

波浪能最大输出功率设计

摘要

波浪能是海洋能中最主要的能源之一，有着无污染和储存大的特性，能有效缓解能源危机、减少污染。本文通过建立波浪能装置的数学模型，得到装置的运动方程，并给出最大功率设计。

针对问题一，首先分析初始状况，得到浮子圆锥体全在水下的假设，将圆锥等效为等底、1/3 高的圆柱，此时**等效浮子为一圆柱体**。分别对浮子、振子进行受力分析，结合几何关系得到振子、浮子的位移、速度与加速度的表示。运用牛顿第二定律列出**运动方程**，在忽略波浪振幅下得出题目中要求的参量。再在**波浪为简谐运动下进行修正**。比较修正前后的**图像与数值**，判断出波浪运动对阻尼一定时的振子影响较大，综合考虑选择**修正模型作为最终结果**。

针对问题二，采用问题一修正模型。首先分析功能转化关系，得出**阻尼力做功对外输出**。然后表示出**瞬时功率**，其对时间的**平均**就是平均功率。对于**阻尼为常数**的情况，先取大梯度，通过图像判断**稳定的**阻尼区间与积分区间，找出最大功率的区间后，**缩小梯度**求出精准功率。结果为最大功率 **28.3068W**，对应的最优阻尼为 **18310 N·s/m**。对于**阻尼变化的情况**，由于阻尼与速度的耦合，不能确定区间，故先采取**枚举法**找到最大功率，再验证最大功率时的稳定情况。结果为最大功率 **275.3W**，对应比例系数 **100000**，幂指数 **1**。

针对问题三，需考虑**波浪运动**，运用**等效浮子模型**。首先将运动分解为垂荡与纵摇，分别进行**受力分析、力矩分析**。结合分析内容与牛顿第二定律及角动量定理，列出**运动方程**。采用**微元分析法**求解浮子与振子的转动惯量，结合程序，求解微分方程。最终得到浮子振子的位移速度、角位移角速度。

针对问题四，首先分析功能转换关系，得出**输出功为直线阻尼器做功与旋转阻尼器做功之和**。再分别表示出**瞬时功率**，其对时间的**平均**即为平均功率。将变化后的阻尼代入问题三中运动方程，得到角速度后，可求出平均功率。选取适当步长，找出最大功率。进一步优化，**缩小步长**，得到更为准确的最大功率及最优阻尼。结果为最大功率 **7.053W**，直线阻尼器阻尼 **15000 N·s/m**，旋转阻尼器阻尼 **1700 N·s·m**。

最后，给出模型的优劣、改进与展望。

关键词：最大输出功率 最优阻尼 等效浮子 垂荡 纵摇

一、问题重述

1.1 问题背景

近年来能源问题与环境问题日益凸显，发展清洁、可持续能源迫在眉睫。波浪能可再生，且分布广泛、储存丰富，有着广阔的应用前景。

波浪能装置由四个部分组成：浮子、振子、中轴及能量输出系统 PTO。其中，PTO 由弹簧与阻尼器构成。浮子由均匀的圆柱壳体与圆锥壳体构成，两壳体由一隔层连接。振子、中轴与 PTO 置于浮子内部。圆柱体振子穿在中轴上，通过 PTO 系统与中轴底座相连。在波浪的作用下，浮子运动。受到浮子的作用，弹簧产生形变，带动振子运动。浮子与振子的相对运动使阻尼器做功，从而将波浪能转化为可输出的能量。

1.2 问题提出

问题一

若浮子在波浪中做垂荡运动，建立浮子与振子的运动模型。根据附件 3 与 4 中的参数值，分别计算两种情况下，波浪激励力为 $f \cos \omega t$ (f 为波浪激励力振幅， ω 为波浪频率) 时，浮子与振子在前 40 个波浪周期内，时间间隔为 0.2s 的垂荡位移与速度。

两种情况为：（1）阻尼器的阻力系数为 $10000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ；（2）阻尼器的阻尼系数与浮子振子的相对速度绝对值的幂成正比，比例系数为 10000，幂指数为 0.5。

问题二

同样只考虑垂荡运动，利用附件 3 与 4 中的参数，分别在两种情况下，找到直线阻尼器的最优阻尼系数，使得 PTO 系统的平均输出功率最大。

两种情况：（1）阻尼系数为常数，并在 $[0, 100000]$ 内取值；（2）阻尼系数与浮子、振子的相对速度的平均值的幂成正比，比例系数在 $[0, 100000]$ 内取值，幂指数在 $[0, 1]$ 内取值。

问题三

在问题三中，中轴能绕转轴转动，转轴上装有旋转阻尼器与扭转弹簧，直线阻尼器与旋转阻尼器共同做功输出能量。

若浮子同时做垂荡和纵摇运动，建立浮子与振子的运动模型。波浪激励力为 $f \cos \omega t$ ，波浪激励力矩为 $L \cos \omega t$ (L 为波浪激励力矩振幅， ω 为波浪频率)，根据附件 3 与 4 中的数据，计算浮子与振子在前 40 个周期内，间隔 0.2s 的垂荡位移与速度、纵摇角位移与角速度。

问题四

若浮子做垂荡与纵摇运动，直线阻尼器与旋转阻尼器的阻尼都为常量，取值区间都为 $[0, 100000]$ ，求出最大功率与对应的最优阻尼。

题目中给出四个附件，附件 1 为垂荡运动的动画；附件 2 为垂荡与纵摇运动结合的动画；附件 3 给出了不同入射波浪频率下的附加质量、附加转动惯量、兴波阻尼系数与波浪激励力（矩）振幅；附件 4 给出了浮子与振子的物理参数与几何参数值。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一要求在浮子做垂荡运动的情况下，求出浮子与振子的运动方程，并分别求出两种情况——阻尼器的阻尼系数为定值、幂函数变化下，浮子与振子在规定时间内垂荡位移与速度。针对此问题，首先分析初始平衡状态的系统。根据平衡时吃水深度与圆柱体高度间的大小关系，得到圆锥体不会露出水面的假设。将浮子的圆锥部分等效为体积相同的圆柱体，整个等效浮子为一标准圆柱。分别对等效浮子与振子进行受力分析，并根据几何关系表示出振子、浮子的位移、速度、加速度。表示出各个力，结合受力分析，得到振子、浮子的运动方程。在忽略波浪振幅的情况下，编写程序代入数据求解，得到垂荡位移与速度。考虑波浪的振幅，再对模型进行修正。由于波浪为线性周期微幅波，故假设波浪为简谐波，修正方程后，得出数值。

2.2 问题二的分析

问题二要求在浮子做垂荡运动的情况下，求出两种情况——阻尼器阻尼系数为常数、幂指数变化下，最大平均输出功率与最优阻尼。针对此问题，首先分析能量转化情况，得到阻力做功转化为能量输出的结论。然后分别在上述两种情况下，表示出瞬时功率，对时间求平均得到平均功率。对于阻尼为常数的情况，首先取大梯度 $1000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ，通过位移-时间图像判断阻尼的稳定情况，就此缩小区间，得到能稳定的阻尼区间与积分区间。在此区间下求出功率，找到最大功率区间，然后缩小梯度为 $10 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ，找到精确的最大功率与最优阻尼。对于阻尼系数变化的情况，由于阻尼系数与速度耦合，不能确定可以稳定的区间，故采取枚举法，选取比例系数梯度 1000 、幂指数梯度 0.01 ，找到最大功率，最后分析此情形下的稳定性条件是否成立。

2.3 问题三的分析

问题三要求在浮子做垂荡运动与纵摇运动的情况下，求出浮子、振子在规定时间内垂荡位移、速度及纵摇角位移、角速度。针对此问题，波浪运动对振子位移的影响大，在此也需考虑。仍采用第一题中的等效浮子模型。首先将运动分解为垂荡运动与纵摇运动，分别对这两种运动进行受力分析、力矩分析，表示出各个力。结合牛顿第二定律与角动量定理列出运动方程。方程中含有振子与浮子的转动惯量，采用微元分析法求解。最终编写程序，代入数据，求出运动方程，得到题目中所需物理量。

2.4 问题四的分析

问题四要求在浮子做垂荡运动与纵摇运动的情况下，直线阻尼器与旋转阻尼器的阻尼都在 $[0, 1000000]$ 间取值，求解出最优阻尼使得装置达到最大功率。针对此问题，首先对装置进行功能分析，得出输出功的来源为直线阻尼器与旋转阻尼器做功。然后分别表示其瞬时功率，对时间求平均即得到平均功率。将变换后的阻尼代入问题三中的运动方程，得到角速度差，从而可以计算出平均功率。选取阻尼步长为 1000 ，得到最大功率。对模型进行优化，缩小步长为 100 ，得到更精准的最大功率及对应步长。

三、基本假设

1. 假设海水无粘无旋；
2. 假设浮子、振子为刚体；
3. 假设初始时刻，浮子与振子在静水中平衡；
4. 假设在运动中，锥体不会露出水面；
5. 假设在垂荡运动与纵摇运动中，锥体不随波浪水平移动；
6. 假设波浪为简谐波，振幅极小；
7. 假设在纵摇时浮子、振子摆动不大，PTO 中弹簧无弯曲；
8. 假设浮子与振子质量均匀分布，振子实心且体密度处处相等，浮子外壳表面密度处处相等；
9. 假设浮子外壳密闭，顶部有圆形顶面
10. 忽略中轴、底座、隔层及 PTO 的质量与摩擦。

四、符号说明

表一 符号说明

| 变量名 | 变量说明 | 单位 | 取值 |
|-----------------------|------------------------|-------------------|----------------------|
| $F_{\text{浮-stable}}$ | 浮子平衡时所受浮力 | N | |
| ρ | 海水密度 | kg/m ³ | |
| g | 重力加速度 | m/s ² | 9.8 m/s ² |
| $V_{\text{排-stable}}$ | 浮子平衡时的排水体积 | m ³ | |
| $G_{\text{总}}$ | 浮子与振子的总重力 | N | |
| m | 振子质量 | kg | |
| M | 浮子质量 | kg | |
| $V_{\text{锥}}$ | 圆锥体体积 | m ³ | |
| r | 浮子底半径 | m | |
| $h_{\text{锥}}$ | 圆锥体高度 | m | |
| $h_{\text{柱-吃水}}$ | 圆柱体的吃水深度 | m | |
| d | 等效浮子相对水平面静止时的吃水深度 | m | |
| $h_{\text{柱}}$ | 柱体高度 | m | |
| L | 等效浮子高度 | m | |
| x | 波面到水平面 ¹ 距离 | m | |
| y | 波面到等效浮子顶端距离 | m | |
| z | 等效浮子吃水面到水平面距离 | m | |

¹ 水平面指静止无浪时水面，可用作参照

| | | | |
|-------------|---------------------------------|---------------------------|-----------|
| A | 浮子横截面积 | m^2 | |
| M | 浮子质量（不包含振子） | kg | |
| m | 振子质量 | kg | |
| h | 振子垂直方向位移 | m | |
| v | 等效浮子速度 | m/s | |
| a | 等效浮子加速度 | m/s^2 | |
| $F_{浮}$ | 等效浮子浮力 | N | |
| B_1 | 兴波阻尼系数 | $N \cdot s/m$ | |
| B_2 | 直线阻尼器的阻尼系数 | $N \cdot s/m$ | |
| k | 弹簧刚度 | N/m | |
| f | 波浪激励力振幅 | N | |
| ω | 波浪频率 | s^{-1} | |
| x | 波面运动方程 | m | 振幅取 0.01m |
| \tilde{M} | 惯性附加质量 | kg | |
| K_B | 直线阻尼器阻尼系数与相对速度的比例常数 | $N \cdot s^{3/2}/m^{3/2}$ | |
| P | 直线阻尼器的阻尼力瞬时功率 | W | |
| \bar{P} | 直线阻尼器的阻尼力平均功率 | W | |
| T | 求平均功率时，选取的积分区间间隔 | s | |
| α | 直线阻尼器阻尼变化时的幂指数（问题二）；浮子转动角度（问题三） | $/;rad$ | |
| β | 振子转动角度 | rad | |
| \tilde{I} | 附加转动惯量 | $kg \cdot m^2$ | |
| L_{water} | 静水恢复力矩 | $N \cdot m$ | |
| B_3 | 纵摇兴波阻尼 | $N \cdot m \cdot s$ | |
| B_4 | 纵摇振子阻尼 | $N \cdot m \cdot s$ | |
| $k_{扭}$ | 纵摇扭转弹簧刚度 | $N \cdot m$ | |

注：未列出符号及重复符号以出现处为准

五、问题一的模型建立与求解

5.1 初始情况分析

首先计算平衡时吃水深度，此时振子浮子受力分析如下图所示。

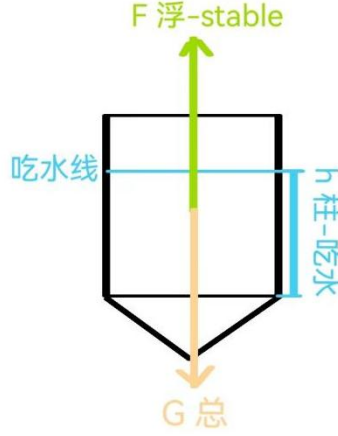


图 1 平衡时的受力分析图

$$F_{\text{浮-stable}} = \rho g V_{\text{排-stable}}$$

$$G_{\text{总}} = (M + m)g$$

其中， $F_{\text{浮-stable}}$ 为平衡时浮子所受浮力， ρ 为海水密度， $V_{\text{排-stable}}$ 为平衡时排水体积， $G_{\text{总}}$ 为浮子振子总重力， M 为浮子质量， m 为振子质量。

平衡时，浮力与重力平衡，有

$$\rho g V_{\text{排-stable}} = (M + m)g$$

$$V_{\text{排-stable}} = \frac{M + m}{\rho}$$

代入附件 4 数据，可以得到， $V_{\text{排-stable}} = 7.12 \text{ m}^3$

圆锥体的体积为，

$$V_{\text{锥}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_{\text{锥}}$$

其中， r 为浮子底半径， $h_{\text{锥}}$ 为圆锥体高度，代入数据得， $V_{\text{锥}} = 0.84 \text{ m}^3$ ，圆锥体全部浸没在水中。

圆柱体的吃水深度为，

$$h_{\text{柱-吃水}} = \frac{V_{\text{排-stable}} - V_{\text{锥}}}{\pi r^2}$$

待入值计算得， $h_{\text{柱-吃水}} = 2.00 \text{ m}$

5.2 模型建立

波浪能装置仅在垂直方向进行一维的上下振荡。根据假设 4，圆锥体部分全在水下²。由于浮力只考虑体积，故可以将水下的圆锥体等效为 $1/3$ 锥体高度的圆柱体。等效浮子的吃水深度为，

$$d = h_{\text{柱-吃水}} + \frac{1}{3} h_{\text{锥}}$$

² 从 5.1 初始条件分析中可以得出，圆柱吃水深度为其高度的 $2/3$ ，较大，可以假设运动中圆锥不会露出水面。

等效浮子高度为，

$$L = h_{\text{柱}} + \frac{1}{3}h_{\text{锥}}$$

其中 $h_{\text{柱}}$ 为圆柱体高度。

由于波浪为线性微幅波，振幅极小，故在求解时将振幅近似为 0。

5.2.1 等效浮子受力分析

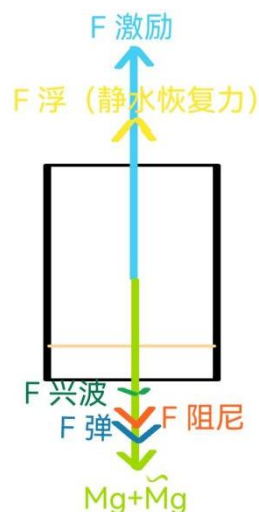


图 2 等效浮子受力分析

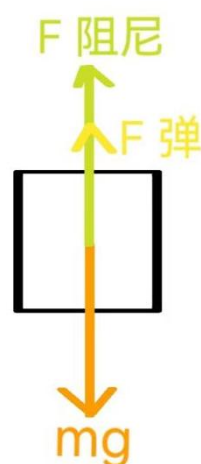


图 3 振子受力分析

注：在运动过程中，浮子与振子的相对位移、速度方向发生变化，激励力方向存在周期性，上两图中除重力外的力都会改变方向。

5.2.2 浮子、振子的运动（直线阻尼器阻力系数定值）

PART 1 物理量确定

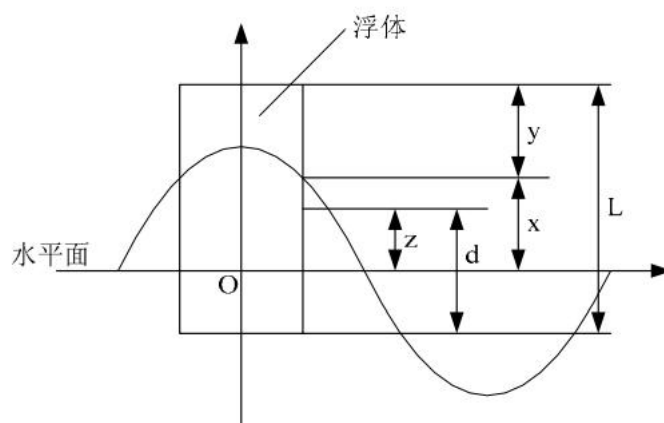


图 4 物理量示意图^[1]

下对字母与物理量做如下定义：

d ——等效浮子相对水平面静止时的吃水深度

L ——等效浮子高度

x ——波面到水平面³距离

³ 水平面指静止无浪时水面，可用作参照

y ——波面到等效浮子顶端距离
 z ——等效浮子吃水面到水平面距离
 h ——振子垂直方向位移

首先设定初始位置，即位移为 0 点。设定浮子的初始位置为水平面，浮子位移即为吃水面的位移 z 。设定振子的初始位置为平衡处底面位置⁴。

由图可知：

$$x + y - z + d = L$$

其中 $x + y$ 是等效浮子顶端距离水平面的距离，可看作等效浮体在垂直方向位置，对上式左右同时对时间求一阶导和二阶导可得：

$$\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = 0$$

$$\ddot{x} + \ddot{y} - \ddot{z} = 0$$

得到等效浮子运动速度

$$v = \dot{x} + \dot{y} = \dot{z}$$

与等效浮子加速度

$$a = \ddot{x} + \ddot{y} = \ddot{z}$$

PART2 等效浮子运动方程推导

等效浮子在水中受到浮力可由如下公式计算得到：

$$F_{\text{浮}} = \rho g A (x - z + d)$$

其中， A 为浮子横截面积。在平衡时有，

$$\rho g A d = Mg + mg$$

其中， M 为浮子质量， m 为振子质量。此外在仅垂荡无摇荡运动中，浮子受到兴波阻尼力，振子对浮子的作用力以及波浪激励力。兴波阻尼力与浮子运动速度成正比，波浪激励力由题目中给出，为周期力，振子对浮子作用力来自于阻尼与弹簧，一部分用以平衡振子重力，另一部分为振子提供加速度使振子上下运动。有如下方程：⁵

$$F_{\text{兴波}} = B_1 v = B_1 \dot{z}$$

$$F_{\text{激励}} = f \cos \omega t$$

$$F_{\text{振子}} = mg + B_2 (\dot{z} - \dot{h}) + k(z - h)$$

$$Ma = F_{\text{浮}} + F_{\text{激励}} - Mg - F_{\text{兴波}} - F_{\text{振子}}$$

其中， $F_{\text{兴波}}$ 为兴波阻尼力， B_1 为兴波阻尼系数， $F_{\text{激励}}$ 为波浪激励力， f 为激励力振幅， ω 为波浪频率， $F_{\text{振子}}$ 为振子对浮子作用力， B_2 为直线阻尼器的阻尼系数， k 为弹簧刚度， $z-h$ 为浮子振子位移差， $k(z-h)$ 即为弹力改变量。整理后得到：

$$M\ddot{z} + \rho g A z + k(z - h) + B_2 (\dot{z} - \dot{h}) + B_1 \dot{z} = \rho g A x + f \cos \omega t$$

其中 x 是波浪运动方程，运动周期与激励力周期相同。在此模型中存在近似，波浪振幅为 0，故 $x=0$ 。

⁴ 由于在后文的运动方程表示中，只涉及浮子、振子位移的变化，故在此能做初始位置假定。

⁵ 在此规定向上为正方向

考虑到浮子和水波存在相对运动，水波在推动浮子运动的同时也需要推动浮子周围的流体一同运动，对上述模型进行附加质量修正得到：

$$(M + \tilde{M})a = F_{\text{浮}} + F_{\text{激励}} - Mg - F_{\text{兴波}} - F_{\text{振子}}$$

其中 \tilde{M} 为惯性附加质量，整理后得到：

$$(M + \tilde{M})\ddot{z} + \rho g A z + k(z - h) + B_2(\dot{z} - \dot{h}) + B_1\dot{z} = \rho g A x + f \cos \omega t \quad (1)$$

初始条件：

$$z(0) = 0 \quad \dot{z}(0) = 0 \quad \ddot{z}(0) = \frac{f}{(M + \tilde{M})}$$

PART3 振子运动方程推导

对于振子，受到重力与和浮子间的相互作用力，其运动微分方程可表示为：

$$ma = F_{\text{振子}} - mg$$

代入前述变量表示，得：

$$m\ddot{h} = B_2(\dot{z} - \dot{h}) + k(z - h) \quad (2)$$

初始条件⁶：

$$h(0) = 0 \quad \dot{h}(0) = 0 \quad \ddot{h}(0) = 0$$

5.2.3 浮子、振子的运动（直线阻尼器阻力系数改变）

对于阻尼系数改变，即 B_2 不再是常量，由题意可得：

$$B_2 = K_B |\dot{z} - \dot{h}|^{0.5}$$

其中， K_B 为阻尼系数与相对速度的阻尼系数。将其代入对浮子和振子的方程可以得到：

$$(M + \tilde{M})\ddot{z} + \rho g A z + k(z - h) + K_B |\dot{z} - \dot{h}|^{0.5}(\dot{z} - \dot{h}) + B_1\dot{z} = \rho g A x + f \cos \omega t \quad (3)$$

$$m\ddot{h} = K_B |\dot{z} - \dot{h}|^{0.5}(\dot{z} - \dot{h}) + k(z - h) \quad (4)$$

初始条件仍为：

$$z(0) = 0 \quad \dot{z}(0) = 0 \quad \ddot{z}(0) = \frac{f}{(M + \tilde{M})}$$

$$h(0) = 0 \quad \dot{h}(0) = 0 \quad \ddot{h}(0) = 0$$

5.3 模型求解与分析

5.3.1 直线阻尼器的阻尼系数为定值

利用 Matlab 编写程序（见附录程序 1），代入附件 3 与附件 4 数据，求解方程（1）、（2）。100s 内，浮子振子的运动如下两图所示：

⁶ 弹簧形变有延迟，初始时刻对振子的力没变，加速度为 0

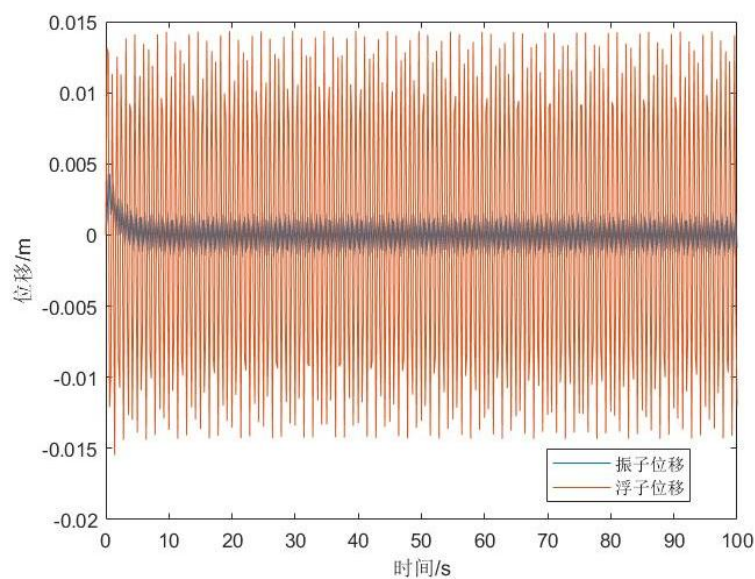


图 5 振子与浮子位移

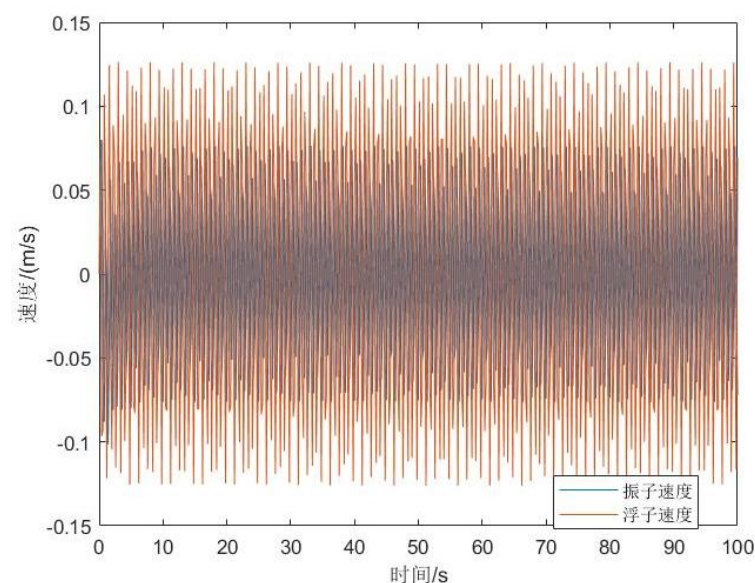


图 6 浮子、振子速度

由图可知，浮子最大位移不超过 0.02m，远小于静止时的吃水深度，故圆锥体不会露出水面，假设 4 成立。

振子、浮子做受迫运动，强迫力的来源为波浪激励力。由图可知，初始时刻，振子、浮子不稳定，振幅衰减。强迫力对振子的影响较大。近 10s 后稳定，浮子与振子都做简谐运动。此过程中，

5.3.2 直线阻尼器的阻尼系数为变化

利用 Matlab 编写程序（见附录程序 2），代入附件 3 与附件 4 数据，求解方程（1）、（2）。100s 内，浮子振子的运动如下两图所示：

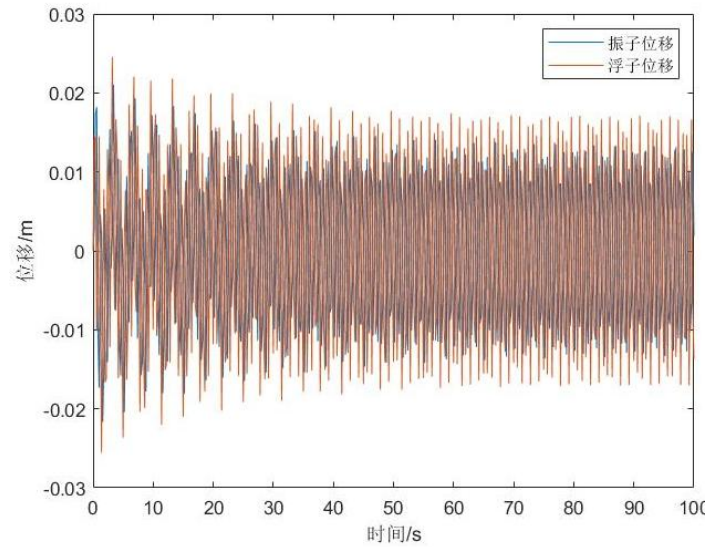


图 7 振子、浮子位移

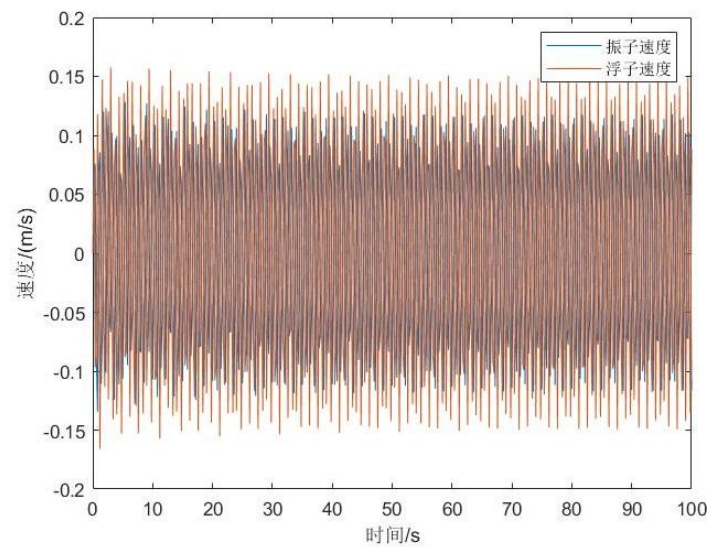


图 8 振子、浮子速度

由图可知，浮子最大位移不超过 0.03m ，远小于静止时的吃水深度，故圆锥体不会露出水面，假设 4 成立。

阻尼变化时，振子、浮子运动状态更加接近；两者位移都有明显的从非稳定向稳定简谐运动过渡的过程，非稳定时间较长。

5.4 模型改进

考虑振幅，假设波浪为简谐波，令振幅为 0.01m

此处，通过图像定性分析改进模型与原模型。

5.4.1 直线阻尼器的阻尼系数为定值

修改方程中的 x 值，利用 Matlab 编程（见附录程序 3），得到振幅修正后的值与图像。

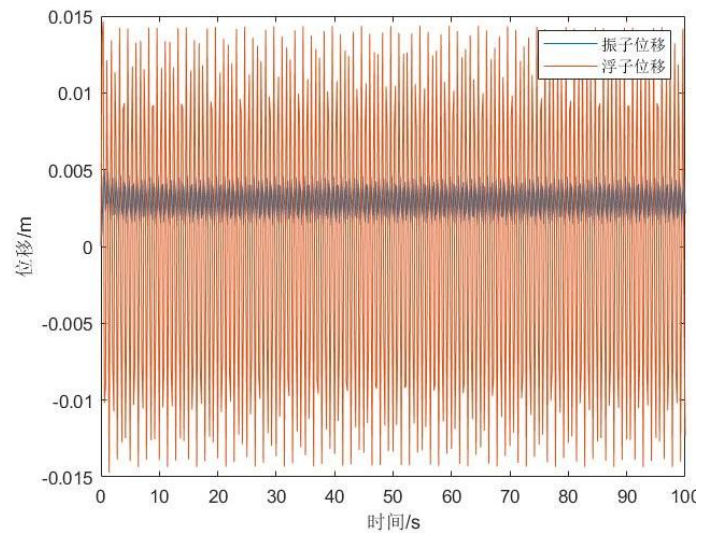


图 9 浮子、振子位移

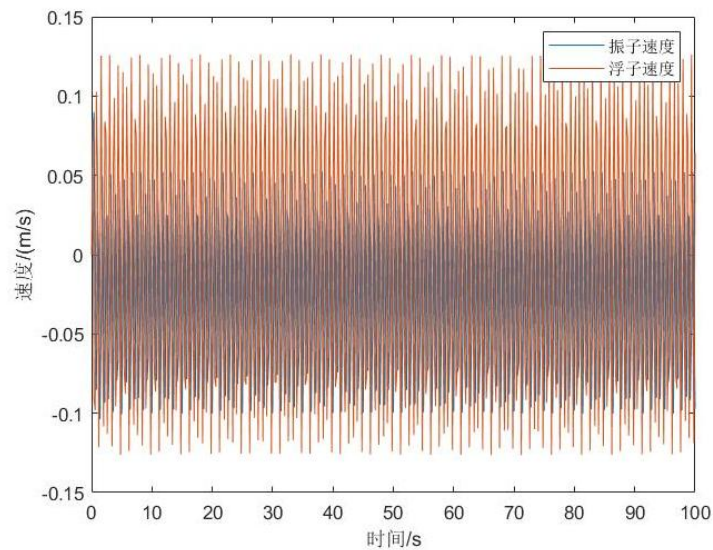


图 10 浮子、振子速度

考虑波浪振幅后，振子也存在不稳定区间，但达稳定的时间减少，最终稳定时简谐运动的平衡位置在位移零点上方，速度中心在速度零点下方。比较图 5、6 与图 9、10，浮子运动变化不大，波浪振幅对浮子的影响小。

5.4.2 直线阻尼器的阻尼系数变化

修改方程中的 x 值，利用 Matlab 编程（见附录程序 4），得到振幅修正后的值与图像。

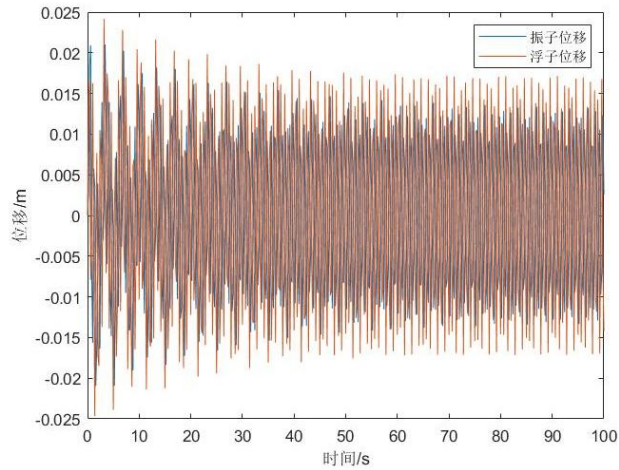


图 11 振子、浮子位移

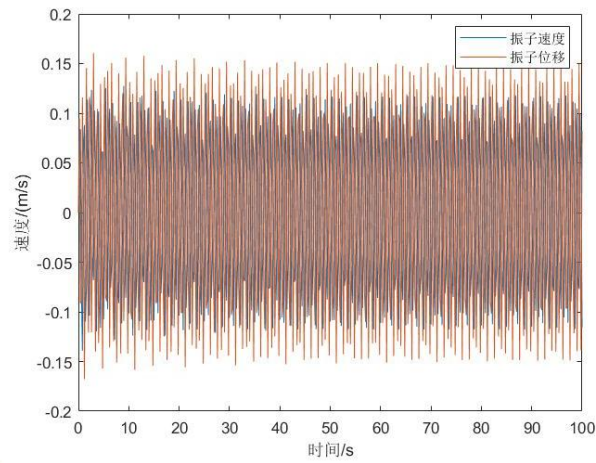


图 12 振子、浮子速度

阻尼变化时，考虑波浪振幅时，振子浮子运动图像与图 7、8 相近，波浪振幅影响不大。为看出细微变化，接下来定量分析。

5.5 定量分析

5.5.1 直线阻尼器的阻尼系数为常数

5.5.1.1 未修正

表二 未修正的位移速度

| 时间/s | 10 | 20 | 40 | 60 | 100 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 振子 | | | | | |
| 位移/m | -0.00046 | -0.00053 | -0.00063 | -0.00072 | -0.0009 |
| 速度/(m/s) | -0.07652 | -0.07608 | -0.07554 | -0.0747 | -0.07216 |
| 浮子 | | | | | |
| 位移/m | -0.01370 | -0.01355 | -0.01323 | -0.01286 | -0.01196 |
| 速度/(m/s) | 0.037421 | 0.041173 | 0.04858 | 0.055804 | 0.069539 |

5.5.1.2 修正

表三 修正的位移速度

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 时间/s | 10 | 20 | 40 | 60 | 100 |
| 振子 | | | | | |
| 位移/m | 0.00256 | 0.00251 | 0.00241 | 0.00232 | 0.00214 |
| 速度/(m/s) | -0.10018 | -0.10011 | -0.09982 | -0.09921 | -0.01236 |
| 浮子 | | | | | |
| 位移/m | -0.01390 | -0.01379 | -0.01351 | -0.01317 | -0.09714 |
| 速度/(m/s) | 0.031341 | 0.035154 | 0.042704 | 0.050100 | 0.064225 |

由上两表及图 5、6、9、10，可知，振幅修正前，振子微小运动，此时波浪面的运动不能忽略。波浪面的运动对振子的影响大。

5.5.2 直线阻尼器的阻尼系数变化

5.5.1.1 未修正

表四 未修正的位移速度

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 时间/s | 10 | 20 | 40 | 60 | 100 |
| 振子 | | | | | |
| 位移/m | 0.01222 | 0.00957 | 0.00622 | 0.00432 | 0.00190 |
| 速度/(m/s) | -0.10708 | -0.10835 | -0.11106 | -0.11324 | -0.11654 |
| 浮子 | | | | | |
| 位移/m | -0.00100 | -0.01183 | -0.01367 | -0.01419 | -0.01370 |
| 速度/(m/s) | 0.050626 | 0.055576 | 0.064539 | 0.072819 | 0.088605 |

5.5.1.2 修正

表五 修正的位移速度

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 时间/s | 10 | 20 | 40 | 60 | 100 |
| 振子 | | | | | |
| 位移/m | 0.01274 | 0.01008 | 0.00676 | 0.00489 | 0.00259 |
| 速度/(m/s) | -0.10177 | -0.10377 | -0.10791 | -0.11124 | -0.11564 |
| 浮子 | | | | | |
| 位移/m | -0.01035 | -0.01223 | -0.01412 | -0.01467 | -0.01423 |
| 速度/(m/s) | 0.046255 | 0.050190 | 0.058284 | 0.066473 | 0.082485 |

由上两表及图 7、8、11、12，可知，在阻尼变化时，波浪面变化对振子与浮子的影响不大。

综合考虑两种阻尼情况，在此选择修正模型作为最终结果。前 40 个波浪周期内时间间隔 0.2s 的垂荡位移和速度见附件 result1-1 与 result1-2。

六、问题二的模型建立与求解

6.1 模型建立

6.1.1 功能转换分析

此系统为受迫振荡。无阻尼的弹簧理想系统内部动能与势能相互转化，不对

外界做功。直线阻尼器做功，以此作为输出能量。外界波浪激励力为强迫力，为浮子振子系统提供补充能量。

由于阻尼做功多少与力的距离有关，而波浪运动会明显改变振子位移⁷，从而改变做功距离，故在本模型中也需考虑波浪运动。

6.1.2 直线阻尼器的阻尼系数为常数时功率

对于直线阻尼器的阻尼力的功率，可以用阻尼力乘以运动速度表示。阻尼力为， $B_2(\dot{z} - \dot{h})$ ；振子与浮子相对运动速度为 $(\dot{z} - \dot{h})$ ，可以得到阻尼力的瞬时功率为：

$$P = B_2(\dot{z} - \dot{h})^2$$

震荡稳定后，上式对于时间的平均即系统对外输出的平均功率：

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int B_2(\dot{z} - \dot{h})^2 dt \quad (5)$$

其中， T 为选取的积分区间的时间间隔。

6.1.3 直线阻尼器的阻尼系数变化时功率

由于阻尼系数不再是常量，而是与相对运动速度有关，即

$$B_2 = K_B |\dot{z} - \dot{h}|^\alpha$$

其中 K_B 与 α 均为笔者设定常量，可以得到此条件下阻尼力的瞬时功率为：

$$P = K_B |\dot{z} - \dot{h}|^\alpha (\dot{z} - \dot{h})^2$$

震荡稳定后，上式对于时间的平均即系统对外输出的平均功率：

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int K_B |\dot{z} - \dot{h}|^\alpha (\dot{z} - \dot{h})^2 dt \quad (6)$$

6.1.4 结合运动方程

将变动的阻尼代入运动方程中，
直线阻尼器阻尼为常数：

$$(M + \tilde{M})\ddot{z} + \rho g A z + k(z - h) + B_2(\dot{z} - \dot{h}) + B_1\dot{z} = \rho g A x + f \cos \omega t$$

$$m\ddot{h} = B_2(\dot{z} - \dot{h}) + k(z - h)$$

直线阻尼器阻尼变化：

$$(M + \tilde{M})\ddot{z} + \rho g A z + k(z - h) + K_B |\dot{z} - \dot{h}|^\alpha (\dot{z} - \dot{h}) + B_1\dot{z} = \rho g A x + f \cos \omega t$$

$$m\ddot{h} = K_B |\dot{z} - \dot{h}|^\alpha (\dot{z} - \dot{h}) + k(z - h)$$

可解出 $(\dot{z} - \dot{h})$ 随时间的变化。将其代入平均功率表达式（5）（6），即可求出平均功率。

6.2 模型求解与分析

⁷ 由问题一模型的分析中可知

6.2.1 直线阻尼器的阻尼系数为常数

在此题中，采取减小梯度的方法。由于 $[0,100000]$ 区间跨度过大，故首先选取 $1000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 为跨度。

6.2.1.1 阻尼范围与功率积分区间大致确定

由第一题可知，振子与浮子系统在最开始时不稳定。此时，阻尼的部分功被用来改变装置运动状态，实际输出功变化。6.1 中公式为阻尼的总功，而实际输出功可能偏大或偏小，平均功率有较大误差。故应选取稳定状态下的阻尼。

根据图像判断是否存在稳定（修改程序 3 中参数，得到图像）。从问题一的修正模型中可以看出， $B_2=10000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 时，振子存在稳定状态，故选取小于 $10000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 的阻尼系数，判断何时稳定。首先判断 $B_2=1 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 与 $B_2=5000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 的图像。

注：6.2.1.1 节中的图像，横轴为时间/s，纵轴为位移/m。

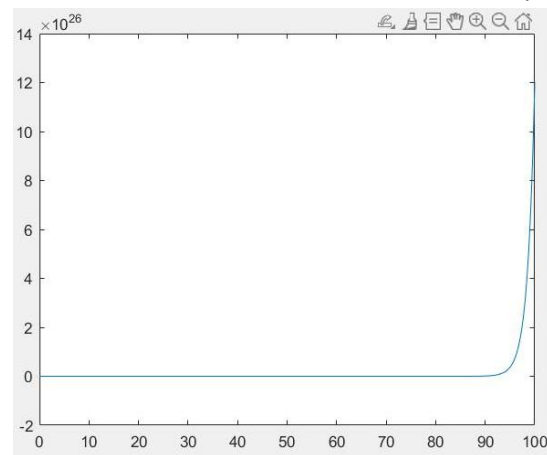


图 13 $B_2=1 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$

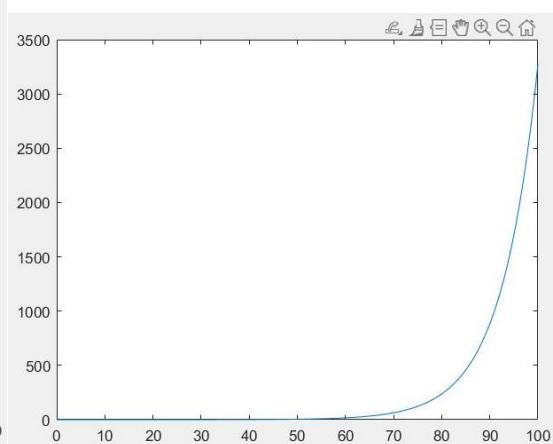


图 14 $B_2=5000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$

这两种情况下，振子运动远大于浮子高度，假设 4 不成立。故且运动一直不稳定，故排除。下一步，选取 $B_2=5000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 与 $B_2=10000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 间的数值。 $B_2=6000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 与 $B_2=7000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 的图像如下：

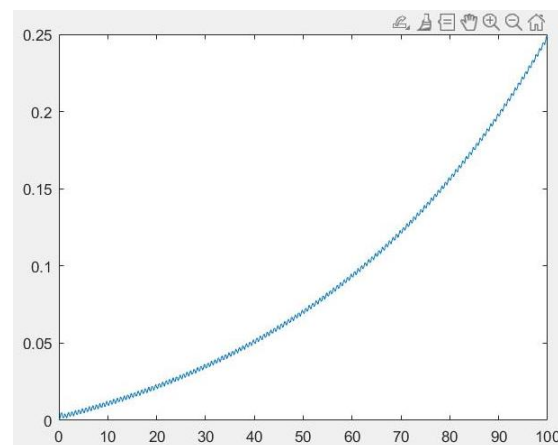


图 15 $B_2=6000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$

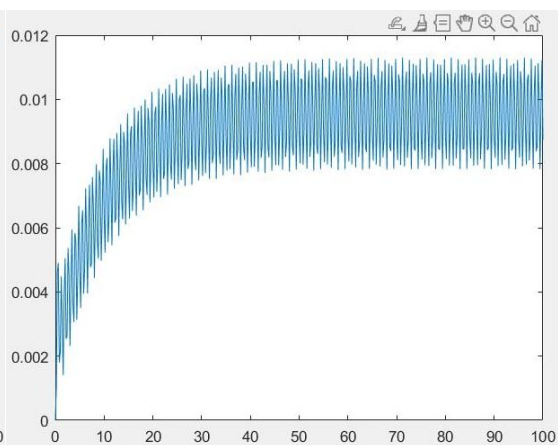


图 16 $B_2=7000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$

$B_2=6000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 时无稳定情况出现， $B_2=7000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 存在周期性的稳定情况。故阻尼区间为 $[7000, 100000]$ 。从图 16 中可以看出，图像在 40s 时稳定，故积分区间选取 $[40\text{s}, 50\text{s}]$ 。当阻尼系数大于 $7000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 时，稳定时间缩短，在积分区间必定稳定。

6.2.1.2 最大功率与最优阻尼

用 Matlab 编写一个函数，用于 ode45 求数值解（见附录程序 5）；再编写一个程序，循环调用程序 5 中得到的数值，得到大梯度下的功率（见附录程序 6）；最后编写程序，找到程序 6 中最大值区间，阻尼梯度设为 10，调用程序 6 得到更精确的最大功率（见附录程序 7）。

绘制阻尼系数为[7000,100000]时的阻尼-功率图像。图像如下：

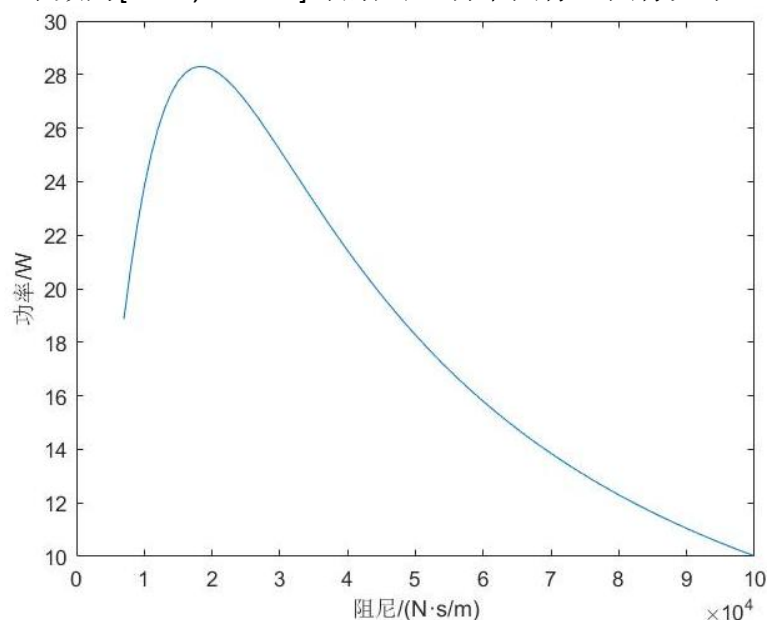


图 17 阻尼-功率图

由图像可知，随着阻尼增大，功率先快速增大，后缓慢减小。最大功率在阻尼为[17000,19000]区间。在此区间中缩小梯度，将梯度设为 10 N•s/m。此梯度下的图像如下：

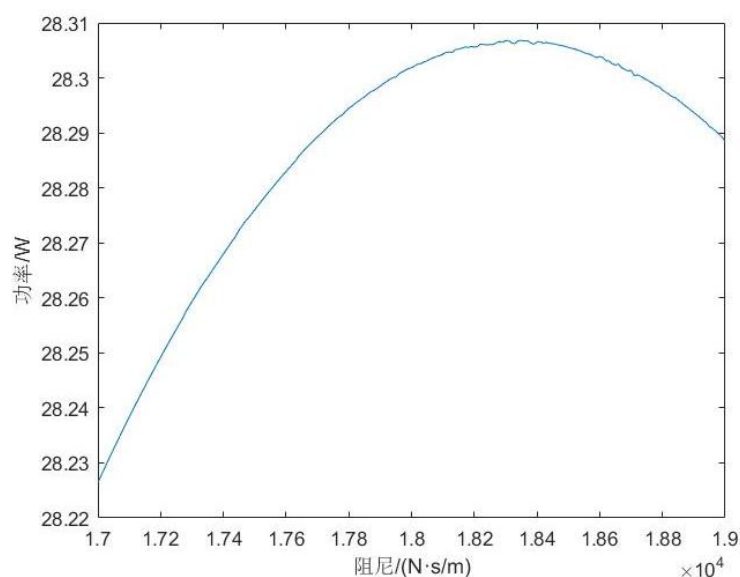


图 18 小梯度阻尼-功率图

结合图 18，得到功率最大值为 28.3068W，对应的最优阻尼为 18310 N•s/m。

6.2.2 直线阻尼器的阻尼系数变化

由于直线阻尼器的阻尼系数 $B_2 = K_B |\dot{z} - \dot{h}|^\alpha$ 还与速度差的绝对值有关，阻尼

系数的变化会导致运动状态变化，速度差变化。速度差与阻尼系数相耦合， K_B 与 α 的变化无法说明 B_2 的变化情况。不易排除不稳定相。故在此，我们采用枚举法，将 K_B 步长设为 10000， α 步长设为 0.01，罗列出所有功率，找到最大值后分析稳定情况。当 $K_B=0$ 时，阻尼力为 0 N，此时阻尼不对外做功，可以排除。

考虑实际生产中要求快速达到较稳定状态，此处的积分区间同样定在 [30s,40s]。

6.2.2.1 最大功率

用 Matlab 编写一个函数，用于 ode45 求数值解（见附录程序 8）；再编写一个程序，循环调用程序 8 中得到的数值，得到功率并输出（见附录程序 9）。比例系数-幂指数-功率的三维图如下：

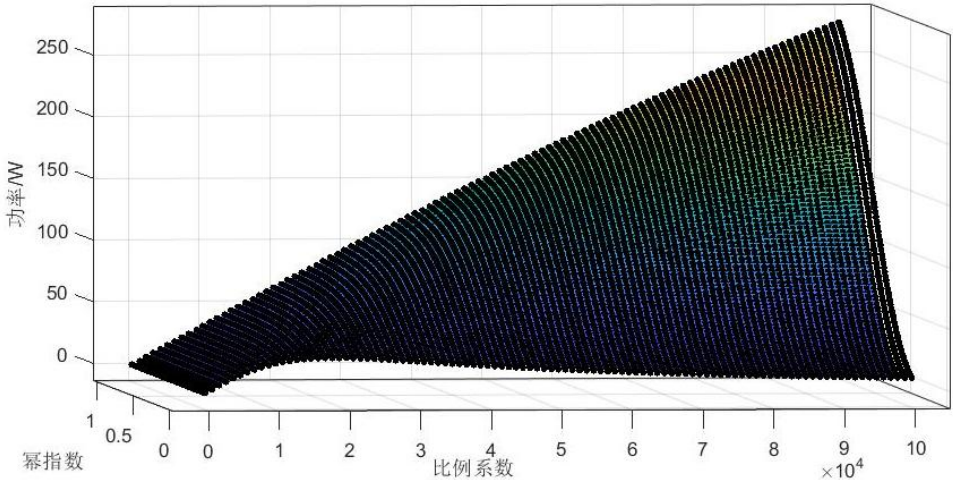


图 19 比例系数-幂指数-功率三维图

三维曲面在比例系数-功率平面和幂指数-功率平面上的投影都为单调递增曲线。结合数据与图 19 可得，最大功率为 275.3W，对应比例系数为 100000，幂指数为 1。

6.2.2.2 验证

修改程序 4 中的数据，可以得到比例系数为 100000，幂指数为 1 的时间-位移图。

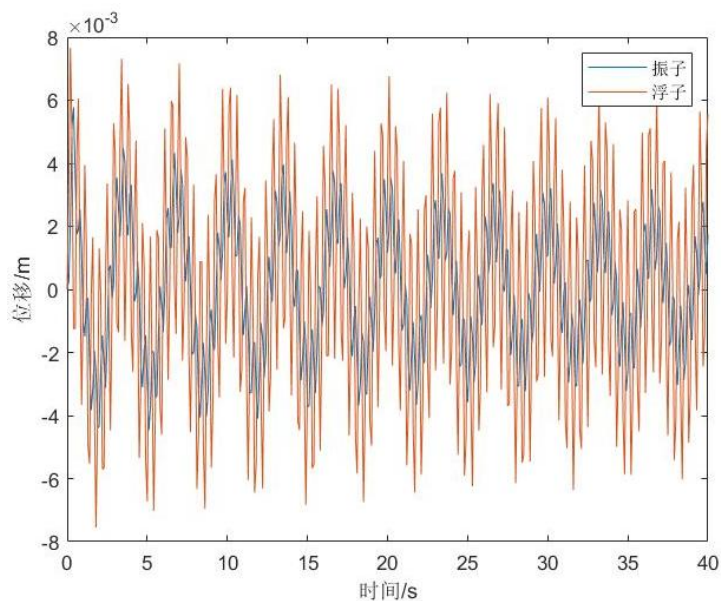


图 20 时间-位移图（最大功率时）

由图 20 可知，振子与浮子都能在[30s,40s]处于稳定状态，故 275.3W 为最大功率，最优的阻尼系数对应于比例系数 100000、幂指数 1。

七、问题三的模型建立与求解

7.1 模型建立

由于运动可分解，故将装置运动分解为垂荡运动与纵摇运动，分别列出运动方程。在此，也不忽略波浪运动。

7.1.1 垂荡运动

在垂荡运动中，还是采用问题一中的等效模型，浮子等效为体积相同的圆柱体。

7.1.1.1 受力分析

装置在水中会受到激励力的作用，激励力使得装置产生平动加速度，使装置做垂荡运动。在初始环境下的受力分析可见以下两图：

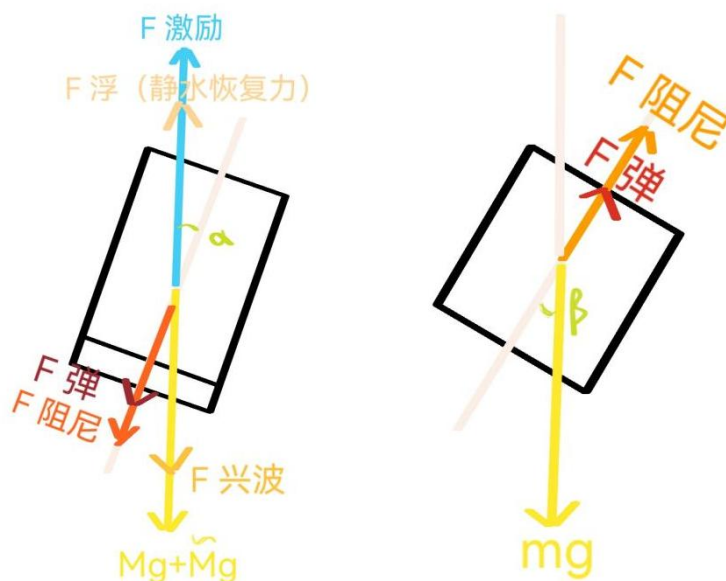


图 21 浮子垂荡受力分析

图 22 振子垂荡受力分析

注：在运动过程中，浮子与振子的相对位移、速度方向发生变化，激励力方向存在周期性，上两图中除重力外的力都会改变方向。

7.1.1.2 运动方程

假设在纵摇过程中，浮子转动的角度为 α ，振子转动角度为 β 。⁸对于垂直方向的位移，有如下关系：

$$x_{\text{浮子}} = z \cos \alpha$$

$$x_{\text{振子}} = h \cos \beta^9$$

对上述两式同时求一阶导和二阶导可以得到浮子，振子在垂直方向的速度与加速度：

$$v_{\text{浮子}} = \dot{x}_{\text{浮子}} = \dot{z} \cos \alpha - z \dot{\alpha} \sin \alpha$$

$$v_{\text{振子}} = \dot{x}_{\text{振子}} = \dot{h} \cos \beta - h \dot{\beta} \sin \beta$$

$$a_{\text{浮子}} = \ddot{x}_{\text{浮子}} = \ddot{z} \cos \alpha - 2\dot{z} \dot{\alpha} \sin \alpha - z \ddot{\alpha} \sin \alpha - z \dot{\alpha}^2 \cos \alpha$$

$$a_{\text{振子}} = \ddot{x}_{\text{振子}} = \ddot{h} \cos \beta - 2\dot{h} \dot{\beta} \sin \beta - h \ddot{\beta} \sin \beta - h \dot{\beta}^2 \cos \beta$$

为简化问题，应用假设 7，认为浮子与振子仅进行小角度¹⁰纵摇，有 $\sin \alpha \approx \sin \beta \approx 0$ ，以及 $\cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1$ 。故可对速度与加速度进行如下近似：

$$x_{\text{浮子}} \approx z \quad x_{\text{振子}} \approx h$$

$$v_{\text{浮子}} \approx \dot{z} \quad v_{\text{振子}} \approx \dot{h}$$

$$a_{\text{浮子}} \approx \ddot{z} - z \dot{\alpha}^2$$

$$a_{\text{振子}} \approx \ddot{h} - h \dot{\beta}^2$$

代入到垂荡的运动方程可以得到：

$$(M + \tilde{M})(\ddot{z} - z \dot{\alpha}^2) + \rho g A z^{11} + k(z - h) + B_2(\dot{z} - \dot{h}) + B_1 \dot{z} = \rho g A x + f \cos \omega t \quad (7)$$

$$m(\ddot{h} - h \dot{\beta}^2) = B_2(\dot{z} - \dot{h}) + k(z - h) \quad (8)$$

7.1.2 纵摇运动

在纵摇运动中，转动惯量与形状有关，不能采取等效模型。

7.1.2.1 力矩分析

⁸ 本文角度均采用弧度制，当装置竖直静止时转动角度为 0。

⁹ z, h 即问题一中的浮子振子垂直方向位移

¹⁰ α, β 均远小于 π 。

¹¹ 在小角度下，将等效浮子水下体积近似为圆柱。

装置在水中会受到力矩的作用，激励力矩使装置进动，从而产生角加速度而进行纵摇运动，在初始环境下的受力分析可见以下两图：

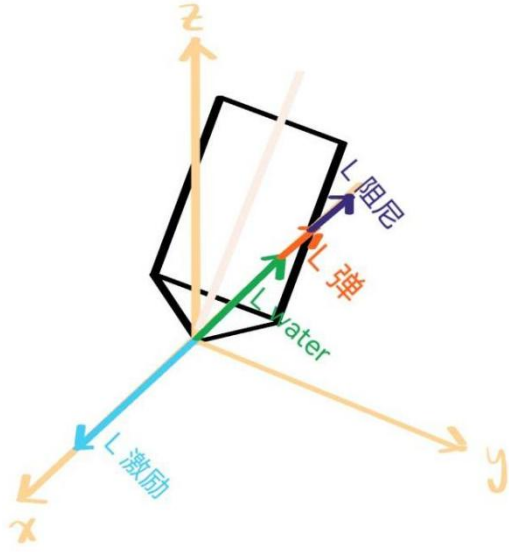


图 23 浮子纵摇力矩分析

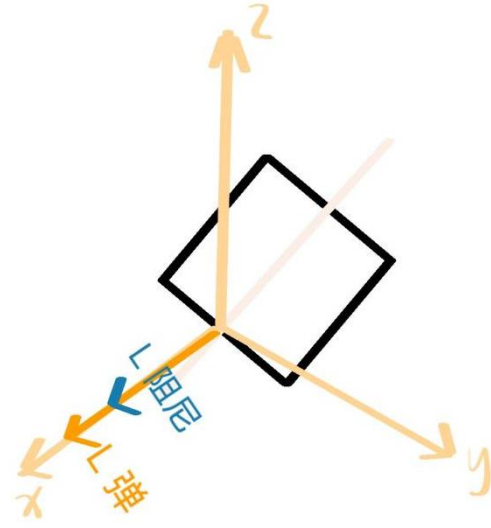


图 24 振子纵摇力矩分析

注：在运动过程中，浮子与振子的相对角位移、角速度方向发生变化，激励力矩方向存在周期性，上两图中力矩都会改变方向。

7.1.2.2 运动方程

对于纵摇运动，作用在装置的力矩会改变装置角动量。对符号做如下定义：

$I_{\text{浮子}}$ ——浮子转动惯量

$I_{\text{振子}}$ ——振子转动惯量

\tilde{I} ——附加转动惯量

L_{water} ——静水恢复力矩

B_3 ——纵摇兴波阻尼

B_4 ——纵摇振子阻尼

$k_{\text{扭}}$ ——纵摇扭转弹簧刚度

由角动量定理，对于浮子纵摇运动：

$$(I_{\text{浮子}} + \tilde{I})\ddot{\alpha} = L \cos \omega t - L_{\text{water}}\alpha - B_3\dot{\alpha} - k_{\text{扭}}(\alpha - \beta) - B_4(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \quad (9)$$

对于振子摇荡运动：

$$I_{\text{振子}}\ddot{\beta} = k_{\text{扭}}(\alpha - \beta) + B_4(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \quad (10)$$

加上垂直方向运动方程

$$(M + \tilde{M})(\ddot{z} - z\dot{\alpha}^2) + \rho g A z + k(z - h) + B_2(\dot{z} - \dot{h}) + B_1\dot{z} = \rho g A x + f \cos \omega t$$

$$m(\ddot{h} - h\dot{\beta}^2) = B_2(\dot{z} - \dot{h}) + k(z - h)$$

联立（7）（8）（9）（10），即可解出垂荡与纵摇运动。对于上述运动微分方程，存在初始条件：

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= \dot{\alpha}(0) = 0 \quad \ddot{\alpha}(0) = \frac{L}{I_{\text{浮子}} + \tilde{I}} \\ \beta(0) &= \dot{\beta}(0) = \ddot{\beta}(0) = 0 \\ z(0) &= 0 \quad \dot{z}(0) = 0 \quad \ddot{z}(0) = \frac{f}{(M + \tilde{M})} \\ h(0) &= 0 \quad \dot{h}(0) = 0 \quad \ddot{h}(0) = 0\end{aligned}$$

7.2 模型求解与分析

7.2.1 转动惯量计算方法

具体计算步骤见附录——转动惯量计算

7.2.1.1 振子转动惯量

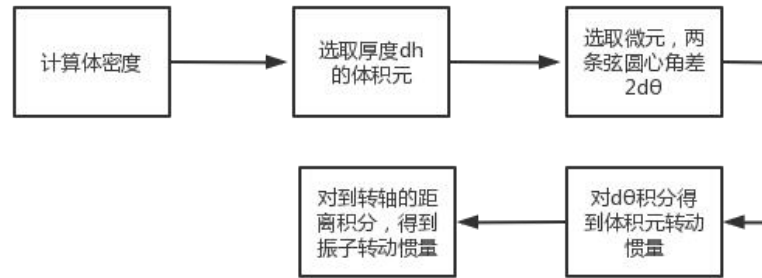


图 25 振子转动惯量计算流程图

振子转动惯量的表达式为：

$$I_{\text{振子}} = \int_l^{l+h_0} \int_0^\pi (h^2 + r^2 \cos^2 \theta) 2r \sin \theta \partial r d\theta \sin \theta dh$$

其中， l 为弹簧长度， h 为体积元到转轴的距离， r 为圆面半径， θ 为圆心角的一半， ∂ 为体密度。由于弹簧的伸缩与振子运动相比，不能忽略，此处还需考虑弹簧长度的变化。故最终积分后，振子转动惯量为，

$$I_{\text{振子}} = 1571.3125 + 3649.9(h - z) + 2433(h - z)^2$$

7.2.1.1 浮子转动惯量

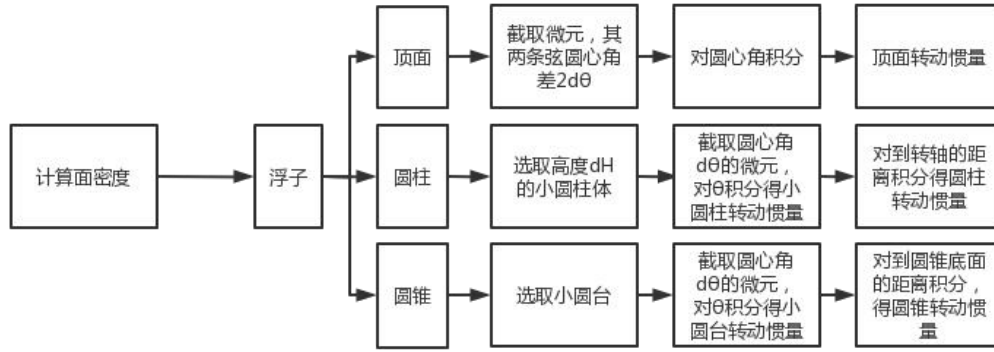


图 26 浮子转动惯量计算流程图

顶面转动惯量表达式为:

$$I_1 = \int_0^\pi 2R \sin \theta \mu R \sin \theta (H_0^2 + R^2 \cos^2 \theta) d\theta$$

其中, R 为顶面 (圆柱或圆锥底面) 半径, θ 为圆心角的一半, μ 为面密度, H_0 为圆柱高度。圆柱转动惯量表达式为:

$$I_2 = \int_0^{H_0} \int_0^{2\pi} (H^2 + R^2 \cos^2 \theta) \mu R d\theta dH$$

此处的 θ 为圆心角, H 为小圆柱到转轴的距离。圆锥转动惯量表达式为:

$$I_3 = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{41}}{4} (h^2 + (\frac{H-h}{H}R)^2 \cos^2 \theta) \mu R d\theta dh$$

其中, h 为小圆台到圆锥底面的距离, H 为圆锥高度, θ 为圆心角。三者相加后, 最终结果为:

$$I_{\text{振子}} = I_1 + I_2 + I_3 = 18044.36 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

7.2.1 方程求解

由 Matlab 编写程序 (见附件程序 10), 联立四个方程, 代入初始条件与附件 3、4 数值, 做出图像, 得到垂荡位移速度、纵摇角位移角速度。

7.2.1.1 垂荡运动

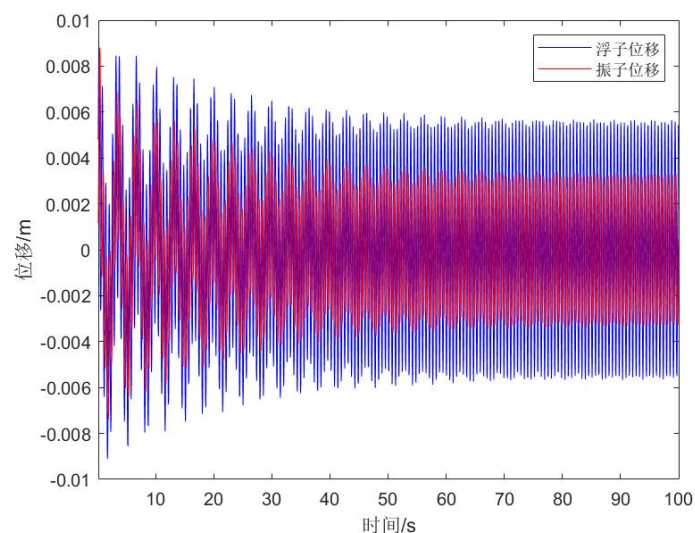


图 27 垂荡位移

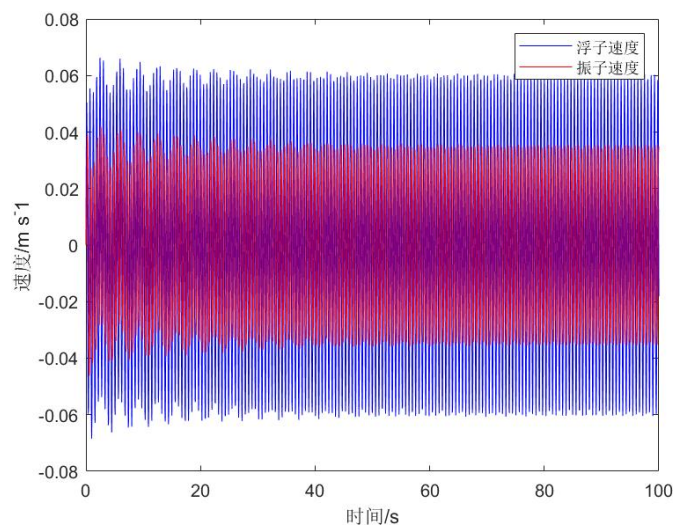


图 28 垂荡速度

由图像可知，振子浮子在运动开始时，位移不稳定，一次振荡的最大位移逐渐减小。40s 后达稳定状态。速度变化不剧烈，达到稳定的时间比位移短。题目中要求的位移、速度如下表所示：

表六 垂荡运动

| 时间/s | 浮子位移/ m | 振子位移/ m | 浮子速度 / $m * s^{-1}$ | 振子速度 / $m * s^{-1}$ |
|------|-----------|--------------|---------------------|---------------------|
| 10 | 0.000111 | $3.90E - 05$ | 0.055332 | -0.01884 |
| 20 | 0.004339 | -0.00131 | 0.05203 | 0.012268 |
| 40 | 0.004147 | 0.002677 | -0.04651 | 0.026011 |
| 60 | -0.00515 | 0.001732 | -0.02254 | -0.03113 |
| 100 | 0.005325 | 0.000477 | -0.01818 | 0.034885 |

7. 2. 1. 2 纵摇运动

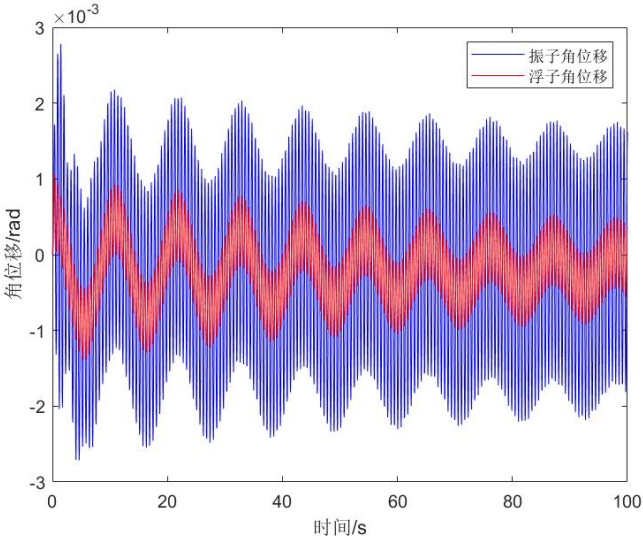


图 29 纵摇角位移

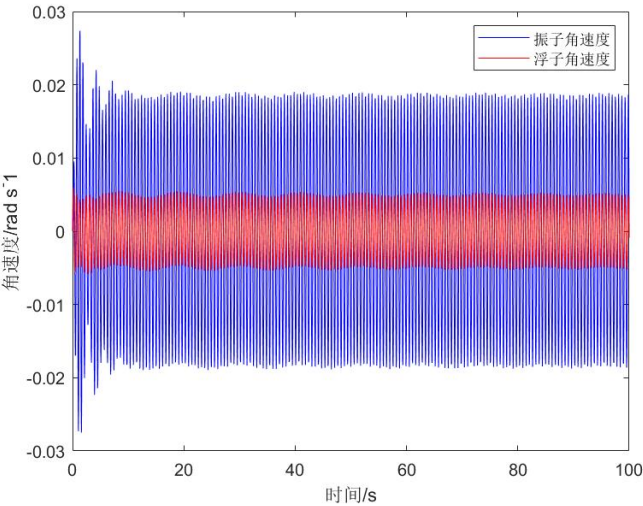


图 30 纵摇角速度

从图中可以看出，浮子与振子的角位移振幅逐渐减小，在 40s 后达稳定。角速度的稳定时间比角位移小。题目中要求的角位移、角速度如下表所示：

表七 垂荡运动

| 时间/s | 浮子角位移/ <i>rad</i> | 振子角位移/ <i>rad</i> | 浮子角速度/ <i>rad * s⁻¹</i> | 振子角速度/ <i>rad * s⁻¹</i> |
|------|----------------------|----------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 10 | 9.37E - 05 | -0.00081 | 0.004425 | 0.014795 |
| 20 | 0.000236 | 0.000481 | 0.005078 | 0.018566 |
| 40 | 8.44E - 05 | 0.000989 | -0.00306 | -0.01023 |
| 60 | -0.00098 | -0.00196 | -0.00257 | -0.01117 |
| 100 | 0.000355 | 0.001616 | -0.00088 | -0.00084 |

八、问题四的模型建立与求解

8.1 模型建立

8.1.1 功能转化分析

此系统的平动与进动均为受迫运动。由于在假设中忽略了摩擦与耗散，无阻尼的理想弹簧系统中，，受力物体在弹簧回复力作用下往复运动，内部重力势能、弹性势能与动能相互转化但能量总量保持不变^[2]，在此情况下系统不会对外输出功。在本问题中，对外输出功来自于阻尼系统，可认为是垂荡阻尼与纵摇阻尼做功的线性叠加。

8.1.2 功率计算

8.1.2.1 垂荡功率

在垂荡过程中，垂荡阻尼系统对外瞬时输出功率为¹²：

$$P_{\text{垂荡}} = B_2(\dot{z} - \dot{h})^2$$

8.1.2.2 纵摇功率

8.1.2.2.1 理论推导

对于纵摇阻尼力矩做功进行如下简要分析：

已知力矩为力到转轴距离与作用力的叉乘^[3]，即

$$\mathbf{J}_F = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

而力矩的瞬时功率可表示为：

$$P_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

在转动过程中有¹³，

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$$

故力矩的瞬时功率可表示为，

$$P_F = \mathbf{J}_F \cdot \boldsymbol{\omega}$$

8.1.2.2.2 本题中

在本问题涉及物理量中， \mathbf{F} 、 \mathbf{r} 、 $\boldsymbol{\omega}$ 方向两两垂直，可以得到纵摇阻尼系统瞬时功率为：

$$P_{\text{纵摇}} = \mathbf{J}_{\text{纵摇}} \cdot (\dot{\alpha} - \dot{\beta}) = B_4(\dot{\alpha} - \dot{\beta})^2$$

功率具有线性可加性，得到整个阻尼系统瞬时输出功率为：

$$P_{\text{总}} = P_{\text{垂荡}} + P_{\text{纵摇}} = B_2(\dot{z} - \dot{h})^2 + B_4(\dot{\alpha} - \dot{\beta})^2$$

其中 B_2 、 B_4 是由笔者调节的与相对运动无关的阻尼系数。平均功率为，

¹² 具体可见前文对问题二的分析与求解

¹³ $\boldsymbol{\omega}$ 即为运动角速度，在本问题中对应 $\dot{\alpha} - \dot{\beta}$

$$\overline{P}_{\text{总}} = \frac{1}{T} \int [B_2(\dot{z} - \dot{h})^2 + B_4(\dot{\alpha} - \dot{\beta})^2] dt \quad (11)$$

其中, T 为选取的积分区间的时间间隔。

8.2 运动微分方程求解

对于问题四中的装置运动, 我们仍沿用问题三中提出的物理模型, 即满足如下运动方程组:

$$(I_{\text{浮子}} + \tilde{I}) \ddot{\alpha} = L \cos \omega t - L_{\text{water}} \alpha - B_3 \dot{\alpha} - k_{\text{扭}}(\alpha - \beta) - B_4(\dot{\alpha} - \dot{\beta})$$

$$I_{\text{振子}} \ddot{\beta} = k_{\text{扭}}(\alpha - \beta) + B_4(\dot{\alpha} - \dot{\beta})$$

$$(M + \tilde{M})(\ddot{z} - z\dot{\alpha}^2) + \rho g A z + k(z - h) + B_2(\dot{z} - \dot{h}) + B_1 \dot{z} = \rho g A x + f \cos \omega t$$

$$m(\ddot{h} - h\dot{\beta}^2) = B_2(\dot{z} - \dot{h}) + k(z - h)$$

对于除 B_2 、 B_4 外常量, 带入题目附件 3 与附件 4 中的数值, 对于 B_2 、 B_4 , 分别对其采取步长为¹⁴1000 从 0 增长到 100000, ¹⁵带入微分方程组求解出(角)位移与(角)速度的数值解后带入功率计算式计算功率以及功率对时间的平均。对于阻尼系数 B_2 不小于 6000, 阻尼系数 B_4 不小于 1000 的系统, 可在 30s 内进入稳定的受迫运动状态。对于小阻尼系统, 在外力作用下可能不能进行稳定的受迫运动, 则阻尼系统不能稳定对外输出功率, 在实际生产生活中不适用于波浪能转化装置, 故在此我们着重考虑非小阻尼系统, 计算微分方程在 0~40s 的数值解, 取功率在 30s—40s 对时间的平均作为平均功率进行比较。

使用 Matlab 求解(求解代码见附录程序 11、12、13), 得到功率 P 与阻尼系数 B_2 、 B_4 的关系如下图所示:

¹⁴ 数字均为在国际标准单位制下的数值

¹⁵ 即选取 $B_2 = 1000, B_4 = 1000, 2000, 3000 \dots$ 代入 B_2 、 B_4 具体值求解微分方程组, 后取 $B_2 = 2000, B_4 = 1000, 2000, 3000 \dots$ 继续代入求解, 即两个阻尼系数均可以有 100 个取值, 得到 100² 个结果。

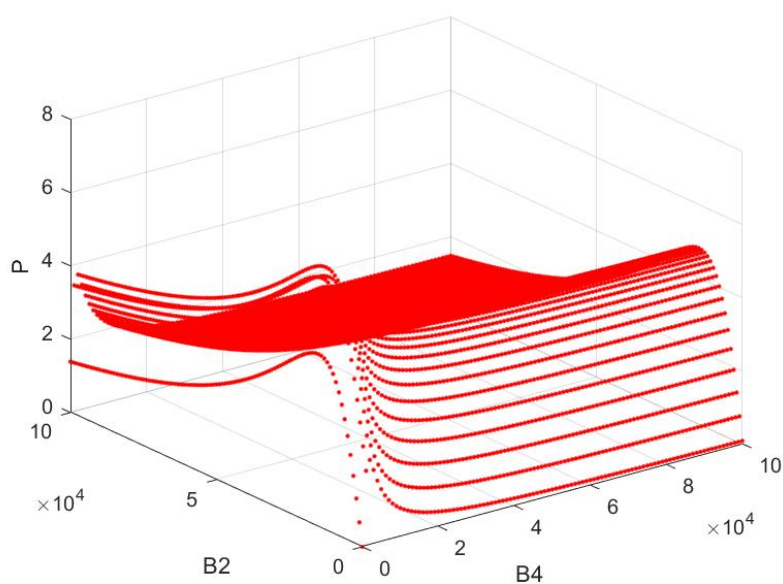


图 31 功率与阻尼系数关系图

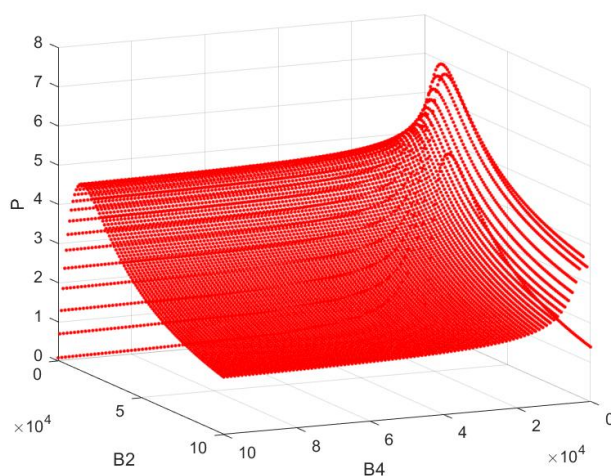


图 32 功率与阻尼系数关系图

8.3 图像分析及优化

对数据及图形分析可知：固定纵摇阻尼力矩系数，平均功率随垂荡阻尼系数增加先增大后减小；固定随垂荡阻尼系数，纵摇阻尼力矩系数小于 20000 时平均功率随系数变化较明显，当其数值大于 20000 时，纵摇阻尼力矩系数改变对平均功率大小几乎无影响。当功率最大时，阻尼系数取值范围为 $14000 < B_2 < 16000$, $1000 < B_4 < 3000$ 。对上述去间分别取步长为 100 进行更精细化的分割，仍使用 *matlab* 计算平均功率，得到更高精度下的平均功率与阻尼系数的关系如下图所示：

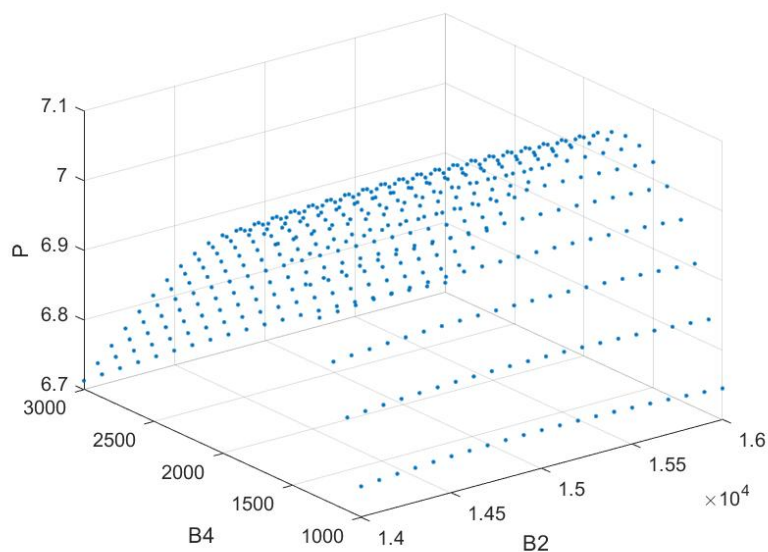


图 33 更高精度下平均功率与阻尼系数关系

8.4 得出最大平均功率及对应条件

在步长为 100 的精度下得到的最大平均功率 $P_{max} = 7.053W$ ，此时对应的阻尼系数分别为：

$$B_2 = 15000 N \cdot s \cdot m^{-1}$$

$$B_4 = 1700 N \cdot m \cdot s$$

九、模型评价

9.1 模型优点

笔者以牛顿第二定律为底层思想，建立了较清晰明了的运动模型，并对垂荡运动模型进行了严谨的力学分析，推导出来运动微分方程。在对问题一的模型修正上考虑了水波对装置运动的影响，更加接近真实情况。在讨论纵摇模型时切入角度明了，在没有杂糅两种运动的情况下对纵摇与垂荡的运动模型进行了较为详尽的分析，并对小转角情况进行了优化，使得微分方程组形式较为简洁，相对易于求解。

9.2 模型不足

在问题二与问题四对功率的计算中，笔者均采用了装置运动较为稳定而非更加严格的稳定状态，在对运动的分析中大都采用 0~100s 时长与 0.2s 的步长，与更长时间或更小时间精度对比图如下：

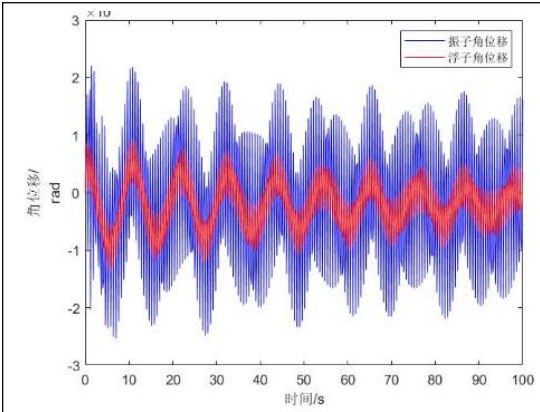


图 34 340~100s 角位移图

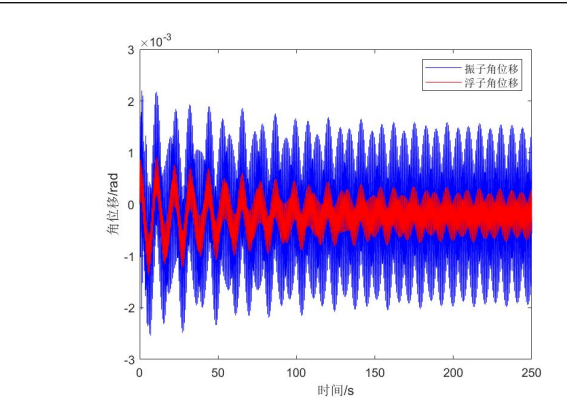


图 35 0~250s 角位移图

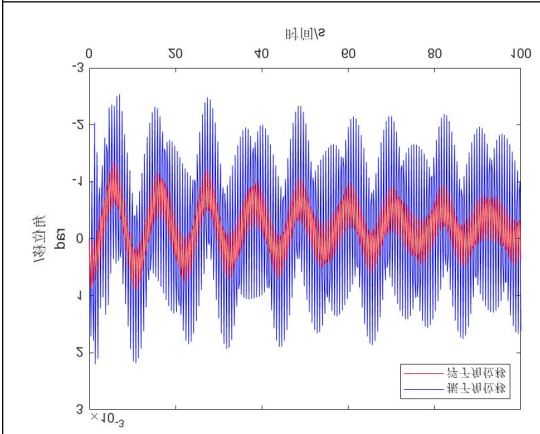


图 36 步长 0.2s 角位移

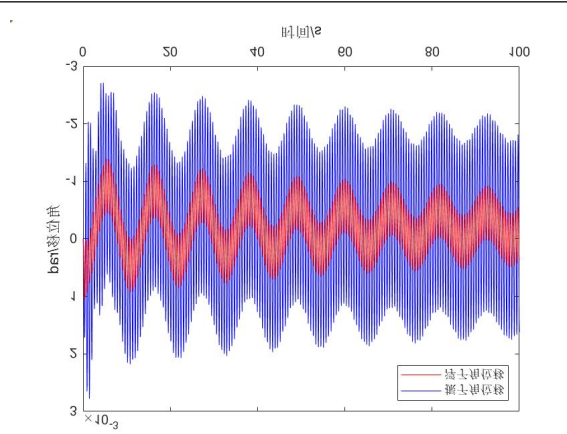


图 37 步长 0.05s 角位移

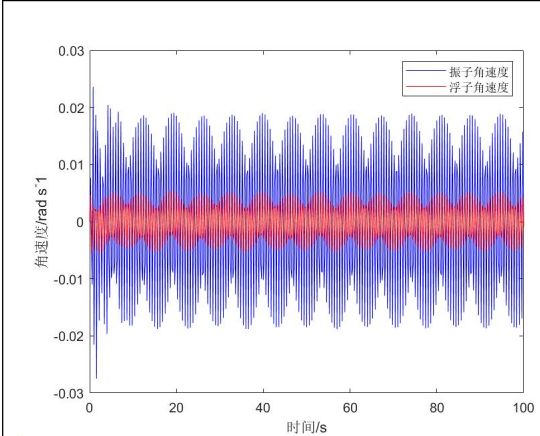


图 38 步长 0.2s 角速度

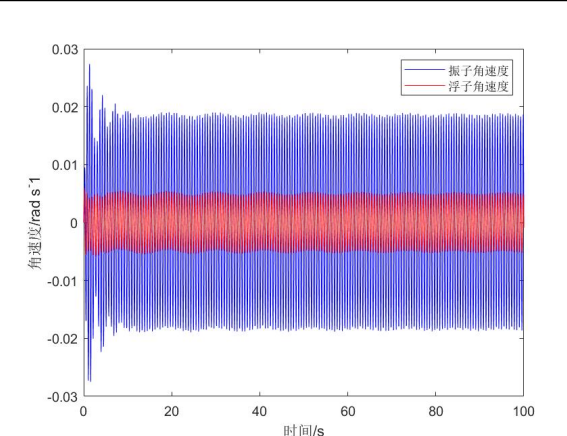


图 39 步长 0.05s 角速度

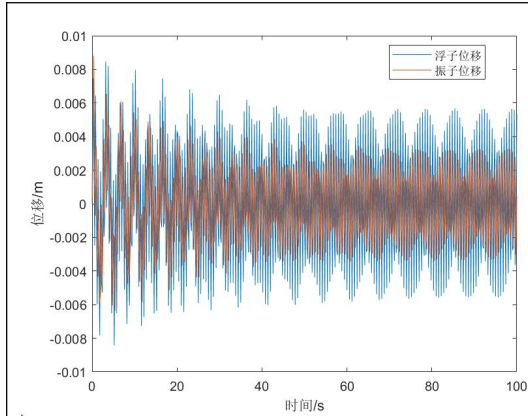


图 40 步长 0.2s 位移

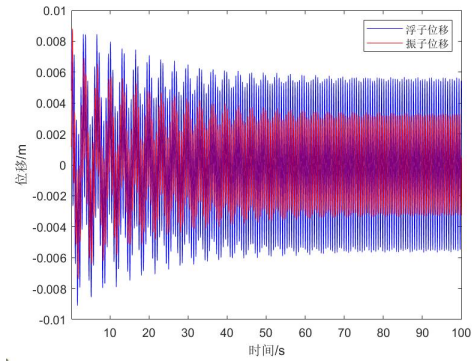


图 41 步长 0.05s 位移

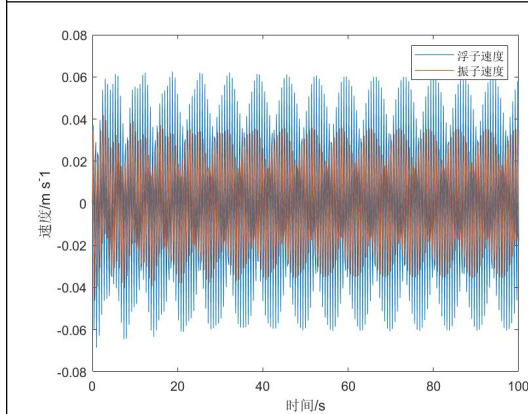


图 42 步长 0.2s 速度

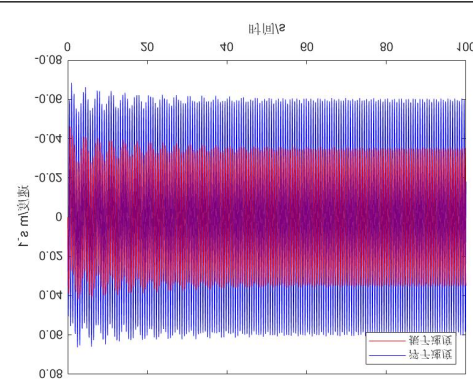


图 43 步长 0.05s 速度

由对比图可以看出，100s 及以后装置达到的运动状态振幅与周期更加稳定，其与装置在生产生活中长时间工作状态更加接近，本文中选取的分析时间较短，可能导致结果上更大的误差存在。此外，当选取的求解时间步长更小时，得到的结果更加接近装置连续运动的真实状态，本文在对模型分析上存在着精确度不够的不足。

9.3 改进方法

在进行计算时可以求解更大时间长度上的数值解，并且选取较长时间的稳定状态进行运动或做功分析。在计算机允许的条件下使用尽可能小的时间步长，以达到逼近装置连续运动的状态。

提出新的算法，在不完全求解微分方程组的情况下计算做功功率，如可以将方程组进行线性运算，得到形如 $(z - h)$ 、 $(\dot{z} - \dot{h})$ 的因子，将其看作整体计算，可以减少方程组个数，在计算能力不变情况下减少求解方程组所需计算量，从而在一定程度上提高时间精度。

9.3 模型展望

由国家统计局数据可知^[4]，我国海域辽阔，领海面积高达 473 万平方公里，假设仅在千分之一海域投放该装置进行发电，且每个装置平均占海域面积 1m^2 ，考虑道各类出海活动影响，认为每天有十小时时间可较为稳定对外输出功，认为阻尼系数为常数，使用第四问中计算得出数据，认为每个装置平均输出功率约为

7W，即 4.73×10^9 个装置每天 10h 以 7W 功率发电，每天可以发电 3.311×10^8 千瓦时，大约可以与一小型城市日用电量持平。^[5] 虽然千分之一海域投放这一估计有些过大，但若波浪能能在未来更好的被人类加以利用，将会在很大程度上缓解能源危机。

十、参考文献

- [1] 王淑婧. 振荡浮子式波浪能发电装置的设计及功率计算分析[D]. 中国海洋大学, 2013.
- [2] 郑永令, 贾起民 等著, 力学[M], 高等教育出版社, 2018.
- [3] 钟锡华, 周岳明 等著, 大学物理通用教程 力学, 北京大学出版社, 2000.
- [4] 中 国 统 计 局
http://www.stats.gov.cn/ztjc/ztsj/hjtjzl/2009/201011/t20101130_70678.html
- [5] 中 国 统 计 局
http://www.stats.gov.cn/ztjc/ztsj/sjzsj/sjz2008/200902/t20090219_66858.html

附录

程序 1:

(程序名: A1_1)

```
function dy=A1_1(t,y)
dy=zeros(4,1);
%y(1)=h,y(2)=z,y(3)=h',y(4)=z'
dy(1)=y(3);%h'
dy(2)=y(4);%z'
dy(3)=(80000*y(2) - 80000*y(1) - 10000*y(3) + 10000*y(4))/2433;
%h''
dy(4)=(6250*cos((2801*pi*t)/1000)-(80000*y(2) - 80000*y(1) + 10045*pi*y(2) -
10000*y(3) +
(46867173955942639*y(4))/4398046511104))/(1704664960639959/274877906944);
%z''

end
```

程序 2:

(程序名: A1_2)


```

function dy = A1_2(t, y)
dy=zeros(4,1);
%y(1)=h,y(2)=z,y(3)=h',y(4)=z'
dy(1)=y(3);%h'
dy(2)=y(4);%z'
dy(3)=(80000*y(2) - 80000*y(1) - 10000*abs(y(3) - y(4))^(1/2)*(y(3) -
y(4)))/2433;
%h''
dy(4)=(6250*cos((2801*pi*t)/1000)-(80000*y(2) - 80000*y(1) - 10000*abs(y(3) -
y(4))^(1/2)*(y(3) - y(4)) + 10045*pi*y(2) +
2886708844902639*y(4)/4398046511104)) / (1704664960639959/274877906944);
%z''
end

```

程序 3:

(程序名: A1_1_x)

```

function dy=A1_1_x(t,y)
dy=zeros(4,1);
%y(1)=h,y(2)=z,y(3)=h',y(4)=z'
dy(1)=y(3);%h'
dy(2)=y(4);%z'
dy(3)=(80000*y(2) - 80000*y(1) - 10000*y(3) + 10000*y(4))/2433;
%h''
dy(4)=(6250*cos((2801*pi*t)/1000)+(2009*pi*sin((2801*pi*t)/1000))/20-(80000
*y(2) - 80000*y(1) + 10045*pi*y(2) - B2*y(3) +
(10000+656.3616)*y(4)))/(1704664960639959/274877906944);
%z''
end

```

程序 4:

(程序名: A1_2_x)

```

function dy = A1_2(t, y)
dy=zeros(4,1);
%y(1)=h,y(2)=z,y(3)=h',y(4)=z'
dy(1)=y(3);%h'
dy(2)=y(4);%z'
dy(3)=(80000*y(2) - 80000*y(1) - 10000*abs(y(3) - y(4))^(1/2)*(y(3) -
y(4)))/2433;
%h''

```

```

dy(4)=(6250*cos((2801*pi*t)/1000)+(2009*pi*sin((2801*pi*t)/1000))/20-(80000
*y(2) - 80000*y(1) - 10000*abs(y(3) - y(4))^(1/2)*(y(3) - y(4)) + 10045*pi*y(2)
+ 2886708844902639*y(4)/4398046511104)) / (1704664960639959/274877906944);
%z''
end

```

程序 5:

(程序名: A2_1)

```

function dy=A2_1(t,y)
dy=zeros(4,1);

B2 = evalin('base', 'B2');
%y(1)=h,y(2)=z,y(3)=h',y(4)=z'
dy(1)=y(3);%h'
dy(2)=y(4);%z'
dy(3)=(80000*y(2) - 80000*y(1) - B2*y(3) + B2*y(4))/2433;
%h''
dy(4)=(4890*cos(2.2143*2*pi*t)+(1025*9.8*pi*0.01*sin(2.2143*2*pi*t))-(80000
*y(2) - 80000*y(1) + 10045*pi*y(2) - B2*y(3) +
(B2+167.8395)*y(4)))/(1165.992+4866);
%z''

end

```

程序 6:

(程序名: A2_1_code)

```

p_val=zeros(101,2);
for ii=0:1000:100000
p_val(1+ii/1000,1)=ii;
B2=ii;
[tlist,vallist]=ode45(@A2_1,[0:0.1:50],[0,0,0,0]);
val_col3=vallist(401:1:500,3);
val_col4=vallist(401:1:500,4);
P=B2*((val_col3-val_col4).^2);
SUM=sum(P);
p_val(1+ii/1000,2)=SUM(1,1)*0.01;
end

```

程序 7:

(程序名: A2_1_accu_code)

```

p_val_accu=zeros(201,2);

```

```

for ii=17000:10:19000
p_val_accu((ii-17000)/10+1,1)=ii;
B2=ii;
[tlist,vallist]=ode45(@A2_1,[0:0.1:50],[0,0,0,0]);
val_col3=vallist(401:1:500,3);
val_col4=vallist(401:1:500,4);
P=B2*((val_col3-val_col4).^2);
SUM=sum(P);
p_val_accu((ii-17000)/10+1,2)=SUM(1,1)*0.01;
end

```

程序 8:

(程序名: A2_2)

```

function dy=A2_2(t,y)
dy=zeros(4,1);

B2 = evalin('base', 'B2');
pow=evalin('base', 'pow');

%y(1)=h,y(2)=z,y(3)=h',y(4)=z'
dy(1)=y(3);%h'
dy(2)=y(4);%z'
dy(3)=(80000*y(2) - 80000*y(1) - B2*(abs(y(3)-y(4)))^pow*(y(3) - y(4)))/2433;
%h''
dy(4)=(4890*cos(2.2143*2*pi*t)+(1025*9.8*pi*0.01*sin(2.2143*2*pi*t))-(80000
*y(2) - 80000*y(1) + 10045*pi*y(2) - B2*(abs(y(3)-y(4)))^pow*(y(3) - y(4)) +
(167.8395)*y(4)))/(1165.992+4866);
%z''

end

```

程序 9:

(程序名: A2_2_code)

```

p_val=zeros(101*101,3);
for ii=0:1000:100000
B2=ii;
for iii=0:1:100
pow=iii*0.01;
[tlist,vallist]=ode45(@A2_2,[0:0.1:40],[0,0,0,0]);
val_col3=vallist(301:1:400,3);
val_col4=vallist(301:1:400,4);
P=B2*(val_col3-val_col4).^2;

```

```

SUM=sum(P);
p_val((ii/1000)*101 + iii+1,1)=B2;
p_val((ii/1000)*101 + iii+1,2)=pow;
p_val((ii/1000)*101 + iii+1,3)=SUM(1,1)*0.01;
end
end

```

程序 10:

(程序名: A3)

```

function dy=A3(t,y)
dy=zeros(8,1);
%y(1)=α y(2)=β y(3)=α'y(4)=β'
%y(5)=z y(6)=h y(7)=z' y(8)=h'
dy(1)=y(3);
dy(2)=y(4);
dy(5)=y(7);
dy(6)=y(8);
dy(3)=(1690*cos(1.7152*2*pi*t)-8890.7*y(1)-654.3833*y(3)-250000*(y(1)-y(2))
-1000*(y(3)-y(4)))/(18044.36+7001.914);
%α''
dy(4)=(250000*(y(1)-y(2))+1000*(y(3)-y(4)))/(1571.3125+3649.9*(y(6)-y(5))+2
433*(y(6)-y(5))^2);
%β''
dy(7)=(1025*9.8*pi*0.01*sin(1.7152*2*pi*t)+3640*cos(1.7152*2*pi*t)-1025*9.8
*pi*y(5)-80000*(y(5)-y(6))-10000*(y(7)-y(8))-683.4558*y(7))/(4866+1028.876)
+y(5)*(y(3))^2;
%z''
dy(8)=(80000*(y(5)-y(6))+10000*(y(7)-y(8)))/2433+y(6)*(y(4))^2;
%h''

end

```

程序 11:

(程序名: A4)

```

function dy=A4(t,y)
dy=zeros(8,1);

B4=evalin('base','B4');
B2=evalin('base','B2');
%y(1)=α y(2)=β y(3)=α'y(4)=β'
%y(5)=z y(6)=h y(7)=z' y(8)=h'
dy(1)=y(3);

```

```

dy(2)=y(4);
dy(5)=y(7);
dy(6)=y(8);
dy(3)=(2140*cos(1.9806*2*pi*t)-8890.7*y(1)-1655.909*y(3)-250000*(y(1)-y(2))
-B4*(y(3)-y(4)))/(18044.36+7142.493);
%α''
dy(4)=(250000*(y(1)-y(2))+B4*(y(3)-y(4)))/(1571.3125+3649.9*(y(6)-y(5))+243
3*(y(6)-y(5))^2);
%β''
dy(7)=(1025*9.8*pi*sin(1.9806*2*pi*t)*0.01+1760*cos(1.9806*2*pi*t)-1025*9.8
*pi*y(5)-80000*(y(5)-y(6))-B2*(y(7)-y(8))-528.5018*y(7))/(4866+1091.099)+y(
5)*(y(3))^2;
%z''
dy(8)=(80000*(y(5)-y(6))+B2*(y(7)-y(8)))/2433+y(6)*(y(4))^2;
%h''

end

```

程序 12:

(程序名: A4_code)

```

p_val=zeros(101*101,3);
for ii=0:1000:100000
B2=ii;
for iii=0:1000:100000
B4=iii;
[tlist,vallist]=ode45(@A4,[0:0.1:40],[0,0,0,0,0,0,0,0]);
val_col3=vallist(301:1:400,3);%alpha
val_col4=vallist(301:1:400,4);%beta
val_col7=vallist(301:1:400,7);%z
val_col8=vallist(301:1:400,8);%h
P=B4*(val_col3-val_col4).^2+B2*(val_col8-val_col7).^2;
SUM=sum(P);
p_val((ii/1000)*101 + iii/1000+1,1)=B2;
p_val((ii/1000)*101 + iii/1000+1,2)=B4;
p_val((ii/1000)*101 + iii/1000+1,3)=SUM(1,1)*0.01;
end
end

```

程序 13:

(程序名: A4_accu_code)

```

p_val_accu=zeros(21*21,3);
for ii=14000:100:16000

```

```

B2=ii;
for iii=1000:100:3000
B4=iii;
[tlist,vallist]=ode45(@A4,[0:0.1:40],[0,0,0,0,0,0,0,0]);
val_col3=vallist(301:1:400,3);%alpha
val_col4=vallist(301:1:400,4);%beta
val_col7=vallist(301:1:400,7);%z
val_col8=vallist(301:1:400,8);%h
P=B4*(val_col3-val_col4).^2+B2*(val_col8-val_col7).^2;
SUM=sum(P);
p_val_accu(((ii-14000)/100)*21 + (iii-1000)/100+1,1)=B2;
p_val_accu(((ii-14000)/100)*21 + (iii-1000)/100+1,2)=B4;
p_val_accu(((ii-14000)/100)*21 + (iii-1000)/100+1,3)=SUM(1,1)*0.01;
end
end

```

转动惯量计算

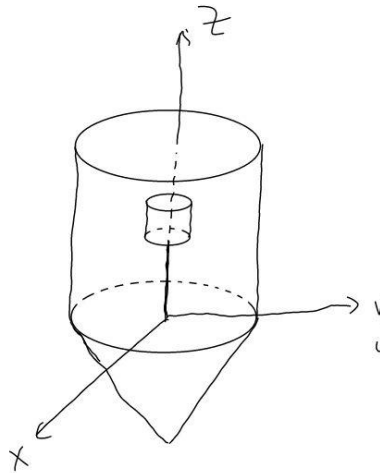


图 44 模型示意图

其中，x 轴为浮子、振子纵摇运动的转轴。

1. 振子转动惯量

振子体密度为 $\rho = \frac{m}{\pi r^2 h_0}$

我们如下图所示截取振子的小体积元进行分析。

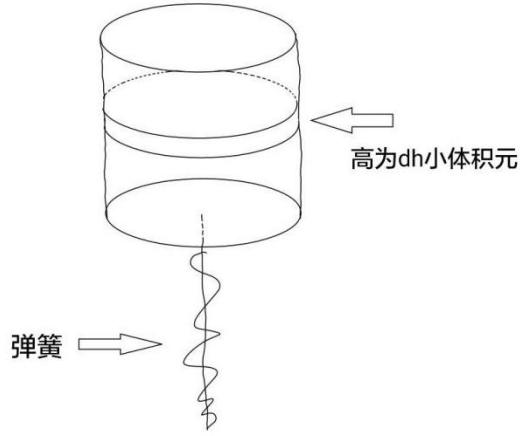


图 45 微元选取示意图

假设小体积元所在平面到旋转轴的距离为 h ，小体积元的高度为 dh ，俯视图如下：

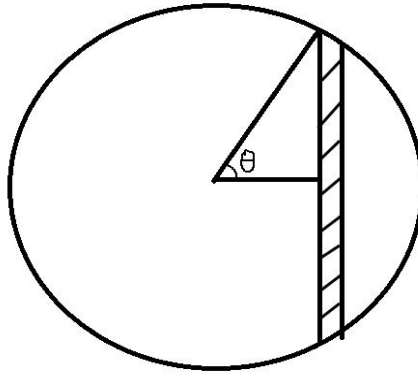


图 46 体积元俯视图

选取图中阴影部分分析。该微元投影到转动平面距离转轴的距离为 $(h^2 + r^2 \cos^2 \theta)$ ， r 为小体积元圆面半径，该微元质量为 $2r \sin \theta \partial r d\theta \sin \theta dh$ ，故小体积元的转动惯量为：

$$I_{dh} = \int_0^\pi (h^2 + r^2 \cos^2 \theta) 2r \sin \theta \partial r d\theta \sin \theta dh$$

对于振子的转动惯量

$$I_{\text{振子}} = \int_l^{l+h_0} I_{dh}$$

即：

$$I_{\text{振子}} = \int_l^{l+h_0} \int_0^\pi (h^2 + r^2 \cos^2 \theta) 2r \sin \theta \partial r d\theta \sin \theta dh$$

$$I_{\text{振子}} = m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h_0^2}{3} + lh_0 + l^2 \right)$$

其中 l 为弹簧长度， h_0 为振子高度。

由于弹簧长度随着运动变化，将其表示为 $l(t) = 0.5 + h(t) - z(t)$ ¹⁶，带入上述积分得到振子转动惯量为：

$$I_{\text{振子}} = 1571.3125 + 3649.9(h - z) + 2433(h - z)^2$$

2. 浮子转动惯量

先将浮子分为三部分：

顶部圆形顶面，面积为 $S_1 = \pi$ ；

圆柱侧面，面积为 $S_2 = 6\pi$ ；

圆锥形底面，面积为 $S_3 = \frac{\sqrt{41}}{5}\pi$ 。

浮子材料的面密度 $\mu = \frac{M}{S_1 + S_2 + S_3}$

对于顶部圆形面，可以参照上述对振子求转动惯量模型，按照类似于上述小体积元的步骤计算。

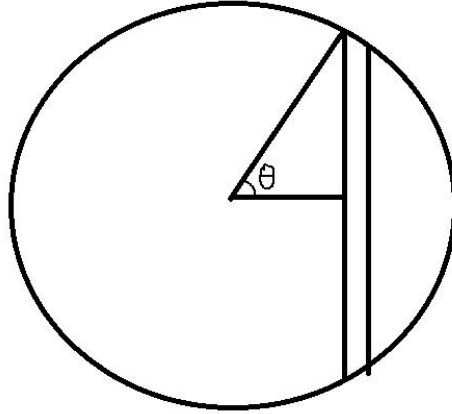


图 47 微元俯视图

截取微元质量为 $2R \sin \theta \mu r d\theta \sin \theta$ ，该微元投影到转动平面距离转轴的距离为 $(H_0^2 + R^2 \cos^2 \theta)$ ， R 为圆面半径， H_0 为圆柱高度。

该部分转动惯量有：

$$I_1 = \int_0^\pi 2R \sin \theta \mu R \sin \theta (H_0^2 + R^2 \cos^2 \theta) d\theta$$

对于圆柱面，可以截取高度为 dH 的微小圆柱体进行分析。俯视图如下

¹⁶ 文中数字均已化成国际标准单位制

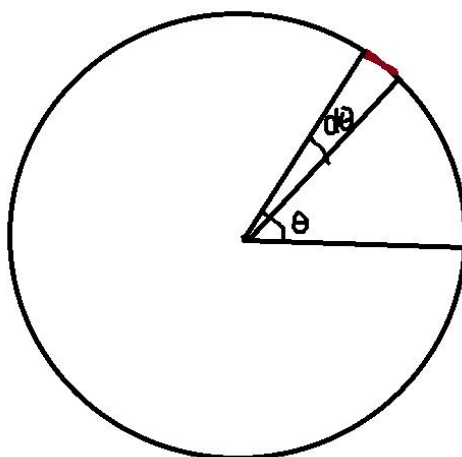


图 48 微小圆柱俯视图

标红部分小微元质量为 $\mu R d\theta dH$ ，微元投影到转动平面距离转轴的距离为 $(H^2 + R^2 \cos^2 \theta)$ ， H 为微圆柱所在平面到转轴的距离。小微圆柱转动惯量为：

$$I_{dh} = \int_0^{2\pi} (H^2 + R^2 \cos^2 \theta) \mu R d\theta dH$$

对于圆柱面转动惯量有：

$$I_2 = \int_0^{H_0} I_{dh}$$

$$I_2 = \int_0^{H_0} \int_0^{2\pi} (H^2 + R^2 \cos^2 \theta) \mu R d\theta dH$$

对于圆锥面仍然可以采用上述方法，截取微小的圆台面来分析问题，需要注意的是微元面积不再等于圆形边长乘以高，而应该是圆形边长乘以圆台母线长度，且随着高度变化，截取的微小圆台底面半径也会随之变化。

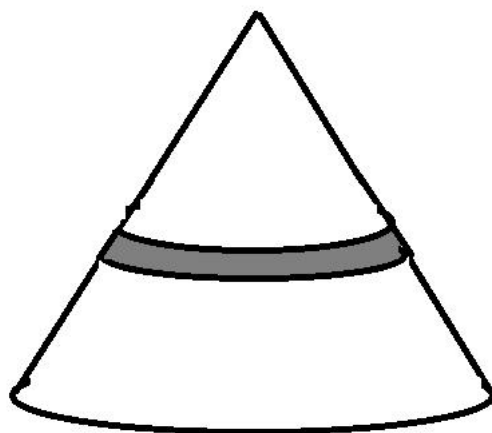


图 49 微小圆台

圆锥高为 H ，微小圆台距离圆锥底部为 h ，底面半径为 R ，有微小圆台半径为 $\frac{H-h}{H}R$ ，有

$$I_{dh} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{41}}{4} (h^2 + (\frac{H-h}{H}R)^2 \cos^2 \theta) \mu R d\theta dh$$

对于整个圆锥面有：

$$I_3 = \int_0^H I_{dh}$$

$$I_3 = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{41}}{4} (h^2 + (\frac{H-h}{H}R)^2 \cos^2 \theta) \mu R d\theta dh$$

经计算得出，浮子转动惯量为：

$$I_{\text{振子}} = I_1 + I_2 + I_3 = 18044.36 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$