高数精讲（9）

9	微分中值定理证明题方法举例	P81-P91

下：P92~106

主讲　武 忠 祥　教授

题型五 微分中值定理有关的证明题

（一）证明存在一个点 $\xi \in (a,b)$, 使 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

$g'(\xi) = 0$

方法：构造辅助函数用罗尔定理.

构造辅助函数的方法主要有两种

1. 分析法(还原法）根据对欲证的结论 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

   的分析, 确定 $g(x)$, 使 $g'(x) = F[x, f(x), f'(x)]$

2. 微分方程法：欲证：$F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

   1）求微分方程 $F(x, y, y') = 0$ 的通解 $H(x, y) = C$

   2）设辅助函数：$g(x) = H(x, f(x))$

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=b, f(b)=a$，a 与 b 同号，求证：$\exists \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{-f(\xi)}{\xi}$.

$\xi \neq 0$

1. 分析法：欲证 $f'(\xi)=\dfrac{-f(\xi)}{\xi}$. 只要证 $\underbrace{\xi f'(\xi)+f(\xi)}_{g'(\xi)}=0$

则应构造辅助函数 $g(x)=xf(x)$

$xf'(x)+f(x)=g'(x)$

$g(x)=xf(x)$

2. 微分方程法：欲证 $f'(\xi)=\dfrac{-f(\xi)}{\xi}$，解微分方程 $y'=\dfrac{-y}{x}$,

得其通解为 $xy=C$. 则应构造辅助函数 $g(x)=xf(x)$

【证】令 $g(x)=xf(x)$，则

$$g(a)=af(a)=ab,\ g(b)=bf(b)=ab,$$

由罗尔定理知，$\exists \xi \in (a,b)$ 使 $g'(\xi)=0$

即 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$ 原题得证.

$[\ln F(x)]' = \frac{F'}{F} = 0 \Rightarrow F(x)=0$ $F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[1,\ 2]$ 上连续，在 $(1,\ 2)$ 内可导且 $f(1)=\frac{1}{2}$，$f(2)=2$. 求证：$\exists\xi\in(1,\ 2)$ 使 $\boxed{f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}}$. $\xi \neq 0$

① 分析法：$xf'(x)-2f(x)=0$

$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{2}{x}=0$

$[\ln f(x)]'-[\ln x^2]'=0$

$[\ln \frac{f(x)}{x^2}]'=0$

【证】只要证 $\xi f'(\xi)-2f(\xi)=0$

令 $F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$

则 $F(1)=f(1)=\frac{1}{2}$，$F(2)=\frac{f(2)}{4}=\frac{1}{2}$

由罗尔定理知 $\exists\xi\in(1,2)$，使 $F'(\xi)=0$.

即 $\frac{\xi^2 f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{\xi^4}=0$ $=0$

从而有 $\xi f'(\xi)-2f(\xi)=0$ 原题得证.

② 方程：$y'=\frac{2y}{x}$， $H(x,y)=C$

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2}{x}dx$

$F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$

$\ln|y|=2\ln|x|+C$，

$\ln\frac{|y|}{x^2}=C$，$\frac{y}{x^2}=\pm e^{C}=C$

【注】

$n=1$

$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$ $F(x)=xf(x)$

1）欲证 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$, 令 $F(x)=x^n f(x)$;

$n=2$

$\xi f'(\xi)-2f(\xi)=0$ $F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$

2）欲证 $\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$, 令 $F(x)=\frac{f(x)}{x^n}$;

【例3】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$.

$y'+\lambda y=0$

$y'=-\lambda y$

$H(x,y)=c$

$\int\frac{dy}{y}=-\int\lambda dx$

$\ln|y|=-\lambda x+c$

$|y|=e^{c}e^{-\lambda x}$

$y=ce^{-\lambda x}$

$ye^{\lambda x}=c$

【证】 令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$，则 $F(a)=F(b)=0$，

由罗尔定理知，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$.

即 $\quad \underbrace{e^{\lambda\xi}}^{\neq 0}[f'(\xi)+\lambda f(\xi)]=0$

但 $\quad e^{\lambda\xi}\neq 0$

则 $\quad f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$

故原题得证.

$f'(\xi)+\frac{n}{\xi}f(\xi)=0$　　$F(x)=e^{\int \frac{n}{x}dx}f(x)=x^n f(x)$

【注】1）欲证 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$,　　令 $F(x)=x^n f(x)$;

2）欲证 $\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$,　　令 $F(x)=\frac{f(x)}{x^n}$;

1）欲证 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$,　　令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$;

$\lambda=1$

特别的 $f'(\xi)+f(\xi)=0$,　　令 $F(x)=e^{x}f(x)$;

$\lambda=-1$

$f'(\xi)-f(\xi)=0$,　　令 $F(x)=e^{-x}f(x)$;

$\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$

2）欲证 $\alpha f'(\xi)+\beta f(\xi)=0$,　　令 $F(x)=e^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x);(\alpha\neq 0)$

$\alpha\neq 0$

"常用结论"

3）欲证 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$,　　令 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$;

4）欲证 $\boxed{f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0,\quad \text{令}\ F(x)=e^{\int g(x)dx}f(x);}$

【例4】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且

$f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 证明:

$f'(\xi)-\lambda f(\xi)=0$　　$F(x)=e^{-\lambda x}f(x)$

1) 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使 $f(\eta)=\eta$;

$[f'(\xi)-1]-\lambda[f(\xi)-\xi]=0$　　$F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$

2) 对任意实数 λ, 存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

【证】 1) 令 $F(x)=f(x)-x$,

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\quad F(1)=f(1)-1=-1<0.$$

由零点定理知 $\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使 $F(\eta)=0$.

2) 令 $\varphi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$　　$\varphi(0)=0,\varphi(\eta)=0$

由罗尔定理知 $\exists\xi\in(0,\eta)$, 使 $\varphi'(\xi)=0$.

【例5】设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有2阶导数，且 $\boxed{f(1)=1.}$

证明：（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$; $=f(1)-f(0)$

（2）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1.$

$f'(\xi)+f(\xi)=0$

$e^x f(x)$

$f'(\xi)-1=0$

$\varphi'(\xi)=0$

$\varphi(x)=f(x)-x$，$\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=0$

【证1】（1）因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0.$

根据微分中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(1)-f(0)=f'(\xi).$

又 $f(1)=1$，所以 $f'(\xi)=1.$

法①

$[f'(\eta)-1]'$

$f''(\eta)+[f'(\eta)-1]=0$

$\boxed{H(x,y)=0}$

法② 方程：$y'+y=1$

$y=e^{-\int dx}\left[\int 1e^{\int dx}dx+C\right]$

$=e^{-x}[e^x+C]$

$e^xy-e^x=C$，$\boxed{e^x[y-1]=C}$

$F(x)=H(x,f(x))$

（2）令 $F(x)=e^x[f'(x)-1]$

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 是偶函数，故 $f'(-\xi)=f'(\xi)=1$

则 $F(x)$ 可导，且 $F(-\xi)=F(\xi)=0.$ 根据罗尔定理，存在

$\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得 $F'(\eta)=0.$

即 $F'(\eta)=[\underbrace{f''(\eta)+f'(\eta)-1}_{}]e^\eta$ $=0$

【例5】设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有2阶导数，且 $f(1)=1$.

证明：（1）存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

（2）存在 $\eta\in(-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

$\boxed{f''(\eta)+f'(\eta)-1}=0$

【证2】（1）因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$.

根据微分中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$.

$f'(x)+f(x)-x$

又 $f(1)=1$，所以 $f'(\xi)=1$.

（2）令 $F(x)=f'(x)+f(x)-x$

$F'(\eta)=0$

8:18

$f'(x)$ 偶

$F(1)=f'(1)+f(1)-1=f'(1)$

$F(-1)=f'(-1)+f(-1)+1=f'(-1)$

【例6】设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$

$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 试证

1）在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

2）在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

$\neq 0$ $\neq 0$

a c b

【证】1）由于在 $[a,b]$ 上 $g''(x)\neq 0$，则方程 $g(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内最多两个根，又 $g(a)=g(b)=0$，则当 $x\in(a,b)$ 时，$g(x)\neq 0$

$g(x)f'(x)$ — $f(x)g'(x)$

2）只要证 $g(\xi)f''(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$

分析法

令 $F(x)=g(x)f'(x)-f(x)g'(x)$

则 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理知，$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$

即 $g(\xi)f''(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$

柯西定理

若 1）$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

2）$f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}$.

要证. $[f(b)-f(a)]g'(\xi)-[g(b)-g(a)]f'(\xi)=0$

① 令 $F(x)=[f(b)-f(a)]\underline{g(x)}-[g(b)-g(a)]f(x)$　　$F(a)=F(b)$

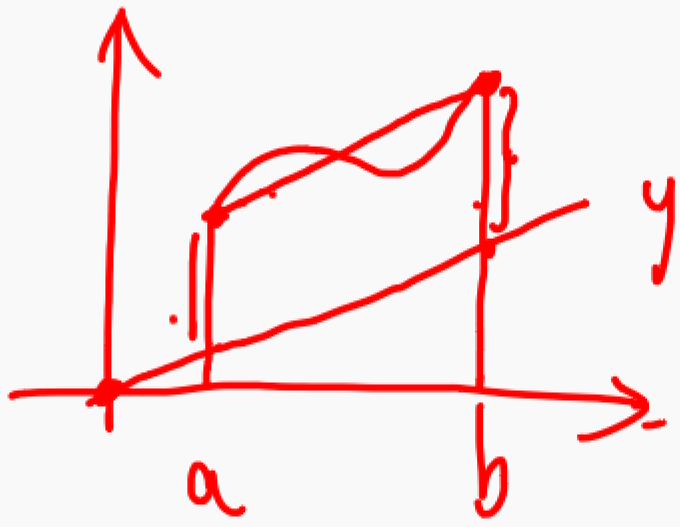
* ② 令 $F(x)=[f(b)-f(a)]\underline{[g(x)-g(a)]}-[g(b)-g(a)][f(x)-f(a)]$　　$F(a)=F(b)$

拉格朗日定理

若 1）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

2）$f(x)$ 在 (a,b) 内可导；

则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).}$



$y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

要证：$f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

① $F(x) = f(x)\Big|_a^b - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x\Big|_a^b$ $F(b) = F(a)$

②* $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}[x-a]$ $F(a) = F(b)$

【例7】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$. 求证:

$\exists \xi \in (0,1)$, 使 $\int_0^\xi f(x)dx = -\xi f(\xi)$.

【证】只要证明 $\int_0^\xi f(x)dx + \xi f(\xi) = 0$

令 $F(x) = x\int_0^x f(t)dt$

则 $F(0) = F(1) = 0$

由罗尔定理知 $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $F'(\xi) = 0$

即 $\int_0^\xi f(x)dx + \xi f(\xi) = 0$

$xf(x)$

$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$

$\int_0^\xi f(x)dx + \xi f(\xi) = 0$

$\left(\int_0^\xi f(x)dx\right)'_\xi = f(\xi)$

$x\int_0^x f(x)dt$

【例8】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)dx = 0.$ 求证：$\exists \xi \in (0,1)$ 使 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0.$

【证】令 $F(x) = x^2 f(x)$ $F(0)=0$， $F(1)=f(1)$ $[0,1]$

则 $F(0) = 0$，又 $\int_0^1 f(x)dx = 0$，由积分中值定理知 $\exists c \in (0,1)$

使 $\int_0^1 f(x)dx = f(c) = 0$

从而 $F(c) = 0$

由罗尔定理知 $\exists \xi \in (0,c)$，使 $F'(\xi) = 0$

从而有 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$

【例9】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，$\int_0^1 f(x)dx=0$，

$x\int_0^x f(t)dt$

求证：$\exists \xi \in (0,1)$，使 $\int_0^{\xi} f(x)dx = \xi f(\xi)$.

$\int_0^{\xi} f(x)dx - \xi f(\xi) = 0$

【证】 只要证 $\int_0^{\xi} f(x)dx - \xi f(\xi) = 0$

x

$\frac{x}{\int_0^x f(t)dt}$，$\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$

令 $F(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x} & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$[0,1]$ 找 ξ.

$x=0$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{1} = 0$

$F(0) = F(1) = 0$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，

故 $\exists \xi \in (0,1)$，使 $F'(\xi) = 0$

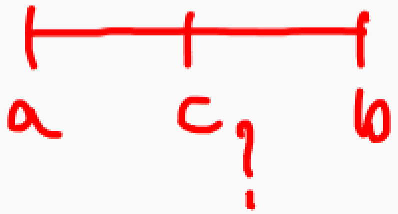
从而有 $\int_0^{\xi} f(x)dx - \xi f(\xi) = 0$.

二. 证明存在两个点 $\xi,\eta\in(a,b)$. 使

$$F[\xi,\eta,f(\xi),f(\eta),f'(\xi),f'(\eta)]=0$$

方法：（1）不要求 $\xi\neq\eta$

在同一区间 $[a,b]$ 上用两次中值定理（拉格朗日、柯西中值定理）



（2）要求 $\xi\neq\eta$

将区间 $[a,b]$ 分为两个子区间，在两个子区间上分别用拉格朗日中值定理

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，且 a,b 同号，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

【证】由拉格朗日中值定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

由柯希中值定理知，$\exists\eta\in(a,b)$，

$f(x)$

x^2

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

$(b-a)(b+a)$

从而有 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

$\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$ $\dfrac{f(x)}{(x^2)'}$ $f(x)$ x^2 $g'(\xi)$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$.

证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

【证】只要证明 $f'(\xi)=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$

$\dfrac{f(\xi)}{e^\xi}$ $f(x)$ e^x

由拉格朗日定理知 $\exists\xi\in(a,b)$. 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

由柯希定理知 $\exists\eta\in(a,b)$, 使

$f(x)$ e^x

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}$$

从而有 $f'(\xi)(b-a)=\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}(e^b-e^a)$

故 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$

【例3】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=1$, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

【证】 只要证明 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$

$e^x f(x)$

由拉格朗日中值定理得 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi}$

令 $F(x)=e^x f(x)$, 由拉格朗日中值定理得, $\exists\eta\in(a,b)$

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)$$

即 $$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$$

从而有 $$e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$$

【例4】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1.$

证明：1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$;

2）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1.$

$\xi = 1-f(\xi)$

【证】1）令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$

$\exists\xi\in(0,1)$，使 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=1-\xi$

$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(\xi)$ $\qquad$ $\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(\xi)$

$f(c)=c$?

$f(c)=1-c$

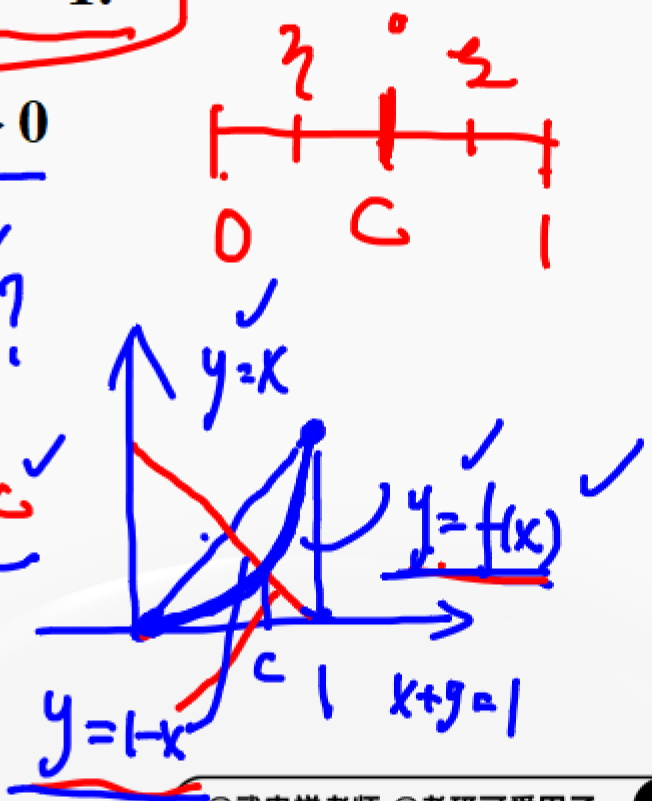
2) $\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=f'(\eta)$ $\qquad \eta\in(0,\xi)$

$\frac{f(c)}{c}\cdot\frac{1-f(c)}{1-c}=1$

$1=f'(\eta)f'(\xi)$

$\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(\zeta)$ $\qquad \zeta\in(\xi,1)$

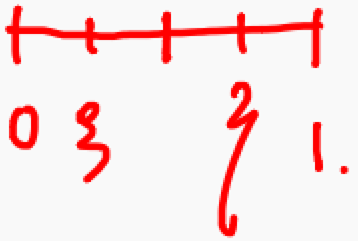
$f'(\eta)f'(\zeta)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}=1$



【例5】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，试证对任意给定的正数 a,b，在 $(0,1)$ 内一定存在互不相同的 ξ,η，使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b.$

?

c



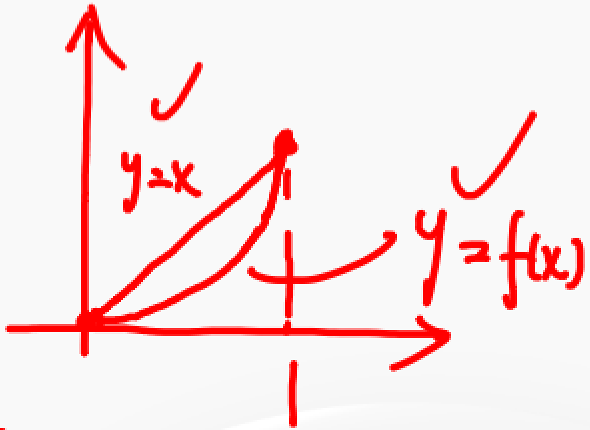
逆推法

【分析】 $\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(\xi)$ $\quad\quad \xi\in(0,c)$

$\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(\eta)$ $\quad\quad \eta\in(c,1)$ f(x)=x

$$a\cdot\frac{c}{f(c)}+b\cdot\frac{1-c}{1-f(c)}=a+b$$

$\boxed{f(c)=c}$?



即要证 $\dfrac{a}{a+b}\cdot\dfrac{c}{f(c)}+\dfrac{b}{a+b}\cdot\dfrac{1-c}{1-f(c)}=1$

$f(0)=0<\dfrac{a}{a+b}<1=f(1)$

$\boxed{f(c)=\dfrac{a}{a+b}}$

（三）证明存在一个中值点 $\xi \in (a,b)$，使

$$F[\xi, f^{(n)}(\xi)] \geq 0 \ (n \geq 2)$$

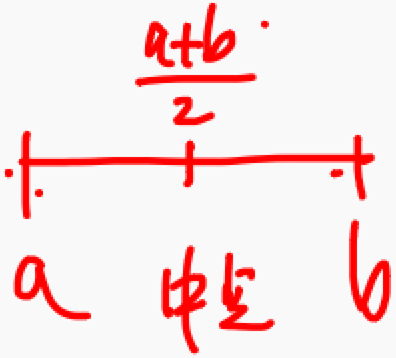
① ② 泰.(拉) $x_0=?$

方法：用带拉格朗日余项的泰勒公式，其中 x_0 点选题目中提供函数值和导数值信息多的点.

【例1】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$，求证：

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $|f''(\xi)|\geq 4\dfrac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$.

$= \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$



【证】 由泰勒公式知

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2 \qquad (1)$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2 \qquad (2)$$

令 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2$$

$$|f(b)-f(a)|\leq\frac{(b-a)^2}{8}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)\leq\frac{(b-a)^2}{8}2|f''(\xi)|$$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导, $f(0)=0, f(1)=1, f'(\frac{1}{2})=0$

x_1

x_0

求证: $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $|f'''(\xi)| \geq 24.$

【证】 由泰勒公式得

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-\frac{1}{2})^3$$

在上式中令 $x=0$, 和 $x=1$ 得

$$0=f(\frac{1}{2})+\frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}\frac{1}{4}-\frac{f'''(\xi_1)}{48}$$

$$1=f(\frac{1}{2})+\frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}\frac{1}{4}+\frac{f'''(\xi_2)}{48}$$

$$48=f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)$$

$$48 \leq |f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)| \leq 2\max(|f'''(\xi_1)|,|f'''(\xi_2)|)$$

【例3】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$

$\min\limits_{0\le x\le 1} f(x)=-1$，证明：$\max\limits_{0\le x\le 1} f''(x)\ge 8.$

$f''(\xi)\ge 8$

$x_0=?$

【证】设 $f(c)=\min\limits_{0\le x\le 1} f(x)=-1$，则 $0<c<1$，且 $f'(c)=0$，

由泰勒公式知

$$f(x)=\overset{-1}{f(c)}+\overset{0}{f'(c)}(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

$0 \quad c \quad 1$

$f(c)=-1$

$f'(c)=0$

$f^{(4)}(\xi)$

$x_0=?$

在上式中分别令 $x=0$ 和 $x=1$ 得

若 $c\le\frac{1}{2}$ $\quad f''(\xi_1)=\dfrac{2}{c^2}\ \cancel{\ge 8}\ \ge\dfrac{2}{(\frac{1}{2})^2}=8$ $\quad \xi_1\in(0,c)$

$c>\frac{1}{2}$ $\quad f''(\xi_2)=\dfrac{2}{(1-c)^2}\ge\dfrac{2}{(1-\frac{1}{2})^2}=8$ $\quad \xi_2\in(c,1)$

2023考研数学一第(20)题，数学二第（21）题，数学三第（20）题（12分）

$f''(x)$ 连续 $\Rightarrow |f''(x)|$ 连续. $|f''(x)| \le |f''(\eta)|$.

设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 内有2阶连续导数，证明：

（1）若 $f(0)=0$, 则存在 $\xi\in(-a,a)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

（2）若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta\in(-a,a)$, 使得 $|f''(\eta)|\ge\dfrac{1}{2a^2}[f(a)-f(-a)]$.

(1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$, $f(a)=f'(0)a+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}a^2$, $f(-a)=-f'(0)a+\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}a^2$

$$f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]=a^2f''(\xi)$$

(2) x_0, $\boxed{f'(x_0)=0}$. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$

$f(a)=f(x_0)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(a-x_0)^2$

$f(-a)=f(x_0)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(-a-x_0)^2$

$$f(a)-f(-a)=\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)(a-x_0)^2-f''(\xi_2)(a+x_0)^2\right]$$

$$|f(a)-f(-a)|\le\frac{1}{2}\left[|f''(\xi_1)|(a-x_0)^2+|f''(\xi_2)|(a+x_0)^2\right]$$

$$|f(a)-f(-a)|\le\frac{1}{2}|f''(\eta)|\left[(a-x_0)^2+(a+x_0)^2\right]$$

（一） $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

辅助函数 1. 分析法（还原法）

2. 微分方程法

3. 常用辅助函数 *

（二） $F[\xi, \eta, f(\xi), f(\eta), f'(\xi), f'(\eta)] = 0$

（1）不要求 $\xi \neq \eta$ 　同一拉，柯

（2）要求 $\xi \neq \eta$ 　分区间，拉

（三） $F[\xi, f^{(n)}(\xi)] \geq 0\ (n \geq 2)$

① 泰（拉）． ② $x_0 = ?$ 信息多

微信扫码，关注【公众号：武忠祥老师】

定期更新：每日一题、数学资料、阶段备考等考研干货

还不关注，那你就慢了