第一章 样本空间与概率

Probability and Statistics for Computer Scientists

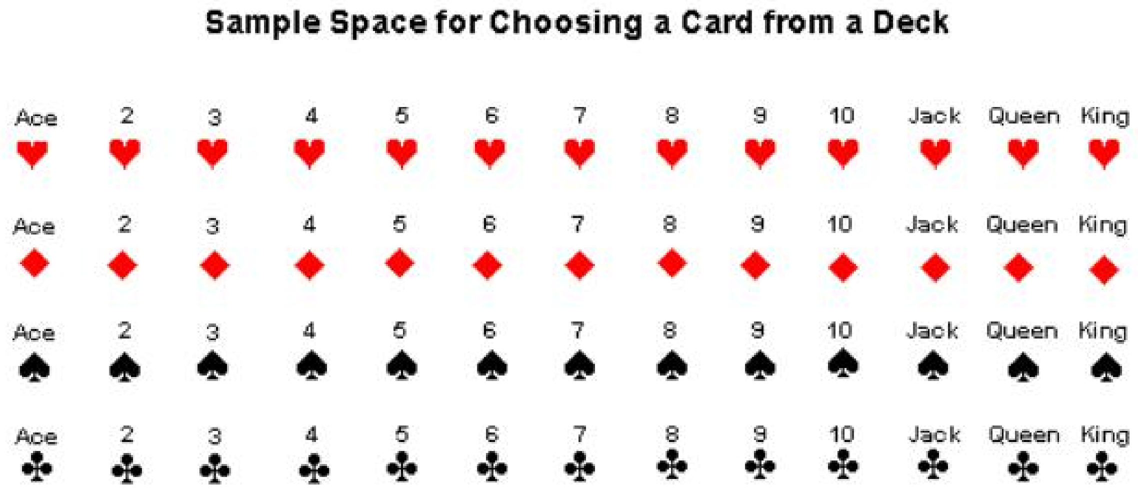
第一章 样本空间与概率

- 集合
- 概率模型
- 条件概率
- 贝叶斯和全概率模型
- 事件的独立性
- 计数法

§1 样本空间·集合

1.1 样本空间

定义：随机试验E的所有结果构成的集合称为E的**样本空间**，记为S={e}，称S中的元素e为**样本点**，一个元素的单点集称为**基本事件**。



§1 样本空间 · 集合

1.2 集合

若集合S的所有元素均为集合T的元素，就称S为T的子集.

$$T \supset S \quad S \subset T$$

我们感兴趣的所有元素放在一起，形成一个集合，称为空间 Ω

NOTATION			
	Ω	=	sample space
	$\varnothing$	=	empty event
	$\boldsymbol{P}\{E\}$	=	probability of event E

§1 样本空间 · 集合

1.3 集合运算

集合$\{x \in \Omega \mid x \notin S\}$称为S的补集，$S^c$。

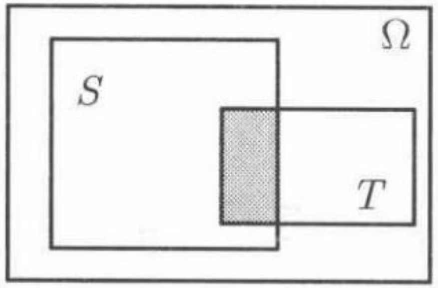
$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ 或 } x \in T\},$$

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ 和 } x \in T\}.$$

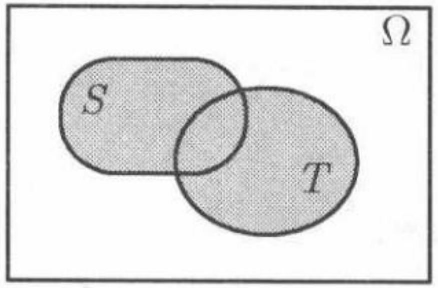
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \cup S_2 \cdots = \{x \mid x \in S_n \text{ 对某个 } n \text{ 成立}\},$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \cap S_2 \cdots = \{x \mid x \in S_n \text{ 对一切 } n \text{ 成立}\}.$$

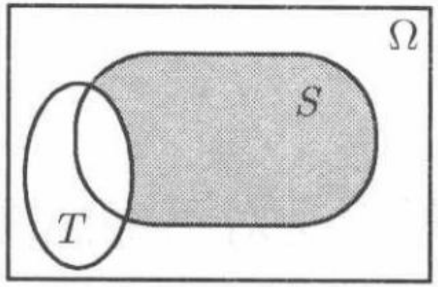
§1 样本空间·集合



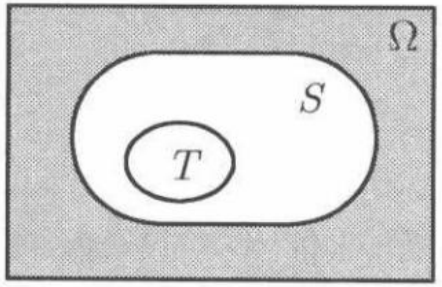
(a) 阴影部分是 $S \cap T$



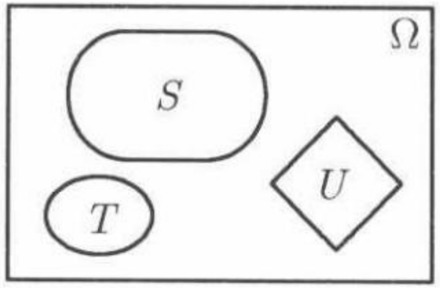
(b) 阴影部分是 $S \cup T$



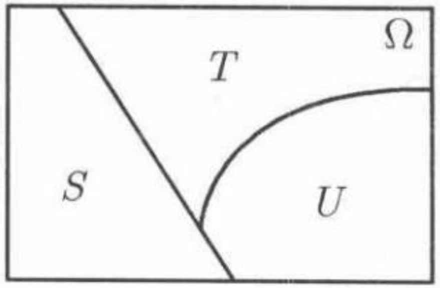
(c) 阴影部分是 $S \cap T^c$



(d) 此处是 $T \subset S$，阴影部分是 S^c



(e) S, T, U 互不相交



(f) S. T 和 U 形成 Ω 的一个分割

§1 样本空间·集合

1.4 集合代数

$$S \cup T = T \cup S, \qquad S \cup (T \cup U) = (S \cup T) \cup U,$$

$$S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U), \qquad S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U),$$

$$(S^c)^c = S, \qquad S \cap S^c = \varnothing,$$

$$S \cup \Omega = \Omega, \qquad S \cap \Omega = S.$$

§1 样本空间 · 集合

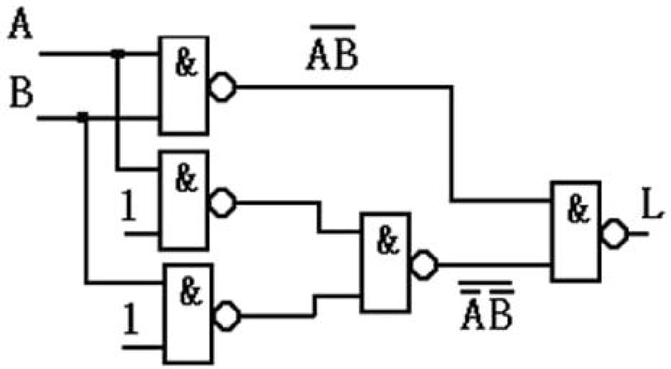
$$\left(\bigcup_n S_n\right)^c = \bigcap_n S_n^c, \qquad \left(\bigcap_n S_n\right)^c = \bigcup_n S_n^c.$$

----- 德摩根定律

例程应用：

```
if (x < y && x < z)
    min = x;
else if (y < z)
    min = y;
else
    min = z;
```

布尔逻辑应用：



§1 样本空间 · 集合

证明：设 $x\in(\cup_n S_n)^c$. 则 $x\notin \cup_n S_n$

即：对一切 n. $x\notin S_n$.

∴ 对于每个 n. $x\in S_n^c$. 即：$x\in \cap_n S_n^c$.

∴ $\underbrace{(\cup_n S_n)^c}_{\text{小}} \subset \underbrace{\cap_n S_n^c}_{\text{大}}$.

反过来. 设 $x\in \cap_n S_n^c$. 即对任何 n. $x\in S_n^c$. $x\notin S_n$.

∴ $x\notin \cup_n S_n$. 即：$x\in(\cup_n S_n)^c$.

∴ $\underline{\cap_n S_n^c \subset (\cup_n S_n)^c}$

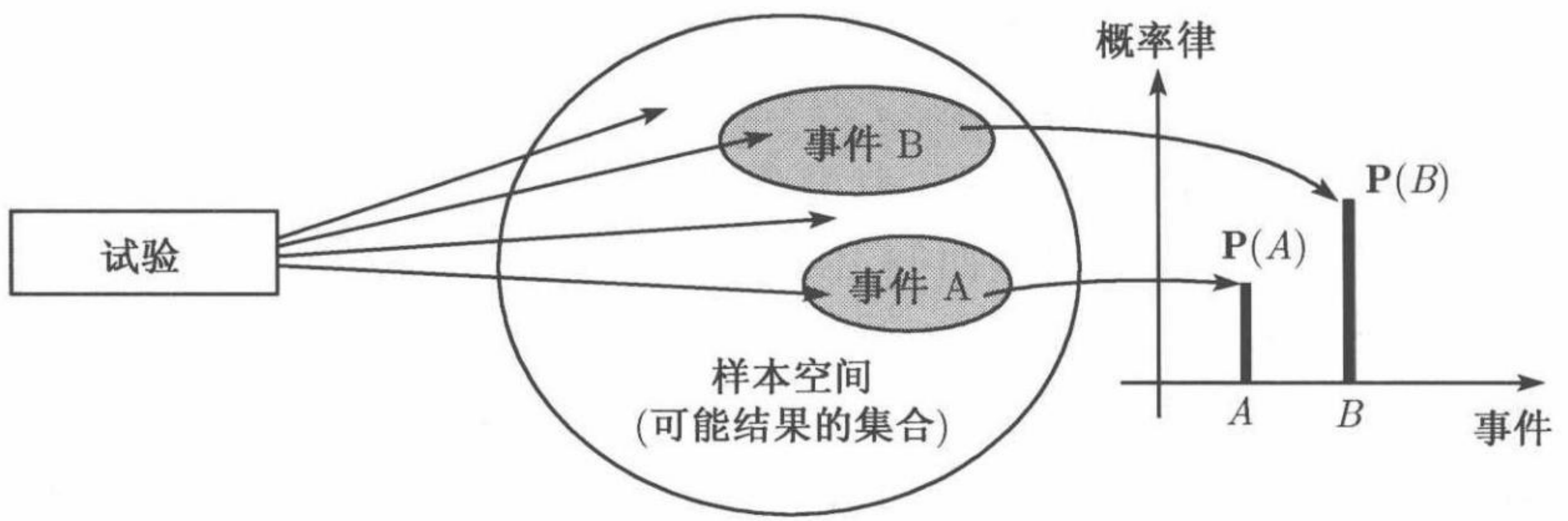
故两者相等.

§2 概率模型

2.1 概率模型基本构成：

样本空间 Ω

概率律(概率分布) P(A)



§2 概率模型

例：样本空间

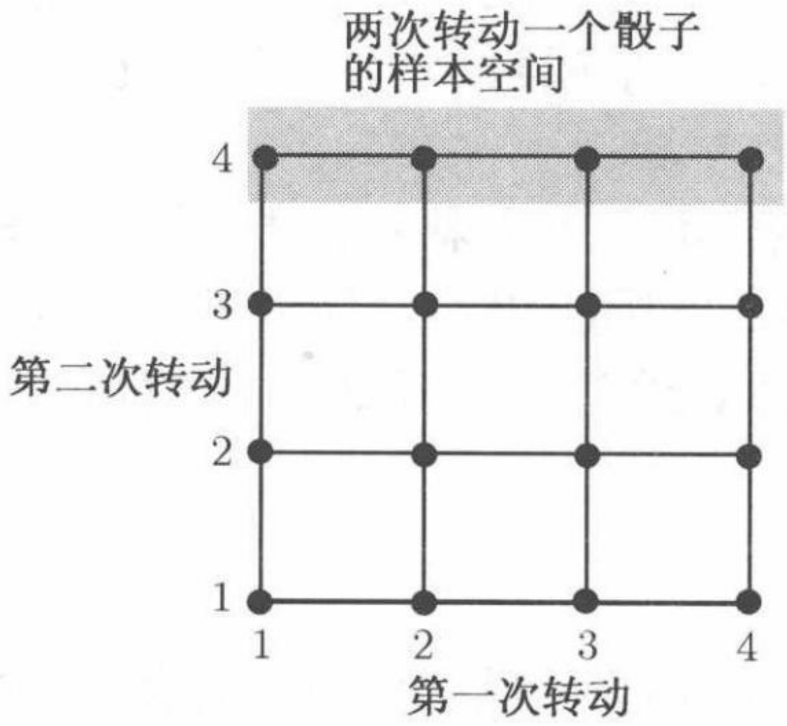
- ✓ {1,2,3,4,5，6,7,8,9,10}
- ✓ {（正，反，反，正，正，正，正，反，反，正），（反，正，正，反，反，正，正，反，正，反）……（反，反，反，反，反，反，反，反，反，反）
- ✓ {（1,2），（3,4）（1,5）（0.1,4.99），（5，9.01）……}

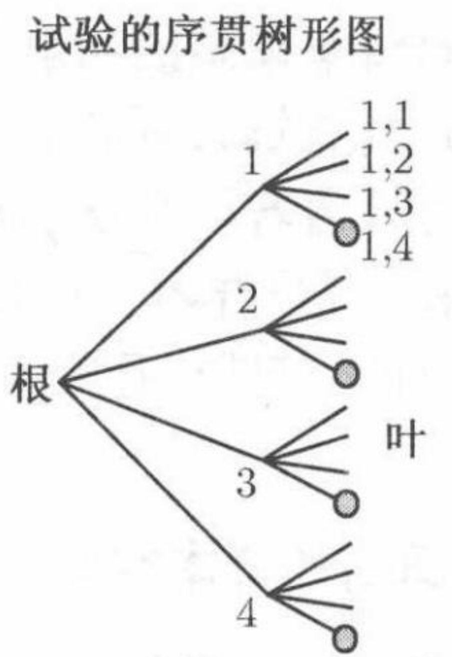
§2 概率模型

2.2 序贯模型：

序贯特性

序贯树形图



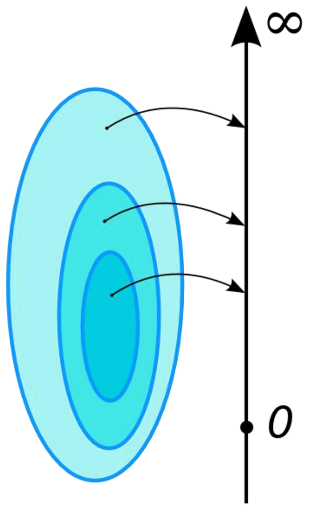


§2 概率模型

2.3 概率律：

事件的概率“事件发生的可能性”

集合的测度



设$\mathcal{F}$为空间 Ω的子集组成的 σ 代数，称二元组 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间（measurable space）；

Ω 的任一子集 F 称为$\mathcal{F}$- 可测（$\mathcal{F}$-measurable）的，如果F∈ $\mathcal{F}$.

§2 概率模型

概率公理

(1) **(非负性)** 对一切事件 A, 满足 $\mathrm{P}(A) \geqslant 0$.

(2) **(可加性)** 设 A 和 B 为两个互不相交的集合 (概率论中称为互不相容的事件), 则它们的并满足

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

更一般地, 若 $A_1, A_2, \cdots$ 是一个互不相容的事件序列, 则它们的并满足

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots.$$

(3) **(归一化)** 整个样本空间 Ω(称为必然事件) 的概率为 1, 即 $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

§2 概率模型

2.4 离散模型：

概率律构造：

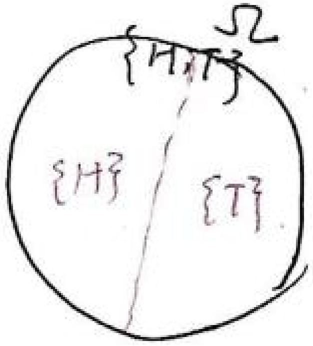
正面向上{H} 反面向上{T}

样本空间Ω={H,T}

事件为 {H,T},{H},{T}, ϕ

P({H})=P({T}) =0.5 满足非负、可加性和归一化公理

§2 概率模型



① 硬币均匀 $p(\{H\}) = p(\{T\})$

② 可加性和归一性: $p(\{H,T\}) = p(\{H\}) + p(\{T\}) = 1.$

$\therefore p(\{H,T\}) = 1.\ p(\{H\}) = 0.5\ p(\{T\}) = 0.5$

$p(\{\phi\}) = 0.$

§2 概率模型

样本空间 $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$.

$A=\{$ 两个正面向上, 一个反面向上 $\}=\{HHT,HTH,THH\}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\{HHT,HTH,THH\}) &= \mathrm{P}(\{HHT\})+\mathrm{P}(\{HTH\})+\mathrm{P}(\{THH\}) \\
&= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

§2 概率模型

离散概率律

设样本空间由有限个可能的结果组成, 则事件的概率可由组成这个事件的试验结果的概率所决定. 事件 $\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ 的概率是 $\mathrm{P}(s_i)$ 之和, 即

$$\mathrm{P}(\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}) = \mathrm{P}(s_1) + \mathrm{P}(s_2) + \cdots + \mathrm{P}(s_n).$$

§2 概率模型

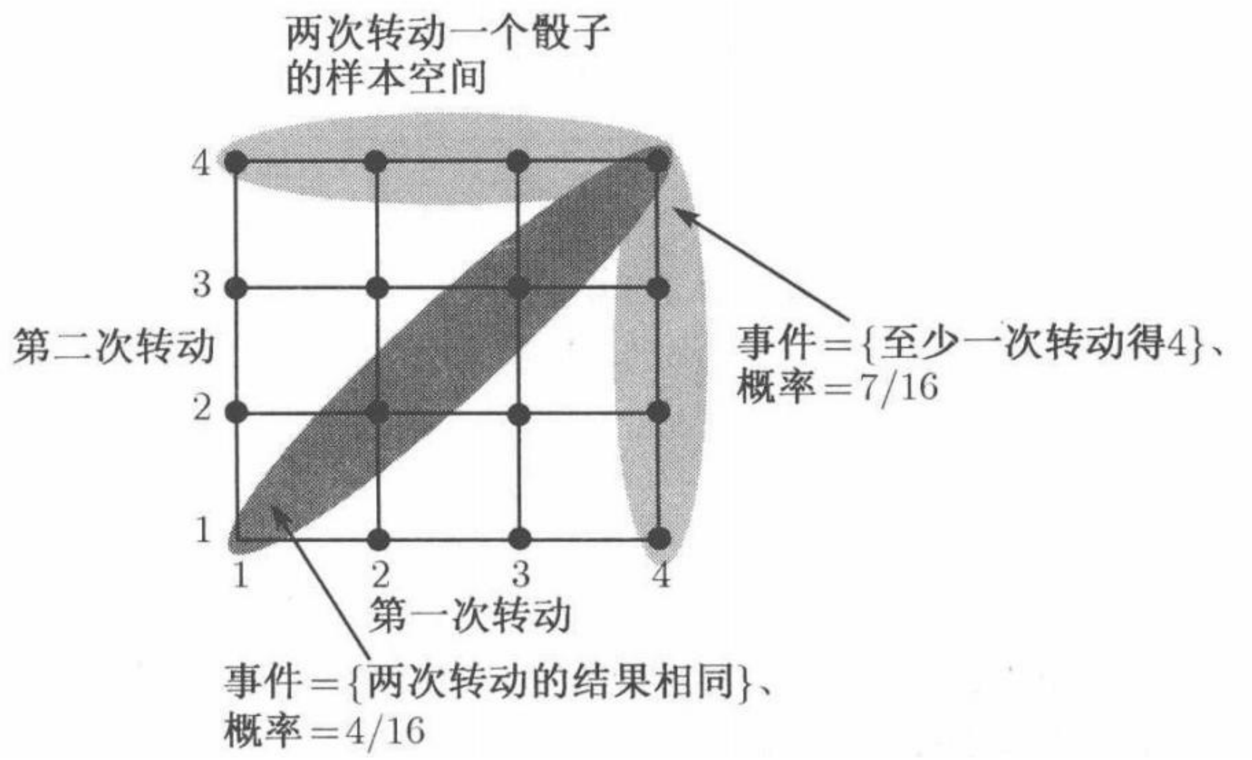
离散均匀概率律 (古典概型)

设样本空间由 n 个等可能性的试验结果组成，因此每个试验结果组成的事件(称为基本事件) 的概率是相等的. 由此得到

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{含于事件 } A \text{ 的试验结果数}}{n}.$$

§2 概率模型

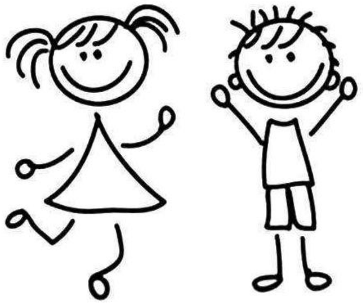
应用：连续两次转动有4个边的骰子，假定骰子是均匀的，实验结果如下。

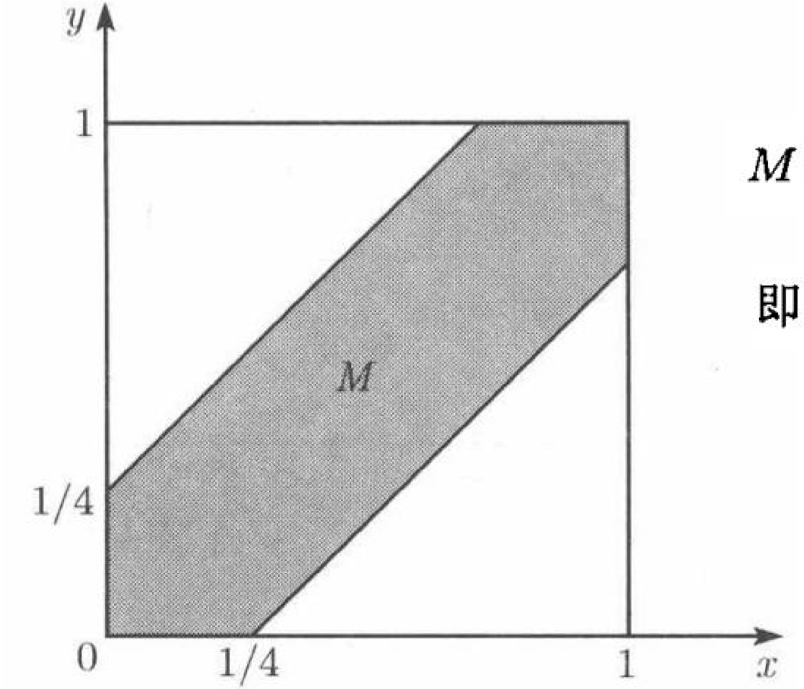


§2 概率模型

2.5 连续模型：

二人相会：时间为0~1小时；最长等待15分钟。相会概率为？





$$M=\{(x,y)\,\big|\,|x-y|\leqslant 1/4, 0\leqslant x<1, 0\leqslant y<1\}$$

即 $1-(3/4)\cdot(3/4)=7/16$

§2 概率模型

概率律的若干性质

考虑一个概率律，令 A, B 和 C 为事件.

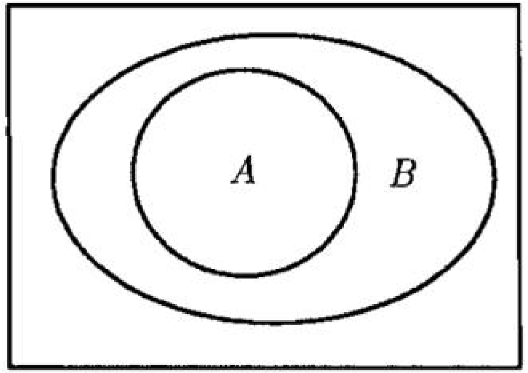
(a) 若 $A \subset B$ 则 $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$.

(b) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

(c) $\mathrm{P}(A \cup B) \leqslant \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

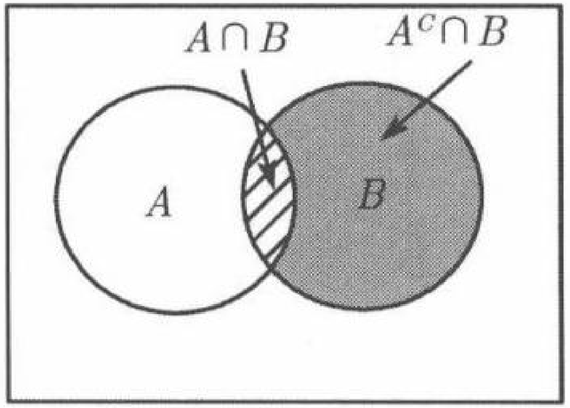
(d) $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c \cap B) + \mathrm{P}(A^c \cap B^c \cap C)$.

§2 概率模型



性质(a): 设 $A \subset B$，则 $B = A \cup (A^c \cap B)$. 由可加性公理,

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geq P(A).$$



性质(b): 对事件 $A \cup B$, B. 可分解成两不相容事件.

$$A \cup B = A \cup (A^c \cap B). \quad B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B).$$

可加性: $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$. —— ①

$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$. —— ②

①式−②得: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

§2 概率模型

推广证明 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\le\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

- 分成事件 A_1 和 $A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n$. ~~应用~~
- 应用性质(c).

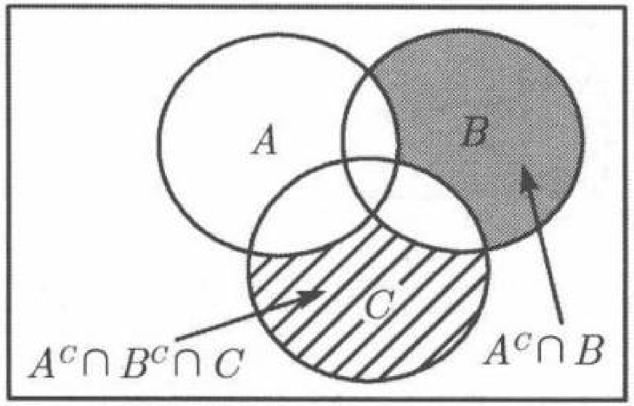
$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots A_n)\le P(A_1)+\underline{P(A_2\cup\cdots\cup A_n)}.$$

- 进一步. 分成事件 A_2 和 $A_3\cup\cdots\cup A_n$.

$$P(A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)\le P(A_2)+P(A_3\cup\cdots\cup A_n).$$

如此继续. 得证.

§2 概率模型



性质(d)：分成不相容事件：

$$A\cup B\cup C = A\cup(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c\cap C).$$

得证.

§3 条件概率

3.1 条件概率

给定部分信息的基础上对实验结果进行推断。

♣连续两次掷骰子实验，已知两次点数总和为9，第一次点数为6的可能性多大?

♣猜字游戏中，第一个字母为t，第二个字母为h的可能性多大?

♣雷达上一个点，这个点为飞机的可能性多大?

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\text{事件}A\cap B\text{的试验结果数}}{\text{事件}B\text{的试验结果数}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

§3 条件概率

→注:

归一性: $P(\Omega|B)=\dfrac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$

可加性: $P(A_1\cup A_2|B)=\dfrac{P((A_1\cup A_2)\cap B)}{P(B)}$

(A_1, A_2不相容)

$$=\frac{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)}{P(B)}$$

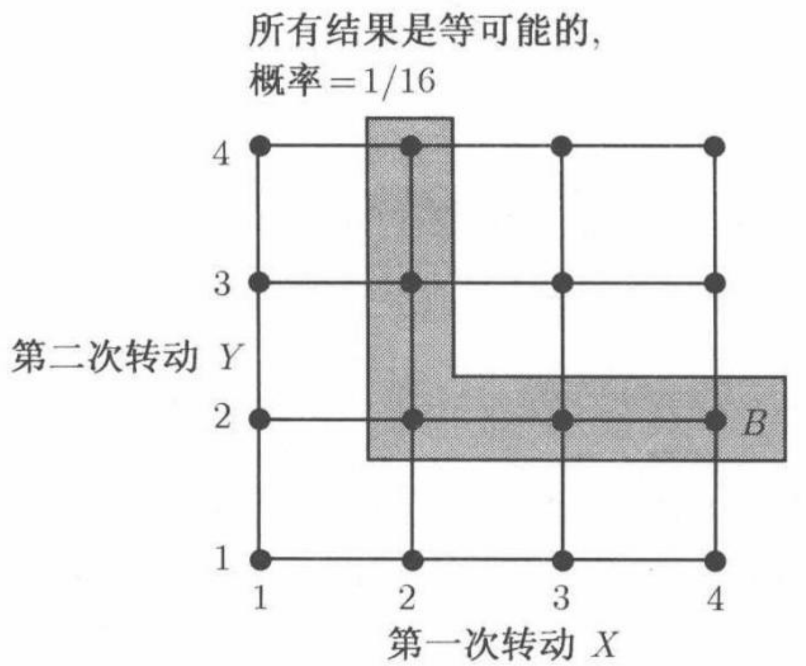
$$=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}$$

$$=P(A_1|B)+P(A_2|B).$$

§3 条件概率

例 1.7 在连续两次转动一个均匀的具有 4 边的骰子的试验中，假定所有 16 种试验结果是等可能的，分别记 X 和 Y 为第一次和第二次转动的结果. 现在希望计算条件概率 $\mathrm{P}(A|B)$, 其中 $m = 1, 2, 3, 4$.

$$A = \{\max(X,Y) = m\}, \qquad B = \{\min(X,Y) = 2\},$$



$$\mathrm{P}(\{\max(X,Y) = m\}|B) = \begin{cases} 2/5, & m = 3或4, \\ 1/5, & m = 2, \\ 0, & m = 1. \end{cases}$$

§3 条件概率

3.2 利用条件概率定义概率模型

例 1.9 (雷达探测器) 有一台雷达探测设备在工作, 若在某区域有一架飞机, 雷达以 99% 的概率探测到并报警. 若该地区没有飞机, 雷达会以 10% 的概率虚假报警. 现在假定一架飞机以 5% 的概率出现在该地区. 问飞机没有出现在该地区而雷达虚假报警的概率有多大? 飞机出现在该地区而雷达没有探测到的概率有多大?

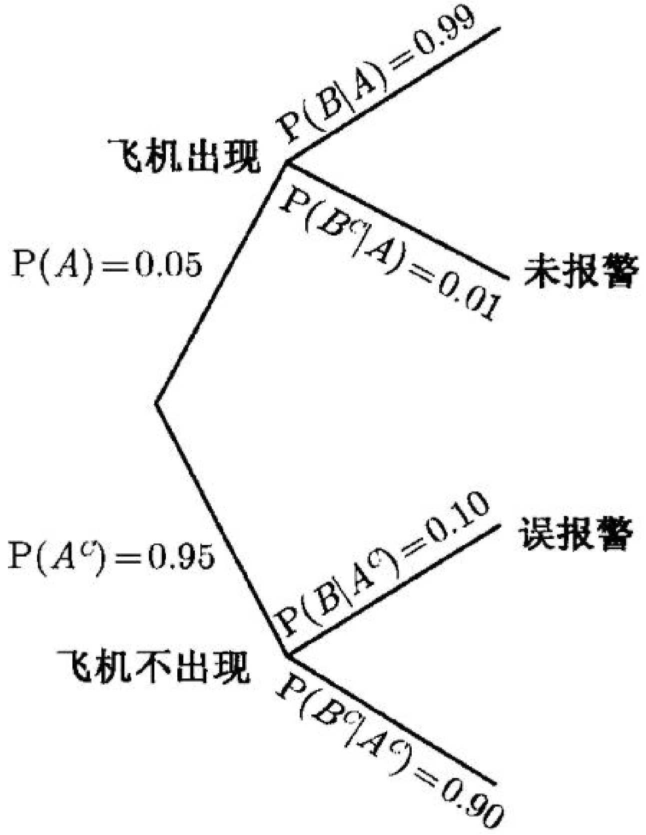
$$A=\{\text{飞机出现}\},\qquad A^c=\{\text{飞机不出现}\},$$

$$B=\{\text{雷达报警}\}.\qquad B^c=\{\text{雷达未报警}\}.$$

§3 条件概率

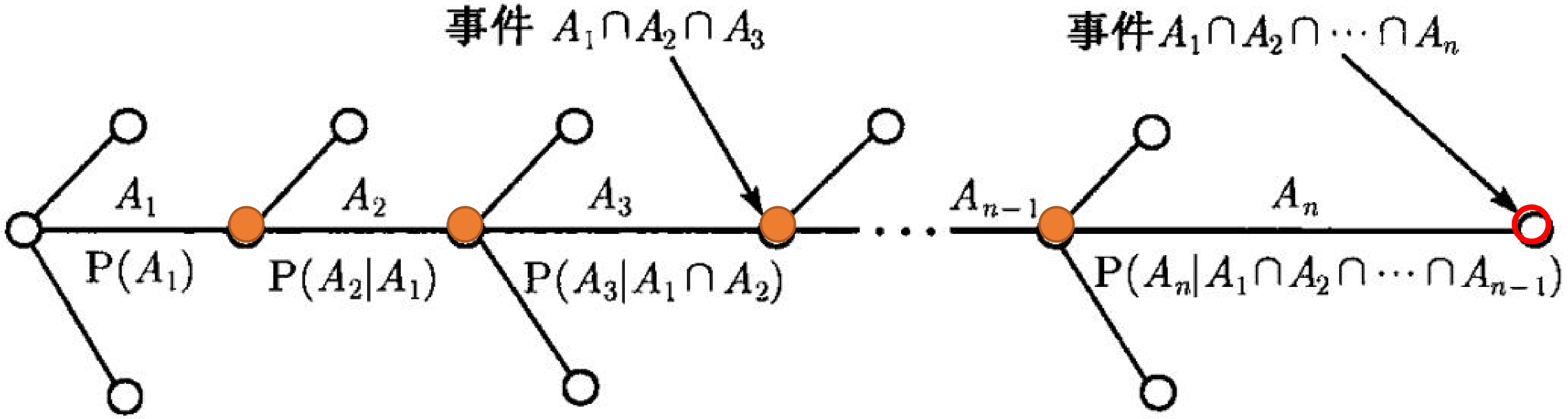
P(飞机不出现、报警)$=\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=0.95\times 0.10=0.095$,

P(飞机出现、未报警)$=\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c|A)=0.05\times 0.01=0.000\ 5$.



§3 条件概率

3.3 乘法规则



$$P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

§3 条件概率

证明: $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \cancel{P(A_1)}\,\frac{\cancel{P(A_2\cap A_1)}}{\cancel{P(A_1)}}\cdot\frac{\cancel{P(A_2\cap A_1\cap A_3)}}{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}\cdot\cdots\cdots\frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)}{\cancel{P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)}}.$$

$$\therefore = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P\left(A_n\middle|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

§3 条件概率

例 1.10 从 52 张扑克牌中连续无放回地抽取 3 张牌. 我们希望求出 3 张牌中没有红桃的概率. 我们假定, 在抽取的时候, 一堆牌中的每一张牌都是等可能地被抽取的.

定义

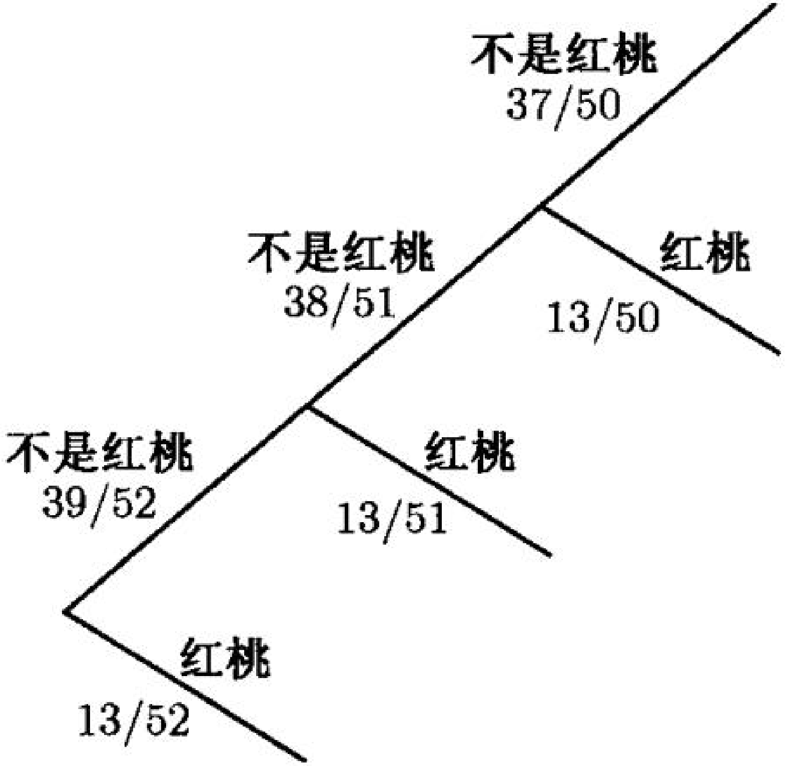
$$A_i = \{第i张牌不是红桃\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

现在利用乘法规则

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2),$$

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{39}{52} \qquad \mathrm{P}(A_2|A_1) = \frac{38}{51} \qquad \mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{37}{50}$$

§3 条件概率



§4 全概率定理和贝叶斯准则

4.1 一个计算事件概率的定理

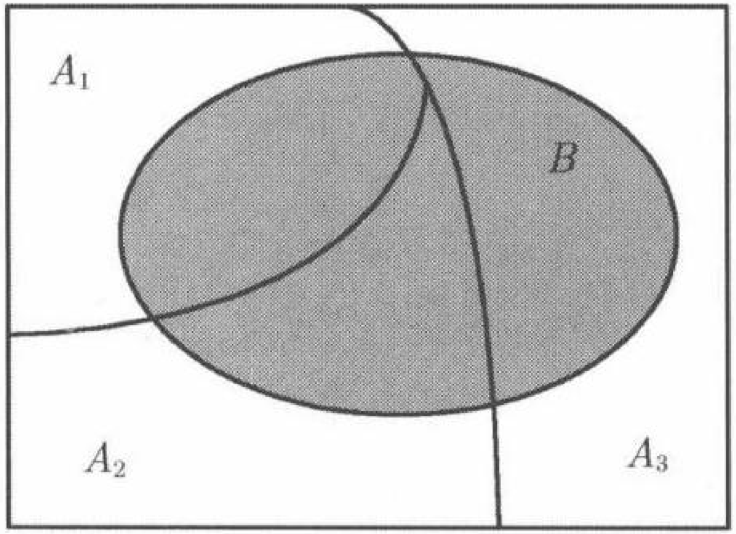
全概率定理

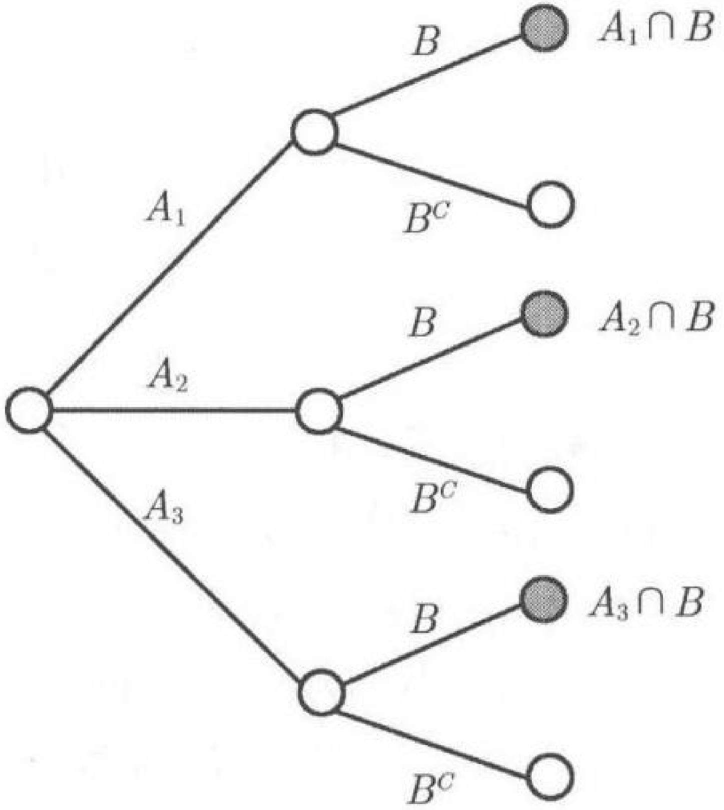
设$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一组互不相容的事件，它形成样本空间的一个分割（每一个试验结果必定使得其中一个事件发生！）. 又假定对每一个 i, $\mathrm{P}(A_i) > 0$. 则对于任何事件 B, 下列公式成立

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A_1 \cap B) + \cdots + \mathrm{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}(B|A_n).\end{aligned}$$

加权平均

§4 全概率定理和贝叶斯准则





§4 全概率定理和贝叶斯准则

例 1.13 你参加一个棋类比赛, 其中 50% 是一类棋手, 你赢他们的概率为 0.3; 25% 是二类棋手, 你赢他们的概率是 0.4; 剩下的是三类棋手, 你赢他们的概率是 0.5. 从他们中间随机地选一位棋手与你比赛, 你胜算的概率有多大?

A_i的定义

解：令 A_i 表示对方棋手的类别，B为你赢的事件.

$P(A_1)=0.5$. $P(A_2)=0.25$. $P(A_3)=0.25$

$P(B|A_1)=0.3$ $P(B|A_2)=0.4$ $P(B|A_3)=0.5$

$P(B)= \cdots\cdots =0.375.$

§4 全概率定理和贝叶斯准则

4.2 推理和贝叶斯准则

贝叶斯准则

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是一组互不相容的事件，它形成样本空间的一个分割（每一个试验结果必定使得其中一个事件发生！）. 又假定对每一个i, $\mathrm{P}(A_i) > 0$. 则对于任何事件B, 只要它满足$\mathrm{P}(B) > 0$, 下列公式成立

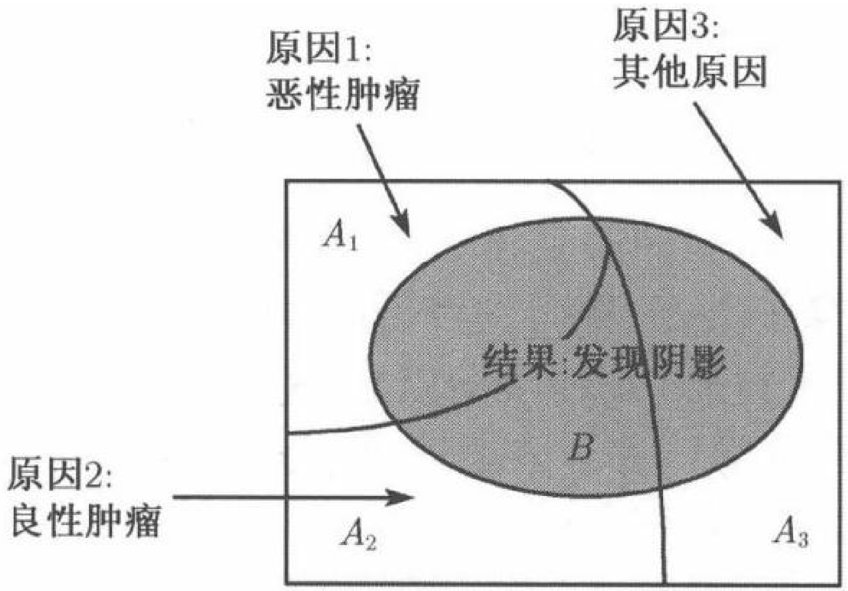
$$
\begin{aligned}
\text{后验概率}\mathrm{P}(\overset{\text{因}}{A_i}|\overset{\text{果}}{B}) &= \frac{\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}{\mathrm{P}(B)} \\
&= \frac{\overset{\text{先验概率}}{\mathrm{P}(A_i)}\mathrm{P}(B|A_i)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}(B|A_n)}.
\end{aligned}
$$

§4 全概率定理和贝叶斯准则

例

我们在某病人 X 光片中发现一个阴影

我们希望对造成这种结果的 3 个原因进行分析.



$$\mathrm{P}(A_i|B) = \frac{\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2) + \mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(B|A_3)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

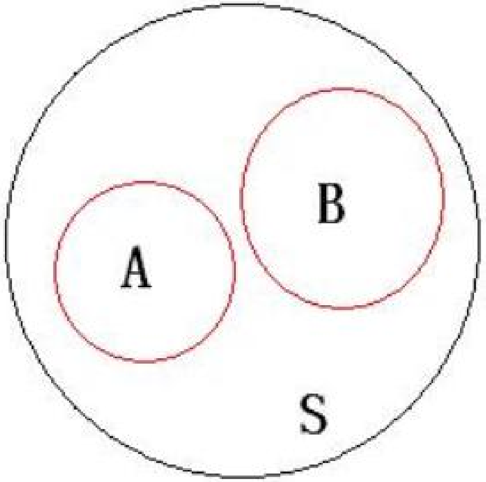
§5 独立性

5.1 独立的概念

$P(A|B) = P(A)$ 事件 A 是独立于事件 B 的.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

5.2 相互独立事件



§5 独立性

5.3 条件独立

$$\mathrm{P}(A \cap B|C) = \mathrm{P}(A|C)\mathrm{P}(B|C)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap B|C) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(B|C)\mathrm{P}(A|B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} \\ &= \mathrm{P}(B|C)\mathrm{P}(A|B \cap C).\end{aligned}$$

§5 独立性

$$p(A\cap B|C) = p(A|C)\,p(B|C).$$

假定≠0.

$$\therefore\quad p(B|C)\,p(A|B\cap C) = p(A|C)\,p(B|C)$$

$$\therefore\quad p(A|B\cap C) = p(A|C).$$

$\boxed{\mathrm{P}(A|B\cap C) = \mathrm{P}(A|C)}$ 给定C发生的条件下，进一步假定B发生，不会影响A的条件概率

§5 独立性

5.4 两事件独立与两事件条件独立的讨论

A 和 B 两个事件相互独立并不包含条件独立, 反过来也是如此.

例 1.20 考虑抛掷两枚均匀的硬币. 这个试验的 4 种可能结果都是等可能的. 令

$$H_1 = \{第一枚硬币正面向上\},$$
$$H_2 = \{第二枚硬币正面向上\},$$
$$D = \{两枚硬币的试验结果不同\}.$$

§5 独立性

---对于任何概率模型，相互独立与条件独立

记 A 和 B 是相互独立的事件 C 满足条件 $\mathrm{P}(C)>0, \mathrm{P}(A|C)>0$ 和 $\mathrm{P}(B|C)>0$

$A\cap B\cap C$ 为空

$$\mathrm{P}(A\cap B|C)=0$$

$$\mathrm{P}(A|C)\mathrm{P}(B|C)>0$$

$\Longrightarrow$ A 和 B 不可能条件独立

§5 独立性

---针对不均匀硬币

例 1.21 有两枚硬币，一枚蓝的，一枚红的. 在抛掷硬币之前，先按 1/2 的概率随机地选定一枚硬币，然后进行连续两次独立地抛掷硬币的试验. 硬币是不均匀的. 蓝的硬币在抛掷的时候以 0.99 的概率正面向上. 而红的那一枚硬币在抛掷的时候以 0.01 的概率正面向上.

记 B 为选定蓝色的硬币的事件，H_i 为第 i 次抛掷时出现正面向上.

$$\mathrm{P}(H_1 \cap H_2|B) = \mathrm{P}(H_1|B)\mathrm{P}(H_2|B) = 0.99 \cdot 0.99.$$

§5 独立性

$$p(H_1) = p(B)p(H_1|B) + p(B^c)p(H_1|B^c)$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.99 + \frac{1}{2} \times 0.01 = \frac{1}{2}.$$

对称性 $p(H_2) = \frac{1}{2}$.

$$p(H_1 \cap H_2) = p(B)p(H_1 \cap H_2|B) + p(B^c)p(H_1 \cap H_2|B^c)$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.99 \times 0.99 + \frac{1}{2} \times 0.01 \times 0.01$$

$$\approx \frac{1}{2}.$$

$\therefore p(H_1 \cap H_2) \neq p(H_1)p(H_2)$. 即: H_1. H_2 相互依赖.

§5 独立性

5.5 独立性的结论总结

独立性

- 两个事件 A 和 B 称为相互独立的，如果它们满足

$$P(A\cap B)=P(A)P(B).$$

若 B 还满足 $P(B)>0$，则独立性等价于

$$P(A|B)=P(A).$$

§5 独立性

- 若 A 与 B 相互独立, 则 A 与 B^c 也相互独立.
- 设事件 C 满足 $\mathrm{P}(C)>0$, 两个事件 A 和 B 称为在给定 C 的条件下条件独立, 如果它们满足

$$\mathrm{P}(A\cap B|C)=\mathrm{P}(A|C)\mathrm{P}(B|C).$$

  若进一步假定 $\mathrm{P}(B\cap C)>0$, 则 A 和 B 在给定 C 的条件下的条件独立性与下面的条件是等价的

$$\mathrm{P}(A|B\cap C)=\mathrm{P}(A|C).$$

- 独立性并不蕴涵条件独立性, 反之亦然.

§5 独立性

5.6 一组事件的独立性

几个事件的相互独立性的定义

设 $A_1, \cdots, A_n$ 为 n 个事件. 若它们满足

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) = \prod_{i\in S} \mathrm{P}(A_i), \quad \text{对任意}\{1,2,\cdots,n\}\text{的子集}S\text{成立}.$$

则称 $A_1, \cdots, A_n$ 为相互独立的事件.

§5 独立性

对于三个事件 A_1、A_2、A_3，独立性：

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)p(A_2)$$

$$p(A_1 \cap A_3) = p(A_1)p(A_3)$$

$$p(A_2 \cap A_3) = p(A_2)p(A_3)$$

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1)p(A_2)p(A_3).$$

§5 独立性

例 1.22 (两两独立并不包含独立) 设试验是抛掷两枚均匀的硬币. 考虑下列事件:

$$H_1=\{\text{第一次扔得正面}\},$$
$$H_2=\{\text{第二次扔得正面}\},$$
$$D=\{\text{两次扔得的结果不相同}\}.$$

由定义可知 H_1 和 H_2 是相互独立的.

$$\mathrm{P}(D|H_1)=\frac{\mathrm{P}(H_1\cap D)}{\mathrm{P}(H_1)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}=\mathrm{P}(D);$$ D 与 H_1 是相互独立的

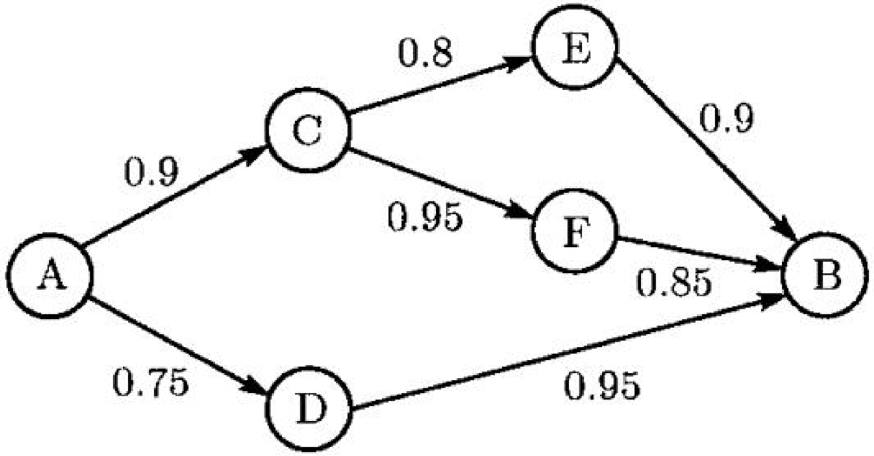
D 与 H_2 的相互独立性可以类似地证明.

$$\mathrm{P}(H_1\cap H_2\cap D)=0\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(D),$$ 可知 3 个事件是不独立的.

§5 独立性

5.7 可靠性

例 1.24 (网络连接) 在计算机网络中, A 和 B 两个结点通过中间结点 C, D, E, F 相互连接 (见图 1.15a). 图上直接连接的两个点 i 和 j 表示 i 和 j 之间有一个元件运行着, 当这个元件失效时两个点之间就失去连接. 我们假定 i 和 j 之间具有给定的连接概率 p_{ij}.[①] 假定各点之间的连接与否独立于其他各点之间连接与否. 问 A 和 B 之间相互连接的概率有多大?



$$\mathrm{P}(\text{串联系统有效}) = p_1 p_2 \cdots p_m.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{并联系统有效}) &= 1 - \mathrm{P}(\text{并联系统失效}) \\ &= 1 - (1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_m).\end{aligned}$$

§5 独立性

设系统由元件 $1, 2, \cdots, m$ 组成, 令 p_i 为元件 i 有效 (运行) 的概率.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C \to B) &= 1 - \big(1 - \mathrm{P}(C \to E \text{和} E \to B)\big)\big(1 - \mathrm{P}(C \to F \text{和} F \to B)\big) \\ &= 1 - (1 - p_{CE}p_{EB})(1 - p_{CF}p_{FB}) \\ &= 1 - (1 - 0.8 \cdot 0.9)(1 - 0.95 \cdot 0.85) \\ &= 0.946,\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(A \to C \text{ 和 } C \to B) = \mathrm{P}(A \to C)\mathrm{P}(C \to B) = 0.9 \cdot 0.946 = 0.851,$$

$$\mathrm{P}(A \to D \text{ 和 } D \to B) = \mathrm{P}(A \to D)\mathrm{P}(D \to B) = 0.75 \cdot 0.95 = 0.712.$$

最后, 我们得到所需的概率

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \to B) &= 1 - \big(1 - \mathrm{P}(A \to C \text{ 和 } C \to B)\big)\big(1 - \mathrm{P}(A \to D \text{和} D \to B)\big) \\ &= 1 - (1 - 0.851)(1 - 0.712) \\ &= 0.957.\end{aligned}$$

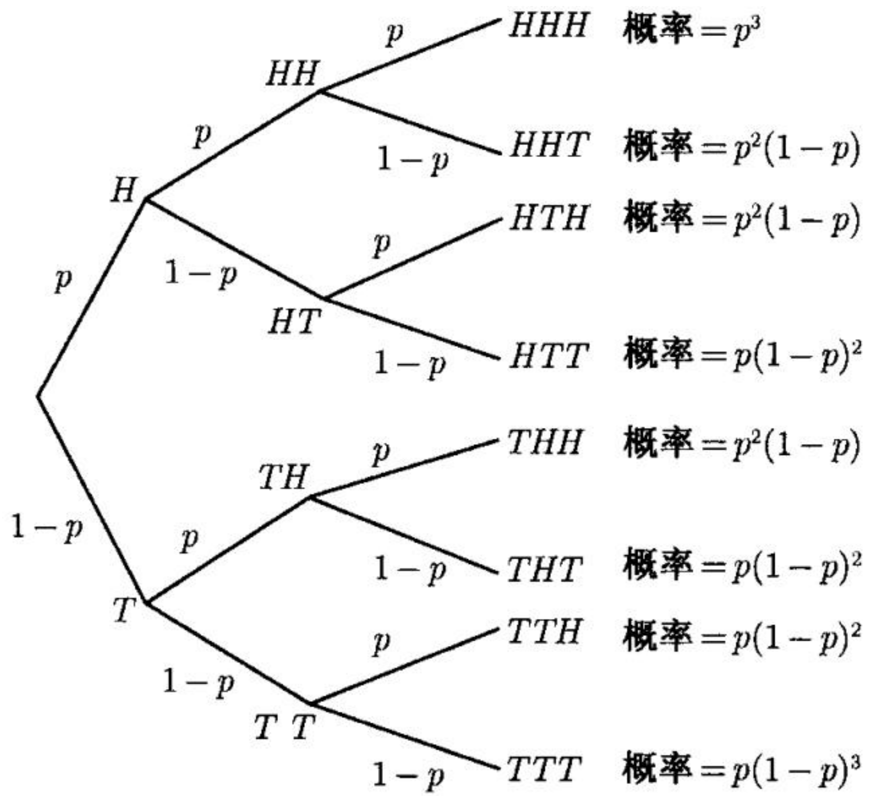
§5 独立性

5.8 独立试验和二项概率

独立试验序列

伯努利试验序列

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$



§6 计数法

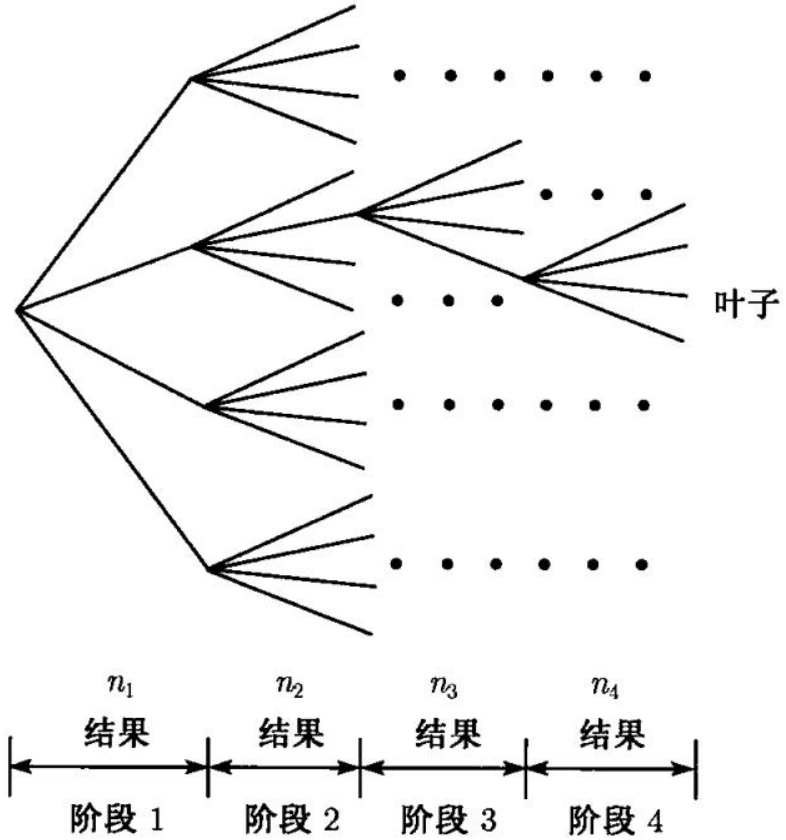
6.1 计数准则

分段计数的原则

第一阶段实验结果：$a_1,a_2......a_m$

第二阶段结果：$b_1,b_2......b_n$

序列对（a_i,b_j）个数总和为mn



总共的叶子数目为 $n_1n_2\cdots n_r$

§6 计数法

计数准则[①]

考虑由 r 个阶段组成的一个试验. 假设:

(a) 在第 1 阶段有 n_1 个可能的结果;

(b) 对于第 1 阶段的任何一个结果, 在第 2 阶段有 n_2 个可能的结果;

(c) 一般地, 在前 $r-1$ 个阶段的任何一个结果, 在接下来的第 r 阶段有 n_r 个结果, 则在 r 个阶段的试验中一共有

$$n_1 n_2 \cdots n_r$$

个试验结果.

§6 计数法

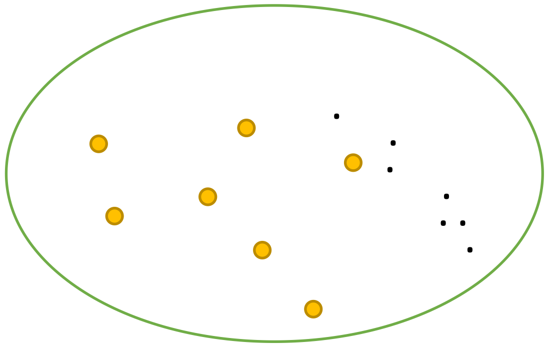
例 1.27 (n 个元素的集合的子集的个数) 考虑一个 n 个元素的集合 $\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$. 这个集合有多少个子集 (包括这个集合本身和空集呢)?

子集的总数为 $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n\text{ 次}} = 2^n.$

§6 计数法

6.2 n选k排列

分段计数的原则



n个对象中顺序的选出K个对象的方法数：

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 2\cdot 1}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

k=n时，$n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$, -------排列

§6 计数法

6.3 组合

n个元素的集合中，有多少种K个不同元素的集合?

例：A, B, C 和 D 中选 2 个的排列

$AB,\ AC,\ AD,\ BA,\ BC,\ BD,\ CA,\ CB,\ CD,\ DA,\ DB,\ DC,$

这 4 个字母的两个字母的组合

$AB,\ AC,\ AD,\ BC,\ BD,\ CD.$

组合实际上是由排列归并而成的.

§6 计数法

推广：

从 n 个元素的集合中选 k 个元素的组合数为

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

二项式系数： $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

当 $p = 1/2$ 时， $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

§6 计数法

例 1.31 设有一群人, 一共有 n 个. 现在要组织一个个人爱好俱乐部, 俱乐部由一个主任和若干成员组成 (成员人数可为 0). 问有多少种方式组成一个俱乐部?

代数恒等式

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

§ 6 计数法

6.4 分割

将n个元素的集合分解成r个不想交的子集，共有多少种分解方法?

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

即：$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{r-1})!}{n_r!(n-n_1-\cdots-n_{r-1}-n_r)!}.$$

化简后，**多项系数**： $$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}.$$ **或** $$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r.}$$

§6计数法

例 1.32 (相同字母异序词) 将 TATTOO 这个英文单词的字母颠倒排列可得到多少个不同的单词?

$$\frac{6!}{1!2!3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 60$$

§6 计数法

计数法汇总

- n 个对象的**排列数**: $n!$.
- n 个对象中取 k 个对象的**排列数**: $n!/(n-k)!$.
- n 个对象中取 k 个对象的**组合数**: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
- 将 n 个对象分成 r 个组的**分割数**, 其中第 i 个组具有 n_i 个对象:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}.$$

作业

1. 考虑掷一个具有 6 个面的骰子. 令事件 A 为掷出偶数. 令 B 表示点数大于 3 的事件. 验证下面的德摩根公式:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

24. 犯人的难题. 已知三个犯人中有两个犯人将要被释放, 但在事情还未公布之前, 被释放犯人的身份是保密的. 其中一个犯人要求看守人告诉他, 在他的两个狱友中哪一个将被释放. 看守拒绝了他的要求, 理由如下:“在现有的信息之下, 你被释放的概率为 2/3. 我若告诉你这个信息, 因为你和另一个犯人之间将确定有一个人被释放, 所以你被释放的概率就将变成 1/2.” 这个看守所列理由的错误在哪里?