

# 烟囱倾倒断裂点的力学分析

王艺霖

2200011456

**摘要：**建立了烟囱的圆筒模型，利用牛顿运动定律对其倾倒的过程进行了分析，得到了各运动量的表达式。利用弹性体的相关理论，计算由压应力和弯折造成的应力合成的总应力，导出了应力在圆筒内分布的一般表达式，并分析了应力最大值的位置。结合软件进行数值计算，直观地得到了各量之间的依赖关系。最后，对得到的结果进行了讨论，从而更加深入地认识了烟囱倾倒这一经典问题。

**关键词：**烟囱；倾倒；断裂；应力

## Analysis on the breaking point of the falling chimney

WANG Yi-lin

**Abstract:** The cylinder model of the chimney is established, the process of its dumping is analyzed, and the expressions of each movement are obtained. Based on the theory of elastic body, the total stress is calculated, the general expression of stress distribution in the cylinder is derived, and the position of maximum stress is analyzed. The dependence relationship between each quantity is obtained intuitively by numerical calculation with software. Finally, the results obtained are discussed, and the classical problem of the falling chimney is further understood.

**Keywords:** falling chimney; breaking; stress

老旧的烟囱需要进行爆破拆除，在烟囱经爆破后倾倒的过程中我们经常会发现烟囱会从中间某处发生断裂。本文试图通过力学分析建立起烟囱下落过程中应力的分布，从而分析出断裂点最有可能发生的位置。此前已经有相关方面的研究[1,2,3]，但其模型均采用了简单的一维细杆，也没有考虑到杆中压应力造成的影响。本文希望通过分析一个圆筒形物体倾倒的过程，来对这一过程进行更为深入的研究。

### 1 圆筒模型的建立和下落过程

我们假设烟囱是一个外径为  $R_1$ 、内径为  $R_2$ 、长为  $L$  的均匀圆筒，其质量密度为  $\rho_m$ 。为了便于分析问题，我们令圆筒的对称轴为  $x$  轴，在圆筒的横截面上建立极坐标系  $\xi - \varphi$ ，如图 1 所示。

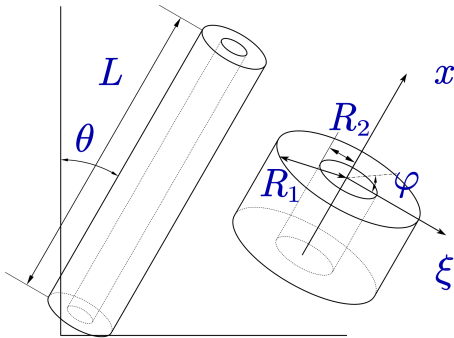


图 1 圆筒及坐标系

我们首先选取  $x \sim x + dx$  的薄层进行分析。这一段微元的质量为：

$$dm = \pi \rho_m (R_1^2 - R_2^2) dx \quad (1)$$

接下来计算该微元相对其质心绕垂直于纸面的轴的转动惯量  $dI_\eta$ ：根据正交轴定理，有  $dI_\eta + dI_\xi = dI_z$ ，再根据轴对称性得知  $dI_\eta = dI_\xi$ ，因此有

$$\begin{aligned} dI_\eta &= \frac{1}{2} dI_z = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_1} \rho^2 \cdot \rho_m \rho d\rho d\varphi dx \\ &= \frac{1}{2} \pi \rho_m (R_1^4 - R_2^4) dx \end{aligned} \quad (2)$$

对  $x$  进行积分即可得到圆筒的总质量：

$$m_t = \int dm = \pi \rho_m (R_1^2 - R_2^2) L \quad (3)$$

要求出圆筒相对于转轴的总转动惯量，需要对每个微元绕自身质心的转动惯量再加上其质心绕转轴的转动惯量进行积分，即有

$$\begin{aligned} I_t &= \int (dI_\eta + x^2 dm) \\ &= \frac{1}{4} \pi \rho_m (R_1^4 - R_2^4) L + \frac{1}{3} \pi \rho_m (R_1^2 - R_2^2) L^3 \end{aligned} \quad (4)$$

列出圆筒倒下时其质心的运动方程：

$$I_t \ddot{\theta} = m_t g \cdot \frac{L}{2} \sin \theta \quad (5)$$

从中可以解出  $\ddot{\theta}$ ，并积分得到  $\dot{\theta}$ ：

$$\ddot{\theta} = \frac{m_t g L}{2I_t} \sin \theta \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{m_t g L}{I_t} (1 - \cos \theta) \quad (7)$$

## 2 圆筒各处的力和力矩的分布

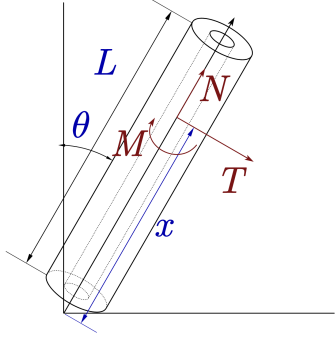


图2 圆筒上面部分的受力分析

分析  $x$  以上的部分的运动。设下面部分对上面部分施加的横向力为  $T$ ，径向力为  $N$ ，力矩为  $M$ ，方向如图2所示。 $x$  以上的部分质量为  $m_u = \frac{L-x}{L} m_t$ ，转动惯量可以按照与计算总转动惯量相同的方法进行计算，大小为  $I_u = \frac{1}{4} \pi \rho_m (R_1^4 - R_2^4) (L-x) + \frac{1}{12} \pi \rho_m (R_1^2 - R_2^2) (L-x)^3$ 。

对上面部分的质心列出切向运动方程：

$$m_u \cdot \frac{L-x}{2} \ddot{\theta} = T + m_u g \sin \theta \quad (8)$$

从中可以解出横向力  $T$  的大小：

$$T(x, \theta) = \frac{L-x}{L} m_t g \sin \theta \left[ \frac{m_t L (L+x)}{4I_t} - 1 \right] \quad (9)$$

取一组典型的烟囱尺寸： $R_1 = 4.3m$ ， $R_2 = 3.9m$ ， $L = 120.0m$ ， $\rho_m = 2.50 \times 10^3 kg/m^3$ ，利用MATLAB做数值计算，可以得到图3所示  $T-x$  曲线。

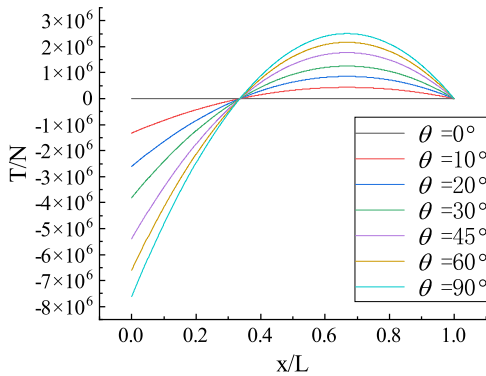


图3 下落至不同  $\theta$  角处的  $T-x$  关系曲线

再列出径向的运动方程：

$$m_u g \cos \theta - N = m_u \dot{\theta}^2 \cdot \frac{L+x}{2} \quad (10)$$

从中可以解出径向力  $N$  的大小：

$$\begin{aligned} N &= \frac{L-x}{L} m_t g \cos \theta - \frac{L^2-x^2}{2L} m_t \frac{m_t g L}{I_t} g \sin \theta \\ &= \frac{L-x}{L} m_t g \left[ \cos \theta - \frac{6L(L+x)(1-\cos \theta)}{3(R_1^2 + R_2^2) + 4L^2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

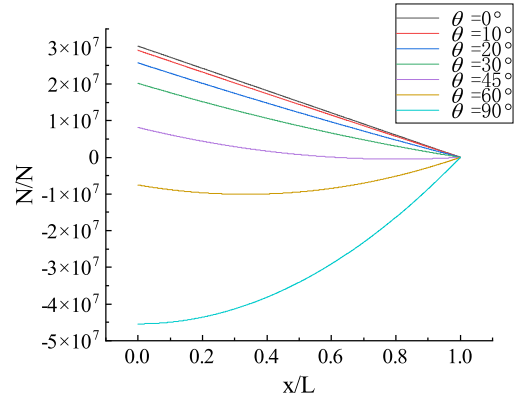


图4 下落至不同  $\theta$  角处的  $N-x$  关系曲线

对圆筒上面部分列质心系角动量定理：

$$I_u \ddot{\theta} = M - T \cdot \frac{L-x}{2} \quad (12)$$

可以得到下面部分对上面部分施加的力矩  $M$  的大小：

$$\begin{aligned} M(x, \theta) &= I_u \cdot \frac{m_t g L}{2I_t} \sin \theta + T \cdot \frac{L-x}{2} \\ &= \frac{3(R_1^2 + R_2^2) + 2L(L-x)}{3(R_1^2 + R_2^2) + 4L^2} \cdot \frac{L-x}{2L} m_t g x \sin \theta \end{aligned} \quad (13)$$

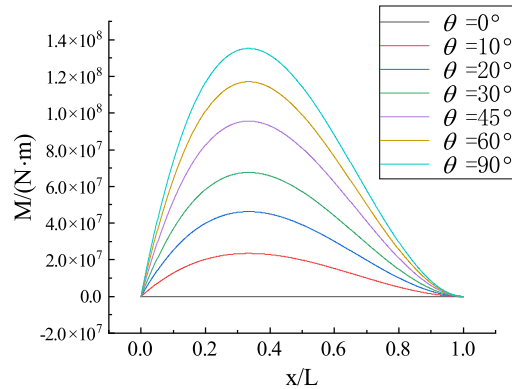


图5 下落至不同  $\theta$  角处的  $M-x$  关系曲线

### 3 圆筒内的应力分布

圆筒内的应力由两部分组成：纵向力  $N$  造成的压应变和力矩  $M$  造成的弯曲导致的应变。 $N$  造成的应变在横截面内均匀分布，大小为：

$$p_N = \frac{N}{S} = \frac{N}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \quad (14)$$

根据弹性体的理论 [4]，杆弯曲时力矩满足如下关系：

$$M = IYK \quad (15)$$

其中  $Y$  为材料的杨氏模量， $I$  定义为  $I = \int \rho^2 dS$ ， $K$  为中性线的曲率。

对于模型中的圆筒， $I$  的大小为

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_1} \xi^2 \cos \varphi^2 \cdot \xi d\xi d\varphi = \frac{\pi}{4}(R_1^4 - R_2^4) \quad (16)$$

由此可以计算出中性线的曲率：

$$K(x, \theta) = \frac{M(x, \theta)}{YI} \quad (17)$$

从而可以得到截面上的应变分布：

$$\varepsilon(x, \theta, \xi, \varphi) = K\xi \cos \varphi = \frac{M}{YI}\xi \cos \varphi \quad (18)$$

因此由于力矩  $M$  造成的胁强在截面上的分布为：

$$p_M(x, \theta, \xi, \varphi) = Y\varepsilon = \frac{M}{I}\xi \cos \varphi \quad (19)$$

因此截面上的总张胁强为：

$$p(x, \theta, \xi, \varphi) = p_M - p_N = \frac{M}{I}\xi \cos \varphi - \frac{N}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \quad (20)$$

由于一般材料的抗压强度远远大于抗拉强度，所以我们可以不必考虑由于压力导致的材料发生破坏，而只需要考虑由张力导致材料断裂，也就是只需考虑张胁强的最大值。由 (20) 可以明显地看出，在  $\xi = R_1$ ， $\varphi = 0$  处截面上的张胁强有最大值

$$p_m(x, \theta) = p(x, \theta, R_1, 0) = \frac{MR_1}{I} - \frac{N}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \quad (21)$$

将 (3,11,13) 的表达式代入，可以得到  $p_m(x, \theta)$  是一个关于  $x$  的三次多项式：

$$p_m(x, \theta) = E \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d) \quad (22)$$

其中

$$\begin{cases} E = \frac{\pi \rho_m g}{2\pi(R_1^2 + R_2^2)[3(R_1^2 + R_2^2) + 4L^2]} \\ a = 8LR_1 \sin \theta \\ b = -12L(R_1^2 + R_2^2)(1 - \cos \theta) - 4R_1[3(R_1^2 + R_2^2) + 4L^2] \sin \theta \\ c = 2(R_1^2 + R_2^2)[3(R_1^2 + R_2^2) + 4L^2] \cos \theta \\ \quad + 4LR_1[3(R_1^2 + R_2^2) + 2L^2] \sin \theta \\ d = 2L(R_1^2 + R_2^2)\{6L^2 - [3(R_1^2 + R_2^2) + 10L^2] \cos \theta\} \end{cases}$$

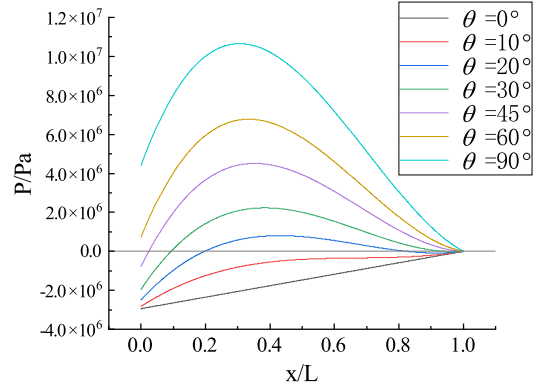


图 6 下落至不同  $\theta$  角处的  $P_m - x$  关系曲线

### 4 数据分析

#### 4.1 胁强极大值的位置

将  $p_m(x, \theta)$  对  $x$  求偏导，得到

$$\frac{\partial}{\partial x} p_m(x, \theta) = E \cdot (3ax^2 + 2bx + c) \quad (23)$$

这是一个关于  $x$  的二次方程，方程的两根  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$  对应  $p_m$  的极值点，从图 6 中可以看出（也可以通过求二阶偏导得到）取“-”的根对应的是  $p_m$  的极大值，记极大值对应的位置为  $x_0$ ，即有

$$x_0 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \quad (24)$$

其中的  $a, b, c$  见 (22) 后的定义。由于  $(x = x_0, \rho = R_1, \varphi = 0)$  处是整个圆筒中应力最大的点，所以在烟囱倾倒的过程中，往往会在这个位置附近发生断裂。

#### 4.2 极限情况的验证

在 (24) 中取  $R_2 \rightarrow 0, R_1 \ll L$  的极限，可以得到

$$\lim_{R_2 \rightarrow 0, R_1/L \rightarrow 0} x_0 = \frac{L}{3} \quad (25)$$

可以看到，这与 [1,2] 中的简单模型的结果是一致的。这是因为压应变与扭曲应变的比值  $\frac{p_N}{p_M} \propto \frac{R}{L}$ 。当取  $R_2 \rightarrow 0, R_1 \ll L$  的极限的时候，杆的三维结

构和压应变可以被忽略，只有细杆中的力矩项被保留。

#### 4.3 进一步的讨论

一个感兴趣的问题是应变极值点的位置是如何随着各量变动的，下面进行简要讨论。对这个问题有影响的因素是杆的结构和下落过程中  $\theta$  的不同，改变  $\frac{R_1}{L}$ ,  $\theta$  的大小（保持  $\frac{R_2}{R_1}$  不变）计算极值点的位置，得到图 7 所示的关系：

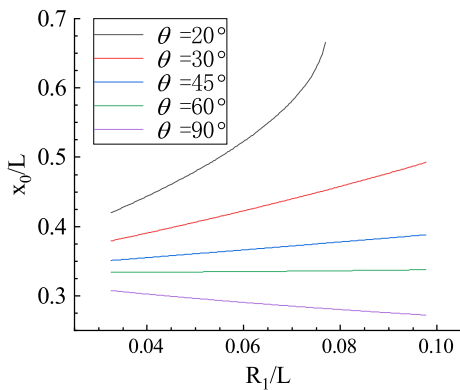


图 7 下落至不同  $\theta$  角处的  $x_0 - \frac{R_1}{L}$  关系曲线

可以看到， $x_0$  随  $\theta$  角的变化是单调的，总是随着  $\theta$  的增大而减小。而  $x_0$  随  $\frac{R_1}{L}$  的变化虽然也是单调的，但是斜率的正负与  $\theta$  相关：当  $\theta$  比较小的时候， $x$  随  $\frac{R_1}{L}$  的增大而增大；当  $\theta$  比较大时， $x$  随  $\frac{R_1}{L}$  的增大而减小。

#### 5 结论

本文分析了圆筒形烟囱倾倒过程中的运动，并利用弹性体的理论导出了圆筒内部的应力分布，给出了各个量的解析表达式，并利用 MATLAB 进行了数值计算。分析了应力最大的位置，并分析了它与各量的依赖关系。但是这个模型依然具有很大的局限性，因为现实中的烟囱通常是上细下粗的，事实上，如果假设烟囱的内外径沿长度方向线性分布，则在计算应力最大值的位置时会遇到五次以上的高次方程，不再能够给出解析的表达式。本文的价值在于将压应力的影响纳入考虑，从而分析了由其导致的极值点的偏移。进一步的研究可以在拥有更加详尽的数据的基础上建立更加真实的模型进行数值计算。

#### 参考文献：

- [1] Ernest L. Madsen , "Theory of the chimney breaking while falling", American Journal of Physics 45, 182-184 (1977) <https://doi.org/10.1119/1.10651>
- [2] Gabriele Varieschi and Kaoru Kamiya , "Toy models for the falling chimney", American Journal of Physics 71, 1025-1031 (2003) <https://doi.org/10.1119/1.1576403>
- [3] Francis P. Bundy , "Stresses in Freely Falling Chimneys and Columns", Journal of Applied Physics 11, 112-123 (1940) <https://doi.org/10.1063/1.1712742>
- [4] 梁昆淼. 力学 [M]. 第四版下册理论力学. 高等教育出版社, 2018 :339-377.