高数精讲（17）

17	多元函数的极值、最大最小值及举例，二重积分概念、计算	P173-P185

下次 P186→198

主讲 武忠祥 教授

第三节 极值与最值

本节内容要点

一. 考试内容要点精讲

（一）无条件极值

（二）条件极值与拉格朗日乘数法 *

（三）最大最小值

二. 常考题型方法与技巧

题型一 求无条件极值

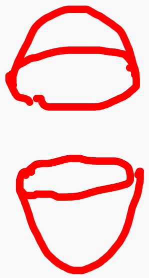
题型二 求最大最小值

一. 考试内容要点精讲

(一) 无条件极值

1) 定义： 极大： $f(x_0,y_0)\ge f(x,y)$;

极小： $f(x_0,y_0)\le f(x,y)$;



f(x,y) 可导

2) 极值的必要条件 $f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$ （可导）

|x|+|y|

极值点 $\underset{xy}{\overset{\quad}{\rightleftarrows}}$ 驻点

3) 极值的充分条件

设 $f_x(x_0,y_0)=0$, 且 $f_y(x_0,y_0)=0$

（1） 当 $AC-B^2>0$ 时, 有极值 $\begin{cases} A>0 & \text{极小值;} \\ A<0 & \text{极大值.} \end{cases}$

（2） 当 $AC-B^2<0$ 时, 无极值.

（3） 当 $AC-B^2=0$ 时, 不一定(一般用定义判定).

（二）条件极值与拉格朗日乘数法

1) 函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 条件下的极值.

令 $\boxed{F(x,y,\lambda)}=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

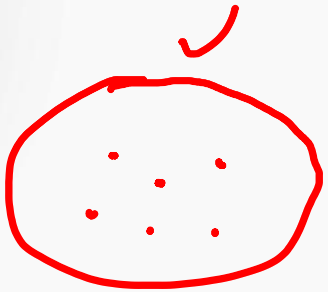
$$\begin{cases} F_x = f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ F_y = f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ F_\lambda = \varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

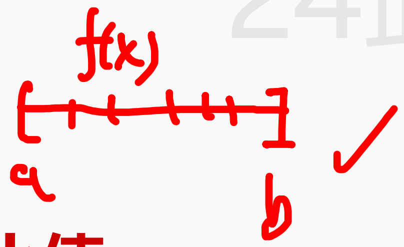
2) 函数 $f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$

条件下的条件极值.

令 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

（三）最大最小值





1. 求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值

1） 求 $f(x,y)$ 在 D 内部可能的极值点.

2） 求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大最小值.

3） 比较

2. 应用题

1) $z=f(x,y)$

2)

题型一　求无条件极值

【例1】求函数 $z = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ 的极值.

【例2】求函数 $f(x, y) = xy(a - x - y)$ 的极值.

① ✓

② ✓

参数 $\underline{a}$

【例3】求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

所确定函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

【解1】 $\begin{cases} 2x+2zz_x-2-4z_x=0, \\ 2y+2zz_y+2-4z_y=0. \end{cases}$

令 $z_x=0, z_y=0$ 得 $x=1, y=-1$ 驻点为 $(1,-1,6)$ 和 $(1,-1,-2)$.

$$2+2(z_x)^2+2zz_{xx}-4z_{xx}=0$$

$$2z_yz_x+2zz_{xy}-4z_{xy}=0$$

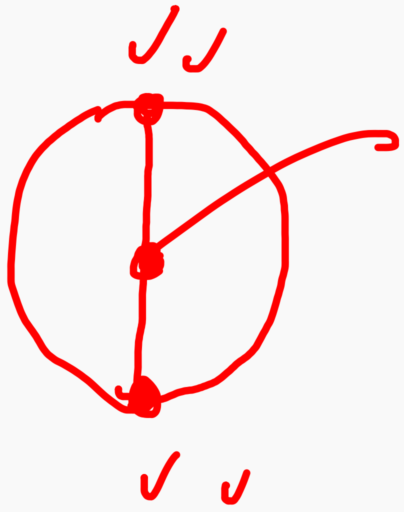
$$z_{xx}=\frac{1+(z_x)^2}{2-z}, z_{xy}=\frac{z_x\cdot z_y}{2-z}$$

$$2+2(z_y)^2+2zz_{yy}-4z_{yy}=0 \qquad z_{yy}=\frac{1+(z_y)^2}{2-z}$$

【例3】求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

【解2】 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$

$$z=2\pm\sqrt{16-(x-1)^2-(y+1)^2}$$



$(1,-1,2)$

$x=1,\ y=-1$

【例4】设 $f(x,y)$ 有二阶连续导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值.

【解】由题设 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$ 知

$\to 0$ $=\rho$

$$f(x,y)=-(x-1)-y+o(\rho)\qquad \text{其中}\quad \rho=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$AC-B^2=4-1=3>0$

$A=-2<0$ 极大

则 $f(1,0)=0\qquad f_x'(1,0)=f_y'(1,0)=-1$

$$g_x'=f_1'\cdot e^{xy}y+f_2'\cdot 2x\qquad g_y'=f_1'\cdot e^{xy}x+f_2'\cdot 2y,\quad g_x'(0,0)=0,\ g_y'(0,0)=0.$$

$$g''_{x^2}=(f''_{11}\cdot e^{xy}y+f''_{12}\cdot 2x)e^{xy}y+f_1'\cdot e^{xy}y^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}y+f''_{22}\cdot 2x)2x+2f_2',$$

$A=2f_2'(1,0)=-2$

$$g''_{xy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}y+f_1'\cdot(e^{xy}xy+e^{xy})+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x,$$

$$g''_{y^2}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}x+f_1'\cdot e^{xy}x^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2y+2f_2',$$

$$A=2f_2'(1,0)=-2,\ B=f_1'(1,0)=-1,\quad C=2f_2'(1,0)=-2,$$

【例4】设 $f(x,y)$ 有二阶连续导数，$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出此极值.

【解】由题设 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$ 知

$f(x,y)=-(x-1)-y+o(\rho)$ 　　其中 $\rho=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

"先代后求"

则 $f(1,0)=0$ 　$f'_x(1,0)=f'_y(1,0)=-1$

$g'_x=f'_1\cdot e^{xy}y+f'_2\cdot 2x$ 　$g'_y=f'_1\cdot e^{xy}x+f'_2\cdot 2y$，$g'_x(0,0)=0,g'_y(0,0)=0.$

$g'_x(x,0)=2xf'_2(1,x^2)$ 　$A=g''_{xx}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2$

c

B

【例5】设 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\sin(x^2+y^2)}=-1$ 则

A) $f_x(0,0)$ 不存在；　　B) $f_x(0,0)$ 存在但不为零；

C) $f(x,y)$ 在点(0, 0)处取极小值；

D) $f(x,y)$ 在点(0, 0)处取极大值；

【解1】直接法　由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\sin(x^2+y^2)}=-1<0$ 知，$f(0,0)=0$

且存在 $(0,0)$ 点的去心邻域，使

$$\frac{f(x,y)}{\sin(x^2+y^2)}<0,\ \text{从而}\ f(x,y)<0$$

【解2】排除法　取 $f(x,y)=-(x^2+y^2)$

$$f_x(0,0)=0$$

【例6】已知函数 $f(x,y)$ 在点(0, 0)的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 则

A) 点(0, 0)不是 $f(x,y)$ 的极值点；

B) 点(0, 0)是 $f(x,y)$ 的极大值点；

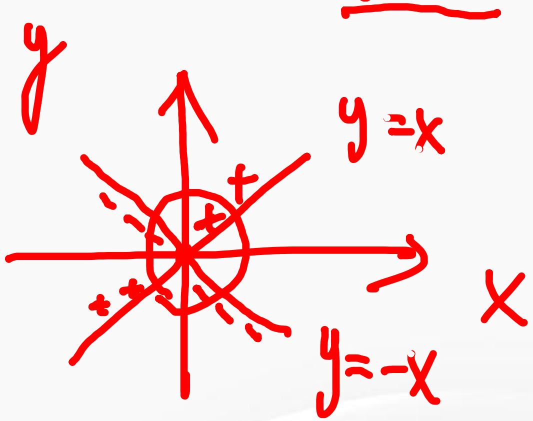
C) 点(0, 0)是 $f(x,y)$ 的极小值点；

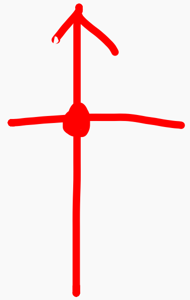
D) 根据所给条件无法判断点(0, 0)是否是 $f(x,y)$ 的极值点；

$f(0,0)=0$

$\dfrac{f(x,y)-xy>0}{(x^2+y^2)^2>0}>0$

$f(x,y)>xy$





【解】由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 知 $f(0,0)=0$ 且

$$\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha=0$$

则 $f(x,y)=xy+(1+\alpha)(x^2+y^2)^2$

令 $y=x$ 得：$f(x,x)=x^2+4x^4+4\alpha x^4=x^2+o(x^2)$

令 $y=-x$ 得：$f(x,-x)=-x^2+4x^4+4\alpha x^4=-x^2+o(x^2)$

【例6】已知函数 $f(x,y)$ 在点(0, 0)的某个邻域内连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 则

A) 点(0, 0)不是 $f(x,y)$ 的极值点;

B) 点(0, 0)是 $f(x,y)$ 的极大值点;

C) 点(0, 0)是 $f(x,y)$ 的极小值点; ✓

D) 根据所给条件无法判断点(0, 0)是否是 $f(x,y)$ 的极值点;

x^4

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{(x^2+y^2)^2}{xy}$ 存在? $\neq 0$

x^{4+1} $4+1>4$

$y=x^n=x^4$

$\lim\limits_{\substack{y=x^4\\x\to0}} \dfrac{(x^2+x^8)^2}{x^5} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^4+2x^{10}+x^{16}}{x^5} = \infty$ ✓

(C) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点

解 令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, 则由题设可知

$$f(x,y)=xy+\rho^4+o(\rho^4)$$

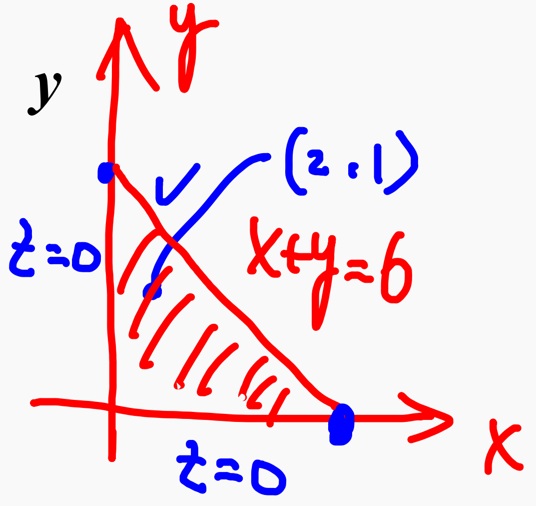
当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $\rho\to0$.

由于 $f(x,y)$ 在(0,0)附近的值主要由 xy 决定, 而 xy 在(0,0)附近符号不定, 故点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点, 即应选(A).

题型二 求最大最小值

内

【例1】求函数 $z = x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的区域 D 上的最大值和最小值.



【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy(4-x-y) - x^2y = \underset{x=0,\ y=0}{xy}(8-3x-\overset{=0}{2y}) = 0$

① $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2(4-x-y) - x^2y = \underset{x=0}{x^2}(4-x-2y) = 0$

由 $\begin{cases} 3x+2y=8, \\ x+2y=4, \end{cases}$ 可得 $(2,1)$ 且 $z(2,1)=4$

$y=6-x$

② 在边界 $x+y=6(0 \le x \le 6)$ 上，$z(x,y) = 2(x^3-6x^2)(0 \le x \le 6)$

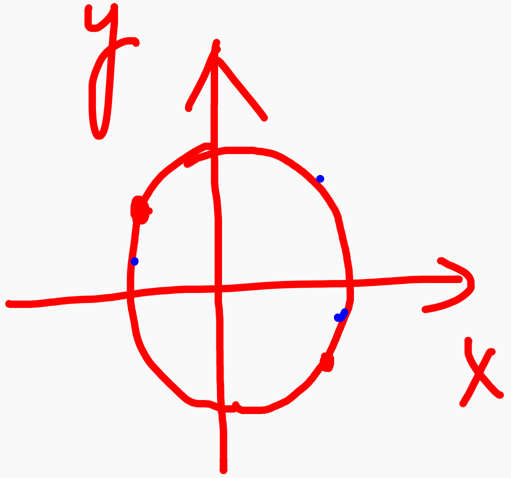
令 $\varphi(x) = 2(x^3-6x^2)$,

由 $\varphi'(x) = 0$, 得 $x = 4$

$\varphi(0) = 0, \varphi(4) = -64, \varphi(6) = 0$ ③

【例2】求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在 $x^2 + y^2 \le 25$ 上的最大值与最小值.

$x^2+y^2=25$



【解1】 由 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0, \end{cases}$ 得 $x = 6, y = -8.$

?

$y=\pm\sqrt{25-x^2}$

$(6,-8)$

$$F(x,y,\lambda) = \boxed{x^2 + y^2} - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

$$\overset{*}{=} 25 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

由 $\begin{cases} F_x = -12 + 2\lambda x = 0, \\ F_y = 16 + 2\lambda y = 0, \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = -4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = 4. \end{cases}$

小　大

$z(3,-4) = -75,\ z(-3,4) = 125$

【例2】 求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在 $x^2 + y^2 \le 25$ 上的最大值与最小值.

参数

【解2】 $\boxed{x^2 + y^2 = 25,}$ $\begin{cases} x = 5\cos\theta, \\ y = 5\sin\theta, \end{cases}$ $\boxed{0 \le \theta \le 2\pi}$

$z = 25 - 60\cos\theta + 80\sin\theta$

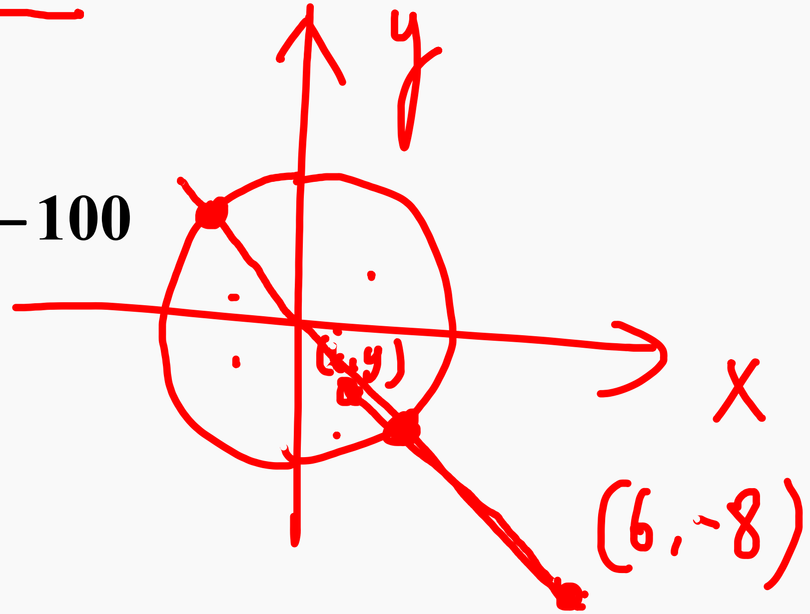
【例2】 求函数 $z=x^2+y^2-12x+16y$ 在 $x^2+y^2\le 25$ 上的最大值与最小值.

【解3】 $z=x^2+y^2-12x+16y=(x-6)^2+(y+8)^2-100$

过原点和点 $(6,-8)$ 的直线为 $y=-\dfrac{4}{3}x.$

由 $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=-\dfrac{4}{3}x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=-4, \end{cases}\begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=4 \end{cases}$

$z(3,-4)=-75, z(-3,4)=125$



8 :10

【例3】求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值与最小值.

【解】令 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$

$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0 \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

$2\lambda x = \lambda z \Rightarrow \boxed{\lambda(2x - z) = 0}$ ① $\lambda \neq 0$ $\boxed{z = 2x}$

$5x + 2\lambda y = 0$ $y^2 = 5x^2$

② $\lambda = 0$??

1）当 $\lambda \neq 0$ 时，$2x = z, 5x^2 = y^2$，

$P_1(1, \sqrt{5}, 2)$; $P_2(-1, \sqrt{5}, -2)$; $P_3(1, -\sqrt{5}, 2)$; $P_4(-1, -\sqrt{5}, -2)$;

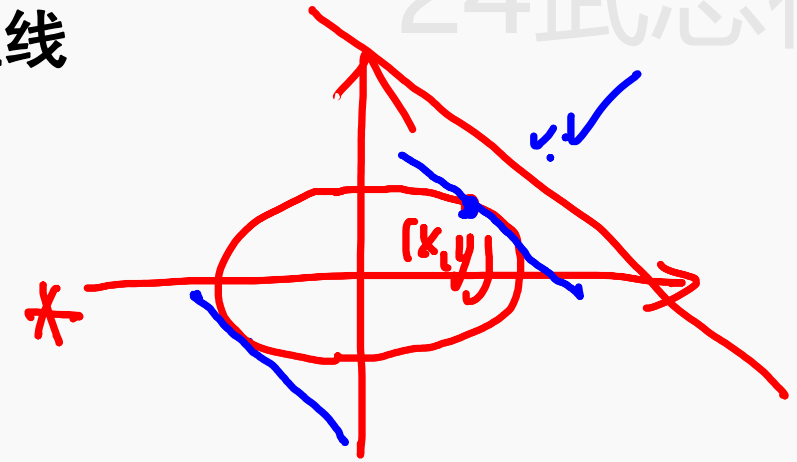
2）当 $\lambda = 0$ 时，$y = 0, x + 2z = 0$,

$P_5(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$; $P_6(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$;

大

$u(P_1) = u(P_4) = 5\sqrt{5}$; $u(P_2) = u(P_3) = -5\sqrt{5}$; $u(P_5) = u(P_6) = 0$;

【例4】 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点, 使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.



【解1】 $d=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$, $\quad d^2=\dfrac{(2x+3y-6)^2}{13}$

$$F(x,y,\lambda)=(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$$

$$\begin{cases} F_x=4(2x+3y-6)+2\lambda x=0, \\ F_y=6(2x+3y-6)+8\lambda y=0, \\ F_\lambda=x^2+4y^2-4=0, \end{cases}$$

从而得 $\begin{cases} x_1=\dfrac{8}{5}, \\ y_1=\dfrac{3}{5}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\dfrac{8}{5}, \\ y_2=-\dfrac{3}{5}, \end{cases}$ $\quad d\big|_{(x_1,y_1)}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$, $d\big|_{(x_2,y_2)}=\dfrac{11}{\sqrt{13}}$

由本题实际意义知最短距离存在，则点 $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ 为所求的点.

【解2】 直线 $2x+3y-6=0$ 的斜率为 $k=-\frac{2}{3}$

由 $x^2+4y^2=4$ 知 $2x+8yy'=0,\ y'=-\frac{x}{4y}$

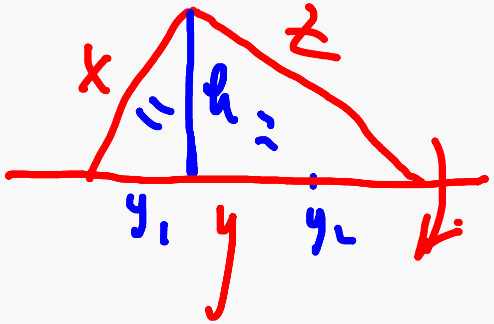
$-\frac{2}{3}=-\frac{x}{4y}$ 即 $8y=3x$

将 $8y=3x$ 与 $x^2+4y^2=4$ 联立得

$$\begin{cases} x_1=\frac{8}{5}, \\ y_1=\frac{3}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-\frac{8}{5}, \\ y_2=-\frac{3}{5}. \end{cases}$$

由几何意义知，点 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ 应为所求的点.

【例5】 已知三角形周长为 $2p$，求使它绕自己的一边旋转时所构成旋转体体积最大的三角形.



【解】 $V=\frac{\pi}{3}h^2y$

$x+y+z=2p$

$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}=\frac{1}{2}yh$

l_x

$l_x A \quad A: \quad \frac{\pi}{3}h^2y_1+\frac{\pi}{3}h^2y_2$

$V=\frac{4}{3}\pi p\frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{y}$, $\quad (x+y+z=2p)$

$F(x,y,z,\lambda)=\ln(p-x)+\ln(p-y)+\ln(p-z)-\ln y+\lambda(x+y+z-2p)$

$x=z=\frac{3p}{4}, y=\frac{p}{2}$

$V_{\max}=\frac{\pi}{12}p^3$

【例6】 设某厂生产甲乙两种产品，产量分别为 x, y（千只），

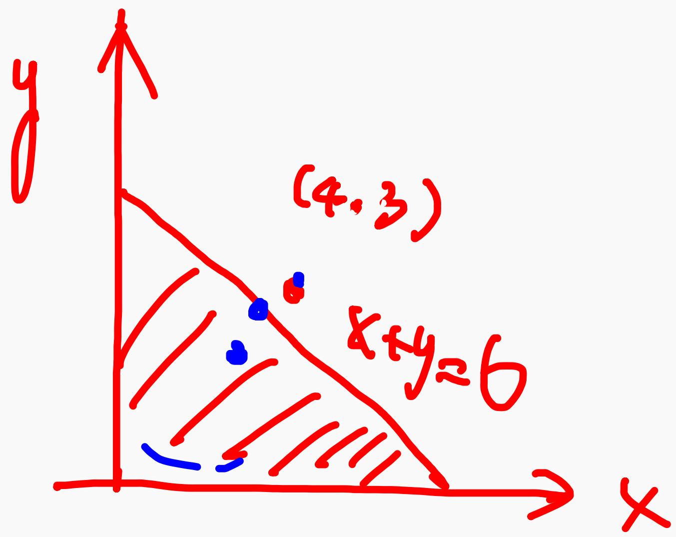
其利润函数为 $L(x, y) = -x^2 - 4y^2 + 8x + 24y - 15$

$7 \times 2000 = 14000$

如果现有原料15000公斤（不要求用完），生产两种产品每千只都需要原料2000公斤，求

1） 使利润最大的 x, y 和最大利润.

2） 如果原料降至12000公斤，求这时利润最大的产量和最大利润.



$x + y \le 6$

【解】 1）由 $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -2x + 8 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -8y + 24 = 0 \end{cases}$ 得 $x = 4, y = 3$

点 $(4,3)$ 为 $L(x, y)$ 唯一可能取得极值的点，由该问题已知 $L(x, y)$ 最大值存在，则最大值只能在点 $(4,3)$ 取到，$L(4,3) = 37$

2）$F(x,y,\lambda)=-x^2-4y^2+8x+24y-15+\lambda(x+y-6)$

由 $\begin{cases} F_x=-2x+8+\lambda=0 \\ F_y=-8y+24+\lambda=0 \\ F_\lambda=x+y-6=0 \end{cases}$ 得 $x=3.2, y=2.8$

点 $(3.2,2.8)$ 为 $L(x,y)$ 在条件 $x+y=6$ 下唯一可能取得极值的点，由该问题已知该最大值存在，则最大值只能在点 $(3.2,2.8)$ 取到，$L(3.2,2.8)=36.2$

$M \le k$ 条

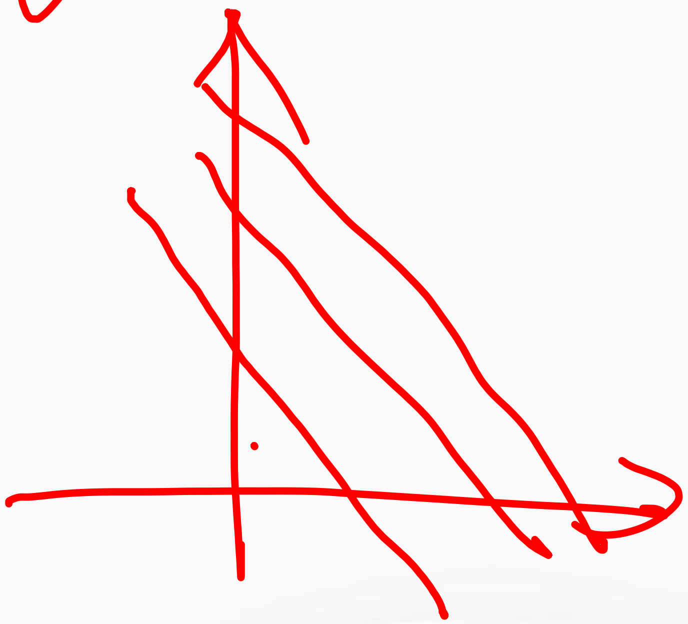
【例7】利用条件极值的方法证明：对任意正数 a,b,c，有 $abc^3 \le \dfrac{27}{5^5}(a+b+c)^5$

m

【证1】 只要证明对任意正数 k，函数 xyz^3 在条件 $x+y+z=k$ 下的最大值不超过 $\dfrac{27}{5^5}k^5$ 即可

令 $F(x,y,z,\lambda)=xyz^3+\lambda(x+y+z-k)$

由 $\begin{cases} F_x = yz^3+\lambda=0, \\ F_y = xz^3+\lambda=0, \\ F_z = 3xyz^2+\lambda=0, \\ F_\lambda = x+y+z-k=0, \end{cases}$ 得 $x=y=\dfrac{k}{5}, z=\dfrac{3k}{5}$.



由于可能的极值点唯一，所求最大值存在，则最大值在

$x=y=\dfrac{k}{5}, z=\dfrac{3k}{5}$ 时取到，$xyz^3 \le \dfrac{k}{5}\cdot\dfrac{k}{5}\cdot\left(\dfrac{3k}{5}\right)^3 = \dfrac{27}{5^5}k^5 = \dfrac{27}{5^5}(x+y+z)^5$

【证2】 只要证明对任意正数 k，函数 xyz^3 在条件 $x+y+z=k$ 下的最大值不超过 $\frac{27}{5^5}k^5$ 即可

$$xyz^3 = 3^3 x\cdot y\cdot\frac{z}{3}\cdot\frac{z}{3}\cdot\frac{z}{3},$$

$$x+y+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}$$

$$= x+y+z = k,$$

$k = \sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$

$x+y+z=k$.

$x=y=\frac{z}{3}$

① 无条件极值.

② 最值 ① $f(x,y)$ D ② 条件最值 ③ 应用题

$z=f(x,y)$

一. 概念. 4个 连. ① 难

二. 计算方法 (复合. 隐) 大 重

三. 极. 最.

$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{k}$

第六章　二重积分

本章内容要点

一. 考试内容要点精讲

（一）二重积分的概念

（二）二重积分的几何意义

（三）二重积分的性质

（四）二重积分计算

二. 常考题型方法与技巧

题型一 计算二重积分 * 重

题型二 累次积分交换次序及计算

题型三 与二重积分有关的综合题 难

题型四 与二重积分有关的不等式问题

一. 考试内容要点精讲

(一) 二重积分的概念

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

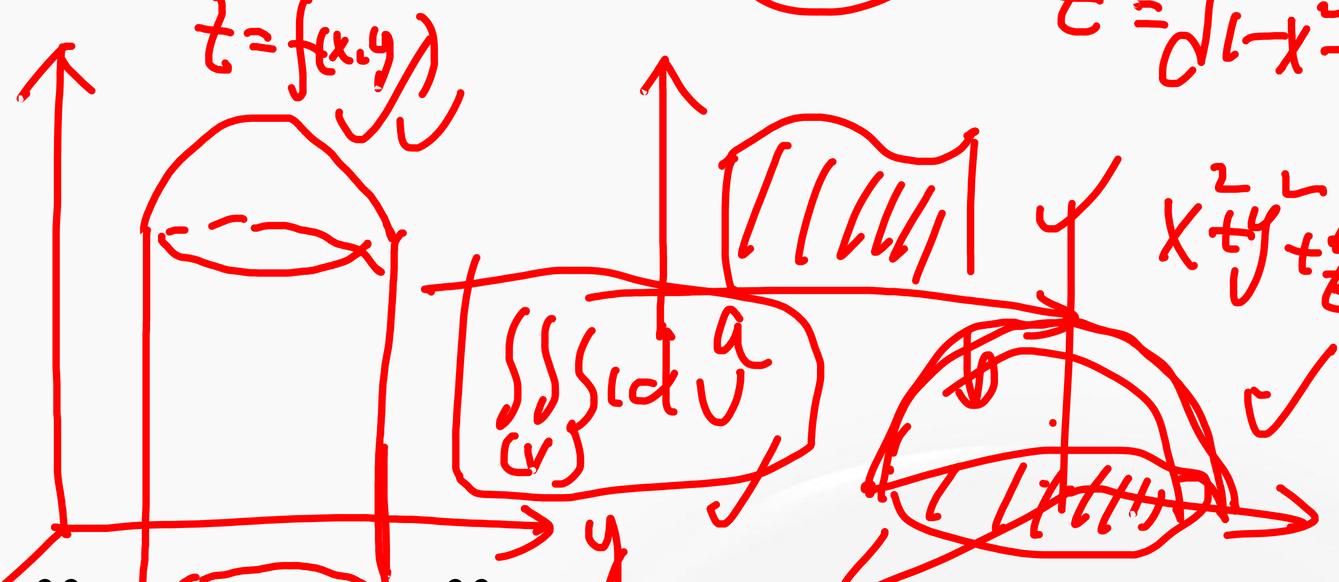
$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$

$f(x,y)>0$

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

(二) 二重积分的几何意义

$z=f(x,y)$



$\iiint_V 1\,dv$

$x^2+y^2+z^2=1$

$z=f(x,y)>0$

(三) 二重积分的性质

1. 不等式性质

(1) 若 $f(x,y)\le g(x,y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

（2）若 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则

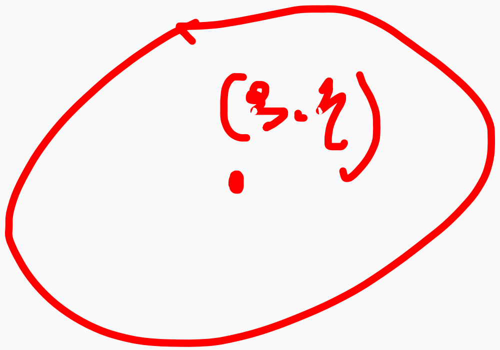
$$mS \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MS.$$

（3）$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$

2. 积分中值定理

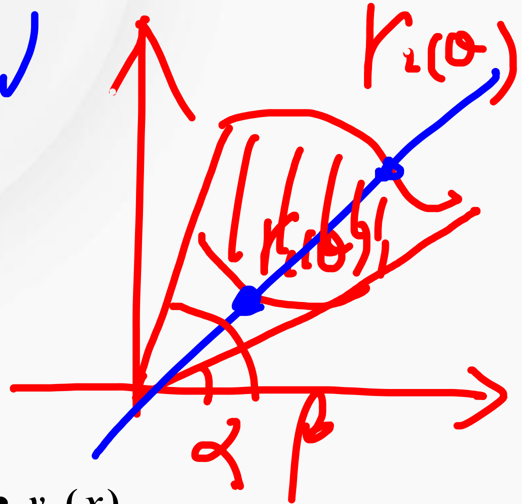
若 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S$$



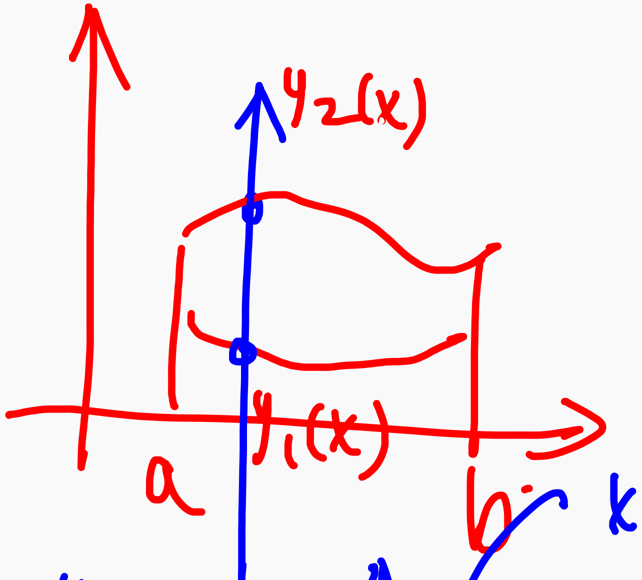
（四）二重积分的计算

1. 利用直角坐标计算



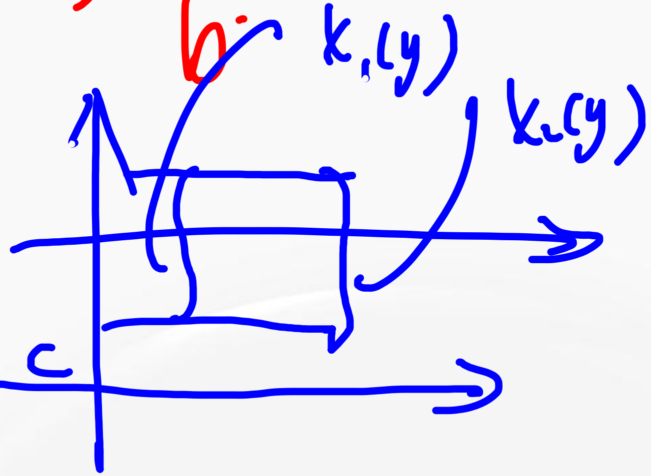
1）先 y 后 x

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$



2）先 x 后 y

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$



* 2. 利用极坐标计算

$dxdy = rdrd\theta$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

【注】i）适合用极坐标计算的被积函数：

主 $f(\sqrt{x^2+y^2}),f(\frac{y}{x}),f(\frac{x}{y})$;

$f(r)$ $F(\theta)$

$\begin{cases} x-x_0=r\cos\theta \\ y-y_0=r\sin\theta \end{cases}$ $\int_{-a}^{a} f(x)dx$

ii）适合用极坐标的积分域：

$x^2+y^2\le R^2$; $r^2\le x^2+y^2\le R^2$; $x^2+y^2\le 2ax$; $x^2+y^2\le 2by$;

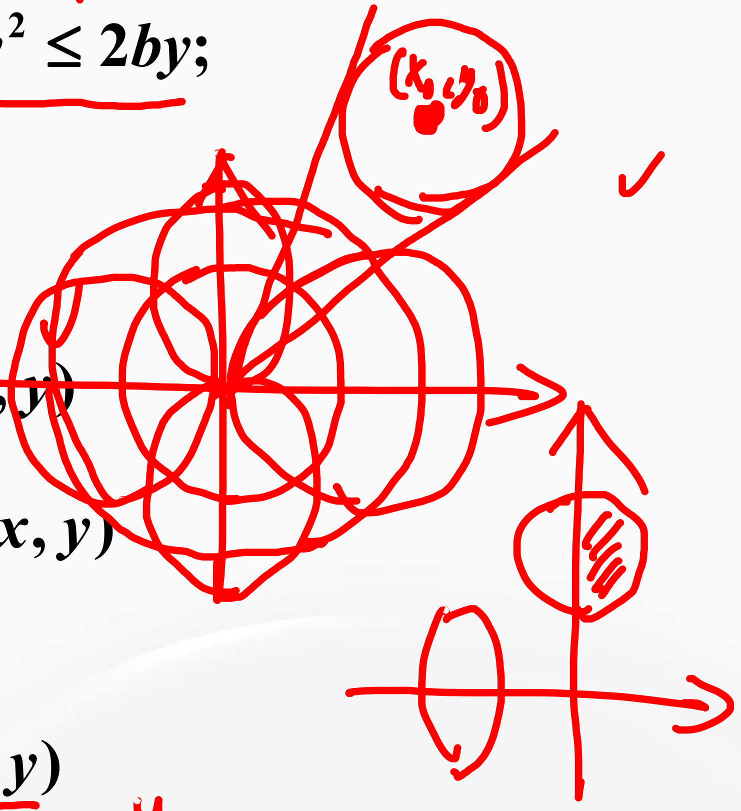
(x_0,y_0)

3.利用对称性和奇偶性计算

①若积分域 D 关于 y 轴对称，则：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases} 2\iint_{D_{x\ge0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma; & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0; & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$

偶 奇



② 若积分域关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases} 2\iint_{D_{y\ge0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

y

4.利用变量对称性计算

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

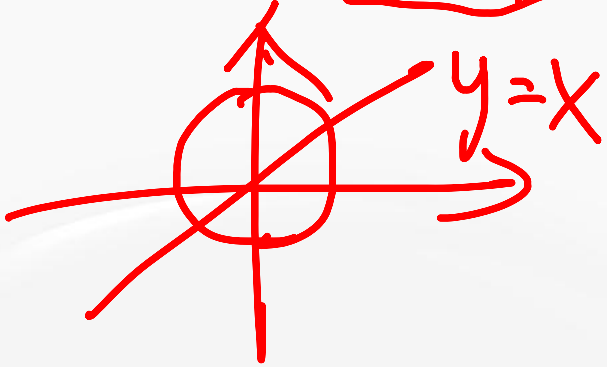
$\int_1^2 x^2 dx = \int_1^2 t^2 dt$

$\iint\limits_{D(x,y)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D(y,x)} f(y,x)dydx$

$\iint\limits_{3x^2+4y^2\le 1} (5x+6y)dxdy = \iint\limits_{3y^2+4x^2\le 1} (5y+6x)dydx$

$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (5x+6y)dxdy = \iint\limits_{y^2+x^2\le 1} (5y+6x)dydx$

$x^2+y^2\le 1 = y^2+x^2\le 1$



若 D 关于 $y=x$ 对称，则

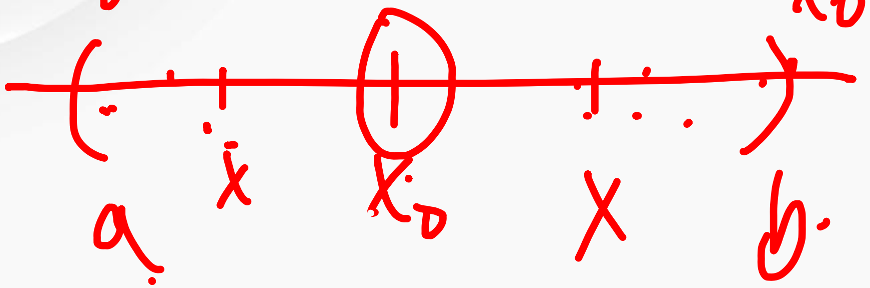
$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(y,x)d\sigma.$$

特别的：$\iint\limits_D f(x)d\sigma = \iint\limits_D f(y)d\sigma$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{x^y}$ [illegible],

$\underline{\sin(xy)}$ [illegible],

x_0 · $f(x) = f(x_0)$ · — · x_0



微信扫码，关注【公众号：武忠祥老师】

定期更新：每日一题、数学资料、阶段备考等考研干货

还不关注，那你就慢了