# 高数精讲（15）

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 多元微分学的概念及举例（重极限、连续、偏导数及全微分） | P151-P160 |

对照：① 相同 ② 不同

下 p160-173

**主讲 武忠祥 教授**

# 第五章 多元函数微分学


* 第一节 重极限 连续 偏导数 全微分 难点

第二节 偏导数与全微分的计算

第三节 极值与最值 *

重点

# 第一节 重极限 连续 偏导数 全微分

## 本节内容要点

### 一. 考试内容要点精讲

（一）重极限

（二）连续

（三）偏导数

（四）全微分

（五）连续、可导、可微的关系

# 二. 常考题型方法与技巧

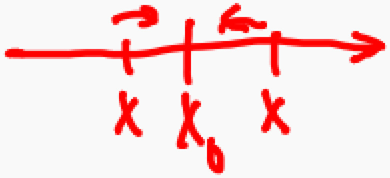
## 讨论连续性、可导性、可微性

# 一．考试内容要点精讲

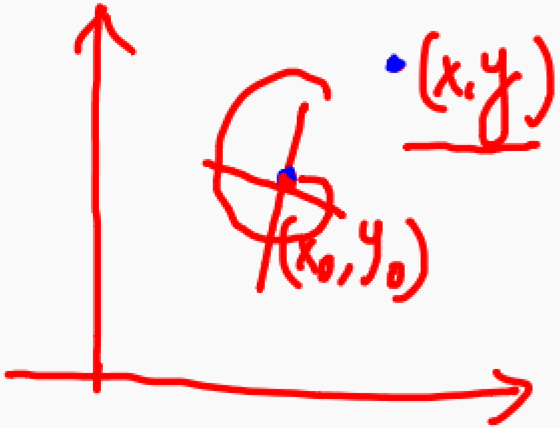


## （一）重极限

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ,




$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$




注 1） $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 是以“任意方式”

2）（1）局部有界性　　（2）保号性

（3）有理运算　　（4）极限与无穷小的关系

（5）夹逼性

【例1】求下列极限

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$　　3次 $\frac{0}{0}$ 2次　　$\infty$　$\frac{0}{0}$ ✓

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$　2　1　$\frac{0}{0}$　　0

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2\sin(xy)}{x^2+y^4}$　　不存在　$\frac{0}{0}$

① $2ab \le a^2+b^2$

② $|x\pm y| \le |x|+|y|$

$f(x)\to 0 \Leftrightarrow |f(x)|\to 0$ ✓

① $|f(x,y)|$ ✓

② 夹逼 ✓

(*)

【解】1) $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |y| \to 0$

$\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot y$

2) $0 \le \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = \dfrac{|x||x|}{|x|+|y|} + \dfrac{|y||y|}{|x|+|y|} \le |x|+|y| \to 0$

$\dfrac{|x|}{|x|+|y|} \le 1$

$\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right| \le 1$

研

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$

3. 方法1 由于 $\boxed{\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right| \le \dfrac{1}{2}}$，即为有界量，而

$2ab \le a^2+b^2$

$ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin xy = 0$. 即为无穷小量，则原式 $= 0$.

方法2 $0 \le \left|\dfrac{xy^2 \sin xy}{x^2+y^4}\right| \le \dfrac{1}{2}|\sin xy| \to 0$

$x\to 0$ $\sin x \sim x$

$\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^4}\right| \le 1$

$a$ $b$ $a^2+b^2$ $xy$

方法3 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2\sin(xy)}{x^2+y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^4} = 0$

$0 \le \left|\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^4}\right| \le |y^3| \to 0$

$\dfrac{ab}{a^2+b^2} \le \dfrac{1}{2}$

**常用方法**

1. 利用极限性质（四则运算法则, 夹逼原理）

2. 消去分母中极限为零的因子(有理化, 等价无穷小代换)

3. 利用无穷小量与有界变量之积为无穷小量.

【例2】证明下列重极限不存在

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; 不存在　　2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$; 不存在

$\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^4\sin^4\theta} = \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta} = \begin{cases}0, & \cos\theta\neq 0\\ 0, & \cos\theta=0\end{cases}$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$. $(x,y)\to(0,0)\to r=0$

【证】1） $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$

则重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

2） $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k^2x}{1+k^4x^2} = 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; \lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=A$

$\lim\limits_{\substack{x=y^2\\y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^4}{y^4+y^4} = \dfrac{1}{2}$

**常用方法**

沿两种不同路径极限不同（通常可取过点 $(x_0,y_0)$ 的直线）

## （二）连续

**1）定义** $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

**2）性质**

（1）多元连续函数的和、差、积、商（分母不为零）及复合仍为连续函数.

（2）多元基本初等函数在其定义域内连续；初等函数在其定义区域内连续.

（3）有界闭区域上连续函数的性质

（a）**有界性**：若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 $D$ 上有界.

（b）**最值性**：若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 $D$ 上必有最大值和最小值.

（c）**介值性**：若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 $D$ 上可取到介于最小值与最大值之间的任何值.

考型

【例3】判断函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的连续性.

2次

1次

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 1$$

【解】因为 $0\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le|y|$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

若 $a=0$, $f(x,y)$ 处处连续；若 $a\neq0$, $f(x,y)$ 除点 $(0,0)$ 外处处连续.

## (3) 偏导数

$z = f(x,y) = \varphi(x)$

1) 定义 $\varphi'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x}$

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

$f(x,1)$

$f_x(x,y)$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \frac{d}{dy} f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$

【例4】设 $f(x,y) = x + 2y + (y-1)\arcsin\dfrac{x}{1+xy}$，求 $f_x(0,1), f_y(0,1)$.

“先代后求”

【解】 $f_x(0,1) = \dfrac{d}{dx} f(x,1)\Big|_{x=0} = \dfrac{d}{dx}(x+2)\Big|_{x=0} = 1$

$f_y(0,1) = \dfrac{d}{dy} f(0,y)\Big|_{y=1} = \dfrac{d}{dy}(2y)\Big|_{y=1} = 2;$

$f(0,y)=\ln y$ $\qquad y=1$

**【例】（2023年3）** 已知函数 $f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$，则（ ）

A. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在；

B. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在；

C. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均存在；

D. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在；

$f(x,1)=\ln(1+|x\sin 1|)=\varphi(x)$

$\varphi(0)=0$

$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\sin 1}{x}$

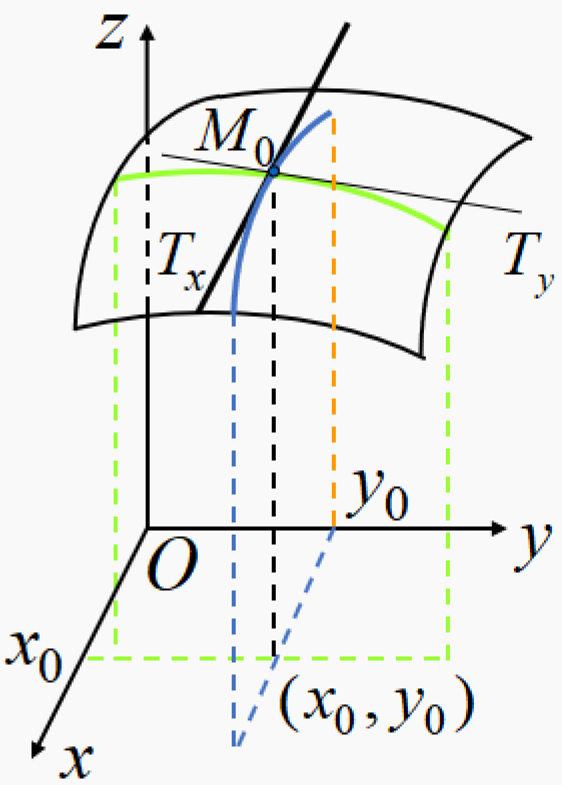
不存在

## 2) 几何意义

$z=f(x,y)$

$f_x(x_0,y_0)$ $z=f(x,y_0)$

$f_y(x_0,y_0)$ $z=f(x_0,y)$



**3) 高阶偏导数** 设 $z=f(x,y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

**定理** 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 及 $f''_{yx}(x,y)$ 在区域 $D$ 内连续，则在区域 $D$ 内恒有

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$$

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$

$A\Delta x = dy$



## （四）全微分

$dz$

**1) 定义：** 若 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

$\exists A.B.$

【注】以下4条等价

$(x-x_0)$ $(y-y_0)$ $x$ $y$ 8:12

（1） $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = [A\Delta x + B\Delta y] + o(\rho)$;

（2） $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)] - [A\Delta x + B\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$;

（3） $\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x-x_0) + B(y-y_0) + o(\rho)$;

（4） $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{[f(x,y) - f(x_0,y_0)] - [A(x-x_0)+B(y-y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$

**2) 判定:** $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

**(1) 必要条件** $f_x(x_0, y_0)$ 与 $f_y(x_0, y_0)$ 都存在;

**(2) 充分条件** $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 连续; $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_x(x,y) = f_x(x_0,y_0)$

**(3) 用定义判定**

a) $f_x(x_0, y_0)$ 与 $f_y(x_0, y_0)$ 是否都存在?

* b) $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \dfrac{\Delta z - [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ 是否为零?

**3) 计算:** 若 $f(x, y)$ 可微, 则 $dz = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$

## （五）连续、可导、可微的关系

$f'(x_0)$

$x_0$

### 一元函数

$|x|$

连续 $\rightleftarrows$ 可导

$|x|$

可微

### 多元函数

$|x|+|y|$

连续 可导

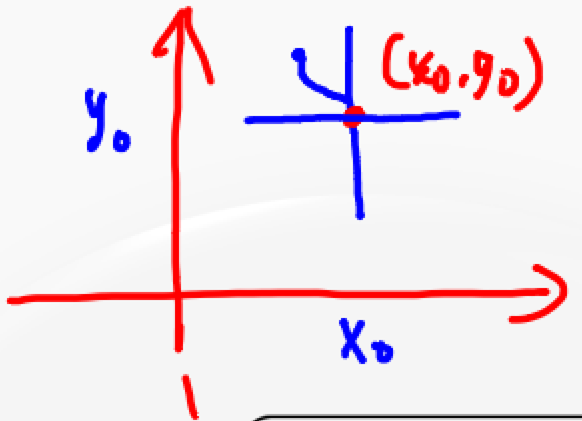
$|x|+|y|$

可微

一阶偏导数连续

$f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ 存在

$f(x,y_0)$ $f(x_0,y)$



## 题型一 讨论连续性、可导性、可微性

【例1】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$

A）不连续；　　B）连续但不可导；

C）可导但不可微；　　D）可微.

先代后求

【解】$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$

$f(x,0)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

① $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=0$

② $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=0$

$\Delta y = k\Delta x$

$=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta y(\Delta x)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$ 不存在 ~~不存在~~

3 3

【例2】考虑二元函数下面四条性质

① $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续;

② $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处两个偏导数连续;

③ $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微;

可导.

④ $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处两个偏导数都存在. 则

(A) ③ $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ④.　　(B) ③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ①;

(C) ③ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ①;　　(D) ② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ①;

【例3】二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$ 连续.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$； 偏导. $\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to 0}} f_x(x,0)=f_x(0,0)$

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$； $f(x,0)=1$ $f_x(x,0)=0$ $f_x(0,0)=0$

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f_x(x,0)-f_x(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}[f_y(0,y)-f_y(0,0)]=0$. $f_x(x,y)=f_x(0,0)$

【解1】排除法 (A) (B) 显然不正确，

$z=1$

令 $f(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}[f_x(x,0)-f_x(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}[f_y(0,y)-f_y(0,0)]=0$

但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 在点不连续，因此不可微.

【解2】直接法　由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 知

$y=0, x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{|x|}=0$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\cdot\frac{x}{|x|}=0$$

$1$

$-1$

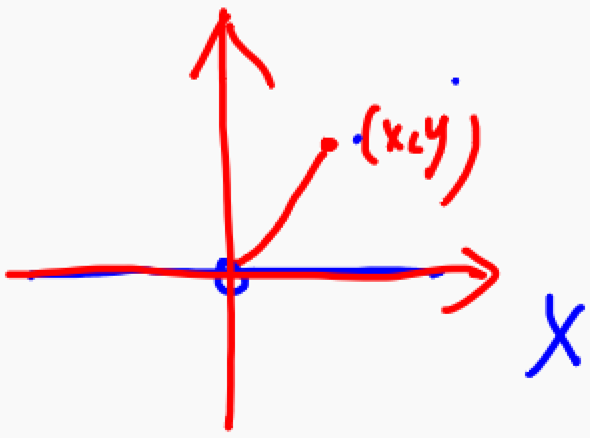
① $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

同理　$f_y(0,0)=0.$

② $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微，故 应选（C）。



【解3】直接法 由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 知 *

$A=B=0$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{[f(x,y)-f(x_0,y_0)]-[A(x-x_0)+B(y-y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0.$$

* $\exists A, B.$

$x_0=0$

$y_0=0$

【例4】如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

$=|x|+|y|$　$=1$

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

$f(x,y)\to0$　$x^2+y^2\to0$　$f(0,0)=0$

$f(x,y)=1$

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

$f(x,y)\to0$　$|x|+|y|\to0$

$f(x,y)=1$

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

$x^2+y^2\to0$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

$\Rightarrow f(x,y)$ 可微.

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}\text{ 存在}$$

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\underbrace{\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}}_{\text{存在}}\cdot\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to0}\to0$$

【例5】 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$f(0,1)-1=0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0，则 \left.dz\right|_{(0,1)}=\underline{2dx-dy}.$$

$f(0,1)=?$

【解1】由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 得，

$f(0,1)=1$ ，且

$A=2$ $B=-1$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{[f(x,y)-f(0,1)]-[2x-(y-1)]}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$$

$x_0=0$ , $y_0=1$

$dz=Adx+Bdy$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{[f(x,y)-f(x_0,y_0)]-[A(x-x_0)+B(y-y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0.$$

【例5】 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0,$$ 则 $dz|_{(0,1)}=$______.

$=0$

【解2】 具体采找函

$f(x,y)=2x-y+2$

$df=2dx-dy$

【例6】设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续, 问

1）$\varphi(x,y)$ 应满足什么条件才能使 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 都存在?

2）在上述条件下 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否可微?

$\varphi(0,0)$

【解】1）由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}=\begin{cases}\varphi(0,0), & 当\Delta x\to 0^+,\\ -\varphi(0,0), & 当\Delta x\to 0^-,\end{cases}$

由此可知, 当 $\varphi(0,0)=0$ 时, $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 都存在, 且为零.

$f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

2）当 $\varphi(0,0)=0$ 时,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\varphi(\Delta x,\Delta y)\to 0$$

$$\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\frac{|\Delta x|+|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$0\le 1+1=2$

$f_y(x,y)=f_y(x_0,y_0)$

**【例7】** 设 $f_x(x_0,y_0)$ 存在，$f_y(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续，证明 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微.

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

**【分析】** 只要证 $\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)$

$\boxed{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x}$

**【证】** $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$

$\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\to f_x(x_0,y_0)$

由拉格朗日中值定理得

① $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)=f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$

由 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在可知

$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=f'_x(\xi,y_0)\Delta x$

$=f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0)\Delta x$

② $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+\alpha_2\Delta x$

则 $\Delta z=f_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y+f_x(x_0,y_0)\Delta x+\alpha_2\Delta x$

又由 $f'_y(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续可知

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y) = f'_y(x_0,y_0)$$ +α

$$f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y) = f'_y(x_0,y_0)+\alpha_1$$

$$\Delta z = f_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta y + f_x(x_0,y_0)\Delta x + \alpha_2\Delta x$$

$$\frac{\gamma_1\Delta y+\gamma_2\Delta x}{\rho}\to 0$$

$$= o(\rho)$$

$$\left|\frac{\alpha_1\Delta y+\alpha_2\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \le \frac{|\alpha_1||\Delta y|+|\alpha_2||\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \le |\alpha_1|+|\alpha_2| \to 0.$$

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho)$$