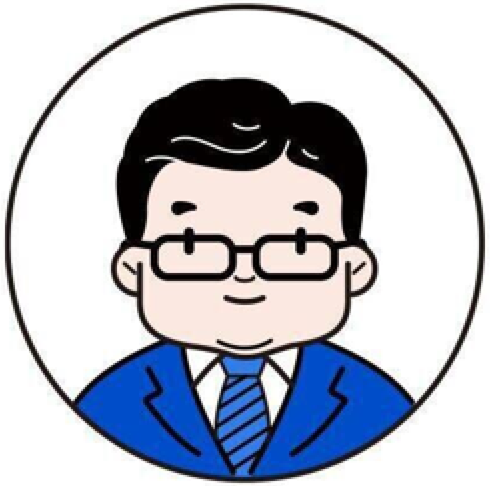
高数精讲（3）

3	求极限常用方法，求极限常见类型	P16-P27

$P27-37$



主讲 武忠祥 教授

方法2. 利用基本极限求极限

常用的基本极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$;

1^∞ 1^∞

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0)$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1\\ \text{不存在}, & x=-1.\end{cases}\qquad \lim_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

$=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^0=1$ ✗ x趋近

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ✗ $=1$ ✓ ∞^0

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$ ✗ $=1$ ✗ ∞^0

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$ ✓

$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})^{x}=1$ ✓

$[f(x)]^{g(x)}$

$f(x)>0$!!!

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

e^∞

方法3.利用等价无穷小代换求极限

1. 常用等价无穷小 当 $x \to 0$ 时,

1) $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$;

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $1-\cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2}x^2$ $\quad a^x - 1 \sim x\ln a$,

2) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$ $\quad \tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$ $\quad x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$

$\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}$ $\quad x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

3) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$,

则 $\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$

$\int_0^{x^2} \ln(1+t^2)dt \sim \int_0^{x^2} t^2 dt = \frac{x^6}{3}$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{1}=1$

$x\to 0$

$1-\sqrt[3]{\cos x} \sim \frac{\frac{1}{3}}{2}x^2$

$\varphi(x)\to 0$

$x\to 0$ $\int_0^x \ln(1+t^2)dt$

$\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt \sim \int_0^{\varphi(x)} g(t)dt$ $\quad \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$

$\ln(1+t^2)\sim t^2$

$x\to 0$

$\int_0^x e^{t^2}dt \sim \int_0^x 1dt = x$

$\lim \frac{e^{x^2}}{1}=1$

$f(x)\to A\ne 0$, $g(x)\to A$, $x\to a$

2. 等价无穷小代换的原则

1）乘、除关系可以换；

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$

2）加、减关系在一定条件下可以换；

(1) 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$. 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$.

(2) 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$. 则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

【例】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$

【解1】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

$\sin x-\tan x$

【解2】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)-(\sin x-x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{3}x^3)-(-\frac{1}{6}x^3)}{x^3}$$ $=\frac{1}{2}x^3$

$$=\frac{1}{2}$$

方法4. 利用洛必达法则求极限

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

若 1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0(\infty)$;

2） $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

* 3） $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞ ）;

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. 存 (∞)

$\lim [f(x)]^{g(x)}$

$= e^{\lim g\ln f(x)}$ $\quad 0\cdot\infty$

【注】 $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^{∞}; ∞^{0}; 0^{0}.

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\Leftarrow\begin{cases}0\cdot\infty \Leftarrow \begin{cases}1^{\infty}\\ \infty^{0}\\ 0^{0}\end{cases}\\ \infty-\infty\end{cases}$$

$\boxed{3部曲}$

① 原式 $=\lim(1+\alpha)^{\beta}$

② $\alpha\beta\to A$

③ 原式 $=e^{A}$

方法5 利用泰勒公式求极限

定理（泰勒公式） 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

特别是当 $x_0=0$ 时

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

若 $\alpha \sim \beta$，则 $\alpha = \beta + o(\beta)$

几个常用的泰勒公式

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

(2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

(4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\tan x - x \sim \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}}$$

【例】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin^2 x}$.

$(1+x)^\alpha$

$\dfrac{0}{0}$

$\dfrac{x^4}{x^4}$

【解1】由于 $\sqrt{1+x^2}=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}-1)}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$$

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{[-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)]x^2}=-\frac{1}{12}$$

【例】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\underbrace{\sin^2 x}_{x^2}}$. $\dfrac{0}{0}$

$\cos x - e^{x^2} = (\cos x - 1) - (e^{x^2} - 1) \sim -\frac{1}{2}x^2 - x^2 = -\frac{3}{2}x^2$

【解2】$原式 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{-\frac{3}{2}x^4} \overset{等}{=} \dfrac{0}{0}$

$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{1}{2}x^2$

$\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{-6x^3} \overset{等}{=} -\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$= -\frac{1}{12}$

n趋近 $\to \infty$

方法6 利用夹逼准则求极限

$= 0$

【例】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right] = \frac{1}{2}$

小 大

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n} \le [\quad] \le \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{1}{2}$$

方法7 利用定积分的定义求极限

$= \int_a^b f(x)dx$

$= \boxed{\ln 2}$

【例】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right].$

"可爱因子"

大

$\frac{n}{n+n} \le [\quad] \le \frac{n}{n+1}$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\frac{1}{2} \qquad\qquad 1$

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$

$=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \;=\ln 2$

$= \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

$\ln 2n - \ln n$

$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

$= \ln 2$

$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n+2} < \ln(n+2) - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1}$

$\cdots\cdots$

方法8 利用单调有界准则求极限

【例】设 $x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right), \; n=1,2,\cdots$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【解】① 由题设知 $x_n>0$, 且

难

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{x_n})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right]$$

$$\geq \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n}}=1$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{x_n^2}\right]\leq\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{1}\right]=1$$

$2a=a+\frac{1}{a}$

$a=\frac{1}{a}$ $a^2=1$ $a\pm1$

$a=1$

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. ② $a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ $a=1$.

二. 求极限常见的题型

(一) 函数的极限

7 种不定式. 即 $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0\cdot\infty$ $\infty-\infty$ 1^{∞} ∞^{0} 0^{0}

重点 $\frac{0}{0}$ 1^{∞}

1. “$\frac{0}{0}$”型极限

8:07

常用的方法有三种

1）洛必达法则

2）等价无穷小代换

3）泰勒公式

【原式化简】

1）极限非零的因子极限先求出

2）有理化

3）变量代换

【例1】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

$f(x)=\sqrt{1+x}$ $\quad \dfrac{0}{0}$

$2\times 2=4$

$2+2=4$

$f(b)-f(a)$

$=f'(\xi)(b-a)$

$\dfrac{1}{2}$

?

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}$ (有理化)

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x[1-\cos x]}{x[\ln(1+x)-x]}$ (极限非零因子极限先求)

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x(-\frac{1}{2}x^2)}$ (等价代换)

$=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\tan x-\frac{1}{2}\sin x}{(\sqrt{1+\tan x}-1)-(\sqrt{1+\sin x}-1)}$

【例1】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

$x^2+\sin x \sim \sin x$

$f(x)=\sqrt{1+x}\sim x$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x}{x}=$

【解2】原式 $\stackrel{*}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+\xi}}[\tan x-\sin x]}{x[\ln(1+x)-x]}$.

（拉格朗日定理）

$1+0=1$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}$

$\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}}-1$

$\boxed{(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x}$

【解3】原式 $\stackrel{*}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}\left[\sqrt{1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}}-1\right]}{x[\ln(1+x)-x]}$

$x\to 0$ 时，$x+x^2\sim x$

低+高～低

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}}{x\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)}$

【例2】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-(2-2\cos x)}{x^4}$ $\dfrac{0}{0}$

$e^x-1\sim x$

【解1】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2-2\cos x}[e^{x^2-2+2\cos x}-1]}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$ （非零因子极限先求，等价代换）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2+2[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)]}{x^4}=\dfrac{1}{12}$

$e^{\alpha(x)}-e^{\beta(x)}\sim\alpha(x)-\beta(x)$ （$\alpha(x)\to0$，$\beta(x)\to0$）

$f(x)=e^x$

【解2】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\xi}[x^2-2+2\cos x]}{x^4}$ （拉格朗日定理）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-2\sin x}{4x^3}$ （洛必达法则）

$e^x-e^{\sin x}\sim x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{12}$ $\quad(x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3)$

【例3】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$.

$\dfrac{0}{0}$

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin x-x)-(\sin x-x)}{(\arctan x-x)-(\tan x-x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{6}x^3)-(-\frac{1}{6}x^3)}{(-\frac{1}{3}x^3)-(\frac{1}{3}x^3)}=-\dfrac{1}{2}$

$=\frac{1}{3}x^3$

$-\frac{2}{3}x^3$

【例4】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^2-\sin^2 x}$.

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{3}x^3}{(x+\sin x)(x-\sin x)}$ $\left(\int_0^x \ln(1+t^2)dt \sim \int_0^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{3}x^3}{2x\cdot\frac{1}{6}x^3}$ $\left(x+\sin x\sim 2x;\ x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3\right)$

$=1$

【解2】原式

【例5】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\sin x}{(1+x)^x-1}$.

技巧: $\sin x = x + o(x)$ ✓

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ ✓

$\sin x = x + o(x^2)$ ✓

$\frac{xe^x}{\sin x} \to 1$

$e^x - 1 \sim x$

$\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0$

【分析】$(1+x)^x-1 = e^{x\ln(1+x)}-1 \sim x\ln(1+x) \sim x^2$,

$f(x) \to A$

$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{x^2} = 1$

【解1】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\sin x}{(1+x)^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\sin x}{x^2}$ $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)+x-\sin x}{x^2}$

$f(x) = A + \alpha(x)$

$= 1 + 0 = 1$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+xe^x-\cos x}{2x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-(x+o(x^2))}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

$\lim\limits_{x\to 0} x^x$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x+xe^x+\sin x}{2} = 1$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$

$= e^0 = 1$

【注】当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$. 这个结论推广可得：

若 $\alpha(x)\to 0, \alpha(x)\beta(x)\to 0,$

则 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)}-1\sim \alpha(x)\beta(x)$

由此可得 $(1+x)^{x}-1\sim x^{2}$.

$\beta\to 0$?

$x\to 0$

$(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}-1\sim \frac{x^2}{\sin x}\sim x$

$x^2\to 0, \quad \frac{x^2}{\sin x}\to 0$

【解2】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^{x}-\sin x}{(1+x)^{x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^{x}-\sin x}{x^{2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^{x}-x+x-\sin x}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^{x}-1)}{x^{2}}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{2}}=1$

【例6】求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$ 4 $\frac{0}{0}$

【解1】$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} + o(x^4)$$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^2[-\frac{x^2}{2} + o(x^2)]} = \frac{1}{6}$$

【例6】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

$x-\ln(1+x)$

$\sim\frac{1}{2}x^2$

【解2】$x+\ln(1-x)=\ln(1-x)-(-x)\sim-\dfrac{x^2}{2}$,

$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{-\frac{1}{2}x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+xe^{-\frac{x^2}{2}}}{-2x^3}$$

(洛必达法则)

$-\frac{x^2}{2}$

$$=-\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{x(e^{-\frac{x^2}{2}}-1)}{x^3}\right]=\frac{1}{6}$$

2. “$\frac{\infty}{\infty}$” 型极限

常用的方法有两种

1）洛必达法则

$e^{x^2}\cdot e^{-x^2}$

2）分子分母同除以分子和分母各项中最高阶的无穷大

【例1】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt}{x}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}\overset{\text{洛}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}+x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}$ （洛必达法则）

$\overset{\text{除}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+2}=\dfrac{1}{2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2e^{x^2}}{2x^2e^{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

【例2】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+x^{100}}{2e^x+\ln^{10}x}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{2e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{e}\right)^x$

【解1】原式 $\overset{\times}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{2}{e}\right)^x+\dfrac{x^{100}}{e^x}}{2+\dfrac{\ln^{10}x}{e^x}}$ （分子分母同除以 e^x）

$\to 0$

$\to 2\neq 0$

$0<\frac{2}{e}<1$

$=0$

$=\dfrac{0+0}{2+0}$

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)\ 存}{\lim g(x)=A\neq 0}$

【例3】求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

$-2x$ $+\infty$ $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt{x^2}}=1$$

$-2x$ $-x$

$\sqrt{x^2}=-x$

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$ （分子分母同除以 $-x$ ）

$=1$

【解2】原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

2 -1 0

$=2-1+0=1$

3. “ $\infty-\infty$ ” 型极限

$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

常用的方法有三种

1）通分化为 $\frac{0}{0}$（适用于分式差）

2）根式有理化（适用于根式差）

3）提无穷因子，然后等价代换或变量代换，泰勒公式

【例1】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x+x}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{2}{3}$

【例2】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

$\infty-\infty$

$x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x})=0$

【解1】 原式 $\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ （有理化）

$(a-b)(a+b)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}$

$=a^2-b^2$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

*【解2】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}-1\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}=\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$

（等价无穷小代换）

【例3】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

$\infty-\infty$

$\frac{1}{x}$

$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

【解1】令 $x=\frac{1}{t}$，则

原式 $=\lim\limits_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=\lim\limits_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}=\frac{1}{2}.$

$\to 0$

【解2】由泰勒公式得

$x-x+\frac{1}{2}-x^2 o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\to 0$

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))]$

$=\frac{1}{2}$

【例3】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

【解3】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x^2[\underline{\dfrac{1}{x}-\ln(1+\dfrac{1}{x})}]$

*

$\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2})$ （等价无穷小代换）

$=\dfrac{1}{2}$

【例4】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right)$ ∞ 0

【解1】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{(1+\frac{1}{x})^x}-\dfrac{x}{e}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x[e-(1+\frac{1}{x})^x]}{e(1+\frac{1}{x})^x}$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e-(1+\frac{1}{x})^x}{\frac{1}{x}}\qquad(\frac{1}{x}=t)$$

$$=\frac{-1}{e^2}\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=\frac{-1}{e^2}\lim_{t\to0^+}\frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-e}{t}$$

$$=-\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{e^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}}-1}{t}=-\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2}=\frac{1}{2e}$$

【例4】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right)$

【解2】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{(1+\frac{1}{x})^x}-\dfrac{x}{e}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x[e-(1+\frac{1}{x})^x]}{e(1+\frac{1}{x})^x}$

$f(x)=e^x$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{x\to+\infty}x\left[e-e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\right]$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{x\to+\infty}xe^{\xi}\left[1-x\ln(1+\frac{1}{x})\right]$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{x})^2\right]=\frac{1}{2e}$$

【例】（2021年1, 2）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

【解1】（评分标准）

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\int_0^x e^{t^2}dt)\sin x-e^x+1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+\int_0^x e^{t^2}dt)\cos x+e^{x^2}\sin x-e^x}{2x} \qquad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+\int_0^x e^{t^2}dt)\cos x-e^x}{2x}+\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots 7\text{ 分}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-(1+\int_0^x e^{t^2}dt)\sin x+e^{x^2}\cos x-e^x}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}. \qquad \cdots\cdots 10\text{ 分}$$

【例】（2021年1,2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

【解2】

微信扫码，关注【公众号：武忠祥老师】

定期更新：每日一题、数学资料、阶段备考等考研干货

还不关注，那你就慢了