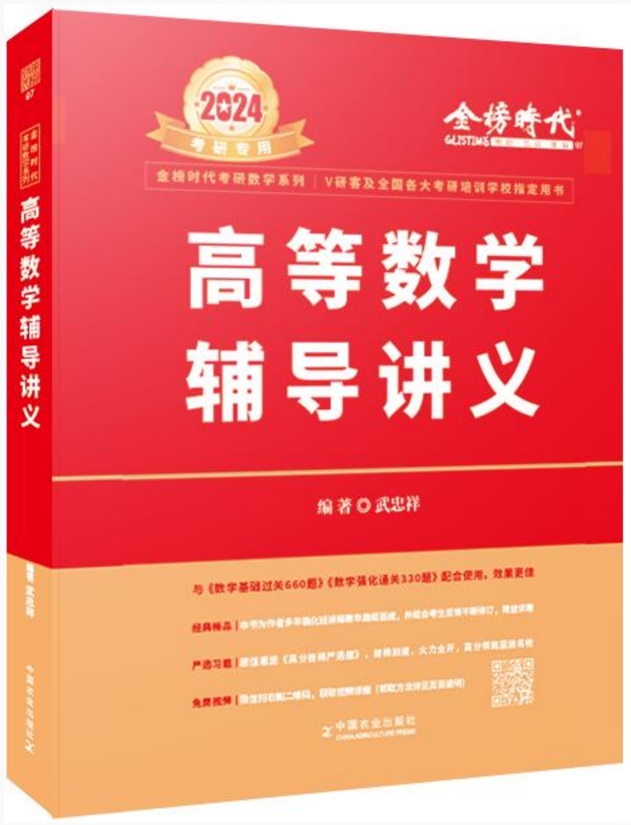
# 2024考研高等数学精讲

## （强化班）

主讲 武忠祥 教授

# 几点说明

## 1.教材　金榜时代《高等数学辅导讲义》武忠祥主编




## 2.教学计划

第一章　函数 极限 连续 (10学时)
第二章　一元函数微分学（8学时）
第三章　一元函数积分学（8学时）
第四章　常微分方程（2学时）　　二
第五章　多元函数微分学（5学时）
第六章　二重积分（3学时）
第七章　无穷级数（5学时）　　三
第八章　空间解析几何及其应用（1学时）
第九章　多元积分学及其应用（4学时）

共计　48　学时

数二　前6章　36学时

数三　前七章　43学时

# 教学环节

1. 课前预习（10页）
2. 听课
3. 课后复习（内容、例题）
4. 作业题（严选题）

# 高数精讲（1）

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 函数概念及常见函数，函数的性态（单调、奇偶、周期及有界性） | P1-P8 |

下次：9-15

主讲　武 忠 祥　教授

# 第一章 函数 极限 连续

## 第一节 函 数

## 第二节 极 限 *

## 第三节 连 续

# 第一节 函 数



## 本节内容要点

### 一. 考试内容要点精讲

（一）函数的概念及常见函数

（二）函数的性态 *

### 二. 常考题型方法与技巧

题型一 复合函数

题型二 函数性态 *

# 一. 考试内容要点精讲



## (一) 函数概念及常见函数

### 1. 函数概念

定义1 如果对于每个数 $x \in D$ , 变量 $y$ 按照一定的法则总有一个确定的 $y$ 和它对应，则称 $x$ 是 $y$ 的函数，记为 $y = f(x)$. 常称 $x$ 为自变量， $y$ 为因变量， $D$ 为定义域.

定义域 $D_f = D$.

值域 $R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$

【注】函数概念有两个基本要素：定义域、对应规则.

## 2. 复合函数

**定义2** 设 $y=f(u)$ 的定义域为 $D_f, u=g(x)$ 的定义域为 $D_g$

值域为 $R_g$，若 $D_f \cap R_g \neq \phi$，则称函数 $y=f[g(x)]$ 为函数

$y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合函数. 它的定义域为

$$\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

## 3. 反函数

**定义3** 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，值域为 $R_y$. 若对任意

$y \in R_y$，有唯一确定的 $x \in D$，使得 $y=f(x)$，则记为 $x=f^{-1}(y)$

称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

## 4. 初等函数

**定义4** 将幂函数，指数, 对数, 三角, 反三角统称为**基本初等函数**. 了解它们的定义域, 性质, 图形. 1 0

**幂函数** $y = x^{\mu}$ （$\mu$ 为实数）；

**指数函数** $y = a^{x}$ （ $a > 0,\ a \neq 1$ ）

**对数函数** $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

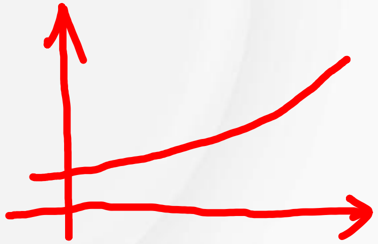
**三角函数** $y = \sin x$ $y = \cos x$, $y = \tan x$ $y = \cot x$

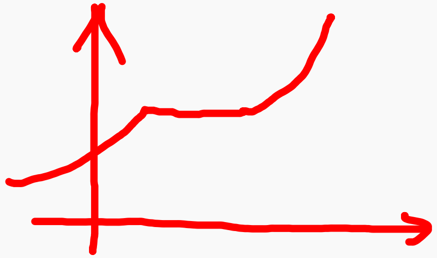
**反三角函数** $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \arctan x$,

1

**定义5** 由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数, 称为**初等函数**. 2

# （二）函数的性态





## 1. 单调性

**定义：** 单调增：✓

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

单调不减：

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2).$$

**判定：**（1）定义：① $(a,b)$ ✓

② $[a,b]$ 连续，$(a,b)$ 可导. ✓

（2）导数：设 $f(x)$ 在区间 $I$ 上可导，则

$f'(x)\geq 0$ ✓

a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调增；

$x^3$

b) $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x)$ 单调不减；

增

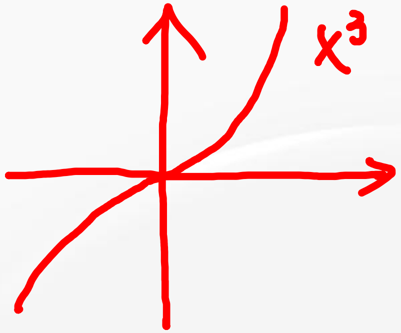
不减

定义，1) 相邻两个数（增）

2) 不等式

① $f(a)=0$，增 $\Rightarrow f(x)>0,\ x\in(a,b]$

② $f(a)=0$，不减 $\Rightarrow f(x)\geq 0,\ x\in(a,b]$




$f'(x)=3x^2$

$f'(0)=0$

## 2. 奇偶性

**定义：** 偶函数 $f(-x)=f(x)$; 奇函数 $f(-x)=-f(x)$.

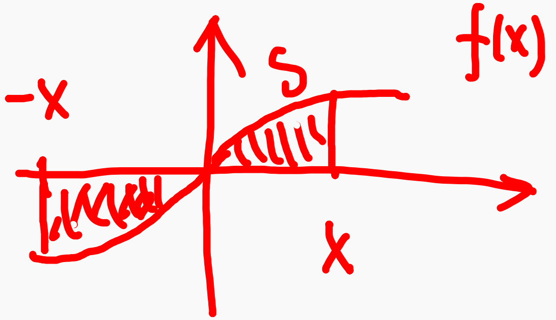
【注】(1) 奇 $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln\frac{1-x}{1+x}, \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$\frac{e^x-1}{e^x+1}, \boxed{f(x)-f(-x)}$

偶 $x^2, |x|, \cos x, \boxed{f(x)+f(-x)}$

(2) 奇函数的图形关于原点对称，且若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$；偶函数的图形关于 $y$ 轴对称.

**判定** ✓(1) 定义：  $\int_a^b f(x)\,dx = S$  ① $f(x)>0$ ② $a<b$.




✓(2) 设 $f(x)$ 可导，则：

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+1$  $\Leftarrow$ ✗  $f'(x)=x^2$

a) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow$ $f'(x)$ 是偶函数；

✓ b) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow$ $f'(x)$ 是奇函数； ✓

$f'(x)=x \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+C$

✓(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数； ✓

连续的偶函数其原函数之一是奇函数.

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt = S$  $-S$

$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt = -\int_{-x}^{0} f(-t)\,dt = S$

$\int_0^x f(t)\,dt + C$

$0$.

*【注】 设 $f(x)$ 连续，  $\int_a^x = \int_a^0 + \int_0^x$

（1）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数； ✓

（2）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_a^x f(t)dt$ 是奇函数； ✗

$f(x)$ 连续. $\Rightarrow$ $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$ ✓

$f(x)=x^2$  $\frac{1}{3}x^3+C$

## 3. 周期性

**定义：** $f(x+T)=f(x)$

【注】（1）$\sin x, \cos x$ 周期 $2\pi$；$\sin 2x$，$|\sin x|$ 周期 $\pi$；

（2）若 $f(x)$ 以 $T$ 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\dfrac{T}{|a|}$ 为周期.

$f(x)=\sin x+x$　　$f'(x)=\cos x+1$

**判定：** （1）定义；$f(x)$ 周期 $\overset{\times}{\Leftarrow}\Rightarrow$ $f'(x)$ 周期

（2）可导的周期函数其导函数为周期函数；

（3）周期函数的原函数不一定是周期函数；

8:13

**【注】**（1）设 $f(x)$ 连续且以 $T$ 为周期，则 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是以 $T$ 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx=0$；

$F(x)+C$

（2）周期函数的原函数是周期函数的充要条件是其在一个周期上的积分为零.

$\int_0^\pi |\sin x|dx>0$

$F(x+T)=\int_0^{x+T}f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_x^{x+T}f(t)dt=F(x)$

$\pi$　　$|\sin x|$　　$\sin^5 x$　$2\pi$　　$\sin^2 x$　　$F(x)$　　$\pi$　　$\int_0^T f(t)dt=0$

$\int_0^{2\pi}\sin^5 x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^5 x\,dx=0$　　$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx>0$

$e^{\sin(-x)} = e^{-\sin x}$



**(2022年3)** 已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

偶 奇.

① $f(x)$ 周期. $f'''(2\pi)=f'''(0)$

② $f(x)$ 偶函数. $\rightarrow f'''(0)=0$

$f'(x)$ 奇

$f''$ 偶

$f'''$ 奇. $f'''(0)=0$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}-\cdots$

$f(x)+f(-x)$ 偶.

## 4. 有界性

- **定义：** 若 $\exists M>0,\forall x\in I,|f(x)|\le M$; 则称 $f(x)$ 在 $I$ 上有界.

**【注】** $|\sin x|\le 1;|\cos x|\le 1;|\arcsin x|\le \frac{\pi}{2};|\arctan x|<\frac{\pi}{2},|\arccos x|\le \pi$

- **判定:**（1） 定义:

（2） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界;

（3） $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上连续，且 $f(a^{+}),f(b^{-})$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(a,b)$ 上有界;

（4） $f'(x)$ 在区间 $I$（有限） 上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 $I$ 上有界;

$(a,+\infty)$ 有界. $f(a^+)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ \exists \Rightarrow f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 有界

$(-\infty,a)$, $(-\infty,+\infty)$

$\frac{1}{x}$, $(0,1)$ 无界.

定理.性质 条件 结论

$F(x)=\begin{cases} f(a^+), & x=a \\ f(x), & x\in(a,b) \\ f(b^-), & x=b \end{cases}$ $[a,b]$

$|f'(x)|\le M$

$|f(x)|=|f(x)-f(x_0)+f(x_0)|\le|f'(\xi)||x-x_0|+|f(x_0)|\le ML+|f(x_0)|$

$f(x)=x$, $(0,+\infty)$ $f(x)$ 无界

# 二. 常考题型的方法与技巧

$1 \le x+1 \le a+1$

$\nearrow 1.\ 0 \le x \le a$

$0 \le x+1 \le a$

$-1 \le x \le a-1$

## 题型一　复合函数

【例1】已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a],(a>0)$，则 $f(x)$ 的定义域为

$x$

$(A)$ $[-1,a-1]$;　　　$(B)$ $[1,a+1]$;

$(C)$ $[a,a+1]$;　　　$(D)$ $[a-1,a]$.

【解】应选（B）。

# 题型二 函数性态

**【例1】** 已知函数 $f(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界，则 $\alpha$ 的取值范围应为

$\ln(1+x)\sim x$

(A) $(0,+\infty)$　　(B) $(0,3]$　　(C) $(0,2)$　　(D) $(1,3]$

$\alpha$

**【解】** $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}$ $\begin{cases}存在\\ \infty\end{cases}$

$\boxed{\alpha-1\le 2}$

$\alpha-1>2$

则 $\alpha\le3$

$\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$ $\begin{cases}0,\\ \infty\end{cases}$

$\boxed{\alpha-1>0}$

$\alpha-1\le0$

则 $1<\alpha$

**【例2】** 以下四个命题中正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界；

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界；

$f(x)=\frac{1}{x}$

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界；

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界。

**【解1】** 直接法

**【解2】** 排除法

$f(x)=x^\alpha$ $(\alpha\ge 0)$ $\quad f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

反例

$0<\alpha<1$

$f(x)=\sqrt{x}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

【例3】设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加;

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少;

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$, 有 $f(x)>f(0)$;

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$, 有 $f(x)>f(0)$;

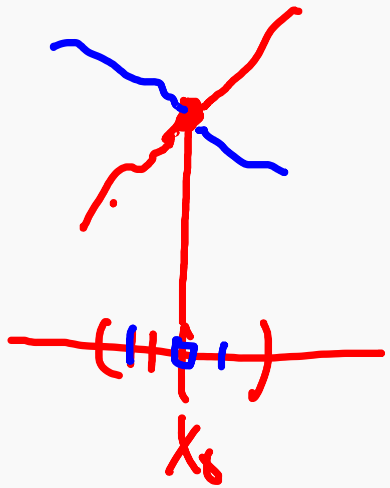
【解】 常用的结论: 若 $f'(x_0)>0$, 则存在 $\delta>0$,

当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f(x)<f(x_0)$;

当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f(x)>f(x_0)$;

故 应选 (C)

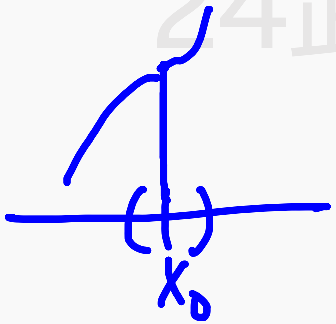
$0<f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$




$0<f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$

【注】 $f'(x_0)>0 \nrightarrow f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内单调增.



反例：令 $f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

连续，

则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=1>0$

$\dfrac{1}{x}=2n\pi$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$

$f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)=-1<0;$

$\int_0^x f(t)dt$

$f'(x)\geq 0$

$\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=f(x)$

$f'(x)<0$

$f''(x_0)$ 存在

**(2022年2)** 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 2 阶导数，则（ ）

(A) 当 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内单调增加时，$f'(x_0)>0$.

(B) 当 $f'(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内单调增加.

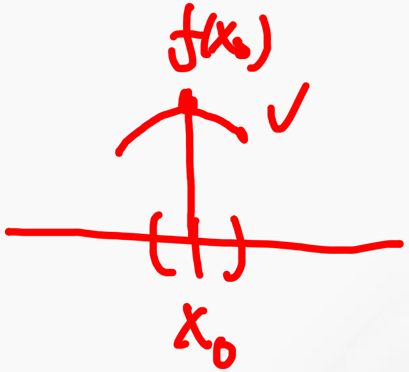
(C) 当 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内是凹函数时，$f''(x_0)>0$.

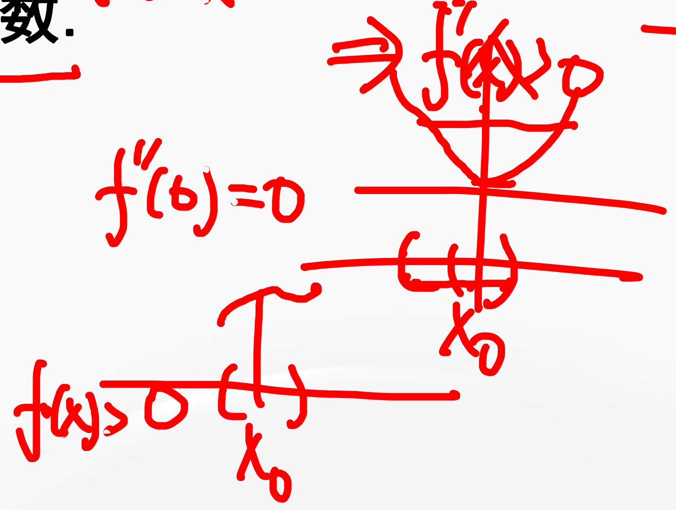
(D) 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内是凹函数.

$f(x)=x^3$

$f(x)=x^4$

$f''(0)=0$



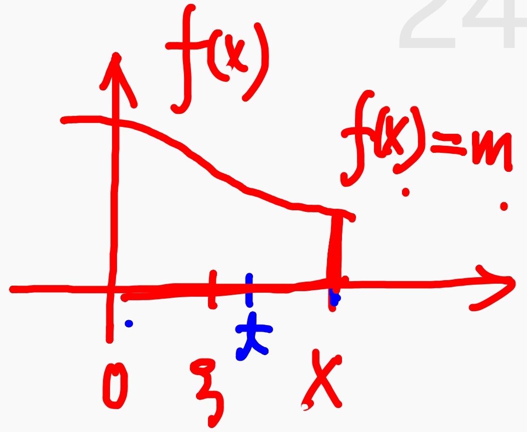


**【例4】** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且

$$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$$ 试证：

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

（2）若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.




① $x\ge 0$

$F'(x)\ge 0$　　$f(x)=m$

**(1)【证1】** $F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$　令 $t=-u$ 得

$$F(-x)=-\int_0^x(-x+2u)f(-u)\,\mathrm{d}u=\int_0^x(x-2u)f(u)\,\mathrm{d}u=F(x)$$

偶　偶

**【证2】** $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$　偶

奇 · 奇

(2) $F'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)$

$$=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)=x[f(\xi)-f(x)]\ge 0$$

① 积分中值

② $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

③ $\int_0^x f(t)dt-\int_0^x f(x)dt$

$=\int_0^x [f(t)-f(x)]\,dt\ge 0$


微信扫码，关注【公众号：武忠祥老师】

定期更新：每日一题、数学资料、阶段备考等考研干货

还不关注，那你就慢了