高数精讲（8）

8	导数的应用、方程的根及函数不等式举例	P70-P81

P81-91

主讲 武 忠 祥 教授

二. 常考题型方法与技巧

基本

题型一 函数的单调性、极值及最值

题型二 曲线的凹向、拐点、渐近线及曲率

较难

题型三 方程根的存在性及个数

题型四 证明函数不等式

难

题型五 微分中值定理有关的证明题 ✓

题型一 函数的单调性、极值与最值

【例1】求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\,dt$ 的单调区间与极值.

对称，美

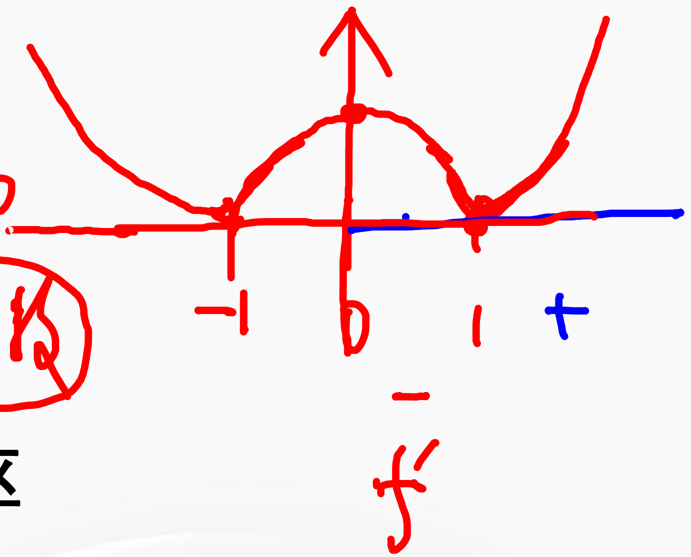
【解】 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，由于

$$f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}\,dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}\,dt,$$

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}\,dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}\,dt,=0$$

所以 $f(x)$ 的驻点为 $x=0,\pm1$． 列表讨论如下：

$f(x)$偶函数



因此，$f(x)$ 的单调增加区间为 $(-1,0)$ 及 $(1,+\infty)$, 单调减少区间为 $(-\infty,-1)$ 及 $(0,1)$; 极小值为 $f(\pm1)=0$, 极大值为

$$f(0)=\int_0^1 te^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

隐.

【例2】设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

!!!

【解】方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 两端对 x 求导得

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0 \qquad (1)$$

令 $y'=0$，得 $y^2+2xy=0$，由此可得，$y=0, y=-2x,$

显然 $y=0$ 不满足原方程，将 $y=-2x$ 代入原方程得

$-6x^3+6=0$，解得 $x_0=1, f(1)=-2$，$f'(1)=0.$

极小值.

对（1）式两端再对 x 求导得

$$6yy'^2+3y^2y''+4yy'+2xy'^2+2xyy''+2y+4xy'+x^2y''=0$$

将 $x=1, f(1)=-2$，$f'(1)=0$ 代入上式得 $\boxed{f''(1)=\frac{4}{9}>0.}$

【例3】设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$. 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【解】由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1>0$，则在 $x=0$ 的某去心邻域内

$$\frac{f''(x)}{|x|}>0,$$ 即 $f''(x)>0$，从而 $f'(x)$ 单调增，

又 $f'(0)=0$，故 选（B）.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=-1<0$

$f''(0)=0$

$f''(x)>0$

$f''(0)\geq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f''(x)=f''(0) > 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f''(x)>0$

$f''(0)>0$

$\lim\limits_{x\to 0} f''(x)=f''(0)\geq 0$

$f'(0)=0$

$\frac{1}{n}>0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

【例4】设 $f(x)$ 二阶导数连续，且 $(x-1)f''(x)-2(x-1)f'(x)=1-e^{1-x}$,

1）若 $x=a\ (a\neq 1)$ 是极值点时，是极小值点还时极大值点？

2）若 $x=1$ 是极值点时，是极大值点还是极小值点？

$f'(a)=0$

【解】 1）由于 $x=a$ 为极值点，则 $f'(a)=0$,

$$(a-1)f''(a)-2(a-1)f'(a)=1-e^{1-a}$$

$$f''(a)=\frac{1-e^{1-a}}{a-1}>0\qquad (a\neq 1)$$

则 $f(x)$ 在 $x=a$ 取极小值.

$f'(1)=0.$ $f''(1)=\lim\limits_{x\to 1} f''(x)$

2）由 $(x-1)f''(x)-2(x-1)f'(x)=1-e^{1-x}$ 知

$$f''(x)-2f'(x)=\frac{1-e^{1-x}}{x-1}$$

$f''(1)=1>0$

$$\lim_{x\to 1} f''(x)-2\lim_{x\to 1} f'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{1-x}}{x-1}=1,\ 则\ f''(1)=1>0,$$

$f(x_0)$ $\to \left(-f(x_0)\right)=0$

【例5】设 $f(x)$ 二阶可导，且 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)}{h^2}=a\neq 0$

$h^2\to 0$

试讨论 $f(x)$ 在 x_0 点的极值.

【解1】由 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)}{h^2}=a\neq 0$ 知，$\boxed{f'(x_0)=0,}$

$\to 0$ $\to 0$

即 x_0 为驻点. 且

$$a=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{2h}\ \cancel{=}\ \lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)}{2}\ \cancel{=}\ \frac{f''(x_0)}{2}\neq 0$$

$$\overset{*}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}f''(x_0)\neq 0$$

【例5】设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)}{h^2}=a\neq 0$

试讨论 $f(x)$ 在 x_0 点的极值.

【解2】由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)}{h^2}=a\neq 0$ 知, $f'(x_0)=0$,

$x=x_0+h$

$f(x_0+h)$ $\quad f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2$

$$a=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2}$$

$x-x_0=h$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f'(x_0)h+\boxed{\dfrac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)}-f(x_0)}{h^2}$$

$$=\frac{f''(x_0)}{2}$$

【例5】设 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)}{h^2}=a\neq 0$

试讨论 $f(x)$ 在 x_0 点的极值.

【解3】由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)}{h^2}=a\neq 0$ 知，$\underline{f'(x_0)=0}$,

即 x_0 为驻点. 且

$$+\quad a=\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2}}\ \begin{matrix}>0\\ >0\\ <0\end{matrix}$$

极小

题型二 曲线的凹向、拐点、渐近线及曲率

【例1】设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=\sin x$，且 $f'(0)=0$．则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

$f''(0)=0$

$f'''(0)=?$

【解】 选（C）

$f'''(x)+2f'(x)f''(x)=\cos x$

$f'''(0)=1\neq 0$

$\boxed{f''(x)=\sin x-[f'(x)]^2}$

可导

【例2】 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3}, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 确定，求

$y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

$x<\frac{1}{3}$

【解】 令 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}=0$，得 $t=\pm1$.

$t>0$，凹　$x>\frac{1}{3}$　$y''>0$

$t<0$　凸

$x(t)\uparrow$

当 $t=1$ 时，$x=\dfrac{5}{3}$；当 $t=-1$ 时，$x=-1$.

$t>0$　$x>\frac{1}{3}$

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{4t}{(t^2+1)^2}}{t^2+1}=\dfrac{4t}{(t^2+1)^3}=0$，得 $t=0$，即 $x=\dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{dx}{dt}=t^2+1>0$

<0

<0

由此可知，函数 $y(x)$ 的极大值为 $y(-1)=y\big|_{t=-1}=1$，极小值为

$$y\left(\frac{5}{3}\right)=y\big|_{t=1}=-\frac{1}{3}.$$

曲线 $y=y(x)$ 的凹区间为 $(\frac{1}{3},+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,\frac{1}{3})$.

由于 $y(\frac{1}{3})=y\big|_{t=0}=\frac{1}{3}$，所以曲线 $y=y(x)$ 的拐点为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

【例3】 曲线 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

【解1】 ① $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{3/2}}{x\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2}=1=a$

② $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-ax]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\overset{\infty}{(1+x)^{3/2}}}{\sqrt{x}}-\overset{\infty}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{3/2}-x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}\left[(1+\frac{1}{x})^{3/2}-1\right]}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}\frac{3}{2}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}=\frac{3}{2}=b$

$\frac{(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x}{x\to 0}$

则斜渐近线方程为 $y=x+\frac{3}{2}$.

【例3】 曲线 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

$\frac{1}{x}\to 0^+$

【解2】 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=x(1+\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}}$

$y=ax+b+\alpha(x)$

$\alpha(x)\to 0$

$x\to+\infty$

$=x[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})]$

$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+o(x)$

$x\to 0$

$=\boxed{x+\frac{3}{2}}+x\cdot o(\frac{1}{x})$

$x\cdot o(\frac{1}{x})\to 0$

$\frac{o(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\to 0$

$y=x+\frac{3}{2}$

【例4】 曲线 $y=e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线的条数为

$\frac{\pi}{4}$

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=0$

则 $y=0$ 为水平渐近线　　$-\infty$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{x+\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=+\infty$

则 $x=0$ 为其垂直渐近线

1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=+\infty$$

则原曲线无斜渐近线，应选（B）．　$+\infty$

【例5】求曲线 $y = x\arctan x$ 的渐近线.

【解1】显然曲 $y = x\arctan x$ 无水平渐近线和垂直渐近线.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2} = a$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - ax\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\arctan x - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1 = b$$

$\therefore\ y = ax + b = \frac{\pi}{2}x - 1$ 是 $x \to +\infty$ 时的斜渐近线.

同理 $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ 是 $x \to -\infty$ 时的斜渐近线.

偶

【例5】 求曲线 $y = x\arctan x$ 的渐近线.

$y = ax + b + \varphi(x)$, $\varphi(x) \to 0$, $x \to +\infty$

8:14

【解2】 显然曲 $y = x\arctan x$ 无水平渐近线和垂直渐近线.

$$y = x\arctan x = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right) \qquad \left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\ (x > 0)\right)$$

$x=1$

$$= \frac{\pi}{2}x - x\arctan\frac{1}{x}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}x - 1} + \left[1 - x\arctan\frac{1}{x}\right] \to 0$$

对称关.

$\therefore\ y = ax + b = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ 是 $x \to +\infty$ 时的斜渐近线.

$y = x\arctan x$ 是偶函数，则 $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$ 是 $x \to -\infty$ 时的斜渐近线.

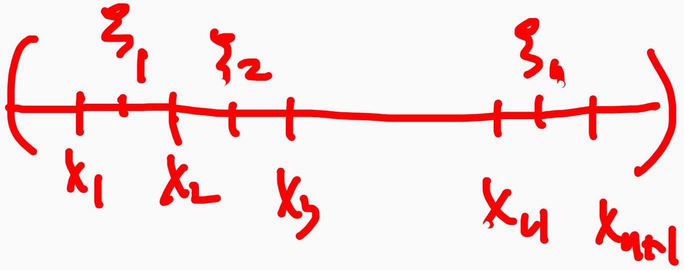
题型三 方程的根的存在性及个数

1.存在性：

$F'(x) = f(x) = 0$

方法1：零点定理；

反证：n+1 个.



方法2：罗尔定理；

2.根的个数：

$f(x)$ 有n个零

$f'(x)$ 有n-1 --

-- -- --

方法1：单调性；

方法2：罗尔定理推论；

$f^{(n)}(x)$ 有个零点，矛盾.

罗尔定理推论： 若在区间 I 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$，则方程 $f(x)=0$ 在 I 上最多 n 个实根.

【例1】设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为任意实数，求证方程

$f(x)=a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx = 0$ 在 $[0,\pi]$ 内必有实根.

【证】令 $f(x)=a_1\sin x+\dfrac{a_2}{2}\sin 2x+\cdots+\dfrac{a_n}{n}\sin nx$

显然 $f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx$ $\Rightarrow f'(\xi)=0$

①

②

③ $f(0)=0=f(\pi)$

$f(x)$

$f(0)=a_1+\cdots+a_n$

$f(\pi)=-a_1+a_2-a_3\cdots$

【例2】 试讨论方程 $\ln x-\frac{x}{e}+1=0$ 的实根个数.

【解】 令 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+1$, 则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$,

$x>0$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$.

当 $x\in(0,e)$ 时， $f'(x)>0, f(x)$ 单调增.

当 $x\in(e,+\infty)$ 时， $f'(x)<0, f(x)$ 单调减.

又 $f(e)=1>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$;

则 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 内各有一个零点，故原方程

有两个实根。

【例4】 试证方程 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个实根.

$0\ \pm 1,\ \pm 2$

【证】令 $f(x) = 2^x - x^2 - 1$, 则

$[2,5]$

$f(x) = 2^x - x^2 - 1$

$$f(0) = 0,\ \ f(1) = 0,\ \ f(2) = -1 < 0,\ \ f(5) = 2^5 - 25 - 1 = 6 > 0$$

$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x = 0$

从而 $f(x)$ 在 (2,5)内至少有一个零点，原方程至少有三个实根，又

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2,$$

$$f'''(x) = 2^x \ln^3 2 \neq 0$$

从而原方程最多三个实根，原题得证.

【例5】 试确定方程 $x = ae^{x}(a>0)$ 实根个数.

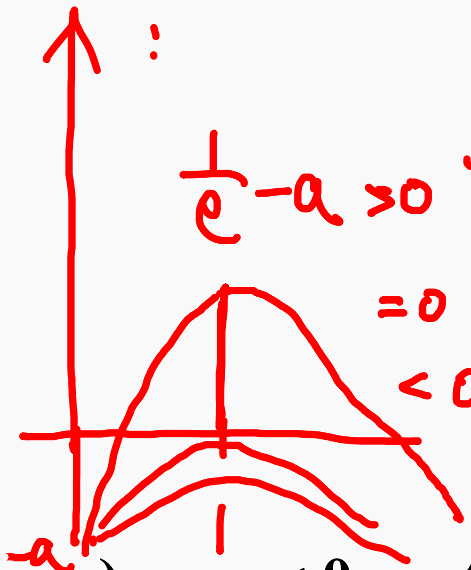
【解】 将原方程变形得 $xe^{-x} - a = 0$

* 分离参数

令 $f(x) = xe^{-x} - a \quad (x>0)$

$x - ae^{x} = 0$

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$



$\frac{1}{e} - a > 0$ 2个

$f(x) = x - ae^{x}$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$

$= 0$ 1个

$f'(x) = 1 - ae^{x} = 0$

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调增.

< 0 无

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$, $f(x)$ 单调减.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -a < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}} - a\right) = -a < 0$ $\quad f(1) = \frac{1}{e} - a$

则 1）当 $a < \frac{1}{e}$ 时，两个实根.

2）当 $a = \frac{1}{e}$ 时，唯一实根. 3）当 $a > \frac{1}{e}$ 时，无实根.

【例6】 设当 $x>0$ 时, 方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解, 试求 k 的取值范围.

【解2】 将原方程变形得 $k=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}=f(x)\quad(x>0)$

令 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\quad(x>0)$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}=\frac{3-x^2}{x^4}$$

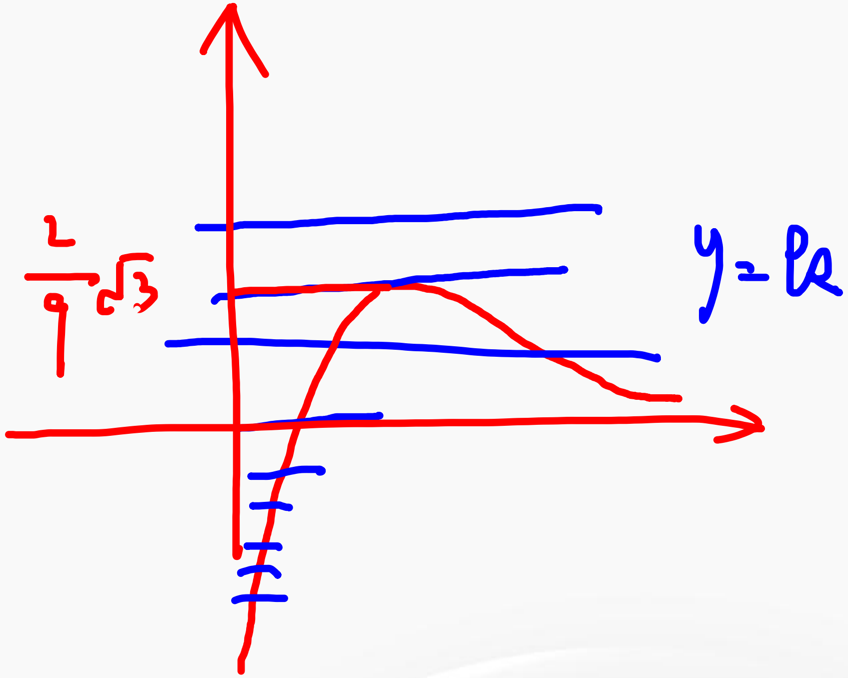
令 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{3}$

当 $x\in(0,\sqrt{3})$ 时, $f'(x)>0, f(x)$ 单调增.

当 $x\in(\sqrt{3},+\infty)$ 时, $f'(x)<0, f(x)$ 单调减.

$$f(\sqrt{3})=\frac{2}{9}\sqrt{3},\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{x^3}=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

从而若原方程有具仅有一个实根, 则 $k=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ 或 $k\le0.$



【例7】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且当 $0 \le x \le 1$ 时，

$0 < f(x) < 1, f'(x) \ne 1$. 试证在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使 $f(x) = x$.

【证】 令 $F(x) = f(x) - x$，则

$F'(x) = f'(x) - 1 \ne 0$

$$F(0) = f(0) > 0$$

$$F(1) = f(1) - 1 < 0$$

由零点定理知方程 $F(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一实根，

$F'(x) = f'(x) - 1 \ne 0$，则 $F(x) = 0$ 最多一个实根，原题得证.

【例8】设 $f''(x)<0$, $f(1)=2$, $f'(1)=-3$. 求证: $f(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 有且仅有一根.

【证1】由 $f''(x)<0$ 及 $f'(1)=-3<0$ 知方程 $f(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上最多一个实根.

由泰勒公式知当 $x\in(1,+\infty)$ 时

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2$$

$$=2-3(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2$$

$$\le 2-3(x-1)=5-3x$$

则 $f(2)\le 5-6=-1<0$

【证2】$f(2)-f(1)=f'(c)(2-1)$ $(1<c<2)$

$\le f'(1)(2-1)$

即 $f(2)\le f(1)+f'(1)(2-1)=2-3=-1<0$

$f'(x)=-3$

$f(x_0)<0$

$f(2)-f(1)$

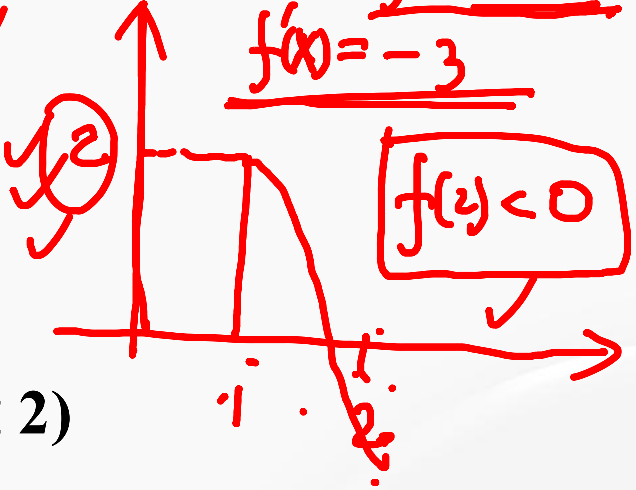
$f'(x)<-3$

$f'(x)=-3$

$f'(x)<0$

$\boxed{f(2)<0}$

$f(x)\downarrow$



题型四 证明函数不等式

证明不等式常用的五种方法：

1）单调性； 2）最大最小值；

3）拉格朗日中值定理；

4）泰勒公式；

5）凹凸性；

【例1】设 $x\in(0,1)$，证明 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

【证】令 $f(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$ ，则 $f(0)=0$

$$f'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x) > 0 \quad f'(0)=0$$

$$f''(x)=2-\frac{2\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2}{1+x}$$

$$=\frac{2}{1+x}[x-\ln(1+x)]>0 \qquad x\in(0,1),$$

则当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$. 原题得证.

【注】当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

【例2】求证：$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a} \quad (0 < a < b)$

【证1】只要证 $(b+a)(\ln b - \ln a) > 2(b-a)$

令 $f(x) = (x+a)(\ln x - \ln a) - 2(x-a) \quad x \in [a, b]$

$\because \quad f'(x) = (\ln x - \ln a) + \frac{x+a}{x} - 2,$ > 0

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2} > 0$$

$\therefore \quad f'(x)$ 单调增，且 $f'(a) = 0,$

则 $f'(x) > 0$ ，$f(x)$ 单调增且 $f(a) = 0 \quad \therefore \quad f(x) > 0 \quad f(b) > 0$

即 $\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}$

$$\boxed{\frac{\ln b - \ln a}{b-a}} > \frac{2}{b+a}$$

$f(a) = 0$ $\quad f(b) > 0$

$\geq \quad > \frac{a+b}{2}$

$a < \frac{a+b}{2}$

$a \quad \frac{a+b}{2} \quad b$

【例2】求证： $\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}\quad(0<a<b)$

【证2】只要证 $\ln\frac{b}{a} > \frac{2(\frac{b}{a}-1)}{\frac{b}{a}+1}$,

即 $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1},(x>1).$

令 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1},(x\geq 1).$

则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0,(x>1).$

又 $f(1)=0$, 则 $f(x)>0,(x>1)$. 原题得证.

【例3】 比较 e^{π} 与 π^{e} 的大小.

lnx

【解】 取对数得 $\pi\ln e \;;>\; e\ln\pi$

$$\frac{\ln e}{e} \;;>\; \frac{\ln\pi}{\pi}$$

只要考察 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[e,\pi]$ 上的单调性，

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0 \qquad x\in(e,\pi)$$

则 $e^{\pi}>\pi^{e}$

【例4】设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)\ge x$.

$f(x)\to0$，$x\to0$，$x_0=?$

$f(x)-x\ge0$

【证1】由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$ 知 $f(0)=0,\ f'(0)=1$，由泰勒公式知

泰勒

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\ge x$$

$f(x)=f(x)-f(0)$

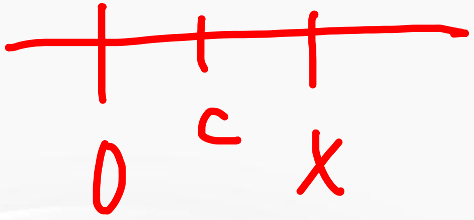
【证2】$f(x)=f(x)-f(0)=f'(c)x$

拉.

$x>0$

由于 $f'(x)$ 单调增，则

$$f(x)=f'(c)x\ge f'(0)x=x$$



【证3】令 $F(x)=f(x)-x$，只要证明 $F(x)\ge0$

由于 $F'(x)=f'(x)-1$，显然 $F'(0)=f'(0)-1=0$，

$F''(0)>0$ 极小值

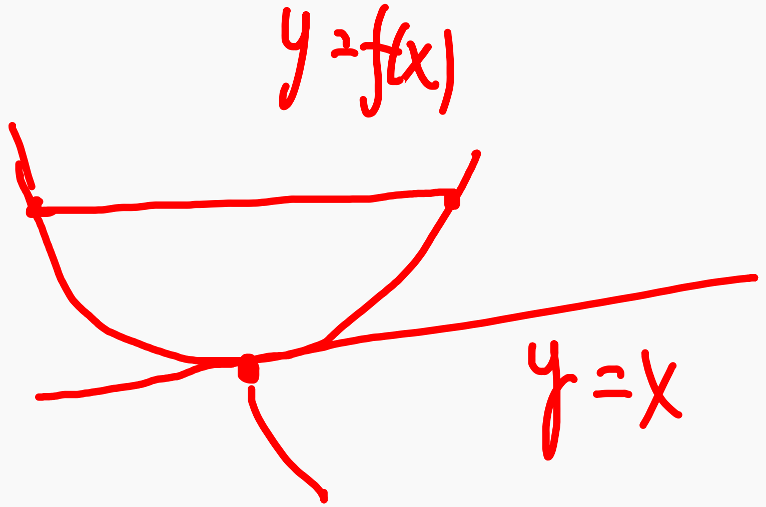
又 $F''(x)=f''(x)>0$

$F(x)\ge F(0)=0$

【例4】设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)\geq x$.

【证4】由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知 $f(0)=0$, $f'(0)=1$,

凹 凸性 $\boxed{f(x)\geq x}$



x=0. 切线 $y-0=1\cdot(x-0)$

$y=x$

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=1$, $f(x)>-f'(x)$ $(x\geq 0)$. 则（ ）

A. $\dfrac{f(2)}{f(1)}>1$ B. $\dfrac{f(0)}{f(1)}>e$ C. $\dfrac{f(2)}{f(1)}>\dfrac{1}{e}$ D. $\dfrac{f(2)}{f(0)}>e$

【解1】直接法 由题设可知 $f'(x)+f(x)>0$,

即 $[e^x f(x)]'=e^x[f'(x)+f(x)]>0$

则 $F(x)=e^x f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增，又 $F(0)=1$, 则 $F(x)>0.$

$$\frac{F(2)}{F(1)}=\frac{e^2 f(2)}{ef(1)}>1$$

从而 $\dfrac{f(2)}{f(1)}>\dfrac{1}{e}$ ，故应选C.

e^x

$e^x > -e^x$

【例5】 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=1, f(x) > -f'(x)\,(x \geq 0)$. 则（ ）

A. $\dfrac{f(2)}{f(1)} > 1$　　B. $\dfrac{f(0)}{f(1)} > e$　　C. $\dfrac{f(2)}{f(1)} > \dfrac{1}{e}$　　D. $\dfrac{f(2)}{f(0)} > e$

【解2】排除法 令 $f(x)=1$, 显然满足 $f(0)=1, f(x) > -f'(x)\,(x \geq 0)$

$f(x)=e^x$

$$\frac{f(2)}{f(1)}=1, \qquad \frac{f(0)}{f(1)}=1, \qquad \frac{f(2)}{f(0)}=1,$$

$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}$

$f(x)=e^{\alpha x}$

$f'(x)=\alpha e^{\alpha x}$

$\alpha=0$　　$e^{\alpha x} > -\alpha e^{\alpha x}$

$f(x)=e^{0x}=1$　　$1 > -\alpha$

$\alpha > -1$

则排除A, B, D, 故应选C.

微信扫码，关注【公众号：武忠祥老师】

定期更新：每日一题、数学资料、阶段备考等考研干货

还不关注，那你就慢了