

SA19225404 吴泽港



中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei, Anhui. 230026 The People's Republic of China

圣彼德堡悖论. 抛掷一枚均匀的硬币, 直到出现反面. 每次抛掷独立.
若你抛了 n 次, 你可以获得 2^n 元. 你得到的钱的期望是多少?
你愿意付多少钱玩这个游戏呢?

解: 设 X 为抛的次数, Y 为收益

则分布律为 $P\{X=x\} = \frac{1}{2^x}$

X	1	2	...	n
-----	---	---	-----	-----

$Y=2^X$	2	4	...	2^n
---------	---	---	-----	-------

概 P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$...	$\frac{1}{2^n}$
-------	---------------	-----------------	-----	-----------------

$$E(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(2^k \times \frac{1}{2^k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

这个求和是不收敛的, 结果无穷大.

但是这个收益取决于要玩多少局游戏.

通过计算机的模拟, 收益均值与实验次数的关系如下 $E(Y) \approx \frac{\log(n)+2}{2 \log 2}$

这是有无穷多的钱,

却没有无穷长的命去赚.

假设平均一秒种一局, 玩了一年的

每局平均收益为 $\frac{\log(365 \times 24 \times 3600) + 2}{2 \log 2}$

这个钱太费时间了.

≈ 15.8 元

是我的活花个 2 元玩一玩就行了.