



Universidade Federal do Rio Grande  
Instituto de Matemática, Estatística e Física  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

---



**ANDRÉ LOPES BRUM**  
**PEDRO HENRIQUE FERNANDES LOBO**  
**VINÍCIUS HEIDTMANN AVILA**

# **MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS**

Rio Grande-RS, 2017



Universidade Federal do Rio Grande  
Instituto de Matemática, Estatística e Física  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

---



**ANDRÉ LOPES BRUM**  
**PEDRO HENRIQUE FERNANDES LOBO**  
**VINÍCIUS HEIDTMANN AVILA**

## **MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS**

Trabalho apresentado ao programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, pertencente a Universidade Federal do Rio Grande, como requisito de avaliação parcial para conclusão do curso de Métodos Numéricos Aplicados.

Rio Grande-RS, 2017

## 1 Objetivo

Comparar os métodos de Euler e Runge-Kutta de dois estágios ao resolver uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

## 2 Introdução

Muitos problemas em ciências e engenharias são modelados através de equações diferenciais. Porém, nem sempre elas apresentam soluções analíticas. Por isto, muitas vezes é necessário recorrer ao computador para que encontrar as soluções numéricas.

Desta maneira, para compreender a lógica por trás dos métodos Runge Kutta e de Euler, que são bastante conhecidos, iremos aplicá-los em um problema simples e recorrente na física, fazendo uma breve discussão sobre eficácia a deles.

## 3 Fundamentação teórica

Seja uma equação diferencial da forma:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0\end{aligned}\tag{1}$$

Embora esta equação possa ter uma solução analítica, ou seja, capaz de estabelecer diferenciais contínuas em um intervalo, o computador pode imitar o processo de diferenciação se o espaço for discretizado. Para isto, vamos procurar uma solução através de uma expansão em série de Taylor:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \frac{d}{dt}y(t) + \frac{\Delta t}{2!} \frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{\Delta t}{3!} \frac{d^3}{dt^3}y(t) + \dots + \frac{\Delta t}{n!} \frac{d^n}{dt^n}y(t)$$

Se truncarmos a série no primeiro termo e isolarmos a diferencial obtemos:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (2)$$

Com isso, comparando as equações 1 e 2 e negligenciando os demais termos a partir do segundo, podemos determinar de uma forma iterativa, qual o valor da função  $f(t, y(t))$  no ponto seguinte distante de  $\Delta t$ . Desta forma, a expressão seguinte é conhecida como método de Euler e o cálculo da função avaliada na posição subsequente é dada por:

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \Delta t f(t, y(t)) \quad (3)$$

Agora iremos reescrever a equação anterior, substituindo  $y_n$  por  $y(t)$ ;  $t$  por  $t_n$  e  $\Delta t$  por  $h$ . Logo, o método de Euler é expresso na forma a seguir para obtermos uma aproximação discretizada da solução  $y_{n+1}$  avaliada em cada ponto  $n + 1$ .

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (4)$$

Obviamente para utilizarmos o método é necessário fornecer uma condição inicial para o cálculo do primeiro ponto. Além disso, há um erro associado ao truncamento realizado que vai aumentando a cada iteração. Portanto, para melhorar a aproximação, devemos adotar outro procedimento. Isto pode ser realizado através de uma quadratura numérica (ver [1, 2]) que resulta na família de métodos Runge Kutta.

Para isto, há varias maneiras de estabelecer a função que resolve numericamente a EDO e que podem ser verificados em [1, 3, 4]. Mas este assunto vai muito além da escopo deste trabalho e por isso vamos simplesmente apresentar a equação com parâmetros arbitrados que o faz ser conhecido como método *midpoint* Runge-Kutta de dois estágios.

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, y_i) \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_{i+1} &= y_i + hk_2 \end{aligned} \quad (5)$$

## 4 Aplicação

Muitos problemas físicos apresentam comportamento oscilatório como sistemas massa-mola, pêndulo simples, pêndulo de torção, circuito LC, oscilador harmônico quântico, etc. Em todos estes casos, quando não há termos responsáveis pela restauração e dissipação de energia, o sistema entra no regime de movimento harmônico simples<sup>1</sup>, ou seja, passa a oscilar eternamente. Matematicamente as equações que governam este tipo de fenômeno tem a forma apresentada a seguir:

$$\frac{d^2}{dt^2}\psi(t) = -\omega^2\psi(t) \quad (6)$$

Onde o termo  $\omega$  é definido como a frequência natural do sistema,  $t$  é variável independente e  $\psi(t)$  é o termo dependente. Note também que é conveniente aplicar uma redução de ordem sobre a diferencial para utilização dos métodos numéricos. Isto porque eles foram elaborados para serem utilizados em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Sendo assim, reescrevendo a expressão anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\omega^2\psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= z \end{aligned} \quad (7)$$

As equações 6 e 7 apresentam a solução dada por 8, onde  $A$  é a amplitude de oscilação e  $\phi$  é o ângulo de fase. Ambos os termos são arbitrados como condições iniciais do problema.

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (8)$$

## 5 Simulações

Em geral, métodos numéricos são normalmente utilizados quando é difícil encontrar soluções analíticas de EDOs. Entretanto, no nosso caso esta é conhecida, então é conveniente

---

<sup>1</sup> Em alguns casos, como o do pêndulo simples, a equação diferencial costuma passar por um processo de linearização para que possa ser considerado movimento harmônico simples.

fazer uma comparação entre ela e os métodos Runge-Kutta e de Euler. Para isto, vamos estabelecer as condições de contorno do problema. Desta maneira, derivando a equação 8 em relação a  $t$ , obtemos  $z(t)$  apresentada a seguir:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = z(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (9)$$

Como  $A$  e  $\omega$  são positivos, ao inspecionar as equações 8 e 9 e arbitrar  $\psi(0) = 1$  e  $z(0) = 0$ , implica em  $\phi = 0$  e  $A = 1$ . Além disso, adotamos a constante  $\omega = 1.4$ . E com isso, passamos a determinar todos os termos presentes na solução dada pela equação 8.

Para resolver numericamente a EDO, construímos dois programas em *Fortran90*, capazes de resolvê-la pelo método de Euler e Runge-Kutta de dois estágios ao aplicar as relações 4 e 5 respectivamente. Cada programa utiliza o primeiro ponto obtido pelas condições de contorno e a partir dele, a cada iteração, estabelece o valor do ponto seguinte. Obviamente foi necessário reduzir a ordem da derivada (ver a relação 7) e executar o algoritmo simultaneamente nas duas diferenciais. O leitor pode ver com detalhes o seu funcionamento através dos códigos fontes apresentados em anexo.

## 6 Resultados e discussões

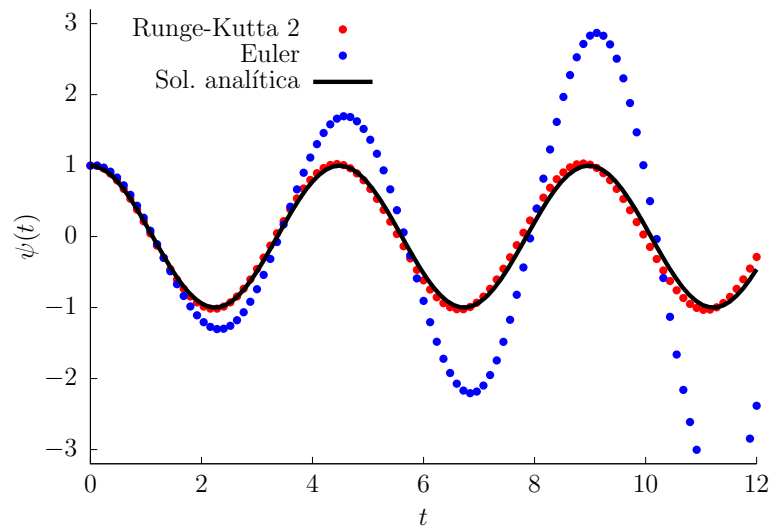
Ao compilar<sup>1</sup> e executar os programas, o terminal<sup>2</sup> mostra três colunas que representam  $t$ ,  $\psi(t)$  e  $z(t)$  respectivamente. Ao plotarmos um gráfico de  $\psi(t)$  em função de  $t$  contendo a curva teórica dada pela equação 8 e os dois métodos numéricos, obtemos as figuras 1 e 2 que diferem apenas pelo tamanho do passo  $h$ .

Na figuras 1 e 2, ao compararmos as soluções numéricas com a curva teórica, verificamos que parecem haver defasagens e um aumento progressivo nas amplitudes. Mas, na verdade, isto ocorre porque a cada iteração os métodos vão acumulando erros que aumentam com o tamanho do passo  $h$ . Ao diminuirmos este, o resultado numérico passa a se aproximar mais da solução analítica.

---

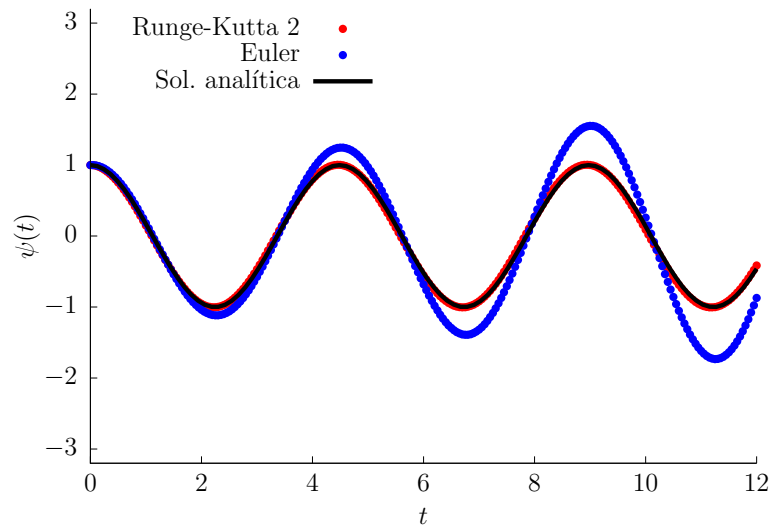
<sup>1</sup> O compilador utilizado é o *gfortran* 5.4.0

<sup>2</sup> *Linux Lite* 3.6



**Figura 1:** Solução numérica através dos métodos de Euler e Runge-Kutta de dois estágios seguido da analítica dada pela equação 8. Onde  $A = 1$ ,  $\phi = 0$  e  $\omega = 1.4$ . O tamanho do passo arbitrado é  $h = 0.12$ .

Fazendo uma comparação entre os métodos numéricos, verificamos que o de Euler se afasta da solução analítica com muito mais rapidez quando comparado com o Runge-Kutta. Isto ocorre porque a forma com que estes algoritmos são construídos levam em conta uma aproximação por quadratura numérica, fazendo com que o método de Euler se torne um caso particular (e de menor acurácia) da família de métodos Runge-Kutta de qualquer estágio superior (ver [1, 2, 3]).



**Figura 2:** Solução numérica através dos métodos de Euler e Runge-Kutta de dois estágios seguido da analítica dada pela equação 8. Onde  $A = 1$ ,  $\phi = 0$  e  $\omega = 1.4$ . O tamanho do passo arbitrado é  $h = 0.05$ .

Diante do exposto, ao realizarmos as comparações, consideramos que o método

Runge-Kutta de dois estágios é mais eficaz, pois apresenta uma melhor aproximação da solução analítica. Entretanto, este possui uma equação adicional para ser resolvida a cada iteração e certamente ele exige um maior esforço computacional.



## Referências

- [1] ROSEN, J. S. *The Runge-Kutta equations by quadrature methods*. [S.l.], 1967. Report/Patent Number: NASA-TR-R-275, Document ID 19680000653. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19680000653>>.
- [2] ACKLEH, A. S. et al. Classical and modern numerical analysis: Theory, methods and practice (chapman & hall/crc numerical analysis and scientific computing series). In: . [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2009. cap. 6, p. 381–459. ISBN 1420091573.
- [3] ACKLEH, A. S. et al. Classical and modern numerical analysis: Theory, methods and practice (chapman & hall/crc numerical analysis and scientific computing series). In: . [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2009. cap. 7, p. 381–459. ISBN 1420091573.
- [4] HAIRER MICHEL ROCHE, C. L. a. E. *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989. (Lecture Notes in Mathematics 1409). ISBN 9780387518602,0-387-51860-6.

## Anexo A

```

1 module constantes
2   implicit none
3   real :: omg = 1.4, psi0=1.0, z0=0.0
4 end module constantes
5
6 module derivadas ! Um modulo para definir as funcoes derivadas
7 ! Esse modulo deve ser usado na subrotina que ira resolver seu
8 ! sistema de EDOs
9   implicit none
10  contains
11  function f(s,z) ! Aqui sao definidas as funcoes derivadas
12    use constantes
13    real :: s ! variavel independente
14    real :: z(2) ! vetor com variaveis dependentes
15    real :: f(2) ! cada f corresponde ao lado direito da EDO
16                ! dz/dx = f
17    f(1) = z(2) ! v
18    f(2) = -z(1)*omg**2
19  end function f
20 end module derivadas
21
22 module runge_kutta_2
23   implicit none
24   contains
25   subroutine rk2(h,t,y0,y)
26     use derivadas
27     implicit none
28     real :: y(:, :) ! variaveis dependentes e derivadas
29     real :: h ! tamanho do passo
30     real :: t(:) ! vetor de valores da variavel independente
31     real :: y0(:) ! condicoes iniciais
32     integer :: Npassos, Neqs ! No. de passos e No. de equacoes
33     integer :: i
34     real, allocatable, dimension(:) :: k1,k2
35     Npassos = size(t)
36     Neqs = size(y0)
37     allocate ( k1(Neqs), k2(Neqs))
38     y(:,1)=y0 ! valores iniciais
39     do i=1, Npassos-1
40       k2 = f(t(i),y(:,i))
41       k1 = f( t(i)+h/2.0, y(:,i) + (h/2.0)*k1 )
42       y(:,i+1) = y(:,i) + h*k1
43     end do
44   end subroutine rk2
45 end module runge_kutta_2
46
47 program passing
48   use constantes
49   use runge_kutta_2
50   implicit none
51   real, parameter :: h=0.12 !alterar aqui o tamanho do passo
52   integer, parameter :: Npts=2000+1
53   real :: yinit(2)
54   real :: y(2,Npts)
55   integer :: i

```

```
56  real :: t(Npts)
57  t(1) = 0.0
58  do i = 2,Npts
59    t(i) = t(i-1)+h
60  end do
61  yinit(1) = psi0
62  yinit(2) = z0
63
64  call rk2(h,t,yinit,y)
65  write(*,*) "#    t                x                dx/dt"
66  do i=1,Npts
67    write(*,*) t(i), y(1,i), y(2,i)
68  end do
69 end program passing
```

**Listagem 1:** Código fonte em *Fortran90* para o método Runge-Kutta de dois estágios.

## Anexo B

```

1 module constantes
2   implicit none
3   real :: omg = 1.4, psi0=1.0, z0=0.0
4 end module constantes
5
6 module derivadas ! Um modulo para definir as funcoes derivadas
7 ! Esse modulo deve ser usado na subrotina que ira resolver seu
8 ! sistema de EDOs
9   implicit none
10  contains
11  function f(s,z) ! Aqui sao definidas as funcoes derivadas
12    use constantes
13    real :: s ! variavel independente
14    real :: z(2) ! vetor com variaveis dependentes
15    real :: f(2) ! cada f corresponde ao lado direito da EDO
16                ! dz/dx = f
17    f(1) = z(2) ! v
18    f(2) = -z(1)*omg**2
19  end function f
20 end module derivadas
21
22 module euler
23   implicit none
24   contains
25   subroutine metodo(h,t,y0,y)
26     use derivadas
27     implicit none
28     real :: y(:, :) ! variaveis dependentes e derivadas
29     real :: h ! tamanho do passo
30     real :: t(:) ! vetor de valores da variavel
31                ! independente
32     real :: y0(:) ! condicoes iniciais
33     integer :: Npassos, Neqs !No. de passos e No. de equacoes
34     integer :: i
35     real, allocatable, dimension(:) :: k1,k2
36     Npassos = size(t)
37     Neqs = size(y0)
38     allocate ( k1(Neqs), k2(Neqs))
39     y(:,1)=y0 ! valores iniciais
40     do i=1, Npassos-1
41       y(:,i+1) = y(:,i) + h*f(t(i),y(:,i))
42     end do
43   end subroutine metodo
44 end module euler
45
46 program passing
47   use constantes
48   use euler
49   implicit none
50   real, parameter :: h=0.12 !alterar aqui o tamanho do passo
51   integer, parameter :: Npts=2000+1
52   real :: yinit(2)
53   real :: y(2,Npts)
54   integer :: i
55   real :: t(Npts)

```

```
56 t(1) = 0.0
57 do i = 2,Npts
58   t(i) = t(i-1)+h
59 end do
60 yinit(1) = psi0
61 yinit(2) = z0
62 call metodo(h,t,yinit,y)
63 write(*,*) "# t x dx/dt"
64 do i=1,Npts
65   write(*,*) t(i), y(1,i), y(2,i)
66 end do
67 end program passing
```

**Listagem 2:** Código fonte *Fortran90* para o método de Euler.