高数精讲（6）

6	导数与微分的概念及其应用，导数公式及求导法则	P49-P60

下次 p60-70

主讲 武 忠 祥 教授

第二章　一元函数微分学

第一节　导数与微分

第二节　导数应用

第一节 导数与微分

本节内容要点

一. 考试内容要点精讲

概念
（一）导数的概念 *
（二）微分的概念

难点
（三）导数与微分的几何意义

理论
（四）连续 可导 可微之间的关系

方法
（五）求导公式
（六）求导法则 —— 重点

二. 常考题型方法与技巧

题型一　导数的概念　难

题型二　导数的几何意义

题型三　导数与微分的计算　重

一. 考试内容要点精讲

(一) 导数的概念

动 定

x_0 $x_0+\Delta x$

导数: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

左导数: $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

右导数: $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

定理 可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数都存在且相等

①线性.
②主部.

(二) 微分的概念

若 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可微**. 称 $A\Delta x$ 为**微分**, 记为 $\mathrm{d}y=A\Delta x$

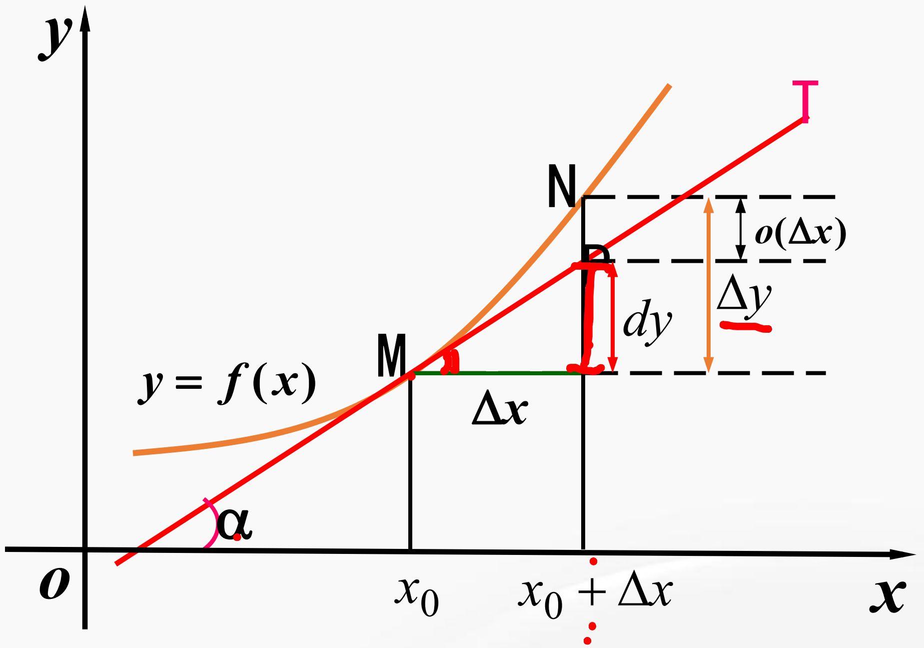
定理 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且有 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x$.

（三）导数与微分的几何意义

导数 $f'(x_0)=\tan\alpha$ **切线的斜率**

微分 $dy=f'(x_0)dx$ **切线上的增量**

$\Delta y\approx dy$



(四) 连续,可导,可微之间的关系

连续 $\underset{\not\leftarrow}{\overset{|x|}{\rightleftarrows}}$ 可导

$|x|$

可微

一阶

$f(x)$ 可导 $\not\Rightarrow$ $f'(x)$ 连续　$f(x)$ 连续 ✓

$f(x)$ 可导 $\not\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

① 处处可导, 但

② $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在.

【例】设 $f(x)$ 可导, 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0 f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$. $\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0 f(x)-x_0 f(x_0)+x_0 f(x_0)-x f(x_0)}{x-x_0}$

【解】原式 $\overset{?}{\cancel{=}}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0 f'(x)-f'(x_0)}{1}\overset{?}{\cancel{=}}x_0 f'(x_0)-f(x_0)$ ✓

$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在　$f'(x)$ 连续

经典错误 标准0分

[证] 1) $x\neq 0$, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$　存在　不存在

$x=0$, $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在

条件	使用洛必达法则最多可用到
1） $f(x)$ n 阶可导	$f^{(n-1)}(x)$
2） $f(x)$ n 阶连续可导	$f^{(n)}(x)$

$$\frac{f'(x) + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{2x}$$

$$\frac{f(x)+x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}$$

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ✓

(五) 求导公式

1) $(C)' = 0$

2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

3) $(a^x)' = a^x \ln a$

4) $(e^x)' = e^x$

5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

6) $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

7) $(\sin x)' = \cos x$

8) $(\cos x)' = -\sin x$

9) $(\tan x)' = \sec^2 x$

10) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

11) $(\sec x)' = \sec x \tan x$

12) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16) $(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

基本 ✓

初等 ✓

$+ \; - \; \times \; \div$

复合

（六）求导法则

(1) 有理运算法则

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 2) $(uv)' = u'v + uv'$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$

初等.

(2) 复合函数求导法

设 $u = \varphi(x),\ y = f(u)$ 可导，则 $y = f[\varphi(x)]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$$

(3) 隐函数求导法

$$F(x,y)=0 \Rightarrow y=y(x) \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

(4) 反函数的导数

若 $x=\varphi(y)$ 在某区间上单调、可导，且 $\varphi'(y)\neq 0,$

则其反函数 $y=f(x)$ 也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

(5）参数方程求导法：

设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $(\alpha<t<\beta)$ 确定的函数，则

1）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

2）若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

(6）对数求导法：

(7) 高阶导数:

1) 定义:

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

2) 常用公式:

1) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2});$

2) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2});$

3) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)};$

4) $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}.$

$(a+b)^n$

二. 常考题型的方法与技巧

题型一 导数的概念

题型二 导数的几何意义

题型三 导数与微分的计算

题型一 导数与微分的概念

1）利用导数定义求极限

2）利用导数定义求导数

3）利用导数定义判断函数的可导性 ※难

(一) 利用导数定义求极限

$f'(x)=2$　　$f(x)=2x+3$　　$f(-1)$

【例1】设 $f(-1)=1, f'(-1)=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2-3x)-1}{x-1}=$ __________.

【解1】
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2-3x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f[-1+3(1-x)]-f(-1)}{\boxed{3(1-x)}}\cdot\frac{3(1-x)}{x-1}$$
$$=f'(-1)\cdot(-3)=-6$$

$$f'(x_0)\xlongequal{\square\to 0}\lim\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$$

*【解2】取 $f(x)=2x+3$, 显然满足 $f(-1)=1, f'(-1)=2$,

代入得
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2-3x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(2-3x)+3-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{6(1-x)}{x-1}=-6$$

【例2】设 $f'(a)$ 存在，且 $f(a)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n$. 1^∞

【解】① $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{f(a+1/n)-f(a)}{f(a)}\right]^n$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(a+1/n)-f(a)}{f(a)}\cdot n=\dfrac{1}{f(a)}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(a+1/n)-f(a)}{1/n}=\dfrac{f'(a)}{f(a)}$

③ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

【例3】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$$

(A) $-2f'(0)$. -2　(B) $-f'(0)$. -1　(C) $f'(0)$. $=1$　(D) 0

【解1】直接法

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$$

【解2】排除法　取 $f(x)=x$，则 $f'(0)=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^3}{x^3}=-1$$

【例4】设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2})=$ ________.

【解1】由曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线可知，$f(1)=0$，$f'(1)=(2x-1)\big|_{x=1}=1$

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2})=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{-2n}{n+2}}\cdot\frac{f(1+\boxed{\frac{-2}{n+2}})-f(1)}{\boxed{\frac{-2}{n+2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\,\frac{-2}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+2}$$

$$=-2f'(1)=-2$$

【解2】$f(x)=x-1$

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2})=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+2}-1\right)=-2$$

(二) 利用导数定义求导数

$f(0)=0$

【例1】 设函数 $f(x)=(e^{x}-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$

$g(x)$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^{n}(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^{n}n!$.

① $f'(x)$
② $f(0)$

【解1】 显然 $f(0)=0$，则由导数定义得

$(-1)(-2)\quad(-(n-1))$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{x}-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$$=(1-2)(1-3)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

【解2】 显然 $f(0)=0$，令 $g(x)=(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，则

$-1\quad -(n-1)$

$f(x)=(e^{x}-1)g(x)$.　$f'(x)=e^{x}g(x)+(e^{x}-1)g'(x)$

$f'(0)=g(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

【例2】设 $f(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 则 $f'(0)=$ ________.

【解】$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}-1}{x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sin x}}{x}=1$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

$(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1\sim\alpha(x)\beta(x)$

$\alpha(x)\to 0$

$\alpha(x)\beta(x)\to 0$

【例】2022考研 数学（二）第17题（10分）

$f(1)=0$

$f(1)-3f(1)=-2f(1)=0$

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$.

【解】由题设知 $f(1)=0$，

$x^2 \sim e^{x^2}-1$

$x^2 \sim \sin^2 x$

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-f(1)}{e^{x^2}-1}-3\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x)-f(1)}{\sin^2 x}$$

$$=f'(1)-3f'(1)=-2f'(1)$$

$$\Rightarrow f'(1)=-1$$

$\varphi(0)=0$

$\varphi(x)$

$|x^3|=x^2|x|$

$\varphi(x)|x-a|$

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$|x^n|=x^n$

$|x^n|$

(三) 利用导数定义判断函数的可导性

【例1】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题中错误的是

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

10:05

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$;

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$;

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在；

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在；

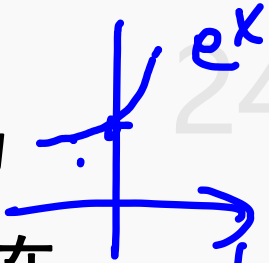
【解1】直接法，

令 $\boxed{f(x)=|x|,}$ 则 $f'(0)$ 不存在，但

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0,$$ 故应选（D）

【解2】排除法：即说明（A）（B）（C）都正确.

【例2】设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为



$-1\le \cos h\le 1$

$h\to 0$

$1-\cos h\ge 0$

A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在；　　B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在；

C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在；　　D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

【解1】 直接法

≥ 0

$1-\cos h\to 0^+$

$\Delta x\to 0^+$

$\Delta x\to 0^-$

$\Delta x\to 0$

由于 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}$

$=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{\boxed{1-e^h}}$ $\to 0^-$　$h\to 0^+$　　$(1-e^h=t)$

$=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ $\to 0^+$ $=-f'(0)$　$h\to 0^-$　故应选（B）.

$\square\to 0$

$f'(x_0)$存在 $\underset{\square\to 0}{\overset{\square\ne 0}{\Longleftrightarrow}}$ $\lim\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$ 存在

$\square\to 0$ ✓

$\square\ne 0$ ✓

$\square\to 0^+$　$\square\to 0^-$ ✗　✓ ?

【解2】 排除法 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{\boxed{1-\cos h}}=\dfrac{1}{2}f'_+(0)$

【例2】设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

A) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在；　B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在；

C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在；　D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

$-f(0)$

$\sin x<x<\tan x$

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$h-\sin h\to0^{\pm}$

∞　动　动

存.

$x-\sin x<0$　$\neq0$　$x-\sin x>0$

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)=\lim_{h\to0}\frac{f(\boxed{h-\sinh})-f(0)}{\boxed{h-\sinh}}\cdot\frac{h-\sinh}{h^2}\to0$$

存.　存.　存.

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to0}\frac{[f(2h)-f(0)]-[f(h)-f(0)]}{h}$$

$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq0\\0, & x=0\end{cases}$

$\to 0^+$

$\to 0^-$ ×

【例2】设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

× (A) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在；　✓ (B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在；

× (C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在；　(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在. ×

3阶

$$\lim\frac{f(\varphi(h))}{\psi(h)}$$

$$=\lim\frac{\frac{f(\varphi(h))-f(0)}{\varphi(h)}}{\frac{\psi(h)}{\varphi(h)}}\to A\neq0$$

① $\varphi(h)\to 0^+$, $\to 0^-$

② $\varphi(h)$ 与 $\psi(h)$ 同阶

【例3】设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的.

(A) 充分必要条件. (B) 充分条件但非必要条件.

(C) 必要条件但非充分条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

【解】由于 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)=f(x)+f(x)|\sin x|$

令 $\varphi(x)=f(x)|\sin x|$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=\begin{cases} f(0), & x\to 0^+ \\ -f(0), & x\to 0^- \end{cases}$$

$f(0)=0$

注：常用的结论：设 $f(x)=\varphi(x)|x-a|$，其 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $\varphi(a)=0$.

$x(x^2-1)$　　$\pm1,\ 0$

【例4】函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导的点的个数是

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) 0.

$(x+1)(x-2)$

【解1】 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|=(x^2-x-2)|x+1||x-1||x|$　　$f(x)=\varphi(x)|x-a|$

在 $x=1$ 处 $f(x)=\varphi(x)|x-1|$, $\varphi(x)=(x^2-x-2)|x+1||x|$, $\varphi(1)\neq 0$, 不可导

在 $x=0$ 处 $f(x)=\varphi(x)|x|$, $\varphi(x)=(x^2-x-2)|x+1||x-1|$, $\varphi(0)\neq 0$, 不可导　　$x^3|x|$

在 $x=-1$ 处 $f(x)=\varphi(x)|x+1|$, $\varphi(x)=(x^2-x-2)|x||x-1|$, $\varphi(-1)=0$, 可导　　3阶

【解2】 $|x|$ 在 $x=0$ 不可导,　　$x=1$, $x=0$ 不可导.　　$x^n|x|$　n阶

$x|x|$ 在 $x=0$ 可导 一阶　　$x^2|x|$ 在 $x=0$ 2阶可.

【例】设 $f(x)=|x^3-1|g(x)$, 其中 $g(x)$ 连续, 则 $g(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的（ ）

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

✓(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

$$f(x)=g(x)|x^2+x+1|\cdot|x-1|$$

$\varphi(x)$

$\varphi(1)=0$ ✓

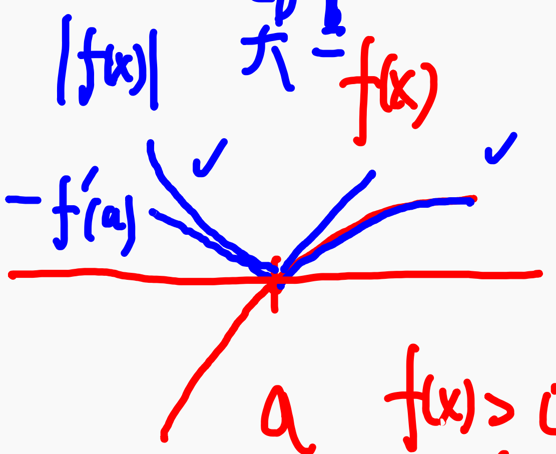
$$f(x)=\varphi(x)|x-a|$$

【例5】设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

A) $f(a)=0$，且 $f'(a)=0$；　B) $f(a)=0$，且 $f'(a)\neq 0$；

C) $f(a)>0$，且 $f'(a)>0$；　D) $f(a)<0$，且 $f'(a)<0$.

$f(a)>0$



【解1】排除法

令 $f(x)=(x-a)^2$，则（A）不正确.

若 $f(a)>0$，则在 $x=a$ 的某邻域内 $f(x)>0$，此时

$|f(x)|=f(x)$，故（C）不正确.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)>0 \to$

$|f(x)|=-f(x)$

同理（D）不正确，故应选（B）.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)>0$

$f(x)>0$

【解2】直接法　令 $\varphi(x)=|f(x)|$

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}=\begin{cases}|f'(a)| & x\to a^+\\ -|f'(a)| & x\to a^-\end{cases}$$

【注】

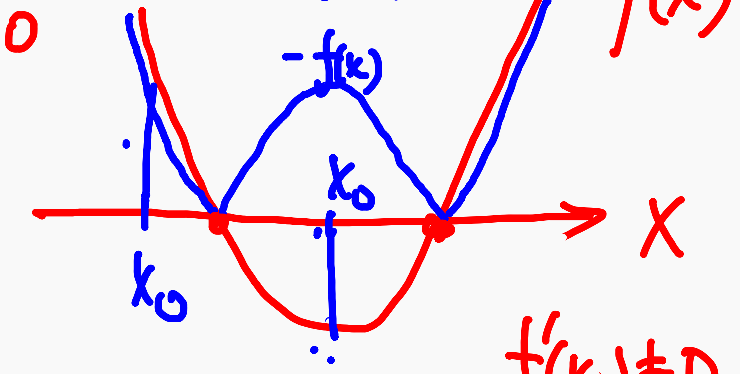
1) $f(x)$ 可导 $\not\Leftrightarrow$ $|f(x)|$ 可导

$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$

$|f(x)|$

$|f(x)|=f(x)$

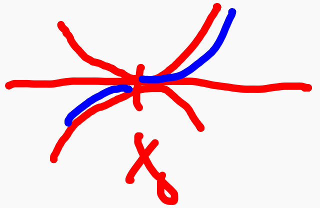
$|f(x)|=-f(x)$



$f'(x_0)\neq 0$

$f'(x_0)=0$

2) 设 $f(x)$ 连续



(1) 若 $f(x_0)\neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导

(2) 若 $f(x_0)=0$, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f'(x_0)=0$

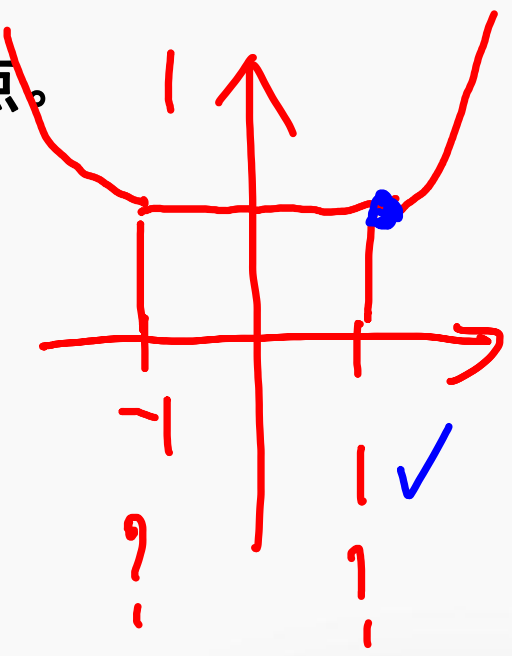
【例6】 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$

（A）处处可导；　　（B）恰有一个不可导点；

（C）恰有两个不可导点；　　（D）至少有三个不可导点。

【解】 本题中 $a_1=1, a_2=|x|^3$，则

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\max(a_1,a_2)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ |x|^3, & |x|>1\end{cases}$$



【例7】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$上二阶可导, $f(0)=0$,

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

1） 确定 a 使 $g(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

2） 证明对以上确定的 $a, g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续一阶导数.

① 处处可导.

② f(x) 连续.

f可导

f可导, g≠0

⇒ $\left(\frac{f}{g}\right)'$ 可导.

【解】 1) 显然 $g(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续，而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$

则若 $a=f'(0)$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

2） 当 $x\neq 0$ 时, $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$, 且 $g'(x)$ 连续.

二.

当 $x=0$ 时, $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}$$

$g'(0)$存在

$$\lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(f'(x)-f'(0))+xf'(0)-f(x)}{x^2}$$

$f''(0)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$

$$=f''(0)-\frac{f''(0)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=g'(0)$$

$$=g'(0)$$

微信扫码，关注【公众号：武忠祥老师】

定期更新：每日一题、数学资料、阶段备考等考研干货

还不关注，那你就慢了