第七章 参数估计

- 点估计
- 估计量的评选标准
- 区间估计
- 正态总体均值与方差的区间估计
- 非正态总体参数的区间估计

问题的提出

参数估计是统计推断的基本问题之一，实际工作中碰到的总体X，它的分布类型往往是知道的，只是不知道其中的某些参数，

例如：产品的质量指标X服从正态分布，其概率密度为：

$$f\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<+\infty$$

但参数μ,σ^2的值未知，要求估计μ,σ^2，有时还希望以一定的可靠性来估计μ值是在某个范围内或者不低于某个数。

参数估计问题就是要求通过样本估计总体分布所包含的未知参数的值。

参数估计的两种方法：点估计法和区间估计法

§7.1 点估计

设总体X有未知参数θ，$X_1,\cdots,X_n$是X的简单随机样本。

点估计问题：构造合适的统计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$

用来估计未知参数θ，称$\hat{\theta}$为参数θ的点估计量，

当给定样本观察值$x_1,\cdots,x_n$时，

称$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为参数$\theta$的点估计值。

常用的点估计方法：

矩估计法　　最大似然估计法

§ 7.1.1 矩估计法

设总体X的分布函数为$F\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$,$\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$是待估计的未知参数，假定总体$X$的v阶原点矩$E\left(X^{v}\right)$存在，

则有：$E\left(X^v\right)=\mu_v\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$　$v=1,2,\cdots,k$,对于样本$X=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$,

其v阶样本矩是：$A_v=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^v$　$v=1,2,\cdots,k$

用样本矩作为总体矩的估计，即令：

$$\begin{cases}\mu_1\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_1\\ \mu_2\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_2\\ \vdots\\ \mu_k\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)=A_k\end{cases}$$

解此方程即得$(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$的一个矩估计量$\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k\right)$

基本步骤

（1）求总体前k阶矩关于k个参数的函数

$$\mu_i = E(X^i) = \mu_i(\theta_1,\cdots,\theta_k), \qquad i=1,\cdots,k$$

（2） 样本各阶矩$A_1,\cdots,A_k$代替总体各阶矩$\mu_1,\cdots,\mu_k$，

得各参数的矩估计

$$\begin{cases} \mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_1 \\ \mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_2 \\ \qquad\vdots \\ \mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_k \end{cases}$$

（3）解此方程即得$(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$的一个矩估计量$\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k\right)$

例1：设总体X服从均匀分布$U(a,b)$，a和b是未知参数，样本$X_1,\cdots,X_n$，求a和b的矩估计。

例2 设总体X的密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}\quad \theta>0为未知参数，$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自X的样本，求θ的矩估计。

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$

令$E(X)=\bar{X}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\bar{X}\quad\Rightarrow\hat{\theta}=\left(\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$

例3 设总体X的均值μ和方差σ^2都存在，且$\sigma^2>0$，μ,σ^2均未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自X的一个样本，试求μ,σ^2的矩估计。

解：先求总体矩：

$$\mu_1=E(X),\ \mu_2=E\left(X^2\right)=D(X)+E^2(X)=\mu^2+\sigma^2$$

再求样本矩：

$$A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X},\ A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

令$\begin{cases}\mu_1=A_1\\ \mu_2=A_2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\hat{\mu}=\bar{X}\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\end{cases}$

§ 7.1.2 最大似然估计法

考察以下例子：

假设在一个罐中放着许多白球和黑球，已经知道两种球的数目之比是1:3，但不知道哪种颜色的球多。如果用返回抽样方法从罐中任取n个球，假设取到黑球和白球的概率分别为p、q，则其中黑球的个数为x的概率为：

$$P(x;p)=C_n^x p^x q^{n-x}，\text{其中}q=1-p,\text{由假设知，}p=\frac{1}{4}\text{或}\frac{3}{4}$$

若取n=3，如何通过x来估计p值 $P(x;p)=C_n^x p^x q^{n-x}$

先计算抽样的可能结果x在这两种p值之下的概率：

x	0	1	2	3
$P(x, {}^3/_4)$	${}^1/_{64}$	${}^9/_{64}$	${}^{27}/_{64}$	${}^{27}/_{64}$
$P(x, {}^1/_4)$	${}^{27}/_{64}$	${}^{27}/_{64}$	${}^9/_{64}$	${}^1/_{64}$

$x=0, P\left(0,\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{64}>P\left(0,\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{64}$，取$\hat{p}=\frac{1}{4}$更合理；

$x=1, P\left(0,\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{64}>P\left(0,\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{64}$，取$\hat{p}=\frac{1}{4}$更合理；

$x=2, P\left(0,\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{64}<P\left(0,\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{64}$，取$\hat{p}=\frac{3}{4}$更合理；

$x=3, P\left(0,\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}<P\left(0,\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{64}$，取$\hat{p}=\frac{3}{4}$更合理；

于是有：$\hat{p}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=0,1\\ \frac{3}{4} & x=2,3\end{cases}$

离散型最大似然

一般地，设离散型总体$X \sim p(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$，θ未知。

从总体X中取得样本$X_1,\ldots,X_n$，其观察值为$x_1,\ldots,x_n$，

则事件$\{X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n\}$发生的概率为

似然函数

$$L(\theta) = P\{X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n\} = p(x_1;\theta)\ldots p(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta).$$

极大似然原理：$L(\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)) = \max\limits_{\theta\in\Theta} L(\theta).$

称$\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)$为$\theta$的极大似然估计值，

相应统计量$\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$为$\theta$的极大似然估计量（MLE)。

连续型最大似然

若总体X为连续型的，

概率密度为$f\left(x,\theta\right)$，$\theta\in\Theta$，θ为未知参数。

则对于样本$\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$的观察值$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，

似然函数 $L\left(\theta\right)=\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i,\theta\right)$。

极大似然原理：$L(\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n))=\max_{\theta\in\Theta} L(\theta).$

[说明] 1.未知参数可能不是一个，一般设为$\theta=\left(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right)$;

2. 在求$L(\theta)$的最大值时，通常转换为求：$lnL(\theta)$的最大值，

$lnL(\theta)$称为对数似然函数.

利用$\dfrac{\partial lnL(\theta)}{\partial\theta_i}=0, i=1,2,\ldots,k$.解得$\hat{\theta}_i$，$i=1,2,\ldots,k$.

3. 若$L(\theta)$关于某个θ_i是单调增(减)函数，

此时θ_i的极大似然估计在其边界取得；

4. 若$\hat{\theta}$是θ的极大似然估计，则$g(\theta)$的极大似然估计为$g\left(\hat{\theta}\right)$。

例4：设总体X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1,\ldots,X_n$是总体X的样本，求θ的极大似然估计量。

解：似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

$$=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}$$

$$lnL(\theta)=\frac{n}{2}ln\theta+\left(\sqrt{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令$\dfrac{dlnL(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

即：$\dfrac{n}{\sqrt{\theta}}=-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

θ的极大似然估计量为：$\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}lnX_i\right)^2}$

例5：设总体X的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta} & x\ge\mu\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

其中$\theta>0$，θ,μ是未知参数，$(X_1,\cdots,X_n)$为X的样本，求θ,μ的矩估计与极大似然估计。

解：(1) 矩估计

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \;=\int_{\mu}^{+\infty} x\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}dx \;=\mu+\theta$$

$$E(X^2)=\int_{\mu}^{+\infty} x^2\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}dx=\mu^2+2\theta\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}dx=\mu^2+2\mu\theta+2\theta^2$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\theta^2$$

令 $\begin{cases} E(X)=\bar{X} \\ D(X)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \\ \hat{\mu}=\bar{X}-\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \end{cases}$

(2) 极大似然估计

$$L(\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-(x_i-\mu)/\theta}$$

此处不能通过求偏导数获得μ的极大似然估计量,

$\because x_i \geq \mu$,故μ的取值范围最大不超过$x=min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

另一方面,$L(\theta,\mu)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu}{\theta}}$是$\mu$的增函数,$\mu$取到最大值时,$L$达到最大。

故$\hat{\mu}=X_{(1)}=min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 又$lnL(\theta)=-nln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})$

令$\frac{dlnL(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-X_{(1)}\right)=0 \quad \Rightarrow \hat{\theta}=\bar{X}-X_{(1)}$

例6：设总体X服从$[0,\theta]$上的均匀分布，$\theta>0$未知，试由样本$x_1,x_2,\cdots,x_n$求出θ的极大似然估计和矩估计。

解：(1) 极大似然估计

因X的概率密度为：$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

故参数θ的似然函数为：$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & 0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

由于$\dfrac{dln(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}\ne 0$,不能用微分法求$\hat{\theta}_L$

以下从定义出发求$\hat{\theta}_L$：

因为$0\le x_i\le\theta$,故θ的取值范围最小为$x_{(n)}=max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

又$L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}$对$\theta>x_{(n)}$的$\theta$是减函数，$\theta$越小，$L$越大，故$\hat{\theta}_L=x_{(n)}$时，$L$最大；

所以θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}_L=X_{(n)}=max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

(2) 矩估计

$$由E(X)=\int_0^\theta \frac{1}{\theta}x\,dx=\frac{\theta}{2}=\overline{X}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}=2\overline{X}$$

例7：设总体X的概率分布律为：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta & \theta/2 & 1-3\theta/2 \end{pmatrix}$,

其中$0<\theta<\dfrac{2}{3}$, 未知,

现得到样本观测值2，3，2，1，3，

求θ的矩估计值与极大似然估计值。

解：(1) 矩估计

$$\mu_1 = E(X) = \sum x_k p_k$$

$$= \theta + 2 \times \theta/2 + 3 \times (1 - 3\theta/2)$$

$$= 3 - 5\theta/2$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2}{5}(3 - \mu_1)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{5}(3 - \bar{X})$$

$$\bar{X} = 2.2 \quad \Rightarrow \hat{\theta} = 0.32$$

(2) 极大似然估计

$$L(\theta)=(\theta/2)(1-3\theta/2)(\theta/2)\theta(1-3\theta/2)$$

$$=\tfrac{1}{16}\theta^3(2-3\theta)^2$$

$$\ln L(\theta)=-\ln 16+3\ln\theta+2\ln(2-3\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{6}{2-3\theta}=0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}=0.4$$

§ 7.2 估计量的评选标准

从前一节看到，对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价好坏？

三条评价准则：

无偏性准则，有效性准则，相合性准则

§ 7.2.1 无偏性

定义：若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,满足

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,$$

则称$\hat{\theta}$是θ的一个无偏估计量。

若$E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta$,那么$\left|E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right|$称为估计量$\hat{\theta}$的偏差

若$\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$,则称$\hat{\theta}$是$\theta$的渐近无偏估计量

例1：设总体X的一阶和二阶矩存在，分布是

任意的，记$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$,

证明：样本均值$\overline{X}$和样本方差S^2分别是

μ和σ^2的无偏估计。

证：因$X_1, X_2, \cdots, X_n$与X同分布，故有：

$$E\left(\bar{X}\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

故$\bar{X}$是μ的无偏估计

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$E\left(S^2\right)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-\left(\bar{X}-\mu\right)\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right\}=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}D\left(X_i\right)-nD\left(\bar{X}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-\sigma^2\right)=\sigma^2$$

故S^2是σ^2的无偏估计

例2：检验7.1节例6（即总体X服从$\left[0,\theta\right]$上的均匀分布）

的矩估计量$\hat{\theta}=2\overline{X}$与

极大似然估计量$\hat{\theta}_L=X_{(n)}$的无偏性。

解：$\because X\sim U[0,\theta]$，$E(X)=\dfrac{\theta}{2}$， 由于$X_1,\cdots,X_n$与$X$同分布

$$\therefore E\left(\hat{\theta}\right)=E\left(2\bar{X}\right)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)=\frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$$

因此$\hat{\theta}=2\bar{X}$是θ的无偏估计

为考察$\hat{\theta}_L=X_{(n)}$的无偏性，先求$X_{(n)}$的分布，

由第三章第5节知：

$$F_{X_{(n)}}(x)=\left[F(x)\right]^n，\quad 于是\ f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0\le x\le\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$$

因此有：$E\left(\hat{\theta}_L\right)=E\left(X_{(n)}\right)=\displaystyle\int_0^{\theta}\frac{x\cdot nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+1}\theta\ne\theta$

所以$\hat{\theta}_L=X_{(n)}$是有偏的。

纠偏方法

如果 $E\left(\hat{\theta}\right)=a\theta+b,\theta\in\Theta$,其中$a,b$是常数，且$a\neq 0$

则$\dfrac{1}{a}\left(\hat{\theta}-b\right)$是$\theta$的无偏估计。

在例2中，取$X_{(n)}^{*}=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$,则$X_{(n)}^{*}$是$\theta$的无偏估计

无偏性的统计意义是指在大量重复试验下，由$\hat{\theta}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$所作的估计值的平均恰是$\theta$,从而无偏性保证了$\hat{\theta}$没有系统误差。

§ 7.2.2 有效性

定义：设$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$是$\theta$的两个**无偏**估计，

如果$D\left(\hat{\theta}_1\right) \le D\left(\hat{\theta}_2\right)$,对一切$\theta \in \Theta$成立，

且不等号至少对某一$\theta \in \Theta$成立，则称

$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

例3：设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，

已知θ的两个无偏估计为$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}, \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$，

判别$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$哪个有效$(n \geq 2\text{时})$?

解：$D\left(\theta_1\right)=D\left(2\bar{X}\right)=\dfrac{4}{n}\cdot\dfrac{\theta^2}{12}=\dfrac{\theta^2}{3n}$

由 $f_{X_{(n)}}\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0<x<\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases} \Rightarrow E\left(X_{(n)}^2\right)=\int_0^\theta \dfrac{nx^{n+1}}{\theta^n}dx=\dfrac{n}{n+2}\theta^2$

于是$D\left(\theta_2\right)=\dfrac{\left(n+1\right)^2}{n^2}\left\{E\left(X_{(n)}^2\right)-\left[E\left(X_{(n)}\right)\right]^2\right\}=\dfrac{\theta^2}{n\left(n+2\right)}$

因为$D\left(\theta_1\right)=\dfrac{\theta^2}{3n}>\dfrac{\theta^2}{n\left(n+2\right)}=D\left(\theta_2\right) \Rightarrow \theta_2$比$\theta_1$更有效

§ 7.2.3 相合性

定义：设$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，

若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to+\infty$时，$\hat{\theta}_n$依概率收敛于θ，

即$\forall\varepsilon>0$，有：$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\right\}=0$成立，

则称$\hat{\theta}_n$为θ的相合估计量或一致估计量

例4 设总体$X\sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，

证明：$\hat{\theta}_1=2\overline{X}$和$\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$是$\theta$的相合估计。

证：$E\left(\hat{\theta}_1\right)=E\left(\hat{\theta}_2\right)=\theta$，$D\left(\hat{\theta}_1\right)=\dfrac{\theta^2}{3n}$，　$D\left(\hat{\theta}_2\right)=\dfrac{\theta^2}{n\left(n+2\right)}$

由切比雪夫不等式，$\forall\varepsilon>0,$当$n\to+\infty$时，

有：$P\left\{\left|\hat{\theta}_1-\theta\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{D\left(\hat{\theta}_1\right)}{\varepsilon^2}=\dfrac{\theta^2}{3n\varepsilon^2}\to 0$

同理：$P\left\{\left|\hat{\theta}_2-\theta\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{D\left(\hat{\theta}_2\right)}{\varepsilon^2}=\dfrac{\theta^2}{n\left(n+2\right)\varepsilon^2}\to 0$

所以$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$都是θ的相合估计。

§7.3 区间估计

点估计是由样本求出未知参数θ的一个估计值$\hat{\theta}$.

区间估计则要由样本给出参数θ的一个估计范围，并指出该区间包含θ的可靠程度.

§ 7.3.1 置信区间

定义7. 3. 1：设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数θ, $(X_1,\cdots,X_n)$是总体X的一个样本，对给定的值$\alpha(0<\alpha<1)$,

如果有两个统计量$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}=\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(X_1,\cdots,X_n)$, $\hat{\theta}_{\mathrm{U}}=\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(X_1,\cdots,X_n)$，使得：

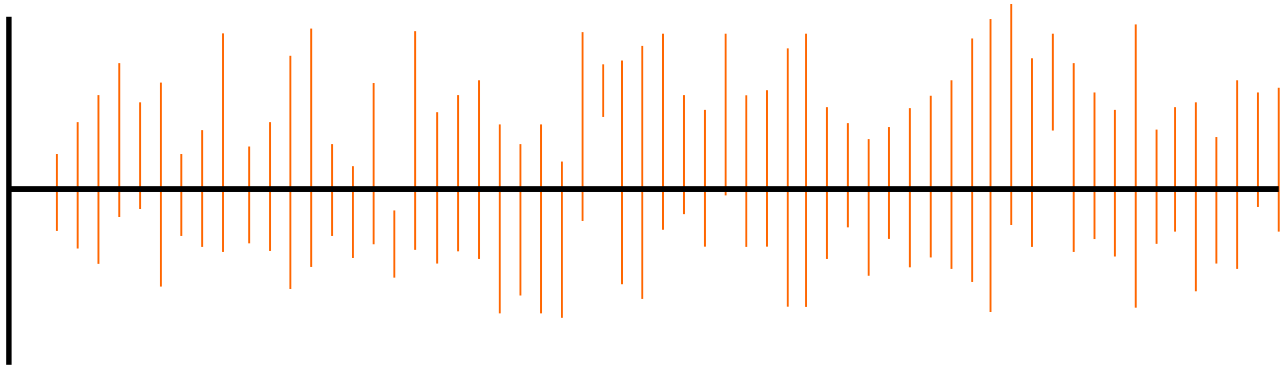
$$P\left\{\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha \quad \forall\theta\in\Theta \quad (7-1)$$

则称随机区间$\left(\hat{\theta}_{\mathrm{L}},\hat{\theta}_{\mathrm{U}}\right)$是$\theta$的双侧置信区间；称$1-\alpha$为置信度；

$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}$和$\hat{\theta}_{\mathrm{U}}$分别称为双侧置信下限和双侧置信上限。

置信区间的含义

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等，都为n),每个样本值确定一个区间$\left(\underline{\theta},\overline{\theta}\right)$,每个这样的区间或者包含$\theta$的真值,或者不包含$\theta$的真值。按伯努里大数定律，在这些区间中，包含$\theta$真值的约占$100(1-\alpha)\%$.



如反复抽样10000次，当$\alpha=0.05$,即置信水平为95%时，10000个区间中不包含θ的真值的约为500个；当$\alpha=0.01$,即置信水平为99%时, 10000个区间中不包含θ的真值的约为100个。

单侧置信区间

定义7.3.2 在以上定义中，若将$(7-1)$式改为：

$$P\left\{\hat{\theta}_{\mathrm{L}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)<\theta\right\}\geq 1-\alpha,\quad \forall\theta\in\Theta \qquad (7-2)$$

则称$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$为$\theta$的单侧置信下限。

随机区间$\left(\hat{\theta}_{\mathrm{L}},+\infty\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间。

又若将$(7-2)$式改为：

$$P\left\{\theta<\hat{\theta}_{\mathrm{U}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)\right\}\geq 1-\alpha,\quad \forall\theta\in\Theta \qquad (7-3)$$

则称$\hat{\theta}_{\mathrm{U}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$为$\theta$的单侧置信上限。

随机区间$\left(-\infty,\hat{\theta}_{\mathrm{U}}\right)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间。

单侧置信限和双侧置信区间的关系

设$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}=\hat{\theta}_{\mathrm{L}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_1$的单侧置信下限，

$\hat{\theta}_{\mathrm{U}}=\hat{\theta}_{\mathrm{U}}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_2$的单侧置信上限，

则（$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}$， $\hat{\theta}_{\mathrm{U}}$）是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_1-\alpha_2$的双侧置信区间。

§ 7.3.2 枢轴量法

定义7. 3. 3：设总体X有概率密度（或概率分布律）$f(x;\theta)$，其中θ是待估的未知参数，并

设$X_1,\cdots,X_n$是来自该总体的样本，

称样本和未知参数θ的函数$G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$为枢轴量，

如果它的分布不依赖于未知参数θ，且完全已知.

求置信区间具体步骤

(1) 构造一个分布已知的枢轴量$G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$;

(2) 对连续型总体和给定的置信度$1-\alpha$，设常数$a<b$满足

$$P\left\{a<G(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b\right\}=1-\alpha;$$

（3）若能从$a<G(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b$得到等价的不等式

$$\hat{\theta}_L\left(X_1,\cdots,X_n\right)<\theta<\hat{\theta}_U\left(X_1,\cdots,X_n\right)$$

那么$\left(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U\right)$就是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

问：若步骤（3）中a和b的解不唯一，该如何处理？

1. 求a和b使得区间长度最短；

2. 如果最优解不存在或比较复杂，为应用的方便，常取a和b满足：

$$P(G(X_1,\ldots,X_n;\theta)\le a)=P(G(X_1,\ldots,X_n;\theta)\ge b)=\alpha/2$$

例1 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2为已知，μ为未知，设$X_1, X_2 \ldots X_n$是来自X的样本，求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间.

解：$\overline{X}$是μ的无偏估计，且有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$ 不依赖与任何未知参数，

按标准正态分布的上α分位点的定义，有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

即 $$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2} < \mu < \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

我们就得到了μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

§ 7.4 正态总体均值与方差的区间估计

§ 7.4.1 单个总体的情况

设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自$X$的样本，$\bar{X}$和$S^2$分别为样本均值和方差，置信度为$1-\alpha$

1.均值μ的置信区间

(1) σ^2已知时

$\bar{X}$是μ的无偏估计,且有$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,分布完全已知,

因此可取枢轴量为$G(X_1,\cdots,X_n)=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

设常数$a<b$且满足: $P\left\{a<\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<b\right\}=1-\alpha$

根据正态分布的对称性知，取

$$a=-b=-z_{\alpha/2}$$

时，区间的长度达到最短.

置信区间为:

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

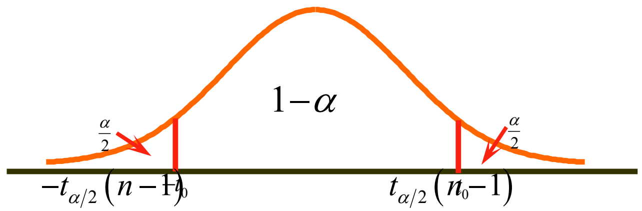
问：均值μ的置信度$1-\alpha$的置信下限是什么呢?

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_\alpha\right\}=1-\alpha$$

答案: $\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$

(2) σ^2未知时

取枢轴量为$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,



有$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即$P\left\{\bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

置信区间为: $\left(\bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

例1 设某种植物的高度$X\left(cm\right)$服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$,随机选取36棵,其平均高度为$15cm$. 就以下两种情形,求$\mu$的95%双侧置信区间:

$\left(1\right)\sigma^2=16$;　　　　$\left(2\right)\sigma^2$未知,$S^2=16$;

解：$(1)\ n=36, \bar{X}=15, \sigma=4$

由$P\left\{\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95$

得：$\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15-\frac{1.96\times 4}{\sqrt{36}}=13.693$

$$\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15+\frac{1.96\times 4}{\sqrt{36}}=16.307$$

μ的置信区间为$(13.693, 16.307)$

$$(2)\ n=36, \bar{X}=15, S^2=16$$

$$由P\left\{\bar{X}-t_{0.025}(35)\times\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+t_{0.025}(35)\times\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-0.05$$

查表得：$t_{0.025}(35)=2.0301$

又：$15-\frac{2.0301\times 4}{6}=13.647,\qquad 15+\frac{2.0301\times 4}{6}=16.353$

μ的置信区间为$(13.647, 16.353)$

? 求置信度为99%时(1)(2)两种情况下μ的置信区间

答案：(1) $(13.333, 16.667)$

(2) $(13.184, 16.815)$

比较(1)(2)两种情形下μ的置信区间：

区间短

σ^2已知，$\sigma^2=16$，置信区间：$(13.693, 16.307)$

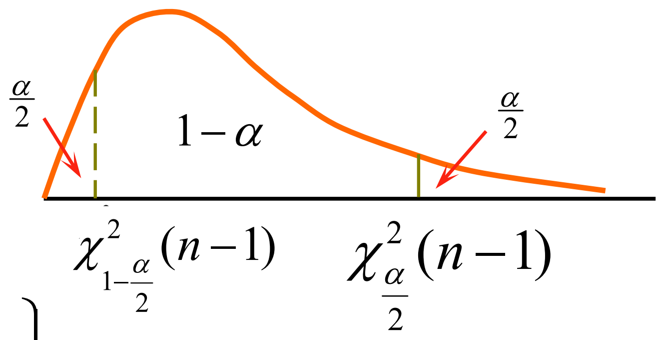
区间长

σ^2未知，$S^2=16$，置信区间：$(13.647, 16.353)$

但第二种情形更实用，因为多数时候，σ^2未知

用t分布求μ的置信区间只依赖于样本数据及统计量$\bar{X}, S, n$

2. 方差σ^2的置信区间（μ未知）



取枢轴量为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

有$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即$P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$

置信区间为： $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

注：上述所求的区间估计不是最优解.

问：方差σ^2的置信度1-α的置信上限是什么?

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right\}=1-\alpha$$

答案: $\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$.

例2 一个园艺科学家正在培养一个新品种的苹果，这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外，另一个重要特征是单个重量差异不大。为了评估新苹果，她随机挑选了25个测试重量(单位：克)，其样本方差为$S^2 = 4.25$. 试求σ^2的置信度为95%和的99%的置信区间。

解：置信度为95%时

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-0.025}}\right\} = 1-0.05$$

查表得：$\chi^2_{0.025}(24) = 39.4, \chi^2_{0.975}(24) = 12.4;$

又： $\dfrac{(25-1)\times 4.25}{39.4} = 2.59, \dfrac{(25-1)\times 4.25}{12.4} = 8.23$

σ^2的置信区间为$(2.59, 8.23)$

置信度为99%时，$\chi^2_{0.005}(24) = 45.6, \chi^2_{0.995}(24) = 9.89,$

$$\frac{(25-1)\times 4.25}{45.6} = 2.24, \qquad \frac{(25-1)\times 4.25}{9.89} = 10.31$$

σ^2的置信区间为$(2.24, 10.31)$

练习 有一大批糖果.现从中随机地取16袋，称得重量(以g计)如下：

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布，(1)试求总体均值μ的置信水平为0.95的置信区间.(2)求总体标准差σ的置信水平为0.95的置信区间.

§ 7.4.2 两种总体的情况

$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$来自$N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$来自$N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$,

$\bar{X} = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $\bar{Y} = \dfrac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} Y_j$, S_1^2和S_2^2分别为第一,二个总体的样本方差,置信度为$1-\alpha$.

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1) σ_1^2,σ_2^2已知时

由 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$知，

可取枢轴量为 $$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

置信区间为： $$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2,\sigma^2$未知

此时由定理6.3.4知，$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

置信区间为：$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},S_w=\sqrt{S_w^2}$

2. σ_1^2/σ_2^2的置信区间（μ_1、μ_2未知）

由 $$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

有 $$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha$$

即 $$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}\right\} = 1-\alpha$$

置信区间为： $$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}\right)$$

例3 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠得直径(毫米)如下:

甲机床	15.0	14.8	15.2	15.4	14.9	15.1
	15.2	14.8				
乙机床	15.2	15.0	14.8	15.1	14.6	14.8
	15.1	14.5	15.0			

设两机床生产的滚珠直径分别为X, Y,

且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

(1) 若σ_1=0.18，σ_2=0.24，求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间;

(2) 若σ_1=σ_2=σ未知，求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间;

(3) 若μ_1、μ_2未知，求σ_1^2/σ_2^2 的置信度为0.90的置信区间.

解：$n_1 = 8,\ \ \overline{x} = 15.05,\ \ S_1^2 = 0.0457;$

$n_2 = 9,\ \ \overline{y} = 14.9,\ \ S_2^2 = 0.0575$

(1) 当$\sigma_1 = 0.18, \sigma_2 = 0.24$时，求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

查表得：$z_{0.05} = 1.645$，从而所求区间为$(-0.018, 0.318)$

(2) 当$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$未知时，

$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}\left(n_1 + n_2 - 2\right) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

$$t_{0.05}(15) = 1.7531, S_w = 0.228, \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 0.486$$

从而所求区间为$(-0.044, 0.344)$

当$\mu_1 - \mu_2$的置信区间包含0时，
可以认为两个总体的
均值之间没有显著差异。

(3) 当μ_1,μ_2未知时，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)}\right\}$$

由$F_{0.05}\left(7,8\right)=3.50, F_{0.95}\left(7,8\right)=\dfrac{1}{F_{0.05}\left(8,7\right)}=\dfrac{1}{3.73}=0.268$

得$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为$\left(0.227,2.965\right)$

当$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间包含1时，

可以认为两个总体的方差之间没有显著差异。

例4 为比较Ⅰ、Ⅱ两种型号步枪子弹的枪口速度，随机地取Ⅰ型子弹10发，得到枪口速度的平均值为$\overline{x_1}$=500m/s，标准差$s_1 = 1.10m/s$，随机地取Ⅱ型子弹20发，得到枪口速度的平均值为$\overline{x_2}$=496m/s，标准差$s_2 = 1.20m/s$.假设两总体都可认为近似地服从正态分布.且由生产过程可认为方差相等.求两总体均值差μ_1-μ_2的置信水平为0.95的置信区间.

例5 为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂. 为慎重起见，在实验工厂先进行试验. 设采用原来的催化剂进行了n_1=8次试验，得到得率的平均值为$\overline{x_1}$=91.73，样本方差$s_1^2 = 3.89$；又采用新的催化剂进行了n_2=8次试验，得到得率的平均值为$\overline{x_2}$=93.75，样本方差$s_2^2 = 4.02$.假设两总体都可认为服从正态分布，且方差相等，两样本独立. 求两总体均值差μ_1-μ_2的置信水平为0.95的置信区间.

例6 研究由机器A和机器B生产的钢管的内径(单位：mm)，随机地抽取机器A生产的管子18只，测得样本方差$s_1^2=0.34$；随机地抽取机器B生产的管子13只，测得样本方差$s_2^2=0.29$.假设两样本相互独立，且由机器A和机器B生产的管子的内径分别服从正态分布N(μ_1,σ_1^2),N(μ_2,σ_2^2)，这里 μ_i,σ_i^2(i=1,2)均未知.求两总体方差比σ_1^2/σ_2^2的置信水平为0.90的置信区间.

正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限$(置信度1-\alpha)$

	待估参数	其他参数	W 的 分 布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\mu_U=\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$ $\mu_L=\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$
	μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\mu_U=\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$ $\mu_L=\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
	σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\sigma^2_U=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\sigma^2_L=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$(\mu_1-\mu_2)_U=\bar{X}-\bar{Y}+z_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $(\mu_1-\mu_2)_L=\bar{X}-\bar{Y}-z_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知	$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$(\mu_1-\mu_2)_U=\bar{X}-\bar{Y}+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$ $(\mu_1-\mu_2)_L=\bar{X}-\bar{Y}-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2未知	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)_U=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)_L=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$

§ 7.5 非正态总体参数的区间估计

§ 7.5.1 (0−1)分布

设总体$X \sim B(1;p)$, 参数p未知，$X_1,\cdots,X_n$是来自该总体的样本。当样本容量$n>50$时，

由利用中心极限定理得 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从$N(0,1)$分布。

则有：$P\left\{-z_{\alpha/2} < \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$

即$P\left\{(n+z_{\alpha/2}^2)p^2-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2)p+n\overline{X}^2<0\right\}\approx 1-\alpha$

令$a=n+z_{\alpha/2}^2$， $b=-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2)$， $c=n\overline{X}^2$

得参数p的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=:(p_1,\quad p_2)$$

§ 7.5.2 其他总体

设总体$X \sim F(x)$,均值为μ,方差为σ^2，样本$X_1,\cdots$，X_n

当n充分大（一般n>50）时，由中心极限定理知,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$近似服从$N(0,1)$分布。

则可导出均值μ的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},\quad \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \right)$$

当σ^2未知时，以样本方差S^2代入，

得μ的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\mathrm{S}/\sqrt{n},\quad \bar{X} + z_{\alpha/2}\mathrm{S}/\sqrt{n} \right)$$