高数精讲（11）

11	常考题型举例(定积分的概念、性质、计算、变上限积分)	P106-P118

下次 P119-127

主讲　武 忠 祥　教授

题型一　定积分的概念、性质及几何意义

【例1】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\cdot\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$；

【解】令 $y_n=\left[(1+\frac{1^2}{n^2})(1+\frac{2^2}{n^2})\cdots(1+\frac{n^2}{n^2})\right]^{\frac{1}{n}}$

则 $\ln y_n=\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1^2}{n^2})+\ln(1+\frac{2^2}{n^2})+\cdots+\ln(1+\frac{n^2}{n^2})\right]$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\int_0^1\ln(1+x^2)dx$$

$$=x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}dx=\ln 2-2(1-\frac{\pi}{4})$$

原式 $=e^{\ln 2-2(1-\frac{\pi}{4})}=2e^{\frac{\pi}{2}-2}$

【例2】设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt = \_\_\_\_.$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt$

积,中

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2c\sin\frac{3}{c}f(c) \qquad (x<c<x+2)$

=6

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} p\frac{\sin c}{c}=0$$

【例3】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx.$ $\overset{?}{=} 0$

$0<\frac{n}{n}<1$ $\quad \frac{n}{n}^n \to 0$

$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$

【解1】 $0\le\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx\le\sqrt{2}\int_0^1 x^n dx=\frac{\sqrt{2}}{n+1} \to 0$

$(c_n)^n \not\to 0$

夹

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1}=0$

夹+性质

$c_n \to 1$ $\quad 1^\infty$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx=0$

$n=1$

$n=100$

$\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx = (c_n)^n\sqrt{1+c_n^2} \to 0$, $0<c<1$ $\quad 0<c_n<1$

【解2】由积分中值定理得

积中

$\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx=\sqrt{1+c_n^2}\int_0^1 x^n dx$

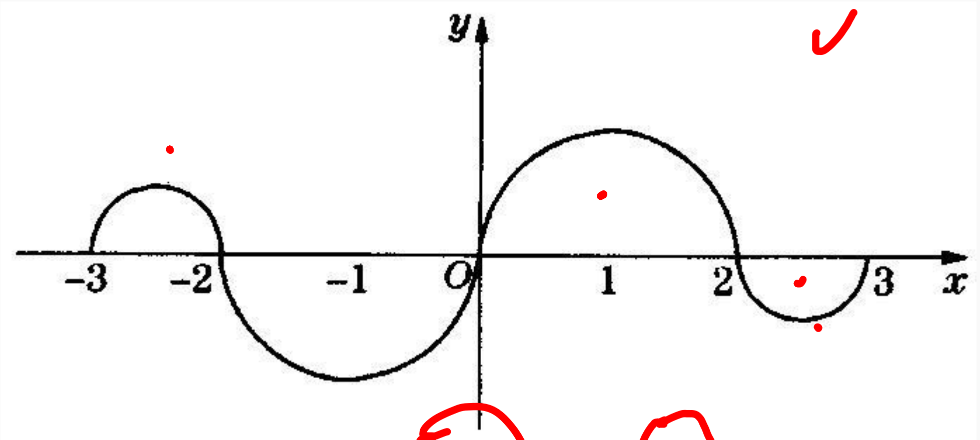
$\frac{1}{n+1} \to 0$

$\to 0$

对称美.

【例4】如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$, $[2,3]$ 上的图形上的图形分别是直径为1的上、下半圆周，在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为2的下、上半圆周（图），设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 则下列结论正确的是.

$a<b$



$F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{\pi}{2}$

$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

$F(-2)=\int_0^{-2} f(t)dt$ ~~$-\frac{\pi}{2}$~~

$=-\int_{-2}^0 f(t)dt$

$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

（A） $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$

（B） $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

（C） $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$

（D） $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

【解】由图可知 $f(x)$ 是奇函数，则

$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数，则

$F(2)>F(3)$

$F(-2)=F(2)>0$ $\quad$ $F(-3)=F(3)>0$

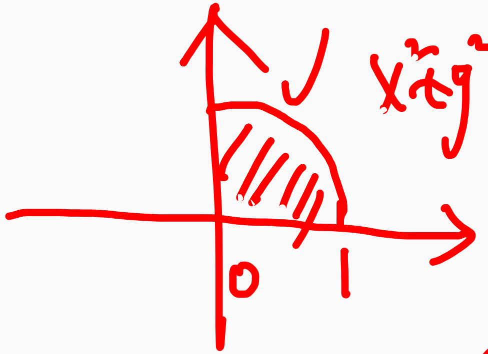
题型二　定积分计算

偶　奇

【例1】 $I=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx;$

$x=\sin t$

$=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$



$x^2+y^2=a^2$　$y=\sqrt{1-x^2}$

【解】 $I=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

$=4\int_{0}^{1}[1-\sqrt{1-x^2}]dx$

$=4-4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

$=4-\pi$

$x^2+y^2=2ax$

a　$2a$

$a>0$

【注】 $\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{4}a^2;$　　$\int_{0}^{a}\sqrt{2ax-x^2}dx=\frac{\pi}{4}a^2;$

$\int_{0}^{2a}\sqrt{2ax-x^2}dx=\frac{\pi}{2}a^2;$

π

【例2】 $I=\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx;$

【解1】 原式 $\overset{*}{=} n\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$

$$= n\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx$$

$$\overset{*}{=} n\int_0^{\pi}|\cos x-\sin x|dx$$!!!

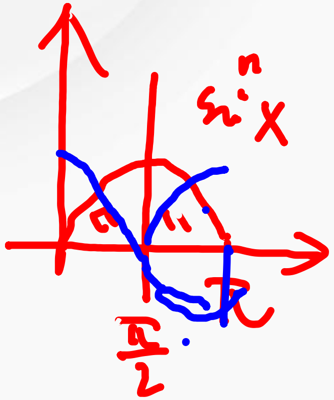
$$\overset{*}{=} n\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)=2\sqrt{2}n$$

【解2】 原式 $\overset{*}{=} n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sqrt{1-\sin 2x}dx$

$$= n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx = n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx=2\sqrt{2}n$$

$\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

【例3】 $I=\int_0^\pi x\sin^n x dx$.



【解】 $I=\int_0^\pi x\sin^n x\,dx$

$\overset{*}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^n x\,dx$

$\overset{*}{=} \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

$\cos x$

$$\int_0^\pi \sin^n x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

$$\int_0^\pi \cos^n x dx = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数}, \\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, & n\text{为偶数}. \end{cases}$$

$$\overset{*}{=} \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\pi, & n\text{为偶数} \\ \boxed{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}}\cdot\pi, & n\text{为奇数} \end{cases}$$

$(n>1)$

1

【例4】设 n 为正整数，证明：

$$\int_0^{2\pi}\cos^n x dx=\int_0^{2\pi}\sin^n x dx=\begin{cases}0, & n\text{为奇数},\\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

【证】$\int_0^{2\pi}\cos^n x dx=\int_0^{2\pi}\sin^n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx \overset{x+\frac{\pi}{2}=t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt=\int_0^{2\pi}\sin^n x dx$

奇

当 n 为奇数时，$\int_0^{2\pi}\sin^n x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x dx=0$

偶

当 n 为偶数时，$\int_0^{2\pi}\sin^n x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x dx=2\int_0^{\pi}\sin^n x dx$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$$

【例6】 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x)dx$.

【解1】 $\int_0^\pi f(x)dx = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi-x}dx$

d(x−π)

$$=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}dx-\int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi-x}dx$$

$$=\int_0^\pi \sin x dx = 2$$

① 分部

【解2】 $\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi f(x)d(x-\pi)$

$$=(x-\pi)f(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi \frac{(x-\pi)\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^\pi \sin x dx = 2$$

【解3】 $\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi dx\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$

$$=\int_0^\pi dt\int_t^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}dx=\int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

② 交换

$$\int \frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}dx=\int\frac{A(c\cos x-d\sin x)+B(c\sin x+d\cos x)}{c\sin x+d\cos x}dx$$

【例8】 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

【解1】 令 $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{A(\cos x-\sin x)+B(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$ $+\tan x$

则 $\begin{cases}1=-A+B\\0=A+B\end{cases}$，解得 $A=-\frac{1}{2},B=\frac{1}{2}$ $\quad A-B,\ \frac{A+B}{2}$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-\cos x)+(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}[-\ln(\sin x+\cos x)+x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

【解2】 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $\quad dx=-dt$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx\right]=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{4}$$

上-t 下-t

区间不变 dx = -dt

$$\int_a^b f(x)dx \xlongequal{x=a+b-t} \int_a^b f(a+b-t)dt$$

【例9】 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\,dx$;

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\sin^4 t\,dt \qquad (x=-t)$$

!!!

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^{t}}\sin^4 t\,dt$$

10:18

* ① 何时用？

② 如何用？

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^x}\sin^4 x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x\,dx}{\sin^p x+\cos^p x}\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t}\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{4}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\cot^{\sqrt{2}}t}$$

$p=1$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\sqrt{2}}t}{\tan^{\sqrt{2}}t+1}dt$$

$p>0$

【例10】 已知 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = 1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ 的值.

【解】令 $x-t=u$，得

$$\int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x (x-u)f(u)du$$

$$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du$$

从而有 $\int_0^x f(u)du = \sin x$ *

令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

【例11】设 $f'(x)=\arcsin(x-1)^2$，$f(0)=0$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

$x-1$

【解1】 $\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\arcsin(x-1)^2 dx$

$0 \cdot 0$

$= f(1) - \int_0^1 x\arcsin(x-1)^2 dx$

$= \int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 x\arcsin(x-1)^2 dx$

$= \int_0^1 (1-x)\arcsin(x-1)^2 dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin u\, du \qquad ((x-1)^2 = u)$

$= \frac{1}{2}u\arcsin u\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

【解2】 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)d(x-1)$

$0 \qquad 0$

$= (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)\arcsin(x-1)^2 dx$

$= \int_0^1 (1-x)\arcsin(x-1)^2 dx$

【解3】

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 dx\int_0^x \arcsin(t-1)^2 dt$

交换次序

$f(x) = \int_0^x f'(t)dt$

$\int_0^1 f(x)dx = f(1) - f(0)$

$= f(1)$

【例12】若 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx$，求 $f(x)$.

A 数

【解】$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+0$

$=2\int_{0}^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$=\pi\int_{0}^{\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}$

$=\dfrac{\pi^2}{2}$

$f(x)$

$-\int_{-\pi}^{\pi} A\sin x\,dx$

数

$-\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin x\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx\right)dx$

0

$=-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0$

题型三 变上限积分函数及其应用

1) 连续性 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续.

2) 可导性

① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 ⟶ $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数

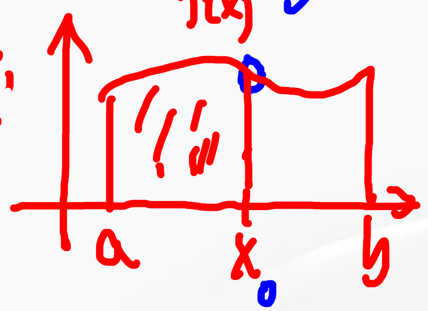
② $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有第一类间断点 ✗

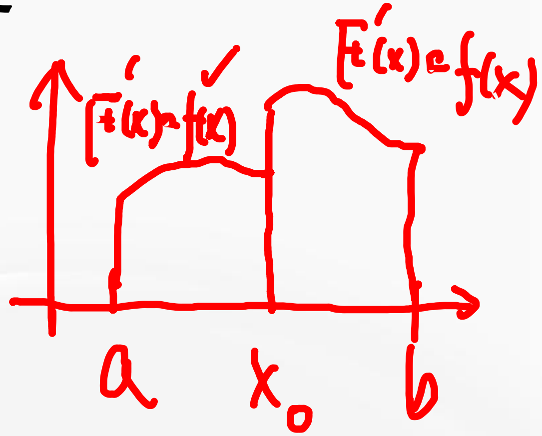
定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t)' = f(x)$.

$\boxed{\text{有关 } F(x)=\int_a^x f(t)dt \text{ 在一点处的可导性的结论}}$

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $x=x_0\in(a,b)$ 外均连续，则在点 $x=x_0$ 处

$f(x)$		$F(x)=\int_a^x f(t)dt$
1）连续	⟶	可导，且 $F'(x_0)=f(x_0)$
2）可去	⟶	可导，且 $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
3）跳跃	⟶	连续但不可导，且 $F'_-(x_0)=f(x_0^-)$ $F'_+(x_0)=f(x_0^+)$





3) 奇偶性 设 $f(x)$ 连续，则

1）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

2）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数.

【例1】设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是第一类间断点，则 $\boxed{\int_0^x f(t)\,dt}$ 是：__________.

(A) 连续的奇函数；　　(B) 在 $x=0$ 间断的奇函数；

(C) 连续的偶函数；　　(D) 在 $x=0$ 间断的偶函数.

偶，

连续，

【例2】设 $g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，其中

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), & 若 0\le x<1,\\ \frac{1}{3}(x-1), & 若 1\le x\le 2,\end{cases}$$

则 $g(x)$ 在区间（0, 2）内

（A）无界　（B）递减　（C）不连续　（D）连续

f(x) 可积

【例3】设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

(A) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是偶函数；

(B) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是奇函数；

(C) $f(x)$ 是周期函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是周期函数；

(D) $f(x)$ 是单调函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是单调函数；

$1+\sin x$

$x \to x+C$

x

$\frac{1}{2}x^2+C$

$\boxed{\int_0^x f(t)dt} + C$

奇

【例4】设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“$M \Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

$F'(x)=f(x)$

【例5】设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

（A）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点；

（B）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点；

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导；

（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导；

f(x)跳跃间断

【解1】 $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x \sin t dt, & 0\le x<\pi,\\ \int_0^{\pi}\sin t dt+\int_{\pi}^x 2dt, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$

$$=\begin{cases}1-\cos x, & 0\le x<\pi,\\ 2+2x-2\pi, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$

【解2】 $x=\pi$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导；

【例6】 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

【解1】 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du \qquad (x-t=u)$

$\frac{0}{0}$

① $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

② 消去分母零因子

原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}$

① 洛

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(c)}{xf(c)+xf(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}$$

【例6】设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

【解2】$\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(u)du \qquad (x-t=u)$

$x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$

$f(x)\sim g(x)$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{xf(0)}=1$

② 等价代换

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(0)dt}{x\int_0^x f(0)dt}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}f(0)}{x^2 f(0)}=\frac{1}{2}$$

$\dfrac{xf(x)}{xf(0)}\to\dfrac{f(0)}{f(0)}=1$

【例6】设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$. Δ

$0\neq A$ $f(0)$ $x^2-\dfrac{x^2}{2}=f(\xi)(x-\xi)x$

【解3】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\xi)\int_0^x (x-t)dt}{x^2 f(x-c)}$ $f(0)$

$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ Δ

≥ 0 ≤ 0

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(c)(b-a)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$1-\dfrac{\xi}{x}$?

0 ξ x

③ 积中

$-\dfrac{t^2}{2}\Big|_0^x$

$=\dfrac{1}{2}$

$\int_0^x (x-t)\boxed{dt}=x^2-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}$

【例7】 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\cdot \sin t dt$，则 $F(x)$

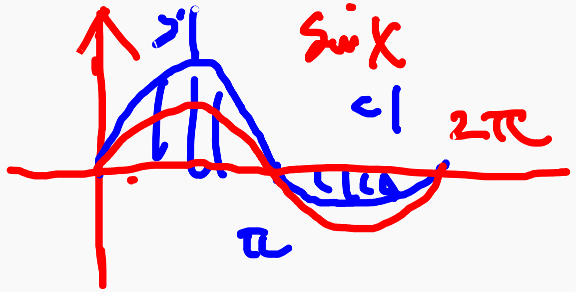
A) 为正常数　　B) 为负常数　　C) 为0　　D) 不是常数

【解1】 由于 $F'(x)=e^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi)-e^{\sin x}\sin x=0$ 知 $F(x)\equiv C$

几何

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt=C$$

$$F(0)=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt \quad > 0$$



$e^{\sin x}\sin x$

$$=-\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\,d\cos t$$

$$=-e^{\sin t}\cos t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\cos^2 t\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\cos^2 t\,dt>0$$

【例9】设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$. 若 $\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = x^2e^x$，求 $f(x)$.

【解】等式 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$ 两端对 x 求导得

$$g[f(x)]f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

而 $g[f(x)] = x$

则 $xf'(x) = 2xe^x + x^2e^x$　$x\neq 0$

即 $f'(x) = 2e^x + xe^x \quad (x\neq 0)$　$(x>0)$

$$f(x) = \int (2e^x + xe^x)dx = (x+1)e^x + C \quad (x\neq 0)$$

$$0 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[(x+1)e^x + C] = 1 + C$$

$$C = 0 - 1 = -1$$

偶.✓

【例11】设 $f(t)$ 连续，$f(t)>0, f(-t)=f(t)$. 令

$$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt. \qquad -a\le x\le a$$

$t=x$

1）试证曲线 $y=F(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是凹的.

2）当 x 为何值时，$F(x)$ 取得最小值. ✓

3）若 $F(x)$ 的最小值可表示为 $f(a)-a^2-1$. 试求 $f(t)$.

$-a \quad x \quad a$

$x=0$

【解】1）$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)dt+\int_{x}^{a}(t-x)f(t)dt$

$$=x\int_{-a}^{x}f(t)dt-\int_{-a}^{x}tf(t)dt+\int_{x}^{a}tf(t)dt-x\int_{x}^{a}f(t)dt$$

相加

$$F'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)-xf(x)+xf(x)-\int_{x}^{a}f(t)dt$$

$F'(0)>0$

$$=\int_{-a}^{x}f(t)dt-\int_{x}^{a}f(t)dt \; =0$$

$F'(0)=0$ ✓　　$F''(x)=2f(x)>0$

$$F''(x) = f(x) + f(x) = \underline{2f(x) > 0}$$

凹

2) 令 $F'(x) = \int_{-a}^{x} f(t)dt - \int_{x}^{a} f(t)dt = 0$

得 $F'(0) = 0$, 又 $F''(x) > 0$,

$F(x)$ 在 $x = 0$ 取最小值.

$f(x)$ ✓

3) $F(0) = \int_{-a}^{a} |t| f(t)dt = 2\int_{0}^{a} tf(t)dt$

$f(x)$ 连续.

得 $2\int_{0}^{a} tf(t)dt = f(a) - a^2 - 1$ 线性

$$2af(a) = f'(a) - 2a$$

$$f(a) = Ce^{a^2} - 1$$

又 $f(0) = 1$, 则 $C = 2$

从而 $f(t) = 2e^{t^2} - 1$

可导

连续

可积 存在原函数

微信扫码，关注【公众号：武忠祥老师】

定期更新：每日一题、数学资料、阶段备考等考研干货

还不关注，那你就慢了