = \sum_{j=0}^5 \beta_{1j} N_{j,3}(t), z_1(t) = \sum_{j=0}^5 \delta_{1j} N_{j,3}(t)$  满足  $x_1(0) = 0, y_1(0) = 1, z_1(0) = 0, x_1(1) = 0, y_1(1) = 0, z_1(1) = 1$ . 类似的, 可以推广到含有多条直线的情况. 图 2.7-第一列分别展示了含有 1,2,3,4 条直线的渐近四边形, 图 2.7-第二列和第三列分别对应于它们的边界两排控制顶点和插值曲面.

这里之所以选择使用 5 次而非更低次数或者更高次数曲线是因为在满足局部角点限制条件下仍能有最少的自由度剩余. 增加次数会有更多自由的参数供选择或需要优化, 也就是说增加次数可以兼容更多源于实际应用的对渐近四边形限定的初始条件. 而如果降低边界曲线  $\mathbf{r}_i$  的次数, 需要考虑相关参数量并计算剩余参数量. 对于限制边界四边形端点、单位切向量、曲率的初始条件, 5 次 Bézier 边界线存在 4 个参数剩余. 在相同初始设定下可能无解, 因此无法使用 4 次 Bézier 边界线进行构造. 这时只能通过放松给定角点数据, 如转化四边形的端点处曲率为参数, 则会有 8 个自由参数, 这样每个边界线的控制定点数目减少至 5 个, 边界线  $\mathbf{r}_i$  是 4 次的, 可以继续进行优化构造 4 次 Bézier 渐近四边形. 依类似的构造方法, 至少存在一个自由参数剩余, 如一个角点初始曲率  $k_1(0)$ . 设定  $k_1(0)$  能帮助构造期望的边界四边形曲线. 限制能量则更为简单, 它是关于  $k_1(0)$  的二次曲线. 按照之前曲面的分析, 可以使用双 8 次 Bézier 曲面插值该 4 次渐近四边形. 事实上, 这是 § 2.4 中所有权因子相等时的退化情况.

如下算法 2 介绍了插值渐近四边形的双 11 次 Bézier 曲面的构造过程.

## 2.4 插值有理 Bézier 渐近四边形的有理 Bézier 曲面

推广到有理 Bézier 形式, 只需调控权因子. 这里推广到构造插值  $n$  次有理 Bézier 渐近四边形的有理 Bézier 曲面, 并给出  $n = 4$  时的实例.

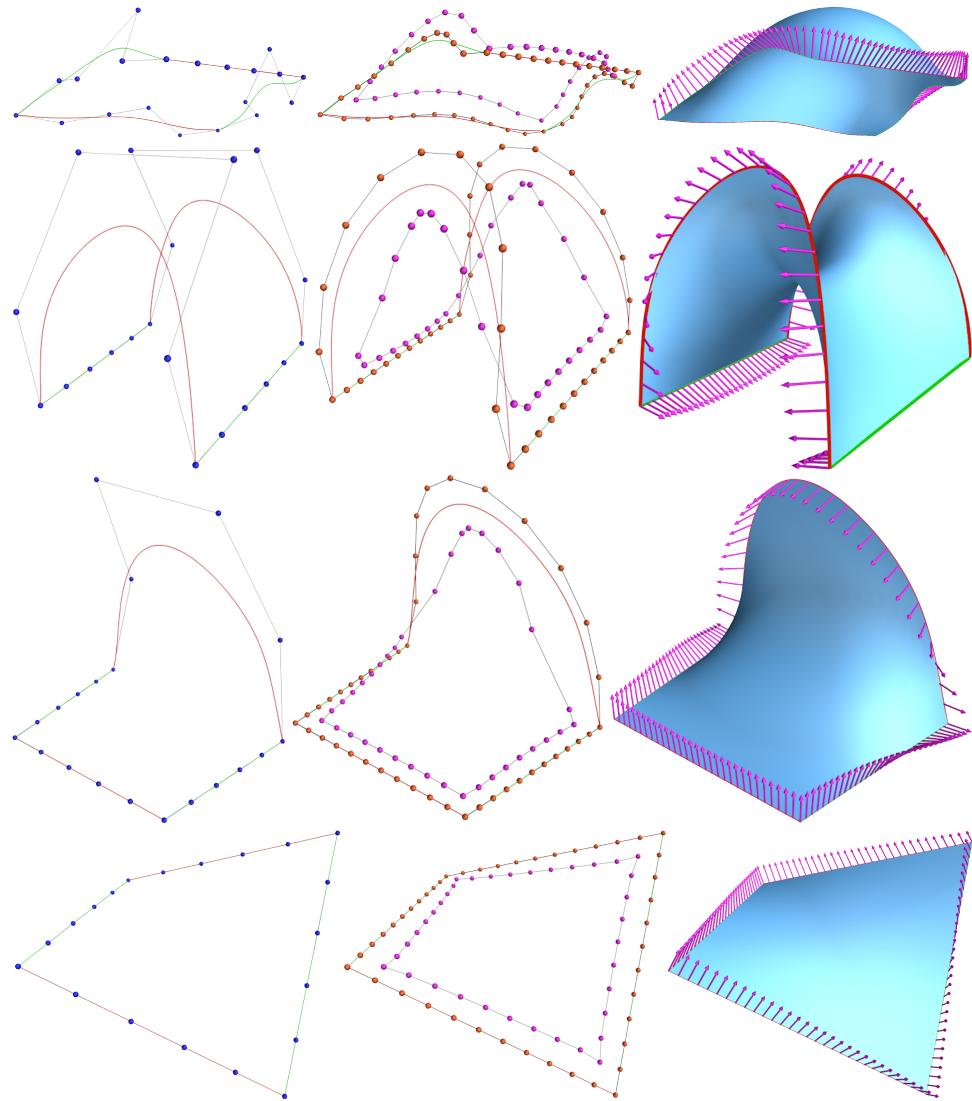


图 2.7: Bézier 曲面插值含直线的 Bézier 渐近四边形.

Fig. 2.7: Bézier surface interpolating Bézier asymptotic quadrilateral with lines.

**Algorithm 2** 构造插值渐近四边形的优化 Bézier 曲面**Require:** 5 次 Bézier 渐近四边形.**Ensure:** 优化的 11 次 Bézier 曲面.

- 1: 定义曲面在边界处切矢  $\mathbf{T}_i(t)$ .
- 2: 插值相容性条件确定  $x_i(t)$  和  $y_i(t)$  系数, 从而确定  $\mathbf{T}_i(t)$ , 并将其表示成 Bézier 形式.
- 3: 定义双 11 次 Bézier 曲面.
- 4: 升阶 5 次 Bézier 曲线至 11 次.
- 5: 利用插值曲面在边界处的切矢表示, 确定邻近边界的一排控制顶点.
- 6: 极小化薄板能量函数 (2.8) 确定其余控制顶点, 得到优化的 Bézier 曲面.

### 2.4.1 $n$ 次有理 Bézier 渐近四边形

对于没有拐点的 4 条  $n$  次有理 Bézier 曲线

$$\mathbf{r}_i(u) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_{ij} \mathbf{P}_{ij} B_j^n(u)}{\sum_{j=0}^n \omega_{ij} B_j^n(u)}, u \in [0, 1], i = 1, 3;$$

$$\mathbf{r}_i(v) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_{ij} \mathbf{P}_{ij} B_j^n(v)}{\sum_{j=0}^n \omega_{ij} B_j^n(v)}, v \in [0, 1], i = 2, 4,$$

满足角点位置关系(如图 2.2)和给定其角点曲率  $k_i(j)(j = 0, 1)$ 、权因子  $\omega_{ij}(j = 0, \dots, n; i = 1, \dots, 4)$  与控制顶点

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{P}_{10} = \mathbf{P}_{20} = \mathbf{r}_2(0),$$

$$\mathbf{r}_1(1) = \mathbf{P}_{1n} = \mathbf{P}_{40} = \mathbf{r}_4(0),$$

$$\mathbf{r}_2(1) = \mathbf{P}_{2n} = \mathbf{P}_{30} = \mathbf{r}_3(0),$$

$$\mathbf{r}_3(1) = \mathbf{P}_{3n} = \mathbf{P}_{4n} = \mathbf{r}_4(1),$$

$\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{1(n-1)}, \mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{2(n-1)}, \mathbf{P}_{31}, \mathbf{P}_{3(n-1)}, \mathbf{P}_{41}, \mathbf{P}_{4(n-1)}$ . 剩余控制顶点  $\mathbf{P}_{i2}, \dots, \mathbf{P}_{in-2}$  和权因子  $\omega_{i1}, \dots, \omega_{i(n-1)}(i = 1, \dots, 4)$  是待定的. 在定理 2 条件约束下, 按如下步骤找到这些未知量满足的关系, 最后通过极小化限制能量函数 (2.5) 求解出待定量, 得到优化的渐近四边曲线.

(a) 沿边界线的法定向限制.

沿正则边界曲线  $\mathbf{r}_i$ , 曲面的单位法向量  $\mathbf{N}_i$  和副法向量  $\mathbf{b}_i$  共线且连续, 4 个角点处的转换数是偶数, 即未知参数满足兼容条件 (2.4).

(b) 角点处的丛切限制.

角点处曲面的单位法向量平行于单位副法向量. 在角点  $\mathbf{P}_{10}$  处, 点  $\mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{22}$  共面, 在角点  $\mathbf{P}_{14}$  处, 点  $\mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{42}, \mathbf{P}_{41}, \mathbf{P}_{40}$  共面, 则

$$\mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{20} + \lambda_{22}(\Delta \mathbf{P}_{10}) + \mu_{22}(\Delta \mathbf{P}_{20}),$$

$$\mathbf{P}_{42} = \mathbf{P}_{40} + \lambda_{42}(\Delta \mathbf{P}_{40}) + \mu_{42}(\Delta \mathbf{P}_{13}),$$

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{10} + \lambda_{12}(\Delta \mathbf{P}_{10}) + \mu_{12}(\Delta \mathbf{P}_{20}) = \mathbf{P}_{14} + \lambda_{13}(\Delta \mathbf{P}_{40}) + \mu_{13}(\Delta \mathbf{P}_{13}).$$

另外两个角点处有类似的表示形式

$$\mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{24} + \lambda_{23}(\Delta\mathbf{P}_{23}) + \mu_{23}(\Delta\mathbf{P}_{30}),$$

$$\mathbf{P}_{42} = \mathbf{P}_{44} + \lambda_{43}(\Delta\mathbf{P}_{33}) + \mu_{43}(\Delta\mathbf{P}_{43}),$$

$$\mathbf{P}_{32} = \mathbf{P}_{30} + \lambda_{32}(\Delta\mathbf{P}_{23}) + \mu_{32}(\Delta\mathbf{P}_{30}) = \mathbf{P}_{34} + \lambda_{33}(\Delta\mathbf{P}_{33}) + \mu_{33}(\Delta\mathbf{P}_{43}).$$

其中  $\Delta\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{i(j+1)} - \mathbf{P}_{ij}$ ,  $\Delta^k\mathbf{P}_{ij} = \Delta^{k-1}\mathbf{P}_{i(j+1)} - \Delta^{k-1}\mathbf{P}_{ij}$ , 参数  $\lambda_{ik}, \mu_{ik}$ , ( $k = 2, 3, i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 3$ ) 是实数. 由曲线的曲率表达式

$$k_1(0) = \frac{3\omega_{10}\omega_{12} \|(\Delta\mathbf{P}_{10}) \times (\Delta^2\mathbf{P}_{10})\|}{4\omega_{11}^2 \|\Delta\mathbf{P}_{10}\|^3},$$

可以用  $\omega_{12}$  和  $\mu_{12}$  表示  $\omega_{11}$ . 同样, 可从其他角点处的曲率得到  $\omega_{21}, \omega_{31}, \omega_{41}, \omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{33}, \omega_{43}$  的表达式. 由  $\mathbf{P}_{12}$  满足的 2 个方程可以推出  $\lambda_{12}, \mu_{13}$  的具体数值及  $\lambda_{13}, \mu_{12}$  之间的关系. 对于其他点  $\mathbf{P}_{i2}$  ( $i = 2, 3, 4$ ) 有类似的结论, 即得到  $\lambda_{23}, \mu_{22}, \lambda_{33}, \mu_{32}, \lambda_{42}, \mu_{43}$  的具体数值, 以及  $\lambda_{22}$  和  $\mu_{23}, \lambda_{32}$  和  $\mu_{31}, \lambda_{43}$  和  $\mu_{42}$  之间的关系.

(c) 角点处的渐近相交限制.

由条件 (2.3) 有

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{10}\omega_{13}}{\omega_{11}\omega_{12}} \cdot \frac{\det(\Delta\mathbf{P}_{10}, \Delta^2\mathbf{P}_{10}, \Delta^3\mathbf{P}_{10})}{\|(\Delta\mathbf{P}_{10}) \times (\Delta^2\mathbf{P}_{10})\|^2} &= \frac{-\omega_{20}\omega_{23}}{\omega_{21}\omega_{22}} \cdot \frac{\det(\Delta\mathbf{P}_{20}, \Delta^2\mathbf{P}_{20}, \Delta^3\mathbf{P}_{20})}{\|(\Delta\mathbf{P}_{20}) \times (\Delta^2\mathbf{P}_{20})\|^2}, \\ \frac{\omega_{11}\omega_{13}}{\omega_{12}\omega_{13}} \cdot \frac{\det(\Delta\mathbf{P}_{13}, \Delta^2\mathbf{P}_{12}, \Delta^3\mathbf{P}_{11})}{\|(\Delta\mathbf{P}_{13}) \times (\Delta^2\mathbf{P}_{12})\|^2} &= \frac{-\omega_{40}\omega_{43}}{\omega_{41}\omega_{42}} \cdot \frac{\det(\Delta\mathbf{P}_{40}, \Delta^2\mathbf{P}_{42}, \Delta^3\mathbf{P}_{40})}{\|(\Delta\mathbf{P}_{40}) \times (\Delta^2\mathbf{P}_{40})\|^2}, \\ \frac{\omega_{21}\omega_{24}}{\omega_{22}\omega_{23}} \cdot \frac{\det(\Delta\mathbf{P}_{23}, \Delta^2\mathbf{P}_{22}, \Delta^3\mathbf{P}_{21})}{\|(\Delta\mathbf{P}_{23}) \times (\Delta^2\mathbf{P}_{22})\|^2} &= \frac{-\omega_{30}\omega_{33}}{\omega_{30}\omega_{32}} \cdot \frac{\det(\Delta\mathbf{P}_{30}, \Delta^2\mathbf{P}_{30}, \Delta^3\mathbf{P}_{30})}{\|(\Delta\mathbf{P}_{30}) \times (\Delta^2\mathbf{P}_{30})\|^2}, \\ \frac{\omega_{31}\omega_{34}}{\omega_{32}\omega_{33}} \cdot \frac{\det(\Delta\mathbf{P}_{33}, \Delta^2\mathbf{P}_{32}, \Delta^3\mathbf{P}_{31})}{\|(\Delta\mathbf{P}_{33}) \times (\Delta^2\mathbf{P}_{32})\|^2} &= \frac{-\omega_{41}\omega_{44}}{\omega_{42}\omega_{43}} \cdot \frac{\det(\Delta\mathbf{P}_{43}, \Delta^2\mathbf{P}_{42}, \Delta^3\mathbf{P}_{41})}{\|(\Delta\mathbf{P}_{43}) \times (\Delta^2\mathbf{P}_{42})\|^2}. \end{aligned}$$

可以推得  $\omega_{12}\mu_{12}, \omega_{22}\mu_{22}, \omega_{32}\mu_{32}, \omega_{42}\mu_{42}$  之间的 3 个关系式. 若表示出  $\mu_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{32}$ , 则由极小化限制能量函数 (2.5) 可以得到剩余参数  $\mu_{42}, \omega_{12}, \omega_{22}, \omega_{32}, \omega_{42}$  的值, 从而确定权  $\omega_{i2}$  和未知控制顶点  $\mathbf{P}_{i2}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), 进而得到了优化的渐近四边形. 图 2.8-第一列所示为三个优化的 4 次有理 Bézier 渐近四边形及其控制顶点.

算法 3 介绍了  $n$  次有理 Bézier 渐近四边形的构造过程.

**Algorithm 3** 构造  $n$  次有理 Bézier 演近四边形

**Require:** 给定角点曲率、权因子、控制顶点.

**Ensure:** 优化的  $n$  次有理 Bézier 演近四边形.

- 1: 待定  $w_{ij}, \mathbf{P}_{i2} (i = 1, \dots, 4; j = 1, 2, 3)$
- 2: 指定边界法矢  $\mathbf{N}_i(t)$ , 使曲面定向.
- 3: 从切限制和角点演近相交限制可以简化待定参数.
- 4: 利用 (2.5) 式确定剩余参数  $\mu_{42}, w_{12}, w_{22}, w_{32}, w_{42}$ , 得到优化的有理 Bézier 演近四边形.

#### 2.4.2 有理 Bézier 演近四边形插值条件

为了构造插值有理 Bézier 演近四边形的有理 Bézier 曲面, 需要确定曲面在边界曲线处的切矢  $\mathbf{T}_i (i = 1, \dots, 4)$ , 它们满足方程 (2.6). 标量函数  $x_i(t), y_i(t)$  定义为

$$x_i(t) = W_i(t) \sum_{j=0}^{3n-5} \alpha_{ij} B_j^{3n-5}(t),$$

$$y_i(t) = (W_i(t))^4 \sum_{j=0}^1 \beta_{ij} B_j^1(t),$$

其中  $W_i(t) = \sum_{j=0}^n \omega_{ij} B_j^n(t)$ ,  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, (i = 1, \dots, 4)$  是实数.  $\mathbf{T}_i(t)$  必须满足以下条件:

- 切矢相容性

由有理 Bézier 函数的端点插值性,  $\mathbf{T}_1(0) = \mathbf{r}'_2(0)$  等价于  $\alpha_{10}\mathbf{r}'_1(0) + \beta_{10}[\mathbf{r}'_1(0) \times \mathbf{r}''_1(0)] \times \mathbf{r}'_1(0) = \alpha_{20}\mathbf{r}'_2(0)$ . 则  $\alpha_{10}, \beta_{10}$  可以被表示为

$$\alpha_{10} = \frac{\mathbf{r}'_1(0) \cdot \mathbf{r}'_2(0)}{\|\mathbf{r}'_1(0)\|^2}, \quad \beta_{10} = \frac{\det(\mathbf{r}'_1(0) \times \mathbf{r}''_1(0), \mathbf{r}'_1(0), \mathbf{r}'_2(0))}{\|\mathbf{r}'_1(0) \times \mathbf{r}''_1(0) \times \mathbf{r}'_1(0)\|^2}.$$

同理可得  $\alpha_{17}, \beta_{11}$  及  $\alpha_{i0}, \alpha_{i7}, \beta_{i0}, \beta_{i1}, (i = 1, \dots, 4)$ .

- 扭矢相容性

由方程组 (2.7) 可得  $\alpha_{i1}, \alpha_{i6}, (i = 1, \dots, 4)$ . 同时, 可验证等式 (2.3) 成立.

#### 2.4.3 双 $(5n - 7)$ 次有理 Bézier 插值曲面

令剩余参数  $\alpha_{ij} = 0, (i = 1, \dots, 4; j = 2, \dots, 5)$ . 则可以得到  $\mathbf{T}_i(t), (i = 1, \dots, 4)$ . 为构造插值有理 Bézier 曲线的有理 Bézier 曲面, 有必要把  $\mathbf{T}'_i(t)$  表示成有理 Bézier 曲线形式. 记曲线  $\mathbf{r}_i(t) = \frac{\mathbf{P}_i(t)}{W_i(t)}$ , 则

$$\mathbf{r}'_i(t) = \frac{\mathbf{P}'_i(t)W_i(t) - \mathbf{P}_i(t)W'_i(t)}{(W_i(t))^2} =: \frac{\widehat{\mathbf{P}}_i(t)}{(W_i(t))^2},$$

其中  $\widehat{\mathbf{P}}_i(t)$  的次数为  $2n - 2$ . 又因为

$$\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t) = \frac{\mathbf{P}'_i(t) \times \mathbf{P}''_i(t)W_i(t) + \mathbf{P}_i(t) \times \mathbf{P}'_i(t)W'_i(t) - \mathbf{P}_i(t) \times \mathbf{P}''_i(t)W'_i(t)}{(W_i(t))^3},$$

若记  $\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t) = \frac{\mathbf{Q}_i(t)}{(W_i(t))^3}$ , 因为  $\widehat{\mathbf{P}}_i(t) \times \widehat{\mathbf{P}}'_i(t)$  的实际次数是  $4n - 6$ , 则  $\mathbf{Q}_i(t)$  的次数是  $3n - 6$ . 进而有

$$\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t) \times \mathbf{r}'_i(t) = \frac{\mathbf{Q}_i(t) \times \widehat{\mathbf{P}}_i(t)}{(W_i(t))^5} =: \frac{\widehat{\mathbf{Q}}_i(t)}{(W_i(t))^5},$$

其中  $\widehat{\mathbf{Q}}_i(t)$  的次数为  $5n - 8$ . 利用 Bézier 乘积公式<sup>[95]</sup>, 可以将  $\widehat{\mathbf{P}}_i(t), \widehat{\mathbf{Q}}_i(t)$  表示成 Bézier 曲线形式

$$\widehat{\mathbf{P}}_i(t) = \sum_{j=0}^{2n-2} \mathbf{C}_j^i B_j^{2n-2}(t), \quad \widehat{\mathbf{Q}}_i(t) = \sum_{j=0}^{5n-8} \mathbf{D}_j^i B_j^{5n-8}(t).$$

则  $\mathbf{T}_i(t)$  表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i(t) &= \left( \sum_{j=0}^{3n-5} \alpha_{ij} B_j^{3n-5}(t) \sum_{j=0}^{2n-2} C_j^i B_j^{2n-2}(t) + \sum_{j=0}^1 \beta_{ij} B_j^1(t) \sum_{j=0}^{5n-8} D_j^i B_j^{5n-8}(t) \right) / W_i(t) \\ &= \left( \sum_{j=0}^{5n-7} \left( \mathbf{E}_j^i + \mathbf{F}_j^i \right) B_j^{5n-7}(t) \right) / W_i(t), \\ \mathbf{E}_j^i &= \sum_{k=\min(3n-5,j)}^{\min(3n-5,j)} \frac{\binom{3n-5}{k} \binom{2n-2}{j-k}}{\binom{5n-7}{j}} \alpha_{ik} \cdot \mathbf{C}_{j-k}^i, \\ \mathbf{F}_j^i &= \frac{j\beta_{i1}}{5n-7} \mathbf{D}_{j-1}^i + \left( 1 - \frac{j}{5n-7} \right) \beta_{i0} \mathbf{D}_j^i, \quad (i = 1, \dots, 4, j = 0, \dots, 5n-7). \end{aligned}$$

因边界切矢  $\mathbf{T}_i(t)$  的分子是  $5n - 7$  次的, 故可定义双  $5n - 7$  次的张量积有理 Bézier 曲面

$$\mathbf{R}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{5n-7} \sum_{j=0}^{5n-7} w_{ij} \mathbf{S}_{ij} B_i^{5n-7}(u) B_j^{5n-7}(v)}{\sum_{i=0}^{5n-7} \sum_{j=0}^{5n-7} W_{ij} B_i^{5n-7}(u) B_j^{5n-7}(v)} =: \frac{\mathbf{S}(u, v)}{W(u, v)}.$$

边界线  $\mathbf{r}_i(t)$  升阶到  $5n - 7$  次为  $\mathbf{r}_i(t) = \sum_{j=0}^{5n-7} \delta_j^i \mathbf{M}_j^i B_j^{5n-7}(t) / \sum_{j=0}^{5n-7} \delta_j^i B_j^{5n-7}(t)$ , 其中

$$\mathbf{S}_{0j} = \mathbf{M}_j^1, \mathbf{S}_{j0} = \mathbf{M}_j^2, \mathbf{S}_{(5n-7)j} = \mathbf{M}_j^3, \mathbf{S}_{j(5n-7)} = \mathbf{M}_j^4,$$

$$W_{0j} = \delta_j^1, W_{j0} = \delta_j^2, W_{(5n-7)j} = \delta_j^3, W_{j(5n-7)} = \delta_j^4, \quad (j = 0, \dots, 5n - 7).$$

考虑曲面在  $\mathbf{r}_1(t)$  上的边界切矢

$$\mathbf{R}_v(u, 0) = (5n - 7) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{5n-7} \Delta W_{i0} \mathbf{S}_{i0} B_i^{5n-7}(u) W(u, 0) - \mathbf{S}(u, 0) \sum_{i=0}^{5n-7} \Delta W_{i0} B_i^{5n-7}(u)}{(W(u, 0))^2},$$

其中  $\Delta W_{i0} \mathbf{S}_{i0} = W_{i1} \mathbf{S}_{i1} - W_{i0} \mathbf{S}_{i0}$ ,  $\Delta W_{i0} = W_{i1} - W_{i0}$ . 令

$$\sum_{i=0}^{5n-7} \Delta W_{i0} B_i^{5n-7}(u) = \sum_{i=0}^{4n-7} H_i B_i^{4n-7}(u) \cdot W(u, 0) = \sum_{i=0}^{4n-7} H_i B_i^{4n-7}(u) \cdot \sum_{i=0}^n \omega_{i0} B_i^n(u),$$

可求得  $H_0 = \Delta W_{00}$ ,  $H_{4n-7} = \Delta W_{(5n-7)0}$ . 取  $H_i = 0$ , ( $i = 1, \dots, 4n - 8$ ), 求得曲面权因子

$$W_{i1} = W_{i0} + \sum_{j=\max(0, i-n)}^{\min(4n-7, i)} \frac{\binom{4n-7}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{5n-7}{j}} H_j \cdot \omega_{(i-j)0},$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_v(u, 0) &= (5n - 7) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{5n-7} \Delta W_{i0} S_{i0} B_i^{5n-7}(u) - S(u, 0) \sum_{i=0}^{4n-7} H_i B_i^{4n-7}(u)}{W(u, 0)} \\ &= (5n - 7) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{5n-7} (\Delta W_{i0} \mathbf{S}_{i0} - \mathbf{L}_i^1) B_i^{5n-7}(u)}{W(u, 0)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{5n-7} (\mathbf{E}_i^1 + \mathbf{F}_i^1) B_i^{5n-7}(u)}{W_1(t)}, \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{L}_i^1 = \sum_{j=\max(j, -n)}^{\min(4n-7, i)} \frac{\binom{4n-7}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{5n-7}{j}} H_j \cdot \omega_{(i-j)0} \mathbf{P}_{(i-j)0}.$$

从而控制顶点

$$\mathbf{S}_{i1} = \frac{\mathbf{E}_i^1 + \mathbf{F}_i^1 + (5n - 7) \mathbf{L}_i^1}{(5n - 7) W_{i1}} + \frac{W_{i0} S_{i0}}{W_{i1}}, (i = 1, \dots, 5n - 8).$$

类似地, 可以确定其他 3 边邻近边界的一排控制顶点及其权因子. 这样, 曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  的边界 2 排权因子和控制顶点已经确定. 自由选取曲面的内部权因子  $W_{ij}$  和控制顶点  $\mathbf{S}_{ij}$  ( $i = 2, \dots, 5n - 9$ ) 可以得到满足插值边界曲线的一族曲面片, 且这些曲面均以这个边界四边形为公共渐近线. 为简化计算, 取  $W_{ij} = 1$  ( $i, j = 2, \dots, 5n - 9$ ), 再由极小化薄板能量函数 (2.8) 确定剩余的控制顶点, 由此便构造出优化的插值有理 Bézier 渐近四边形的有理 Bézier 曲面.

以上对  $n$  次有理 Bézier 边界曲线的构造, 具有一般性. 经过实验发现, 在给定数据情况下, 4 次是构造有理 Bézier 渐近四边形的最低次数要求. 对于更高次数的情况, 方法类似, 需要对更多剩余自由参数进行选择和确定. 但当边界线为 3 次时, 需要减少给定数据, 这使得约束条件下方程的求解变得复杂, 甚至无解. 所以这里我们选择  $n = 4$  为实例构造, 如图 2.8 中-第 1-4 列分别展示了三个在不同给定角点数据下的 4 次有理 Bézier 渐近四边形、边界上的面法向量、插值曲面沿边界处的两排控制顶点和插值的双 13 次有理 Bézier 曲面.

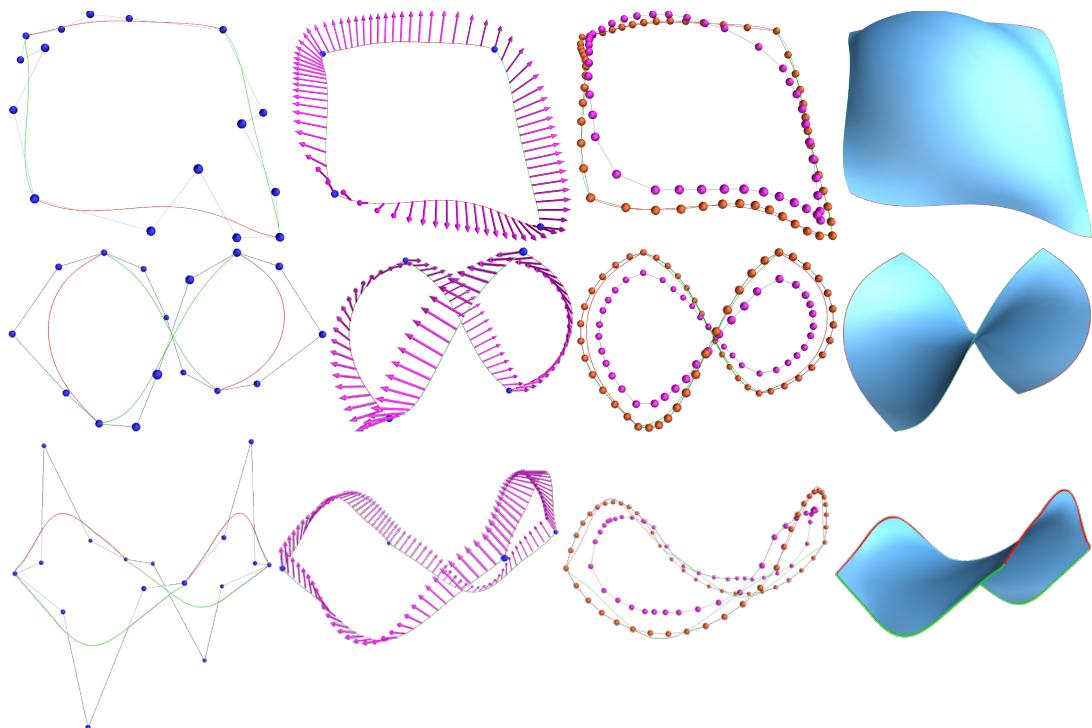


图 2.8: 有理 Bézier 曲面插值有理 Bézier 渐近四边形.

Fig. 2.8: Rational Bézier surface interpolating rational Bézier asymptotic quadrilateral.

算法 4 介绍了插值渐近四边形的双  $(5n - 7)$  次有理 Bézier 曲面的构造过程.

## 2.5 插值 B 样条渐近四边形的 B 样条曲面

B 样条曲线的确定不仅受控制顶点的影响, 还在于节点向量的选取. 本文不构造具有一般次数的  $n$  次 B 样条渐近四边形, 而是采用工业常见的 3 次 B 样条曲线.

---

**Algorithm 4** 构造插值渐近四边形的优化有理 Bézier 曲面

---

**Require:**  $n$  次有理 Bézier 渐近四边形.**Ensure:** 优化的  $(5n - 7)$  次有理 Bézier 曲面.

- 1: 定义曲面在边界处切矢  $\mathbf{T}_i(t)$ .
  - 2: 插值相容性条件确定  $x_i(t)$  和  $y_i(t)$  系数, 从而确定  $\mathbf{T}_i(t)$ , 并将其表示成有理 Bézier 形式.
  - 3: 定义双  $(5n - 7)$  次有理 Bézier 曲面.
  - 4: 升阶  $n$  次有理 Bézier 曲线至  $(5n - 7)$  次.
  - 5: 利用插值曲面在边界处的切矢表示, 确定邻近边界的一排控制顶点及其权因子.
  - 6: 取定  $W_{ij} = 1, (i, j = 2, \dots, 5n - 9)$  极小化薄板能量函数 (2.8) 确定其余控制顶点, 得到优化的有理 Bézier 曲面.
- 

## 2.5.1 3 次 B 样条渐近四边形

本小节中, 我们从给定角点位置、切向量和曲率的信息构造 3 次 B 样条渐近四边形. 自然地, 曲线具有越多的节点向量数据, 那么其具有更多剩余的自由参数. 通过实验发现, 选取如下节点向量, 可以很好的满足限制条件, 并轻松确定 B 样条曲线的剩余未知 6 个控制顶点:

$$\mathbf{U}_i = \{u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, u_{i6}, u_{i7}, u_{i8}, u_{i9}\},$$

其中  $u_{ij} = 0 (j = 0, \dots, 3), u_{ij} = 1 (j = 6, \dots, 9), 0 < u_{i4} < u_{i5} < 1$ . 假设定义在该节点区域上且没有拐点的四条 3 次 B 样条曲线如下

$$\mathbf{r}_i(u) = \sum_{j=0}^5 \mathbf{P}_{ij} N_{j,3}(u), (i = 1, 3), \quad \mathbf{r}_i(v) = \sum_{j=0}^5 \mathbf{P}_{ij} N_{j,3}(v), (i = 2, 4),$$

其中  $\mathbf{P}_{ij}$  是控制顶点,  $N_{j,3}(u), N_{j,3}(v)$  是三次 B 样条基函数. 使它们成为四边形曲线还需要满足角点相接性 (如图 2.2):

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{P}_{10} = \mathbf{P}_{20} = \mathbf{r}_2(0), \quad \mathbf{r}_1(1) = \mathbf{P}_{15} = \mathbf{P}_{40} = \mathbf{r}_4(0),$$

$$\mathbf{r}_2(1) = \mathbf{P}_{25} = \mathbf{P}_{30} = \mathbf{r}_3(0), \quad \mathbf{r}_3(1) = \mathbf{P}_{35} = \mathbf{P}_{45} = \mathbf{r}_4(1).$$

给定如上信息, 同时也给定控制顶点  $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{14}, \mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{24}, \mathbf{P}_{31}, \mathbf{P}_{34}, \mathbf{P}_{41}, \mathbf{P}_{44}$  和曲率  $k_i(j), i = 1, \dots, 4, j = 0, 1$  的值, 则 B 样条曲线剩余的控制顶点  $\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{P}_{23}, \mathbf{P}_{32}, \mathbf{P}_{33}, \mathbf{P}_{42}, \mathbf{P}_{43}$  是未知的, 它们通过如下条件确定.

(a) 角点处的丛切限制.

令  $\Delta \mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{ij}$ ,  $\Delta^k \mathbf{P}_{ij} = \Delta^{k-1} \mathbf{P}_{i,j+1} - \Delta^{k-1} \mathbf{P}_{ij}$ , ( $k = 2, 3$ ). 在四个角点  $\mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{20}, \mathbf{P}_{30}, \mathbf{P}_{45}$  的切平面上, 引入实数  $\lambda_{ij}, \mu_{ij}$ , ( $i = 1, \dots, 4, j = 2, 3$ ), 则点  $\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{P}_{32}, \mathbf{P}_{23}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{42}, \mathbf{P}_{33}, \mathbf{P}_{43}$  被表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{12} &= \mathbf{P}_{10} + \lambda_{12}(\Delta \mathbf{P}_{10}) + \mu_{12}(\Delta \mathbf{P}_{20}), \quad \mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{20} + \lambda_{22}(\Delta \mathbf{P}_{10}) + \mu_{22}(\Delta \mathbf{P}_{20}), \\ \mathbf{P}_{32} &= \mathbf{P}_{30} + \lambda_{32}(\Delta \mathbf{P}_{24}) + \mu_{32}(\Delta \mathbf{P}_{30}), \quad \mathbf{P}_{23} = \mathbf{P}_{25} + \lambda_{23}(\Delta \mathbf{P}_{24}) + \mu_{23}(\Delta \mathbf{P}_{30}), \\ \mathbf{P}_{13} &= \mathbf{P}_{15} + \lambda_{13}(\Delta \mathbf{P}_{40}) + \mu_{13}(\Delta \mathbf{P}_{14}), \quad \mathbf{P}_{42} = \mathbf{P}_{40} + \lambda_{42}(\Delta \mathbf{P}_{40}) + \mu_{42}(\Delta \mathbf{P}_{14}), \\ \mathbf{P}_{33} &= \mathbf{P}_{35} + \lambda_{33}(\Delta \mathbf{P}_{34}) + \mu_{33}(\Delta \mathbf{P}_{44}), \quad \mathbf{P}_{43} = \mathbf{P}_{45} + \lambda_{43}(\Delta \mathbf{P}_{34}) + \mu_{43}(\Delta \mathbf{P}_{44}).\end{aligned}$$

类似于点  $\mathbf{P}_{10}$  处的曲率表示

$$k_1(0) = \frac{2u_{14}}{3u_{15}} \frac{\|(\Delta \mathbf{P}_{10}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{10})\|}{\|(\Delta \mathbf{P}_{10})\|^3}, \quad k_1(1) = \frac{2(1-u_{15})}{3(1-u_{14})} \frac{\|(\Delta \mathbf{P}_{14}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{13})\|}{\|(\Delta \mathbf{P}_{14})\|^3},$$

得到其它六个曲率关系式, 从而参数  $\lambda_{13}, \mu_{12}, \lambda_{22}, \mu_{23}, \lambda_{32}, \mu_{33}, \lambda_{43}, \mu_{42}$  能用参数  $u_{i4}, u_{i5}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 表示.

(b) 角点处的渐近相交限制.

由角点处挠率条件 (2.3) 有

$$\begin{aligned}u_{14} \cdot \frac{\det(\Delta \mathbf{P}_{10}, \Delta^2 \mathbf{P}_{10}, \Delta^3 \mathbf{P}_{10})}{\|(\Delta \mathbf{P}_{10}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{10})\|^2} &= -u_{24} \cdot \frac{\det(\Delta \mathbf{P}_{20}, \Delta^2 \mathbf{P}_{20}, \Delta^3 \mathbf{P}_{20})}{\|(\Delta \mathbf{P}_{20}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{20})\|^2}, \\ (1-u_{15}) \cdot \frac{\det(\Delta \mathbf{P}_{14}, \Delta^2 \mathbf{P}_{13}, \Delta^3 \mathbf{P}_{12})}{\|(\Delta \mathbf{P}_{14}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{13})\|^2} &= -u_{44} \cdot \frac{\det(\Delta \mathbf{P}_{40}, \Delta^2 \mathbf{P}_{40}, \Delta^3 \mathbf{P}_{40})}{\|(\Delta \mathbf{P}_{40}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{40})\|^2}, \\ (1-u_{25}) \cdot \frac{\det(\Delta \mathbf{P}_{24}, \Delta^2 \mathbf{P}_{23}, \Delta^3 \mathbf{P}_{22})}{\|(\Delta \mathbf{P}_{24}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{23})\|^2} &= -u_{34} \cdot \frac{\det(\Delta \mathbf{P}_{30}, \Delta^2 \mathbf{P}_{30}, \Delta^3 \mathbf{P}_{30})}{\|(\Delta \mathbf{P}_{30}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{30})\|^2}, \\ (1-u_{35}) \cdot \frac{\det(\Delta \mathbf{P}_{34}, \Delta^2 \mathbf{P}_{33}, \Delta^3 \mathbf{P}_{32})}{\|(\Delta \mathbf{P}_{34}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{33})\|^2} &= -(1-u_{45}) \cdot \frac{\det(\Delta \mathbf{P}_{44}, \Delta^2 \mathbf{P}_{43}, \Delta^3 \mathbf{P}_{42})}{\|(\Delta \mathbf{P}_{44}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{43})\|^2},\end{aligned}$$

推导出用参数  $u_{i4}, u_{i5}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 表示的  $\mu_{13}, \mu_{22}, \mu_{32}, \mu_{43}$ . 如果给定  $u_{i4}, u_{i5}$ , 则参数  $\lambda_{12}, \lambda_{23}, \lambda_{33}, \lambda_{42}$  可通过极小化能量函数 (2.5) 确定. 进而, 确定控制顶点  $\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{P}_{23}, \mathbf{P}_{32}, \mathbf{P}_{33}, \mathbf{P}_{42}, \mathbf{P}_{43}$ . 图 2.9-第一列展示了在给定角点数据条件下依上面方法构造的四个 4 次 B 样条曲线和控制多边形.

(c) 沿边界线的法定向限制.

四个角点处的定向符号转换数  $\sigma_i(j)$  ( $i = 1, \dots, 4, j = 0, 1$ ) 兼容方程 (2.4). 曲面沿边界线的法向量同时也是曲线的密切平面的法向, 图 2.9-第二列展示了这些法向量.

算法 5 介绍了 3 次 B 样条渐近四边形的构造过程.

---

**Algorithm 5** 构造 3 次 B 样条渐近四边形

**Require:** 给定角点曲率、部分节点向量、控制顶点.

**Ensure:** 优化的 3 次 B 样条渐近四边形.

- 1: 待定  $u_{i4}, u_{i5}$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ),  $\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{P}_{23}, \mathbf{P}_{32}, \mathbf{P}_{33}, \mathbf{P}_{42}, \mathbf{P}_{43}$ .
  - 2: 指定边界法矢  $\mathbf{N}_i(t)$ , 使曲面定向.
  - 3: 从切限制和角点渐近相交限制可以简化待定参数.
  - 4: 取定  $u_{i4}, u_{i5}$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ), 利用 (2.5) 式确定剩余参数  $\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{P}_{23}, \mathbf{P}_{32}, \mathbf{P}_{33}, \mathbf{P}_{42}, \mathbf{P}_{43}$  得到优化的 B 样条渐近四边形.
- 

### 2.5.2 B 样条渐近四边形插值条件

沿边界四边形的切矢向量  $\mathbf{T}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) 定义同 (2.6), 其中标量函数

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^5 \alpha_{ij} N_{j,3}(t), \quad y_i(t) = \sum_{j=0}^1 \beta_{ij} N_{j,1}(t)$$

分别定义在节点向量  $\mathbf{U}_i = \{0, 0, 0, 0, u_{i4}, u_{i5}, 1, 1, 1, 1\}$ ,  $\mathbf{V} = \{0, 0, 1, 1\}$ , 其系数  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  由以下等式确定.

- 切矢相容性

$\mathbf{T}_1(0) = \mathbf{r}'_2(0)$  等价于

$$\frac{\alpha_{10}}{u_{14}}(\Delta \mathbf{P}_{10}) + \frac{18\beta_{10}}{u_{14}^3 u_{15}}[(\Delta \mathbf{P}_{10}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{10})] \times (\Delta \mathbf{P}_{10}) = \frac{1}{u_{24}}(\Delta \mathbf{P}_{20}).$$

则

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \frac{u_{14}}{u_{24}} \cdot \frac{(\Delta \mathbf{P}_{10}) \cdot (\Delta \mathbf{P}_{20})}{||\Delta \mathbf{P}_{10}||^2}, \\ \beta_{10} &= \frac{u_{14}^3 u_{15}}{18u_{24}} \cdot \frac{\det((\Delta \mathbf{P}_{10}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{10}), (\Delta \mathbf{P}_{10}), (\Delta \mathbf{P}_{20}))}{||(\Delta \mathbf{P}_{10}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{10}) \times (\Delta \mathbf{P}_{10})||^2}. \end{aligned}$$

$\mathbf{T}_1(1) = \mathbf{r}'_4(0)$  等价于

$$\frac{\alpha_{15}}{1-u_{15}}(\Delta \mathbf{P}_{14}) - \frac{18\beta_{11}}{(1-u_{14})(1-u_{15})^3}[(\Delta \mathbf{P}_{14}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{13})] \times (\Delta \mathbf{P}_{14}) = \frac{1}{u_{44}}(\Delta \mathbf{P}_{40}),$$

则

$$\alpha_{15} = \frac{1 - u_{15}}{u_{44}} \cdot \frac{(\Delta \mathbf{P}_{14}) \cdot (\Delta \mathbf{P}_{40})}{\|\Delta \mathbf{P}_{14}\|^2},$$

$$\beta_{11} = -\frac{(1 - u_{14})(1 - u_{15})^3}{18u_{44}} \cdot \frac{\det((\Delta \mathbf{P}_{14}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{13})), (\Delta \mathbf{P}_{14}), (\Delta \mathbf{P}_{40}))}{\|(\Delta \mathbf{P}_{14}) \times (\Delta^2 \mathbf{P}_{13})\| \times (\Delta \mathbf{P}_{14})\|^2}.$$

同理, 函数  $x_i(t), y_i(t), (i = 2, \dots, 4)$  的所有首末系数可求.

- 扭矢相容性

经验证, 等式 (2.3) 成立.

### 2.5.3 双 13 次 B 样条插值曲面

设定剩余系数  $\alpha_{ij} = 0 (i = 1, \dots, 4, j = 2, 3)$  可确定  $\mathbf{T}_i(t)$ . 对于 3 次 B 样条曲线  $\mathbf{r}_i(t)$ , 函数  $[\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)] \times \mathbf{r}'(t)$  是 4 次,  $\mathbf{T}_i(t)$  是 5 次. 为了构造最低次数的 B 样条曲面, 切矢  $\mathbf{T}_i(t)$  最少 13 次, 定义如下

$$\mathbf{T}_i(t) = x_i(t)\mathbf{r}'_i(t) + y_i(t)[\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t)] \times \mathbf{r}'_i(t) = \sum_{k=0}^{13} (\mathbf{E}_k^i + \mathbf{F}_k^i) N_{k,5}(t),$$

其中  $\mathbf{E}_k^i, \mathbf{F}_k^i$  对应于 B 样条函数的 14 个控制顶点. 张量积 B 样条曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  是双 5 次的

$$\mathbf{R}(u, v) = \sum_{i=0}^{13} \sum_{j=0}^{13} \mathbf{Q}_{i,j} N_{i,5}(u) N_{j,5}(v),$$

其中  $\mathbf{Q}_{i,j}, i, j = 0, \dots, 13$ , 是曲面控制顶点.

令  $\Delta \mathbf{P}_{ij_1} = \frac{\mathbf{P}_{ij_1+1} - \mathbf{P}_{ij_1}}{u_{ij_1+4} - u_{ij_1+1}}$ ,  $\Delta^2 \mathbf{P}_{ij_1} = \frac{\Delta \mathbf{P}_{ij_1+1} - \Delta \mathbf{P}_{ij_1}}{u_{ij_1+4} - u_{ij_1+2}}$ , 基函数  $N_{k,p}(t) (p = 1, \dots, 5)$  定义在节点向量

$$\mathbf{U}_p^i = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{u_{i4}, \dots, u_{i4}}_{p-1}, \underbrace{u_{i5}, \dots, u_{i5}}_{p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\} := \{t_0^i, \dots, t_{4p-1}^i\}.$$

基于 B 样条张量积公式<sup>[96]</sup>, 有

$$x_i(t)\mathbf{r}'_i(t) = \sum_{k=0}^{13} \mathbf{E}_k^i N_{k,5}(t),$$

其中  $\mathbf{E}_k^i = \frac{3}{10} \sum_{P^2 \in \Pi^5} \sum_{j_1} \sum_j \alpha_{ij} \cdot \Delta \mathbf{P}_{ij_1} \cdot \alpha_{j,3, \mathbf{U}_3^i, \mathbf{t}_{Q^3}^i}(k) \cdot \alpha_{j_1, 2, \mathbf{U}_2^i, \mathbf{t}_{P^2}^i}(k)$ ,

$$\mathbf{t}_{P^2}^i = \{\dots, t_k^i, t_{k+p_1}^i, t_{k+p_2}^i, t_{k+6}^i, \dots\}, \mathbf{t}_{Q^3}^i = \{\dots, t_k^i, t_{k+q_1}^i, t_{k+q_2}^i, t_{k+q_3}^i, t_{k+6}^i, \dots\}.$$

这里  $\alpha_{j_1,m,\mathbf{U}_m^i,\mathbf{t}_{P^m}^i}(k), \alpha_{j,n-m,\mathbf{U}_{n-m}^i,\mathbf{t}_{Q^{n-m}}^i}(k)$  是离散 B 样条函数<sup>[96]</sup>.  $P^m = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  是集合  $I^n = \{1, 2, \dots, n\}$  的子集. 集合  $Q^{n-m} = \{q_1, q_2, \dots, q_{n-m}\} = I^n - P^m$ ,  $\Pi^n = \bigcup_{p_i \in I^n} P^m$ .

同理有,

$$\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t) = \sum_{k=0}^7 \mathbf{G}_k^i N_{k,3}(t),$$

其中  $\mathbf{G}_k^i = 6 \sum_{P^1 \in \Pi^3} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \Delta \mathbf{P}_{i,j_1} \times \Delta^2 \mathbf{P}_{i,j_2} \cdot \alpha_{j_1,2,\mathbf{U}_2^i,\mathbf{t}_{P^2}^i}(k) \cdot \alpha_{j_2,1,\mathbf{U}_1^i,\mathbf{t}_{P^1}^i}(k)$ . 因  $\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t)$  本质是 2 次的, 则

$$\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t) = \sum_{k=0}^4 \mathbf{H}_k^i N_{k,2}(t),$$

其中  $\mathbf{H}_k^i = \mathbf{P}_k^0 (k=0, \dots, 4), \mathbf{P}_k^2 = \mathbf{G}_k^i (k=0, \dots, 7), l_2 = 7, l_{j-1} = l_j - 2, j = 1, 2$ ,

$$\mathbf{P}_k^{j-1} = \begin{cases} \mathbf{P}_k^j, & 0 \leq k \leq l_j - 3, \\ \frac{\mathbf{P}_k^j}{1-a_{k,2}^j} - \frac{a_{k,2}^j \mathbf{P}_{k-1}^{j-1}}{1-a_{k,2}^j}, & l_j - 2 \leq k \leq l_j - 1, \\ \mathbf{P}_{k+1}^j, & l_j \leq k \leq 4 + j. \end{cases}$$

进而有

$$\mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t) \times \mathbf{r}'_i(t) = \sum_{k=0}^{10} \mathbf{L}_k^i N_{k,4}(t), \quad y_i(t) \mathbf{r}'_i(t) \times \mathbf{r}''_i(t) \times \mathbf{r}'_i(t) = \sum_{k=0}^{13} \mathbf{F}_k^i N_{k,5}(t),$$

其中  $\mathbf{L}_k^i = \frac{1}{2} \sum_{P^2 \in \Pi^4} \sum_{j_1} \sum_{j_3} \mathbf{H}_{j_1}^i \times \Delta \mathbf{P}_{i,j_3} \cdot \alpha_{j_1,2,\mathbf{U}_2^i,\mathbf{t}_{P^2}^i}(k) \cdot \alpha_{j_3,2,\mathbf{U}_2^i,\mathbf{t}_{Q^2}^i}(k), \mathbf{F}_k^i = \frac{1}{5} \sum_{P^1 \in \Pi^5} \sum_{j_2} \sum_{j_4} \beta_{i,j_2} \cdot \mathbf{L}_{j_4}^i \cdot \alpha_{j_2,1,\mathbf{U}_1^i,\mathbf{t}_{P^1}^i}(k) \cdot \alpha_{j_4,4,\mathbf{U}_4^i,\mathbf{t}_{Q^4}^i}(k)$ .

将 3 次 B 样条曲线  $\mathbf{r}_i(t)$  升阶到 5 次, 有

$$\mathbf{r}_i(t) = \sum_{j=0}^{13} \mathbf{M}_j^i N_{j,5}(t),$$

则插值曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  在此边界上的控制顶点  $\mathbf{Q}_{0,i}, \mathbf{Q}_{i,0}, \mathbf{Q}_{13,i}, \mathbf{Q}_{i,13}$  满足

$$\mathbf{Q}_{0,i} = \mathbf{M}_i^1, \mathbf{Q}_{i,0} = \mathbf{M}_i^2, \mathbf{Q}_{13,i} = \mathbf{M}_i^3, \mathbf{Q}_{i,13} = \mathbf{M}_i^4, i = 0, \dots, 13.$$

由边界切矢条件, 对  $i = 1, \dots, 12$ , 有

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{1,i} &= \mathbf{M}_i^1 + \frac{u_{14}}{5} (\mathbf{E}_i^1 + \mathbf{F}_i^1), \mathbf{Q}_{12,i} = \mathbf{M}_i^3 - \frac{1-u_{35}}{5} (\mathbf{E}_i^3 + \mathbf{F}_i^3), \\ \mathbf{Q}_{i,1} &= \mathbf{M}_i^2 + \frac{u_{24}}{5} (\mathbf{E}_i^2 + \mathbf{F}_i^2), \mathbf{Q}_{i,12} = \mathbf{M}_i^4 - \frac{1-u_{45}}{5} (\mathbf{E}_i^4 + \mathbf{F}_i^4). \end{aligned} \tag{2.9}$$

同理, 在其它三条边界上, 曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  的两排控制顶点可以依次获得. 剩余控制顶点通过优化薄板样条能量函数 (2.8) 确定. 图 2.9-第三列展示了沿边界四边形的两排控制顶点, 图 2.9-第四列展示了对应的双 13 次 B 样条插值曲面.

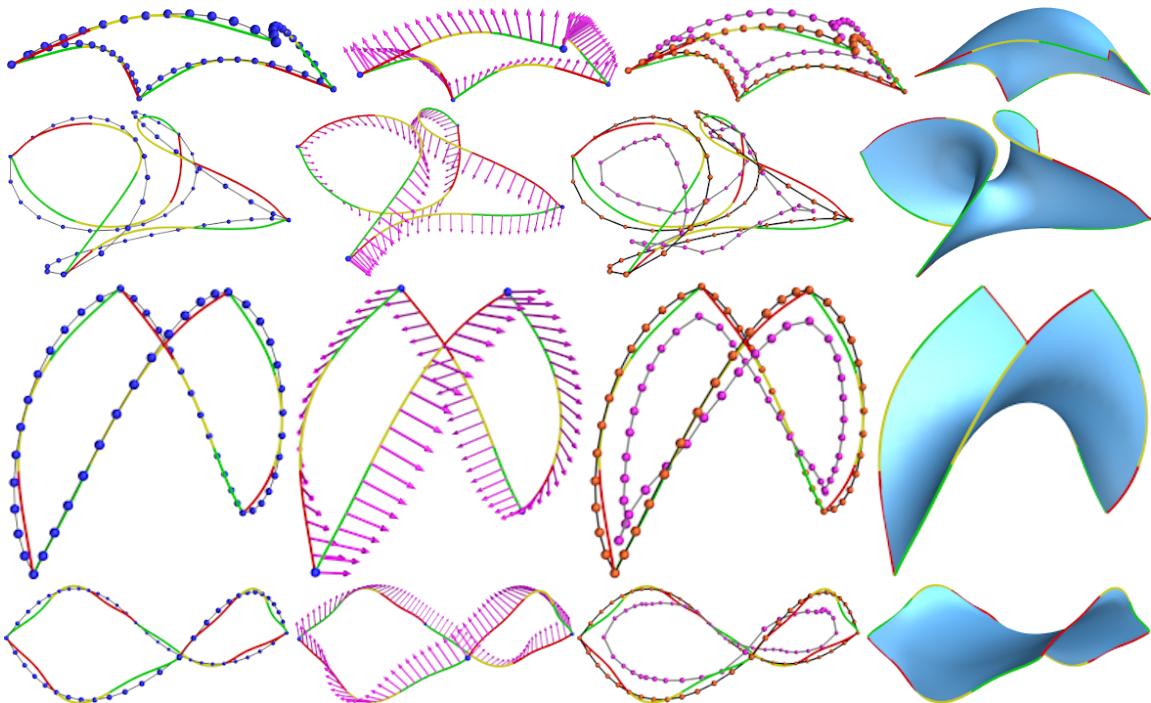


图 2.9: B 样条曲面插值 B 样条渐近四边形.

Fig. 2.9: B-spline surface interpolating B-spline asymptotic quadrilateral.

算法 6 介绍了插值渐近四边形的双 13 次 B 样条曲面的构成过程.

---

#### Algorithm 6 构造插值渐近四边形的优化 B 样条曲面

---

**Require:** 3 次 B 样条渐近四边形.

**Ensure:** 优化的双 13 次 B 样条曲面.

- 1: 定义曲面在边界处切矢  $\mathbf{T}_i(t)$ .
  - 2: 插值相容性条件确定  $x_i(t)$  和  $y_i(t)$  系数, 从而确定  $\mathbf{T}_i(t)$ , 并将其表示成 B 样条形式.
  - 3: 定义双 13 次 B 样条曲面.
  - 4: 升阶 3 次 B 样条曲线至 13 次.
  - 5: 利用插值曲面在边界处的切矢表示, 确定邻近边界的一排控制顶点.
  - 6: 极小化薄板能量函数 (2.8) 确定其余控制顶点, 得到优化的 B 样条曲面.
-

### 3 特殊离散网格构造

前两章研究了特殊的光滑边界曲线和插值曲面的构造, 其实际意义是对光滑的自由曲线和曲面的探索. 本章引入建筑几何领域常用的光滑几何概念及其对应的离散定义, 然后会在下一章利用这些离散化的定义构建规则或自由的建筑表面, 探索微分几何引导下的实际建筑应用的意义.

具体地, 本章会涉及到微分几何中重要的曲线和曲面, 如测地线、曲率线、渐近线、直纹面、可展曲面、常平均曲率曲面、极小曲面等, 研究其对应的离散化表示和其优良的几何性质带来的现实建造意义. 在详细介绍这些精彩的结论之前, 首先简单介绍该领域经常提及的重要离散概念和其来源的光滑理论. 这些概念和性质能帮助后面的定义和理论推导.

#### 3.1 研究背景

NURBS 曲线和曲面是工业设计软件 (如 CAD, Rhino, Blender 等) 中的光滑几何形体的主要数学表达, 主要原因在于其分片多项式的代数表达具有高阶可微性和优良的几何性质与算法. 设计师可以根据其对应的基本数学公式, 构造和调整光滑的几何形态. 比如, 设计师通过这类软件完成光滑的产品设计之后, 工业界将金属毛坯在数控机床切割打磨加工出需要的金属模具, 用于批量化生产设计产品. 加工前提需要精确计算和规划出车刀的速度和加速度, 这就对设计产品表面提出要求, 其具有的几何意义是高阶可微性.

高阶光滑性的直观效果是对曲面渲染后的反光程度. 越光滑的表面, 渲染后的形体看起来越流畅自然. 但是, 这也会增加渲染的速度和成本. 实际上, 落实到工业设计中, 比如动漫领域, 往往并不会采用高阶可微的光滑曲面, 而是使用三角网格代替连续曲面, 其光滑效果通过调整网格的密度实现.

尽管 NURBS 具有很好的数学性质和表现力, 但它仍具有一定的局限性, 尤其对某些复杂的几何形态. 而且将复杂的曲面表达成 NURBS 曲面, 需要事先得到曲面的四边形剖分, 使用尽可能规整的四边形网格. 规整意味着每个四边形大小均匀, 形状方正, 且边的流线符合曲面的几何特征.

网格 (*mesh*) 则弥补了 NURBS 的这个缺陷, 它可以灵活自由地表示复杂的拓扑结构模型, 对它的编辑也直观易操作. 因其具有更简单的数据结构, 算法可控性强, 运行速度快等优点, 目前已成为非常有效的建模工具. 在计算机图形学的研究中, 网格具有极强的可塑性<sup>[97–100]</sup>, 使它的研究更具有实际意义, 尤其在三维扫描<sup>[101]</sup>、模型渲染、物理模拟和三维打印<sup>[102]</sup>这些领域, 都是以网格进行主要建模对象. 典型的质量度量包括近似精度以及面的大小和形状. 网格在几何表示、模拟和形状优化等最终产品呈现上并不可见. 但在某些应用中, 例如建筑, 网格是设计的重要组成部分并且与制造过程紧密相关. 这带来了与美学、面的平面性、沿边缘的支撑结构、静力学等相关的约束.

无限细分后的网格可以得到尽可能光滑的曲面 (如图 3.1), 对应于 NURBS 曲面, 网格本身不具有精确的数学定义, 但是在形态上, 更简单、更好地刻画模型拥有的几何特征. 二者主要区别就是 NURBS 曲面是连续的, 而网格是离散化的, 它们受控制顶点的影响弯曲不同.

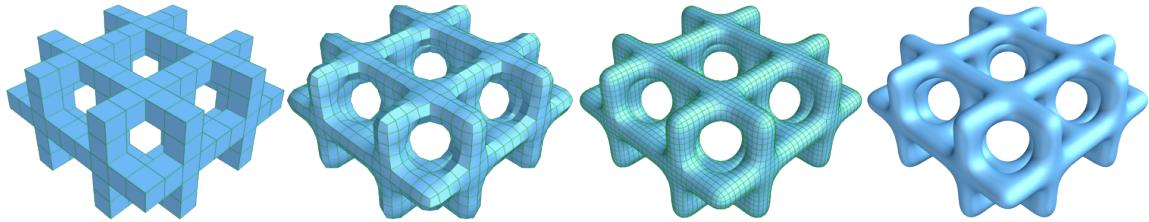


图 3.1: 两次 Catmull-Clark 细分后近似光滑的曲面.

Fig. 3.1: Nearly smooth mesh after twice Catmull-Clark subdivision.

网格是由相互连接的点构成的边和多边面构成的, 一般而言的网格的共边面只可能有两个. 每一个格点及其相连边和共边点构成格点星 (*vertex star*), 其中相连边的个数称为格点的维数 (*valence*). 常见的网格有三角网和四边网, 这不仅是理论概念, 还和建筑结构密切关联. 建筑中的节点、横梁、面板就对应着网格中的顶点、边线、多边面. 所以, 建筑几何的研究, 本质上就是微分几何的离散化研究.

离散微分几何理论是对经典三维流形的微分性质更为简单的定义, 抽象提取曲线或曲面的微分性质, 对一些基本几何概念 (如长度、夹角、平面性、相交性等) 做了直观的

诠释<sup>[103]</sup>. 离散网格是离散理论的主要研究对象, 它不仅是对光滑理论的提取和概括, 反之还会对已有光滑几何性质有一定的启发. 这在数学物理方面具有重要的指导意义. 最重要的是, 它可以非常便捷地应用于建模和优化.

好的网格面要求具有一定的美学价值, 增强网格的正则化, 具体地说, 调节网格格点的排布, 就可以实现这样的效果. 基本的想法就是调节所有网格格点使得所有网格面是尽可能正则的. 完全正则的网格面不容易获得, 常见的建筑表面网格面由较为正则的三角网格、四边网格或二者混合的网格构成. 获得相对正则的网格可以通过松弛(Relaxation)技术实现, 即将网格格点看成粒子, 网格边看成弹簧, 根据实际需求固定某些粒子位置之后, 当所有粒子处于静态平衡的时候, 得到的网格就是较为正则的. 比如对于维数为 6 的三角网格, 当中间格点位于相连 6 个格点的重心位置的时候, 得到的三角网格面看起来具有美观性.

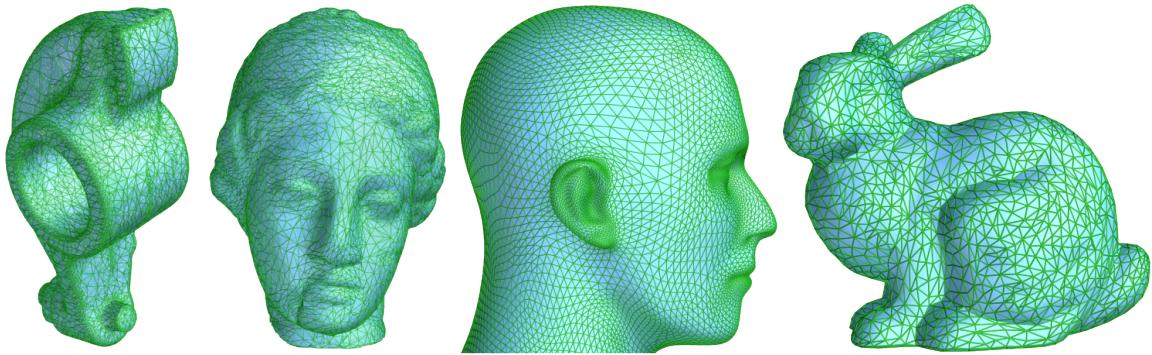


图 3.2: 三角网格面.

Fig. 3.2: Triangle meshes.

三角网格是网格处理中最常用的网格 (如图 3.2). 其网格节点数目和网格面的大小决定了对复杂曲面细节的刻画程度. 正如平面可以被正则的三角网格划分为六个部分, 形成三族正则的多边形, 含有三角网格的离散曲面也应该尽可能包含更多的维度为 6 的网格格点才具有美感. 用三角网格近似光滑参考面能取得很高的精度, 且同时对它的正则化处理也不复杂. 又因三角网格面是平的, 所以它非常适合建筑表面造型. 不过, 由于它本身的特性, 它在实际建筑应用中也体现出了一定的局限性, 主要表现在以下几个方

面<sup>[81]</sup>:

- **节点复杂性.** 用三角网格表示曲面需要的节点数目差不多是四边网格的两倍. 比如, 当用钢或玻璃材料化的三角网面, 6个梁柱构成的节点在负重和兼容方面提出了高的要求.
- **生产成本高.** 每个三角的板材的生产成本都要高于矩形的.
- **材料需求大.** 需要更多数目的梁柱、面板材和更大的重量.
- **不存在无挠节点.** 实际建造需要无挠的优化节点, 但是一般三角网格不具有.
- **不具备面等距和边等距.** 除了极其特殊的情况, 三角网格没有面等距和边等距, 这样不适合多层自由结构造型.

基于以上局限, 如何权衡节点数目和面的大小从而减少负重和节约成本需要对三角网格面的再参数化处理. 相比而言, 四边网格就具有一定的优越性和实际意义.

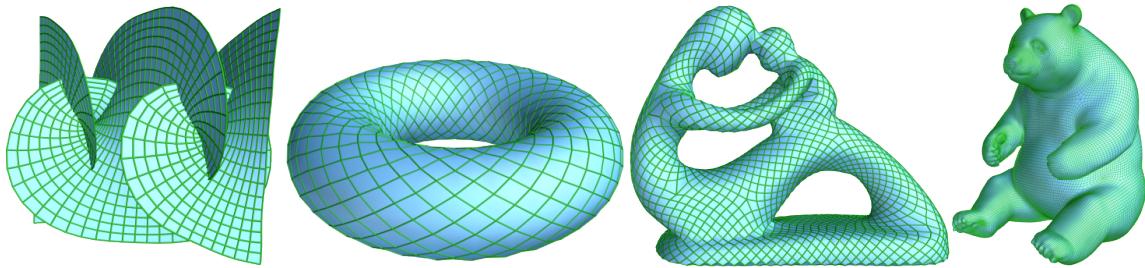


图 3.3: 四边网格面.

Fig. 3.3: Quadrilateral meshes.

平面上正则的四边网格是由矩形划分的, 含有维度为 4 的正则四边网格格点, 可以使得离散曲面看起来规整 (如图 3.3). 但是, 获得完全由四边网构成的曲面涉及到四边网部分问题. 它作为 CAD 和 CAE 研究的核心问题, 也一直无法自动完成, 需要人工调试<sup>[104]</sup>. 图 3.3 中前两个四边网格面不含有奇异点, 而后两个四边形网格含有奇异点 (维度为非 4 的格点). 一般而言, 四边网格并不像三角网格那样, 每个面都是平面的. 如果用四边网格替换三角网格表示防水建筑表面, 显然需要对四边网面平面化的处理.

考虑实际建筑需求, 本章节也以四边网格为研究对象, 在没有特殊说明时, 这些四边网格是可能存在奇异点的. 对四边网的边、角、面的研究常见的有如下三种简单的网格面, 即限制等边长的切比雪夫网面, 限制两族参数线成等角的等角网面和限制每个面是平面的共轭网面, 在下一小节我们先对其进行介绍.

### 3.1.1 基本网格

首先给出一些符号说明. 对于正则参数曲面  $\mathbf{f}(u, v)$ , 其在某点  $(u, v)$  的切向量是  $\mathbf{f}_u(u, v) = \partial_1 \mathbf{f}(u, v), \mathbf{f}_v(u, v) = \partial_2 \mathbf{f}(u, v)$ .  $\|\cdot\|$  表向量长度.

#### 切比雪夫网面

任何曲面都可以局部地由切比雪夫参数化, 因为只需对其曲率线网进行错切 (或称推移, shear) 和弯曲 (bending) 变换. 它的应用包括建筑网壳结构的设计<sup>[105]</sup>, 机织复合材料<sup>[106]</sup>、丝网结构<sup>[107]</sup>、多矢量场<sup>[108]</sup>、冠状动脉内支架<sup>[108]</sup> 等. 甚至包括错切的水果包装、衣架、平面金属网格、栅栏等 (如图 3.4).



图 3.4: 切比雪夫网面结构.

Fig. 3.4: Chebyshev structures.

共形参数化曲面满足保角变换但是允许拉伸和放缩, 而切比雪夫网面恰好相反, 要求具有保长性但是允许夹角发生变化.

**定义 2** <sup>[66]</sup> 映射  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  是光滑曲面参数化, 则  $\mathbf{f}(u, v)$  是切比雪夫的, 如果  $\|\mathbf{f}_u\| = \|\mathbf{f}_v\| = 1$ , 其中  $(u, v)$  是  $\mathbb{R}^2$  上的正交坐标系.

显然切比雪夫参数化的曲面在每点具有单位切向量, 满足切向量  $\mathbf{f}_u$  和  $\mathbf{f}_v$  分别沿  $v$ -向和  $u$ -向具有零微分值, 即  $\|\mathbf{f}_u\|_v = \|\mathbf{f}_v\|_u = 0$ . 离散切比雪夫网是光滑理论的离散等价概

念<sup>[66]</sup>, 由四边网构成, 所有的边长相同, 可能存在奇异点(如图 3.5).

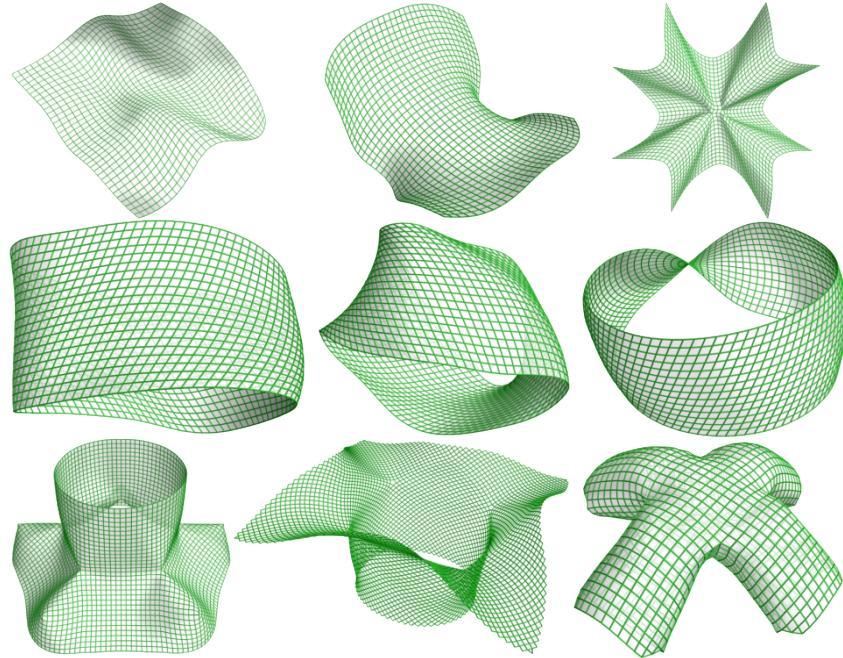


图 3.5: 切比雪夫网.

Fig. 3.5: Chebyshev meshes.

**定义 3** <sup>[66]</sup> 一个四边网是离散切比雪夫网, 当所有边长相等.

当放松四边网所有边等长的条件为只要求四边网对边长相等时, 该四边网是离散推广切比雪夫网<sup>[66]</sup>.

给定某个四边网的四个格点坐标  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ , 限制所有边长相等便可以使用不超过二次方程构造离散切比雪夫网

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4)^2 = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4)^2 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)^2.$$

### 等角网面

**定义 4** <sup>[66]</sup> 映射  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  是光滑曲面参数化, 则  $\mathbf{f}(u, v)$  是等角网, 如果  $\mathbf{f}_u \cdot \mathbf{f}_v = \cos \theta_0 = \text{const.}$ , 其中  $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  为指定夹角.

等角参数网定义两族参数线成相同角度的走向, 简单地说, 只要在每一个点处两族参数线的切向成等角即可. 离散的等角定义会略有不同, 且不唯一. 比如, 基于四边网, 经常使用的正交网定义是采用限制每个格点星处对角相等<sup>[33]</sup>, 即令  $\mathbf{e}_i, (i = 1, \dots, 4)$  是从格点发出的 4 个单位边向量, 满足

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle - \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle - \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle = 0. \quad (3.1)$$

对于常角, 则选用曲线切向量夹角的方式定义. 针对不同网格会有不同方法定义的切向量. 后面章节中会介绍几种不同的切向量定义方式. 不过一旦确定了所有格点处的两个单位切向量  $\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j$ , 便可以定义常角.

**定义 5** 一个四边网面称为离散等角网面, 当  $\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j = \cos \theta_0 = \text{const.}$

Tang 等<sup>[109]</sup> 提出了一种 Gauss-Newton 变量的算法 (Guided Projection 算法) 优化限制网. 关键点在将约束条件被转化为线性或者二次函数. 如果一些约束条件事先不是二次的, 需要引入额外变量服从了优化条件本身. 这里, 构造兼容的不超过二次的约束方程只需要引入辅助变量  $a_1, a_2$  构造离散曲线单位切向量满足内积为常数  $\cos \theta_0$ , 即

$$\langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle - \cos \theta_0 = 0, \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 - a_1 \cdot \mathbf{T}_1 = 0, \quad \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4 - a_2 \cdot \mathbf{T}_2 = 0. \quad (3.2)$$

不同限制或给定的常角  $\theta_0$ , 会得到不同纹理的离散曲面, 如图 3.6-左-中两个成  $60^\circ$  角的离散参数网, 图 3.6-右是成  $30^\circ$  角的离散参数网. 显然, 常角越小, 得到的网格越狭长, 为了美观和生产成本的考虑, 会尽量避免等角过小的情况. 特别地, 当常角  $\theta_0 = 90^\circ$  时, 网格面是正交网面 (如图 3.7). 正交网面的每个面不一定是矩形面, 具有近似矩形的良好界面, 同时它不受奇异点的影响, 在参数化建模过程中, 也是很基本的参数网构建方式. 在随后的几个章节里, 它也会被频繁的使用.

## 共轭网面

共轭网是射影变换下的不变量.

**定义 6** <sup>[66]</sup> 映射  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  是光滑曲面参数化, 则  $\mathbf{f}(u, v)$  是共轭网, 如果  $\mathbf{f}_{uv} = \mathbf{f}_{vu}$  位于切向量  $\mathbf{f}_u$  和  $\mathbf{f}_v$  张成的平面内, 即  $\mathbf{f}_{uv} \in \text{span}(\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v)$ .

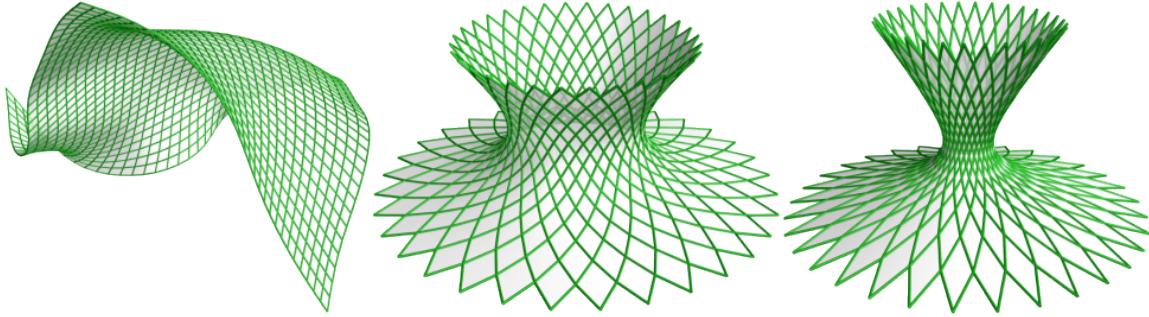


图 3.6: 等角网面.

Fig. 3.6: Isogonal meshes.

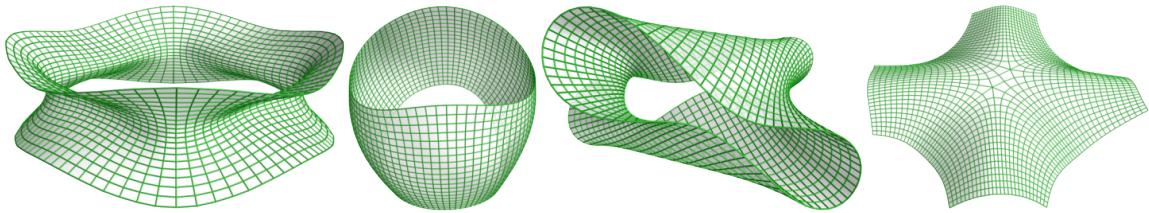


图 3.7: 正交网面.

Fig. 3.7: Orthogonal meshes.

存在共轭网的光滑曲面  $\mathbf{f}(u, v)$ , 若与面法向量为  $\mathbf{n}(u, v)$  局部满足  $\langle \mathbf{f}_u, \mathbf{n} \rangle = 0$ , 则  $\langle \mathbf{f}_u, \mathbf{n} \rangle_v = 0$ , 即  $\langle \mathbf{f}_{uv}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{f}_u, \mathbf{n}_v \rangle = 0$ . 这样  $\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v$  共轭等价于  $\langle \mathbf{f}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = 0$ , 等价于  $\langle \mathbf{f}_u, \mathbf{n}_v \rangle = 0$ , 也就是说,  $\mathbf{f}_{uv}$  位于由  $\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v$  张成的平面上. 这对于无穷小的四边形网格而言, 此时网格面是平的. 平面网格面是光滑共轭网的离散形式.

**定义 7** [66] 一个四边网面称为离散共轭网, 当其所有四边网是平面的.

如果对离散共轭网进行保平面性质的细分, 得到的极限参数线网是光滑曲面的共轭网. 显然共轭的切比雪夫网面的每个面都是菱形的.

常见的共轭网有如下几种:

- 从点光源发出的切于曲面的射线和阴影等高线的切线;
- 沿曲面上一条曲线的切平面包络成的可展曲面的直母线和曲线的切线;
- 主法曲率线;

- 平移曲面的等参线;
- 曲面与包含直线的平面的相交曲线以及直线上视点的等高线;
- 等光线和最陡下降方向的曲线.

将概念设计转化为真材实料的实体建筑包含着挑战、妥协和牺牲. 想要找到一种光滑的、无缝的、单一的材料塑造一个大型的建筑外表皮是很难的事情. 使用平面曲面对瓦片、面板、板瓦、防潮隔离层等建筑外表皮的构造是容易的, 这能减少建造嵌板的复杂度和生成的成本. 对称的贴图因其美学优点经常在艺术、产品设计、建筑上使用, 但是受限生成成本和效率等建造因素, 这样的图样几乎都是平面的, 如窗户、墙面、地板等.

一旦涉及到弯曲的造型, 尤其表面是双弯曲的形状, 问题就会变得复杂起来. 构造自由结构的常见解决办法是在支撑格栏上使用平面嵌板覆盖. 所以, 剩下的问题就是如何对复杂的形状进行分解和平面化构造. 这样, 方便使用不易弯曲的材质如玻璃等以平面表面的形式出现.

为了获得平面网格面, 在每个面  $\mathbf{f}_i$ , 可以通过引入单位化面法向量  $\mathbf{n}_i$ , 限制其与各边向量正交的几何关系, 即

$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{n}_i = 1, \mathbf{n}_i^T (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2}) = 0.$$

这样, 根据建筑材质的特性, 优化以上数值在某个特定阈值内, 可以指导生产材料的大小和规模, 以及安装时的贴合与缝隙. 同时, 额外引入了面法向量, 这对于建筑表面的定向、光线等研究提供了方便.

这里平直度是通过测量一个面板两对角线之间最短的距离, 如图 3.8 中四边网格对角线之间的线段 (红色) 的长度, 该数值是衡量面板造价最直接的因素. 显然该数值相对于网格的大小而言越小, 则四边网的平面化效果越好, 如果使用玻璃等不易弯曲的材料做嵌板, 则误差越小. 实际建造的经验而言, 数值达到  $10^{-6}$  的精度就已经足够.

图 3.9 中展示一组自由的离散共轭网面, 每个面都是尽可能平面化的, 其平直度见右侧数值  $[0, 10^{-6}]$ , 对应的颜色从蓝色渐变到红色, 即网格面越蓝, 平面化越高. 图 3.10-左展示了迪拜 Yas 酒店的建筑外表面. 全局上看似光滑的表面, 其实是由每个独立的玻璃构

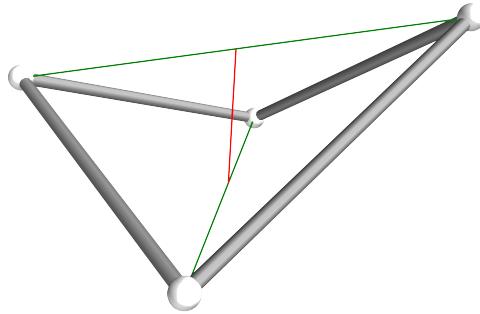


图 3.8: 网格平直度定义.

Fig. 3.8: Planarity of a quad.

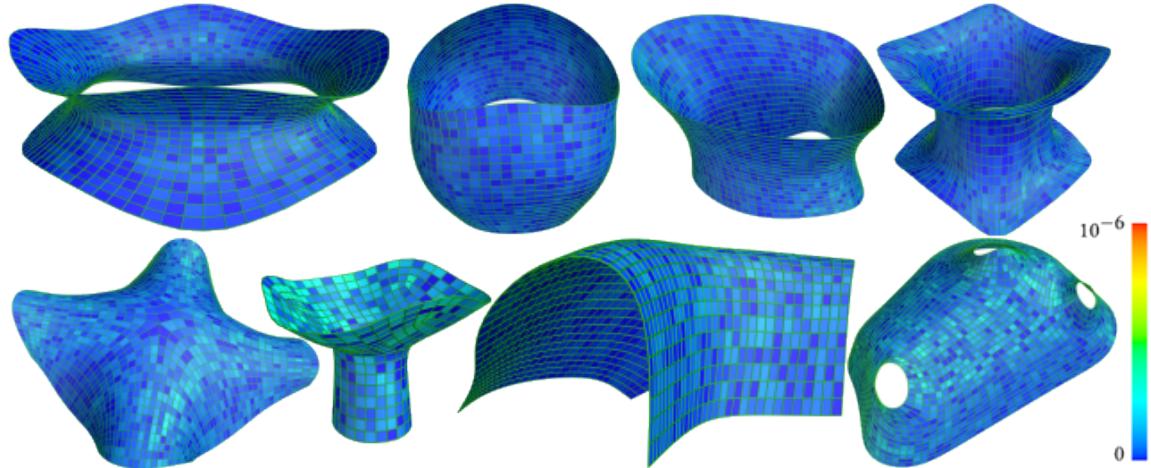


图 3.9: 共轭网格.

Fig. 3.9: Conjugate meshes.

成的非防水网格. 主要原因是其对应的四边网格面具有高度非平面性 (中图), 而经过平面化处理后得到共轭参数网面 (右图), 会在一定程度上改变其形状. 这也说明了, 使用平的玻璃板材实现光滑网格面设计并不容易.

网格只是一个单纯的数学概念, 至多表示的是单层的建筑结构. 而建筑表面往往是多层的, 多层的结构可以对应于网格的等距面. 这里常考虑的等距面是格点等距和面等距. 如果两个等距面在格点处具有相同距离, 对应的离散网格要求是圆网 (§ 3.5.1), 如果是在网格面上具有相同距离, 对应的网格是锥网 (§ 3.5.2). 这两种网格都是共轭网, 也都是离散化的主法曲率网. 对于建筑施工具有非常重要的作用.

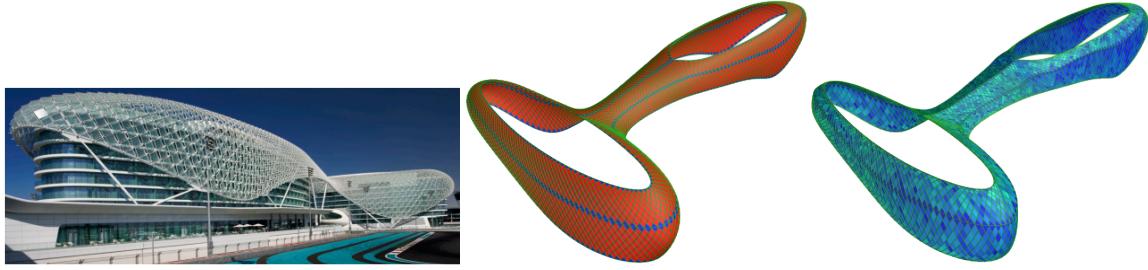


图 3.10: 平面化 Yas 酒店外表面.

Fig. 3.10: Planarize the surface of Yas Hotel.

### 3.2 离散常平均曲率曲面

CMC 曲面和极小曲面是等温面, 即等参线是主法曲率线且满足共形(保角)参数变换. 实际上, 通过分析 Euler 公式和 Meusnier 公式发现, 对角化等温网得到的正交参数网是 CMC 网且所有曲线具有相同的密切半径.

Pan 等<sup>[110]</sup>采用三角网格, 计算 Voronoi 嵌入类型指导构造给定自由边界的 CMC 曲面. 本质上, 其忽略了作为设计本身的网格布局. 本文推广以上光滑结论到离散化的 CMC 网. 该网格基于一种新颖的离散结构——带球面格点星的四边网 (S-网). 该网格关于离散曲率线网对称, 特别地, 当设定相同球面半径和正交网时便得到离散常平均曲率曲面, 此时离散网对角化离散曲率线网. 退化球面格点星为平面格点星, 这样便得到离散正交渐近线网, 即离散极小曲面. 具有相同密切圆半径的 CMC 曲面使有相同弧半径的可展面沿着参数线垂直交于曲面成为可能. 这对于具有重复参数的 CMC 网壳结构的建造和可展支撑结构的设计提供了理论基础.

本节首先从纯粹的几何角度分析该离散结构的构成条件, 然后转化曲线网和参数面的微分几何特征到实际可建造结构中, 大量重复的直或圆弧的薄片、全等的节点等元素的出现, 极大简化和丰富了模型的建立.

#### 3.2.1 弯曲支撑结构

本章节给出建立在光滑 CMC 曲面上弯曲支撑结构的构造条件. 首先, 分析 CMC 曲面的几何性质. Euler 公式给出了计算曲线在曲面上的法曲率公式, 即  $k_n = k_1 \cos \phi^2 +$

$k_2 \sin \phi^2$ , 其中  $k_1, k_2$  是两个主法曲率,  $\phi$  是曲线的法曲率方向和第一个主法曲率方向之间的夹角. 显然  $\phi$  符号的正负对法曲率计算结果没有影响, 说明具有相同法曲率的两个方向关于主法曲率方向对称. 特殊地, 当  $\phi = \pm\pi/4$  时, 法曲率等于平均曲率, 即  $k_n = (k_1 + k_2)/2 = H$ , 这意味着曲面的平均曲率等于主法向量对角线方向上的法曲率, 此时对角线网也是正交的.

Meusnier 公式解释了曲面上曲线的曲率  $k$  和法曲率  $k_n$  之间的关系, 即  $k_n = k \cos \psi$ , 其中  $\psi$  是曲线的密切平面与曲面的法向量的夹角. 如图 3.11 描述的是过点  $\mathbf{p}$  的曲线  $\mathbf{c}$  和其上的曲面  $\mathbf{S}$  在点  $\mathbf{p}$  处的法向量  $\mathbf{n}$ . 其几何意义是曲线的半径为  $\rho = 1/k$  的密切圆位于

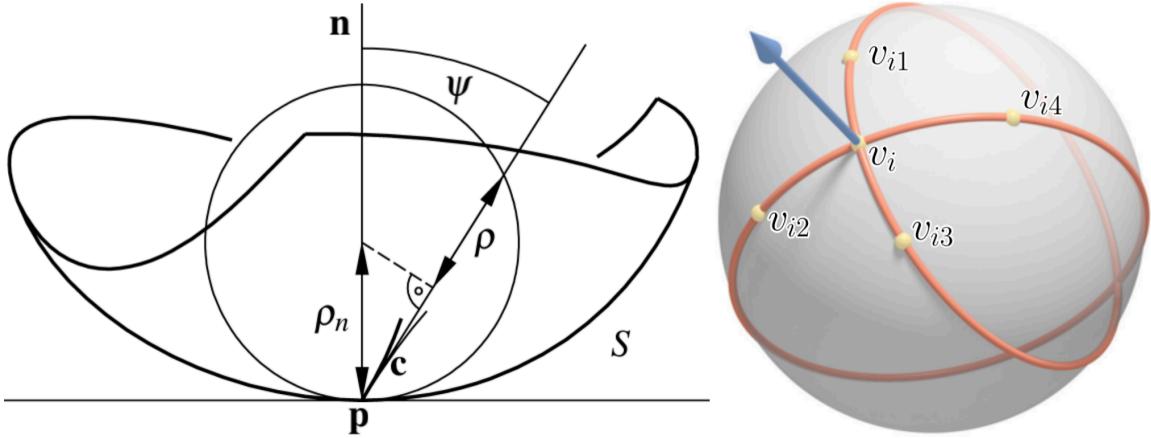


图 3.11: 格点星处的 Meusnier 球.

Fig. 3.11: Meusnier sphere at a vertex star.

半径为  $\rho_n = 1/k_n$  的球面上, 此时该球面即 Meusnier 球面与曲面相切. 法曲率  $k_n$  只依赖于曲线的切方向, 因此若指定曲面上过同一个点的所有曲线的切方向, 所有曲线的密切圆都位于 Meusnier 球面上. 结合 Euler 和 Meusnier 公式, 若指定每个点的 Meusnier 半径  $r = \rho_n = 1/k_n$  为常数, 则曲面是 CMC 曲面, 此时  $H = 1/r$ . 特别地, 当所有半径  $r = \infty$ , 曲面为极小曲面.

由几何关系  $k^2 = (k \cos \psi)^2 + (k \sin \psi)^2 = k_n^2 + k_g^2$ , 不难发现, 当  $\psi = 0$  时,  $k = \pm k_n, k_g = 0, \rho = \rho_n = r$ , 即曲线为曲面测地线, 也就是 Meusnier 球面的大圆. 因此当其中一族曲线是测地线且另一族是正交轨线时, 该曲线网构成测地平行坐标系. 进一步, 当正

交轨线也是测地线时, 曲面既是常平均曲率曲面, 又是可展曲面, 故只能是圆柱面或平面.

接下来发现, 沿着 CMC 曲面网格线, 存在直的或圆弧状的可展面垂直于该网格面.

**引理 4** 一个可以弯曲但不可以拉扯的平圆弧条面, 只沿着具有常法曲率的曲线  $c$  垂直附着于一个给定的参考面  $S$ . 特别地, 直条面只能沿着渐近线垂直附着于曲面  $S$ .

这里并没有给出严格的几何证明过程, 而是通过分析微分几何中曲线在曲面上的性质, 很自然得到的结论. 其对应的实际意义也具有指导性.

Darboux 标架为研究曲线在曲面上的弯曲程度提供了帮助. 沿着曲线  $c$  我们可以构造垂直于曲面  $S$  的可展面. 假设存在可展条面  $D$ , 附着于曲面上的曲线  $c$ . 如果从平直条构造模型,  $c$  对于  $D$  来说必然具有消失的测地曲率. 在  $c$  上每一点处,  $D$  的切平面与参考面  $S$  的切平面垂直. 因此  $c$  对于  $S$  具有消失的法曲率, 这就是  $S$  上所谓的渐近线.

推广以上平直的可展条面, 如果可展条  $D$  是弧形结构, 即边界曲线  $c$  是半径为  $r$  的圆弧, 则  $c$  关于  $D$  必具有常测地曲率  $1/r$ , 因此参考面  $S$  有常法曲率  $1/r$ . 沿着曲线  $c$  垂于曲面  $S$  的可展面  $D$  一般情况它的直母线  $r$  不平行于面法向量  $n$ (如图 3.12-左). Tang 等<sup>[67]</sup>

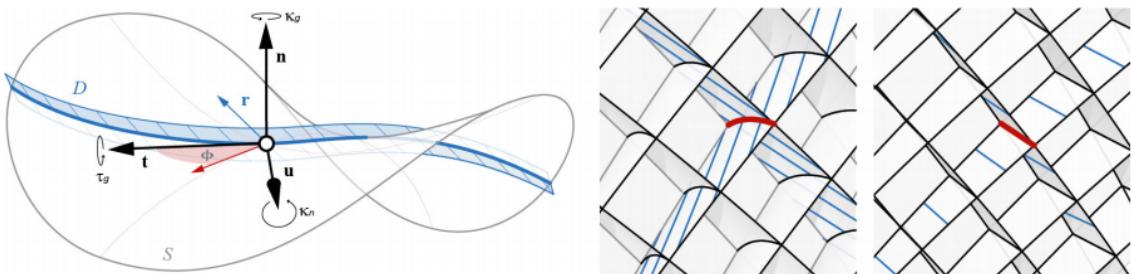


图 3.12: 可展条带面的直母线  $r$  一般不平行于法向量  $n$ .

Fig. 3.12: A developable strip's rulings  $r$  are generally not parallel to the normal vectors  $n$ .

详细讨论直母线  $r = k_g \mathbf{n} + \tau_g \mathbf{t}$  在  $\tau_g = 0$  时, 与面法向量  $\mathbf{n}$  一致的情况. 本文大多数情况不是这种, 但是与这个事实密切相关的是可展条面沿非曲面法向量的某条曲线  $\bar{n}$  相交于某个节点(如图 3.12-右). 然而曲线  $\bar{n}$  通常近乎直的, 因此对于实际需求, 可以使用直线近似代替. 这里涉及的节点夹角指直接在参考面  $S$  上测量的夹角. 理论上讲, 两个条面的夹角与沿着  $\bar{n}$  的夹角略有不同.

为了得到更多重复性的元素, 可能要求在所有的节点处具有相同的节点角. 对此, 需要 Euler 公式  $k_n = k_1 \cos \phi^2 + k_2 \sin \phi^2$ , 其中,  $\phi$  是第一个主法曲率方向和想要计算的法曲率方向的夹角. 当  $\phi = \pm\pi/4$  时,  $k_n = (k_1 + k_2)/2 = H$ , 这意味着这样的结构只能由平均曲率等于  $1/r$  的曲面实现. 这些 CMC 曲面在微分几何中被广泛研究, 特殊的情况是条面  $r = \infty$  是直的, 平均曲率  $H = 0$ , 曲面是极小曲面.

**定理 3** 由具有相同半径  $r$  且在节点正交的圆弧状条面构成的弯曲支撑结构建立了 CMC 曲面 ( $H = 1/r$ ). 特别地, 直的条面产生极小曲面. 支撑结构的条面被附着在主法曲率方向的对角线上的, 且这些对角方向也是取得测地挠率极值的方向.

因为 CMC 曲面和极小曲面是等温面, 所以它们拥有参数化  $\mathbf{S}(u, v)$ . 它是从  $(u, v)$  参数平面共形映射到等参线是主法曲率线的曲面. 这样参数化也映射对角网格  $u \pm v = const.$  到条面附着的曲线.

如果需要常角而非直角节点夹角  $2\phi$ , Euler 公式显示曲面  $\mathbf{S}$  在它的主法曲率之间存在关系  $Ak_1 + Bk_2 = 1/r$ ,  $A = \cos \phi^2$ ,  $B = \sin \phi^2$ . 而有着直的条面 ( $r = \infty$ ) 的结构会产生常负主法曲率比  $k_1/k_2 = -B/A$  的曲面<sup>[17]</sup>.

使用图 3.8 的办法衡量网格条面  $D$  的可展性, 即测量每个四边网格  $s(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  的对角线距离作为平面性. 为了统一测量单位, 需将该距离进行标准化, 即对角线距离值除以对角线的平均长度

$$ps(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = \frac{2d(\overline{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3}, \overline{\mathbf{v}_2\mathbf{v}_4})}{d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + d(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4)}.$$

例如, 对于  $1m \times 1m$  正方形,  $1cm$  的对角线距离对应的平面性为 0.007. 当用颜色可视化平面性时, 纯红色映射为平面性为 0.005 或者更高的, 如图 3.17, 3.18, 3.19, 3.20 中的颜色展示.

对于结构的数字化设计, 有必要构造能让条面附着的离散曲率网格, 这意味着需要提出针对四边网网格参数线能离散光滑曲面上常法曲率  $k_n$  的系统.

### 3.2.2 S-网格点星条件

离散化构造 CMC 曲面的一种简单形式是考虑正则四边网。类比于以上对光滑曲线在连续曲面上某一点处的分析，这里考虑每个四价格点星处几何条件。限制正交和 5 点共球条件，即得离散常平均曲率曲面。

**定义 8** 若正则四边网格的每个格点及其相连的四个格点位于一个球面上，则该网格称为 S-网 (S-net)，每个格点星称为球面格点星 (Spherical vertex star)。

具有球面格点星的四边网离散了关于主法曲率线对称的曲线网。

**定理 4** S-网关于主法曲率网对称。

构造 CMC 网的关键点不只是要求 S-网，还要求每个球半径数值相同，不妨设为  $r$ 。这样我们才能得到常法曲率为  $1/r$  的离散曲面，再补充正交条件，即得 CMC 曲面。

**定理 5** 具有相同半径的球面格点星的正则四边网离散化具有常法曲率的光滑曲面。

进一步地，若增加曲线在格点处正交的条件，离散常法曲率曲面是离散 CMC 曲面。

**推论 1** 正交且拥有常球面半径的 S-网是离散 CMC 曲面。

考虑格点  $\mathbf{v}_i$  及其相连接的四个邻域点  $\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \mathbf{v}_{i3}, \mathbf{v}_{i4}$ ，如图 3.11-右。当五点共球  $S_i$ ，球半径为  $r$  时，连续三点  $\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i3}$  构成离散曲线且位于在点  $\mathbf{v}_i$  处的密切圆上，该密切圆位于这个球上。对  $\mathbf{v}_{i2}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i4}$  同理。因为每个密切圆都切于离散的参考曲面，而该球包含两个密切圆也切与参考面，所以，这个球就是过点  $\mathbf{v}_i$  的两个参数线的公共 Meusnier 球。又因为所有这些格点球半径相同，所以 S-网就构成了离散常法曲率网。

离散 CMC 网涉及到的正交网面定义可以参考 Liu 等<sup>[33]</sup> 在介绍锥网 (conical mesh) 时使用的格点处两组对角和相等这一几何关系。特别地，当共球半径  $r = \infty$ ，球面退化为平面，则参数线变成渐近线，离散网格成为 A-网，正交的 A-网是离散极小曲面。

当然，除了这种绝对的几何状态，还有一种组合几何，即同一网格上，既存在球面格点星又存在平面格点星，这种性质的研究已经超过建筑几何的内容，更多是离散微分几何理论的范围，值得未来探索。

网格面是平面的 S-网具有参数线是共轭的且关于主法曲率方向对称的性质. 另外, 如果这种参数线是等角的, 它又是主法曲率比为常正数的离散 Weingarten 曲面. Weingarten 曲面是指平均曲率和 Gauss 曲率满足某个函数方程  $f(H, K) = 0$  的曲面, 或者说, 曲面的主法曲率  $k_1, k_2$  满足某个方程  $\phi(k_1, k_2) = 0$ . 其主要特例包括 CMC 曲面 ( $\phi = k_1 + k_2 - c$ )、极小曲面 ( $\phi = k_1 + k_2$ )、常 Gauss 曲率曲面 ( $\phi = k_1 \cdot k_2 - c$ )、常调和平均曲率曲面 ( $\phi = 1/2(1/k_1 + 1/k_2)$ )、一个主法曲率为常数的管面、旋转面、螺旋面等. Weingarten 曲面最主要的特征是具有重复性的曲率元. 因为一般的曲面通常具有两个参数族的曲率元, 而 Weingarten 曲面只有一族曲率元, 因此将 Weingarten 曲面推广到建筑上, 在建筑嵌板方面具有显著优势, 对于自由型曲面的构造与具有重复元素带来的建造成本之间的权衡是一种很好的策略. 曲面由单参数族的等参线覆盖, 且这些等参线上的主法曲率均为常数, 沿着这些等参线可以放置由相同模具制造的嵌板. 非 Weingarten 曲面所需模具的数量预计约为面板  $N$  的数量, 而 Weingarten 曲面所需模具数量减少到  $\sqrt{N}$ . 一个重要的研究优势是, 给定任意自由型的建筑曲面, 如果可以使用 Weingarten 曲面进行近似构造, 这就意味着极小地改变了设计却获得了更高重复性的局部形状, 这是建筑几何值得研究的地方.

### 3.2.3 构造方法

构造 CMC 网格的关键步骤是先从 CMC 曲面上计算得到等温网, 这里使用四边网格. 构造的等温网的主要特征是边沿着主法曲率方向, 四边网格尽可能正方形, 这样保证得到的对角化参数网格是尽可能正交的. CMC 曲面上这样的等温网总是存在的, 不同的等温网的主要差别是正方形的大小.

因此, 首先从给定的 CMC 曲面  $S$  上获得一组边沿着主法曲率方向的四边网, 可以使用 Rhino 中 T.MAP 插件快速获得初始网格  $M_0$ . 然后使用 Guided Projection 算法<sup>[109]</sup> 进行网格“拉伸”变形, 直到沿着主法曲率方向的四边网尽可能正方形 (即除了正交还要求四边长度尽可能相等) 为止, 这时的网格便是等温网  $M_1$ . 然后进行边中点细分, 得到的新参数网  $M_2$ , 就是参考面  $S$  上边位于常法曲率方向的网格 (如图 3.13).

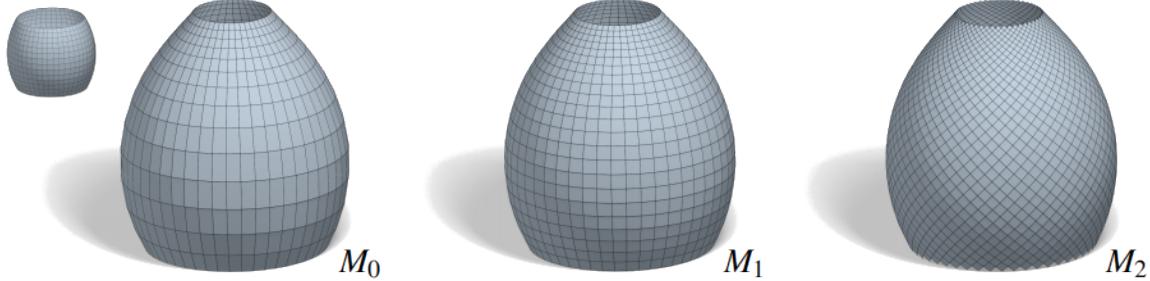


图 3.13: 由初始 unduloid 曲面构造近似等温网  $\mathbf{M}_1$  和 CMC 网  $\mathbf{M}_2$ .

Fig. 3.13: Get Nearly isothermic mesh  $\mathbf{M}_1$  and CMC mesh  $\mathbf{M}_2$  from an unduloid surface.

如果网格线的密度选取不当, 得到的等温网只会覆盖  $\mathbf{S}$  的一小部分. 可以增加额外的水平线, 随着 “拉伸” 变形, 网格线会逐渐均匀分散在参考面上. 所以一个恰当的办法是, 参考面  $\mathbf{S}$  选取的足够大, 这样给实际的结构足够的 “拉伸” 空间.

在投影算子的帮助下, 可以刻画初始网格的边向量  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$  位于曲面主法曲率方向  $\mathbf{d}_1$  或  $\mathbf{d}_2$  上, 即满足

$$0 = \mathbf{d}_1^T(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)\mathbf{d}_2^T(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^T\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2^T(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j).$$

随后, 需要优化给定网格成为具有球面格点星的网格. 这里有两种方法进行 5 点共球表示: 一种是代数表示, 即 5 点满足具有相同系数变量的二次球面方程, 另一种是对几何意义的呈现, 即通过引入共球球心为变量, 满足 5 点至球心的距离为指定半径长度. 二者可以相互转化并没有本质区别, 不过前者使用的球面方程表示更具有一般性, 比如当某些格点为平面格点星时, 即球心位于无穷远点, 半径无限大时, 球面方程二次项系数变量自动变为 0, 此时格点退化为 A-网格点. 显然用后者表示具有一定的局限性, 不过其在指定球面半径或成常角的球面格点星条件时表示得更直接.

首先, 对于球面格点星的代数限制. 设格点  $\mathbf{v}_i$  及其邻域点  $\mathbf{v}_{ij}, (j = 1, \dots, 4)$  共球, 则 5 点满足具有相同系数的二次曲面方程

$$f(\mathbf{v}_k) = a \cdot \mathbf{v}_k^2 + (b, c, d) \cdot \mathbf{v}_k^T + e = 0, (k = i, ij). \quad (3.3)$$

其对应的标准方程  $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 + (z - m_3)^2 = r^2$  的球心坐标  $\mathbf{m}_i = (m_i^1, m_i^2, m_i^3) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}, -\frac{d}{2a})$ , 和半径为  $r = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2 - 4a \cdot e}/(2a)$ .

显然将系数  $(a, b, c, d, e)$  放缩相同比例后, 方程表示的仍然是同一个曲面, 所以对其进行标准化处理具有简化的意义. 曲面在某一个点的法向量由曲面在该点的梯度决定, 即

$$\mathbf{n}(v) = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = -\frac{(2ax + b, 2ay + c, 2z + d)}{\|(2ax + b, 2ay + c, 2z + d)\|}.$$

结合球面方程, 令简化的  $\|\nabla f\|^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 4a \cdot e = 1$  即可.

针对每个格点  $\mathbf{v}_k = (x_k, y_k, z_k), (k = i, ij)$ , 转化以上代数关系为次数不超过二次的方程进而使用 Guided Projection 算法进行表示, 涉及到的变量为  $X = [\mathbf{v}_k, w_k, a, b, c, d, e]$  满足限制方程为:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_k^2 - w_k &= 0, \\ a \cdot w_k + b \cdot x_k + c \cdot y_k + d \cdot z_k + e &= 0, \\ b^2 + c^2 + d^2 - 4a \cdot e - 1 &= 0.\end{aligned}$$

若指定每个格点处  $\mathbf{v}_i$  处球面半径为  $r_i$ , 则补充变量  $\mathbf{m}_i = (m_i^1, m_i^2, m_i^3)$  和限制条件

$$\begin{aligned}2 \cdot a \cdot m_i^1 + b &= 0, \\ 2 \cdot a \cdot m_i^2 + c &= 0, \\ 2 \cdot a \cdot m_i^3 + d &= 0, \\ (\mathbf{v}_k - \mathbf{m}_i)^T(\mathbf{v}_k - \mathbf{m}_i) - r_i^2 &= 0.\end{aligned}$$

其次, 对球面格点星的几何意义进行限制表示. 在每个格点  $\mathbf{v}_i$  及其邻域点  $\mathbf{v}_{ij}, (j = 1, \dots, 4)$ , 引入半径  $r_i$ , 球心  $\mathbf{m}_i$  满足方程

$$(\mathbf{v}_k - \mathbf{m}_i)^T(\mathbf{v}_k - \mathbf{m}_i) - r_i^2 = 0, (k = i, ij).$$

对于成常角包括正交的 S-网, 需要对离散曲线切向量进行定义. CMC 曲面网的构造需要指定两族正交的参数线, 即满足在格点处, 两族参数线的切向量彼此垂直. 对此, 切向量  $\mathbf{T}_{i1}, \mathbf{T}_{i2}$  可以通过两个密切圆的切向量定义.

**定义 9** 球面格点星的切向量定义为

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{B}_{ij} \times \mathbf{N}_i, j = 1, 2,$$

其中  $\mathbf{B}_{i1} = (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_i) \times (\mathbf{v}_{i3} - \mathbf{v}_i)$ ,  $\mathbf{B}_{i2} = (\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{v}_i) \times (\mathbf{v}_{i4} - \mathbf{v}_i)$ ,  $\mathbf{N}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{m}_i$ .

引入额外变量, 转化上述关系为多项式次数不超过二次的等式, 便可以使用 Guided Projection 算法进行迭代优化求解, 降次等式如下:

$$(\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_i) \times (\mathbf{v}_{i3} - \mathbf{v}_i) - \mathbf{B}_{i1} = 0,$$

$$(\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{v}_i) \times (\mathbf{v}_{i4} - \mathbf{v}_i) - \mathbf{B}_{i2} = 0,$$

$$\mathbf{B}_{i1} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{m}_i) - \mathbf{T}_{i1} = 0,$$

$$\mathbf{B}_{i2} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{m}_i) - \mathbf{T}_{i2} = 0,$$

$$\mathbf{U}_{i1} - a_{i1} \cdot \mathbf{T}_{i1} = 0,$$

$$\mathbf{U}_{i2} - a_{i2} \cdot \mathbf{T}_{i2} = 0,$$

$$\mathbf{U}_{i1}^2 - 1 = 0,$$

$$\mathbf{U}_{i2}^2 - 1 = 0,$$

$$\mathbf{U}_{i1} * \mathbf{U}_{i2} = 0,$$

其中, 实变量  $a_{i1}, a_{i2}$  的引入为了构造单位化切向量  $\mathbf{U}_{i1}, \mathbf{U}_{i2}$ , 方便进一步对成等角参数线网的构造. 上述定义结合球面格点星的几何条件, 是光滑情况的离散等价物. 但该定义要求存在球心, 否则  $a_{i1}, a_{i2}$  取值无穷大. 为了避免这种情况的发生, 下面对退化情况的讨论给出了更具有一般性的切向量定义, 二者在本质上相同只是表达方式的区别.

根据方程 (3.3) 的球面代数表达式, 当二次项系数  $a = 0$  时, 球面方程退化为平面方程, 格点星为平面格点星, 面法向量  $\mathbf{n}/(b, c, d)$ . 由曲线曲率公式  $k = \frac{2a}{\|\nabla f\|} = 2a = 1/r$  知, 圆弧半径  $r$  为无穷大, 曲线曲率  $k = 0$ . 此时, 不能通过球心和半径表示离散曲线(直线)的切向量. 为了兼容球面格点星和平面格点星共存于一个网格面的情况, 需要对每个格点处的离散曲线切向量进行重新定义. 定义的条件只局限于使用折线段上临近三点  $\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i3}$  (如图 3.14), 且不能存在无穷值.

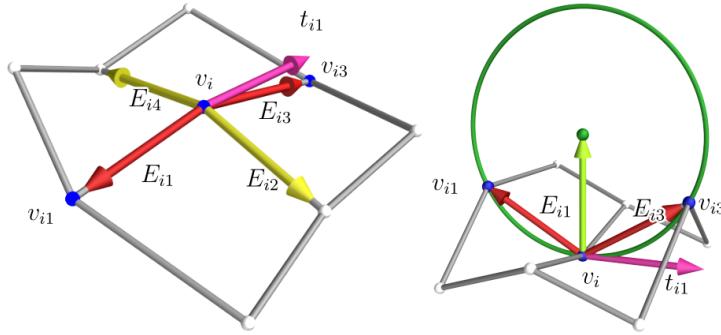


图 3.14: 格点星处离散曲线切向量.

Fig. 3.14: Tangents of discrete curves at vertex star.

为此, 给出如下定义.

**定义 10** 可同时兼容球面格点星和平面格点星两种不同条件的离散曲线  $\{v_{i1}, v_i, v_{i3}\}$  定义的切向量为

$$\mathbf{t}_{i1} = \mathbf{E}_{i1} \|\mathbf{E}_{i3}\|^2 - \mathbf{E}_{i3} \|\mathbf{E}_{i1}\|^2,$$

其中  $\mathbf{E}_{i1} = \mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{E}_{i3} = \mathbf{v}_{i3} - \mathbf{v}_i$ . 同理, 另一条离散曲线  $\{v_{i2}, v_i, v_{i4}\}$  定义的切向量为

$$\mathbf{t}_{i2} = \mathbf{E}_{i2} \|\mathbf{E}_{i4}\|^2 - \mathbf{E}_{i4} \|\mathbf{E}_{i2}\|^2.$$

首先, 对于平面格点星, 若三点共面非共线, 则  $\mathbf{t}_{i1}$  自然定义在该平面(密切面)内; 若三点共线, 只要不存在重叠情况(通过光滑因子可以保证), 则  $\mathbf{t}_{i1}$  方向与其共线. 其次, 对于球面格点星, 只需要验证  $\mathbf{t}_{i1}$  与定义 9 中的切向量  $\mathbf{T}_{i1}$  共线即可. 由初等几何知识可从圆上推导出

$$\mathbf{t}_{i1} / / \mathbf{T}_{i1} = \mathbf{E}_{i1} \times \mathbf{E}_{i3} \times \mathbf{N}_i = \mathbf{E}_{i3} \cdot (\mathbf{E}_{i1} \cdot \mathbf{N}_i) - \mathbf{E}_{i1} \cdot (\mathbf{E}_{i3} \cdot \mathbf{N}_i).$$

对  $\{v_{i2}, v_i, v_{i4}\}$  同理.

最后对于平直的或者弧状的可展面 **D** 的构造变得很直接, 只需要利用每个格点处的法向量. 对于球面格点星, 格点法向量从球心指向格点, 即共线于  $\mathbf{n} = (2ax + b, 2ay + c, 2z + d)$ , 当  $a = 0$  时, 即为平面格点星法向量  $\mathbf{n} = (b, c, d)$ . 选取合适的法向量长度, 即可以构造网格面的等距网, 相邻的具有相同长度的法向量可以形成四边网, 从而构成或直或弧状的可展面.

### 3.2.4 应用实例

S-网关于主法曲率网对称,而且出于对美学和制造方面的考虑,它具有简单的形状和更丰富的表现力. 图 3.15 展示了一组不同 S-网, 其中后三个是对已有网格的重新网格化表示. 特别地, 重新网格化后的 Lilium 塔(图 3.15-右)相比较最初按照楼层排列的主法曲率网, 具有更丰富有趣的外观特征.

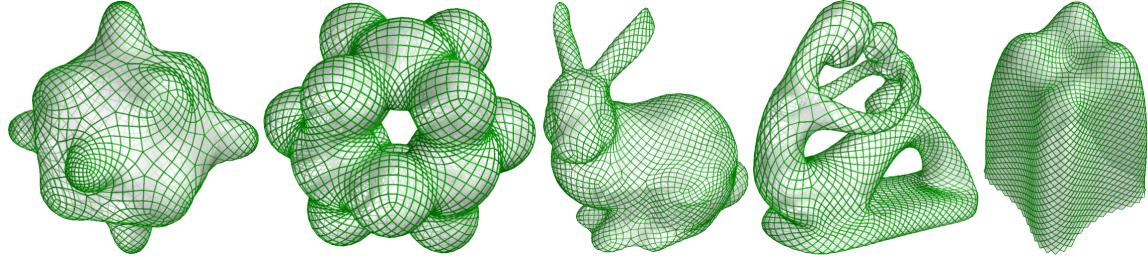


图 3.15: 主法曲率对称参数网.

Fig. 3.15: Principal symmetric meshes.

早在 1914 年由 Bruno Taut 建立的玻璃亭子(3.16-左)是最早使用非平凡的平面网构造建筑结构的实例之一. 尽管该旋转结构只包含一些面板,但在没有计算支撑情况下,获得如此高的美感仍然存在很多困难. Swiss Re Tower(3.16-中)是最新的一个建筑实例. 塔的形状也是一个简单的旋转表面. 和玻璃亭子类似,建筑师没有沿着楼层(平行圆)和垂直轮廓曲线(即沿着旋转表面的主曲率线)进行镶板,而是选择了一个更有趣的解决方案: 它遵循相对于主要方向对称的方向. 换句话说,这些网格离散了曲面上的曲线网,曲面在每个点处的平分方向是主曲率方向. Tornado 塔(3.16-右)内外表面同时存在两种网格结构,内层玻璃嵌板沿着主法曲率方向,外层网壳结构则遵循旋转曲面的主要对称网. 这三个建筑表面都是 S-网结构.

从光滑 CMC 曲面获得等温网, 对角化得到常法曲率网, 其仍然是 CMC 网. 通过构造带有球面格点星的 S-网, 满足正交参数线和球面常半经条件, 得到离散 CMC 网格. 同时附着在参数线与参数网正交的网格面是直的或圆弧状的可展面. 推广到实际建造中, 可以实现具有弧状或直的边界的弯曲支撑结构的网壳模型.



图 3.16: S-网建筑表面.

Fig. 3.16: Architectural surfaces by S-net.

假设一个初始网格  $\mathbf{M}$ , 沿着参考面  $\mathbf{S}$  的主法曲率方向排列, 使用光滑化、对齐、共形等限制保证网格  $\mathbf{M}$  在参考面  $\mathbf{S}$  上滑动来获得等温网.  $\mathbf{M}$  的对角线是条面放置的位置. 使用平面化的限制优化条面来获得可展条面, 其中限制下边界是在  $\mathbf{M}$  的对角线上, 上边界线与其等距, 等距高度为  $h$ .

这里以 unduloid,ocean 面为例进行构造. unduloid 由椭圆悬链线进行旋转得到. 图 3.17 分别显示了常法曲率网、过曲面法向量的初始条带面、1 次细分和 20 次迭代优化后的条带面, 其中条带面的颜色依据可展性的不同进行显示变化.

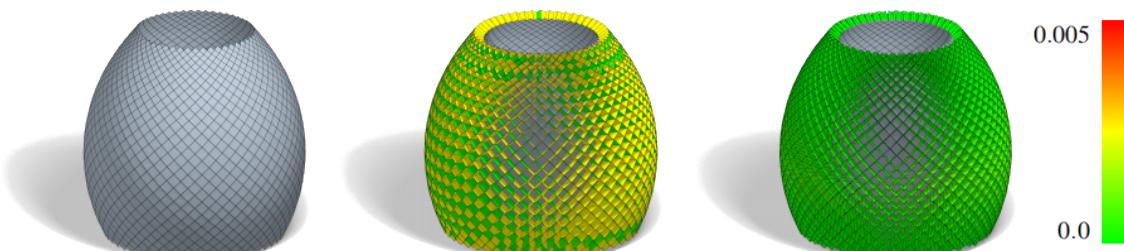


图 3.17: 优化常法曲率网上的弯曲支撑条带面.

Fig. 3.17: Optimized curved support strips along surfaces of constant normal curvature.

图 3.18 展示了缩小 unduloid 网格面上红色圆线的半径的效果, 过程中保持 unduloid

的边长且固定所有球面格点星的球面半径。事实上，所有半径等于 unduloid 的平均曲率的倒数。图中平均曲率的计算可以通过三角化参考面后估计，大约  $H = 1.25$ 。

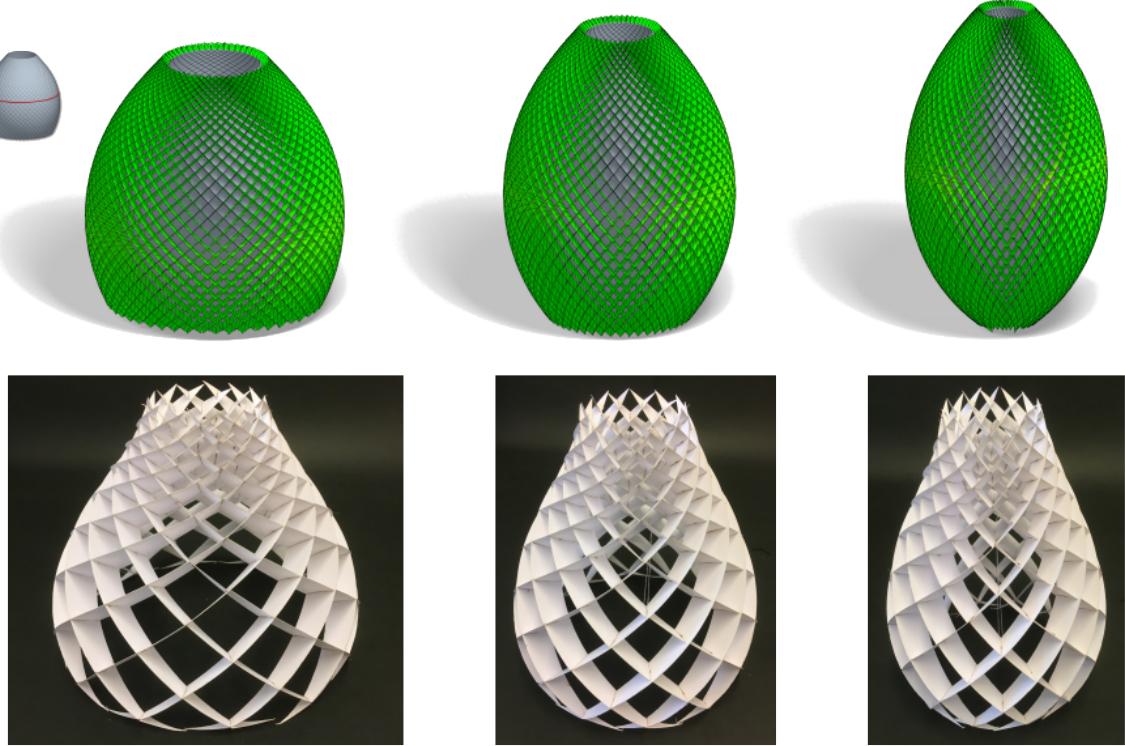


图 3.18：具有弯曲支撑结构的 S-网实际模型变化过程。

Fig. 3.18: Deformation of real S-net model with curved support structures.

图 3.19展示了参考面 ( $H = 0.68$ )、等温网、常法曲率曲线网和初始条面。优化后的条面见图 3.20。当接近边界线时，条面质量退化，不能通过优化条面解决。因为直母线由指导曲线的测地挠率  $\tau_g$  和法曲率  $k_n$  决定，而这两个量由  $\mathbf{S}$  唯一决定，因此不能单独改变。

除了 unduloid 和 ocean 曲面的例子，以上离散 CMC 曲面的构造还推广到了实际建筑模型中，即使用直的或具有相同半径的圆弧可展材料如纸板、木板、金属板等薄片作为弯曲支撑结构构造网壳模型，其中这些薄片沿着参考面的主法曲率线的对角线方向，过参考面的法向量，相交于正交节点。渐近网壳结构（如图 2.1）是从纯粹的几何概念转换到建筑项目的一个主要实例。双层的虚拟底面是退化的 CMC 曲面，即极小曲面。薄片是直的可展支撑结构。模型的构造涉及到严格的几何限制设计、制造、带压力的薄片网格的

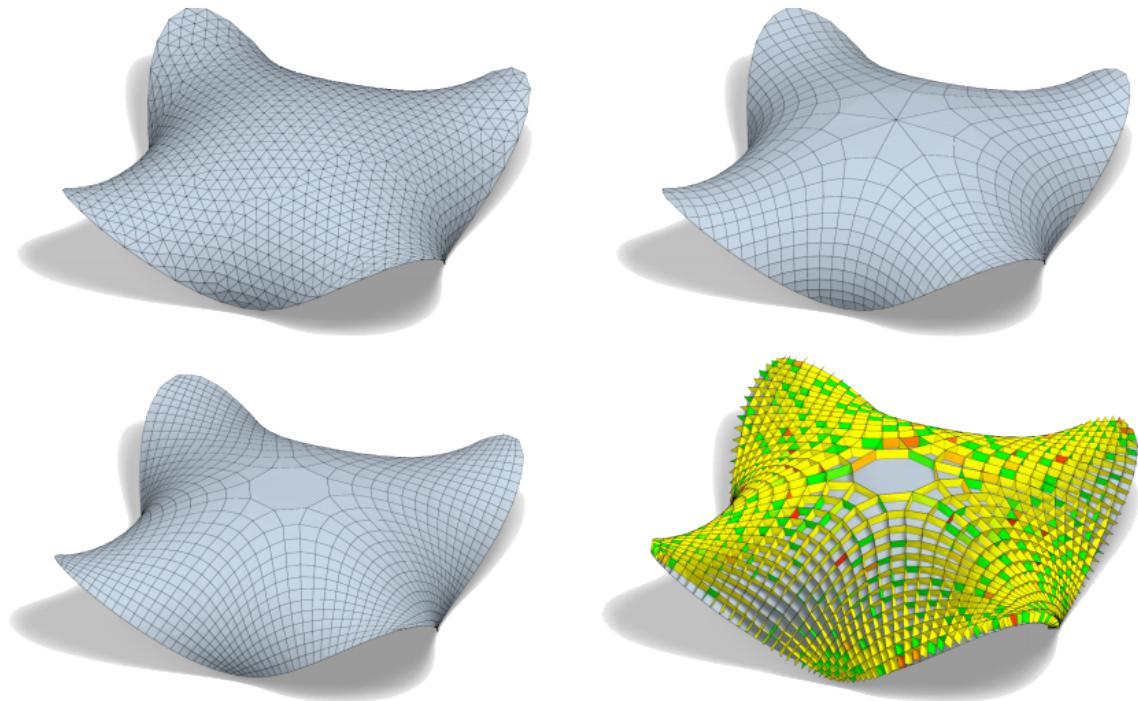


图 3.19: 从 Ocean 曲面逐渐构造等温网、常法曲率网和初始条带面.

Fig. 3.19: Ocean surface, isothermic mesh, mesh of constant normal curvature and initial strips.

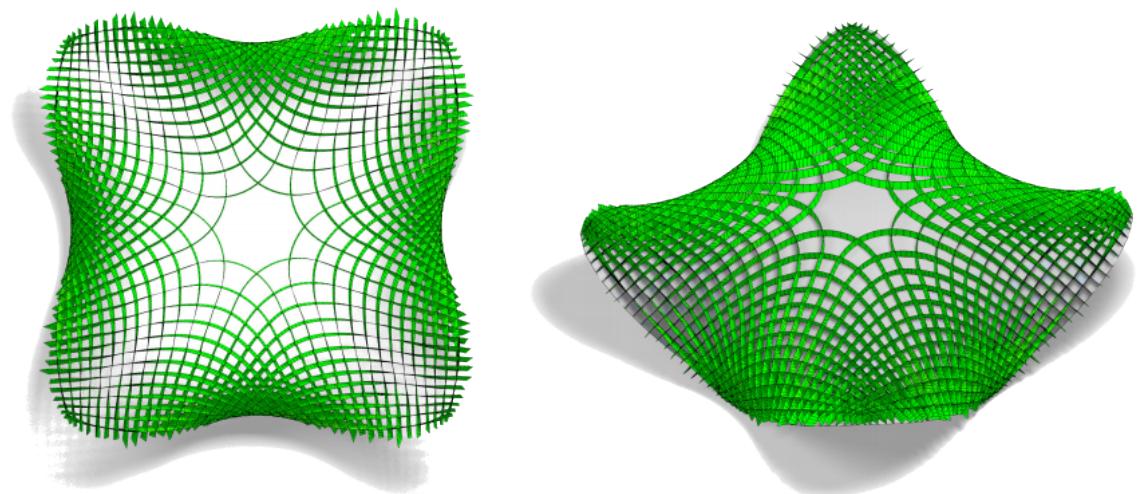


图 3.20: 两次细分和优化后的弯曲条带面.

Fig. 3.20: Curved strips after 2 rounds of subdivision and optimization.



图 3.21: TU Munich 校园内具有直可展支撑结构的渐近网壳结构细节.

Fig. 3.21: Details of the Asymptotic Gridshell with straight developable support structures in TU Munich.

组装和负重行为的分析等. 这个过程既体现了几何设计的优点又显示了建造中存在的挑战. 详细的制造过程参考文献<sup>[16,88]</sup>.

该网壳模型是满足插值边界线要求的极小曲面网壳结构, 跨度为  $9 \times 12\text{m}$ , 覆盖近似  $90\text{m}^2$  的面积区域, 自重为  $18\text{kg/m}^2$ , 共计 1.6 吨. 这是第一个在 CMC 曲面上利用常法曲率网格的几何潜力构造的建筑结构. 形状和薄片梁格的美学质量由形成过程决定, 依从该设计方法的曲率限制. 细长的薄片创造了渐变的美学效果, 直视看到的是全透明的效果, 倾斜望去, 近乎不透明表面(如图 3.21-左). 弧形的边界促使了网格面类壳形状, 扩展这种设计方法到所有 CMC 曲面能创造同向单行的形状.

所有的节点处都是全等的和正交的. 因此可以使用重复的正交连接点(如图 3.21-右). 在每一个交点处, 两对平行的薄片通过垂直的插槽交错拼接. 插槽是双层的, 和薄片的厚度一样宽, 在集装过程中允许至多  $60^\circ$  旋转. 在变形到目标几何形状后, 一个简单的运输螺栓用来固定连接点. 一个额外的十字形夹子固定对角缆线.

渐近网壳模型由 100mm 高, 1.5mm 厚的直的无应变双层钢薄片构成, 平行等距薄片距离是 25mm, 它们遵循钢原型详细的构造策略. 薄片被激光切割成直的, 这样允许极小斜切, 同时也很容易运输. 垫圈和夹子的制造也被包含在相同的激光切割过程, 极大地减少了各个部件的制造成本. 薄片由卡槽组合在一起形成极小曲面的平面梁或者一般 CMC 的球状梁. 在这个模型生成过程中, 薄片没有测地挠率, 交角非常角. 连接点是灵活的, 允许剪刀状运行. 薄片梁格能在预先定义的形状空间内进行变形, 其中一个是指定的

参考曲面, 只需要施加每个节点交角为  $90^\circ$ . 变形的行为也遵循相同的主法曲率原则, 动力行为称为合规机制 (*Compliant Mechanism*), 即过程中不需要脚手架可以弹性竖起. 当然, 该机制服从于重力和其他外部压力, 需要被选择性地测量, 而这更多是建筑建造的范围, 值得进一步的研究.

### 3.3 离散测地平行坐标系

最和本文工作相关的研究是 Rabinovich 等<sup>[69-71]</sup> 的三篇文章, 本文推广了这个离散结构, 使用了离散化的测地平行坐标系, 构造了离散测地正交网格, 并与离散近似可展曲面和离散旋转面建立了密切联系. 离散测地平行坐标系的使用表现出了多方面的潜在优势, 无论是在离散数学理论上, 还是在实际建筑应用上.

曲面的测地坐标系是一种正交坐标系且其中一族参数线是测地线. 它是内蕴几何下最简单的坐标系, 包括测地平行坐标系和测地极坐标系. 我们先介绍测地平行坐标系<sup>[111]</sup>的基本知识, 随后探索其离散几何意义和其潜在的应用价值, 并在第四章介绍该离散模型在建筑设计上的应用.

#### 3.3.1 几何性质

**定义 11** <sup>[111]</sup> 如果一条曲线与一族给定的曲线相交成直角, 则该曲线称为给定曲线的正交轨线.

平面上一族直线或同心圆 (见图 3.22) 的正交轨线 (红) 有如下性质: 任意两个正交轨线被这族直线或同心圆所截线段长都相等.

曲面上任意一族测地线的正交轨线有相同的性质, 即任意两条正交轨线截取相等测地线段长. 反之, 如果曲面上一族曲线被任意两条正交轨线所截线段等长, 则该曲线族都是曲面上的测地线, 如图 3.23 中红色线是测地线, 被灰色的正交轨线截取等长测地线段.

**定理 6** <sup>[111]</sup> 曲面上的曲线族是测地线当且仅当由任意两条正交轨线切割的测地线段长都相同.

**定义 12** <sup>[111]</sup> 一族测地线的正交轨线被称为测地平行线.

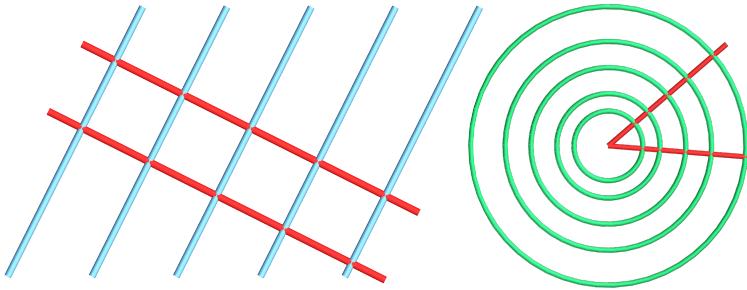


图 3.22: 平面直线族和同心圆及其各自的正交轨线.

Fig. 3.22: Planar lines and concentric circles and their orthogonal trajectories.

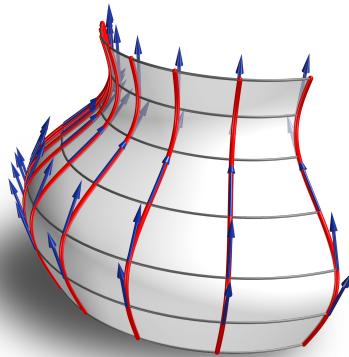


图 3.23: 测地平行线截取的测地线段等长.

Fig. 3.23: Same geodesic edge lengths cutting by geodesic parallels.

之所以被称作平行线, 是因为任意两条正交轨线间距相同. 而被叫做测地平行线是因为该距离是沿着测地线测量的. 一个简单但也非常重要的例子是旋转面上的平行圆均是测地平行线, 特殊地, 球面上的纬线也是.

通常, 测地平行线不是测地线, 但是当一族测地平行线也是测地线时, 曲面是可展曲面, 即两族正交测地线参数化的曲面是可展曲面<sup>[111]</sup>, 其离散化的结论即是 § 3.4.1 中介绍的离散正交测地网<sup>[69-71]</sup> 表示的离散可展曲面. 以下说明对于任意曲面, 总是存在测地平行坐标系, 且对于指定的测地平行线, 测地线族是唯一的.

若曲面  $\mathbf{S}$  上存在一条光滑的曲线  $\mathbf{c}_0$ , 则曲面  $\mathbf{S}$  上存在唯一一族测地线与曲线  $\mathbf{c}_0$  垂直相交. 如果从  $\mathbf{c}_0$  沿着测地线测量相同的段长位置, 则它们轨迹的端点是测地线的正交轨线  $\mathbf{c}_s$ , 曲线  $\mathbf{c}_s$  也是测地平行线.

平面上平行直线和同心圆满足任意两条之间距离是相等常数(如图 3.22 所示), 更一般地, 任意曲线和它们的等距线也具有这个特性. 垂直于一族等距线的曲线是测地线. 局部地, 这两族曲线是平面区域上的参数面  $\mathbf{f}(u, v)$  的等参线族, 这是一种特殊的曲面上的测地平行坐标系<sup>[112]</sup>.

**定义 13** 一个曲面  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \supseteq [u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  称为是沿着测地平行坐标系的参数化曲面, 如果参数线是正交的 ( $f_u \perp f_v$ ), 且其中一族参数线, 如  $u$ -线 ( $v = \text{const.}$ ), 是测地线(如图 3.24).

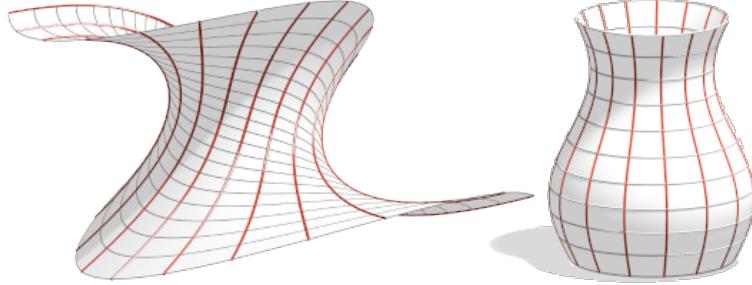


图 3.24: 测地平行坐标系.

Fig. 3.24: Geodesic parallel coordinates.

一族非常简单但也非常重要的这样测地平行坐标系的例子包含所有如下参数化的旋转面:

$$\mathbf{f}(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u)).$$

这个参数化明显是正交的且经线是测地线(图 3.24-右,  $v = \text{const.}$ ).

### 3.3.2 格点星条件

本文主要用正则四边网, 即类似于  $\mathbb{Z}^2$  格状矩形比例网格, 构造离散正交测地网. 由映射  $\mathbf{f}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  定义的离散参数网, 过  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  的参数线构成多边形  $\mathbf{f}(\mathbb{Z}, v), \mathbf{f}(u, \mathbb{Z})$ , 类似光滑例子, 称其为  $u$ -线和  $v$ -线. 因为只是考虑围绕  $\mathbf{f}(u, v)$  的局部网格性质, 所以针对格点使用类似表示方式<sup>[70]</sup>(如图 3.25). 为了使表达式简短清楚, 记  $\mathbf{f}(u, v) \rightarrow \mathbf{f}$  并使用轮替

符号表示  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(u+1, v)$  和  $\mathbf{f}_{\bar{1}} = \mathbf{f}(u-1, v)$ , 如下所示:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(u, v),$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(u+1, v),$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(u, v+1),$$

$$\mathbf{f}_{\bar{1}} = \mathbf{f}(u-1, v),$$

$$\mathbf{f}_{\bar{2}} = \mathbf{f}(u, v-1),$$

$$\mathbf{f}_{1\bar{2}} = \mathbf{f}(u+1, v-1),$$

$$\mathbf{f}_{\bar{1}\bar{2}} = \mathbf{f}(u-1, v+1),$$

$$\mathbf{f}_{1\bar{2}} = \mathbf{f}(u+1, v-1),$$

$$\mathbf{f}_{\bar{1}\bar{2}} = \mathbf{f}(u-1, v-1),$$

其离散偏导定义为一阶向前差分算子:

$$\delta_u \mathbf{f} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}, \quad \delta_u \mathbf{f}_{\bar{1}} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_{\bar{1}}, \quad \delta_v \mathbf{f} = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}, \quad \delta_v \mathbf{f}_{\bar{2}} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_{\bar{2}},$$

进而, 二阶偏导为:

$$\delta_{uu} \mathbf{f}_{\bar{1}} = \delta_u (\delta_u \mathbf{f}_{\bar{1}}) = \delta_u (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\bar{1}}) = \delta_u \mathbf{f} - \delta_u \mathbf{f}_{\bar{1}} = \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f} + \mathbf{f}_{\bar{1}}.$$

通过算法中的光滑因子可以保证非退化的边长. 从  $\mathbf{f}$  点发出的单位边向量是

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\delta_u \mathbf{f}}{\|\delta_u \mathbf{f}\|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\delta_v \mathbf{f}}{\|\delta_v \mathbf{f}\|}, \quad \mathbf{e}_3 = -\frac{\delta_u \mathbf{f}_{\bar{1}}}{\|\delta_u \mathbf{f}_{\bar{1}}\|}, \quad \mathbf{e}_4 = -\frac{\delta_v \mathbf{f}_{\bar{2}}}{\|\delta_v \mathbf{f}_{\bar{2}}\|}.$$

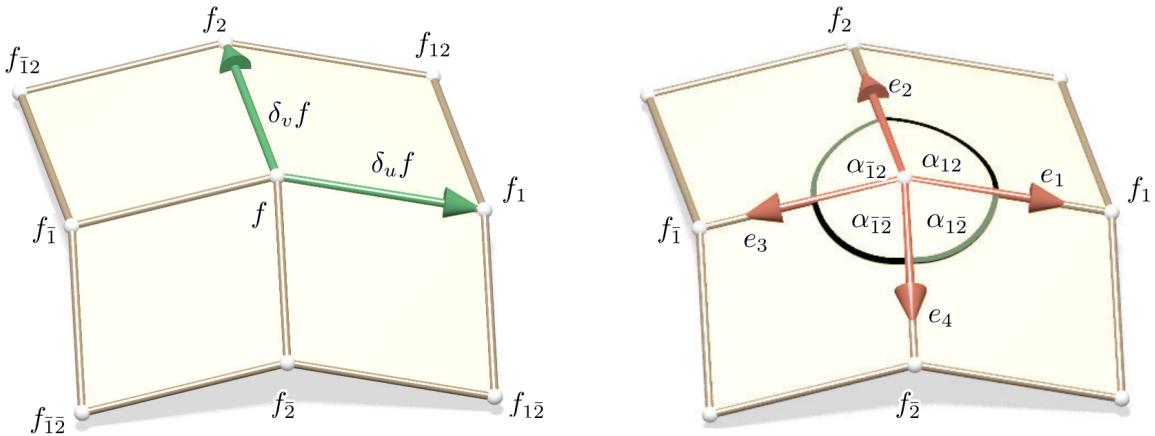


图 3.25: 格点星处单位边向量和夹角.

Fig. 3.25: Unit edge vectors and angles at a vertex star.

从格点  $\mathbf{f}$  出发的边向量夹角为

$$\alpha_{12} = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \arccos \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle,$$

$$\alpha_{\bar{1}2} = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \arccos \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle,$$

$$\alpha_{\bar{1}\bar{2}} = \angle(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = \arccos \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle,$$

$$\alpha_{1\bar{2}} = \angle(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1) = \arccos \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle,$$

其中  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示欧式数量积.

定义  $u$ -方向和  $v$ -方向的单位切向量为这些方向上两个连续单位边向量的差的单位化:

$$\mathbf{T}^u = \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\|}, \quad \mathbf{T}^v = \frac{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4}{\|\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4\|}.$$

进一步, 定义在格点  $\mathbf{f}$  的  $u$ -方向和  $v$ -方向的参数多边形的单位边长主法向量, 其中连续多边形部分之间的夹角非 0 或  $\pi$ :

$$\mathbf{N}^u = \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\|}, \quad \mathbf{N}^v = \frac{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4}{\|\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4\|}.$$

单位切向量和单位主法向量在图 3.26 中的密切平面上得以展示. 在以上设定的离散化中, 切向量和主法向量是正交的, 即  $\mathbf{N}^u \perp \mathbf{T}^u, \mathbf{N}^v \perp \mathbf{T}^v$ .

有了切平面上的正交基  $(\mathbf{T}^u, \mathbf{T}^v)$ , 可以在格点  $\mathbf{f}$  处定义连续的网格单位法向量

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}^u \times \mathbf{T}^v}{\|\mathbf{T}^u \times \mathbf{T}^v\|}.$$

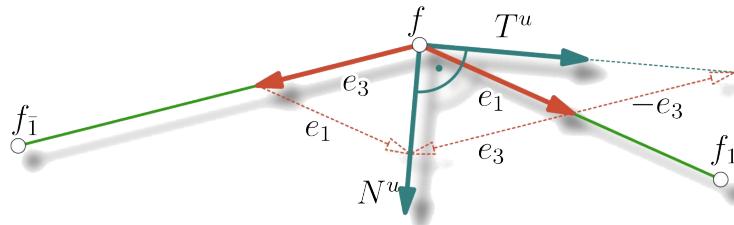


图 3.26: 格点星处局部标准正交基.

Fig. 3.26: Local orthonormal basis at a vertex star.

### 离散测地参数线

以下定义是离散化的已知事实, 即曲面上的曲线是测地线当且仅当它的主法向量定向后和曲面的法向量方向一致.

**定义 14** 离散参数网的  $u$ -参数线是离散测地线 当且仅当  $\mathbf{N}^u$  平行于  $\mathbf{N}$ .

**注 2** 这里离散测地线只定义在内部曲线而不是边界线上.

**引理 5** 离散参数网的  $u$ -参数线是离散测地线, 如果在每个格点  $f$  从  $u$ -参数发射出的边与两侧的边夹角的余弦值和相等, 即

$$\cos \alpha_{12} + \cos \alpha_{\bar{1}2} = \cos \alpha_{1\bar{2}} + \cos \alpha_{\bar{1}\bar{2}}.$$

**证明** 首先, 假设  $\mathbf{N}^u$  总是垂直于  $\mathbf{T}^u$ , 有

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^u \parallel \mathbf{N} &\Leftrightarrow \mathbf{N}^u \perp \mathbf{T}^u, \mathbf{T}^v \Leftrightarrow \mathbf{N}^u \perp \mathbf{T}^v \Leftrightarrow \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4 \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle - \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \alpha_{12} + \cos \alpha_{\bar{1}2} - \cos \alpha_{1\bar{2}} - \cos \alpha_{\bar{1}\bar{2}} = 0. \end{aligned}$$

□

## 离散正交网

有了参数线的切向量, 我们可以很自然地定义网格的正交条件:

**定义 15** 离散参数网是离散正交网 当且仅当在每一个格点参数线的切向量  $\mathbf{T}^u$  和  $\mathbf{T}^v$  都正交.

**引理 6** 一个离散参数网是一个离散正交网, 如果在每一个格点对角的余弦值之和相等, 即

$$\cos \alpha_{12} + \cos \alpha_{\bar{1}2} = \cos \alpha_{1\bar{2}} + \cos \alpha_{\bar{1}\bar{2}}.$$

**证明** 由已知, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^u \perp \mathbf{T}^v &\Leftrightarrow \langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4 \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle + \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \alpha_{12} - \cos \alpha_{\bar{1}2} - \cos \alpha_{1\bar{2}} + \cos \alpha_{\bar{1}\bar{2}} = 0. \end{aligned}$$

□

离散测地线的另一个定义  $\alpha_{12} + \alpha_{\bar{1}2} = \alpha_{1\bar{2}} + \alpha_{\bar{1}\bar{2}}$ , 它与多面体曲面相关<sup>[68,113]</sup>. 类似地, 一个不需要余弦值的离散正交条件 ( $\alpha_{12} + \alpha_{\bar{1}2} = \alpha_{1\bar{2}} + \alpha_{\bar{1}\bar{2}}$ ) 也与多面体曲面相关, 定义在

锥网<sup>[33]</sup>的理论体系里。在引理 5 和 6 的特征方程中出现的余弦值对于数值优化计算甚至还是一种优势, 因为它们对于变量(边单位向量)来说是双线性的。所以它们兼容 Guided Projection 算法<sup>[109]</sup>, 即通过使用最多二次的约束方程(即使需要引入额外的变量)来加速 Gauss-Newton 方法的收敛性。

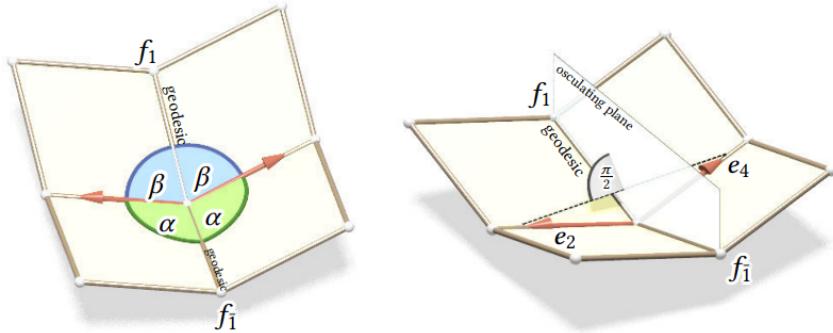


图 3.27: 离散测地平行坐标系几何特征。

Fig. 3.27: Geometry properties of discrete parallel coordinates.

### 离散测地平行

结合上面构造的离散测地线和离散正交网, 给出以下研究的本质定义, 它离散化了测地平行坐标系。

**定义 16** 离散参数网格称为是由离散测地平行坐标系参数化的, 如果网格是离散正交的且  $u$  参数线是离散测地线。

**定理 7** 以下三个条件彼此等价:

(1)  $f$  由离散测地平行坐标系参数化。

(2) 在每个格点  $f$ , 有  $\alpha_{12} = \alpha_{1\bar{2}}$ ,  $\alpha_{\bar{1}2} = \alpha_{\bar{1}\bar{2}}$  (图 3.27-左)。

(3) 在每个格点  $f$ ,  $u$ -线的离散密切平面(由  $f_{\bar{1}}, f, f_1$  张成)是  $v$ -线边向量的二分面, 即  $e_2$  和  $e_4$  关于  $u$ -方向的密切平面镜面对称(见图 3.27-右)。

**证明** 条件(1)和条件(2)的等价是显然的, 因为从引理5和引理6增加和提取特征方程能产生  $\cos \alpha_{12} = \cos \alpha_{1\bar{2}}$  和  $\cos \alpha_{\bar{1}2} = \cos \alpha_{\bar{1}\bar{2}}$ , 因此得到角的相等关系. 条件(2)和条件(3)的等价可以从反射的保角关系(见图3.27)推导.  $\mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_4$  关于包含  $\mathbf{e}_1$  的对称平面的镜面对称暗含了相等的角关系  $\alpha_{12} = \alpha_{1\bar{2}}$ , 同理,  $\alpha_{\bar{1}2} = \alpha_{\bar{1}\bar{2}}$ . 另一方面, 角关系  $\alpha_{12} = \alpha_{1\bar{2}}$  暗示了  $\mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_4$  是直圆锥的直母线, 其中  $ff_1$  是锥轴且格点是  $f$ . 类似地,  $\mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_4$  也是锥轴为  $ff_{\bar{1}}$  且相同格点  $f$  的直圆锥的直母线. 因为两个圆锥关于密切平面  $ff_1f_{\bar{1}}$  对称, 向量  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4$  关于相同的平面镜面对称.  $\square$

**注3** 如上条件3只在格点  $f_{\bar{1}}, f, f_1$  非共线的情况下有效. 否则只有条件1和条件2有效.

在章节3.3.4中, 应用离散测地平行坐标系参数化的曲面局部或全局地近似了给定的参考曲面(如图3.31、3.32、3.33), 其近似效果在视觉上和Clairaut数值上都说明了网格的性质.

### 3.3.3 测地条带面

离散测地平行坐标系分割曲面为测地条带面, 本节将讨论贯穿整个条带面的宽度的变化是怎样与Gauss曲率相关联的, 且展示如何控制条带面宽度来建立近似可展曲面. 本节也将介绍如何通过控制所有条带面的宽度构造离散旋转面的条件, 和其等距变形中保持的不变量.

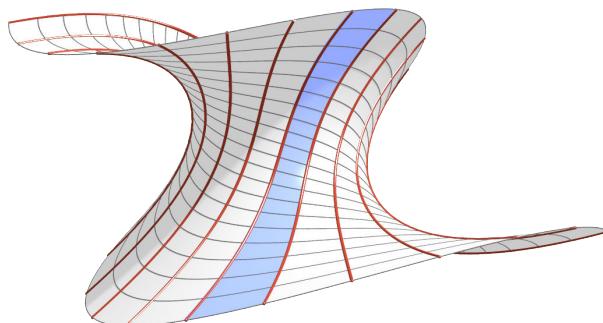


图3.28: 两条测地线间的测地条带面.

Fig. 3.28: A geodesic strip between two geodesics.

称由测地平行坐标系参数化的足够近的两条测地线构成的曲面条带面为测地条带, 如图 3.28 红色测地线夹的蓝色测地条带面。依旧假定  $u$ -线表示测地线族,  $v$ -线构成正交参数线。然后定义测地条带的条宽度为条带面的边界测地线之间的  $v$  参数线长度。因此两个充分小的  $\varepsilon$ -近的测地线的条带宽度函数是

$$\int_v^{v+\varepsilon} \|\mathbf{f}_v(u, t)\| dt \approx \varepsilon \|\mathbf{f}_v(u, v)\| + \varepsilon^2(\cdot).$$

这样, 条带宽度的一阶近似是  $v$ -线的导数的长度  $\|\mathbf{f}_v\|$ 。假设  $u$ -方向是弧长参数的 (即  $\|\mathbf{f}_u\| = 1$ ), 则总存在测地平行坐标系<sup>[112]</sup>。条带宽度通过线性常微分方程与 Gauss 曲率  $K$  密切相关, 即已知的 Jacobi 微分方程:

$$\partial_{uu}w(u) + w(u)K = 0, \quad (3.4)$$

其中  $w(u)$  是无穷小的条带宽函数。由于一个可展曲面是等距于平面的曲面, 据此, 当 Gauss 曲率  $K = 0$  时, 则测地平行坐标系参数面变为可展曲面, 沿着每条测地线满足  $\partial_{uu}(\|\mathbf{f}_v\|) = 0$ 。离散化这个 Jacobi 微分方程, 化简为  $\partial_{uu}(\|\mathbf{f}_v\|) = 0$ 。假设  $u$ -方向的离散弧长参数条件, Jaboci 微分方程 (3.4) 的直接离散化表示是

$$\delta_{uu}(\|\delta_v \mathbf{f}_{\bar{1}}\|) = 0,$$

即

$$\|\mathbf{f}_{12} - \mathbf{f}_1\| - 2\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\| + \|\mathbf{f}_{\bar{1}2} - \mathbf{f}_{\bar{1}}\| = 0. \quad (3.5)$$

在离散算法中, 边长是变量。离散 Jacobi 方程和离散弧长参数化是近似可展曲面的一个限制。我们将使用该约束方程构造离散的近似可展曲面 (§ 3.3.4), 并给出可推广的建筑应用模型 (§ 4.3.2)。

在考虑离散情况之前, 首先研究测地平行坐标系下等距于旋转面的曲面特征 (命题 8)。在此之前, 需要考虑以下引理:

**引理 7** 假设曲面  $f$  由测地平行坐标系统参数化, 则  $\partial_v \|\mathbf{f}_u(u, v)\| = 0$ , 即  $\|\mathbf{f}_u(u, v)\|$  不依赖于  $v$ 。

**证明** 正交网格的  $u$ -参数线 ( $v = \text{const.}$ ) 的测地曲率  $\kappa_g^u$  是

$$\kappa_g^u = -\frac{\partial_v E}{2E\sqrt{G}},$$

其中  $E, F, G$  是第一基本型坐标函数, 即  $E = \langle \mathbf{f}_u, \mathbf{f}_u \rangle$ ,  $F = \langle \mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v \rangle$ ,  $G = \langle \mathbf{f}_v, \mathbf{f}_v \rangle$ . 本文  $u$ -参数线是测地线意味着测地曲率  $\kappa_g^u = 0$ . 相应地,  $0 = \partial_v E = \partial_v \|\mathbf{f}_u(u, v)\|^2$  意味着  $\|\mathbf{f}_u(u, v)\|$  不依赖于  $v$ .  $\square$

令  $r : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{R}$  代表任意函数. 则引理 7 说明以下函数只依赖于  $u$ ,

$$h(u) := \int_{u_0}^u \sqrt{\|\mathbf{f}_u(t, v)\|^2 - r'(t)^2} dt. \quad (3.6)$$

**定理 8** 令  $\mathbf{f}$  是测地平行坐标系参数化的曲面, 且满足对于任意  $a \in [u_0, u_1]$

$$\frac{\|\mathbf{f}_v(u, v)\|}{\|\mathbf{f}_v(a, v)\|} =: r(u) \quad (3.7)$$

只依赖于  $u$  (如图 3.29-左). 则  $\mathbf{f}$  等距于旋转面  $\tilde{\mathbf{f}}$

$$\tilde{\mathbf{f}} = (r(u) \cos \phi(v), r(u) \sin \phi(v), h(u)),$$

其中  $\phi(v) := \int_{v_0}^v \|\mathbf{f}_v(a, s)\| ds$ ,  $h$  定义为等式 (3.6).

**证明** 由

$$\tilde{\mathbf{f}}_u = (r' \cos \phi, r' \sin \phi, h') = \left( r' \cos \phi, r' \sin \phi, \sqrt{\|\mathbf{f}_u\|^2 - r'^2} \right),$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_v = (-r\phi' \sin \phi, r\phi' \cos \phi, 0),$$

则  $\tilde{E} = \|\tilde{\mathbf{f}}_u\|^2 = r'^2 + \|\mathbf{f}_u\|^2 - r'^2 = \|\mathbf{f}_u\|^2 = E$ ,  $\tilde{G} = \|\tilde{\mathbf{f}}_v\|^2 = r^2 \phi'^2 = \frac{\|\mathbf{f}_v(u, v)\|^2}{\|\mathbf{f}_v(a, v)\|^2} \|\mathbf{f}_v(a, v)\|^2 = \|\mathbf{f}_v(u, v)\|^2 = G$ . 因此,  $\tilde{E} = E$ ,  $\tilde{F} = F = 0$ ,  $\tilde{G} = G$ , 说明等距.  $\square$

为了获得等距于旋转面的离散曲面, 可以通过使用由离散测地坐标系参数化的网格和额外增加命题 8 需要的离散条件. 对于  $v$  重新考虑 (3.7) 式, 即等价于  $\|\mathbf{f}_v(a, v)\|/\|\mathbf{f}_v(b, v)\|$  对于任意  $a, b \in [u_0, u_1]$ , 上式独立于  $v$ . 直接离散上面的结论通过要求对定义域内任意整数  $a, b$  满足

$$\frac{\|\delta_v \mathbf{f}(a, v)\|}{\|\delta_v \mathbf{f}(b, v)\|} = \text{const.}, \quad (3.8)$$

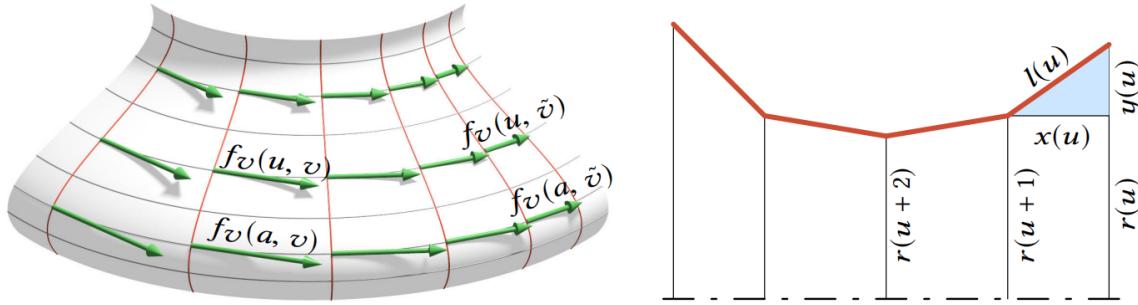


图 3.29: 提取旋转面.

Fig. 3.29: Extracting the surface of revolution.

对所有整数  $v$  都适合. 一个简单的离散化的办法是沿着弧长参数化的正交轨线方向, 对于每个指定的  $v$ , 所有测地条带面的宽度都相同. 建筑上, 当使用相同的曲面条进行重复性的曲面包层时, 节省成本和减少工作量的优势就会非常明显地体现出来. 这样, 对于实际需求, 有必要要求测地平行的每排有相同边长, 即对于任何整数  $a$ ,  $\|\delta_v \mathbf{f}(a, v)\|$  对所有整数  $v$  都是相同的. 这自然意味着 (3.8) 式成立, 因此是等距于旋转面的. 这样, 获得了离散网格离散等距于旋转面的特征, 即要求它满足离散测地平行坐标系参数化和公式 (3.8). 在 § 3.3.4 应用这种离散化的设计构造了离散旋转面, 其相应的等距变形曲面和推广应用参看 § 4.4.1.

### 3.3.4 应用实例

#### 离散测地平行坐标系参数曲面

前面的理论分析给出了明确构造离散测地坐标系参数化的曲面的条件, 本节将对任意规则四边网进行约束构造. 如图 3.30, 红色测地线与灰色正交轨线构成离散测地坐标系.

#### 近似参考曲面

以上这只是构造满足一定正交性和测地线性质的任意自由型曲面, 我们的意图并不仅限于此, 我们期待可以利用这种几何性质, 推广到实际模型的建造上, 而最简单的实例是对给定参数曲面的近似曲面构造, 这意味着, 可以局部或整体对曲面进行测地平行坐

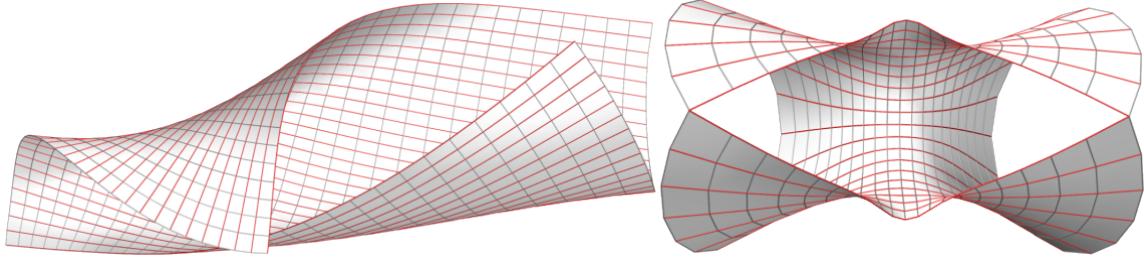


图 3.30: 离散测地平行坐标系参数网.

Fig. 3.30: Meshes Parameterized By Discrete Geodesic Parallel Coordinates.

标系参数化.

但是这种近似后的参数面质量会受到参考网的光滑性和网格密度的影响. 比如足够光滑的参数面, 能尽量保证近似后的曲面也是足够光滑的. 一般来说, 参考面局部网格的大小小于近似网, 能保证质量较高的近似效果. 为了平衡近似的局部参考面质量和近似网格的性质, 总会在光滑权因子(满足方程(3.14))上做衡量, 通常经验是, 较高的光滑权因子能保证近似网格足够光滑但是参数网的性质可能会部分丢失, 而较弱的利用光滑性, 尽管网格参数线会出现弯折, 但是网格性质可以得到保证.

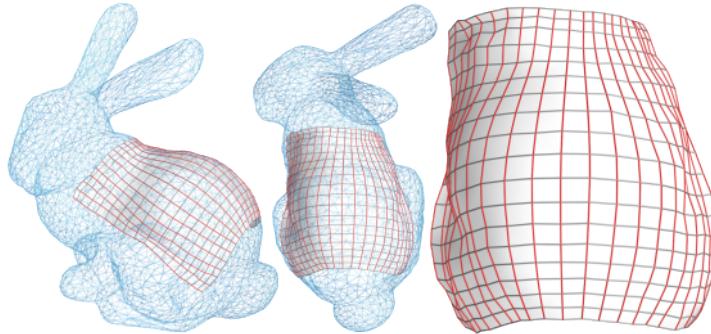


图 3.31: 离散测地平行坐标系参数网近似兔子局部曲面.

Fig. 3.31: A patch parameterized by discrete geodesic parallel coordinates approximate a part of bunny.

这里, 以图 3.31、图 3.32 和图 3.33 为例. 近似网格收敛在光滑权因子为零的情况下, 图中的参数网很好地保证了离散测地平行条件, 红色参数线在每个格点处与灰色正交轨线成等角. 实际上, 测地线的正交轨线在参数网中的作用并没有测地线重要, 但是它们仍然

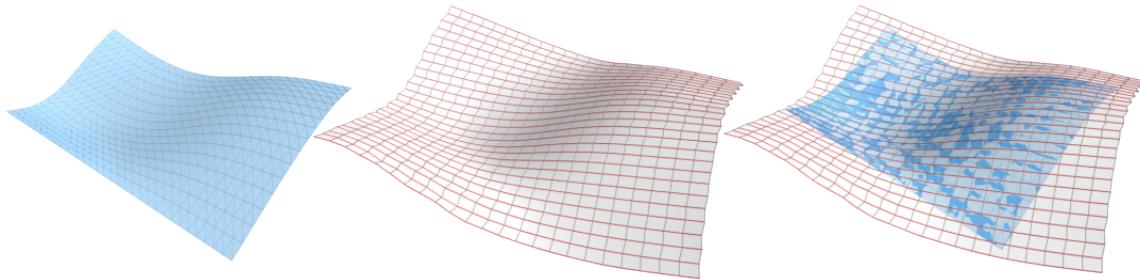


图 3.32: 离散测地平行坐标系参数网近似自由曲面.

Fig. 3.32: A patch parameterized by discrete geodesic parallel coordinates approximate a free-form surface.

满足角方程 (如图 3.27-左), 所以在弱光滑权因子作用下, 近似复杂的参考面会出现图中弯折不光滑的现象. 图 3.31和图 3.32分别展示了使用离散测地平行坐标系参数网对给定参数面进行局部和全局近似的效果. 图 3.31的参考面不够光滑, 导致得到近似面在没有光滑权因子作用下展示的并非足够光滑. 图 3.32得到近似面的在近似区域的测地线表现出很好的性质.

图 3.33中使用非平凡的离散测地平行坐标系参数面近似保龄球面, 在视觉上不仅具有很高的近似和网格质量, 在数值上可以通过 Clairaut 关系式 (方程 (1.1)) 可以证实说明该效果. 首先, 放置测地平行坐标系参数化的网格在一个旋转面上, 要求测地线 (红色) 不对应到旋转面的经线而是经过扭转的位置. 为了证实测地线的质量, 和 Clairaut 关系式 (1.1) 进行对比.

在本文的离散模型中, 沿着网格的每条测地线在每个格点处测量计算  $r_i \cos \alpha_i$ , 其中  $r_i$  是格点  $p_i$  到旋转轴的距离,  $\alpha_i$  切向量  $T_i$  和平行圆之间的夹角. 这些数值如图 3.33中所示是在误差允许范围内的常数. 经过两次细分和再优化处理, 数值得到进一步提升.

总之, 如何权衡近似网格的质量一直没有一个标准答案, 这取决于使用者关注的几何性质和想要实现的建造意图. 显然这里使用离散测地平行坐标系近似参考曲面, 给了我们构造或寻找曲面上测地参数线的一种方法. 比如, 可以对给定的参考网, 分别使用两个不同测地平行坐标系的离散曲面进行曲面近似, 最终只提取它们的高质量测地参数线, 构成一个新的测地参数网. 注意, 这两个参数面应该避免存在同方向的 (即重叠的) 测地参数线, 而且最好是尽可能成直角的, 这样组合得到的最终参数网看起来具有一定的美

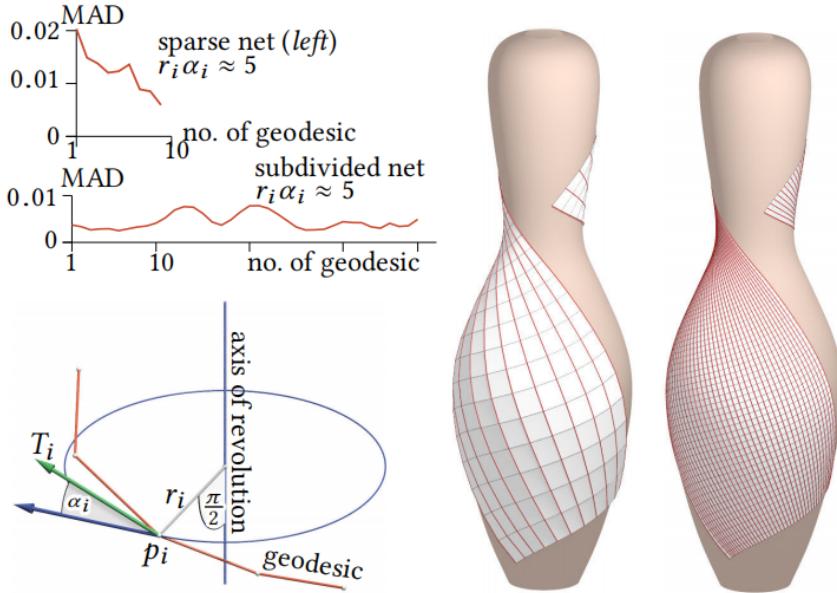


图 3.33: 对离散测地平行坐标系网验证 Clairaut 公式.

Fig. 3.33: Verification of Clairaut's relation for meshes parameterized by discrete geodesic parallel coordinates.

观性. 实际上, 对于实际模型的建造也提供了很大的便利条件. 应用这种方式构造的测地网壳结构模型 (参看 § 4.5), 证实了该理论分析.

### 离散近似可展曲面

应用离散化的 Jacobi 方程 (3.5) 构造离散可展曲面, 网格最终收敛于光滑权因子为零的状态. 如图 3.34 展示了构造的离散近似可展曲面及其 Gauss 像. 近乎一维的 Gauss 像说明曲面是近乎可展的. 对离散可展曲面的直母线方向的构造参考 § 4.3.3.

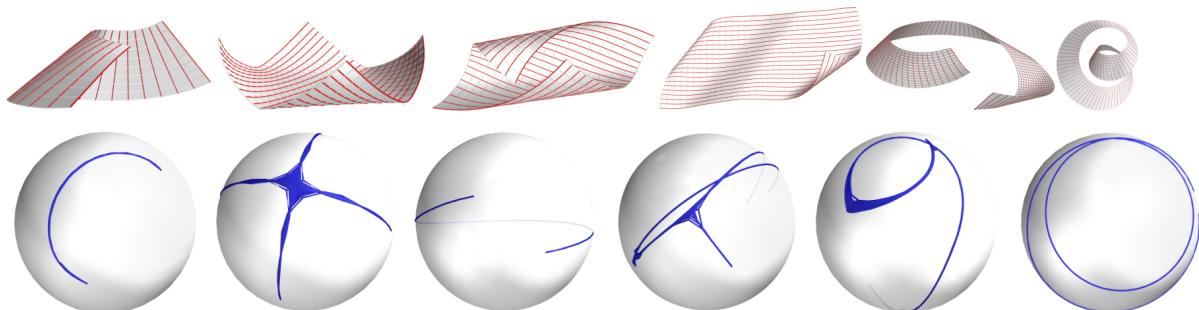


图 3.34: 离散近似可展曲面 (上) 及其高斯像 (下).

Fig. 3.34: Discrete nearly developable surfaces and their Gauss images.

## 离散旋转曲面

控制离散测地平行坐标系参数化的所有测地条带面的宽度均相等构造离散旋转曲面满足的条件 (3.8), 进而在交互变形曲面的过程中, 保证这些条带面宽度不变, 得到自由型的旋转面的等距变换曲面. 图 3.35 展示了离散测地坐标系参数化的旋转面及其等距变换曲面.

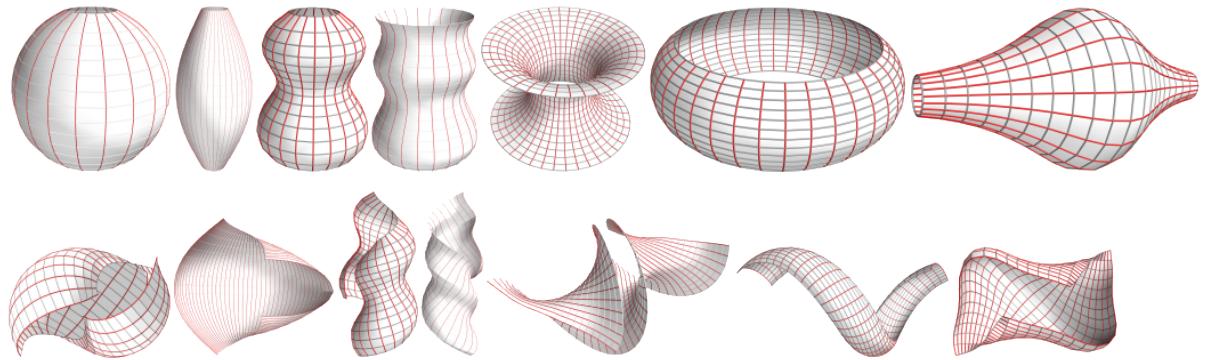


图 3.35: 离散旋转曲面 (上) 及其等距变换曲面 (下).

Fig. 3.35: Discrete rotational surfaces (upper) and their isometric transformations (lower).

## 3.4 离散测地线参数网

**定义 17** [70] 映射  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  是光滑曲面参数化, 则  $f(u, v)$  称为测地网, 如果两族参数线是曲面的测地线.

离散测地线参数网可以由离散 Voss 曲面推导, 且与离散可展曲面密切相关. 离散化的 Voss 曲面是 *Voss-网*, 其具有的特征是离散化的共轭测地网<sup>[68]</sup>, 即每个面是平面的测地网面. Voss-网包含可展曲面, 如果直接建立离散共轭正交测地网只会得到柱面, 为了突破这种限制, Rabinovich 等<sup>[70]</sup> 仅仅使用离散正交测地网便实现了自由的离散可展曲面的构造. 这种抛弃了共轭性质的离散网格, 展现了极强的交互灵活性.

Voss-网的刚体可折叠性由 Schief 等<sup>[84]</sup> 证明, 其满足在每个格点处

$$\alpha_1 = \alpha_3, \quad \alpha_2 = \alpha_4, \tag{3.9}$$

其中  $\alpha_i, (i = 1, \dots, 4)$  是四个格点角 (如图 3.36). 这实际上是 Tachi<sup>[114]</sup> 研究的刚性折纸

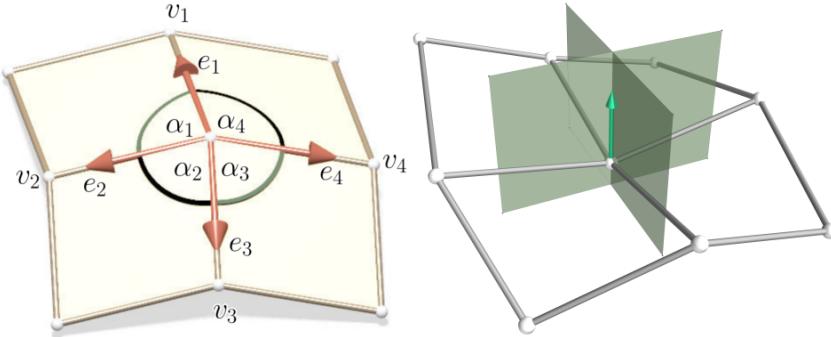


图 3.36: 离散 Voss-网格点星.

Fig. 3.36: Discrete Voss-net at a vertex star.

结构设计的一种特殊情况. Tachi 的 4 价网折纸结构局部需要满足三个条件:

- 每个面是平的;
- 每个格点是可展的: ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ );
- 每个格点是平-可折叠的: ( $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$ ).

即每个 4 价格点处要满足  $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4 = \pi$ . 这样当 Voss-网满足  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \pi/2$  时, 一定可以进行刚性折纸设计.

显然 Voss-网应用到折纸上得到的是高度非光滑的离散曲面, 摒弃平面网格条件, 可以更灵活地构造离散曲面. 只应用方程 (3.9) 在每个四价格点得到的离散网格是离散测地网, 即由两族测地线构成的网格. 定义在每个格点  $v$  处的离散曲线单位切向量、单位主法向量同离散测地平行坐标系 (如图 3.25), 离散测地网在格点星处的两条离散曲线的 Frenet 标架是  $(\mathbf{T}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{B}_1), (\mathbf{T}_2, \mathbf{N}_2, \mathbf{B}_2)$  (如图 3.37).

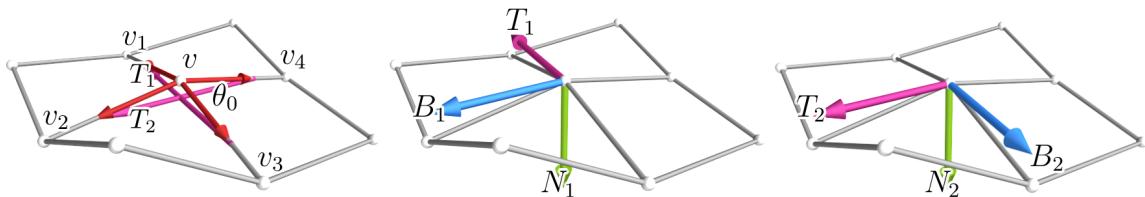


图 3.37: 离散测地网格点星处的 Frenet 标架.

Fig. 3.37: Discrete geodesic nets with Frenet frame at a vertex star.

离散测地网具有的性质是每一族离散曲线都“尽可能是直的”，即分割曲线两侧的格点角和相同  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ ,  $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4 + \alpha_1$ . 实际化简结果就是 Voss-网格点角条件方程 (3.9).

**定义 18** [70] 一个离散网是离散测地网, 如果格点星处的每一组对角相等.

利用边向量夹角涉及到余弦关系式, 可以转化上面角的等式为由格点发出的四个单位边向量表示的限制条件, 即

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle - \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle - \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle = 0. \quad (3.10)$$

若想要构造只含有一条测地线的参数网, 只需要其中一族离散曲线“尽可能直的”, 即上面的等式中一个成立, 比如  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ . 特别地, 要求  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ , 则角误差等于消失的离散 Gauss 曲率, 说明得到的离散曲面是含有一族测地线的可展曲面. 构造这样含有平的格点的网格, 最终只会得到平面. 除此之外, 通过指定测地线族成角的情况, 仍然可以构造离散可展曲面. 我们推广正交测地网<sup>[70]</sup> 到成常角测地网 (§ 3.4.2), 后者是更具有一般性的离散可展曲面.

### 3.4.1 正交测地网面

离散测地网的正交条件并不是要求每个格点角为  $\frac{\pi}{2}$ , 否则是 Gauss 曲率为零的情况. Rabinovich 等<sup>[70]</sup> 由此给出离散正交测地网的构造条件.

**定理 9** [70] 一个网格是离散正交测地网 (*Discrete Orthogonal Geodesic Nets*, DOG 网), 即离散可展曲面, 如果在每个格点星处所有格点角相等.

该网格具有几何性质如下:

- (1) 在每个格点, 格点角相同  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$  (如图 3.36-左);
- (2) 在每个格点, 切向量正交  $\mathbf{T}_1 \perp \mathbf{T}_2$ ;
- (3) 在每个格点, 主法向量平行于曲面法向量  $\mathbf{N}$ :  $\mathbf{N}_1 // \mathbf{N}_2 // \mathbf{N}$ ;
- (4) 在每个格点, 投影到离散切平面的参数网正交 (如图 3.38-左);

- (5) 为离散可展曲面;
- (6) 当每个面为平面时, 满足离散共轭网, 则网面是 Voss-网;
- (7) 当每个面为平面时, 是锥网 (如图 3.38-右), 即同时是测地线网和曲率线网.

前四条是局部性质, 后三条是全局性质. 实际上, 只需要第一条局部角相等, 便定义了离散正交测地网. 由此可见, 仅仅满足局部条件 (格点角相同) 便得到了良好的全局性质.

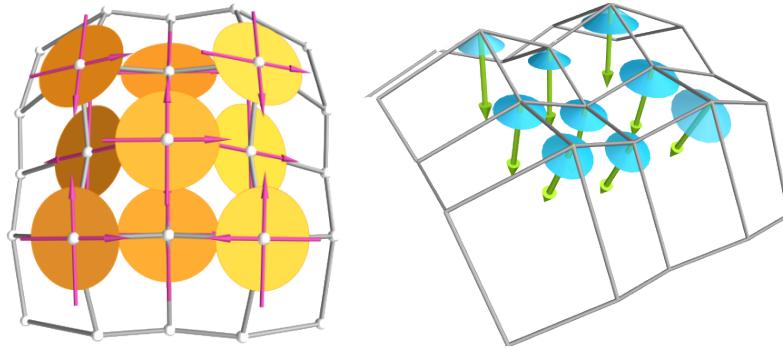


图 3.38: 离散正交测地网.

Fig. 3.38: Discrete orthogonal geodesic nets.

离散正交测地网要求每个四价格点处 (如图 3.38-左) 的四个格点角相等, 即  $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_2 = \alpha_3$ , 可以应用余弦关系式进行转化, 进而得到利用单位边向量的变量限制条件:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle - \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle - \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle = 0. \quad (3.11)$$

### 3.4.2 等角测地网面

一个曲面是可展的, 如果它能被两族彼此常距离的测地线参数网表示. 若曲面上两族测地线彼此相交成定角, 则曲面是可展曲面或平面<sup>[2,115]</sup>, 这说明除了正交的测地线网构成可展曲面, 成常角的离散测地网也能构成离散可展曲面 (当然常角也包括成直角情况). 这里推广以上正交测地网, 得到测地线成常角的网格 (Discrete Isogonal Geodesic Nets, DIG 网) 局部和全局性质:

- (1) 在每个格点, 对角相等:  $\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2 = \alpha_4$  (如图 3.36-左);

- (2) 在每个格点, 切向量夹角为定值  $\theta_0$ :  $\langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle = \cos \theta_0$ ;
- (3) 在每个格点, 主法向量平行于曲面法向量  $\mathbf{N}$ :  $\mathbf{N}_1 // \mathbf{N}_2 // \mathbf{N}$ ;
- (4) 在每个格点, 投影到离散切平面的参数网交角相等为定值  $\theta_0$ (如图 3.39);
- (5) 为离散可展曲面.

直角是常角的一种特例情况, 即当  $90^\circ$  时. 因此唯一需要确定的是  $\theta_0$  的数值, 一旦给定, 则通过约束方程

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle, \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle, \langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle = \cos \theta_0.$$

得到离散可展曲面.

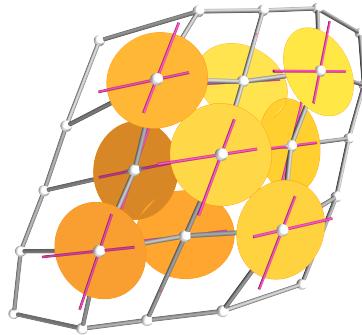


图 3.39: 离散成  $60^\circ$  夹角的测地网.

Fig. 3.39: Discrete isogonal geodesic nets with constant angle  $60^\circ$ .

### 3.4.3 应用实例

满足 DOG 曲面是离散可展曲面, 图 3.40-左展示了三片分别来源于环曲面上正、负和含有零 Gauss 曲率的区域的网格, 然后对其进行正交测地约束优化(满足方程 (3.11))得到三片可展曲面(图 3.40-右), 其 Gauss 像可验证其可展性. 图中的优化网格是在光滑因子(满足方程 (3.14))作用下的结果, 否则网格会出现折叠的情况. 仅仅通过满足格点角相等, 势必会在一定程度上对网格进行缩放, 一个有效的控制全局等距的办法是限制网格边界周长不变<sup>[70]</sup>. 这里额外补充固定边界线周长的限制.

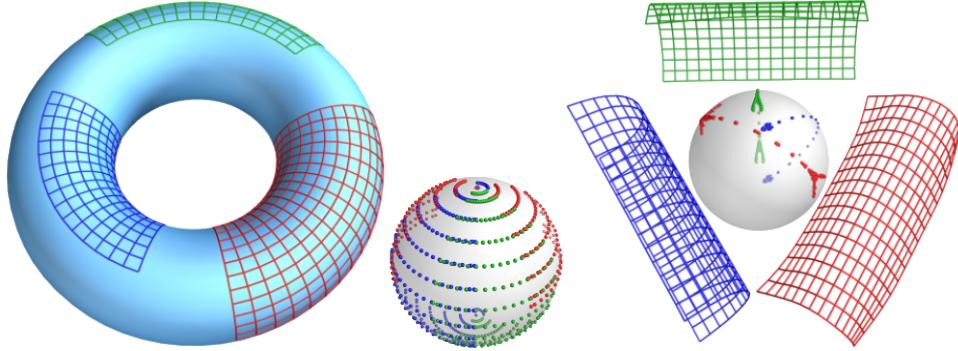


图 3.40: 三个环面片满足 DOG 参数化的结果.

Fig. 3.40: Three torus patches optimized by DOG.

若对三个初始环曲面片分别施用切向量成  $75^\circ, 60^\circ, 45^\circ$  的限制, 得到的优化网格和格点法向量的 Gauss 像如图 3.41. 对比测地网成  $90^\circ$  角 (图 3.40-右) 的网格质量和 Gauss 像

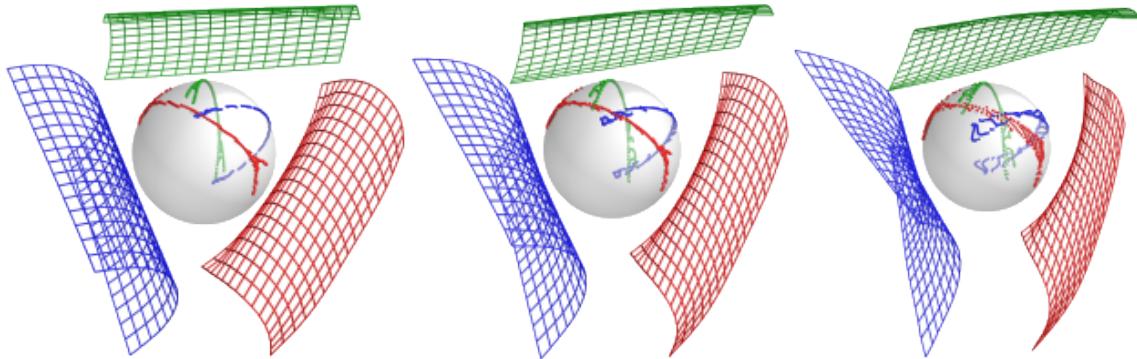
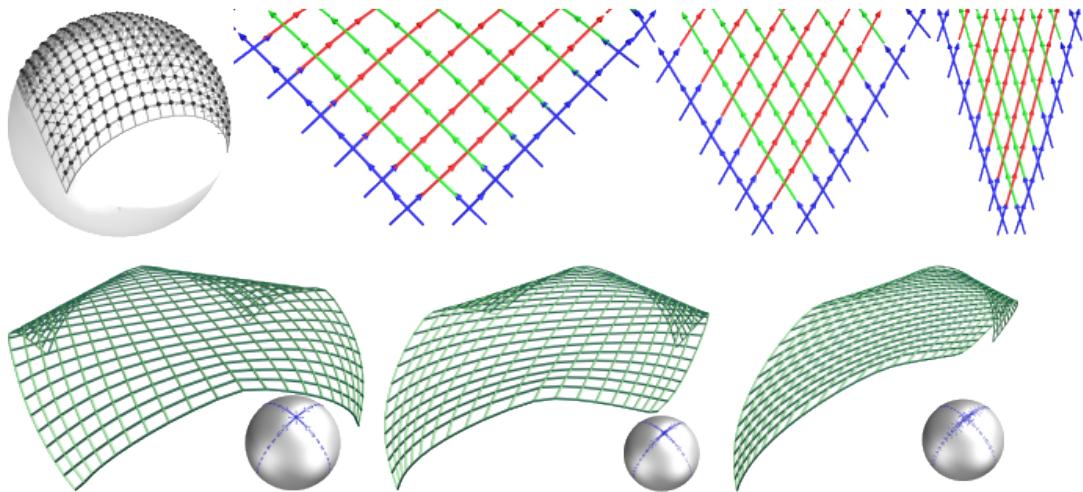


图 3.41: 三个环面片由离散成  $75^\circ, 60^\circ, 45^\circ$  角测地网参数化后的结果.

Fig. 3.41: Three torus patches optimized by discrete isogonal geodesic nets with  $75^\circ, 60^\circ$  and  $45^\circ$ .

发现随着成角度数的减少, 网格光滑性减弱, 相应 Gauss 像变大. 说明测地网成角度数越小, 网格可展性越弱.

图 3.42 是对一个给定的单位球面上的切比雪夫网格 (左上) 分别进行离散成  $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$  角测地网参数化的结果. 上排展示了切向量成角信息, 下排是优化后的结果和其对应的 Gauss 像. 结果显示两族参数线成角越小, 网格越狭长, 形状的改变越大, 同时 Gauss 像面积越大. 显然, DOG 网格的可展效果最好, DIG 网格受成角大小影响. 这和实际建筑表面网格需要考虑的美观性和实用性一致.

图 3.42: 切比雪夫网由离散成  $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$  角测地网参数化后的结果.Fig. 3.42: Chebyshev mesh optimized by discrete isogonal geodesic nets with  $90^\circ, 60^\circ$  and  $30^\circ$ .

### 3.5 离散曲率线参数网

**定义 19** <sup>[66]</sup> 映射  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  是光滑曲面参数化, 则  $\mathbf{f}(u, v)$  称为曲率线网, 如果  $\mathbf{n}_u / \|\mathbf{f}_u\|, \mathbf{n}_v / \|\mathbf{f}_v\|$ , 其中  $(u, v)$  是  $\mathbb{R}^2$  上的正交坐标系.

曲率线网满足曲面上一点处的 Gauss 映射沿主曲率方向的切向量与曲面在该方向的切向量共线. 对离散曲率线参数网的定义没有唯一的标准. 不过由它本身具有的特质, 可以采用不同的离散化方式. 首先, 曲率线是共轭的, 则其对应的离散曲率网也要求是离散共轭的, 也就要求每个四边面是平面的. 其次, 对曲率线网的离散化构造有两种最为常见的网格, 一种是圆网, 另一种是锥网. 它们是 Lie 球几何概念, 都是光滑曲面上曲率线网的良好对应, 同时二者也通过 Gauss 像建立密切联系. 除此之外, 还有特殊的离散等温网, 离散蒙日网及其相应变形等. 下面分别就这几种不同的离散曲率线网, 给出它们的离散定义和曲面探索.

#### 3.5.1 圆网

**定义 20** <sup>[66]</sup> 映射  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  是光滑曲面参数化,  $\mathbf{n} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  是其高斯映射. 网格  $(\mathbf{f}, \mathbf{n})$  称为圆网 (Circular mesh), 如果满足以下条件:

- 浸入映射  $f$  的每个四边网格四点共圆,
- 每个边上的高斯映射由垂直于二分面的浸入边的反射确立, 即

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_i - 2 \frac{\mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f})}{\|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}\|^2} \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}), i = 1, 2.$$

**定义 21** [66] 一个四边网面称为圆网, 如果其每一个四边形是平面的且存在外接圆.

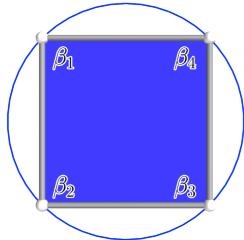


图 3.43: 四边形四点共圆.

Fig. 3.43: A quad has a circum-circle.

曲率线网首先满足是离散共轭网, 其次圆网要求每个四边形四点共圆.

**定理 10** [66] 一个四边网成为圆网当且仅当是平面网 (如图 3.43), 且每个四边形满足两组对角和均等于  $\pi$ :

$$\beta_1 + \beta_3 = \pi, \quad \beta_2 + \beta_4 = \pi.$$

假设四条按照逆时针排列的单位边向量分别是  $\mathbf{e}_i, (i = 1, \dots, 4)$ , 上式角条件转化为边向量限制为

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle + \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle = 0.$$

图 3.44展示了两个圆网面, 每个四边形都存在外接圆 (蓝色), 两族参数线是曲面的离散曲率线网.

### 3.5.2 锥网

关于离散锥网有如下重要定义和性质.

**定义 22** [33] 一个四边网的格点  $v$  称为锥格点 (conical vertex), 如果相交于格点  $v$  的所有四个面是平面的且切于一个公共的旋转锥  $\Gamma$ .

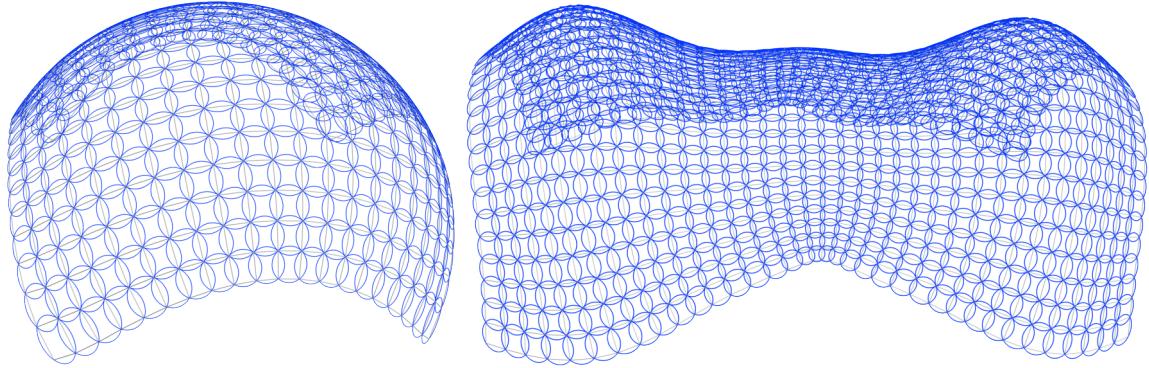


图 3.44: 圆网.

Fig. 3.44: Circular meshes.

**定义 23** [33] 一个四边网面称为锥网 (conical mesh), 如果所有的格点都是锥格点.

**定理 11** [33] 一个四边网成为锥网当且仅当平面网在格点星处 (如图 3.45) 满足两组对角和相等 :  $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ .

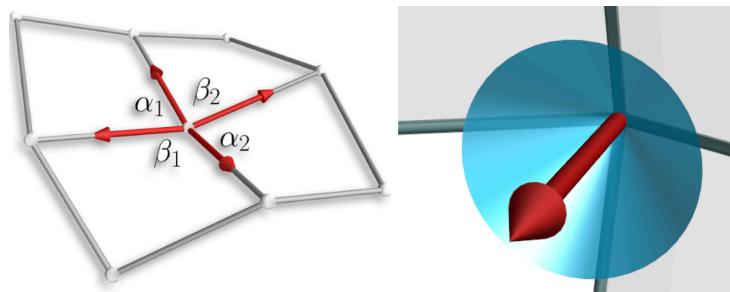


图 3.45: 锥网格点星.

Fig. 3.45: Conical mesh at a vertex star.

满足锥格点星的角条件要求  $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos(\beta_1 + \beta_2)$ , 即  $\cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) = \cos(\beta_1) \cdot \cos(\beta_2) - \sin(\beta_1) \cdot \sin(\beta_2)$ . 设在一个格点星处按照逆时针排列的四个单位边向量  $\mathbf{e}_i$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ), 可转化上面角条件为

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle - s_{12} \cdot s_{34} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \cdot \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle - s_{23} \cdot s_{14},$$

其中,

$$\begin{aligned}s_{12} &= \sqrt{1 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle^2}, s_{34} = \sqrt{1 - \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle^2}, \\ s_{23} &= \sqrt{1 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle^2}, s_{14} = \sqrt{1 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle^2}.\end{aligned}$$

锥网依据锥格点的凸凹性分为三类: 双曲型、椭圆型和抛物型. 其分类方法依据以格点为中心的球面与四个临边相交得到的球面多边形的结构. 如果多边形四个格点不都位于一个半球面内, 则为双曲型, 否则凸的多边形为椭圆型, 剩下的为抛物型. 图 3.46 展示了自由的锥网, 包含不同型格点.

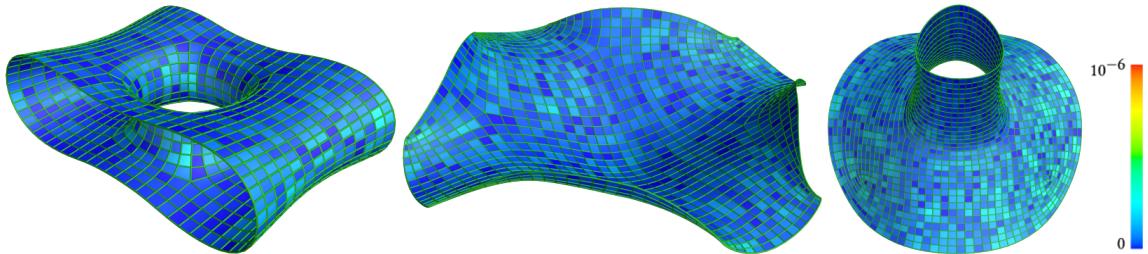


图 3.46: 自由的锥网面.

Fig. 3.46: Free-form conical meshes.

已知光滑曲面的曲率线上的连续面法向量构成光滑可展曲面, 推广到锥网, 仍然具有这样的性质, 即沿着锥网的一排或一列的离散法向量是共面的, 因此它们形成离散可展曲面. 图 3.47 展示两个不同锥网的格点法向量、格点公共旋转锥面、连续面法向量构成的离散可展支撑结构.

等距面是锥网的特性之一, 沿着锥轴构造的四个等距面仍然是平面四边形, 也仍然存在公共旋转锥面与它们相切, 且等距前后的锥面共轴. 也就是说, 锥网的等距面是 Laguerre 变换不变量. Laguerre 变换作用于锥网, 得到的网格仍然是锥网. 而 Möbius 则具有保圆网不变性.

锥网和圆网通过 Gauss 像密切相连. 主法曲率网的球面像是正交网, 离散锥网是主法曲率网的一种离散化网格, 它的 Gauss 像不仅是离散正交网, 还是离散圆网, 即位于单位球面上锥格点形成的离散网格面是存在外接圆的平面网. 这是因为公共旋转锥面切于每

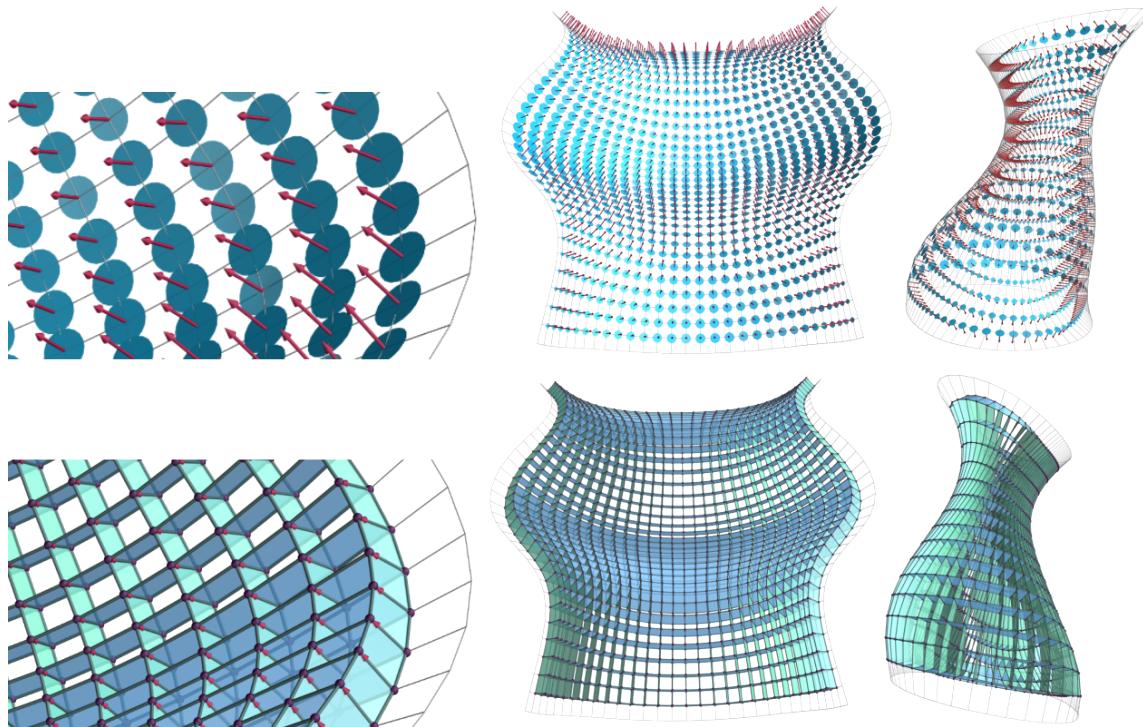


图 3.47: 锥网的法向量构成离散可展曲面.

Fig. 3.47: Conical meshes with discrete developable surfaces.

一个平面使得面法向量与锥轴成等角, 故四个面法向与以格点为球心的圆面交于四个共圆的点. 图 3.48 中, 正 Gauss 曲率的环曲面片 (左) 的 Gauss 像是圆网 (右).

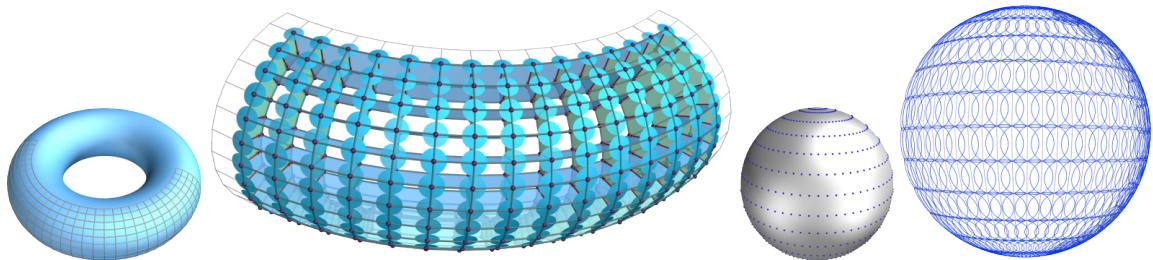


图 3.48: 锥网的 Gauss 像是圆网.

Fig. 3.48: Gauss image of conical mesh is a circular mesh.

### 3.5.3 等温网

等温网是共形曲率线网, 保证在变形过程中与曲率线成等角。如果映射曲率方向到  $(u; v)$  平面坐标系方向, 共形映射使得边和曲率方向夹角不变。光滑的等温曲面包含常平均曲率曲面, 旋转面, 锥面等。

**定义 24** <sup>[66]</sup> 曲率线参数化曲面  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$  称为等温面, 如果它的第一基本型是共形的, 可能在每个点  $u \in \mathbb{R}^2$ , 存在自变量的重新参数化  $u_i \rightarrow \phi_i(u_i)$  ( $i = 1, 2$ ), 即  $\|\partial_1 \mathbf{f}\|^2 / \|\partial_2 \mathbf{f}\|^2 = \alpha_1(u_1) / \alpha_2(u_2)$ .

**定义 25** <sup>[116]</sup> 映射  $\mathbf{f} : Z^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  称为离散等温网, 如果对于所有基本四边形 (如图 3.49-左), 有交比  $Q(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4) = a_1/a_3 \cdot a_4/a_2 = -1$ .

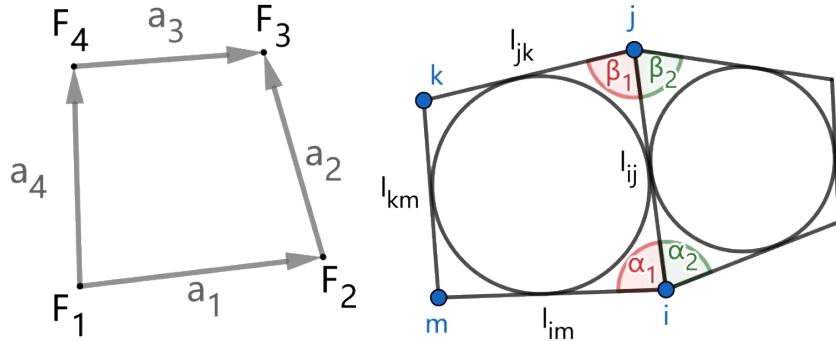


图 3.49: 等温网四边形.

Fig. 3.49: Isothermic quad.

对等温网的一种离散化表示的特殊形式是沿着主法曲率线上尽可能方正的正交四边网。在前面的讨论中已经使用过这种构造方式 (如图 3.13- 中)。

一种推广的等温网称为 S-等温网<sup>[117]</sup>。它具有更严格的几何条件同时也具备了有趣的图案样式。

**定义 26** <sup>[118,119]</sup> 四边网称为 S-等温网, 如果满足如下三个条件 (如图 3.49-右):

- 所有的四边网是平面的;
- 所有四边网有内切圆, 即四边形对边和相同  $l_{ij} + l_{km} = l_{jk} + l_{im}$ ;

- 临近四边网的内切圆相接, 即相邻两个四边网的夹角满足  $\cot \alpha_1 \cdot \cot \beta_2 = \cot \alpha_2 \cdot \cot \beta_1$ .

由此, 在每个格点星处, 格点  $v$  到四个圆与边长的切点  $w_i, (i = 1, \dots, 4)$  的距离值  $r_i$  相同, 这也意味着存在球心在  $v$ , 半径为  $r$  的球面  $S$ , 且所有这些临近的球面相切于切点  $w_i$ . 图 3.50 展示了 S-等温网在每个四边形内存在内切圆, 在每个格点星处存在格点球面. 图 3.51 上展示了一组具有内切圆 (红色) 的 S-等温面, 下排是其对应的格点球面 (蓝色).

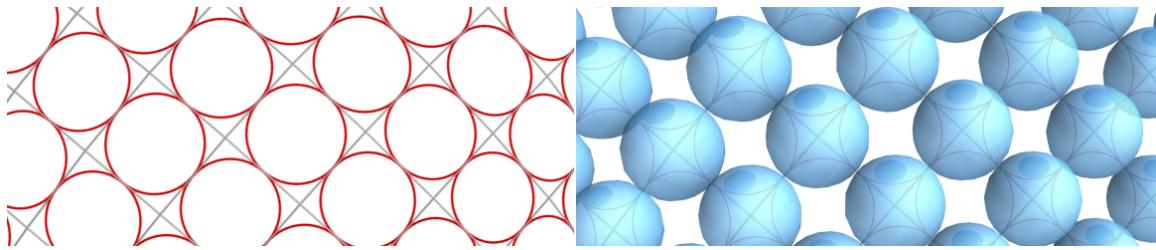


图 3.50: S-等温网的内切圆和格点球面.

Fig. 3.50: Incircles and spheres at vertices for S-isothermic mesh.

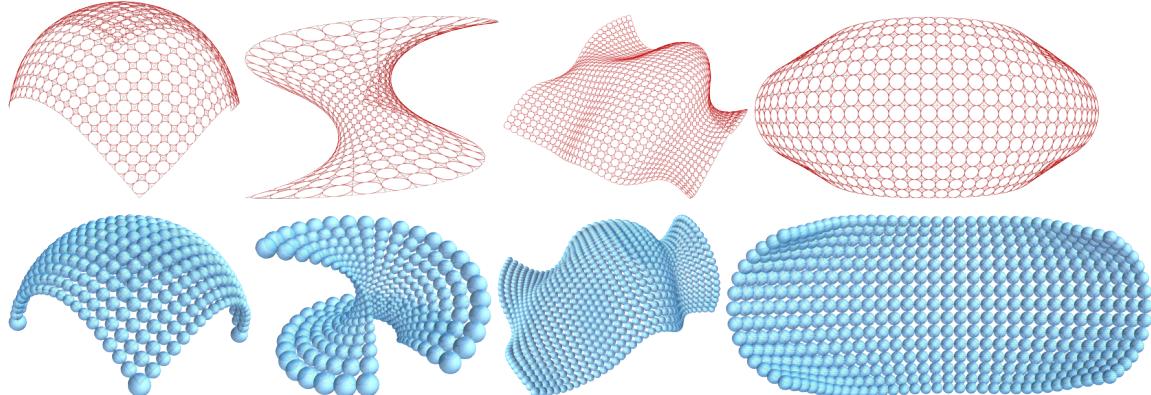


图 3.51: S-等温网.

Fig. 3.51: S-isothermic meshes.

### 3.5.4 蒙日网

蒙日 (*Monge*) 曲面<sup>[120]</sup> 是一种达布曲面, 是由一组平行线和全等的正交平面轨线构成, 这两种特征线是蒙日曲面的曲率线. 它具有很强的重复性和规则性, 其定义也恰好是

其几何性质的充分反映.

**定义 27** 蒙日曲面由以下相互等价的条件定义:

- 曲面的一族参数线平行于一条给定的曲线, 且与另一族给定的曲线相接;
- 由平面曲线扫略生成的曲面, 其中曲线称为母线, 曲线处速度向量垂直于该平面的点刻画了母线的平行线.

更一般地, 当平行线也是平面的时候, 蒙日曲面就是模具 (*molding*) 曲面<sup>[121]</sup>. 模具面会与一族平面垂直, 此时母线既是曲率线又是测地线. 该曲面存在两种非常特殊的情况, 即具有线性平行线的模具曲面是圆柱面, 具有圆状平行线的模具曲面是旋转面. 另外, 具有直母线的模具曲面是可展曲面, 具有圆状直母线的模具曲面是管面.

蒙日曲面和模具曲面推广到离散情况, 性质和定义不变. 有一种特殊的模具曲面, 它来源一种半离散的曲面, 可以看成光滑的轨线进行常角细分后得到的曲面, 构造完全离散曲面只需对直母线进行离散化处理即可.

**定义 28** 当离散模具曲面的轨线是成等角的直线段时, 这样的离散曲面称为等角模具曲面.

图 3.52 中的离散等角模具面满足格点存在公共锥面, 四边面存在外接圆, 法向量连线构成离散可展曲面, 任意提取两个方向支撑结构条面均是平面的, 且其中一个是边成等角的对称网格面.

通过例子和以上分析可知, 等角模具曲面具有高度的对称性和极强的重复性. 本质上它既是圆网又是锥网, 同时具有面等距和格点等距. 所有的轨线是平行的, 所有的格点都是相同的, 所有的四边形是等腰梯形, 这对制造加工过程带来了极大的便利, 比如对网壳结构的建造, 所有的节点是全等的, 能使用相同准则进行生产和构造梁柱和组件, 有效地节省了成本支出.

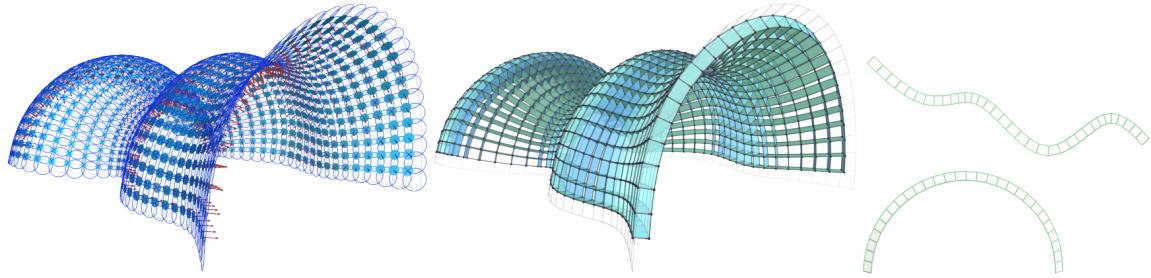


图 3.52: 离散等角模具面.

Fig. 3.52: Discrete isogonal moulding surfaces.

### 3.5.5 应用实例

曲率线反映了曲面的基本形状特征, 因而从美学角度很受设计者的欢迎. 理论上, 如上面介绍的圆网、锥网、等温网、蒙日网这几种常见的离散曲率线参数网, 首先它们都是共轭网, 然后依据不同的离散化定义, 得到具有不同界面特征的曲率网. 具体特征为: 圆网的每个面存在外接圆; 锥网的每个格点星存在公切旋转锥; 等温网的四边形边长满足交比条件; 推广的 S-等温网的每个面存在内切圆, 格点星处存在公切球; 蒙日网具有很强的对称性和重复性; 推广的等角模具面既是锥网又是圆网.

建筑上, 力流依赖重力方向, 主法曲率线可以引导力流从而安放梁柱作为表面的支撑结构. 但因它在曲面上的唯一性, 在建筑表面造型上缺少一定的设计灵活性. 一种应用的实例是组合造型. 基于稳定性的模型组合不需要外在粘贴物而是充分利用几何特点进行固定, 如图 3.53-左, 所有的木片在组合过程中沿着曲率线, 彼此之间利用结构特性彼此锁住, 能使得整体牢固并创造一种连续的表现.

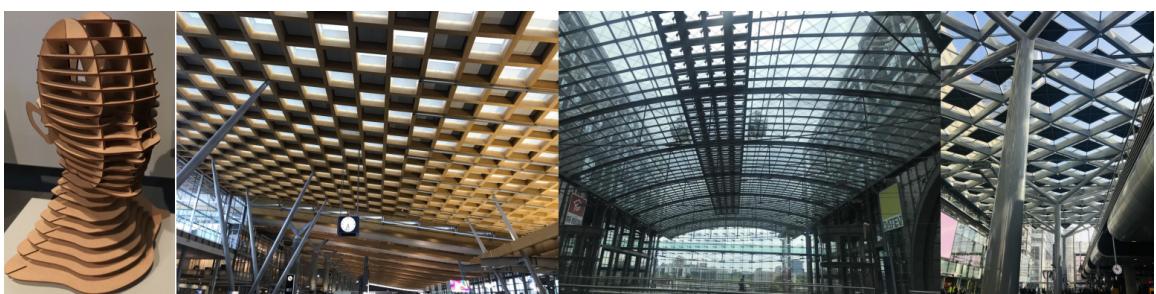


图 3.53: 曲率线网结构.

Fig. 3.53: Curvature line structures.

曲率线网的结构还经常应用在火车站、机场等高透光的顶棚上, 如图 3.53 具有重複性的面板沿着主法曲率方向嵌入曲面。这样的结构自然会与可展曲面联系起来。比如 Eiffel 铁塔上的餐厅玻璃墙面 (如图 3.54) 就是主法曲率网面。每个四边面由平直的玻璃覆盖, 弯曲的两族梁柱构成离散共轭网。每个十字交叉的位置是网格的 4 价格点, 在这些位置, 四个源自平直的钢质条面弯曲连接构成可展的梁柱面。显然参考曲面被指定之后, 主法曲率网确定, 则不再存在自由设计的空间。

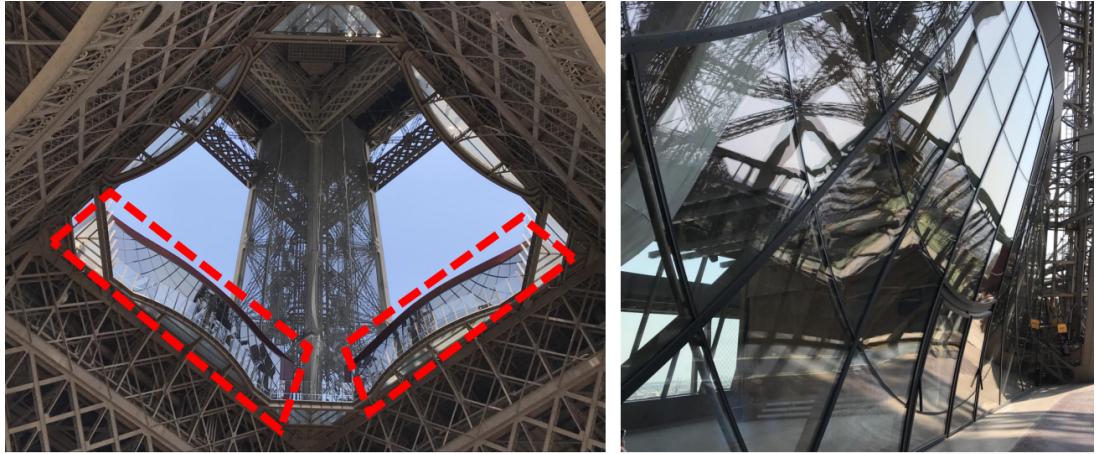


图 3.54: Eiffel 铁塔上的曲率网结构。

Fig. 3.54: Principal curvature structure on the Eiffel Tower.

### 3.6 离散渐近线参数网

**定义 29** <sup>[66]</sup> 映射  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  称为 A-曲面 (asymptotic surface), 即由渐近线参数化的曲面, 如果在曲面  $\mathbf{f}$  上每一点处向量  $\partial_1^2 \mathbf{f}, \partial_2^2 \mathbf{f}$  位于由  $\partial_1 \mathbf{f}, \partial_2 \mathbf{f}$  张成的切平面上。

A-曲面的所有参数线都是曲面的渐近线, 它们具有零法曲率  $k_n = 0$ , 即  $\langle \partial_1 \mathbf{f}, \partial_1 \mathbf{n} \rangle = \langle \partial_2 \mathbf{f}, \partial_2 \mathbf{n} \rangle = 0$ 。进一步地,  $\partial_1^2 \mathbf{f} \perp \mathbf{n}, \partial_2^2 \mathbf{f} \perp \mathbf{n}$ , 也就是说, 两族渐近线相交处具有二阶平面性。

A-曲面对应的离散等价物是 A-网 (asymptotic net), 即由渐近线网构成的离散曲面, 其具有的几何特征应该满足每个格点星是平面的 (如图 3.55), 这和前面提及退化的 S-网是 A-网相一致。

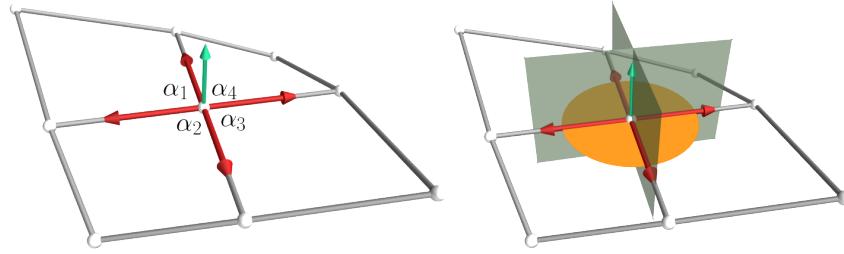


图 3.55: A-网格点星.

Fig. 3.55: A-net at a vertex star.

### 3.6.1 A-网格点星条件

**定义 30** [66] 映射  $f: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}^3$  称为  $\mathbb{R}^3$  中  $m$  维离散 A-网 (discrete asymptotic net), 如果对于每一个  $u \in \mathbb{Z}^m$ , 所有点  $f(u \pm e_i)$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) 位于某个过  $f(u)$  的平面上.

只考虑 4 价格点星的情况, 即 A-网要求格点及其相连接的 4 个邻格点共平面. 但是并不要求网格面的平面性. 显然共轭 A-网只能是平面网. 若所有基本四边网都是非平面的, 这样的 A-网称为非退化的. 接下来的研究也只针对非退化的 A-网.

A-网构成条件要求平面格点星. 可以限制这 5 个点  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{ij}$  ( $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) 满足共面方程, 即方程 (3.3) 退化形式

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}_k) = (b, c, d) \cdot \mathbf{v}_k^T + e = 0, \quad (k = i, ij). \quad (3.12)$$

从退化的球面格点星的定义表示 A-网在几何上是可行的, 但是从计算角度, 上面的限制条件涉及到的辅助变量过多, 会降低优化速度. 更直接的方法就是在每个格点星仅增加一个辅助变量  $\mathbf{n}_i$ , 定义四条边共面的条件  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_{ij}$  即可, 其中  $\mathbf{E}_{ij}$  为单位边向量.

其等价的几何意义是离散曲线所在的密切面共面, 即向量  $\mathbf{n}_i$  与密切面上的任意两个向量垂直, 继承离散测地平行坐标系 (§ 3.4) 中对离散曲线切向量和主法向量的定义, 则选取这两个向量, 得到如下等价条件

$$\mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_{i1} + \mathbf{E}_{i3}) = 0, \quad \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_{i1} - \mathbf{E}_{i3}) = 0,$$

$$\mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_{i2} + \mathbf{E}_{i4}) = 0, \quad \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_{i2} - \mathbf{E}_{i4}) = 0.$$

图 3.56 中显示的是对给定的螺旋网 (左) 进行如上限制优化得到 A-网 (右).

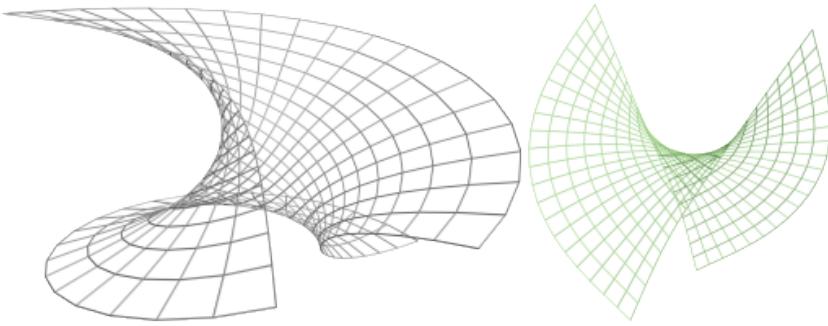


图 3.56: 从螺旋网构造 A-网.

Fig. 3.56: An A-net from a helical mesh.

### 3.6.2 几何性质

辅助变量  $\mathbf{n}_i$  的几何意义是平面格点星的法向量, 自然是 A-网中每个渐近线的离散副法向量. 给定它们的统一定向, 沿着这些副法向量, 可以生成渐近线的等距线. 这些等距点、等距线就构成了 A-网的等距面上格点和离散曲线. A-网的等距面也仍然是 A-网. 互为格点等距的 A-网通过正交的离散网连接, 交线是 A-网的渐近线. 这些之间的离散网是 A-网的等宽面法向量网. 图 3.57 中对给定两个不同的 unduloid 网进行限制优化后得到不同形状的 A-网.

### 3.6.3 极小曲面

特别地, 正交的渐近线参数曲面是极小曲面. 反之, 过极小曲面所有点的两族正交参数线是渐近线.

极小曲面是由渐近线参数网构成的光滑曲面的一个特例, 要求参数网是正交的, 反之, 具有正交渐近参数网的曲面一定是极小曲面. 这样, 可以从离散正交渐近线网构造离散极小曲面, 利用其正交节点和直可展性质, 应用到网壳结构建模中. 推广到一般渐近网, 具有局部平面性的离散网格仍然展现出自由型曲面结构, 比如成等角的离散渐近网是具有常主法曲率比的离散 Weingarten 曲面, 既是离散渐近网又是离散切比雪夫网的网格面构成离散(伪球面)常负 Gauss 曲率曲面. 这些都与光滑的理论相一致.

离散正交 A-网是离散极小曲面, 使用正交和平面格点星能量约束, 便得到极小曲面.

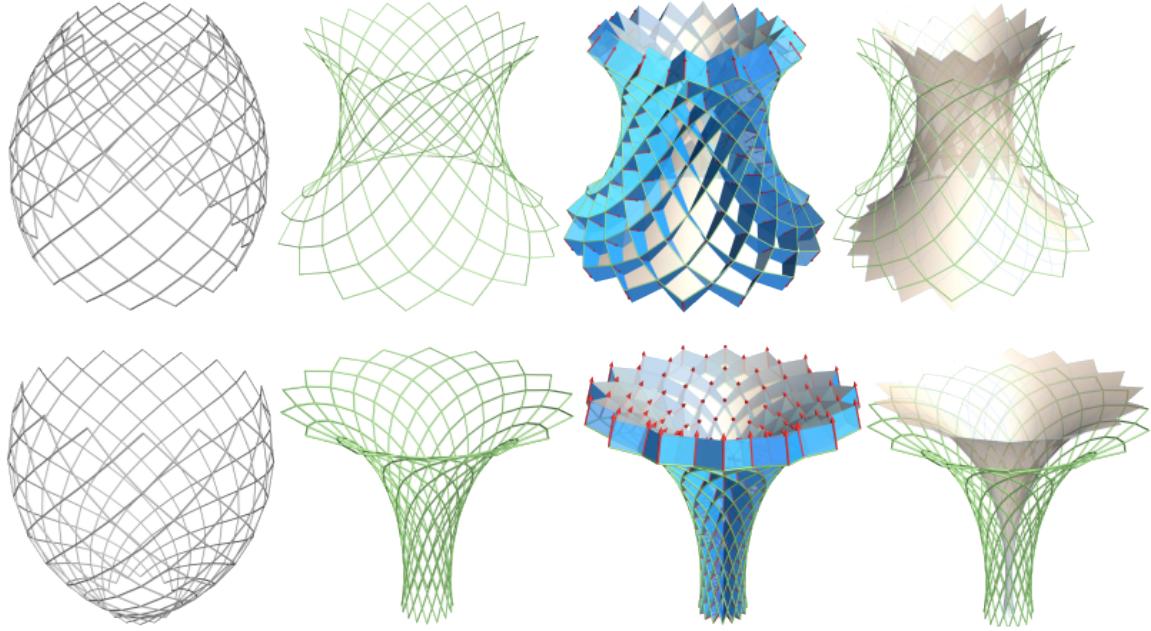


图 3.57: 从 unduloid 网格构造 A-网及其等距面.

Fig. 3.57: An A-net with offset from an unduloid mesh.

图 3.58展示了三个不同离散极小曲面及其对应的离散直可展曲面条. 图 3.59上排是图

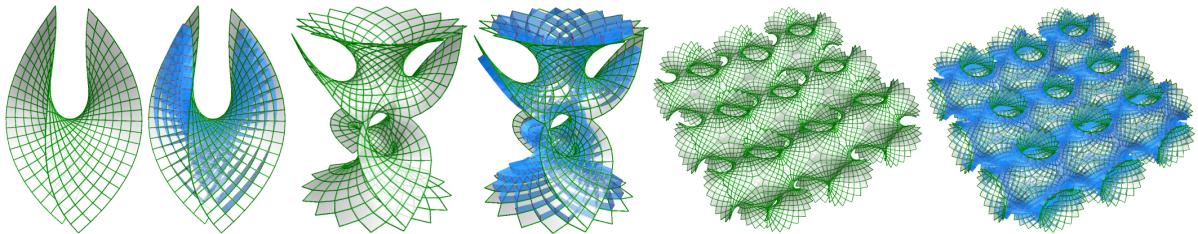


图 3.58: 离散极小曲面及其离散直可展结构.

Fig. 3.58: Discrete minimal surfaces and corresponding discrete straight developable structures.

1.6中光滑 Enneper 极小曲面的离散化对应, 其离散正交性使得格点法向量构成直的离散可展曲面条. 在建筑范围内, 这些可展条面可以作为支撑结构存在. 这恰恰是 S-网具有圆弧支撑结构退化后的对应. 值得注意的是, 这些 A-网法向量不一定是离散可展曲面的直母线. 直母线的方向会或多或少与其偏离, 其离散定义参考<sup>[17]</sup>.

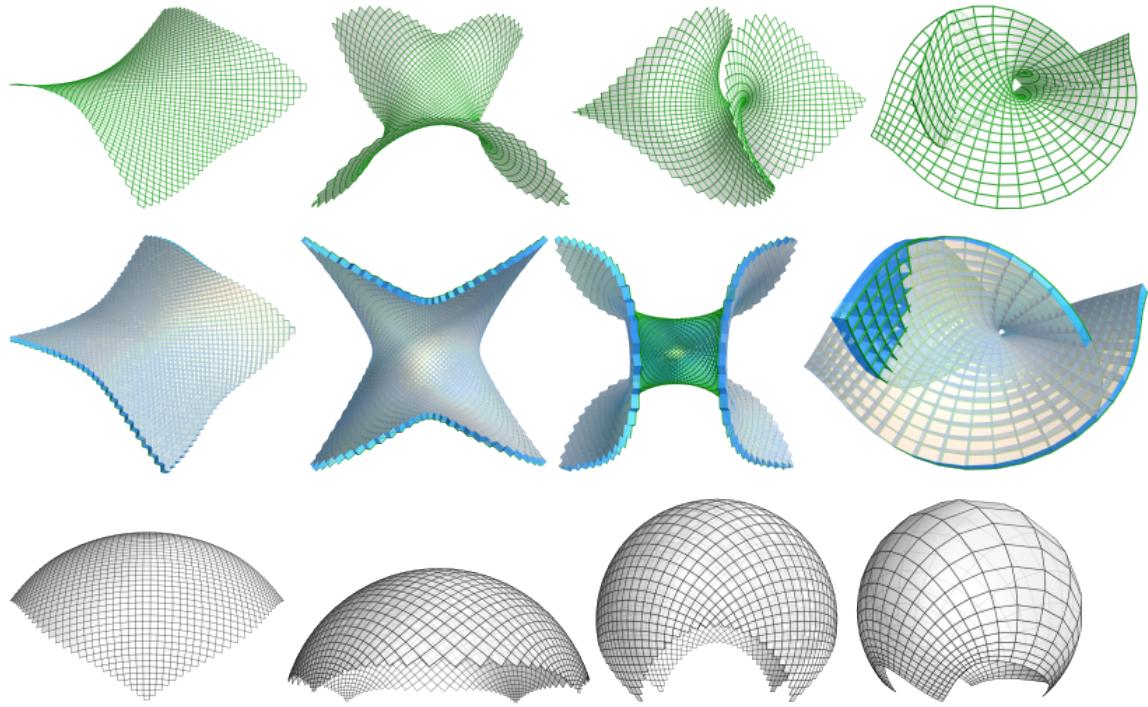


图 3.59: 离散极小曲面(上), 等距面(中)及其 Gauss 像(下).

Fig. 3.59: Discrete minimal surfaces, offsets and Gauss images.

### 3.6.4 具有常主法曲率比的曲面

Weingarten<sup>[122]</sup> 表示了等距于旋转面的曲面特征, 发现它们是与主法曲率相关的曲面类的焦面. Jimenez 等<sup>[17]</sup> 构造了具有常主法曲率比的渐近网结构. 常主法曲率比的曲面是具有单参数的二阶曲面元, 该 Weingarten 曲面因建立两个主法曲率之间的关系, 减少了曲率信息, 从而可以实现建造的简化. 对于含有  $N$  个双弯曲面板的建筑表面, 大约只需要  $\sqrt{N}$  个模具即可. 这在现实建造中可以使用较少的模具构造建筑表皮, 从而实现节省成本的目的.

离散极小曲面使得存在矩形的离散可展面彼此正交地垂直它们, 这些交线是极小曲面的渐近线. 如果推广这种正交 A-网到成常角 A-网, 仍然存在过格点的面法向量的离散可展曲面, 此时的 A-网具有常主法曲率比 ( $k_1/k_2 = \text{const.}$ ), 是负 Gauss 曲率曲面 ( $K < 0$ ). 这是一种离散 Weingarten 曲面.

极小曲面是一种特殊的常主法曲率比的曲面, 即平均曲率为零使得  $k_1/k_2 = -1$ . 特

殊的比值, 如  $k_1/k_2 = 1$  对应于球面. 关于具有常主法曲率比的光滑曲面研究很少见, 离散的理论在文章<sup>[17]</sup> 中给了详细的介绍. 具有常主法曲率比的曲面等价于存在两族共轭网, 且四条参数线中任意两个的切向夹角相等.

构造具有常主法曲率比的 A-网, 只需要在 A-网结构上增加离散曲线成常角的条件. 依然使用离散测地平行坐标系 (§ 3.4) 中引用的局部坐标系, A-网成常角  $\theta_0$  的限制为

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_i)/\|\mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_i\| - \mathbf{E}_{ij} = 0, \\ & (\mathbf{E}_{i1} - \mathbf{E}_{i3})/\|\mathbf{E}_{i1} - \mathbf{E}_{i3}\| - \mathbf{T}_{i1} = 0, \\ & (\mathbf{E}_{i2} - \mathbf{E}_{i4})/\|\mathbf{E}_{i2} - \mathbf{E}_{i4}\| - \mathbf{T}_{i2} = 0, \\ & \mathbf{T}_{i1} * \mathbf{T}_{i2} - \cos \theta_0 = 0. \end{aligned}$$

图 3.60 上排展示了两个离散极小曲面及其过格点法向量的离散直可展结构. 此时, 参数网是成  $90^\circ$  的 A-网, 是主法曲率比为  $-1$  的离散 Weingarten 网. 特别地, 约束该 A-网的夹角为  $60^\circ$  便得到常主法曲率比的离散 Weingarten 网, 见图 3.60 下排. 图 3.61 是成

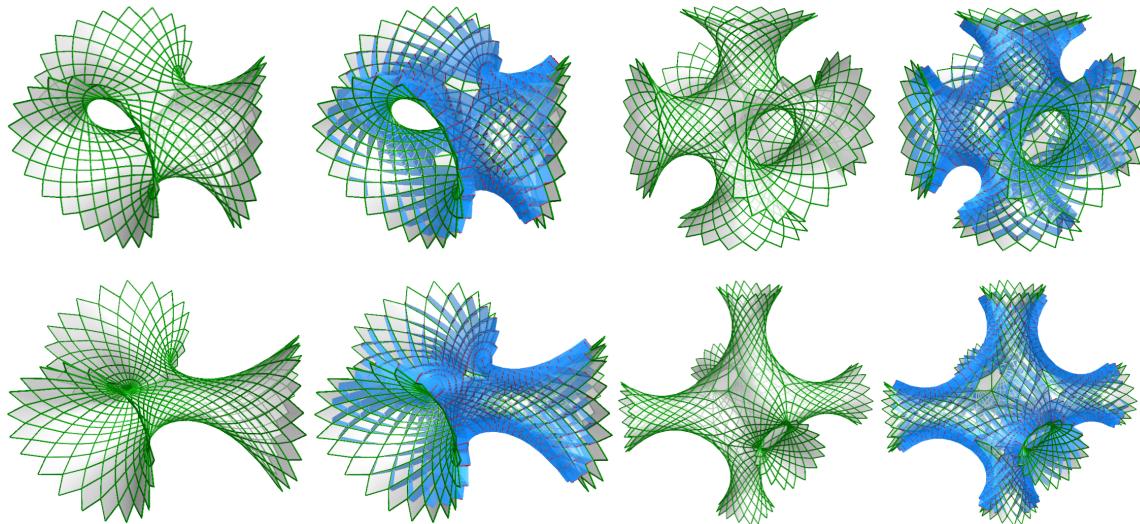


图 3.60: 具有常主法曲率比的 A-网及其直可展结构.

Fig. 3.60: A-nets with constant ratio of principal curvatures and their straight developable structures.

$60^\circ$  角的 A-网在交互变形下得到的不同形状, 得到的网格仍然是具有常主法曲率比的渐

近网.

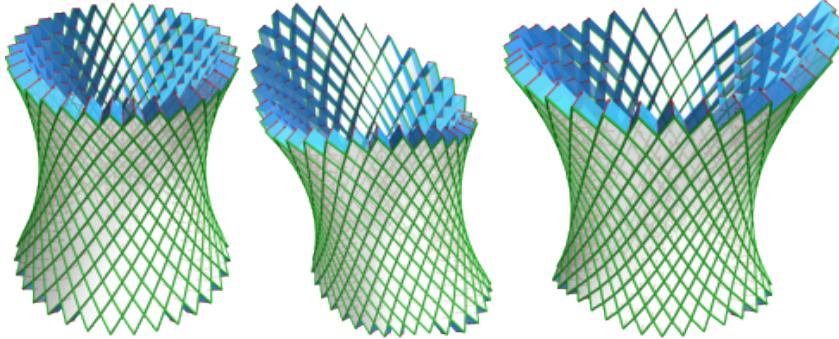


图 3.61: 交互设计离散 Weingarten 网及其直可展结构.

Fig. 3.61: Interactive design of discrete Weingarten meshes and their straight developable structures.

### 3.6.5 应用实例

负弯曲曲面上的渐近方向 (消失的法向曲率的方向) 相对于主方向对称, 曲面上的渐近曲线网是曲面上的 S-网. Finsterwalder<sup>[123]</sup> 指出了一种基于渐近曲线构建表面模型的简单方法, 即使用容易弯曲但不易拉伸的直的条带面和原始平坦的材料条 (纸张, 纸板, 金属薄板) 来构建模型. 这样的条带可以且仅当遵循曲面上的渐近曲线时才可正交连接到参考表面 S. 这允许人们从直的条带面构建弯曲结构, 如前面提到 A-网的显著应用实例 (图 2.1 和图 3.21).

该离散渐近线参数面由正交的 A-网构造的极小曲面, 即平直矩形钢薄片以正交的方式彼此相交并垂直于 (虚拟的) 底层曲面. 上下底层曲面便是两个等距的极小曲面. 钢薄片作为该模型的支撑结构是可展曲面, 所有钢薄片的长边界线可以看成可展曲面和极小曲面的交线, 该交线既是极小曲面的渐近线, 又是可展曲面的测地线. 几何角度来看, 可展曲面沿着极小曲面的正交渐近线与极小曲面正交, 该交线是可展曲面的测地线.

随后, Schling 和 Barthele<sup>[124]</sup> 推广到一般情况, 设计并建造了一个新的渐近网壳结构 (如图 3.62). 该参数网放松了对参数线夹角的限制, 只是一般 A-网. 但仍然可以实现使用平直的矩形钢条带面构造双弯曲曲面的效果.

这两个实体结构, 均实现了建造元素而不仅仅是参数上的重复, 这对加工制造都带来了极大的便利, 在创造美感的同时, 减少了成本.



图 3.62: Ingolstadt 的 Intergroup 酒店前的渐近网壳结构.

Fig. 3.62: Asymptotic gridshell for the Intergroup Hotel in Ingolstadt.

### 3.7 算法说明

解释建筑几何造型的理论是离散微分几何, 解决建筑几何问题的手段是数值优化. 本文选择使用至多二次约束的方程作为优化问题求解工具. 主要算法是 Guided Projection 算法, 它是由 Tang 等<sup>[109]</sup> 引入的一种变形的 Gauss-Newton 算法. 通过由所有变量构成的空间的限制流形的定义建立离散曲面. 选择一个开始点并试图移动到满足的限制流形空间中.

对于需要满足的如平面化、不同曲率参数网格点星条件、网格几何条件、静力平衡等限制, 都能很好表示. 它通过刻画格点坐标、面法向量、曲率方向、切向量等其他网格相关数量值满足的不超过二次的限制条件, 结合具有指导意义的光滑因子进行优化, 能快速指向目标形状. 使用的光滑因子  $E_{fair}$  起引导配合作用, 因此是软限制, 能避免解空间大范围的波动, 确保网格在整个形状空间的质量. 实验证明, 这种被光滑因子引导的算法计算高效而简单. 同时这些离散网格相关量的迭代更新, 对其实时可视化提供了方便.

Guided Projection 算法以一系列被需要满足的至多二次约束方程的变量为开始, 这些变量有些是直接变量, 有些是辅助相关量, 它们被限制方程所关联, 是相互依赖的. 平面网的构造需要辅助面法向量; S-网 (§ 3.2) 既可以使用辅助系数表示球面方程, 又可以

补充球心变量表示球面几何意义; 测地平行网 (§ 3.3), 测地网 (§ 3.4) 和曲率网 (§ 3.5) 涉及到边长、夹角、以及必要的三角函数值作为补充变量; S-等温网需要辅助边上格点; A-网 (§ 3.6) 需要构造辅助格点法向量等.

约束方程至多是二次的设定有一些好处, 比如它们很容易被线性化, 并且能准确地知道它们适合初始限制的效果有多好. 有了以上的初始设定和限制方程的转化,  $N$  个限制条件可以使用非负定矩阵  $H_i$  表示为如下方程组:

$$\varphi_i(X) = \frac{1}{2}X^T H_i X + b_i^T X + c_i = 0, i = 1, \dots, N.$$

若上一次迭代解为  $X_n$ , 使用一阶泰勒展开上式, 换言之, 使用超平面近似每一个二次曲面, 即

$$\varphi_i(X) \approx \varphi_i(X_n) + \nabla \varphi_i(X_n)^T (X - X_n) = 0, i = 1, \dots, N,$$

表示成矩阵形式即为  $H \cdot X = r$ , 其中

$$H = \begin{bmatrix} \nabla \varphi_1(X_n)^T \\ \nabla \varphi_2(X_n)^T \\ \vdots \\ \nabla \varphi_N(X_n)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (h_1 \cdot X + b_1)^T \\ (h_2 \cdot X + b_2)^T \\ \vdots \\ (h_N \cdot X + b_N)^T \end{bmatrix},$$

$$r = \begin{bmatrix} -\varphi_1(X_n) + \nabla \varphi_1(X_n)^T X_n \\ -\varphi_2(X_n) + \nabla \varphi_2(X_n)^T X_n \\ \vdots \\ -\varphi_N(X_n) + \nabla \varphi_N(X_n)^T X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot X^T \cdot h_1 \cdot X - c_1 \\ \frac{1}{2} \cdot X^T \cdot h_2 \cdot X - c_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \cdot X^T \cdot h_N \cdot X - c_N \end{bmatrix}.$$

对于上面欠定的方程, 不直接进行求解. 因为有足够的剩余空间进行解的探索, 可以补充光滑因子和连续两次迭代的解距离作为正则化. 解距离项的增加一方面可以避免矩阵秩亏损的情况, 另一方面可以防止当前解和之前的解偏离太大的. 转化  $H X - r = 0$  为

$$\|H X - r\|^2 + \|K X - s\|^2 + \epsilon^2 \|X - X_n\|^2 \rightarrow \min,$$

其中光滑因子控制项  $\|KX - s\|$  和解距离控制项  $\|X - X_n\|$  是不重要的弱指导项, 因此随着迭代的进行可以放松光滑因子, 而权值  $\epsilon$  控制求解步长, 应尽量设置足够小, 如 0.001. 继续进行 Cholesky 分解上式, 只需求解线性方程

$$(H^T H + K^T K + \epsilon^2 I)X = H^T r + K^T s + \epsilon^2 X_N,$$

对于复杂的变量  $X$  导致的庞大的矩阵  $H, K$ , 使用稀疏矩阵表示它们能节省计算成本. 最终  $\|HX - r\|$  的取值决定了优化收敛效率.

需要注意的是, 尽管光滑因子能尽可能连续地指导解的变化, 但是它的使用也是相对危险的, 作用太大很可能破坏主体限制能量的几何性质, 作用力小则起不到引导优化效果, 则网格多边线呈现出明显的拐动. 为了权衡这种冲突, 可以引入权因子  $e_{fair}$  控制光滑能量函数的作用. 权因子的设定, 是相对自由的. 一种比较理想的状态是, 优化开始时使用相对大的数值, 如 0.1, 随着迭代优化的进行, 就要降低这个数值, 减少它的作用, 直到优化函数收敛即网格形状稳定的状态.

常见的光滑能量函数是 Laplacian, 即格点位于周围相连接邻点构成的多边形的重心<sup>[125]</sup>:

$$E_{fair} = \sum_i \left( \sum_{j=1}^k v_{ij} - k \cdot v_i \right).$$

本文中采用的主要是离散曲线二阶微分为零的光滑控制项配合不同的硬限制进行优化. 以正则四价格点  $v$  为例 (如图 4.5), 若其相连接格点按逆时针顺序分别为  $v_i (i = 1, \dots, 4)$ , 则

$$v_1 - 2v + v_3 = 0, v_2 - 2v + v_4 = 0.$$

还有一种与平均曲率和高斯曲率相关的光滑能量函数 Willmore<sup>[126]</sup>,

$$E_W(S) = \int_S (H^2 - K) dA = 1/4 \int_S (k_1 - k_2)^2 dA,$$

这种在曲面面积上的积分函数是共形不变量和 Möbius 不变量, 即保平移、旋转、统一放缩、反转变换. 其离散形式对于其他设计任务来说也是一种好的正则化控制项.

对于有指定离散曲线方向的网格, 前两个光滑因子的作用并没有明显的区别, 但是对于三角网格或没有明确指定离散曲线方向的网格, 推荐采用离散 Laplacian<sup>[127–129]</sup>. 探索不同 Laplacian 算子以及对比不同算子对离散网格的光滑效果也是值得未来研究的方向. 一种不需要采用光滑因子的网格变形是弯曲折叠或折纸变换, 其在可展曲面的形状空间探索也是很有趣的研究<sup>[63,64,130,131]</sup>, 甚至被 NASA 应用在宇宙空间的探索<sup>[132]</sup>. 本文没有考虑这个研究方向, 便不再赘述.

Guided Projection 算法的关键点是对约束函数进行不超过二次的构造. 变量数依据需求而增减, 原则是尽量避免重复变量的出现. 这里主要以离散测地平行坐标系 (DGPC) 网格 (§ 3.3) 为例, 罗列涉及到的变量, 挑选几个典型的网格讨论其权因子的选择、目标函数收敛性、算法运行效率等. 对于其他限制网的讨论方法类似, 主要不同点是限制函数的表达方式, 详细参考每个章节中的介绍.

### 3.7.1 变量列表

对于离散测地平行坐标系网, 研究  $\mathbb{Z}^2$  格子的  $(m \times n)$  矩形子曲面片构成的网格  $M = (V, E, F)$ . 这样, 一般网格有  $|V| = nm$  格点,  $|F| = (m - 1)(n - 1)$  面,  $|E| = n(m - 1) + m(n - 1)$  边. 离散测地平行坐标系所需变量如表 3.1. 因此, 总共有  $4|E| + 3|V|$  个基本变量.

表 3.1: 离散测地平行坐标系变量数.

Tab. 3.1: List of variables for DGPC.

变量	符号	数量
格点坐标	$\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$	$3 V $
单位边向量	$\mathbf{e}_{ij} \in \mathbb{R}^3$	$3 E $
边长	$w_{ij} \in \mathbb{R}$	$ E $

接下来, 列出约束条件并在方括号中列出方程数目. 因为离散测地平行坐标系中的两族参数线都起着非常重要的作用, 所以不能独立于坐标方向表示所有限制条件.

### 3.7.2 约束函数说明

#### 网格约束条件

如之前所提, 需要比实际必要的变量多的变量来描述网格才能使用最多二次的代数方程作为约束条件. 因此, 为了描述适当的网格, 赋予边长变量  $w_{ij}$  到实际的边长:

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - w_{ij} \mathbf{e}_{ij} = 0, \quad [3|E|],$$

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 - w_{ij}^2 = 0, \quad [|E|].$$

这两组限制意味着向量  $\mathbf{e}_{ij}$  是单位边长, 即  $\mathbf{e}_{ij}^2 = 1$ . 光滑化的使用使得理论上负边长  $w_{ij}$  的出现得以避免, 也就不会导致边向量  $\mathbf{e}_{ij}$  方向的翻转和  $w_{ij}$  符号的改变. 否则, 相应的约束条件可以通过引入额外的变量  $d_{ij} \in \mathbb{R}$  表示为  $w_{ij} - d_{ij}^2 = 0$ .

#### 离散测地平行坐标系限制

参考定理 7, 角限制条件转化为单位边向量等式为 (参看图 3.63-左)

$$\langle \mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{ik} \rangle - \langle \mathbf{e}_{im}, \mathbf{e}_{ij} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{e}_{il}, \mathbf{e}_{ik} \rangle - \langle \mathbf{e}_{im}, \mathbf{e}_{il} \rangle = 0, \quad [2(mn - n - 2m + 2) \approx 2|V|].$$

#### 相等条面宽度函数

对于内蕴重复性, 希望所有条面有相同的长度且沿着每条条面有相同分布的条宽度. 对于宽度, 限制沿着正交参数线 ( $v$ -方向) 的连续边有相同的长度 (参看图 3.63-中):

$$w_{ik} - w_{im} = 0, \quad [m(n - 2) \approx |E|].$$

看起来它表示的是每个  $v$ -方向离散弧长参数化, 但表示的意义并不相同, 本质上表示的是测地线沿着  $v$  方向匀速旋转速度. 该限制是构造离散旋转面 (方程 (3.8)) 及其等距变换保持不变量的一种方法. 注意可以自动获得近似相同长度的条面. 这是测地平行坐标系本身具有的性质<sup>[112]</sup>, 它与离散设定兼容得非常好, 以至于不需要类似上面条件定义这个限制条件.

## 近似可展约束

对于近似可展曲面, 要求  $K = 0$  简化 Jacobi 方程 (3.5) 限制条件. 离散化构造需要在  $u$  方向和  $v$  方向分别定义 (参看图 3.63-右).

- 所有的  $u$ -参数线被弧长参数化. 限制  $u$ -方向连续边满足以下相等长度:

$$w_{ij} - w_{il} = 0, \quad [n(m-2) \approx |E|].$$

- $v$ -方向边长在  $u$ -方向的二阶微分满足

$$\delta_{uu} w_{ik} = w_{i-1,k} - 2w_{ik} + w_{i+1,k} = 0, \quad [(n-1)(m-2) \approx |E|].$$

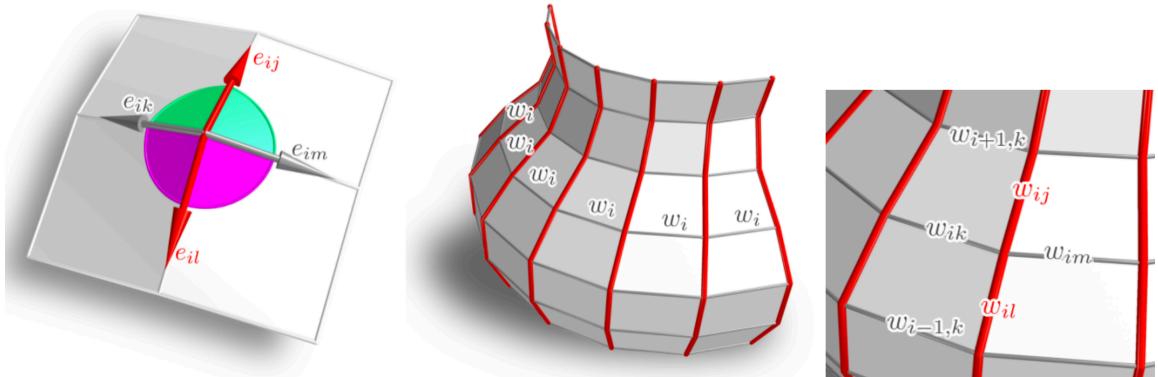


图 3.63: 网格约束条件.

Fig. 3.63: Mesh constraints.

## 等距约束

等距变换要求保角的同时保边长, 离散测地平行坐标系保证了角条件, 只要再限制边长度不变即可. 假定给定网格的边长为  $w_{ij}^0$ ,

$$w_{ij} - w_{ij}^0 = 0, \quad [|E|].$$

## 近似约束

假设参考面格点  $\mathbf{p}_k$ , 法向量  $\mathbf{n}_k$ . 对于我们网格的每个格点  $\mathbf{v}_i$ , 令  $\mathbf{p}_{k_i}$  是参考面上距  $\mathbf{v}_i$  最近的点, 则

$$\langle \mathbf{v}_i - \mathbf{p}_{k_i}, \mathbf{n}_{k_i} \rangle = 0, \quad [|V|].$$

最近的点在每次 Gauss-Newton 步骤都要重新计算.

## 基于手柄变形约束

令  $l$  个被固定的格点位置为  $\mathbf{p}_k$ . 则

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{p}_{k_i} = 0, \quad [3l].$$

## 约束网格比例

在进行网格限制优化时, 如果没有关于边长的限制, 网格会出现迅速收缩的情况. 在不与网格其他限制冲突情况下, 为了控制网格的比例, 可以限制网格边界周长为定值, 例如等于初始网格边界周长值  $L_0$

$$(\mathbf{v}\mathbf{b}_{i1} - \mathbf{v}\mathbf{b}_{i2})^2 = w_i^2, \quad \sum_i w_i = L_0, \quad (3.13)$$

其中  $\mathbf{v}\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{v}\mathbf{b}_{i2}$  为边界上第  $i$  个共边的两点,  $w_i$  为其边长.

相比较方程 (3.13), 限制边界上每个边的边长为初始对应边长则更为严格, 该限制是保持网格等距变换时常用的约束

$$(\mathbf{v}\mathbf{b}_{i1} - \mathbf{v}\mathbf{b}_{i2})^2 = L_i^2.$$

文章<sup>[70]</sup>还证实了对于圆盘拓扑的两个光滑可展网格, 如果边界边长相等且网格边界转角对应相等, 则它们是彼此等距的网格.

## 光滑化约束

为了获得好的网格质量作为优化结果, 我们需要一些光滑因子. 通过要求二阶向前差分为零来实现:

$$\mathbf{v}_l - 2\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j = 0, \quad \mathbf{v}_k - 2\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_m = 0, \quad [2(mn - n - m) \approx 2|V|]. \quad (3.14)$$

### 3.7.3 计算时间

以下表格中的时间  $T$  是我们用 Python 语言在配置为 Intel® Core™ i5-6260U CPU, 1.80GHz, 8GB RAM 的计算机条件下实现的结果。因为建模过程是基于手柄编辑的交互过程, 所以测量时间是秒/迭代。当使用鼠标拖拽一个格点时, 算法连续地运行, 当释放鼠标之后再运行 5 次迭代。限制的权值除了光滑化一项其余都被设定为 1 或 0 小箭头 (如  $.01 \rightarrow 0$ )。意味着在编译过程中如果不期待几何上任何明显的改变时, 减少相应的权值到零来减少相应的限制。表格 3.2 展示了一些挑选的离散测地平行坐标系网格的权因子、收敛结果、运行速度等信息。

表 3.2: 离散测地平行坐标系计算效率.

Tab. 3.2: Computing efficiency for DGPC.

Fig.	V	var	$w_{go}$	$w_{iso}$	$w_{esw}$	$w_{dev}$	$w_{prox}$	$w_{fair}$	$\ HX - r\ $	$T/\text{iter}$
4.18	441	8043	1	1	0	0	0	.01 $\rightarrow$ 0	1 e-7	0.25
4.13	391	742	1	1	0	0	0	.01 $\rightarrow$ 0	1 e-7	0.11
4.7	1147	21249	1	0	1	1	1	.1 $\rightarrow$ .01	0.021313	1.43
3.35-1	441	8043	1	1	0	0	0	.01 $\rightarrow$ 0	1 e-7	0.17
3.35-2	187	3329	1	1	0	0	0	0	1 e-6	0.07
3.33-1	330	5942	1	1 $\rightarrow$ 0	1 $\rightarrow$ 0	0	1	0	2.4 e-7	0.23
3.33-2	4797	89879	1	1 $\rightarrow$ 0	1 $\rightarrow$ 0	0	1	0	3.3 e-6	6.62
4.23	1458	27054	1	0	1 $\rightarrow$ 0	0	1	.1 $\rightarrow$ 0	0.002945	1.38
4.10	441	8043	1	0	1	1	0	.001	5.8 e-5	0.43

**注 4** 表格 3.2 中的权因子代表的意义是:  $w_{go}$  = 离散测地平行坐标系;  $w_{iso}$  = 等距于参考曲面;  $w_{esw}$  = 相等曲面条宽度;  $w_{dev}$  = 近似可展;  $w_{prox}$  = 近似可展曲面;  $w_{fair}$  = 光滑化。

## 4 面向制造意识的几何设计

### 4.1 研究背景

以制造为意识的几何设计将实际的技术需求转化为参数曲面和曲线网格的微分几何特征。新颖的离散结构值得纯粹的几何研究，反之，几何性质的研究利用极大地简化了制造过程。本质上，建筑几何就是通过几何分析来制造自由的建筑表皮结构，从而实现节约成本、缩短工期、降低风险、增强美观性的目的。

现在的计算设计研究是将功能和制造的核心方面整合到智能形状建模的过程。这减少了时间和生成开发成本，但是也提出了组合数字设计和制造的完全新的方式。其中的一个研究方向是材料意识的形状建模，一个自然构造是从一个平板材料开始。如果这个材料相较于拉伸而言是更容易弯曲的，则目标的建造形状就是可展曲面，如 Frank Gehry 使用金属材质进行包层的建筑表皮（如图 1.12）。

使用这些曲面的交互建模仍然是这方面研究的活跃话题<sup>[69-71,133]</sup>。关于可展曲面的最新研究随着一种特殊的拉伸材料<sup>[134,135]</sup>的出现而增加了设计的灵活性。但是，这些不能直接获得防水的表面。从平板建造防水的 3D 曲面的显著方式是使用平面杆网格嵌入到预先拉伸的织物材料中，而这个织物被部署为复杂的三维的形状。直的折叠或弯曲的折叠变形的引入是从平的材料建造另一种空间结构的方式。本文不详细介绍这些丰富的研究方向，具体可以参考<sup>[50,136,137]</sup>。

条带模型的研究可以增强对微分几何概念和相关物理模型的构造的理解，是微分几何的经典问题，也是现代离散微分几何的先导研究。特别地，建议参考 Finsterwalder 的引领性的研究<sup>[123]</sup>，它解释了几何和机械的显著联系，也介绍了计算设计和制造领域各种热门的话题。最近研究中，所谓的半离散曲面也得到了关注，同时涉及到了实际和理论的观点<sup>[34,77,138]</sup>。这些曲面由直纹面的条带面组成，特别是可展曲面，构成了一种位于纯粹的离散和光滑的设定之间的曲面。测地平行坐标系与曲面上的距离函数密切相关。对计算曲面上的距离函数和测地线的问题，存在大量的研究工作<sup>[75]</sup>。本文重点不在提出新的计算测地线或距离域的方法，而是希望建立特殊参数化的离散曲面，通过控制测地条带面宽

度来实现各种应用。这种测地条带面模型的设计能遵循事先设定的由测地线形成的图案界面，经常应用在建筑和船体建造方面<sup>[139,140]</sup>。

## 4.2 自由曲面结构

传统曲面如柱面、锥面、球面、旋转面和直纹面在 3D 形状设计上很难取得充分灵活的效果。而自由曲面提供了更多的灵活性，比如从 Bézier、B 样条、NURBS 这些自由曲线推广到相应曲面增加了构造的丰富性。Bézier 曲线曲面是退化的 B 样条曲线曲面，同时它们又都属于退化的 NURBS 曲线曲面。NURBS 曲线曲面在拓扑表现上存在的限制，可以通过细分网格面得到，如前面提到的图 3.1 中的网格经过细分得到近似光滑的曲面效果。细分曲面的方法是解决动画中生动的卡通人物形象的复杂曲面造型非常有效的工具。

复杂的几何结构和自由的曲面在建筑领域的出现可以追溯到几十万年前的洞穴庇护所。随着时代的发展，双弯曲的曲面在教堂、雕刻建筑上仍随处可见。只有到了 19 世纪，建筑师开始应用工业化的方法对建筑表面的形式和风格做了大量的表达，比如使用钢、铁、加强混凝土等改善的材料。

建筑上自由形状的实现充满工程和设计上的挑战。完整的设计和建造涉及到方方面面，包括找形、可行分割嵌板、功能、材料、静态平衡和成本等。单纯的几何结构不能提供这些问题的解，大跨建筑 (long-span architecture) 更要兼顾技术、环境和美学三个重要因素综合分析其非线性结构形态<sup>[141]</sup>，但是扎实的几何理解是实现这种项目的重要步骤<sup>[142-145]</sup>。基于参数化技术建造自由建筑表面是当前造型的趋势<sup>[146,147]</sup>。

一般而言，结合结构计算的几何知识为自由曲面的制造和加工提供了新的方法，一个典型的例子是以悬挂结构闻名的建筑师 Frei Otto 的作品，如图 4.1-(a) 慕尼黑奥林匹亚运动场。使用离散方式来表示复杂自由曲面的最基本、方便和结构稳定的方式是使用三角网格面。三角网面在自由结构曲面不能轻易使用平面化的方式构造的时候被首选使用，如图 4.1-(b) 位于格拉茨的水上悬浮岛表面。离散曲面以各种方式表示自由建筑表面。它可能用来支撑最终的表皮而不可见（如图 4.1-(c,d)）。在某些钢、玻璃或类似的结构中，它们直接决定了建筑表面的美感，因此网格必须优化到很高的质量。但是，目前几何造型和

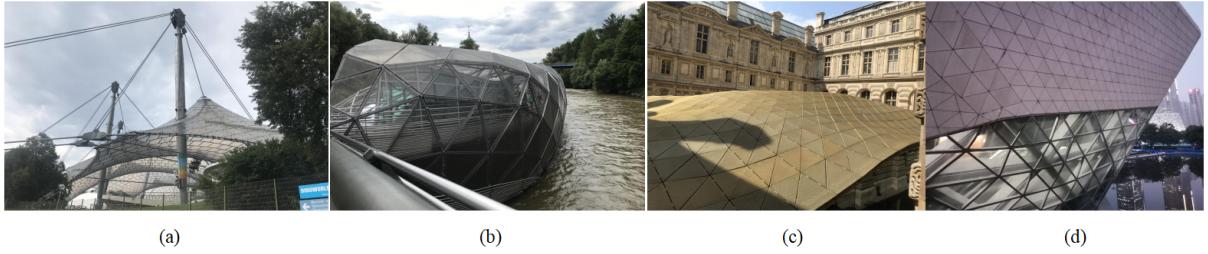


图 4.1: 自由曲面.  
Fig. 4.1: Freeform surfaces.

几何处理的研究领域很少触及这方面的研究.

自由的建筑表皮设计经常在外观新颖性和现实可建造性上做权衡. 一种有效的节约成本的办法是表皮结构上大量重复性元素的出现. 充分利用几何上的相等或全等条件设计的曲面, 不仅具有美感和灵活性, 还为现实制造提供很强的简便性. 应用具有重复性的非平凡混合平面网格, 可以实现超过可展面的双弯曲曲面的效果, 如使用材质来源于铜、铝、塑料、皮革等构造的可拉伸的结构可以广泛地应用在鞋底、衣服、装饰品等<sup>[134]</sup>(如图 4.2). 另外, 如现实建造的‘渐近网壳结构’模型(图 3.21), 其双层的(虚拟的)底层曲

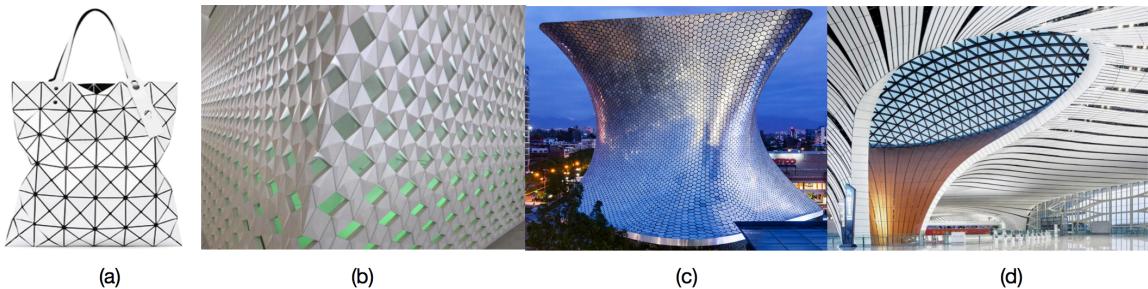


图 4.2: 有重复性元素的表面.  
Fig. 4.2: Skins with repetitive parameters.

面都是极小曲面, 离散曲面是退化的离散常平均曲率曲面. 因为曲面具有特殊的曲率性质, 所以每个格点处出现了很多重复性元素, 比如具有相同半径的球面格点星, 正交的几何关系, 直的可展面边界线或具有相同半径的弧长可展面边界线等. 这些重复性元素的出现增加了带有一定几何意义的曲面的美感, 同时转化为全等结构的出现, 大大简化了制造的复杂度, 运输的繁琐度和组装的难度. 所有的连接点是统一且正交的. 薄片定向垂

直于参考曲面,它们可以被制造成平直的,也可以是带有常半径的圆弧结构. 弹性竖起的过程充分利用了合规机制,可以不用脚手架直接获得设计形状. 这种组合重复曲率元素和弹性变形的方法在制造、集装和受力网壳的自重行为方面带来了很大的方便.

传统的曲面表达由代数方程直接定义,由对应的几何结构直观体现. 曲面的形变空间的探索涉及到方程参数改变或方程求解问题(尤其是某些非线性方程求解问题),受限于此,绝大多数情况,曲面的变换形状不能有效直观地体现,特别对于某些设计需求,找到某种曲面预想的形状如果通过求解代数方程将变得复杂而呆板. 显然,寻求曲面的准确代数表达又大大限制了自由型曲面的构造.

建筑上的离散曲面构造只是近些年被提出和研究的,对自由曲面的探索存在很多的可能性,尤其基于几何结构的理解,是整合建筑设计、加工制造的关键步骤. 第三章介绍了一些基于几何性质的曲面造型,其中一种构造自由曲面的快捷、随机的方法是对满足条件要求的曲面网进行交互设计. 预先得到的曲面没有必要事先准确知道,可以通过使用交互式的设定探索满意的形状,如图 3.18 对 unduloid 曲面进行满足球面格点星限制的模拟交互变形,图 3.35 和图 4.17 对旋转面进行满足离散测地平行坐标系的等距变形,图 3.61 对 Weingarten 曲面做保具有常主法曲率比的交互变形等.

### 4.3 可展曲面结构

三维物理建模是建筑设计过程重要的媒介. 一个传统的技术是使用纸张、硬卡片等建立几何模型(如图 1.4). 为了实现这样的目的,可以将模型进行平面展开、切割再粘合进行构造. 对于大多数弯曲的曲面,如自由曲面,它们的展开是不存在的. 可展曲面因其等距平面的几何特性,可以像纸张一样,在不拉扯、不撕裂的情况下进行弯曲、扭转,如图 4.3 分别展示了可展和分片可展面构成的模型.

建造连续光滑的可展曲面是一个老的研究话题,对于应用而言,可展曲面易制造但难以设计. 由于可展性非线性的代数本质,它的几何是高度限制的,交互建模可展曲面也变得复杂而困难.

对可展曲面的变形,很大程度上都是以几何和物理为基础的. 最近的可展曲面的研究热点是在网格上仿真可展曲面运动,同时还要保证它的关键几何性质. 这是离散微分



图 4.3: 现实可展曲面模型.

Fig. 4.3: Real developable models.

几何中的研究内容,相较于经典微分几何,它具有很强的交互性.

可展曲面在用木板或金属板进行弯曲支撑结构或覆盖造型的时候具有很强的优势. 它作为单弯曲曲面,存在一族直线简化了造型,只需要将木板或金属板沿着可展曲面进行展开即可. 这种突出的特性使得用可展曲面造型的建筑最为常见,如支撑棚顶的弯曲结构(如图 4.4)或前面提及 Frank Gehry 的代表作品(如图 1.12).



图 4.4: 可展弯曲支撑结构.

Fig. 4.4: Developable curved support structures.

### 4.3.1 离散可展条件

对可展曲面的光滑表达,有明确指定的代数形式和几何意义,可以很容易从直纹面推导出来<sup>[37]</sup>. 但是,离散化的可展曲面的构造并没有唯一指定的限制. 通过前面离散网格的构造和分析发现构造特殊的离散参数线网,对应光滑曲线曲面几何性质,可以自然构造离散可展曲面,如由离散测地平行坐标系参数网近似可展曲面(§ 3.3.4)、离散正交测地网(§ 3.4.1)、离散等角测地网(§ 3.4.2). 这三种网格面都局部地依赖于每个网格的四价格点星条件(如图 4.5):

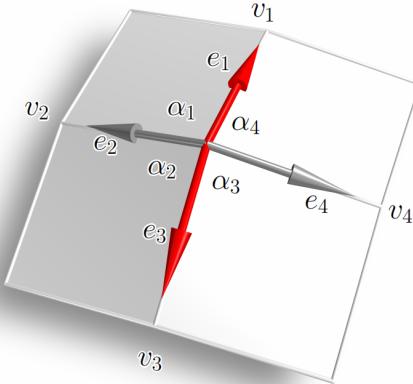


图 4.5: 离散可展曲面格点星.

Fig. 4.5: Discrete developable surface at a vertex star.

- 离散测地平行坐标系:  $\alpha_1 = \alpha_4, \alpha_2 = \alpha_3$ ;
- 离散正交测地网:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ ;
- 离散等角测地网:  $\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2 = \alpha_4$ .

特殊地, 离散测地平行坐标系需控制测地条带面的宽度, 离散等角测地网需指定切向量成角度数.

实际上, 当两族测地线都是彼此的测地平行线时, 两族测地线都被彼此截取相同的段长, 则这个网格是正交的推广切比雪夫网, 也是离散可展曲面. 值得注意的是, 以上构造的离散可展曲面彼此并非等价. 这主要源于光滑理论被离散化后产生的误差.

这些离散定义的曲面可以沿着各个方向弯曲、拉扯变形、带折痕的弯曲折叠而不依赖可展曲面的直母线. 但是需要明确的是, 这三种表示离散可展曲面的限制条件并不是彼此等价的, 但是都能表示可展曲面的离散化性质, 无线细分的极限形式也是满足光滑可展曲面判定条件的. 这些离散化构造可展曲面的方法, 只是利用网格边长和夹角的关系, 局部条件的满足却不与全局的曲面性质冲突, 非常巧妙地避免了解决可展曲面代数表达离散化的问题, 对现实应用问题的分析也提供了灵活的策略.

基于物理仿真的方法<sup>[43,148,149]</sup>, 建立可展曲面形状主要的建模目标是不可拉伸的材料如纸张等, 所以可获得的变形受限于固定参考曲面的等距形式. 使用折叠和弯曲折叠

构建对光滑可展曲面的变形只关注单独的等距变形, 或者只局限于使用直母线获得一部分的可能弯曲形变.

作为可展曲面的一般形式, 直纹面具有非正 Gauss 曲率, 其离散化过程只需要提取一族离散的直母线和准线即可. 直母线参数化一般来说不是共轭参数线, 其对应的离散网特点是四边网不是平面的. 反之, 共轭的直纹面是可展曲面, 其局部等距于平面, 沿着直母线具有常法向量, 具有射影不变性.

离散共轭直纹面是离散可展曲面, 被称为平面四边条带面<sup>[33]</sup>(PQ strip). 局部平面性要求在每个格点星满足 Gauss 曲率为零(如图 4.5), 即  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ , 直母线分网格两侧具有相同的角度, 故  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = \pi$ . 结合平面四边网, 使得沿着直母线同侧所有四边网具有相同的法向量, 这样就形成了沿着直母线的一整个平面条带面. 这种可展网可以用三角网实现构造. 本文主要研究四边网的结构, 故主要讨论由四边网生成离散可展曲面. 前面提到三种离散可展曲面的构造方法: 控制离散测地平行坐标系的测地条带宽度(§ 3.3)、Rabinovich 等<sup>[69-71]</sup>整合了折痕和弯曲折叠控制四边网格格点构造离散正交测地参数网(§ 3.4.1)、该定义简洁易构造, 即只需要在正则四价离散网格的每个格点处四个格点临边夹角相等. 推广的离散等角测地网(§ 3.4.2). 这些离散定义的曲面可以沿着各个方向弯曲、拉扯变形、带折痕的弯曲折叠而不依赖可展曲面的直母线. 其自由而灵活的探索为可展曲面结构的应用提供了可能.

### 4.3.2 离散测地平行可展网

基于 § 3.4 的分析, 离散测地坐标系为我们构造离散几何模型建立了很好的数学理论基础. 测地平行坐标系分割曲面为一组条带面, 通过控制条带宽度可以有效的获得具有常宽度的条带或全等的条带. Jacobi 微分方程是连接测地条带宽度和曲面 Gauss 曲率的有效关系式, 控制常宽度的条带宽度能保证零高斯曲率, 进而实现离散近似可展曲面的构造.

一个曲面是可展的, 如果它能被一族彼此常距离的测地线表示. 有了离散测地平行坐标系, 我们可以很好地控制条带面宽度函数来获得近似可展曲面. 这里条带面宽度是沿

着正交参数线测量的数值。几乎常条带宽度值意味着近似可展曲面。

在图 3.34 中, 曲面的 Gauss 像面积几乎为零说明使用离散测地平行坐标系表示的常宽度的测地条带面构成的曲面是近似可展的。可展曲面的特征是到处都具有零 Gauss 曲率 ( $K = 0$ )。因为当曲面放缩  $\lambda$  比例后, Gauss 曲率相应放缩  $\frac{1}{\lambda^2}$ , 所以近似可展曲面的 Gauss 曲率相比较于曲面的大小应该是足够小的, 虽然数学理论上, 这个说法很模糊, 但是应用方面却是有意义的, 因为有些像皮革或毛毡的材料当变形的时候是允许拉伸或收缩的。我们的推理来自 Bertrand-Diguet-Puiseux 定理<sup>[150]</sup>, 即 Gauss 曲率  $K$  可以由曲面上的测地圆面积与平面上的圆面积差的极限值来计算。这样, 如果曲面上到处 Gauss 曲率值为零, 则曲面面积近似圆面积, 说明曲面局部是平面。

### 轻微可拉伸材料

毛毡和皮革是基本上可展的材料, 同时相对于其大小而言, 它们允许曲面轻微的拉伸和收缩以图 4.7 为例, 应用这种离散可展曲面可以近似给定毛毡的参考面。平的毛毡面被摆放至自由型的形状, 使用 3D 扫描仪获取该曲面的散点数据, 然后针对不均匀散点应用 Possion 曲面重构<sup>[151]</sup> 获得相对均匀且密度相当的三角网格面作为毛毡的曲面 (如图 4.6)。

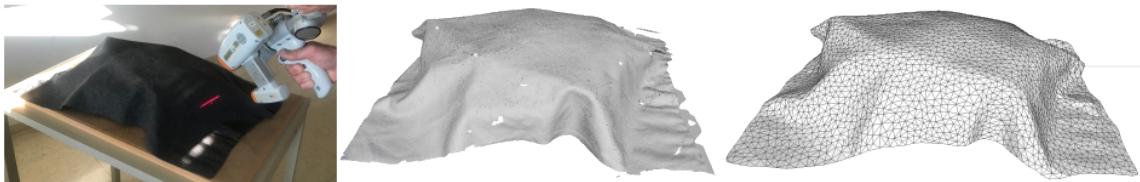


图 4.6: 3D 扫描毛毡面获得均匀三角网格数据。

Fig. 4.6: 3D scan a felt to get a regular triangle mesh.

然后使用有着不同测地方向的离散测地平行坐标系参数化的可展曲面近似该三角网格参数曲面 (如图 4.7)。从视觉角度看, 两种不同测地方向近似的可展曲面与参考网近似效果很好。数值衡量近似结果的好坏可以使用 Hausdorff 距离

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\}.$$

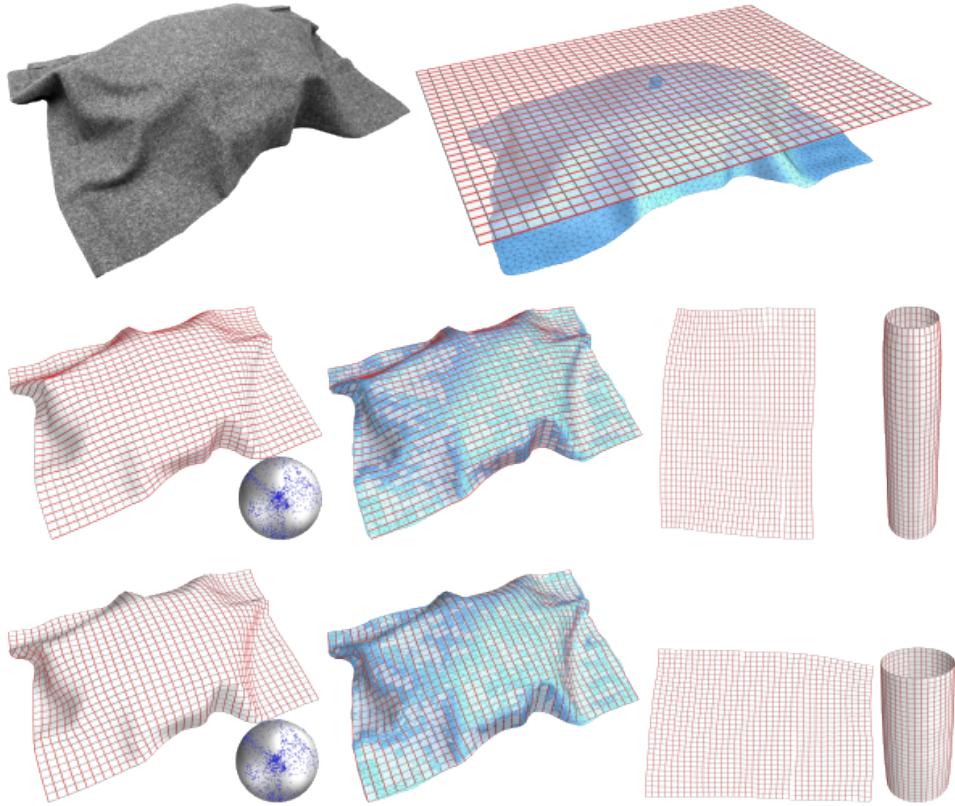


图 4.7: 离散测地平行坐标网近似毛毡曲面.

Fig. 4.7: Felt is approximated by a mesh parameterized by discrete geodesic parallel coordinates.

此时, 相对于网格的边界框对角线的距离 46.1, 近似网格和参考网格的 Hausdorff 距离分别为 0.0111 和 0.0110.

计算离散曲面的可展性没有唯一固定的方法, 判断可展曲面的可展性也并非一定依靠数值, 可视化的结果仍然能辅助分析. 图 4.7 中高斯像没有集中在一条曲线附近. 这两个近似曲面的展开平面是近似矩形的, 使用 § 4.4.2 中方法计算的相应旋转面也是近似直圆柱的, 这些可以表明其近似可展性.

#### 4.3.3 可展曲面直母线向量域

可展曲面是直纹面, 因此在非平面区域有唯一的直母线向量域. 通过以上不同离散网格构造了可展曲面, 接下来可以通过定义网格格点处的直母线表示离散曲面的直母线向量域.

因为想将直母线看成临近切平面的交线来简单地计算向量域的方向, 所以使用临近格点法向量外积定义所在边上的直母线方向. 由含有测地参数线构成的离散可展曲面(如 § 3.4), 可以直接利用测地线几何性质, 用测地线的在格点处的主法向量表示网格面在格点处的法向量. 对于不含测地线的离散可展曲面, 可以使用格点处三角化的网格面法向量的平均值定义格点法向量. 对于某些近乎共切面的格点区域, 格点法向量会近乎共线, 这样的区域是平面区域, 计算的直母线向量域显然也是没有意义的, 为了避免这种情况, 可以选择不定义, 也可以采用扩大邻域, 插值最近的有意义的直母线向量的办法, 构造该区域的直母线向量.

对于离散测地平行坐标系参数曲面, 通过要求测地条面具有几乎常条面宽度的条件得到近似可展曲面. 采用如下流程构造离散近似可展曲面的直母线向量域, 参考图 4.8:

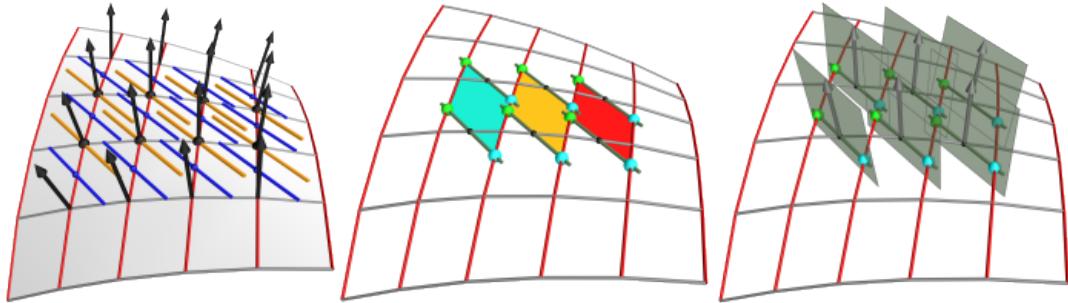


图 4.8: 构造新的平面.

Fig. 4.8: Model new planar faces.

- (1) 网格格点处的面法向量(左图-黑) $\mathbf{N}_i$ ;
- (2) 由沿着测地线方向的临近格点的法向量 $\mathbf{N}_{i1} \times \mathbf{N}_{i2}$  定义临边直母线向量(左图-蓝) $\mathbf{R}_i$ ;
- (3) 平均共格点的直母线向量 $\mathbf{R}_i$  构造格点处的直母线向量(左图-黄) $\mathbf{R}_v$ ;
- (4) 平均正交轨线上的临近格点直母线向量 $\mathbf{R}_v$  定义边中点直母线向量(中图-绿) $\mathbf{R}_m$ ;
- (5) 平均正交轨线上的临近格点面法向量 $\mathbf{N}_i$  定义边中点法向量(中图-灰) $\mathbf{N}_m$ ;
- (6) 构造过边中点的 $\mathbf{R}_m$  和 $\mathbf{N}_m$  的平面量(中图) $f_m$ ;

(7) 构造平面与左右两族测地线的交点量 (中图) $\mathbf{P}_l$  和  $\mathbf{P}_r$ ;

(8) 由新的边上格点  $\mathbf{P}_l$  和  $\mathbf{P}_r$  构造新的网格面 (右图) $M$ .

图 4.9 中展示了网格面本身的平面化、计算的直母线方向为临近主法向量的外积 (平面区域的直母线通过插值构造)、新构造的分片网格面、其展开到平面的直网格条带面及重叠到一起后的效果图。基于离散 Jacobi 方程, 测地线的展开是直线, 这意味着制造上的简单性。从平面化颜色效果来看, 显然后者整体平面化效果更好 (四边网格面更蓝), 故可以推广应用对离散近似可展曲面的建筑表面进行包层放松对建筑材料的弯曲要求。

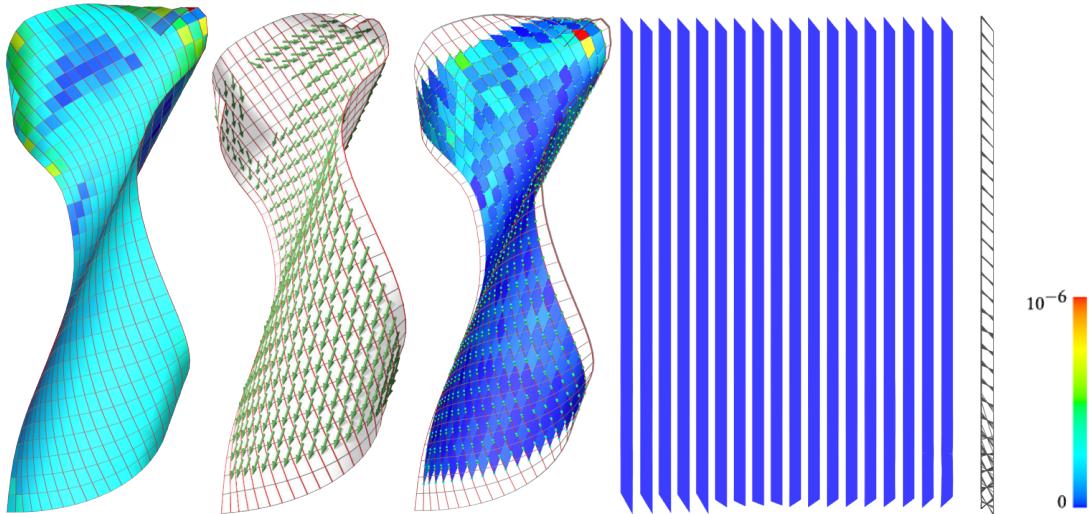


图 4.9: 由直母线构造新的分片平面。

Fig. 4.9: Piecewise planar faces from rulings.

## 包层

木材是可以被弯曲变形的材料。薄板条和板材允许稳定条件下的弯曲, 甚至厚的木材经过水蒸气加热后也允许令人惊讶的大的变形。在这个处理过程中, 木质曲面经受了某种程度上等距变形, 过程中也存在稍微拉伸和压缩 (如图 4.4)。图 4.10 展示了使用弯曲的木条实现的立面包层。

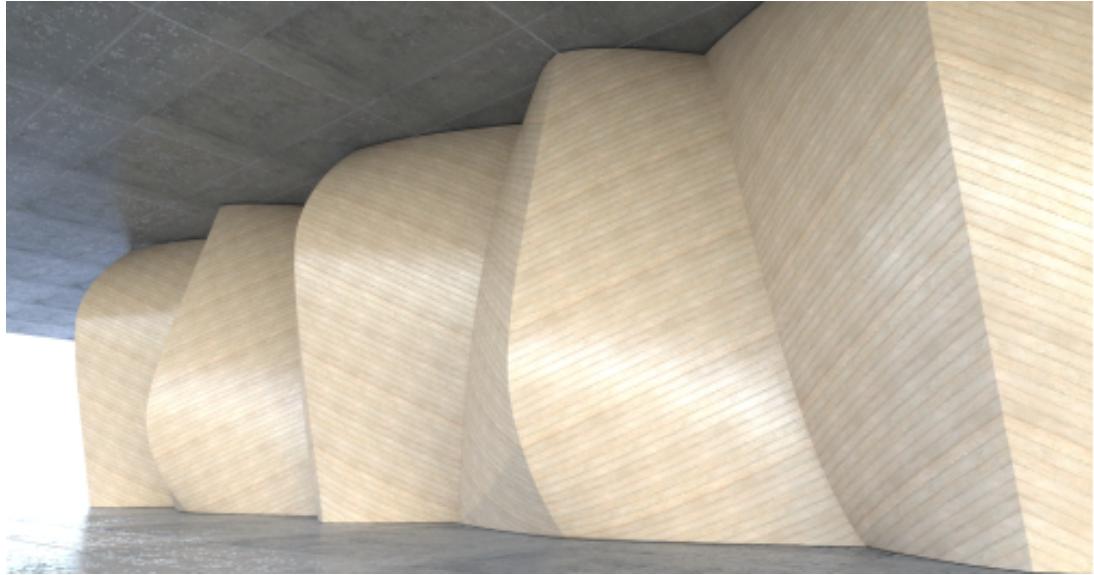


图 4.10: 内部木质墙面包层的渲染图.

Fig. 4.10: Rendering of an interior wooden wall cladding.

#### 4.4 旋转曲面结构

旋转面的对称几何特征带来结构上的大量重复元素, 这不仅具有美学特征还能帮助节省生产成本, 因而旋转建筑结构在现实中很常见 (如图 4.11).



图 4.11: 旋转建筑结构.

Fig. 4.11: Rotational architectural structures.

#### 条带模具的内在重复性

等距于旋转面的曲面 (图 3.35-上左) 可以通过附着全等的条带到彼此以半离散的方式生成 (图 4.12). 制造这样的双弯曲曲面具有明显的优势. 建立这样的曲面模型 (4.12-中

左) 通过使用离散测地平行坐标系和一个额外的限制条件, 即要求沿着所有的测地条带的宽度有相同的分布. 对于制造目的, 我们不得不展开条带到平面. 对此, 首先转换每一个条带到离散可展条带, 条面是近似平面四边形, 如图 4.12-中右.

生成的四边网的两个对边横交于测地线, 其中横交点位于离散测地线(一般情况下是边的内点), 该测地线平行于近似的直母线方向. 通过相交临近的切平面估计直母线方向, 这样, 只需要计算外积  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}_1$ , 如图 4.9 中计算直母线向量域的方法. 在几乎平行的法向量区域(平的条带区域), 能理论上选择任何方向作为直母线方向, 所以平均相邻最近的非平条带区域的方向. 条带的展开可以通过展开几乎平面的四边形到平面上(图 4.12-下). 所有被展开的条带的重叠覆盖很好地展示了条带几乎是全等的(图 4.12-下右). 水平边上的强烈的变化是因为可展曲面的直母线在等距变形的时候会发生明显的改变.

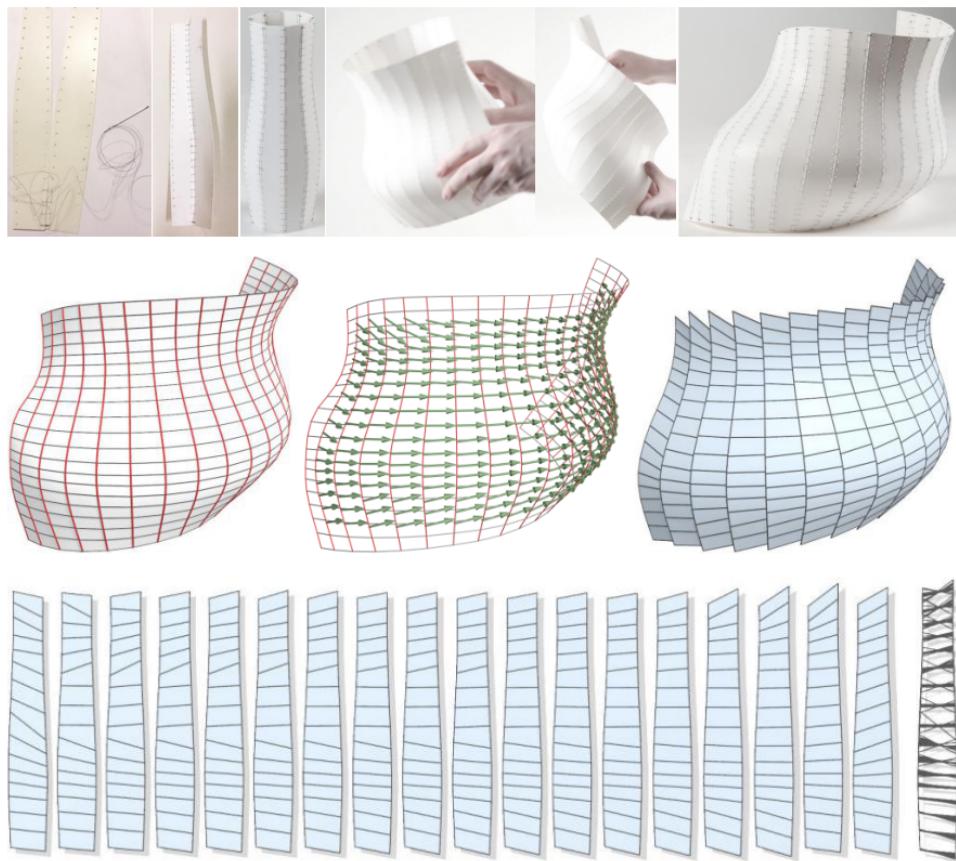


图 4.12: 等距于旋转面的曲面的条带模型.

Fig. 4.12: Strip model isometric to surface of revolution.

#### 4.4.1 等距于旋转面的曲面

旋转面是内蕴对称的曲面, 可等距变换到自身. 因为曲面的等距变形变换测地线仍为测地线且不改变曲面上曲线的任何交角, 所以考虑测地平行坐标系框架下的等距变形是合理的. § 3.3.3节推导了测地平行坐标系下曲面等距于旋转面的准则, 确定离散旋转面等距变换时保有的不变量, 并构造等距变换实例 (§ 3.3.4). 继续应用旋转面的内蕴特性, 构造自由型建筑表面, 如图 4.13展示了等距于旋转面的曲面用弯曲木条板构造的设计渲染图, 其近似条带展开面近乎是全等的 (如图 4.14).



图 4.13: 木质墙面包层的渲染图.

Fig. 4.13: Rendering of an wooden wall cladding.

#### 4.4.2 提取旋转面

所有等距于旋转面的曲面不直接涉及到所等距的旋转面的具体形式. 然而, 对于应用来说, 计算相应的旋转面是必要的或值得的. 一旦通过优化 (见 3.7节) 找到了等距于旋转面的离散网格满足内蕴重复性, 便可以通过以下方式计算其实际上近似等距的旋转面.

假设矩形片有  $m \times n$  个格点, 指数为  $[1, m] \times [1, n]$ , 其中  $u$ -方向 (即测地线方向) 有  $m$

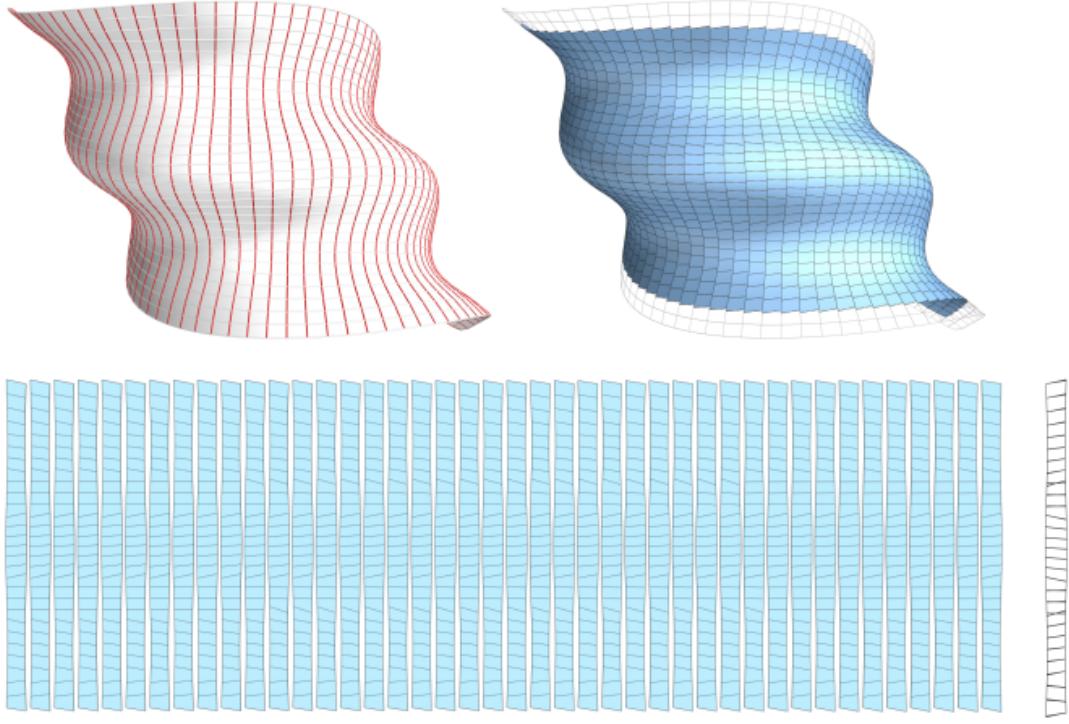


图 4.14: 条带面展开图.

Fig. 4.14: Unfolding of the strips.

个格点. 这样对于  $u \in [1, m]$  计算对应于旋转面的平行圆的正则  $(n - 1)$ -边形的平均边长:

$$d(u) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \|\delta_v f(u, i)\|.$$

随后, 这个  $(n - 1)$ -多边形的外接圆的半径是  $r(u) := \frac{d(u)}{2 \sin(\pi/(n-1))}$ . 假定等距的旋转面关于旋转轴有完全的旋转. 这个条件可以被放松 (如下命题 12). 进一步, 对于  $u \in [1, m - 1]$  我们计算经线上多边形部分的平均长度:

$$l(u) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\delta_u f(u, i)\|.$$

有了这个数据, 可以重构离散旋转面. 如图 3.29 (右), 我们计算两个平行圆的高度差:

$$x(u) := \sqrt{l(u)^2 - (r(u + 1) - r(u))^2}.$$

这样, 离散旋转面被参数化为

$$f(u, v) = (r(u) \cos(2v\pi/(n - 1)), r(u) \sin(2v\pi/(n - 1)), h(u)),$$

其中  $h(u) = \sum_{i=1}^u x(i)$ . 没有直接变换整个矩形曲面片为完全旋转的旋转面, 我们根据如下定理, 能像对光滑情况那样, 只对一些子曲面片做相同的处理.

**定理 12** [152] 令  $f(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u))$  是旋转面. 则对于  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 积分

$$\tilde{h}(u) := \int_{u_0}^u \sqrt{(1 - \lambda^2)r'(t)^2 + h'(t)^2} dt$$

是实数 (对于  $\lambda \in [0, 1]$  总是成立的), 旋转面

$$f^\lambda(u, v) := (\lambda r(u) \cos \frac{v}{\lambda}, \lambda r(u) \sin \frac{v}{\lambda}, \tilde{h}(u))$$

等距于  $f$ .

使用如上条件近似计算并构造了满足离散旋转面条件的任意曲面的旋转面(图 4.15). 也可以以更自由的方式, 对一片给定的平面片进行满足测地平行坐标系条件的交互变形.

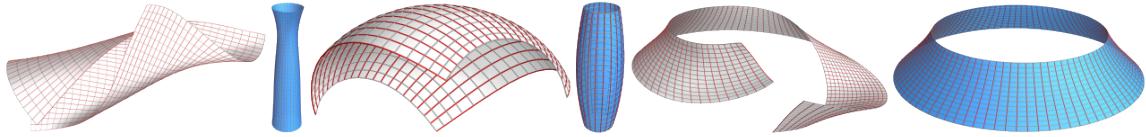


图 4.15: 曲面满足离散旋转面条件及其近似旋转面.

Fig. 4.15: Meshes satisfying discrete surface of revolution condition and their approximated rotational surfaces.

这样得到的曲面不受固定的旋转面的几何限制, 但是每个网格的每个测地条带面又具有相同的宽度 (非指定数值), 我们可以逆向构造其对应的等距旋转面, 如图 4.16.

#### 4.4.3 测量等距变换

测量一个原始曲面  $f^0$  和一个变形曲面  $f$  之间的等距性通过测量固体力学<sup>[153]</sup> 中已知的维数拉伸张量. 适合离散测地平行坐标系的拉伸矩阵被定义在每个格点且以切向量  $T_1, T_2$  为基向量. 它满足 (符号参考图 3.25)

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon(l_1) + \varepsilon(l_1)}{2} & \tan(\alpha_{\bar{1}\bar{2}} - \alpha_{\bar{1}2}) - \tan(\alpha_{1\bar{2}} - \alpha_{12}) \\ \tan(\alpha_{\bar{1}\bar{2}} - \alpha_{\bar{1}2}) - \tan(\alpha_{1\bar{2}} - \alpha_{12}) & \frac{\varepsilon(l_2) + \varepsilon(l_2)}{2} \end{pmatrix},$$

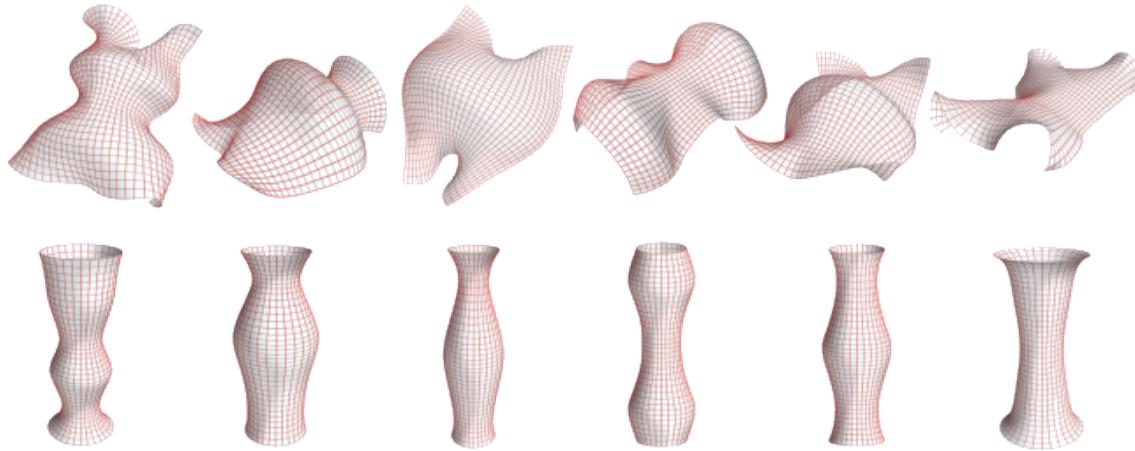


图 4.16: 对一个平面片交互设计得到不同曲面(上)及其相应旋转面(下).

Fig. 4.16: Interactive design of a planar patch to get meshes (upper) isometric to discrete surfaces of revolution(lower).

$$\text{其中 } \varepsilon(l_1) = \frac{\|\delta_u f\| - \|\delta_u f^0\|}{\|\delta_u f^0\|}, \varepsilon(l_{\bar{1}}) = \frac{\|\delta_u f_{\bar{1}}\| - \|\delta_u f_{\bar{1}}^0\|}{\|\delta_u f_{\bar{1}}^0\|}, \varepsilon(l_2) = \frac{\|\delta_v f\| - \|\delta_v f^0\|}{\|\delta_v f^0\|}, \varepsilon(l_{\bar{2}}) = \frac{\|\delta_v f_{\bar{2}}\| - \|\delta_v f_{\bar{2}}^0\|}{\|\delta_v f_{\bar{2}}^0\|}.$$

令  $\lambda_1, \lambda_2$  是特征值, 且  $v_1, v_2$  是矩阵  $D$  的特征向量. 扭曲的主法曲率方向是  $v_1^x T_1 + v_1^y T_2$  和  $v_2^x T_1 + v_2^y T_2$ , 其中  $T_1, T_2$  是沿着参数线排列的切平面的正交基. 值得注意的是, 优化离散正交性条件 (参考引理 6). 所以总是假定  $T_1 \perp T_2$ . 等距性的测量被用不同颜色显示在图 4.17 中.



图 4.17: 等距变形塑料瓶及其模拟效果.

Fig. 4.17: Isometric transformation of a bottle and its mimetic result.

引理 12 表明旋转面的半径具有一定的灵活性. 在等距变形的误差允许范围内, 我们

可以仿真出对一个旋转面进行自由等距变换的过程, 如图 4.18 展示了从一个给定的旋转面, 满足离散测地平行坐标系和保长约束下的变换结果.

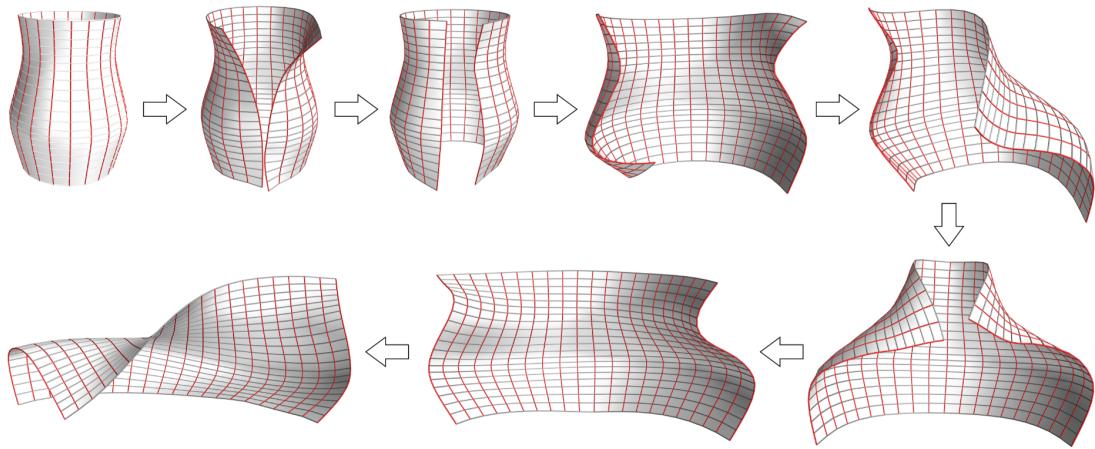


图 4.18: 对旋转面片的自由等距变形.

Fig. 4.18: Freely isometric transformation of rotational patch.

#### 4.4.4 旋转面模具

离散测地平行坐标系如果再满足  $v$ -方向的常速度比条件 (方程 (3.8)) 则构成等距于旋转面的曲面. 从可弯曲的材料如金属板建立这样的曲面, 只需要建立一个模具, 即相应的旋转面. 事实上, 只需要选取旋转面的一部分分割段作为模具, 只要足够大保证最大的面板足以被覆盖即可. 注意旋转面上临近经线的区域大小可能超过模具大小的限制. 需要生产足够多的必要的模具填充旋转面的分割段.

图 4.19 展示了曲面上的指定区域对应于旋转面模型上的相应部分. 等距变形曲面 (右) 上的每一个四边面板等距于有相同颜色的旋转面 (左) 上的四边形. 通过这种方式, 获得一组双弯曲面板. 推广变形, 则得到类似图 4.18 展示的结果, 从一个旋转面出发, 构造一些列它等距的曲面. 从而, 可以用这些曲面构造类似 Frank Gehry 风格的建筑设计图 (如图 1.12).

选取图 4.18 结果中的四个自由网格面, 构造出一个渲染的建筑效果图 4.20-右, 在这种 Frank Gehry 的建筑风格中, 立面可以被矩形金属板包层. 不同的是, 这些金属板并不

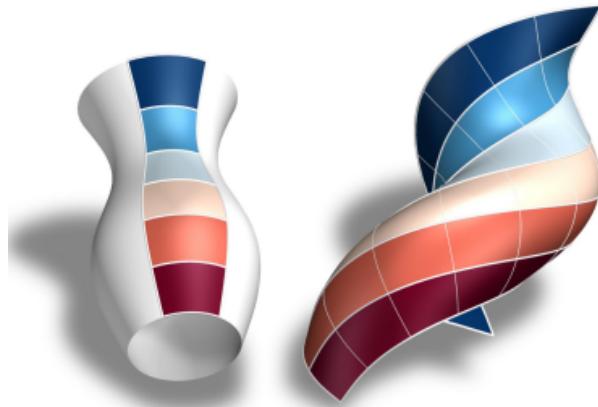


图 4.19: 旋转面模具.

Fig. 4.19: Surfaces of revolution as molds.

是平的而是等距于旋转面模具上的某些指定区域图 4.20-左. 这极大增加了对自由建筑表面的设计内容.

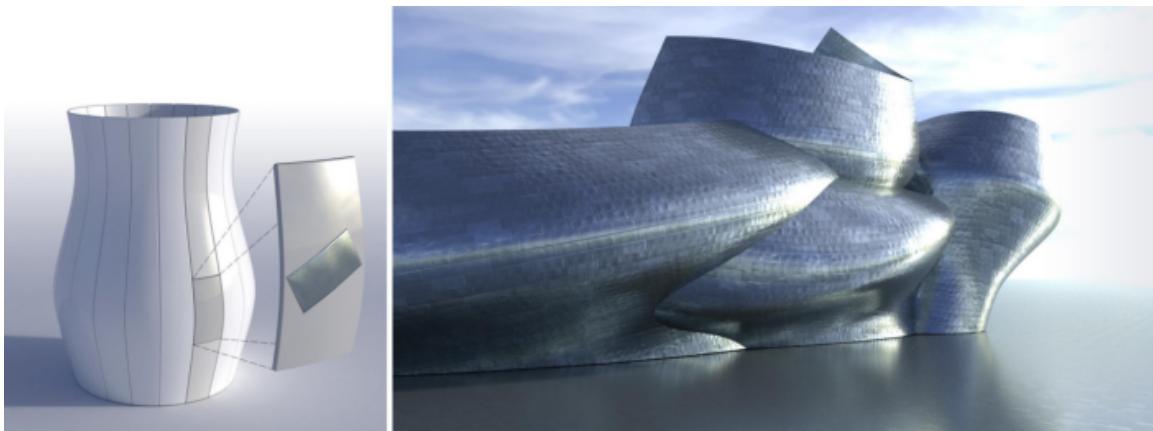


图 4.20: 类 Frank Gehry 建筑设计.

Fig. 4.20: Frank Gehry-style architectural design.

这些自由曲面都是等距于图 4.18 中起始的旋转面, 所以实际建造需要的模具可以只是该旋转面. 实际上, 按照上面的分析, 只需要图 4.20-左中展示的一个测地条带面即可. 覆盖在表面上的矩形金属板可以仅使用对应旋转表面的两条子午线之间的一个相当小的扇形区域作为模具来制造 (如图 4.19-左和图 4.20-左). 旋转表面上的长垂直条要么是一个大模具, 要么可以在必要时分割成较小的模具 (如图 4.21). 每个金属面板对应于旋

转面上的相应区域, 我们使用绿色的边界来突出这一部分. 这个旋转面的部分必须足够大才能携带最大的区域. 其中红色区域表示 Gauss 曲率为正, 蓝色区域表示 Gauss 曲率为负, 而白色零 Gauss 曲率的区域. 覆盖具有几乎消失高斯曲率的表面区域的金属板可以在没有特殊模具的情况下生产, 即作为可展曲面片. 如此, 针对不同区域又可以进行划分, 方便生产. 这种具有重复性元素的构造大大帮助减少模具的生产数量.

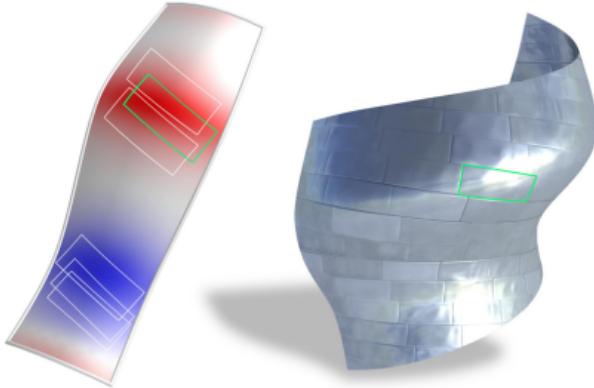


图 4.21: 等距于旋转面的曲面嵌板.

Fig. 4.21: Paneling of surfaces isometric to rotational surfaces.

## 4.5 测地网壳结构

网壳是一种双弯曲的曲面, 有着好的稳定性, 可以被赋予材料形成格状网结构. 构造网壳结构的一个非常基本想法是能简单地使用细长的矩形材料沿着预想的曲面进行弯曲. 使用直的元素构成的弯曲结构出现在各种网壳结构中, 如测地网壳<sup>[154]</sup>, 渐近网壳<sup>[16]</sup>, 曲率网壳<sup>[155]</sup>等, 如图 4.22.

‘渐近网壳结构’(如图 4.22-(a)) 对应于离散平面格点星四边网(即 A-网), 是退化的离散球面格点星四边网. 其构造过程(章节 3.2.4)因存在相同的平直薄片和全等的节点等大量重复元素而得到简化. 推广该结构到离散常平均曲率曲面网壳结构, 只需使用可展的弧状薄片和全等的正交节点便可以类似实现.

若用直木条构造测地网壳结构, 需要充分利用测地线的等距不变性( $k_g = 0$ ), 即直木条要沿着曲面的测地线进行弯曲. 使用离散测地平行坐标系的方法, 可以很容易地设计

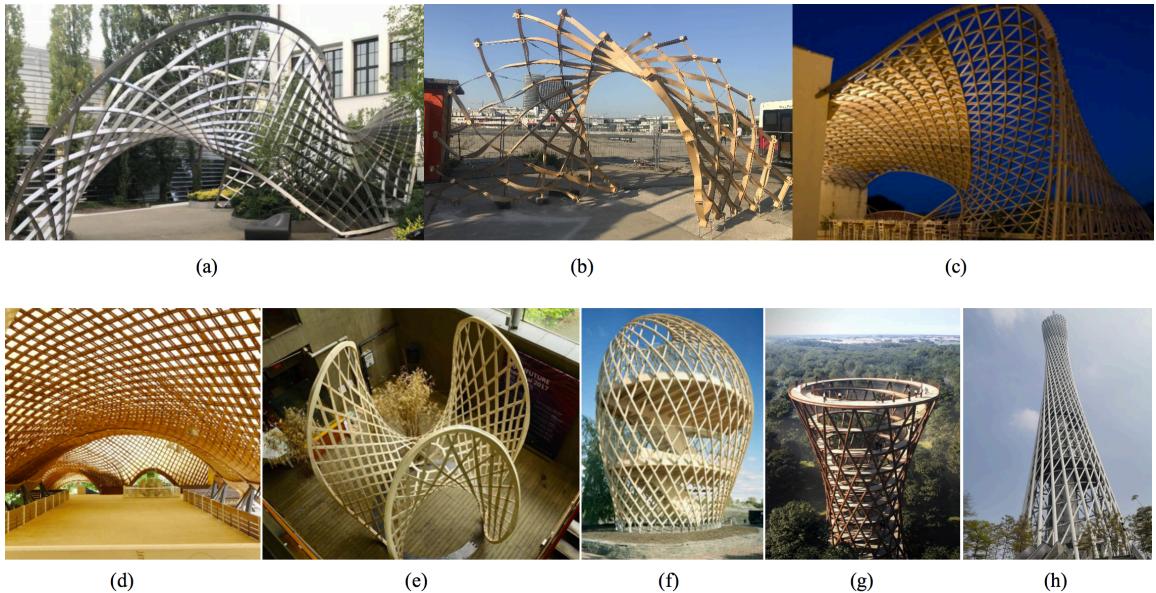


图 4.22: 网壳结构.

Fig. 4.22: Gridshell structures.

这样的曲面.

离散测地线非常自然地以各种方式展示其在建筑上的应用, 尤其离散测地平行坐标系 (§ 3.4) 控制的测地条带宽度, 可以用来构造离散近似可展曲面、等距于旋转面的曲面等. 我们在 § 3.3.4 已经看到了使用离散测地平行坐标系网格近似任意参考曲面所具有的良好效果 (图 3.31、3.32、3.33), 这里, 我们继续使用该网格的测地线性质, 通过近似参考网, 提取参考网的两族不同测地线, 构造新的测地线网, 最终实现网壳结构.

由于优化问题的非线性性, 算法收敛的结果依赖于初始化. 因此可能存在曲面的自交情况, 这在现实应用中并不是预想的作品. 基于带把手的编辑交互设计和光滑因子的约束, 可以避免这种情况的发生. 对于近似网格问题, 初始网格的选取对结果影响很大. 选择好的初始位置, 可以减少网格搜索过程, 快速地得到优质的近似网格. 基于手柄交互设计, 我们令离散测地平行坐标系近似给定参考曲面 (如图 4.23-(a)). 近似的两个网格是两族横截的离散测地平行坐标系网, 只保留两个近似网格的测地线 (舍弃正交轨线), 两族测地线相交便得到渐近网壳结构参数面 (4.23-(c)). 近似效果通过两个网格的 Hausdorff 距离衡量, 这里相对于网格边界框架对角线距离 25, Hausdorff 距离是 0.031. 使用木质材

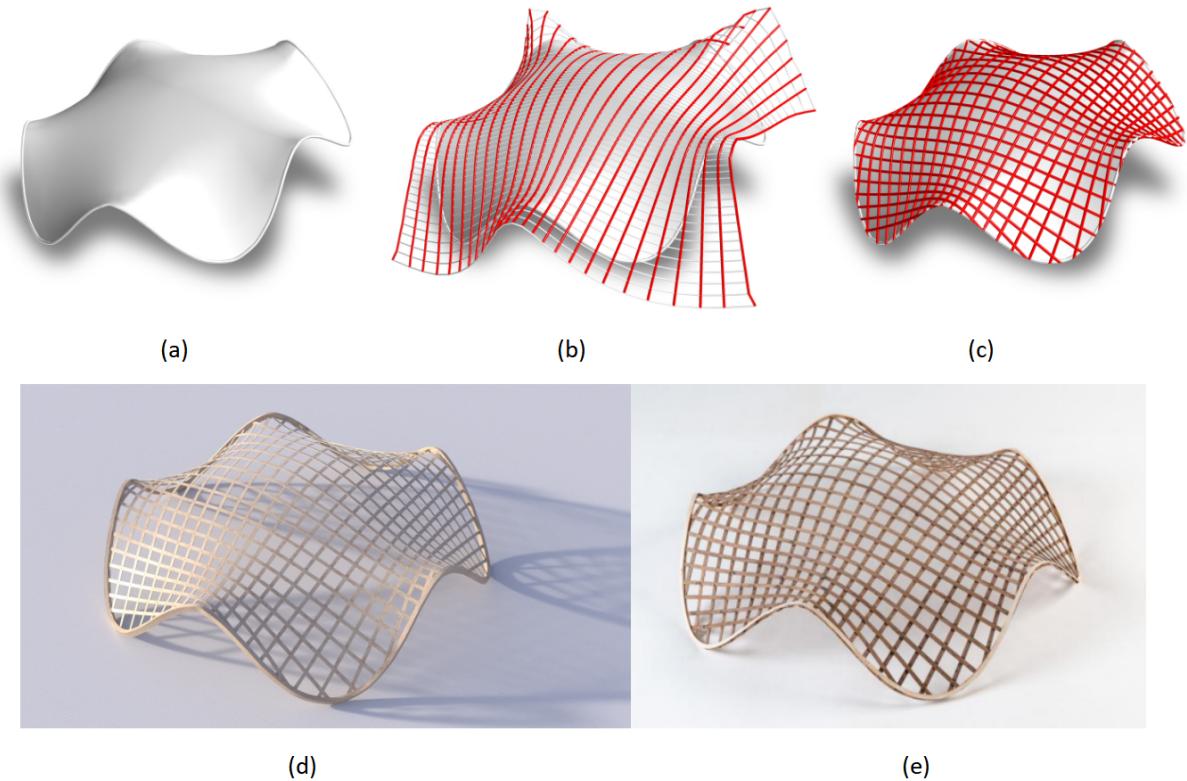


图 4.23: 测地网壳结构.

Fig. 4.23: Geodesic gridshell.

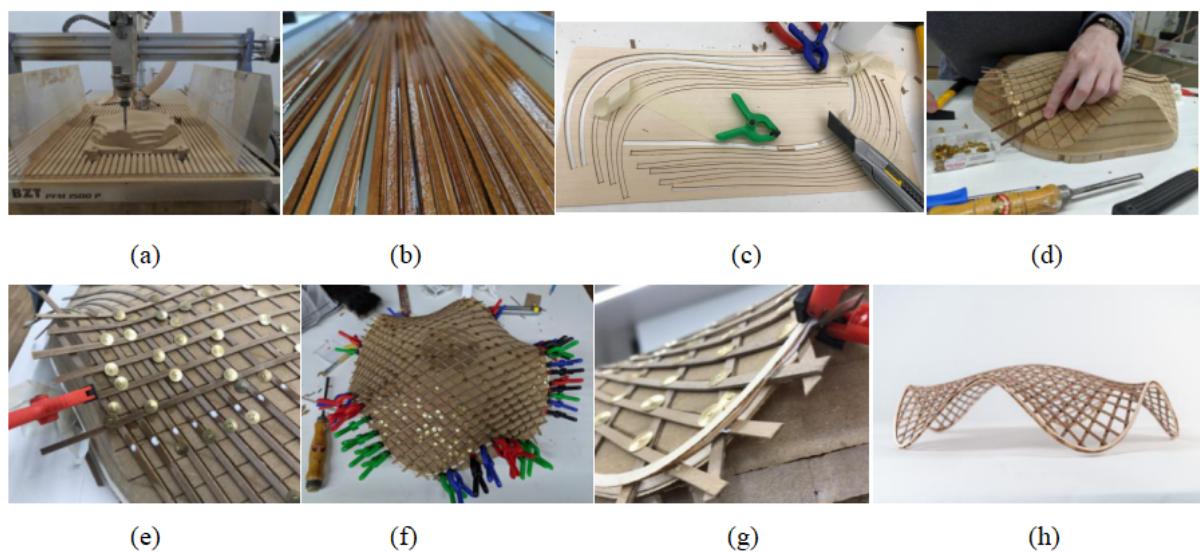


图 4.24: 测地网壳结构模型制作过程.

Fig. 4.24: Making process of geodesic gridshell.

料物质化的渲染 (如图 4.23-(d)) 结果真实地反映了实际构造的模型 (如图 4.23-(e)), 其中实际物理模型的制造过程参看图 4.24.

为了方便构造测地网壳结构的形状, 基于木条不易完全易恢复变形的特质考虑, 我们首先制造一种模具 (图 4.24-(a)), 该模具表面恰好是我们给定的近似参考面 4.23-(a)). 并且在模具表面上刻有细窄的曲线凹痕, 这些曲线痕迹恰好是模具表面上的两族测地线. 我们将用沾湿的木条 (如图 4.24-(b)) 依次排列在这些凹痕旁, 并用钉子固定, 这里沾湿木条是为了其更易弯曲, 在干爽之后它们也会极大程度上保持弯曲时的形状. 对于网壳结构的边界, 无法使用这些平直的木条进行固定, 我们采用更薄的弧状的平软木条 (图 4.24-(c)). 我们首先构造的是网壳主体结构, 然后再放置边界. 具体步骤如下:

- (1) 沿着模具表面上的一族测地线放置木条 (图 4.24-(d));
- (2) 沿着另一族测地线放置第二层木条, 并用胶与第一层粘结 (图 4.24-(e));
- (3) 沿着边界处的木条的上下表面分别粘结边界弧状软木条 (图 4.24-(f));
- (4) 固定好形状后放置足够时间晾干木条 (图 4.24-(g));
- (5) 晾干后去掉辅助工具和不必要的边界部分得到网壳结构, 并用鱼线固定底部 (图 4.24-(h)) 防止木条弹性形变.

以上是使用离散测地平行坐标系参数化的曲面对任意光滑曲面近似, 提取测地线族构造的测地网壳结构. 实际建模过程发现, 构造的近似网质量必须足够好, 保证生成测地网格必须是足够贴合曲面才行. 否则, 得到的曲线族不是曲面的测地线, 用长直木条进行构造固定将会出现断裂. 尽管得到的模型并非足够大, 但是图 4.23 成功地将理论和实际模型结合起来, 表明可建造性, 值得推广.

## 5 结论与展望

### 5.1 结论

建筑几何的理论基础是离散微分几何, 而离散微分几何又是经典微分几何的离散化对应. 依照三者的关系, 本文按照顺序首先介绍一类光滑的特殊曲线和曲面的构造, 然后对应光滑的理论讨论几种特殊的离散参数网面, 最后基于其离散化的定义构建应用模型. 这些理论的分析都是为了更好地指导模型的应用.

首先, 本文应用微分几何理论, 分析确定构造渐近边界线的等价条件、构造光滑渐近边界线、构造插值该边界线的光滑 Bézier 曲面、有理 Bézier 曲面、B 样条曲面. 该建模过程兼容 CAD 系统, 能指导如何使用自由曲面填充给定渐近线作为边界线的问题.

其次, 应用离散微分几何理论, 提出离散常平均曲率曲面、提出离散测地平行坐标系参数网、推广构造离散测地线参数网、整理实现离散曲率线参数网、探索发展离散渐近线参数网. 这些离散曲面局部格点星的限制保证了全局的几何性质, 却又不涉及到曲面的显示表达, 大大方便了形状空间的交互探索. 主要实现内容包括:

- 提出离散球面格点星四边网, 该网格关于离散曲率线网对称, 兼容离散常平均曲率曲面和离散极小曲面.
- 提出离散测地平行坐标系参数网, 提供了一种在参考曲面上设计测地正交网界面的有效策略. 同时, 控制测地条带宽度可以构造离散近似可展曲面和等距于旋转面的离散曲面.
- 推广离散正交测地线网<sup>[69-71]</sup>为离散等角测地线网, 仍具有离散可展性.
- 实现几种常见的离散曲率线参数网, 如圆网、锥网、等温网、蒙日网, 它们具有共轭性和不同几何特征.
- 构造离散渐近线参数网, 兼容离散极小曲面和具有常主法曲率比的离散 Weingarten 曲面.

最后, 将这些建筑几何理论进行应用, 指导以制造为意识的几何设计, 主要内容包括:

- 构造具有弯曲和平直支撑结构的网壳模型, 几何结构上大量重复元素的出现帮助简化制造过程也指导更多具有重复元素的网壳结构的建立.
- 等宽度测地条带面具有内蕴重复性, 建造测地条带模型模拟旋转面的等距变换过程, 指导使用非常少而必要的模具生产双弯曲的嵌板到自由的建筑表皮上, 达到减少板材设计的复杂性和成本等作用.
- 对一片任意摆放造型的毛毡面进行离散近似可展曲面构造, 可以指导用具有轻微可拉伸或压缩变形能力的材料, 如平的木板条面等, 构造建筑曲面的防水包层.
- 使用细长直矩形木条沿着参考面上的测地线建造测地网壳结构模型.

## 5.2 创新点摘要

- 基于特殊曲线和曲面的局部微分性质, 分析和构造具有实际应用价值的光滑曲面与网格结构. 给出光滑 Bézier 与 B 样条曲面插值给定边界线为其渐近线的条件, 这对建筑上构造满足特殊边线要求的防水曲面设计有理论指导意义. 利用离散网格的局部格点、边线或夹角的限制构造不同的参数网面, 而不需要精确的代数表达. 比如构造的离散可展曲面突破了先前对光滑可展性晦涩的研究限制, 进而通过高效的算法交互设计任意自由的曲面形状, 实现自由建筑表面表示.
- 引入离散测地平行坐标系参数化的曲面, 丰富了离散微分几何理论, 可以方便快捷地构造测地网壳结构、近似可展曲面和等距于旋转面的曲面. 这些结论在建筑应用方面具有指导作用: 使用平直材料的面板进行曲面防水包层设计, 使用可拉伸或压缩的材料(如毛毡、皮革、薄木板等)进行造型、使用双弯曲的面板(如金属板)构造类 Frank Gehry 建筑设计等. 尤其实现的一系列具有内蕴对称性质的曲面造型, 解决了来自平板材料构成自由曲面的问题, 理论上可以大大减少模具的生产数量, 从而降低成本.

- 引入球面格点星四边网, 建立与曲率线网、常平均曲率曲面、极小曲面、可展曲面的关系. 该离散曲面具有良好的几何性质, 不仅扩展了组合几何的内容, 而且应用在建筑设计上, 可以允许存在大量重复的元素, 如构造具有弯曲和平直可展支撑结构的网壳结构模型上存在大量相同的平面薄片和全等的节点等, 极大地帮助简化加工制造流程和减少项目成本. 这可以指导实现更多具有重复元素的网壳结构设计和制造.

### 5.3 展望

建筑几何是一门新兴的研究领域, 作为联结着建筑和几何的桥梁, 它解决来自建筑上的几何问题又创造几何在建筑上的应用, 势必成为受人关注的研究热点领域. 本文并不过多强调设计、加工、制造等内容, 而是基于该研究的实际意义, 简要讨论建筑几何的理论特征和应用模型. 尽管本文首次引入、构造和实现了一些特殊曲线和曲面的模型, 从微分性质角度研究了建筑几何, 但在本文基础上, 还有很多值得研究的内容和待解决问题:

- 球面格点星四边网是一种新颖的离散网格, 开创了离散微分几何的新研究领域. 探索其在离散和计算微分几何中的作用、设计其在几何处理和建筑中的应用等还需要进一步的研究. 理论上, 需要解决组合几何学问题, 研究与常法曲率曲面、常平均曲率曲面、常负 Gauss 曲率曲面、Weingarten 曲面等及其相应等距网的关系. 计算上, 需要整合和兼容不同限制条件, 转化约束方程为不超过二次的, 使用 Guided Projection 算法进行交互设计. 应用上, 需要考虑平面化网格面、弯曲支撑结构、静力平衡等问题;
- 对于离散测地平行坐标系参数网, 尽管本文处理的网格(近似 300 到 5000 个格点)在算法的第一次迭代的时候就非常快速地以合理的方式移动到目标形状, 但是当前的执行还不是实时交互的. 材料意识的几何建模为未来研究提供了很多的可能性. 近似等距还可以扩展到指定材料的特性如弯曲或拉伸行为的极限. 如果优化过程中包括更多材料行为的性质将会更好. 除了建造真实的网壳结构模型(图 4.23)和等距于旋转面的条面模型(图 4.12), 这里没用其他物理仿真验证所有流程. 推广到大规

模的实体建筑, 使用本文方法构造类似 Frank Gehry 的双弯曲金属表皮建筑, 是值得期待和完善的;

- 建筑上的离散曲面的构造只是近些年被提出和研究的, 对自由曲面的探索存在很多的可能性, 尤其基于几何结构的理解, 是完成整合建筑设计、加工制造的关键步骤。应用和推广离散测地网、离散曲率网、离散渐近网面到实际建筑中. 特别是几种不同方法定义的离散可展曲面可以快速实现自由造型. 基于离散微分几何的分析, 探索和构造更多具有特殊性质的网格面值得研究;
- 本文展示了内在连续对称性在建筑应用上的优势, 有着内在连续对称性的曲面展示出外在的重复元素. 从实际角度出发, 可以增加某些误差范围, 则不再严格地限制到等距于旋转面的曲面类. 优化设计曲面的局部形状具有更多重复元素也是未来一个有趣的研究方向;
- 推广 ‘渐近网壳结构’ 为其他自由网壳结构, 如用弧状的薄片建造离散常平均曲率曲面网壳结构等. 如何构造填充网壳结构的防水面就涉及到插值给定边界的曲面造型问题. 目标发展进一步构造技术.

## 参考文献

- [1] DO CARMO M P. Differential Geometry of Curves and Surfaces[M]. Prinrice Hall. Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [2] 陈维桓. 微分几何初步 [M]. 北京大学出版社, 1990.
- [3] OPREA J. Differential Geometry and Its Applications[M]. American Mathematical Soc., 2019.
- [4] WANG G J, TANG K, TAI C L. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(5):447–459.
- [5] LI C Y, WANG R H, ZHU C G. Design and  $G^1$  connection of developable surfaces through Bézier geodesics[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(7):3199–3208.
- [6] LI C Y, WANG R H, ZHU C G. Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(9):1110–1117.
- [7] LI C Y, WANG R H, ZHU C G. An approach for designing a developable surface through a given line of curvature[J]. Computer-Aided Design, 2013, 45(3):621–627.
- [8] LI C Y, WANG R H, ZHU C G. A generalization of surface family with common line of curvature[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(17):9500–9507.
- [9] 李彩云, 朱春钢, 王仁宏. 插值特殊曲线的可展曲面造型研究进展 [J]. 中国科学: 数学, 2016, 59:1307.
- [10] FAROUKI R T, SZAFRAN N, BIARD L. Construction of Bézier surface patches with Bézier curves as geodesic boundaries[J]. Computer-Aided Design, 2009, 41(11):772–781.
- [11] FAROUKI R T, SZAFRAN N, BIARD L. Existence conditions for coons patches interpolating geodesic boundary curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(5):599–614.
- [12] FAROUKI R T, SZAFRAN N, BIARD L. Construction and smoothing of triangular Coons patches with geodesic boundary curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(4):301–312.
- [13] YANG H, WANG G. Construction of B-spline surface with B-spline curves as boundary geodesic quadrilateral[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 290:104–113.
- [14] YANG H, WANG G. Optimized design of Bézier surface through Bézier geodesic quadrilateral[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 273:264–273.
- [15] FLÖRY S, POTTMANN H. Ruled surfaces for rationalization and design in architecture[C]// Proceedings of the 30th Annual Conference of the Association for Computer Aided Design in Architecture. ACADIA, America 2010: 103–109.
- [16] SCHLING E, HITREC D, BARTHEL R. Designing grid structures using asymptotic curve networks[C]// Humanizing Digital Reality. Springer 2018: 125–140.
- [17] JIMENEZ M R, MÜLLER C, POTTMANN H. Discretizations of surfaces with constant ratio of principal curvatures[J]. Discrete & Computational Geometry, 2018, 1–35.
- [18] BAYRAM E, GÜLER F, KASAP E. Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve[J]. Computer-Aided Design, 2012, 44(7):637–643.

- [19] ATALAY G S, KASAP E. Surfaces family with common null asymptotic[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 260:135–139.
- [20] POTTMANN H, WALLNER J. *Computational Line Geometry*[M]. Springer Science & Business Media, 2009.
- [21] LEOPOLDSEDER S, POTTMANN H. Approximation of developable surfaces with cone spline surfaces[J]. *Computer-Aided Design*, 1998, 30(7):571–582.
- [22] BISHOP R L. There is more than one way to frame a curve[J]. *The American Mathematical Monthly*, 1975, 82(3):246–251.
- [23] GRINSPUN E, HIRANI A N, DESBRUN M, et al. Discrete shells[C]// Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, Eurographics Association. 2003: 62–67.
- [24] AUMANN G. Interpolation with developable bézier patches[J]. *Comput. Aided Geom. Des.*, 1991, 8(5):409–420.
- [25] AUMANN G. A simple algorithm for designing developable bézier surfaces[J]. *Comput. Aided Geom. Des.*, 2003, 20(8-9):601–619.
- [26] MAEKAWA T, CHALFANT J. Design and tessellation of B-spline developable surfaces[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1998, 120(3):453–461.
- [27] WANG C C L, TANG K. Achieving developability of a polygonal surface by minimum deformation: A study of global and local optimization approaches[J]. *Vis. Comput.*, 2004, 20(8-9):521–539.
- [28] ZHAO H, WANG G. A new approach for designing rational Bézier surfaces from a given geodesic[J]. *Journal of Information & Computational Science*, 2007, 4(2):879–887.
- [29] ZHAO H, WANG G. A new method for designing a developable surface utilizing the surface pencil through a given curve[J]. *Progress in Natural Science*, 2008, 18(1):105–110.
- [30] LANG J, R  SCHEL O. Developable (1, n)-Bézier surfaces[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1992, 9(4):291–298.
- [31] CHU C H, S  QUIN C H. Developable Bézier patches: properties and design[J]. *Computer-Aided Design*, 2002, 34(7):511–527.
- [32] CHU C H, CHEN J T. Geometric design of uniform developable B-spline surfaces[C]// ASME 2004 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American Society of Mechanical Engineers. 2004: 431–436.
- [33] LIU Y, POTTMANN H, WALLNER J, et al. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces[J]. *ACM Trans. Graphics*, 2006, 25(3):681–689.
- [34] POTTMANN H, SCHIFTNER A, BO P, et al. Freeform surfaces from single curved panels[J]. *ACM Trans. Graph.*, 2008, 27(3):#76,1–10.
- [35] BODDULURI R, RAVANI B. Design of developable surfaces using duality between plane and point geometries[J]. *Computer-Aided Design*, 1993, 25(10):621–632.
- [36] HOSCHEK J, POTTMANN H. Interpolation and approximation with developable B-spline surfaces[C]// Vanderbilt University Press, Nashville, TN 1995: 255–264.

- [37] POTTMANN H, FARIN G. Developable rational Bézier and B-spline surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(5):513–531.
- [38] POTTMANN H, WALLNER J. Approximation algorithms for developable surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(6):539–556.
- [39] PETERNELL M. Developable surface fitting to point clouds[J]. Comput. Aided Geom. Des., 2004, 21(8):785–803. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cagd.2004.07.008>.
- [40] CHEN D, WANG G. Developable Bézier function surface[J]. Progress in Natural Science, 2002, 12(5):383–387.
- [41] SOLOMON J, VOUGA E, WARDETZKY M, et al. Flexible developable surfaces[J]. Computer Graphics Forum, 2012, 31(5):1567–1576.
- [42] PÉREZ F, SUÁREZ J A. Quasi-developable B-spline surfaces in ship hull design[J]. Computer-Aided Design, 2007, 39(10):853–862.
- [43] NARAIN R, PFAFF T, O'BRIEN J F. Folding and crumpling adaptive sheets[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2013, 32(4):51.
- [44] MARTEDEI S, SAITO H. Foldable augmented papers with a relaxed constraint[C]// 2011 1st International Symposium on Access Spaces (ISAS). IEEE. 2011: 127–131.
- [45] PERRIOLLAT M, BARTOLI A. A computational model of bounded developable surfaces with application to image-based three-dimensional reconstruction[J]. Computer Animation and Virtual Worlds, 2013, 24(5):459–476.
- [46] JULIUS D, KRAEVOY V, SHEFFER A. D-charts: Quasi-developable mesh segmentation[J]. Computer Graphics Forum, 2005, 24(3):581–590.
- [47] YAMAUCHI H, GUMHOLD S, ZAYER R, et al. Mesh segmentation driven by gaussian curvature[J]. The Visual Computer, 2005, 21(8-10):659–668.
- [48] HUFFMAN D A. Curvature and creases: A primer on paper[J]. IEEE Transactions on Computers, 1976, 10:1010–1019.
- [49] WERTHEIM M. Cones, curves, shells, towers: He made paper jump to life[J]. The New York Times, 2004, 22.
- [50] DEMAIN E, O'ROURKE J. Geometric Folding Algorithms[M]. Cambridge University Press, 2007.
- [51] KOSCHITZ R D. Computational design with curved creases: David Huffman's approach to paper-folding[D]. PhD thesis. Massachusetts Institute of Technology, 2014.
- [52] LANG R J. Origami Design Secrets: Mathematical Methods For an Ancient Art[M]. AK Peters/CRC Press, 2011.
- [53] MÁRQUEZ J, PHU M. Interactive: An origami space telescope[M]. unpublished: 2006.
- [54] FUCHS D, TABACHNIKOV S. More on paper folding[J]. The American Mathematical Monthly, 1999, 106(1):27–35.
- [55] DEMAIN E. Folding and unfolding[D]. PhD thesis. University of Waterloo, 2001.

- [56] DEMAINE E D, O'ROURKE J. Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra[M]. Cambridge University Press, 2007.
- [57] MITANI J. 3D origami art[M]. AK Peters/CRC Press, 2016.
- [58] TACHI T. Simulation of rigid origami[J]. Origami, 2009, 4:175–187.
- [59] TACHI T. Origamizing polyhedral surfaces[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2010, 16(2):298–311.
- [60] TACHI T, MIURA K. Rigid-foldable cylinders and cells[J]. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 2012, 53(4):217–226.
- [61] MUNDILOVA K. Curved crease folds of spherical polyhedra with regular faces[C]// SUSAN GOLD-STINE D M, FENYVESI K. Proceedings of Bridges 2019: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture. Phoenix, Arizona: Tessellations Publishing, 2019: 423–426.
- [62] JIANG C, MUNDILOVA K, RIST F, et al. Curve-pleated structures[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2019, 38(6):169.
- [63] KILIAN M, MONSZPART A, MITRA N J. String actuated curved folded surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2017, 36(3):25.
- [64] KILIAN M, FLÖRY S, CHEN Z, et al. Curved folding[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2008, 27(3):75.
- [65] BELL E T. Men of Mathematics[M]. Simon and Schuster, 2014.
- [66] BOBENKO A I, SURIS Y B. Discrete Differential Geometry: Integrable Structure[M]. American Mathematical Society, 2008.
- [67] TANG C, BO P, WALLNER J, et al. Interactive design of developable surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2016, 35(2):12.
- [68] WUNDERLICH W. Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung[J]. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. IIa., 1951, 160:39–77.
- [69] RABINOVICH M, HOFFMANN T, SORKINE-HORNUNG O. The shape space of discrete orthogonal geodesic nets[J]. ACM Trans. Graph., 2018, 37(6):228.
- [70] RABINOVICH M, HOFFMANN T, SORKINE-HORNUNG O. Discrete geodesic nets for modeling developable surfaces[J]. ACM Trans. Graph., 2018, 37(2):16.
- [71] RABINOVICH M, HOFFMANN T, SORKINE-HORNUNG O. Modeling curved folding with freeform deformations[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2019, 38(6):170.
- [72] 陈中贵. 网格曲面的展开与可展性优化 [D]. 博士学位论文. 浙江大学, 2009.
- [73] FREY W H. Modeling buckled developable surfaces by triangulation[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(4):299–313.
- [74] KERGOSIEN Y L, GOTODA H, KUNII T L. Bending and creasing virtual paper[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1994, 14(1):40–48.
- [75] CRANE K, WEISCHEDEL C, WARDETZKY M. The heat method for distance computation[J]. Commun. ACM, 2017, 60(11):90–99.

- [76] MÜLLER C. Semi-discrete constant mean curvature surfaces[J]. *Mathematische Zeitschrift*, 2015, 279(1-2):459–478.
- [77] MÜLLER C, WALLNER J. Semi-discrete isothermic surfaces[J]. *Results in Mathematics*, 2013, 63(3-4):1395–1407.
- [78] POTTMANN H, SCHIFTNER A, BO P, et al. Freeform surfaces from single curved panels[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2008, 27(3):76.
- [79] BO P, WANG W. Geodesic-controlled developable surfaces for modeling paper bending[J]. *Computer Graphics Forum*, 2007, 26(3):365–374.
- [80] JUSTIN SOLOMON A B, MIRELA BENCHEN, GUIBAS L J. Discovery of intrinsic primitives on triangle meshes[J]. *Comput. Graph. Forum*, 2011, 30(2):365–374.
- [81] POTTMANN H, ASPERL A, HOFER M, et al. *Architectural Geometry*[M]. Bentley Institute Press Exton, PA, 2007.
- [82] POTTMANN H, EIGENSATZ M, VAXMAN A, et al. Architectural geometry[J]. *Computers & Graphics*, 2015, 47:145–164.
- [83] SHELDEN D R. Digital surface representation and the constructibility of Gehry’s architecture[D]. PhD thesis. Massachusetts Institute of Technology, 2002.
- [84] SCHIEF W K, BOBENKO A I, HOFFMANN T. On the integrability of infinitesimal and finite deformations of polyhedral surfaces[C]// *Discrete Differential Geometry*. Springer 2008: 67–93.
- [85] ZADRAVEC M, SCHIFTNER A, WALLNER J. Designing quad-dominant meshes with planar faces[J]. *Computer Graphics Forum*, 2010, 29(5):1671–1679.
- [86] BOMMES D, CAMPEN M, EBKE H C, et al. Integer-grid maps for reliable quad meshing[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2013, 32(4):98.
- [87] EBKE H C, BOMMES D, CAMPEN M, et al. Qex: robust quad mesh extraction[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2013, 32(6):168.
- [88] SCHLING E. Repetitive Structures – Design and construction of curved support structures with repetitive parameters[D]. PhD thesis. TU Munich, 2018.
- [89] KASAP E, AKYILDIZ F T, ORBAY K. A generalization of surfaces family with common spatial geodesic[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 201(1-2):781–789.
- [90] BIARD L, FAROUKI R T, SZAFRAN N. Construction of rational surface patches bounded by lines of curvature[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2010, 27(5):359–371.
- [91] WANG H, NI Q. A new method of moving asymptotes for large-scale unconstrained optimization[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 203(1):62–71.
- [92] YU L, GUO-JIN W. Designing developable surface pencil through given curve as its common asymptotic curve[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2013, 47(7):1246–1252.
- [93] ANGENENT S B, VELÁZQUEZ J, OTHERS. Asymptotic shape of cusp singularities in curve shortening[J]. *Duke Mathematical Journal*, 1995, 77(1):71–110.

- [94] CONTOPOULOS G. Asymptotic curves and escapes in hamiltonian systems[J]. *Astronomy and Astrophysics*, 1990, 231:41–55.
- [95] FARIN G E. *Curves and Surfaces For CAGD: A Practical Guide*[M]. Morgan Kaufmann, 2002.
- [96] MØRKEN K. Some identities for products and degree raising of splines[J]. *Constructive Approximation*, 1991, 7(1):195–208.
- [97] 赵向军. 网格曲面造型技术研究 [D]. 博士学位论文. 浙江大学, 2006.
- [98] 王胜法. 基于微分方法的网格曲面分析和处理 [D]. 博士学位论文. 大连理工大学, 2012.
- [99] 方贤忠. 标架场导引的可控重网格化方法 [D]. 博士学位论文. 浙江大学, 2019.
- [100] 柴双明. 面向低扭曲参数化的网格切割方法研究 [D]. 博士学位论文. 中国科学技术大学, 2019.
- [101] 蒋罗. 三维人脸重建与人脸识别 [D]. 博士学位论文. 中国科学技术大学, 2019.
- [102] 徐文鹏. 3D 打印中的结构优化问题研究 [D]. 博士学位论文. 中国科学技术大学, 2016.
- [103] CRANE K, WARDETZKY M. A glimpse into discrete differential geometry[J]. *Notices of the American Mathematical Society*, 2017, 64(10).
- [104] CHEN W, ZHENG X, KE J, et al. Quadrilateral mesh generation i: Metric based method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 356:652–668.
- [105] HENNICKE J, OTHERS. Grid shells (il 10)(institute for lightweight structures, stuttgart)[C]//. 1974.
- [106] AONO M, DENTI P, BREEN D E, et al. Fitting a woven cloth model to a curved surface: dart insertion[J]. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1996, 16(5):60–70.
- [107] GARG A, SAGEMAN-FURNAS A O, DENG B, et al. Wire mesh design.[J]. *ACM Trans. Graph.*, 2014, 33(4):66.
- [108] ANDREW O. SAGEMAN-FURNAS M B C, ALBERT CHERN, VAXMAN A. Chebyshev nets from commuting polyvector fields[J]. *ACM Trans. Graph.*, 2019, 38(6):172.
- [109] TANG C, SUN X, GOMES A, et al. Form-finding with polyhedral meshes made simple[J]. *ACM Trans. Graph.*, 2014, 33(4):70.
- [110] PAN H, CHOI Y K, LIU Y, et al. Robust modeling of constant mean curvature surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2012, 31(4):85.
- [111] JAMES R C. *Mathematics Dictionary*[M]. Springer Science & Business Media, 1992.
- [112] KÜHNEL W. *Differential Geometry*[M]. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [113] POLTHIER K, SCHMIES M. Straightest geodesics on polyhedral surfaces[J]. *Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction*, 2006, 30.
- [114] TACHI T. Geometric considerations for the design of rigid origami structures[C]// Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium. vol 12. Shanghai. 2010: 458–460.
- [115] EISENHART L P. *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*[M]. Ginn, 1909.

- [116] BOBENKO A, PINKALL U. Discrete isothermic surfaces[J]. Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1996, 475:187–208.
- [117] HOFFMANN T. A darboux transformation for discrete s-isothermic surfaces[J]. J. Math-For-Industry, 2010.
- [118] BOBENKO A I, PINKALL U. Discretization of surfaces and integrable systems[J]. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 1999, 16:3–58.
- [119] SECHELMANN S, RÖRIG T, BOBENKO A I. Quasiisothermic mesh layout[C]// Advances in Architectural Aeometry 2012. Springer 2013: 243–258.
- [120] MONGE G. Application de L'analyse a La Geometrie (etc.) 4[M]. Bernard, 1809.
- [121] POTTMANN H, LIU Y, WALLNER J, et al. Geometry of multi-layer freeform structures for architecture[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2007, 26(3):65.
- [122] WEINGARTEN J. Über eine klasse aufeinander abwickelbarer flächen[J]. Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1861, 59:382–393.
- [123] FINSTERWALDER S. Mechanische beziehungen bei der flächendeformation[J]. Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung, 1899, 6:43–90.
- [124] SCHLING E, BARTHEL R. Repetitive structures[C]// GENGNAGEL C, BAVEREL O, BURRY J, et al. Impact: Design With All Senses. Cham: Springer International Publishing, 2020: 360–375.
- [125] JACOBSON A, BARAN I, POPOVIC J, et al. Bounded biharmonic weights for real-time deformation.[J]. ACM Trans. Graph., 2011, 30(4):78.
- [126] BOBENKO A I, SCHRÖDER P. Discrete willmore flow[C]// Eurographics Association 2005.
- [127] SORKINE O. Laplacian mesh processing[C]// Eurographics (STARs). 2005: 53–70.
- [128] NEALEN A, IGARASHI T, SORKINE O, et al. Laplacian mesh optimization[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australasia and Southeast Asia. ACM. 2006: 381–389.
- [129] ALEXA M, WARDETZKY M. Discrete laplacians on general polygonal meshes[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2011, 30(4):102.
- [130] KILIAN M, MITRA N J, POTTMANN H. Geometric modeling in shape space[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2007, 26(3):64.
- [131] KILIAN M, FLÖRY S, CHEN Z, et al. Developable surfaces with curved creases[C]// Advances in Architectural Aeometry 2008. Springer 2008: 33–36.
- [132] LANG R J. Origami[M]. unpublished: 2019.
- [133] STEIN O, GRINSPUN E, CRANE K. Developability of triangle meshes[J]. ACM Trans. Graph., 2018, 37(4):77.
- [134] KONAKOVIĆ M, CRANE K, DENG B, et al. Beyond developable: Computational design and fabrication with auxetic materials[J]. ACM Trans. Graph., 2016, 35(4):89.
- [135] KONAKOVIĆ M, PANETTA J, CRANE K, et al. Rapid deployment of curved surfaces via programmable auxetics[J]. ACM Trans. Graph., 2018, 37(4):106.

- [136] DUDTE L H, VOUGA E, TACHI T, et al. Programming curvature using origami tessellations[J]. *Nature Materials*, 2016, 15(5):583.
- [137] CALLENS S, ZADPOOR A. From flat sheets to curved geometries: Origami and kirigami approaches[J]. *Materials Today*, 2018, 21(3):241–264.
- [138] CARL W. On semidiscrete constant mean curvature surfaces and their associated families[J]. *Monatsh. Math.*, 2017, 182(3):537–563.
- [139] KAHLERT J, OLSON M, ZHANG H. Width-bounded geodesic strips for surface tiling[J]. *The Visual Computer*, 2011, 27(1):45–56.
- [140] POTTMANN H, HUANG Q, DENG B, et al. Geodesic patterns[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2010, 29(4):43.
- [141] 孙明宇. 大跨建筑非线性结构形态生成研究 [D]. 博士学位论文. 哈尔滨工业大学, 2017.
- [142] 沈源. 整体系统: 建筑空间形式的几何学构成法则 [D]. 博士学位论文. 天津大学, 2010.
- [143] 赵有良. 几何学在建筑设计中的运用研究 [D]. 硕士学位论文. 同济大学, 2007.
- [144] 王风涛. 基于高级几何学复杂建筑形体的生成及建造研究 [D]. 硕士学位论文. 清华大学, 2012.
- [145] 奥京. 基于几何逻辑的复杂建筑形态控制 [D]. 硕士学位论文. 清华大学, 2016.
- [146] 袁大伟. 基于参数化技术的建筑形体几何逻辑建构方法研究 [D]. 硕士学位论文. 清华大学, 2011.
- [147] 黄蔚欣, 徐卫国. 非线性建筑设计中的“找形” [J]. *建筑学报*, 2009, 11:96–99.
- [148] BURGOON R, WOOD Z J, GRINSPUN E. Discrete shells origami[C]// 21st International Conference on Computers and their Applications (CATA 2006) Proceedings. 2006.
- [149] FRÖHLICH S, BOTSCHE M. Example-driven deformations based on discrete shells[J]. *Computer Graphics Forum*, 2011, 30(8):2246–2257.
- [150] SPIVAK M D. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry[M]. Publish or perish, 1970.
- [151] KAZHDAN M, BOLITHO M, HOPPE H. Poisson surface reconstruction[C]// Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing. vol 7. 2006.
- [152] MINDING F. Ueber die biegung krummer flächen.[J]. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1838, 18:365–368.
- [153] SADD M H. Elasticity: Theory, Applications, and Numerics[M]. Oxford: Academic Press, 2009.
- [154] SALOKANGAS L. Wooden observation tower, helsinki, finland[J]. *Structural engineering international*, 2003, 13(3):160–162.
- [155] BURKHARDT B, OTHERS. Multihalle mannheim stuttgart: Institut für leichte flächentragwerke[J]. IL13, 1976.

## 附录

图 1.12 图片来源: <https://trimbleconsulting.com/>

图 2.1 图片来源: <https://www.lt.ar.tum.de/en/research-pavilion/>

图 3.10 图片来源: <https://www.asymptote.net/yas-slide-show>

图 3.16-左图片来源: <https://en.wikipedia.org/wiki/Glass-Pavilion>

图 3.16-中图片来源: <http://www.30stmaryaxe.com/>

图 3.16-右图片来源: <http://www.skyscrapercenter.cn/building/tornado-tower/1677>

图 3.62 图片来源: <https://www.hotel-intergroup.com/>

图 4.2-(a) 图片来源: <https://www.isseymiyake.com/en/brands/baobao>

图 4.2-(c) 图片来源: <http://www.fr-ee.org/project/67/Museo+Soumaya>

图 4.2-(d) 图片来源: <https://www.zaha-hadid.com/architecture/beijing-new-airport-terminal-building/>

图 4.22-(c) 图片来源: <http://www.gridshell.it/gridshell-lecce/>

图 4.22-(d) 图片来源: <https://mannheim-multihalle.de/en/homepage/>

图 4.22-(e) 图片来源: <http://www.sohu.com/a/154132716-688519>

图 4.22-(f) 图片来源: <http://www.archtalent.com/projects/kupla-helsinki-zoo-lookout-tower>

图 4.22-(g) 图片来源: <https://www.effekt.dk/>

图 4.11-右图片来源: <http://www.skyscrapercenter.cn/building/doha-tower/1083>

## 攻读博士学位期间科研项目及科研成果

### 发表的学术论文

- [1] **Hui Wang**, Davide Pellis, Florian Rist, Helmut Pottmann, and Christian Müller. Discrete geodesic parallel coordinates. ACM Trans. Graphics (TOG), 2019, 38(6): 173. (Proc. ACM SIGGRAPH ASIA 2019.) (SCI, CCF A 类期刊)(本博士论文第三、四章)
- [2] **Hui Wang**, Chungang Zhu, Caiyun Li. The design of Bézier surface through quintic Bézier asymptotic quadrilateral. Journal of Computational Mathematics, 2019, 37(5):721-738. (SCI)(本博士论文第二章)
- [3] **Hui Wang**, Chungang Zhu, Caiyun Li. Construction of B-spline surface from cubic Bspline asymptotic quadrilateral. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing (Special Issue on ACDDE 2016), 11 (4), JAMDSM0044. (SCI)(本博士论文第二章)
- [4] 王慧, 朱春钢, 李彩云. 插值有理 Bézier 演近四边形的有理 Bézier 曲面. 计算机辅助设计与图形学报, 2017, 29(8): 1497-1504. (EI)(本博士论文第二章)
- [5] Davide Pellis, **Hui Wang**, Martin Kilian, Florian Rist, Helmut Pottmann, and Christian Müller. Principal symmetric meshes. Accepted to ACM SIGGRAPH 2020. (CCF A 类会议)(本博士论文第三章)
- [6] Martin Kilian, **Hui Wang**, Eike Schling, Jonas Schikore, and Helmut Pottmann. Curved support structures and meshes with spherical vertex stars. Proc. ACM SIGGRAPH 2018 Poster, ACM, 2018: 53. (CCF A 类会议)(本博士论文第三章)
- [7] Eike Schling, Martin Kilian, **Hui Wang**, Jonas Schikore, and Helmut Pottmann. Design and construction of curved support structures with repetitive parameters. Proc. Advances in Architectural Geometry 2018 (AAG2018), Lars Hesselgren et al., Springer, 2018: 140-165. (本博士论文第三章)
- [8] **Hui Wang**, Chungang Zhu, Caiyun Li. Identification of planar sextic Pythagorean-Hodograph curves. Journal of Mathematical Research with Applications, 2017, 37(1): 59-72. (核心)
- [9] 王慧, 朱春钢, 李彩云. 六次 PH 曲线  $G^2$  Hermite 插值. 图学学报, 2016, 37(2):155-165. (核心)

### 参与的科研项目

- [1] 国家自然科学面上基金资助项(No.11671068): 参数曲线曲面的几何性质研究, 2017.01.01-2020.12.31, 负责人: 朱春钢.
- [2] 国家自然科学面上基金资助项目 (No.11271060): Toric 曲面研究, 2013.01.01-2016.12.31, 负责人: 朱春钢.
- [3] 大连理工大学基本科研业务费专题项目理科基础科研专题 (DUT16LK38), 几何造型中的若干问题研究, 2016.01-2017.12, 负责人: 朱春钢.
- [4] 辽宁省高等学校优秀人才支持计划资助 (LJQ2014010), 2014.01-2017.12, 负责人: 朱春钢.

- [5] 国家自然科学面上基金资助项目 (No.11401077): 插值特殊曲线的可展曲面与极小曲面构造研究, 2015.01.01-2019.03.25, 负责人: 李彩云.
- [6] 民用飞机专项项目 “\*\*\*\*\* 研究” 子课题 (MJ-F-2012-04), 2013.01-2016.12, 负责人: 王仁宏.
- [7] 大连理工大学基本科研业务费专项项目理科基础科研专题 (DUT16LK39): 动态网络传染病模型的阈值理论研究, 2016.01-2017.12, 负责人: 张仁权.
- [8] 中国博士后科学基金资助项目 (No.2015M581324): 生物催化系统中基于突变机制的模式识别与调控方法, 2015.11.27-2018.05.28, 负责人: 张仁权.

## 致 谢

11月的大工，“校风”乍起，日渐转凉。穿行于落满银杏叶的校园，蓦然回首，恍然发现我与大工的缘分已走到了第七个年头。在这段难忘的时光里，我有幸收获了爱情、友情、知识和成长。也正是这些经历塑造了现在的我，并持续支持着我直面困难、努力迎接未来将要开启的新的旅程。

回顾这段难忘的日子，回望那些构成我美好回忆的人们，首先需要特别感谢我的恩师，也是对我影响最大的老师——朱春钢教授。一直很感激朱老师给了我读博的机会，在整个学习、研究的过程中，老师清晰的思路，流畅的逻辑，高效的作风都深深的影响着我。在论文撰写，会议报告等学术工作方面老师也一直给予我鼓励和帮助。我们一起完成的每一个研究问题，每一篇学术文章，每一份审稿意见，每一次报告内容，都有老师全面的指导和仔细的建议。同时，老师也非常鼓励我外出交流学习，无论是去杭州、合肥、深圳、济州岛、布里斯班的学术会议，还是去厦门、成都培训学习，老师都给予了大力的支持。特别是当我面对出国培养的关键抉择时，老师给出了富有远见的建议，帮助我加入到向往已久的研究组交流学习。留学期间，相隔万里，但老师的关心与支持，让我的留学生生活倍感踏实和温暖。感谢老师的用心栽培和无私奉献。我会以老师为榜样，砥砺前行。

感谢我科研道路的引路人侯中华教授。侯老师热情的欢迎与细致的引导，让我对研究生生涯充满向往。他正直谦和、治学严谨的态度，一直影响并提醒着我求真求实、认真科研。感谢侯老师的培养和激励，每当在科研道路上遇到困难，总能让我焦躁的心得以平静。

感谢 TU Wien 的 Helmut Pottmann 教授。Pottmann 教授几何理论雄厚，思维敏捷，谈吐间意气风发，挥斥方遒。其言语表达的感染力，对美学的鉴赏力，对学术问题敏锐的洞察力都令我敬仰。此外还要感谢谦虚严谨的 Christian Müller 副教授，认真耐心的 Martin Kilian，聪明高效的 Davide Pellis，善良温和的 Klara Mundilova，热心体贴的 Doris Hotz，开朗乐观的 Ruzica Mijic 等人对我在 TU Wien 的照顾和帮助。最宜居的城市里也是因为这些可爱的人们变得令人幸福和快乐。

感谢李彩云副教授。彩云姐不仅对我们合作的文章耐心的修改，还一直惦记着我的学习和生活。这些一直以来的关心，就像大姐姐一样，在我迷茫时给了力量和鼓励，让我倍感亲切。

感谢学院的王仁宏教授、于波教授、吴微教授、苏志勋教授、刘秀平教授、李崇君教授、董波教授、王振教授、杜磊副教授、徐敏副教授、张仁权副教授、赵国辉副教授等，感谢国际信息与软件学院的刘日升教授和中国科学院数学与系统科学研究院的龚伟副研究员在我求学期间的帮助和教诲。感谢学院办公室的孙丽君老师等人的帮助。

感谢师妹李敬改在我出国交流期间的大力支持。纷繁复杂的材料准备，一遍又一遍的内容核实，师妹都耐心地帮我一一处理。这些体贴让我倍感温暖。

感谢计算几何教研室的李俊彬、郭庆杰、郭兵、张永富、张胜刚、孙兰银、赵轩艺、张跃、王涵、谢林林、钟轶君、王鹏霄、贾燕梅、吴岩、于滢滢、纪野等人对我学习生活上的照顾和帮助。

感谢微分几何教研室的富宇、孙磊、邱望华、刘永楠、詹鑫、施威、张宁、冯静等人在我科研初期的帮助和解惑.

感谢中国国家留学基金委员会 (CSC) 为我提供的到 TU Wien 进行博士联合培养的机会, 感谢离散数学与几何学院为我提供的良好科研环境.

感谢在维也纳结识的周志强教授、陈秀卿教授、李子佳、王国栋、卢芸、施晓静、陈蓉、葛格、王望舒等前辈和好友的陪伴和帮助.

感谢挚友李鹏媛、沈佳坤、曹俊红、张静、吕凡、高菊峰、康俊华、孙宏伟、丁莉、杨娜、宋楠、孟雪萍、赵佳玉等, 她们的勇敢、善良和真诚一直鼓舞着我不断前进.

感谢父母和姐姐. 父亲教我勤勉, 母亲教我善良, 姐姐带给我安慰. 是她们的不断付出和努力让我热爱生活, 安心学习, 勇敢追梦. 祝愿家人一直健康和快乐.

感谢丈夫王亮, 有幸能在最合适的时候与你相识、相恋、相互鼓励、相互成长, 这是博士期间最开心的事. 你的成熟稳重让我倍感安全, 你的大方热情让我倍感温暖, 愿我们一路真诚勇敢携手走过人生的每个春秋.

谨以此文献给所有帮助过我和爱我的人.

王慧  
二零一九年十一月于大工

## 作者简介

姓名：王慧

性别：女

出生年月：1990 年 7 月

民族：满族

籍贯：吉林省吉林市

研究方向：计算几何、建筑几何

简历：



2009 年 9 月至 2013 年 7 月 吉林师范大学数学与应用数学学院 本科

2013 年 9 月至今 大连理工大学数学科学学院 硕博连读

2017 年 9 月至 2019 年 10 月 TU Wien 离散数学与几何学院 联培博士