高数精讲（7）

7	导数的几何意义，导数与微分的计算，微分中值定理及应用	P60-P70

下. P70-81

主讲 武 忠 祥 教授

题型二　导数的几何意义

【例1】曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^{y}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ________.

$k_{切}=\dfrac{dy}{dx}$

【解】等式 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^{y}$ 两端对 x 求导得

$$\sec^{2}\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)(1+y')=\mathrm{e}^{y}\,y'$$

直

将 $x=0, y=0$ 代入上式得 $y'(0)=-2,$

切线方程为 $y=-2x$

【例2】曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln\sqrt{1+t^2}, \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为

$= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$

$k_{切} = \frac{dy}{dx}$

__________.

【解】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t,$

当 $t=1$ 时 $\frac{dy}{dx} = 1, x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{1}{2}\ln 2,$

法线方程为 $y - \frac{1}{2}\ln 2 = -(x - \frac{\pi}{4})$

即 $x + y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

【例3】已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos\theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线和法线的直角坐标方程。

$k_{切} = \frac{dy}{dx}$

【解】由 $r = 1 - \cos\theta$ 可知该曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$* \begin{cases} x = (1-\cos\theta)\cos\theta \\ y = (1-\cos\theta)\sin\theta, \end{cases}$$

则 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta - \sin\theta(1-\cos\theta)}$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时 $\frac{dy}{dx} = -1,\ x = 0,\ y = 1,$

切线和法线的直角坐标方程分别为 $y - 1 = -x$ $\quad$ $y - 1 = x$

【例4】曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x\ (a\neq 0)$ 相切，则 $a=$

(A) 4e　　(B) 3e　　(C) 2e　　(D) e

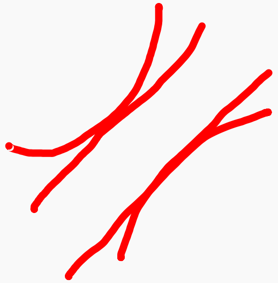
$2x=\frac{a}{x}$ ✓

【解】由曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x\ (a\neq 0)$ 相切可知，

$$\begin{cases} x^2=a\ln x \\ 2x=\dfrac{a}{x} \end{cases}$$

$\frac{a}{2}=a\ln x$　　$x=e^{\frac{1}{2}}$

$2x^2=a$



由上式解的 $a=2e$，故应选（C）.

题型三 导数与微分的计算

(一) 复合函数的导数

【例1】设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 则 $f''(0)=$ ______.

【解】 应填 0.

$f^{(2n)}(0)=0$

因为 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数，$f''(x)$ 为奇函数

故 $f''(0)=0.$

【例2】已知 $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________.

【解】 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\left(\frac{12}{(3x+2)^2}\right)\bigg|_{x=0}$

$$=f'(-1)\cdot 3=3\arctan 1=\frac{3}{4}\pi$$

【例3】 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^4, & x < 0. \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases}$

若 $y=f(g(x))$, 则

(A) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=1$; X

X (B) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ 不存在;

(C) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$;

(D) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 不存在.

$\dfrac{-\sqrt{x}}{x}\to\infty$

存 存.

$g(1)=-1$ ① $f'(-1)\cdot g'(1)$ ✓ ?

② ✓

$g'(0)$不存在

【解】 (Ⅰ)由于 $g'(1)=\left.\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1}=-\dfrac{1}{2}$, $g(1)=-1$, $f'(-1)=\left.4x^3\right|_{x=-1}=-4$,

则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=f'(-1)\cdot g'(1)=(-\dfrac{1}{2})\cdot(-4)=2$

【例3】设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0, \\ x^4, & x<0. \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, & x>0, \\ x^2, & x\le 0. \end{cases}$

若 $y=f(g(x))$，则

(A) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=1$；　　(B) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ 不存在；

(C) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$；　　(D) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 不存在.

【解】显然 $g'(0)$ 不存在，但由此不能断定 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 不存在. 事实上

$$f(g(x))=\begin{cases} x^2; & x>0; \\ x^4; & x\le 0. \end{cases}$$

则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$. 故应选（C）.

【例4】设 $\varphi(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0, \end{cases}$ 函数 $f(x)$ 可导，求

$F(x)=f[\varphi(x)]$ 的导数.

存 $f'(0)$　　存 $\varphi'(0)$

【解】$F(x)=f[\varphi(x)]=\begin{cases} f(x^3\sin\dfrac{1}{x}) & x\neq 0\\ f(0) & x=0 \end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，$F'(x)=f'(x^3\sin\dfrac{1}{x})(3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x})$

当 $x=0$ 时，$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\dfrac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$

$$F'(0)=f'(0)\varphi'(0)=0$$

【注】 $F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^3\sin\frac{1}{x})-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^3\sin\frac{1}{x})-f(0)}{x^3\sin\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x}$

$\Box\to0$

$\lim\dfrac{f(x_0+\Box)-f(x_0)}{\Box}\ \Box\neq0 = f'(x_0)$

存? 存

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^3\sin\frac{1}{x})-f(0)}{x^3\sin\frac{1}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x}$ $\to 0$

不存在 $\neq0$

$=f'(0)\cdot0=0$

“经典错误”

(二) 隐函数的导数

【例1】设 $y=y(x)$ 由 $y=\tan(x+y)$ 所确定. 试求 y', y''

【解】 等式 $y=\tan(x+y)$ 两端对 x 求导得

$$y'=\sec^2(x+y)(1+y')$$

化简 !!!

$$=[1+\tan^2(x+y)](1+y')$$

$$=(1+y^2)(1+y')$$

$$y'=-\frac{1}{y^2}-1$$

$$y''=\frac{2y'}{y^3}=-\frac{2}{y^3}(\frac{1}{y^2}+1)$$

【例2】设函数 $y=y(x)$ 由 $y-xe^{y}=1$ 所确定，试求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

【解】 由 $y-xe^{y}=1$ 知，当 $x=0$ 时 $y=1$, 且

$$y'-e^{y}-xy'e^{y}=0$$

则 $y'(0)=e.$

$$y''-y'e^{y}-y'e^{y}-x(y'e^{y})'=0$$

将 $x=0, y=1, y'(0)=e$ 代入上式得

$$y''(0)=2e^{2}$$

【例3】 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin x-\int_x^y \varphi(u)du=0$ 所确定，其中可导函数 $\varphi(u)>0$, 且 $\varphi(0)=\varphi'(0)=1$, 求 $y''(0)$.

【解】 在 $\sin x-\int_x^y \varphi(u)du=0$ 中令 $x=0$ 得 $y=0$

等式 $\sin x-\int_x^y \varphi(u)du=0$ 两端对 x 求导得

$$\cos x-[\varphi(y)y'-\varphi(x)]=0$$

$$y'(0)=2$$

$$-\sin x-[\varphi'(y)y'^2+\varphi(y)y''-\varphi'(x)]=0$$

$$y''(0)=-3$$

$\int_a^b f(u)dx=0$ $\nleftarrow$ $f(x)\equiv 0$

$-\int_0^y \varphi(u)du=0$ $a<b$

$\int_0^y \varphi(u)du=0$

2π

$\int_0^y \sin u\,du=0$ $\rightarrow$ $y=0$ $\leftarrow$

(三) 参数方程的导数

公式： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$； $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}$；

方法： 一阶导数代公式，二阶导数利用

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{1}{x'(t)}.$$

【例1】设 $f''(t)\neq 0$，又 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(t)=\frac{d}{dt}(t)\frac{dt}{dx}=1\cdot\frac{1}{x'(t)}=\frac{1}{f''(t)}$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=1$

$\dfrac{1}{x'(t)}$

【例2】设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

$\Rightarrow y=y(x)$

【解】 本题最简单的方法是利用公式

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{y''(0)x'(0)-x''(0)y'(0)}{x'^3(0)}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{2e^2-3e}{4}$$

(四) 反函数求导法

【例】设 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=\varphi(y)$，且 $f(x)=\int_1^{2x}e^{t^2}dt+1$，则 $\varphi''(1)=$ ______.

【解】 由反函数导数公式得 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

$$\varphi''(y)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}$$

由 $f(x)=\int_1^{2x}e^{t^2}dt+1$ 知，$y=1$ 时 $x=\dfrac{1}{2}$

$$f'(x)=2e^{4x^2},\ f''(x)=16xe^{4x^2}$$

$$\varphi''(1)=-\frac{f''(\frac{1}{2})}{[f'(\frac{1}{2})]^3}=-\frac{8e}{8e^3}=-\frac{1}{e^2}$$

y y=1

(五) 对数求导法

对数求导法适用于幂指函数、连乘、连除、开方、乘方等.

【例1】设 $y=(1+x^2)^{\sin x}$, 求 y'.

$=e^{\sin x\ln(1+x^2)}$

【解】 $\ln y=\sin x\ln(1+x^2)$

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}$$

$$y'=(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right]$$

【例2】设 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}$，求 y'.

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

【解】 $\ln|y| = \frac{1}{3}[\ln|x+1| + \ln|x+2| - \ln|x| - \ln(1+x^2)]$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}\right]$$

$$y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}\right]$$

(六) 高阶导数

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

常用方法:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

1）代公式;

2）求一阶 y'，二阶 y''，归纳 n 阶导数 $y^{(n)}$;

3）利用泰勒级数（公式）;

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n;$$

纳 $f^{(n)}(x_0)$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

$\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot n!$

$a_n(x-x_0)^n$

$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

公式

【例1】 设 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$，求 $f^{(n)}(x)$.

【解】 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}=\dfrac{x}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2}{x-2}$

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{3}{x-3}\right)^{(n)}-\left(\frac{2}{x-2}\right)^{(n)}$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-3}=(x-3)^{-1}$,

$$\varphi'(x)=(-1)(x-3)^{-2} \qquad \varphi''(x)=(-1)(-2)(x-3)^{-3}$$

$$\varphi^{(n)}(x)=(-1)^n n!(x-3)^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$$

则 $f^{(n)}(x)=\dfrac{3(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}-\dfrac{2(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$

$f^{(n)}(0)$

$\dfrac{1}{1-x}=-\cdots$

$\dfrac{1}{\frac{x}{3}-1}=\dfrac{1}{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}$

$\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}$

$(ax+b)^{-1}$

【例2】 设 $f(x)=e^x\sin x$，求 $f^{(n)}(x)$.

$(uv)^{(n)}$

【解】 $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$

$$=e^x(\sin x+\cos x)$$

$$=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\sin(\alpha+\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sqrt{2}e^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}e^x\left[\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^n e^x\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

【例3】设 $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$，求 $f^{(n)}(x)$.

【解】 $f(x)=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

$f'(x)=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$

$f^{(n)}(x)=-4^{n-1}\sin(4x+(n-1)\frac{\pi}{2})$

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

$(\sin ax)^{(n)}=a^n\sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)$

$(\cos ax)^{(n)}=a^n\cos\left(ax+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

【例4】求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 $n(n>2)$ 阶导数。

【解1】 利用公式 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\,u^{(k)}\,v^{(n-k)}$

令 $u=x^2,\ v=\ln(1+x),$

$u'=2x, u''=2, u^{(k)}=0\ (k>2)$

$[\ln(1+x)]^{(n)}$

$f^{(n)}(0)=C_n^2\ u^{(2)}(0)\ v^{(n-2)}(0)$

$v'=\dfrac{1}{1+x}=(x+1)^{-1},\qquad v''=(-1)(x+1)^{-2}$

$v^{(n-2)}=(-1)^{n-3}(n-3)!(x+1)^{-(n-2)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{(x+1)^{n-2}}\qquad v^{(n-2)}(0)=(-1)^{n-1}(n-3)!$

$f^{(n)}(0)=\dfrac{n(n-1)}{2!}2(-1)^{n-1}(n-3)!=\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

【解2】 $f(x) = x^2(x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots)$

$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$

$= f(0) + \cdots$

$f(x) = x^2\ln(1+x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{n+2}}{n} + \cdots$

$n-2$

$(-1)^{n-3} = (-1)^{n-1}(-1)^{-2}$

$\frac{1}{(-1)^2} = 1$

$\frac{f^{(n)}(0)}{} \quad a_n x^n$

$\frac{(-1)^{n-1}}{n} = a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$a_n = \frac{(-1)^{n-3}}{(n-2)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$a_n =$

则 $f^{(n)}(0) = a_n n! = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(n-2)}$

① 公式

② y', y'' 归纳

③ 展开

$f^{(n)}(x)$

$f^{(n)}(x_0)$

第二节　导数应用

本节内容要点

一. 考试内容要点精讲

$\checkmark$　$\checkmark$

$f'(x)$ - $f(x)$

（一）微分中值定理

（二）极值与最值

（三）曲线的凹向与拐点

（四）曲线的渐近线

（五）平面曲线的曲率（数三不要求）

二. 常考题型方法与技巧

基本

题型一 函数的单调性 极值与最值

题型二 曲线的凹向 拐点 渐近线及曲率

较难

题型三 方程根的存在性及个数

题型四 证明函数不等式

难

题型五 微分中值定理有关的证明题

一．考试内容要点精讲

（一）微分中值定理

罗尔定理

若 1）$f(x)$ 在 $[a,b]$上连续；

2）$f(x)$ 在 (a,b) 内可导；

3）$f(a)=f(b)$;

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $\boxed{f'(\xi)=0.}$

拉格朗日定理

若 1）$f(x)$ 在 $[a,b]$上连续；

2）$f(x)$ 在 (a,b) 内可导；

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).}$

柯西定理

若 1）$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

2）$f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$;

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}.$

泰勒定理（拉格朗日余项）

设 $f(x)$ 在区间 I 上 $(n+1)$ 阶可导, $x_0\in I$, 那么对 $\forall x\in I$,

至少存在一个 ξ, 使

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 在 x_0 与 x 之间.

【注】（1）本质 $f(x)$ $f'(x)$，$f(x)$ $f^{(n)}(x)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

（2）四个中值定理的关系

罗尔定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 柯西中值定理

罗尔定理 $\xleftarrow{f(b)=f(a)}$ 拉格朗日中值定理 $\xleftarrow{F(x)=x}$ 柯西中值定理

拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 泰勒中值定理

泰勒中值定理 $\xrightarrow{n=0}$ 拉格朗日中值定理

举例

$f^{(n+1)}(\xi)$

$f'(\xi)$

$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$

$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$

（二）极值与最值

1. 极值的概念 若 $\exists\delta>0$, 使得

$\forall x\in U(x_0,\delta)$ 恒有 $f(x)\ge f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 取**极小值**.

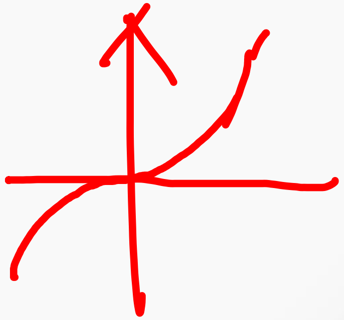
$\forall x\in U(x_0,\delta)$ 恒有 $f(x)\le f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 取**极大值**.

2. 极值的必要条件

若 $f(x)$ 在 x_0 处取得①极值，且在 x_0 处②可导，则

$$\boxed{f'(x_0)=0}$$

极值点 $\overset{|x|}{\not\rightleftarrows}$ 驻点 x^3



可能极值点 $\begin{cases} f'(x_0)=0 \ ✓ \\ f'(x_0)\text{不存在} \ ✓ \end{cases}$

$f(x)$ 可导

3）极值的充分条件

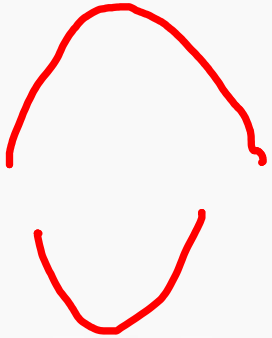
(1) 第一充分条件

1 2

设 $f'(x_0)=0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续），且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导

（1）若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；



（3）若 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 不变号，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值；

(2) 第二充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$, 则

（1）当 $f''(x_0)<0$, $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

（2）当 $f''(x_0)>0$, $f(x)$ 在 x_0 处取极小值.

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

(3) 第三充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 $n(n\geq 2)$ 阶可导, 且

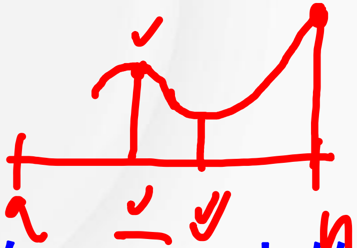
$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 但 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则

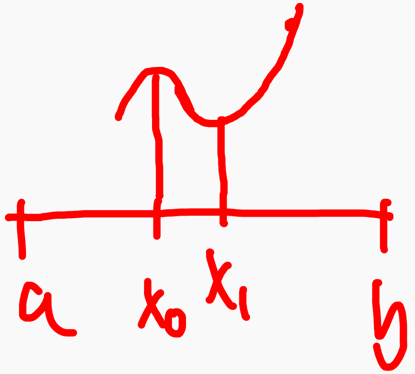
(1) 当 n 为偶数时 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值. 其中当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时取极小值，当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时取极大值.

(2) 当 n 为奇数时 $f(x)$ 在 x_0 处无极值;

$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

4）函数的最值





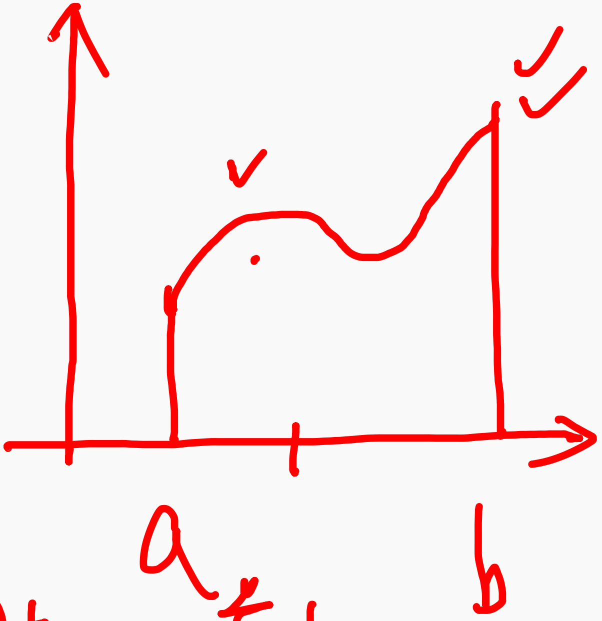
（1）求连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值

第一步： 求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点和不可导的点

$x_1, x_2, \cdots x_n$;

第二步： 求出函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots f(x_n), f(a), f(b)$;

第三步： 比较以上各点函数值.



【注】 若连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内仅有唯一极值点，

极大 — 最大

极小 — 最小

（2）最大最小值的应用题

$y=f(x)$

第一步： 建立目标函数 *

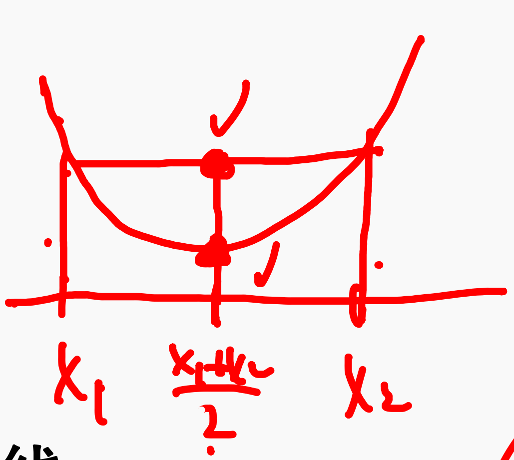
第二步：

（三）曲线的凹向与拐点

1）曲线的凹向

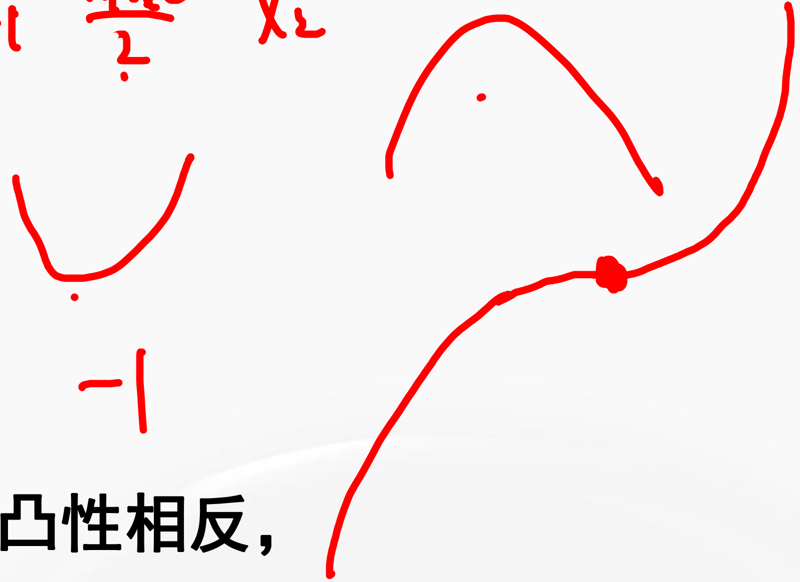
（1）**定义**：凹 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

凸 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



（2）**判定**：若在区间 I 上 $f''(x)>0$ (<0)，则曲线

$y=f(x)$ 在 I 上是凹（凸）的.



2）曲线的拐点

$x=x_0$

（1）**定义**：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 两侧凹凸性相反，

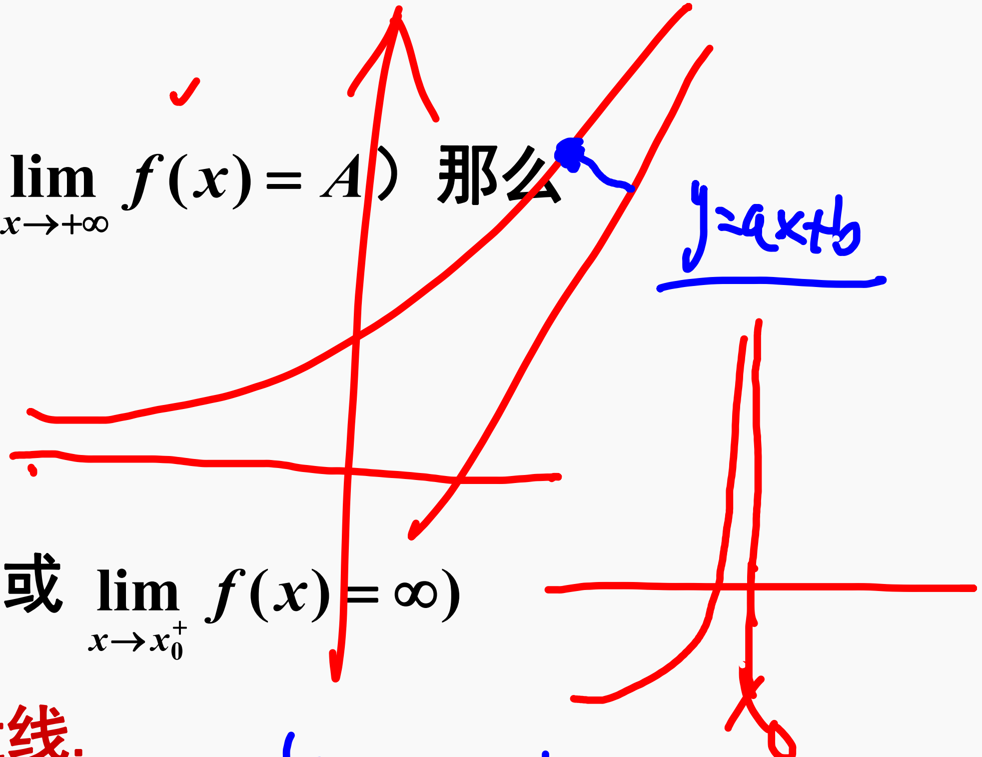
（2）**判定**：（一个必要，三个充分条件）

(四) 曲线的渐近线

1. 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$) 那么

$y=A$ 是 $y=f(x)$ 的水平渐近线.



2. 垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$, 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$)

那么 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

$f(x)=ax+b+\alpha(x) \Rightarrow y=ax+b$

$\alpha(x)\to 0$, $x\to\infty$

3. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$, $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$ (或 $x\to-\infty, x\to+\infty$),

那么 $y=ax+b$ 是 $f(x)$ 的斜渐近线.

（五）平面曲线的曲率（数三不要求）

1. 曲率的定义 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$

2. 曲率的计算

1）若曲线由 $y=y(x)$ 给出，则 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

2）若曲线由 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 给出，则 $K=\dfrac{|y''x'-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$

3. 曲率圆与曲率半径

曲率半径 $R=\dfrac{1}{K}$

$F(x,y)=0$

$F_x+F_y y'=0$

$y=y(x)$

$y'=-\dfrac{F_x}{F_y}$

$y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$

$y''_x=\dfrac{y''x'-x''y'}{|x'|^3}$

$\left(1+\dfrac{y'^2}{x'^2}\right)^{3/2}|x'|^3$

$f(x)=$ 阶

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{f''(0)}{2}, & x=0\end{cases}$$

$g'(x)$ 连续, $\quad f(0)=0$

$$g''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\dfrac{f''(0)}{2}}{x}$$

x, 凡 √

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)-\dfrac{f''(0)}{2}x^2}{x^3}$$

$$g''(x)=\begin{cases}(\quad) & x\neq 0 \ \checkmark\\ & \end{cases}$$

微信扫码，关注【公众号：武忠祥老师】

定期更新：每日一题、数学资料、阶段备考等考研干货

还不关注，那你就慢了