高数精讲（4）

4	求极限常用方法，求极限常见类型	P27-P37

下 p38-48

主讲 武 忠 祥 教授

4. “$0\cdot\infty$”型极限

常用的方法是化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$

无穷小（等价代换）

$0\cdot\infty$

【例1】求极限 $\lim\limits_{x\to1}\ln x\ln|1-x|$

$x\to0$ $\ln(1+x)\sim x$

【解】 $\ln x=\ln[1+(x-1)]\sim x-1$

$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

$0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to1}\ln x\ln|1-x|=\lim_{x\to1}(x-1)\ln|1-x|$$

$\dfrac{\infty}{\infty}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln|1-x|}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{-1}{1-x}}{-\dfrac{1}{(x-1)^2}}=0$$

5. "1^{∞}" 型极限

常用的方法有三种

1）凑基本极限 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$；其中 $\lim\varphi(x)=0\quad(\varphi(x)\neq 0)$.

2）改写成指数 $\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}$ 用洛必达法则；

3）利用结论：若 $\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=\infty$，且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$.

则 $\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{A}$

可以归纳为以下三步:

1)写标准形式 原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$；

2)求极限 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$；

3)写结果 原式 $=e^{A}$.

1^∞

【例1】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

e

【解1】 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left\{\left[1+\underline{(\cos\sqrt{x}-1)}\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right\}^{\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}$ ✓

凑e

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

【解2】 $$\lim_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}$$

洛.

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}$$

(*)

【解3】 1 由于 $$(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{x}}$$

2 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}=-\frac{1}{2}$$

3 则 $$\lim_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

1^{∞}

【例2】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

【解】 ① 由于 $\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \left(1+\dfrac{\arcsin x - x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

② 而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x - x}{x(1-\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3}$ $\quad\left(\arcsin x - x \sim \dfrac{1}{6}x^3\right)$

$= \dfrac{1}{3}$

③ 则 原式 $= e^{\frac{1}{3}}$

1^{∞}

【例3】极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x = \underline{\quad \lim (1+\alpha)^x \quad}$

(A) 1 (B) e (C) e^{a-b} (D) e^{b-a}

【解1】直接法 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-a}\right)^x\left(\dfrac{x}{x+b}\right)^x$

1^{∞} 1^{∞}

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{-x}$$

$$= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b}$$

【例3】极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x =$

(A) 1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

e^{-b}　　e^{b}

【解2】排除法　$a=0$

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+b}\right)^x = e^{-b}.$$

2016 (二.三)

【例4】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

1^{∞}

【解1】(标准答案)因为 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}\overset{①}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x}\cdot\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}$$

$$\overset{②}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}$$

$$\overset{③}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x-3\sin x-x\cos x}{12x}$$

$$=\frac{1}{3}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$.

1^∞

【例4】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

$\cancel{= \lim\limits_{x\to 0}(1+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}}$

$\lim \dfrac{2x\sin x}{x^4} = \infty$

【解2】① 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}[1 - 2\sin^2 x + 2x\sin x]^{\frac{1}{x^4}}$

原式 $= e^\infty = \infty$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2 x + 2x\sin x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x(x - \sin x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\dfrac{x^3}{6}}{x^4} = \dfrac{1}{3}$

$2x \quad \frac{1}{6}x^3$

倒数 $= \dfrac{1}{\infty} = 0$

③ 原式 $= e^{\frac{1}{3}}$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x$

$\cancel{\lim\limits_{x\to 0}(1)^{\frac{1}{x}} = 1}$

6. "$\infty^0, 0^0$" 型极限

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\,\ln^{1000} x = 0$$

$$0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} x^{\alpha}\ln^{n} x = 0 \qquad \alpha>0,\ n正整数$$

$$\lim[f(x)]^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)}$$

0^0

0^0

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0 = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

【例1】求极限 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{(x^x-1)}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{(x^x-1)} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{(x^x-1)\ln x}$

$0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to0^+}(x^x-1)\ln x = \lim_{x\to0^+}(e^{x\ln x}-1)\ln x$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln^2 x = 0$$

7种

① $\frac{0}{0}$

$0\cdot\infty$

$$= \lim_{x\to0^+} x\ln^2 x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{-\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$$

② 1^∞

原式 $=1$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$$

（二）数列的极限

1. 不定式的极限

∞、0

1、2 3 . . .

【例1】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\arctan n-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\frac{0}{0}$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan n-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{n}}$ $\neq$ $\dfrac{\dfrac{1}{1+n^2}}{-\dfrac{1}{n^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}$ （改写成函数极限）

洛

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-1$

1^∞

【例2】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right]^n$ $= \cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{e}{e}\right]^n = 1}$

$\cancel{\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \ne \lim\limits_{x\to0}(1)^{\frac{1}{x}} = 1}$

$(a^n)^m = a^{nm}$

$\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n^2\cdot\frac{1}{n}}}{e^n} = 1}$

$\lim e^{(\quad)}$

【解】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}}{e}\right]^n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})}}{e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n}$

$x\to0$

$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln(1+\frac{1}{n})\right]$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)^n = \frac{B^n}{A^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right] = \lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{2}$$

则 原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$.

2.n 项和的数列极限

常用方法：1）夹逼原理　2）定积分定义　3）级数求和

【例1】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right]$

小　大

【解】由于 $\dfrac{n^2}{\underbrace{n^2+n}_{大}}\le\left[\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right]\le\dfrac{n^2}{\underbrace{n^2+1}_{小}}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right]=1$

【例2】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right]$

$n+1$ 项

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{n^2}{n^2+n^2}\leqslant[\quad]\leqslant\frac{n^2}{n^2+1^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\lim\sum f(\xi_k)\Delta x_k$$

【注】先提“可爱因子” $\dfrac{1}{n}$

一种常见的极限式 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

8:06

小结:

1.变化部分是主体次量级，用夹逼原理.

2.变化部分与主体同量级，用定积分定义；

【例1】求极限 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right]$

主体　变

夹

$\frac{变}{主}=\frac{n}{n^2}\to 0$　次量级

【例2】求极限 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$

主体　变

定积分

$\frac{变}{主}=\frac{n^2}{n^2}\to 1$　同量级

$A\neq 0$

【例3】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n})$$ （提可爱因子）

$$=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{4}$$

【例4】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$；

1998

次 夹

$\dfrac{\text{变}}{\text{主}}\to 0$

夹+定

主大 小

$\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}$

【解】 $\dfrac{1}{n+1}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)\le\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

$\dfrac{1}{n}\to 0$

$$\le\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right)<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right)$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi\right)=\int_0^1\sin(\pi x)dx=\frac{2}{\pi}$$

【例5】设 $x_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ ________.

【分析】由级数定义知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$，考虑幂级数

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = S(\frac{1}{2})$，

所以，先求 $S(x)$.

【解】 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$

【注】本题数学二不要求.

【例6】 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\limits_{1\le i\le m} a_i$，其中

$a_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$，并利用该结论求下列极限

1） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n} = 3$

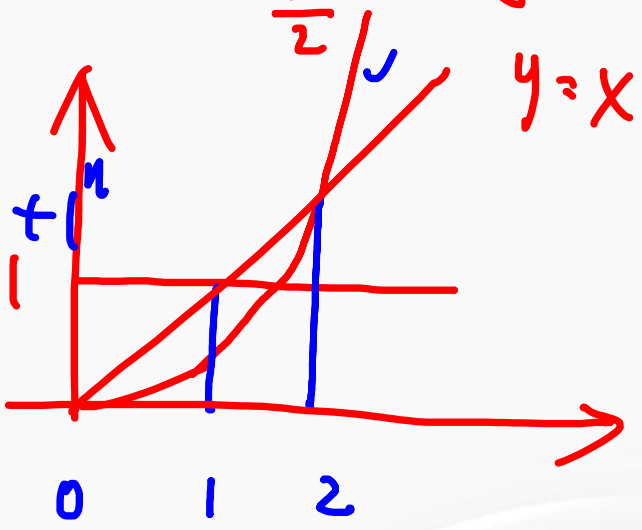
2） $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}} \quad (0<a<b)$

$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n} \to \frac{1}{a}$

3） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n},(x\ge 0)$

$\sqrt[n]{1+1^n+\cdots+1^n}$

$= \max\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\}$



3. n项连乘的数列极限

常用方法: 1）夹逼原理 2）取对数化为n项和

【例1】设 $a_n=\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

【解】显然 $a_n\le 1$，又

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}}=\sqrt[n]{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}}\ge\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}=1$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

$b_n\le a_n\le 1$

$b_n\to 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\ln\sqrt[n]{n}=\frac{\ln n}{n}\to 0$

$\checkmark$ $\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+n)^n}$ $\frac{n+1}{n}\to 1$ $\frac{n+n}{n}\to 2$ $\checkmark$

【例2】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\cdot(n+2)\cdots(n+n)}$

小 大

【解】 令 $y_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)]-\ln n\right]$$

① 夹

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)-n\ln n]$$

② 顶对积

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right]$$

$$=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$$

则 原式 $=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$

【注】 同样的方法可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$. $\checkmark$

难

4.递推关系 $x_1=a,x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\dots)$ 定义的数列

常用方法： **方法1：** ① 难 先证 $\{x_n\}$ 收敛（单调有界准则），然后等式

② $x_{n+1}=f(x_n)$ 两端取极限得 $A=f(A)$，由此求得极限 A

方法2： ① 先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，然后等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两端取极限

解得 A，② 最后再证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 难

$x_1\le x_2\le x_3 \cdots\cdots$

$f(x_1)\le f(x_2)$

单调性判定常用三种方法

1) $x_{n+1}-x_n\ge 0\,(\le 0)$,　　2）若 $\{x_n\}$ 不变号，且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\ge 1\,(\le 1)$,

* 3）设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_1=a,x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\dots)$ 所确定

$x_1\le x_2\ge x_3\le x_4$

$f(x_1)\ge f(x_2)$

（1）若 $f(x)$ 单调增，则

当 $x_1\le x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调增；当 $x_1\ge x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调减；

（2）若 $f(x)$ 单调减，则 $\{x_n\}$ 不单调；

【例1】设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}, \quad (n = 1,2,\cdots),$

证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限。

常用不等式

$2ab \le a^2+b^2$

1) $2ab \le a^2 + b^2$

2) $\sin x < x < \tan x$ $\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})$

3) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ $\quad x\in(0,+\infty)$

4) $1 + x \le e^x$

【证】① 由 $0 < x_1 < 3, \; x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$ 知，$0 < x_n < 3,$

从而有 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)} \overset{(*)}{\le} \frac{1}{2}[(\sqrt{x_n})^2 + (\sqrt{3 - x_n})^2] = \frac{3}{2}.$

① 而 $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3 - x_n)} - x_n = \frac{x_n(3 - x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n(3 - x_n)} + x_n}$

$$= \frac{x_n\underbrace{(3 - 2x_n)}_{\ge 0}}{\sqrt{x_n(3 - x_n)} + x_n} \ge 0$$

② 则 $\{x_n\}$ 单调增，或者由 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{3}{x_n} - 1} \ge \sqrt{\frac{3}{3/2} - 1} = 1$

知$\{x_n\}$递增，又$\{x_n\}$上有界，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，

2 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a=\sqrt{a(3-a)}$，

$0 < x_n < 3$

由此解得 $a=\dfrac{3}{2}$ 或 $a=0$，（舍去）

$x_n \nearrow$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{2}$

$A=\sqrt{6+A}$. ✓ $x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}$ 3, −2.

【例2】 设 $x_1=\sqrt{6}, x_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}, \cdots, x_n=\sqrt{6+\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}_{x_{n-1}}}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【解1】 ① $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，令 $f(x)=\sqrt{6+x}$，由于

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{6+x}}>0,$$ 则 $f(x)$ 单调增，又 $x_1<x_2$，

则 $\{x_n\}$ 单调增.

$x_n \le M$?

$\boxed{x_n \le 3}$ ✓

$x_n \to A$ ✓

$x_n \nearrow$ $=3$.

$x_n \le A$

$x_1=\sqrt{6}<3$，若 $x_{n-1}<3$，则 $x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}<3$，

从而，数列 $\{x_n\}$ 上有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. 则

② $$a=\sqrt{6+a}$$ ✓

解得 $a=3$ 或 $a=-2$（舍去）则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$.

【例2】设 $x_1=\sqrt{6}, x_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}, \cdots, x_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}$，

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【解2】直接证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

由 $x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}$ 知

$$|x_n-3| = \left|\sqrt{6+x_{n-1}}-3\right| = \frac{|x_{n-1}-3|}{\sqrt{6+x_{n-1}}+3} < \frac{1}{3}|x_{n-1}-3|$$

$$< \cdots < \frac{1}{3^{n-1}}|x_1-3| \to 0, (n\to\infty),$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$f(x_{n-1})$

$0<A<1$

$|x_n-a| \le A|x_{n-1}-a|$

$\le A^2|x_{n-2}-a|$

$\cdots$

$\le A^{n-1}|x_1-a| \to 0$

【例3】设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 - e^{-x_n}, \ n = 1,2,\cdots.$

$f(x) = e^x$

$x_{n+1} = f(x_n)$

(1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$.

$\dfrac{0}{0}$

$f(x)$

【证】(1) 由于 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 - e^{-x_n}$，由归纳法可知 $x_n > 0.$

$x > 0$

① $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1 - e^{-x_n}}{x_n} = \dfrac{e^0 - e^{-x_n}}{x_n} = e^{\xi} < 1$

x_n

$a - 1 + e^{-a} = 0$

$f(x) = x - 1 + e^{-x}$

$f(0) = 0$

② $x_{n+1} - x_n = (1 - x_n) - e^{-x_n} \le 0 \qquad (1 + x \le e^x)$

$f'(x) = 1 - e^{-x} \ge 0$

③ $f(x) = 1 - e^{-x}, \quad f'(x) = e^{-x} > 0, \quad \{x_n\}$ 单调，$0 < x_n < 1$

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a = 1 - e^{-a}, a = 0.$

【例3】设 $x_1>0, x_{n+1}=1-e^{-x_n},\ n=1,2,\cdots$.

(1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$.

【解】(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1-e^{-x_n})}{x_n-1+e^{-x_n}}=\lim_{x\to0}\frac{x(1-e^{-x})}{x-1+e^{-x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x-1+e^{-x}}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{1-e^{-x}}=2$$

【例4】设 $x_1=2, x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【分析】令 $f(x)=2+\dfrac{1}{x}$，则 $x_{n+1}=f(x_n)$，显然 $f(x)$ 在 $x>0$ 处单调减，则 $\{x_n\}$ 不具有单调性，因此用方法2.

【解】令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(2+\dfrac{1}{x_n})$，即 $a=2+\dfrac{1}{a}$，

则 $a=1\pm\sqrt{2}$，由于 $x_n\ge 2$，

则 $a=1+\sqrt{2}$. 以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1+\sqrt{2}$.

$$|x_n-a|=\left|(2+\frac{1}{x_{n-1}})-(2+\frac{1}{a})\right|=\left|\frac{x_{n-1}-a}{ax_{n-1}}\right|\le\frac{|x_{n-1}-a|}{2a}$$

$$\le\frac{|x_{n-1}-a|}{2}\le\frac{|x_{n-2}-a|}{2^2}\le\cdots\le\frac{|x_1-a|}{2^{n-1}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

【例5】 设 $f(x)$ 可微，且 $0<f'(x)\le\dfrac{1}{2+x^2}$，数列 $x_0=A,\ x_n=f(x_{n-1}),\ n=1,2\cdots.$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且是方程 $f(x)=x$ 的唯一实根.

① $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$

【证1】 由于 $f'(x)>0$，则数列 $\{x_n\}$ 单调，又

② $\int_{x_0}^{x}f'(t)dt=f(x)-f(x_0)$

$$|x_n|=|f(x_{n-1})|=\left|f(x_0)+\int_{x_0}^{x_{n-1}}f'(x)dx\right|\le|f(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x_{n-1}}f'(x)dx\right|$$

A

$f(x_{n-1})-f(x_0)$

$$\le|f(x_0)|+\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2+x^2}\right|$$

$\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{x}{\sqrt2}$

$\varphi(x)=\boxed{x-f(x)}=0$

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\boxed{a=f(a)}$.

又设 $\varphi(x)=x-f(x)$，则 $\varphi'(x)=1-f'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调增，

a 是方程 $x=f(x)$ 的唯一实根.

【例5】设 $f(x)$ 可微，且 $0<f'(x)\le\dfrac{1}{2+x^2}\le\dfrac{1}{2}$，数列 $x_0=A, x_n=f(x_{n-1}), n=1,2\cdots$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且是方程 $f(x)=x$ 的唯一实根.

【证2】（数学二不要求）数列 $\{x_n\}$ 收敛等价于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$ 收敛.

$$S_n=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_0$$

$$|x_n-x_{n-1}|=|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|$$

$$=|f'(\xi_{n-1})||x_{n-1}-x_{n-2}| \qquad \text{（拉格朗日定理）}$$

$$\le\frac{1}{2}|x_{n-1}-x_{n-2}|\cdots\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1-x_0| \quad 收$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$ 收敛.

微信扫码，关注【公众号：武忠祥老师】

定期更新：每日一题、数学资料、阶段备考等考研干货

还不关注，那你就慢了