第七章 马尔可夫链

Probability and Statistics for Computer Scientists

第七章 马尔可夫链

- 离散时间的马尔可夫链
- 状态的分类
- 稳态性质
- 连续时间的马尔可夫链

§1 离散时间的马尔可夫链

离散时间的马尔可夫链:

状态在确定的离散时间点上发生变化

$$p_{ij} = \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i), \qquad i, j \in \mathcal{S}.$$

马尔可夫链性质:

对于任意的时间 n, 对任意的状态 $i, j \in \mathcal{S}$, 以及任意之前可能的状态序列 $i_0, \cdots, i_{n-1}$,

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) = \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}.$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, \qquad \text{对所有的 } i \text{ 成立.}$$

§1 离散时间的马尔可夫链

马尔可夫模型的性质

- 一个马尔可夫链模型由以下特征确定:
  (a) 状态集合 $\mathcal{S} = \{1, \cdots, m\}$,
  (b) 可能发生状态转移 (i, j) 的集合, 即由所有 $p_{ij} > 0$ 的 (i, j) 组成,
  (c) p_{ij} 的取值 (取正值).
- 由该模型描述的马尔可夫链是一个随机变量序列 $X_0, X_1, X_2, \cdots$, 它们取值于 $\mathcal{S}$, 并且满足: 对于任意的时间 n, 所有状态 $i, j \in \mathcal{S}$, 以及所有之前可能的状态序列 $i_0, \cdots, i_{n-1}$, 均有

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij}.$$

§1 离散时间的马尔可夫链

转移概率矩阵

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

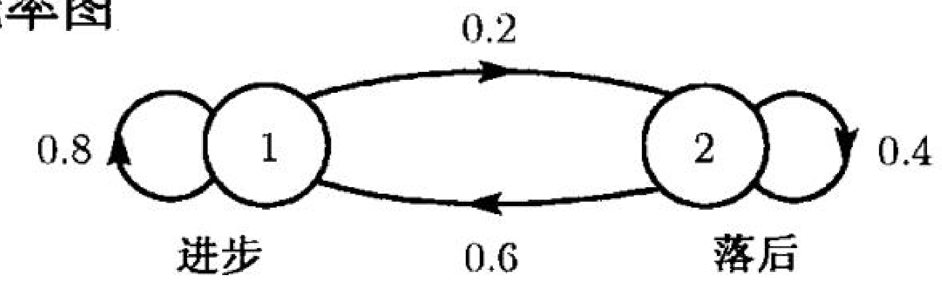
§1 离散时间的马尔可夫链

例 7.1 爱丽丝上一门概率课程, 每周她可能进步, 也可能落后. 如果在给定的一周里, 她进步了, 那么她下一周进步 (或落后) 的概率是 0.8 (或 0.2); 相应地, 如果在给定的一周里, 她落后了, 那么她下一周进步 (或落后) 的概率是 0.6 (或 0.4). 我

转移概率矩阵

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

转移概率图

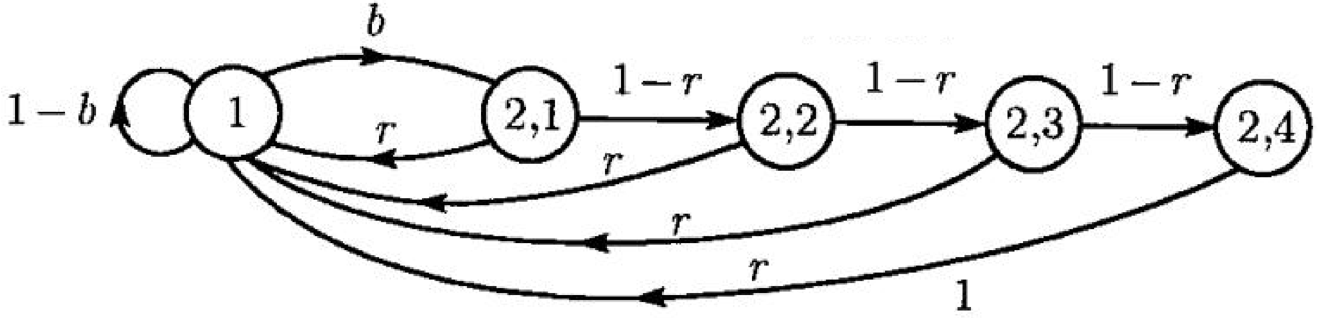


§1 离散时间的马尔可夫链

1.1 转移概率

路径的概率

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$



§1 离散时间的马尔可夫链

证明该性质, 注意到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)\\
=&\mathrm{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1})\mathrm{P}(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1})\\
=&p_{i_{n-1}i_n}\mathrm{P}(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}),
\end{aligned}
$$

如果初始状态 X_0 已知, 且等于某个 i_0, 那么类似的推导可得

$$\mathrm{P}(X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n | X_0 = i_0) = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

§1 离散时间的马尔可夫链

1.2 n步转移概率

n 步转移概率的查普曼－科尔莫戈罗夫方程

n 步转移概率利用迭代公式求得

$$r_{ij}(n)=\sum_{k=1}^{m} r_{ik}(n-1)p_{kj},\qquad \text{对于所有}n>1,i,j\text{成立},$$

其中

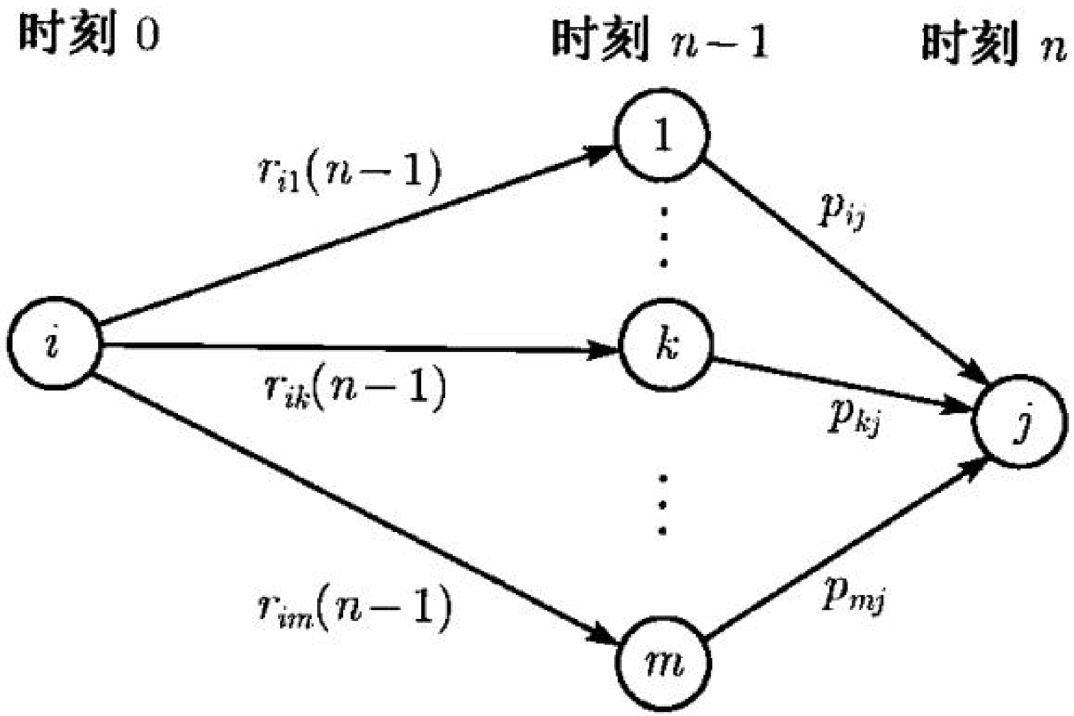
$$r_{ij}(1)=p_{ij}.$$

§1 离散时间的马尔可夫链

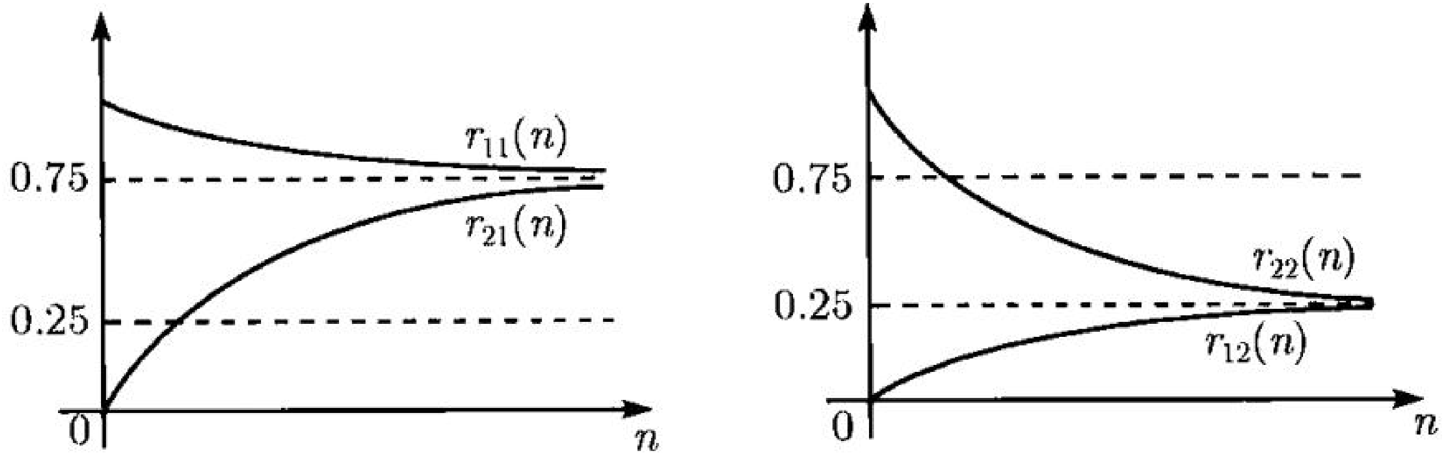
为证明该公式，我们只需应用如下全概率公式:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_n = j|X_0 = i) &= \sum_{k=1}^{m} \mathrm{P}(X_{n-1} = k|X_0 = i)\mathrm{P}(X_n = j|X_{n-1} = k, X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{m} r_{ij}(n-1)p_{kj};
\end{aligned}$$

§1 离散时间的马尔可夫链



§1 离散时间的马尔可夫链



n 步转移概率作为步数 n 的函数

$r_{ij}(1)$

0.8	0.2
0.6	0.4

$r_{ij}(2)$

0.76	0.24
0.72	0.28

$r_{ij}(3)$

0.752	0.248
0.744	0.256

$r_{ij}(4)$

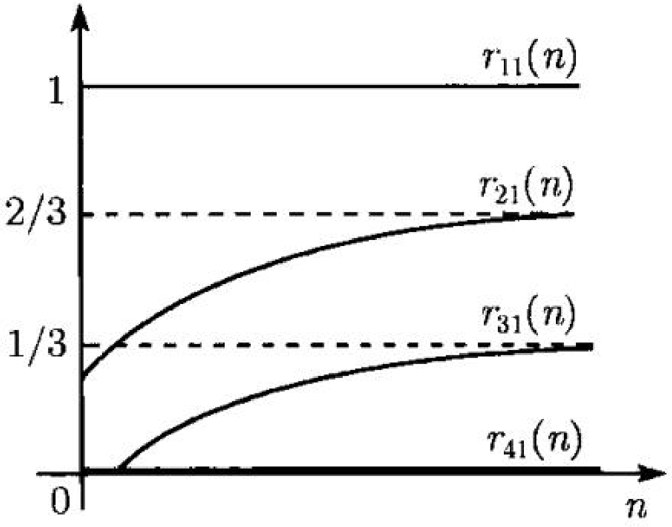
0.7504	0.2496
0.7488	0.2512

$r_{ij}(5)$

0.7501	0.2499
0.7498	0.2502

n 步转移概率阵的序列

§1 离散时间的马尔可夫链



n 步转向状态“1”的概率$r_{i,1}(n)$的趋向示意图

	1	2	3	4
1	1.0	0	0	0
2	0.3	0.4	0.3	0
3	0	0.3	0.4	0.3
4	0	0	0	1.0

$r_{ij}(1)$

1.0	0	0	0
0.42	0.25	0.24	0.09
0.09	0.24	0.25	0.42
0	0	0	1.0

$r_{ij}(2)$

1.0	0	0	0
0.50	0.17	0.17	0.16
0.16	0.17	0.17	0.50
0	0	0	1.0

$r_{ij}(3)$

1.0	0	0	0
0.55	0.12	0.12	0.21
0.21	0.12	0.12	0.55
0	0	0	1.0

$r_{ij}(4)$

....

1.0	0	0	0
2/3	0	0	1/3
1/3	0	0	2/3
0	0	0	1.0

$r_{ij}(\infty)$

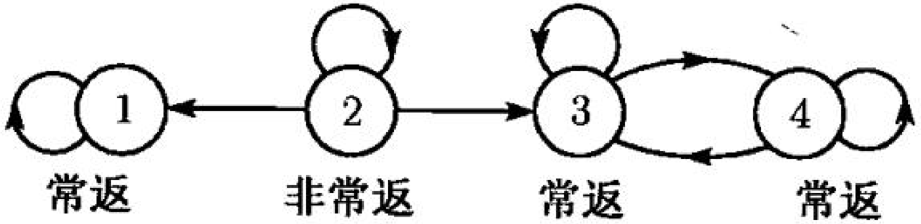
§2 状态的分类

状态 j 为从状态 i 可达的

状态序列 $i, i_1, \cdots, i_{n-1}, j$, 每步转移 $(i, i_1), (i_1, i_2), \cdots, (i_{n-2}, i_{n-1}), (i_{n-1}, j)$ 都具有正概率.

状态 i 是常返的

如果对于每个从 i 出发可达的状态 j, 相应地从 j 出发也可达 i

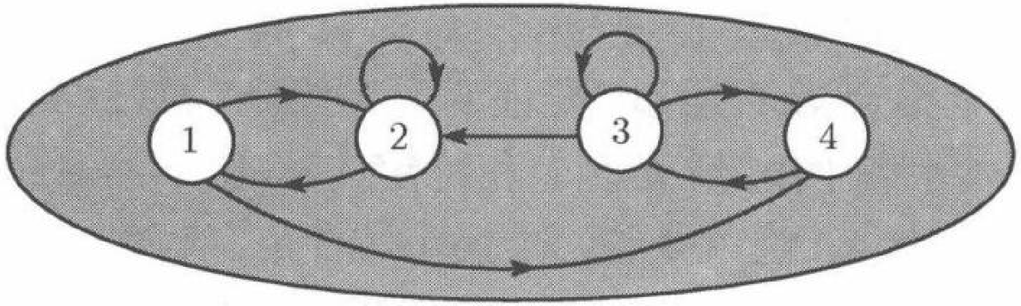


§2 状态的分类

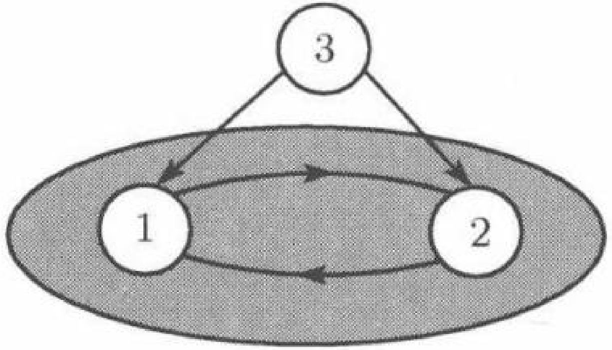
马尔可夫链的分解

- 一个马尔可夫链的状态集合可以分解成一个或多个常返类，加上可能的一些非常返状态.
- 一个常返态从它所属的类里任何一个状态出发是可达的，但从其他类里的常返状态出发是不可达的.
- 从任何一个常返状态出发都不可到达非常返状态.
- 从一个非常返状态出发，至少有一个或更多的常返态是可达的.

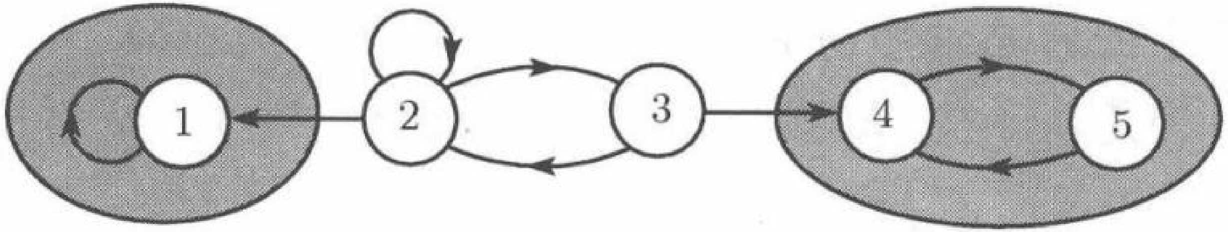
§2 状态的分类



单个常返类



一个非常返状态(3)和一个常返状态(1和2)



两个非常返状态(2和3)和两个常返类
(1是一个常返类, 4和5组成另一个常返类)

§2 状态的分类

周期

它的状态能被分成 $d>1$ 个相互不相交的子集 $S_1,\cdots,S_d$,

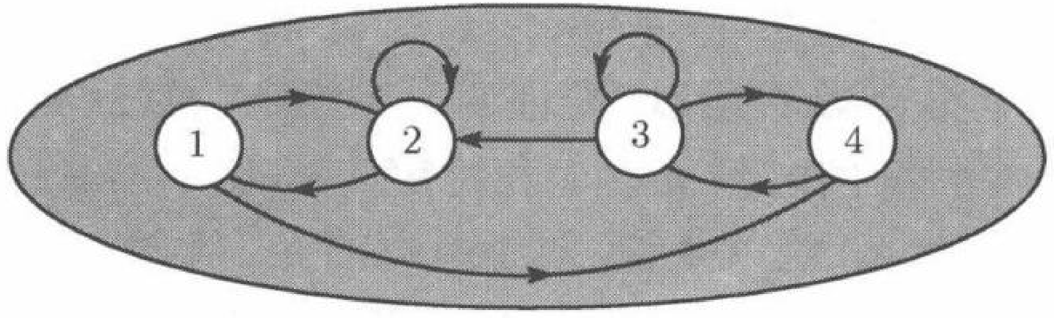
且满足所有的转移都是从一个这样的子集到下一个

$$\text{如果}\quad i\in S_k,\ p_{ij}>0,\qquad \text{那么}\ \begin{cases} j\in S_{k+1}, & \text{当}\quad k=1,\cdots,d-1,\\ j\in S_1, & \text{当}\quad k=d. \end{cases}$$

§2 状态的分类

给定一个有周期的常返类, 对于链中任意一个正时刻 n, 以及类中的状态 i, 则必存在一个或多个状态 j, 使得 $r_{ij}(n) = 0$.

例：证明为非常返类



单个常返类

§2 状态的分类

周期

考虑一个常返类 R.

- 如果一类中的状态能被分成 $d>1$ 个互不相交的子集 $S_1,\cdots,S_d$, 满足所有的转移都是从子集 S_k 到 S_{k+1} 的 (或到 S_1, 当 $k=d$ 时), 则称该类为**周期类**.
- 一类 R 称为**非周期的**, 当且仅当存在时刻 n, 使得对于任何 $i,j\in R$, 满足 $r_{ij}(n)>0$.

§3 稳态性质

有两个或者更多个常返状态类 → $r_{ij}(n)$ 的极限值一定依赖于初始状态

只有单个常返类的链 → 收敛 / 不收敛

例：

$$r_{ij}(n) = \begin{cases} 1, & n\text{是偶数}, \\ 0, & n\text{是奇数}, \end{cases}$$

§3 稳态性质

稳态概率.

对于每一个状态 j, 处于状态 j 的概率 $r_{ij}(n)$ 趋近于一个独立于初始状态 i 的极限值, 这个极限值记为 π_j,

$$\pi_j \approx \mathrm{P}(X_n = j), \qquad \text{当 } n \text{ 很大时.}$$

§3 稳态性质

稳态收敛定理

考虑一个非周期的，单个常返类的马尔可夫链. 那么，状态 j 和它对应的稳态概率 π_j 具有如下性质.

(a) 对于每个 j，我们有：

$$\lim_{n\to\infty} r_{ij}(n) = \pi_j, \qquad \text{对于所有的 } i.$$

(b) π_j 是下面方程组的唯一解：

$$\text{平衡方程组 } \pi_j = \sum_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj}, \qquad j = 1, \cdots, m,$$

$$1 = \sum_{k=1}^{m} \pi_k.$$

§3 稳态性质

(c) 另外有:

$$\pi_j = 0, \qquad 对于所有的非常返状态j,$$

$$\pi_j > 0, \qquad 对于所有的常返态j.$$

§3 稳态性质

例 7.5 考虑两个状态的马尔可夫链, 它们的转移概率是

$$p_{11} = 0.8, \quad p_{12} = 0.2,$$

$$p_{21} = 0.6, \quad p_{22} = 0.4.$$

平衡方程组为

$$\pi_1 = 0.8 \cdot \pi_1 + 0.6 \cdot \pi_2, \quad \pi_2 = 0.2 \cdot \pi_1 + 0.4 \cdot \pi_2.$$

归一化方程

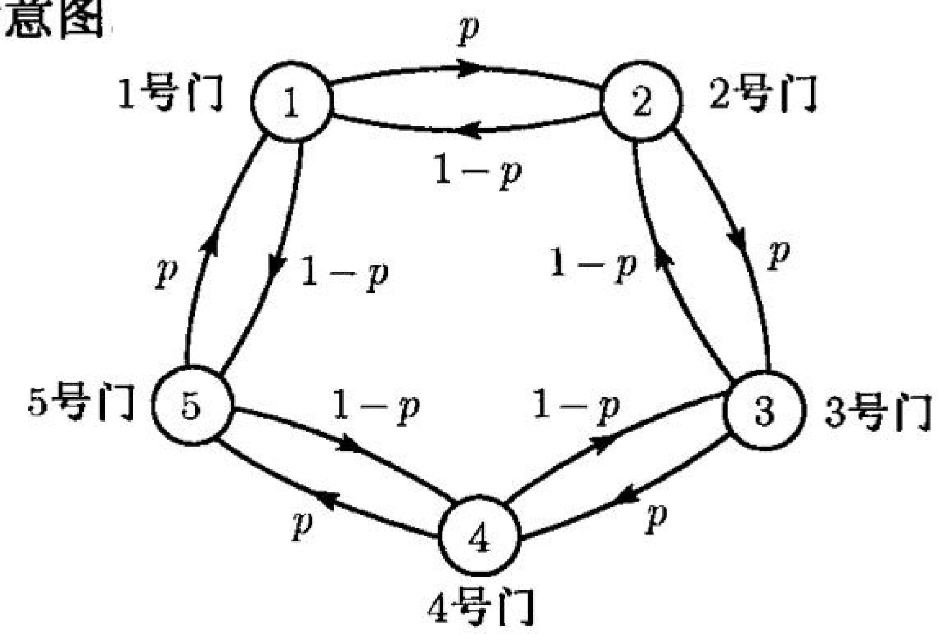
$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\pi_2 = 0.25, \ \pi_1 = 0.75.$$

§3 稳态性质

例 7.7 一个迷信的教授在一个具有 m 扇门的环形建筑里面工作, m 是奇数. 他绝不连续两次打开同一扇门. 相反, 他以概率 p(或概率 $1-p$) 以顺时针方向 (或相应地以逆时针方向) 打开他上一次打开的相邻门. 请问选定一扇门将在未来一天被用到的概率?

$m=5$ 对应的情况示意图



§3 稳态性质

我们利用马尔可夫模型, 有以下 m 个状态:

$$\text{状态}i:\text{教授打开的是第}i\text{扇门},\quad i=1,\cdots,m.$$

转移概率图形如图 7.12 所示 (图中 $m=5$). 转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p & 0 \end{bmatrix}.$$

§3 稳态性质

平衡方程组为

$$\pi_1 = (1-p)\pi_2 + p\pi_m,$$

$$\pi_i = p\pi_{i-1} + (1-p)\pi_{i+1}, \quad i = 2, \cdots, m-1,$$

$$\pi_m = (1-p)\pi_1 + p\pi_{m-1}.$$

$$\pi_j = \frac{1}{m}, \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

§3 稳态性质

3.1 长期频率解释

稳态概率的期望频率解释

对于一个非周期的具有单个常返类的马尔可夫链，状态的稳态概率 π_j 满足

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_{ij}(n)}{n},$$

其中 $\nu_{ij}(n)$ 表示从状态 i 出发，在 n 次转移中到达状态 j 的总次数的期望值.

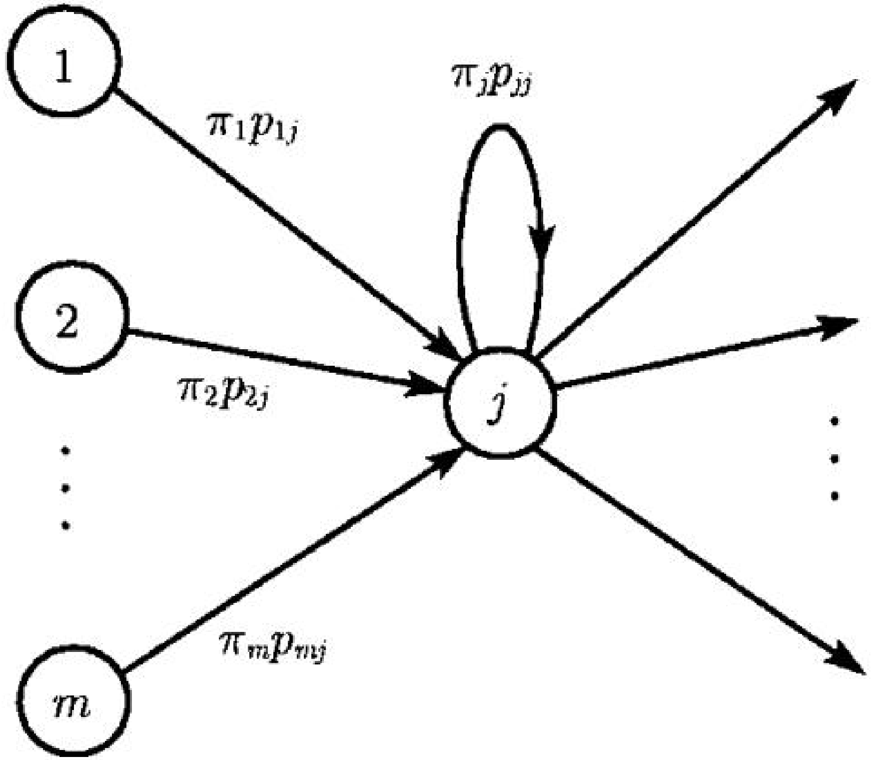
§3 稳态性质

特定转移的期望频率

考虑一个马尔可夫链的 n 次转移, 该链是从给定初始状态出发的、非周期的, 且具有单个常返类. 令 $q_{jk}(n)$ 为在时间 n 内, 从状态 j 到状态 k 的转移期望次数, 那么, 无论初始状态是什么, 均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_{jk}(n)}{n}=\pi_j p_{jk}.$$

§3 稳态性质

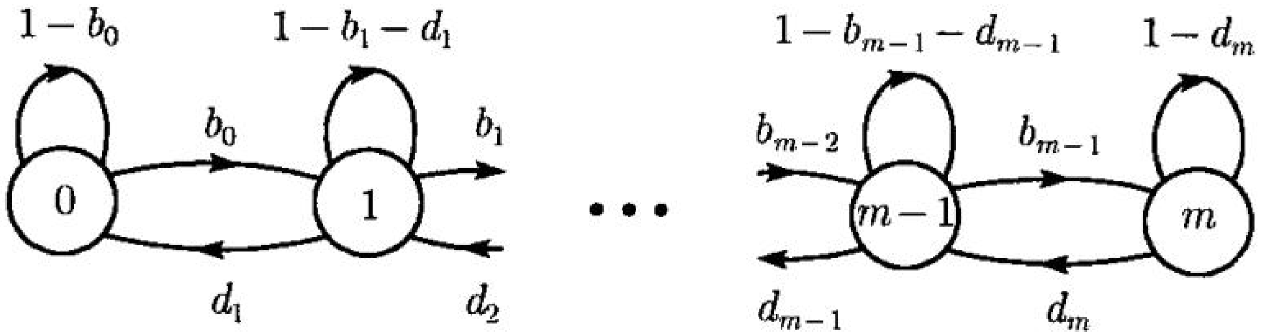


§3 稳态性质

3.2 生灭过程

$$b_i = \mathrm{P}(X_{n+1} = i+1 | X_n = i), \qquad (\text{在状态 } i \text{ “生” 的概率}),$$

$$d_i = \mathrm{P}(X_{n+1} = i-1 | X_n = i), \qquad (\text{在状态 } i \text{ “灭” 的概率}).$$



§3 稳态性质

在马尔可夫链的任何轨迹中, 由 i 到 $i+1$ 的转移和由 $i+1$ 到 i 的转移一定是交替出现的.

局部平衡方程组

$$\pi_i b_i = \pi_{i+1} d_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, m-1.$$

$$\pi_i = \pi_0 \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1}}{d_1 d_2 \cdots d_i}, \quad i = 1, \cdots, m,$$

§3 稳态性质

例 7.9 (排队论) 在通信网络中，信号包到来后，被存放在缓冲器中然后传输. 缓冲器的储存容量是 m: 如果已经有 m 个信号包已经存在缓冲器中，那么新到的信号就自动丢失了. 我们将时间切分成很小的部分，并且假设每个时间段，最多有一个事件发生 (一个新的信号包的到达或将已经存在一个信号包传送出去)，改变系统中信号的数量. 特别地，我们假设每个时间段，只有以下事件之一发生.

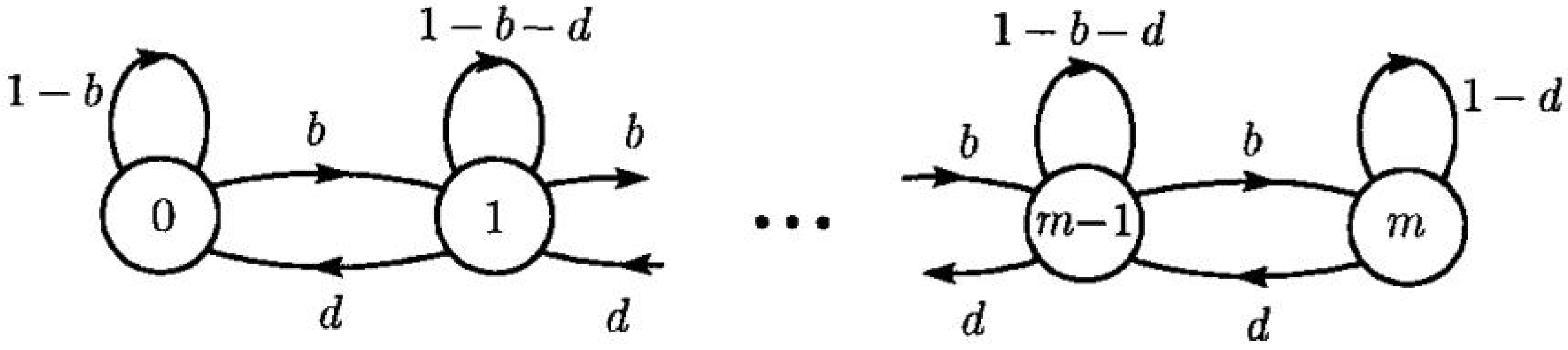
(a) 一个新的信号包的到达，发生概率是 $b > 0$;①

(b) 如果至少存在一个信号包在系统中，则传送出去一个信号包，发生的概率是 $d > 0$, 否则概率为 0;

(c) 没有新信号到达，也没有将已经存在的信号包传送出去 (没有完成传送任务)，如果当时在缓冲器中存在至少一个信号包，则事件发生的概率为 $1 - b - d$; 如果当时在缓冲器中没有信号包，则事件发生的概率为 $1 - b$.

§3 稳态性质

转移概率图



局部平衡方程组为

$$\pi_i b = \pi_{i+1} d, \quad i = 0, 1, \cdots, m-1.$$

§3 稳态性质

定义 $\rho = \dfrac{b}{d}$,　$\pi_i = \rho^i \pi_0$,　$i = 0, 1, \cdots, m.$

通过应用归一化方程 $1 = \pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_m$, 我们可以得到

$$1 = \pi_0(1 + \rho + \cdots + \rho^m),$$

$$\pi_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}, & 若\rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{m+1}, & 若\rho = 1. \end{cases} \qquad \pi_i = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho^i, & 若\rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{m+1}, & 若\rho = 1, \end{cases} \qquad i = 0, 1, \cdots, m.$$

§4 吸收概率和吸收的期望时间

常返态 k 为吸收的

$$p_{kk} = 1, \quad p_{kj} = 0 \text{ 对于所有的} j \neq k.$$

固定一个吸收态，设为 s，令 a_i 表示链从状态 i 开始，最终达到 s 的概率：

$$a_i = \mathrm{P}(X_n \text{最终等于吸收状态} s \mid X_0 = i).$$

§4 吸收概率和吸收的期望时间

吸收概率方程组

考虑一个马尔可夫链，它的每一个状态或者是非常返的，或者是吸收的，并固定一个吸收状态 s. 那么从状态 i 开始，最终达到 s 的概率 a_i 是下列方程组的唯一解:

$$a_s = 1,$$

$$a_i = 0, \qquad \text{对于所有吸收状态} i \neq s,$$

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} a_j, \qquad \text{对于所有非常返状态} i.$$

§4 吸收概率和吸收的期望时间

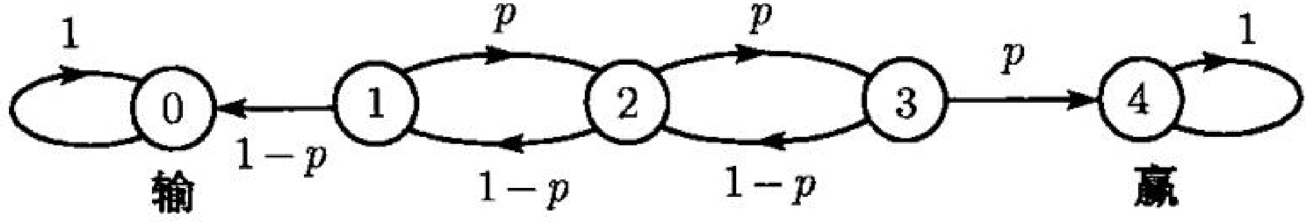
证明 考虑一个非常返状态 i, 令 A 表示状态 s 最终被达到的事件.

$$
\begin{aligned}
a_i &= \mathrm{P}(A|X_0 = i) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}(A|X_0 = i, X_1 = j)\mathrm{P}(X_1 = j|X_0 = i) \quad (\text{全概率公式}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}(A|X_1 = j)p_{ij} \ (\text{马尔可夫性质}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_j p_{ij}.
\end{aligned}
$$

§4 吸收概率和吸收的期望时间

例 7.11 (赌徒的破产问题) 一个赌徒每局赌博以概率 p 赢 1 美元，同时以概率 $1-p$ 输掉 1 美元. 假设不同赌局之间是相互独立的. 赌徒会一直赌博直到资金到达某个目标总数 m 时，或者输掉全部的钱. 请问最终资金能到达目标 m 或者输掉他全部资金的概率是多少？

转移概率图



§4 吸收概率和吸收的期望时间

我们令 $s=m$, 且吸收概率 a_i 表示从状态 i 出发, 最终赢的概率. 那么这些概率满足

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 0,\\
&a_i = (1-p)a_{i-1} + pa_{i+1}, \quad i = 1,\cdots,m-1,\\
&a_m = 1.
\end{aligned}
$$

对于每个 a_i, 我们有

$$(1-p)(a_i - a_{i-1}) = p(a_{i+1} - a_i), \quad i = 1,\cdots,m-1.$$

§ 4 吸收概率和吸收的期望时间

那么, 令

$$\delta_i = a_{i+1} - a_i, \quad i = 0, \cdots, m-1,$$

以及

$$\rho = \frac{1-p}{p},$$

可得

$$\delta_i = \rho^i \delta_0, \quad i = 1, \cdots, m-1.$$

$$(1 + \rho + \cdots + \rho^{m-1})\delta_0 = 1, \quad \delta_0 = \frac{1}{1 + \rho + \cdots + \rho^{m-1}}.$$

§4 吸收概率和吸收的期望时间

因为 $a_0 = 0$ 以及 $a_{i+1} = a_i + \delta_i$, 从一个状态 i 出发, 最终赢的概率 a_i 是

$$\begin{aligned} a_i &= \delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{i-1} \\ &= (1 + \rho + \ldots + \rho^{i-1})\delta_0 \\ &= \frac{1 + \rho + \ldots + \rho^{i-1}}{1 + \rho + \ldots + \rho^{m-1}}. \end{aligned}$$

化简得

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{1 - \rho^i}{1 - \rho^m}, & 若\rho \neq 1, \\ \dfrac{i}{m}, & 若\rho = 1. \end{cases}$$

§4 吸收概率和吸收的期望时间

4.1 平均吸收时间

平均步数

$$\mu_i = \mathrm{E}[\text{从状态 } i \text{ 开始, 直到达到吸收态所需的步数}]$$
$$= \mathrm{E}[\min\{n \geqslant 0 | X_n \text{常返态}\} | X_0 = i].$$

§4 吸收概率和吸收的期望时间

平均吸收时间方程组

平均吸收时间 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 是下列方程组的唯一解

$$\mu_i = 0, \qquad \text{对于所有的常返状态 } i,$$

$$\mu_i = 1 + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\mu_j, \qquad \text{对于所有的非常返状态 } i.$$

§4 吸收概率和吸收的期望时间

4.2 平均首访时间及回访时间

从状态 i 到状态 s 的平均首访时间

$$t_i = \mathrm{E}[\text{从状态 } i \text{ 开始, 首次达到状态 } s \text{ 的转移步数}]$$
$$= \mathrm{E}[\min\{n \geqslant 0 | X_n = s\} | X_0 = i].$$

$$\begin{cases} t_i = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_{ij} t_j, & \text{对于所有的} i \neq s, \\ t_s = 0. \end{cases}$$

§4 吸收概率和吸收的期望时间

到达特殊状态 s 的平均回访时间

$$t_s^* = \mathrm{E}[\text{从状态 } s \text{ 开始, 首次回到状态 } s \text{ 的转移步数}]$$
$$= \mathrm{E}[\min\{n \geqslant 1 | X_n = s\} | X_0 = s].$$

$$t_s^* = 1 + \sum_{j=1}^{m} p_{sj} t_j.$$

§4 吸收概率和吸收的期望时间

例 7.13 考虑例 7.1 中爱丽丝听课的两种状态"进步"和"落后"，指出她的状态形成一个马尔可夫链, 状态 1 和状态 2 分别对应进步和落后, 且转移概率为

$$p_{11} = 0.8, \quad p_{12} = 0.2,$$

$$p_{21} = 0.6, \quad p_{22} = 0.4.$$

状态 $s = 1$, 计算从状态 2 开始到达状态 1 的平均首访时间

$$t_1 = 0$$
$$t_2 = 1 + p_{21}t_1 + p_{22}t_2 = 1 + 0.4t_2 = \frac{1}{0.6} = \frac{5}{3}$$

到达状态 1 的平均回访时间等于

$$t_1^* = 1 + p_{11}t_1 + p_{12}t_2 = 1 + 0 + 0.2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

§5 连续时间的马尔可夫链

连续性时间马尔可夫链的假设

- 如果当前状态是 i, 到下一个转移的时间服从已给参数 ν_i 的指数分布, 且独立于之前的历史过程和下一个状态.
- 如果当前状态是 i, 按照给定的概率 p_{ij} 到达下一个状态 j, 而且独立于之前的历史过程和转移到下一个状态的时间间隔.

§5 连续时间的马尔可夫链

令 $A=\{T_1=t_1,\cdots,T_n=t_n,X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}$

为直到第 n 次转移发生之前, 链所有发生的事件. 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1}=j,T_{n+1}\geqslant t|A) &= \mathrm{P}(X_{n+1}=j,T_{n+1}\geqslant t|X_n=i) \\
&= \mathrm{P}(X_{n+1}=j|X_n=i)\mathrm{P}(T_{n+1}\geqslant t|X_n=i) \\
&= p_{ij}\mathrm{e}^{-\nu_i t}, \quad \text{对于所有} t\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

到下一个转移的平均时间为

$$
\mathrm{E}[T_{n+1}|X_n=i]=\int_0^{\infty}\tau\nu_i\mathrm{e}^{-\nu_i\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\nu_i},
$$

§5 连续时间的马尔可夫链

$$q_{ij} = \nu_i p_{ij}$$

$$\nu_i = \sum_{j=1}^{m} q_{ij}$$

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\nu_i}$$

ν_i 称为跳出状态 i 的转移速率　q_{ij} 为从状态 i 到 j 的转移速率

§5 连续时间的马尔可夫链

例 7.14 一台运转中的机器会一直工作, 直到警告信号产生. 从开始工作一直到产生警告信号的时间服从参数为 1 的指数分布. 产生警告之后, 机器将被检修, 检修的时间服从参数为 5 的指数分布. 检修结果以 1/2 的概率将机器维修好, 此时机器将恢复正常生产; 而另一个可能的结果是机器已经损坏 (概率为 1/2), 机器将送去修理. 修理时间服从参数为 3 的指数分布. 我们假设前面提到的随机变量都是相互独立的, 且独立于检修结果.

令状态 1, 2, 3 分别表示正常工作, 检验和修理. 转移速率是 $\nu_1 = 1, \nu_2 = 5, \nu_3 = 3$. 转移概率矩阵和转移速率矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5/2 & 0 & 5/2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

§5 连续时间的马尔可夫链

5.1 利用离散时间马尔可夫链的近似

取定一个小的正数 δ, 考虑离散时间马尔可夫链 Z_n, 它是每隔一小段时间 δ 观察 $X(t)$ 所得到的

$$Z_n = X(n\delta), \quad n = 0, 1, \cdots .$$

$\overline{p}_{ij}$ 表示 Z_n 的转移概率

$$\overline{p}_{ij} = \mathrm{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \nu_i p_{ij} \delta + o(\delta) = q_{ij}\delta + o(\delta), \quad 如果 j \neq i,$$

$$\overline{p}_{ii} = \mathrm{P}(Z_{n+1} = i | Z_n = i) = 1 - \sum_{j \neq i} \overline{p}_{ij}$$

§5 连续时间的马尔可夫链

连续时间马尔可夫链的另一种描述方法

给定连续时间马尔可夫链的当前状态 i, 对于任何 $j \neq i$, 单位时间 δ 之后的状态是 j 的概率是

$$q_{ij}\delta + o(\delta),$$

且独立于过程过去的情况.

§5 连续时间的马尔可夫链

例 7.15 (排队论) 在一个通信系统中到达缓冲器的信号包的过程是一个参数为 λ 的泊松过程. 信号存放在容积为 m 的缓冲器里, 且每次只传输一个信号. 但是, 如果缓冲器里面的信号已满, 新来的信号就会丢失. 传输一个信号需要的时间服从参数为 μ 的指数分布. 不同信号之间的传输时间是相互独立的, 也独立于所有间隔时间.

§5 连续时间的马尔可夫链

$X(t)$ 表示 t 时刻对应系统中的信号数量

首先考虑系统中为空的情况, 也就是状态 $X(t)$ 为 0 的情况.

$$\mathrm{P}(X(t+\delta)=1|X(t)=0)=\lambda\delta+o(\delta),$$

$$q_{0j}=\begin{cases}\lambda, & \text{如果} j=1,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

接下来, 考虑系统中信号满的情况, 也就是状态 $X(t)$ 为 m 的情况.

$$\mathrm{P}(X(t+\delta)=m-1|X(t)=m)=\mu\delta+o(\delta)$$

$$q_{mj}=\begin{cases}\mu, & \text{若} j=m-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

§5 连续时间的马尔可夫链

最后, 考虑系统状态 $X(t)$ 等于某个中间状态 $i, 0 < i < m$

$$\mathrm{P}(X(t+\delta) = i-1 | X(t) = i) = \mu\delta + o(\delta),$$

$$\mathrm{P}(X(t+\delta) = i+1 | X(t) = i) = \lambda\delta + o(\delta),$$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{若} j = i+1, \\ \mu, & \text{若} j = i-1, \quad \text{对于所有的} i = 1, 2, \cdots, m-1; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

§5 连续时间的马尔可夫链

5.2 稳态性质

离散时间马尔可夫链 Z_n $\quad Z_n = X(n\delta)$

链 Z_n 的平衡方程组有以下形式

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{m} \pi_k \bar{p}_{kj}, \quad \text{对于所有的} j,$$

$$= \pi_j \bar{p}_{jj} + \sum_{k \neq j} \pi_k \bar{p}_{kj}$$

$$= \pi_j \left(1 - \delta \sum_{k \neq j} q_{jk} + o(\delta) \right) + \sum_{k \neq j} \pi_k (q_{kj}\delta + o(\delta)).$$

得到平衡方程组为 $\pi_j \sum_{k \neq j} q_{jk} = \sum_{k \neq j} \pi_k q_{kj}$

§5 连续时间的马尔可夫链

稳态收敛定理

考虑一个具有单个常返类的连续时间马尔可夫链. 那么, 状态 j 以及对应的稳态概率 π_j 具有如下性质.

(a) 对于每个 j, 我们有

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{P}(X(t) = j | X(0) = i) = \pi_j, \quad \text{对于所有的} i.$$

(b) π_j 是下列方程组的唯一解

$$\pi_j \sum_{k \neq j} q_{jk} = \sum_{k \neq j} \pi_k q_{kj}, \quad j = 1, \cdots, m,$$

$$1 = \sum_{k=1}^{m} \pi_k.$$

§5 连续时间的马尔可夫链

(c) 另外有

$$\pi_j = 0, \qquad \text{对于所有的非常返态} j,$$

$$\pi_j > 0, \qquad \text{对于所有的常返态} j.$$

§5 连续时间的马尔可夫链

例 7.14(续) 该例子的平衡方程组和归一化方程为

$$\pi_1 = \frac{5}{2}\pi_2 + 3\pi_3,\quad 5\pi_2 = \pi_1,\quad 3\pi_3 = \frac{5}{2}\pi_2,$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3.$$

$$\pi_1 = \frac{30}{41},\quad \pi_2 = \frac{6}{41},\quad \pi_3 = \frac{5}{41}.$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5/2 & 0 & 5/2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

§5 连续时间的马尔可夫链

嵌入的马尔可夫链 X_n 的平衡方程组和归一化方程为

$$\overline{\pi}_1=\frac{1}{2}\overline{\pi}_2+\overline{\pi}_3,\quad \overline{\pi}_2=\overline{\pi}_1,\quad \overline{\pi}_3=\frac{1}{2}\overline{\pi}_2,$$

$$1=\overline{\pi}_1+\overline{\pi}_2+\overline{\pi}_3,$$

得出结论

$$\overline{\pi}_1=\frac{2}{5},\quad \overline{\pi}_2=\frac{2}{5},\quad \overline{\pi}_3=\frac{1}{5}.$$

§5 连续时间的马尔可夫链

5.3 生灭过程

$$q_{ij} = 0, \quad 当 |i-j| > 1.$$

局部平衡方程组

$$\pi_j q_{ji} = \pi_i q_{ij}, \quad 对于全部的 i, j.$$

§5 连续时间的马尔可夫链

例 7.15(续) 局部平衡方程组形式如下

$$\pi_i\lambda = \pi_{i+1}\mu, \quad i = 0, 1, \cdots, m-1,$$

我们得到 $\pi_{i+1} = \rho\pi_i$, 其中 $\rho = \lambda/\mu$. 所以, 我们有 $\pi_i = \rho^i\pi_0$, 对于所有的 i. 又由归一化方程 $1 = \sum_{i=0}^{m} \pi_i$ 得到

$$1 = \pi_0 \sum_{i=0}^{m} \rho^i,$$

于是稳定概率为

$$\pi_i = \frac{\rho^i}{1 + \rho + \cdots + \rho^m}, \quad i = 0, 1, \cdots, m. \qquad \square$$