



中南大學  
CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

# 本科毕业设计(论文)

## GRADUATION DESIGN (THESIS)

题    目：磁悬浮小球系统智能建  
模与控制设计

学生姓名：王志军

指导教师：彭辉

学    院：自动化学院

专业班级：自动化 1608

本科生院制

2020 年 6 月

# 磁悬浮小球系统智能建模与控制设计

## 摘要

磁悬浮系统具有非线性、响应快、不稳定等特点，基于线性系统的传统控制理论不适用于磁悬浮系统的控制。针对非线性系统的控制问题，已有许多先进的控制方法，如增益规划控制、反馈线性化、H 无穷控制等，这些算法都能取得满意的控制性能，但是它们都需要精确的控制对象模型。实际工业过程中，控制对象的物理模型可能不是那么明确或物理模型的参数容易漂移，容易导致这些控制算法在实际过程中的表现与预想的大相径庭。一种可行的解决方案是只利用对象输入输出历史数据来构建对象模型。本文采用 RBF-ARX 模型来对磁悬浮小球系统进行建模。RBF-ARX 模型是输入输出历史数据驱动的，在局部上是一个线性的模型，全局上表现为非线性模型，因而能够描述非线性系统的动态特性随状态变化的特点。此外，本文基于 RBF-ARX 模型设计了模型预测控制算法，并分析了预测控制参数对控制效果的影响。最后，在 Matlab/Simulink 中完成了控制系统的仿真实验，仿真结果证实了设计方法的有效性。

**关键词：**磁悬浮小球系统 模型预测控制 RBF-ARX 模型 非线性系统

# Intelligent Modeling and Control Design of a Magnetic Levitation Ball System

## ABSTRACT

Applying conventional control methods which are based on linear dynamic systems to magnetic levitation systems can hardly reach a satisfactory control performance, resulting from the inherent instability and nonlinearity of magnetic levitation systems. There are many advanced control methods, such as Gain-Scheduled Control, Feedback Linearization,  $H_\infty$  Control, for nonlinear dynamic systems. And these methods may achieve satisfactory control performance in a laboratory environment. However, they all need the knowledge of the physic model of the plant to be controlled. In the actual industrial process, the physical model of the plant may not be so explicit or the parameters of the physical model are easy to drift, thus it will result in bad performance. A feasible solution is to use the historical data of plant input and output data to build the model. In this paper, RBF-ARX model is used to model a magnetic levitation ball. RBF-ARX model is supported by historical data of plant input and output, and it is locally linear, but globally nonlinear. Therefore, it can reflect the characteristic that the dynamic of nonlinear systems changes with system states. In addition, a model predictive control method is designed based on RBF-ARX model, and the influence of parameters of the predictive control method is analyzed. Finally, the simulation of the control system is implemented in Matlab/Simulink, and the simulation result is obtained, which illustrates the effectiveness of the design approach.

**Key words:** Magnetic Levitation Ball System    Model Predictive Control

RBF-ARX    Nonlinear Dynamic System

## 目录

摘要.....	1
<b>ABSTRACT</b> .....	2
第 1 章 绪 论.....	5
1.1 课题研究背景及其意义.....	5
1.2 国内外研究现状.....	6
1.2.1 非线性系统控制方法.....	6
1.2.2 非线性系统建模方法.....	10
1.3 毕业设计内容要求.....	12
1.4 本文所做的工作.....	13
第 2 章 基于输入输出历史数据的黑箱建模.....	14
2.1 线性离散系统的自回归模型及其辨识.....	14
2.2 非线性离散系统的 ARX 模型 .....	16
2.3 RBF-ARX 模型 .....	17
2.4 RBF-ARX 模型的辨识 .....	19
第 3 章 模型预测控制.....	23
3.1 基于线性 ARX 模型的预测控制 .....	23
3.2 基于 RBF-ARX 模型的预测控制 .....	25
3.3 运行速度的提升.....	26
第 4 章 基于 RBF-ARX 模型的磁悬浮小球系统建模 .....	27
4.1 磁悬浮小球系统的物理模型.....	27
4.2 磁悬浮小球系统的 RBF-ARX 模型 .....	28
4.3 磁悬浮小球系统 RBF-ARX 模型辨识 .....	29
第 5 章 基于 RBF-ARX 模型的磁悬浮小球预测控制 .....	34
5.1 预测控制器的分析和设计.....	34
5.2 稳态误差的减小.....	36
小结.....	39

致 谢.....	41
参考文献.....	42

## 第1章 绪 论

### 1.1 课题研究背景及其意义

电流通过导线时会产生磁场，根据毕奥-萨伐尔定律产生的磁场强度与通过导线的电流成正比。当导线被绕成一个线圈时，电流产生的磁场通过线圈的中心集中起来。通过改变电流的大小可以操纵磁场强度的大小，进而可以调整磁性物体所受到的磁力，使其与重力相抵消，让磁性物体稳定地悬浮在空中，达到悬浮的目的。这种技术被称为磁悬浮技术（Electromagnetic Suspension）。

随着全球经济的发展，地区之间的来往日益频繁，提高交通运输速度已成为经济发展的必然需求。磁悬浮技术因为能够避免机械摩擦，应用于磁悬浮列车（Maglev），磁悬浮列车的地位在高速地面交通运输系统中越来越重要。磁悬浮列车的加速能力和减速能力均比传统列车快得多，唯一的实际应用限制就是乘客的安全性和舒适性。在国外，磁悬浮列车的研究起步较早，并且已经取得许多瞩目的成就。如日本爱知高速交通东部丘陵线磁悬浮轨道<sup>[1]</sup>。

此外，磁性轴承（Active Magnetic Bearing）在制造业有广泛的应用。磁性轴承可以用磁场支撑负载，并允许支撑物件做相对运动。例如，磁性轴承可以支撑一个旋转的轴，并且没有机械摩擦。磁性轴承支撑物件无摩擦以及无需润滑和在真空中能运行的特点使其广泛应用于压缩机、涡轮机、泵、电机和发电机<sup>[2]</sup>。

在数学上，非线性系统指系统输出的变化不与输入的变化呈现简单的比例关系。非线性问题引起了工程师和数学家的兴趣，因为在自然界大多数系统在本质上都是非线性的。磁悬浮系统是一个典型的非线性动态系统，具体地说，系统中物体受到的磁力与电路电流和间隙的关系是非线性的。非线性动态系统的控制问题不存在通用的理论，某些方法如李雅普诺夫稳定性理论（Lyapunov Stability Theory）和描述函数法（Describing Functions）只适用于一些特定的非线性系统。因而，研究磁悬浮小球的控制问题在非线性系统控制领域上具有重要意义。

磁悬浮系统等动态系统的建模有主要有三种方式。第一种是对系统做出合理的简化和假设，利用物理定律和已知物理参数得到其动态模型，但有时候建立精确的物理模型来描述系统内部的动态行为比较困难，其原因是系统结构模糊复杂。第二种是同样利用物理定律得到动态模型，但系统参数的直接测量值误差大，这时可以利用系统状态历史数据来估计系统参数。这种方法一般会比第一种可靠，因为它受到实际数据的支持。第三种完全无视系统的内部行为，利用神经网络、多项式等来拟合输入输出历史数据。磁悬浮系统因其磁饱和、易受外界扰动等因素，对其建模的研究在非线性系统的辨识问题上具有重要意义。

## 1.2 国内外研究现状

### 1.2.1 非线性系统控制方法

非线性系统因其动态特性与状态有关，故基于线性系统传统控制技术不能用于非线性系统的控制。但若已知系统某一瞬时的状态，则可根据系统的非线性模型基于泰勒展开导出系统在该时刻下瞬时线性模型。Kim 等根据磁悬浮小球系统的物理模型设计了增益规划控制（Gain-Scheduled Control）算法<sup>[3]</sup>。增益规划控制利用系统非线性因素的泰勒展开得到非线性系统的局部线性模型，针对该局部模型基于传统控制理论设计控制器<sup>[3][4]</sup>。在实际设计过程中，通常是事先设定很多组工作点，然后对每个工作点设计不同的 PID 控制器，再把控制参数储存在线性查找表中。PID 控制器的个数会随着线性化需要的状态变量个数（最多不超过系统阶数）增加呈几何级数增长。状态变量有时直接测量，有时通过状态观测器估计。

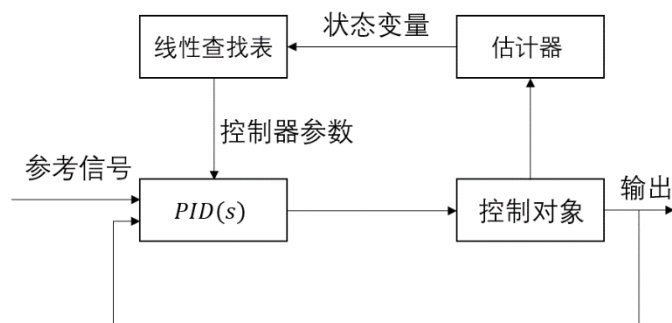


图 1-1 增益规划控制

增益规划控制工作点设定的越密集，控制效果越好，但控制参数占用的储存空间也越大。增益规划控制没有在根本上消除非线性因素，因而若系统远离工作点太远，控制性能会大大劣化。但即便如此，增益规划控制在非线性系统的控制问题上仍应用广泛。

为了获得对非线性系统全局一致的控制性能，反馈线性化（Feedback Linearization）技术被提出，并被 Trumper 应用于磁悬浮小球系统的控制<sup>[4]</sup>。反馈线性化利用了系统的全局非线性描述，使用状态反馈和非线性变换消除系统非线性因素，使系统等效为一个线性系统。一般而言，非线性系统为伴随形式（Companion Form）或可通过换元化为伴随形式：

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(X) + b(X)u \\ X = (x \quad \dot{x} \quad \dots \quad x^{(n-1)})^T \end{cases} \quad (1-1)$$

其中， $x^{(n)}$ 是 $x$ 的 $n$ 阶导数， $u$ 是输入， $x$ 是输出， $f(\cdot)$ 和 $b(\cdot)$ 是非线性运算。将式（1-1）写成状态空间形式。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(X) + b(X)u \end{pmatrix} \quad (1-2)$$

此时，设

$$v = f(X) + b(X)u \quad (1-3)$$

从式（1-2）和式（1-3）可看出若输入为 $v$ ，则该系统为 $n$ 阶线性系统。

$$\dot{x}^{(n)} = v \quad (1-4)$$

因而图 1-2 中控制方法能够实现该系统的线性化控制。

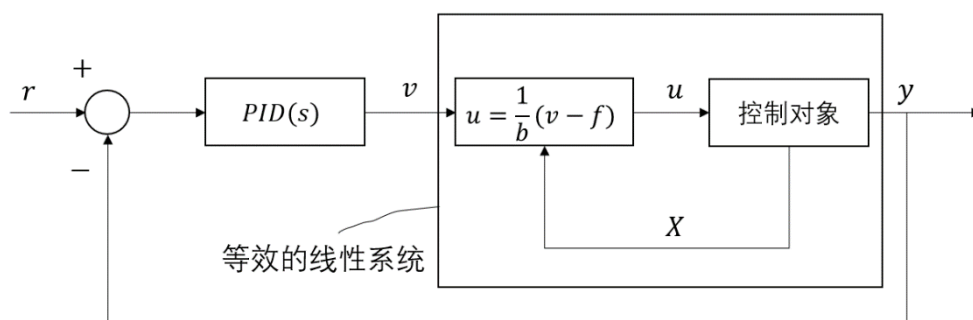


图 1-2 反馈线性化控制

其中

$$u = \frac{1}{b(X)} (v - f(X)) \quad (1-5)$$



由式(1-3)得来。从图1-2中可看出反馈线性化技术利用状态反馈将非线性系统化为一个 $n$ 阶积分环节,因而反馈线性化完全消除了非线性因素,在全局上能够获得一致的控制性能。在式(1-5)中,若 $b=0$ ,则 $u$ 为无穷大,实际过程中,对 $u$ 会有上下界限制。值得注意的是,反馈线性化是利用了系统的内部特性消除了非线性,故应用反馈线性化时,需要非常精确的数学模型。此外,从式(1-5)可看出,反馈线性化通常要求系统全状态可测量。

N.Boonsatit 等将滑模控制(SMC, Sliding Mode Control)应用于磁悬浮小球系统<sup>[5]</sup>。滑模控制能够使系统状态在相平面以人为设定的轨迹(滑模面)运动到平衡点。设单输入单输出非线性动态系统可用状态空间描述为

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ G(X, u) \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

其中,  $G(\cdot)$ 为非线性运算。可设计滑模面:

$$\begin{cases} s = CX \\ C = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n) \\ X = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \end{cases} \quad (1-7)$$

其中,  $n$ 为系统的阶数,  $C$ 为常数向量。若 $s \rightarrow 0$ , 则有

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \rightarrow 0 \quad (1-8)$$

将式(1-8)化成关于 $x_1$ 的式子:

$$c_1 x_1 + c_2 \dot{x}_1 + \cdots + c_n x^{(n-1)} \rightarrow 0 \quad (1-9)$$

可配置常数向量 $C$ 使式(1-9)的特征方程具有特定的根:

$$\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n | \text{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (1-10)$$

式(1-10)保证了式(1-9)的解是稳定的, 式(1-9)的时域解为:

$$x_1 = r_1 e^{\lambda_1 t} + r_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + r_n e^{\lambda_n t} \quad (1-11)$$

其中,  $r_1, r_2, \dots, r_n$ 为待定系数。此时有

$$\begin{cases} x_2 = \dot{x}_1 = r_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + r_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + r_n \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots \\ x_n = x^{(n-1)} = r_1 \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} + r_2 \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} + \cdots + r_n \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{cases} \quad (1-12)$$

从式(1-11)和式(1-12)可看出若 $t \rightarrow \infty$ 则 $X \rightarrow \mathbf{0}$  ( $\mathbf{0}$ 表示元素全为0的矩阵), 系统达到稳定点。要使式(1-11)和式(1-12)近似成立, 须使 $s \rightarrow 0$ , 故这实际上是 $s$ 的控制问题。 $s$ 的控制律一般设计为如下的形式:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\varepsilon \operatorname{sgn}(s), \varepsilon > 0 \\ \dot{s} = -\varepsilon \operatorname{sgn}(s) - ks, \varepsilon > 0, k > 0 \\ \dot{s} = -k|s|^\alpha, k > 0, 0 < \alpha < 1 \\ \operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1, s > 0 \\ -1, s < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1-13)$$

式(1-13)中三种控制律都能使 $s \rightarrow 0$ ，并且 $s$ 在 $s = 0$ 时是稳定的，可用李雅普诺夫函数稳定性理论证明。取李雅普诺夫函数

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2 \quad (1-14)$$

根据李雅普诺夫稳定性定律，当 $V(s)$ 满足式(1-15)时，系统稳定<sup>[6]</sup>。

$$\begin{cases} \lim_{|s| \rightarrow \infty} V(s) = \infty \\ \dot{V}(s) < 0, s \neq 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

显然式(1-14)满足第一个条件，对于第二个条件，若取式(1-13)中的第一个趋近律，有

$$\dot{V}(s) = \frac{d\left(\frac{1}{2}s^2\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}s^2\right)}{ds} \frac{ds}{dt} = s\dot{s} = -s\varepsilon \operatorname{sgn}(s) = -\varepsilon|s| < 0 \quad (1-16)$$

故第二个条件也满足，故 $s$ 在 $s = 0$ 时是稳定的。此时

$$\dot{s} = C\dot{X} = c_1x_2 + c_2x_3 + \cdots + c_{n-1}x_n + c_nG(X, u) = -\varepsilon \operatorname{sgn}(s) \quad (1-17)$$

通过式(1-17)解得 $u$ ，可以得到原来非线性系统的滑模控制量。从式(1-13)可看出 $s$ 的导数并不连续，而是在一个正值和负值之间频繁切换。这会导致 $s$ 不断在 $s = 0$ 处振动，从而在相平面(Phase Plane)上，状态轨迹将不会完美地贴合预设的轨迹，而是在其上下振动。以二阶系统为例，状态在相平面上的运动情况如图 1-3 所示。

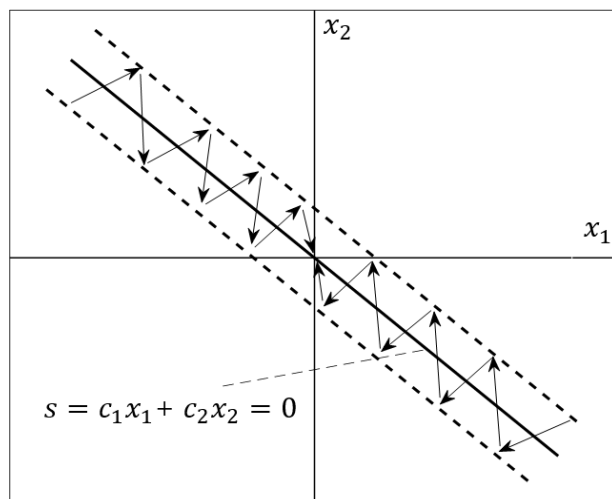


图 1-3 滑模控制中状态在相平面上的运动轨迹

图 1-3 中虚线所包络的范围是为了使式 (1-11) 与 (1-12) 近似成立。状态的不间断在实际过程中会造成控制对象抖振，这常常对设备是有害的。如在加工机床中，若机械齿轮不断抖振，会造成设备的磨损和老化，抖振是滑模控制在实际应用中的主要限制之一。此外，式 (1-17) 中包含了状态变量  $X$ ，故滑模控制也通常要求全状态可测量。

Lairi 等在磁悬浮小球系统的 PID 控制系统中加入了一个 BP 神经网络作为前馈控制器以获取可靠的性能<sup>[7]</sup>。神经网络因其强大非线性逼近能力受到了广泛的应用。对于非线性离散系统，其系统输出与历史时刻的输入和输出有关，并且呈非线性关系。

$$y(k+1) = f(y(k), y(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots) \quad (1-18)$$

式 (1-18) 的逆模型为

$$y(k) = f^{-1}(y(k+1), y(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots) \quad (1-19)$$

故可以用 BP 神经网络拟合式 (1-19)，得到控制对象的逆模型以用于控制系统设计。使用式 (1-19) 作为前馈控制器时，由于未知  $y(k+1)$ ，故不能实现控制。这时可以设法估计  $y(k+1)$  的值，如再用一个 BP 神经网络拟合式 (1-18)，得到控制对象模型以预测  $y(k+1)$  的值。

### 1.2.2 非线性系统建模方法

非线性系统区别于线性系在于它们内部变量的关系更为复杂，对非线性系统的建模有多种方式。机理建模（也称白箱建模，White-Box Modeling）是一种解决非线性建模问题的有效方法：通过自然科学和社会科学定律和经验，研究非线性系统内部组成成分

和变量间的物理关系，建立代数方程和微分方程等数学模型来实现对非线性系统的分析和建模。有时现实系统存在很多影响参数的因素，直接测量的数据可能会有很大误差，这时可以基于状态数据去估计系统的参数（灰箱建模，Grey-Box Modeling）。如 Baechle 等用最小二乘法（Least Square Method）辨识了磁悬浮系统的电子和机械子系统的未知参数<sup>[8]</sup>。

实际上，若能获取系统输入输出历史数据，则可以应用系统辨识的方法获得模型的结构和参数。对于线性动态系统的辨识，理论和方法已经成熟，辨识相对简单。对于非线性动态系统，方法不一，不同的方法适用于不同的情况。神经网络因其能以任意精度逼近任意函数，在非线性系统的辨识上有很广泛的应用。特别地，RBF 网络已被证明是最优的非线性函数逼近网络，其收敛速度快，精度高<sup>[9]</sup>。RBF 网络在预测和拟合上做的很好，缺点其结构特点决定了它不能应用于控制系统的分析。

对于非线性回归，多项式拟合被广泛采用。多项式拟合通过增加维数来获得更好的非线性数据拟合效果，但常常会出现欠拟合和过拟合的情况。局部加权线性回归（Local Linear Regression）很好地解决了这个问题<sup>[10]</sup>，局部加权线性回归仍采用最小二乘法，与普通的最小二乘法不同的是它在目标函数上乘了一个高斯核函数（也称径向基函数，Radial Basis Function）作为权值，即对于距离预测点较近的值，赋予其较大的权值，对于距离预测点较远的值，赋予其较小的权值，局部加权线性回归只响应预测点附近的样本数据。缺点是每做一次预测都要执行一次最小二乘法。将局部加权线性回归的思路应用于非线性系统辨识似乎是可行的，但每做一次预测就执行最小二乘法的机制可能会在实时系统中拖慢执行速度，并且局部加权线性回归的执行速度随样本数的增加呈几何级数增长。因此，局部加权线性回归不太适用于非线性动态系统辨识。

Hajjaji 和 Ouladsine 在磁悬浮小球系统的建模中进行了精确的电磁学理论上的讨论，并指出磁力与间隙并不是简单的平方反比关系，而是存在更为复杂的非线性关系。Hajjaji 和 Ouladsine 用一个多项式去描述一部分的非线性关系，将复杂的非线性关系简化（没有损失任何精度），并通过最小二乘法确定了多项式的系数，最后设计了反馈线性化控制算法，取得了很好的控制效果，验证了这种建模方法是可靠的<sup>[11]</sup>。

Takagi-Sugeno 模糊系统被提出来并应用于非线性系统的建模，并取得了很好的效果<sup>[12]</sup>，但 Takagi-Sugeno 模糊系统缺乏有效的学习机制。J-S.R.Jang 基于 Takagi-Sugeno 模

糊系统提出了自适应模糊神经网络（ANFIS, Adaptive Network-based Fuzzy Inference System）<sup>[13]</sup>，将神经网络和模糊系统的优点结合起来，实现了 Takagi-Sugeno 模糊系统的自学习能力。自适应模糊神经网络为非线性系统建模提供了一个可靠的工具。

Peng 等在磁悬浮小球系统的辨识上使用了 RBF-ARX (RBF network-style coefficients AutoRegressive model with eXogenous variables) 模型<sup>[14]</sup>。其原理是非线性系统在每一个特定的状态总能根据泰勒展开得到其线性模型。故在全局上，非线性系统具有与线性自回归模型（ARX, AutoRegressive model with eXogenous variables）相似的表达，只不过变量的系数是状态的函数。利用 RBF 网络来拟合系数和状态的函数关系就构成了 RBF-ARX 模型。此外，SNPOM 方法（结构化非线性参数优化方法，Structured Nonlinear Parameter Optimization Method）被提出用来训练一类 RBF 网络模型<sup>[15]</sup>。SNPOM 将待优化参数分为线性参数和非线性参数，针对线性参数采用线性优化策略，速度较快，针对非线性参数采用非线性优化策略，速度较慢。SNPOM 已被仿真实验证明优于单独的非线性优化算法。

### 1.3 毕业设计内容要求

- 阅读相关教材、论文和资料，了解与本设计任务相关的国内外发展状况。在消化整理有关文献资料的基础上，撰写一份 15 页以上的调研报告（包括国内外研究现状、存在的问题、应用前景、初步设计方案构思等内容）；翻译一篇国际知名刊物或杂志上发表的与本设计相关的英文论文（英译中不少于 5000 字）；以培养独立查阅文献资料、设计/开发解决方案、团队合作、沟通、终身学习的能力。
- 以磁悬浮小球为对象，采样历史数据构建描述系统动态特性的智能模型，开发基于该模型的控制方法，以实现磁悬浮小球的位置跟踪控制。要求采用 Matlab 或 C++ 语言等编制控制界面、建模及控制程序实现对磁悬浮小球位置的自动控制。
- 采用深度学习方法，设计深度神经网络模型，对磁悬浮小球位置动态变化过程相关变量的动态关系特性进行建模。首先挑选适合建模的训练数据和测试数据，对设计的深度学习模型进行训练与测试，要求建模误差小于 5%。控制界面上要

求能显示实时数据；并显示实时趋势曲线或以动态画面显示小球位置，并能在  
线修改系统参数。

- 运用 C++ 进行编程，实现对数据进行预处理、进行深度神经网络模型参数的优化。
- 开发基于智能模型的控制算法，实现对小球位置的跟踪控制，要求位置控制误差不超过设定值的 5% 并在监控界面上显示。
- 撰写毕业设计论文，要求概念正确、层次清晰、逻辑性强；文笔流畅、书写工整、图表规范，符合《毕业设计指导书》指定的格式要求；完成毕业设计论文答辩，按照评审意见修改并完善毕业设计论文。

#### 1.4 本文所做的工作

本文使用了 RBF-ARX 模型来建模磁悬浮小球系统，并使用 SNPOM 算法来训练 RBF-ARX 模型。然后基于 RBF-ARX 模型设计了模型预测控制算法，用以验证 RBF-ARX 模型的有效性。此后，分析了预测控制参数对控制性能的影响，最后剖析了预测控制稳态误差的来源，并提出了一些改进措施。

## 第2章 基于输入输出历史数据的黑箱建模

在许多情况下, 系统的内部结构和参数未知, 但可以通过某些手法获得系统的输入输出历史数据, 基于输入输出历史数据来估计系统的模型和参数就称为黑箱建模(Black-Box Modeling)。

### 2.1 线性离散系统的自回归模型及其辨识

线性动态系统(这里指线性时不变系统, LTI, Linear Time-Invariant System)是对现实物理行为的数学抽象或理想化, 线性系统通常表现出比非线性系统简单得多的特征和性质。在数学上, 线性连续系统由常微分方程描述, 线性离散系统由常系数差分方程描述。研究线性系统的特征和性质对非线性系统的理解具有重要意义。

对于线性离散系统, 系统当前时刻的输出与过去时刻的输出和输入有关, 并且呈线性关系。在不考虑噪声和干扰的情况下, 线性系统的动态特性可由下式描述:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_y} a_i y(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u} b_j u(k-j) \quad n_y, n_u \in N_+ \quad (2-1)$$

其中 $y(k)$ 和 $u(k)$ 表示系统第 $k$ 时刻的输出和输入,  $a_i$ 和 $b_j$ 是常数,  $n_y$ 和 $n_u$ 表示分别表示 $y$ 和 $u$ 的阶数。 $a_i, b_j, n_y$ 和 $n_u$ 取决于系统的结构与参数。式(2-1)被称为自回归模型。

设系统的自回归模型线性系数为

$$\begin{cases} A = (a_1, a_2, \dots, a_{n_y})^T \\ B = (b_1, b_2, \dots, b_{n_u})^T \end{cases} \quad (2-2)$$

若有系统输入输出数据样本:

$$\begin{cases} U = \{u(1), u(2), \dots, u(n)\} \\ Y = \{y(1), y(2), \dots, y(n)\} \end{cases} \quad (2-3)$$

其中,  $U$ 是输入样本,  $Y$ 是输出样本,  $n$ 是样本长度。基于式(2-3)去估计式(2-2)中的线性系数可采用最小二乘法<sup>[10]</sup>。

设有 $l$ 元线性回归方程:



$$X\beta = V, X \in R^{1 \times l}, \beta \in R^{l \times 1}, V \in R \quad (2-4)$$

其中， $\beta$ 是待优化的参数。

设有数量为 $m$ 的样本，记为

$$X_s = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}, V_s = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix} \quad (2-5)$$

根据最小二乘法，有

$$\hat{\beta} = \min_{\arg \beta} (X_s \beta - V_s)^T (X_s \beta - V_s) \quad (2-6)$$

求导化简可得

$$\hat{\beta} = (X_s^T X_s)^{-1} X_s^T V_s \quad (2-7)$$

$\hat{\beta}$ 是在最小二乘意义上使式(2-4)拟合式(2-5)的最佳估计值。则对式(2-2)的估计，根据自回归模型的结构特点可以构造矩阵如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} U_s = \begin{pmatrix} y(d+1) & y(d) & \cdots & y(d-n_y+1) & u(d+1) & u(d) & \cdots & u(d-n_u+1) \\ y(d+2) & y(d+1) & \cdots & y(d-n_y+2) & u(d+2) & u(d+1) & \cdots & u(d-n_u+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(n-1) & y(n-2) & \cdots & y(n-n_y-1) & u(n-1) & u(n-2) & \cdots & u(n-n_u-1) \end{pmatrix} \\ Y_s = \begin{pmatrix} y(d+2) \\ y(d+3) \\ \vdots \\ y(n) \end{pmatrix} \\ d = \max\{n_y, n_u\} \end{array} \right. \quad (2-8)$$

显然 $U_s$ 和 $Y_s$ 满足

$$U_s \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = Y_s \quad (2-9)$$

这是一个关于 $U_s$ 的 $n_u + n_y$ 元线性回归方程，根据最小二乘法式(2-7)有

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = (U_s^T U_s)^{-1} U_s^T Y_s \quad (2-10)$$

则 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 是系统自回归线性模型的最小二乘意义下的最佳估计值。

从以上分析可知，应用最小二乘去估计线性自回归模型的参数，需要事先已知系统的输入输出阶数。系统阶数可以应用物理知识确定，也可以试探，也能运用冲击响应法等方法确定。



## 2.2 非线性离散系统的 ARX 模型

现实物理世界中大部分系统是非线性动态系统，它们有时不能抽象为线性系统。非线性系统各变量与输出的关系不再是简单的比例关系，并且各变量相互耦合，相互影响，给非线性系统的辨识带来了挑战。对非线性系统辨识和控制的研究是控制领域中的一个重要课题。

对于非线性离散系统，线性自回归模型将不适用，系统可由非线性自回归模型（NARX, Nonlinear ARX）描述：

$$y(k) = f(y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_y), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_u)) \quad (2-11)$$

令

$$\mathbf{W}(k-1) = (y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_y), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_u))^T \quad (2-12)$$

假设非线性映射 $f$ 是处处可微的，则其在 $\mathbf{W}_0$ 处的泰勒展开为<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned} y(k) = f(\mathbf{W}(k-1)) &= f(\mathbf{W}_0) + f'(\mathbf{W}_0)^T(\mathbf{W}(k-1) - \mathbf{W}_0) \\ &+ \frac{1}{2}(\mathbf{W}(k-1) - \mathbf{W}_0)^T f''(\mathbf{W}_0)(\mathbf{W}(k-1) - \mathbf{W}_0) \\ &+ \dots + R(\mathbf{W}(k-1)) \end{aligned} \quad (2-13)$$

$R(\mathbf{W}(k-1))$ 是 $f$ 泰勒展开的余项，且 $\mathbf{W}(k-1)$ 在 $\mathbf{W}_0$ 的邻域内。令

$$\begin{cases} \varphi_0 = f(\mathbf{W}_0) - f'(\mathbf{W}_0)^T \mathbf{W}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{W}_0^T f''(\mathbf{W}_0) \mathbf{W}_0 + \dots \\ \varphi_1(\mathbf{W}(k-1)) = R(\mathbf{W}(k-1)) \\ \Phi_0 = f'(\mathbf{W}_0)^T - \frac{1}{2} \mathbf{W}_0^T f''(\mathbf{W}_0) - \frac{1}{2} f''(\mathbf{W}_0) \mathbf{W}_0 + \dots \\ \Phi_1(\mathbf{W}(k-1)) = \frac{1}{2} \mathbf{W}(k-1)^T f''(\mathbf{W}_0) + \dots \end{cases} \quad (2-14)$$

则式（2-13）可以写成关于 $\mathbf{W}(k-1)$ 的函数

$$y(k) = (\varphi_0 + \varphi_1(\mathbf{W}(k-1))) + (\Phi_0 + \Phi_1(\mathbf{W}(k-1))) \mathbf{W}(k-1) \quad (2-15)$$

令

$$\begin{cases} \varphi_0 + \varphi_1(\mathbf{W}(k-1)) = \phi_0(\mathbf{W}(k-1)) \\ \Phi_0 + \Phi_1(\mathbf{W}(k-1)) = [\phi_{y,1}(\mathbf{W}(k-1)), \phi_{y,2}(\mathbf{W}(k-1)), \dots, \phi_{y,n_y}(\mathbf{W}(k-1)), \\ \phi_{u,1}(\mathbf{W}(k-1)), \phi_{u,2}(\mathbf{W}(k-1)), \dots, \phi_{u,n_u}(\mathbf{W}(k-1))] \end{cases} \quad (2-16)$$

则式 (2-15) 可以写成

$$y(k) = \phi_0(\mathbf{W}(k-1)) + \sum_{i=1}^{n_y} \phi_{y,i}(\mathbf{W}(k-1))y(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u} \phi_{u,j}(\mathbf{W}(k-1))u(k-j) \quad (2-17)$$

式(2-17)与式(2-1)具有相似的回归模型结构,不同的是式(2-1)中的 $y(k-i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n_y$ )和 $u(k-j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n_u$ )的系数是常数,而式(2-17)中 $y(k-i)$ 和 $u(k-j)$ 的系数与 $\mathbf{W}(k-1)$ 有关,  $\mathbf{W}(k-1)$ 会随着系统的运行而发生变化。当 $\mathbf{W}(k-1)$ 变化很小时,  $y(k-i)$ 和 $u(k-j)$ 的系数可认为近似不变,这表明系统在局部上是线性的。这种随状态变化的动态模型被称为状态相依模型 (State Dependent Model) [17]。

综上所述,式(2-17)可看作式(2-11)的局部线性表达。欲得到式(2-17)的准确表达式,需要清楚 $\phi_0$ 、 $\phi_{y,i}$ 和 $\phi_{u,j}$ 与 $\mathbf{W}(k-1)$ 的函数关系。这种函数关系无法通过理论上的分析获得,只能通过函数逼近的方式,可以采用多项式拟合,神经网络逼近等拟合方法。

### 2.3 RBF-ARX 模型

采用 RBF 神经网络来拟合式(2-17)中的 $\phi_0$ 、 $\phi_{y,i}$ 和 $\phi_{u,j}$ 时就构成 RBF-ARX 模型。RBF 网络因其较强的非线性函数逼近能力而被广泛应用,它比许多其他的神经网络如 BP 网络拥有更快的训练速度和更高的精度。

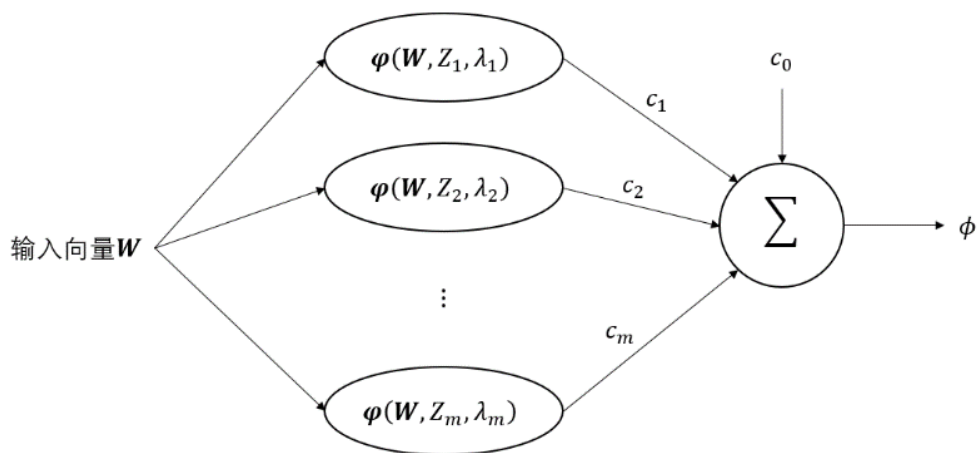


图 2-1 RBF 网络结构

RBF 网络与 BP 网络结构相似,但激活函数和待优化的参数不同。BP 网络一般采用 sigmoid 作为激活函数,而 RBF 网络采用径向基函数作为激活函数,径向基函数拥有局部响应的特点,RBF 网络待优化的参数是径向基函数的方差和中心及一层的连接权值,

而 BP 网络的待优化参数仅是两层连接权值。相比起来, RBF 网络更加灵活, 非线性函数逼近能力优于 BP 神经网络。

图 2-1 中的输出  $\phi$  为

$$\phi = c_0 + \sum_{num=1}^m c_{num} \varphi(\mathbf{W}, Z_{num}, \lambda_{num}) \quad (2-18)$$

其中  $c_{num} (num = 1, 2, \dots, m)$  为线性连接权值,  $c_0$  为偏移,  $\mathbf{W}$  为输入向量,  $Z_{num} (num = 1, 2, \dots, m)$  为径向基函数中心,  $\lambda_{num} (num = 1, 2, \dots, m)$  用来调整径向基函数的形状 (灵敏度), 正比于方差,  $m$  为隐藏节点数,  $\varphi$  为径向基函数, 又称高斯核函数, 其函数解析式为

$$\varphi(\mathbf{W}, Z_{num}, \lambda_{num}) = \exp(-\lambda_{num} \|\mathbf{W} - Z_{num}\|_2^2) \quad (2-19)$$

其中,  $\|\cdot\|_2$  表示 2-范数。结合式 (2-17)、式 (2-18) 和式 (2-19), 可得 RBF-ARX 模型:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(k) = \phi_0(\mathbf{W}(k-1)) + \sum_{i=1}^{n_y} \phi_{y,i}(\mathbf{W}(k-1))y(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u} \phi_{u,j}(\mathbf{W}(k-1))u(k-j) \\ \phi_0(\mathbf{W}(k-1)) = c_0^0 + \sum_{num=1}^m c_{num}^0 \exp(-\lambda_{num}^y \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^y\|_2^2) \\ \phi_{y,i}(\mathbf{W}(k-1)) = c_{i,0}^y + \sum_{num=1}^m c_{i,num}^y \exp(-\lambda_{num}^y \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^y\|_2^2) \\ \phi_{u,j}(\mathbf{W}(k-1)) = c_{j,0}^u + \sum_{num=1}^m c_{j,num}^u \exp(-\lambda_{num}^u \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^u\|_2^2) \\ \mathbf{W}(k-1) = (w_1, w_2, \dots, w_{n_w})^T \end{array} \right. \quad (2-20)$$

其中,  $c_k^0$  和  $c_{i,num}^{type} (i = 1, 2, \dots, n_{type}; type = y, u; num = 0, 1, \dots, m)$  是权重系数,

$\lambda_{num}^{type} (type = y, u; num = 1, 2, \dots, m)$  用来控制径向基函数的灵敏度,  $\mathbf{W}(k-1)$  是工作点状态,  $n_w$  是  $\mathbf{W}(k-1)$  的阶次。理论上按照泰勒展开式 (2-13),  $\mathbf{W}(k-1)$  应当具有式 (2-12) 的形式, 但实际上,  $\mathbf{W}(k-1)$  可以是系统中任意可以测量的量, 且阶次也不一定与式 (2-12) 中的相同, 这是因为当  $\mathbf{W}(k-1)$  的选取与式 (2-12) 中不同时,  $\mathbf{W}(k-1)$  与式 (2-12) 的关系可以看成一种隐含的空间变换, 而这种变换关系可以被 RBF 网络在拟合过程中抵消。

RBF-ARX 模型结构图如下：

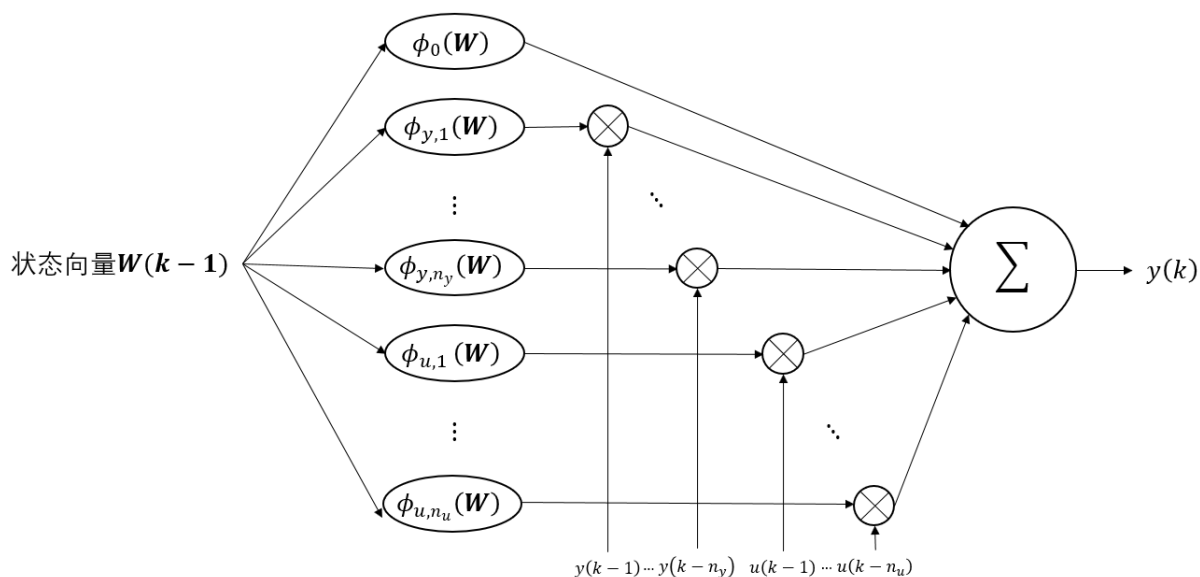


图 2-2 RBF-ARX 模型结构

RBF-ARX 模型兼具 RBF 网络和线性自回归模型的优点。线性自回归模型结构简单，易于分析和设计控制系统，但不能描述非线性系统。RBF 网络具有与 RBF-ARX 模型相媲美的拟合能力和泛化能力，但不能应用于控制系统的分析。而 RBF-ARX 模型，结合了线性自回归模型和 RBF 网络的优点，在每一个工作点是一个线性自回归模型，易于分析设计控制系统，而且在全局上获得了任意非线性动态系统的描述能力。

## 2.4 RBF-ARX 模型的辨识

RBF-ARX 模型的训练采用 SNPOM 方法。SNPOM 通过将待优化参数分为线性参数和非线性参数提高运算速度和精度，对于线性参数采用线性优化策略（如最小二乘法），速度较快；对于非线性参数采用非线性优化策略（如高斯牛顿法和 Levenberg-Marquardt 方法），速度较慢。

对于式（2-20），线性参数为

$$\theta_L = \{c_{num}^0, c_{i,num}^y, c_{j,num}^u | num = 0, 1, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n_y; j = 1, 2, \dots, n_u\} \quad (2-21)$$

非线性参数为

$$\theta_N = \{\lambda_{num}^{type}, Z_{num}^{type} | num = 1, 2, \dots, m; type = y, u\} \quad (2-22)$$

若有输入输出样本：

$$\begin{cases} U = \{u(1), u(2), \dots, u(n)\} \\ Y = \{y(1), y(2), \dots, y(n)\} \end{cases} \quad (2-23)$$

SNPOM 算法按以下步骤执行<sup>[15]</sup>。

### 1. 非线性参数初始化

$Z_{num}^{type}$  是 RBF 网络的中心, 故其应当具有 RBF 网络输入相同的大小尺度,  $Z_{num}^{type}$  可以在这个尺度范围内随机地初始化, 也可以平均地初始化。假设  $\mathbf{W}(k-1)$  取为

$$\mathbf{W}(k-1) = (y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_w))^T \quad (2-24)$$

以随机初始化为例有

$$\begin{cases} Z_{num}^{type} = \min(Y)E + (\max(Y) - \min(Y))\mathbf{rand}_{num}^{type} \\ E = \mathbf{1}_{(n_w \times 1)} \\ \mathbf{rand} = \mathbf{rand}_{(n_w \times 1)} \end{cases} \quad (2-25)$$

其中,  $\mathbf{rand}$  是每个元素是 0 到 1 之间的随机数的矩阵,  $\mathbf{1}$  表示元素全是 1 的矩阵。

$\lambda_{num}^{type}$  反映了径向基函数的形状, 与样本数据的集散程度有关, 其初始值的选取具有一定的主观性。可根据[15]中的选取方法来确定  $\lambda_{num}^{type}$  的初始值, 有

$$\begin{cases} \lambda_{num}^{type} = -\frac{\log \varepsilon}{\max_k \left\{ \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^{type}\|_2^2 \right\}} \\ \varepsilon \in [0.1 \sim 0.0001] \end{cases} \quad (2-26)$$

### 2. 线性参数初始化

设

$$\begin{aligned} X_L(k) = & (1, \{\exp(-\lambda_{num}^y \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^y\|_2^2) | num = 1, 2, \dots, m\}, \\ & y(k-1), \{\exp(-\lambda_{num}^y \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^y\|_2^2) y(k-1) | num = 1, 2, \dots, m\}, \\ & y(k-2), \{\exp(-\lambda_{num}^y \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^y\|_2^2) y(k-2) | num = 1, 2, \dots, m\}, \\ & \dots, \\ & y(k-n_y), \{\exp(-\lambda_{num}^y \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^y\|_2^2) y(k-n_y) | num = 1, 2, \dots, m\}, \\ & u(k-1), \{\exp(-\lambda_{num}^u \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^u\|_2^2) u(k-1) | num = 1, 2, \dots, m\} \\ & u(k-2), \{\exp(-\lambda_{num}^u \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^u\|_2^2) u(k-2) | num = 1, 2, \dots, m\} \\ & \dots, \\ & u(k-n_u), \{\exp(-\lambda_{num}^u \|\mathbf{W}(k-1) - Z_{num}^u\|_2^2) u(k-n_u) | num = 1, 2, \dots, m\} \end{aligned}$$

$X_L(k)$ 是把线性参数 $\theta_L^T$ 看成线性回归方程的系数 $\beta$ 时自变量的样本取值。此时非线性参数的初始值已在第 1 步中确定，因而 $X_L(k)$ 的值是已知的，且

$$y(k) = X_L(k)\theta_L^T \quad (2-27)$$

这是关于 $X_L(k)$ 的 $(m+1)(1+n_y+n_u)$ 元的线性回归方程。可直接由最小二乘法确定最优的初始线性参数 $\theta_L^T$ 。

设

$$\begin{cases} \mathbf{X}_L = \begin{pmatrix} X_L(d+1) \\ X_L(d+2) \\ \vdots \\ X_L(n) \end{pmatrix} \\ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y(d+1) \\ y(d+2) \\ \vdots \\ y(n) \end{pmatrix} \\ d = \max\{n_w, n_y, n_u\} \end{cases} \quad (2-28)$$

则由最小二乘法式 (2-7) 可得

$$\hat{\theta}_L^T = (\mathbf{X}_L^T \mathbf{X}_L)^{-1} \mathbf{X}_L^T \mathbf{Y} \quad (2-29)$$

最小二乘法的解 $\hat{\theta}_L^T$ 是线性参数的最优初始值。

### 3. 非线性参数优化算法迭代一次

为了让 RBF-ARX 模型拟合模型输出式 (2-23)，目标函数应当取

$$\begin{cases} V(\theta_N) = \frac{1}{2} \|F(\theta_N)\|_2^2 \\ F(\theta_N) = \begin{pmatrix} \hat{y}(d+1|d) - y(d+1) \\ \hat{y}(d+2|d+1) - y(d+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(n|n-1) - y(n) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2-30)$$

其中 $\hat{y}(k+1|k)$ 是在时刻 $k$ 时，式 (2-20) 对 $k+1$ 时刻输出的预测。式 (2-30) 中 $\theta_N$ 的优化是非线性最小二乘问题 (Nonlinear Least Square)，可以使用 Levenberg-Marquardt 方法求解。Matlab 的 lsqnonlin 函数可以执行 Levenberg-Marquardt 算法，可参考有关文献和书籍<sup>[18][19]</sup>。计算过程如下：

$V(\theta_N)$ 对 $\theta_N$ 的雅可比矩阵 (Jacobian Matrix) 为

$$\mathbf{J}(\theta_N) = \left( \frac{\partial V(\theta_N)}{\partial \theta_N} \right)^T \quad (2-31)$$

解方程：

$$(\mathbf{J}(\theta_N)^T \mathbf{J}(\theta_N) + \gamma \mathbf{E}) \mathbf{d} = -\mathbf{J}(\theta_N)^T \mathbf{F}(\theta_N) \quad (2-32)$$

可确定搜索方向 $\mathbf{d}$ ，其中 $\gamma$ 是一个标量参数，当 $\gamma$ 趋于0时，Levenberg-Marquardt方法将退化为高斯牛顿方法，当 $\gamma$ 趋于正无穷大时，Levenberg-Marquardt方法变为最速下降法。 $\gamma$ 的值由lsqnonlin函数在迭代过程中合适地选取，优化刚开始时， $\gamma$ 值很大，优化过程后期， $\gamma$ 值很小。

则 $\theta_N$ 的下一步迭代值为：

$$the\ next\ \theta_N = \theta_N + \xi \mathbf{d} \quad (2-33)$$

其中， $\xi$ 是一个标量，表示步长参数，由lsqnonlin函数在优化过程中适当地选取。

#### 4. 线性参数优化

在第3步中， $\theta_N$ 的值已被更新，进而 $\mathbf{X}_L$ 的值也被更新，此时线性参数 $\theta_L$ 仍可按照式(2-29)迭代以确定最优的线性参数，执行完此步后返回执行第三步，直到目标函数 $V(\theta_N)$ 的值不再减少或算法达到最高的迭代次数。

SNPOM 算法的程序框图如下：

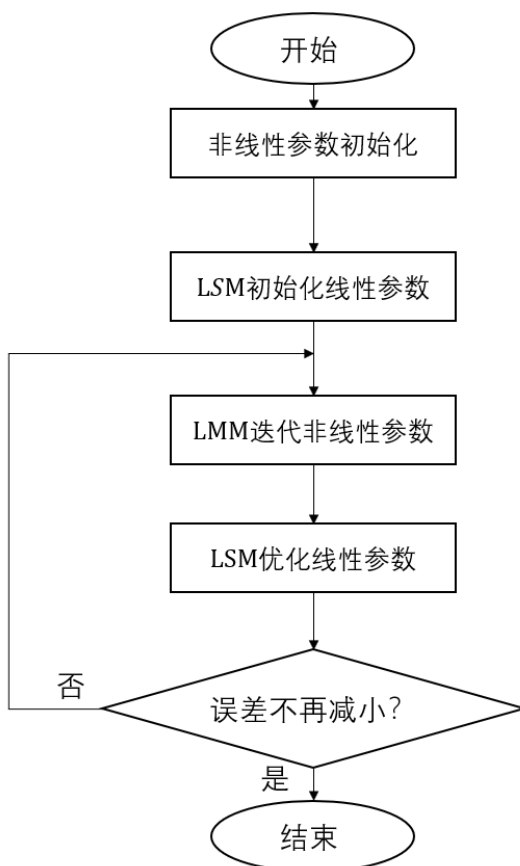


图 2-3 SNPOM 算法

## 第3章 模型预测控制

基于状态空间的现代控制理论在航空航天上取得了瞩目的成就，但在工业过程控制问题中表现不佳。这是因为航空航天控制对象通常拥有精确的物理模型，而在工业过程控制中，过程模糊，物理关系不明，且滞后大，难以获得准确的控制对象模型。为了解决这种模糊的工业过程控制问题，模型预测控制（Model Predictive Control）应运而生。模型预测控制在每一时刻利用控制对象的模型和未来计划的系统输入对未来的系统输出进行预测，通过优化未来的系统输入使未来的系统输出以人为给定的参考轨迹运动到设定点。简而言之，模型预测控制会在每一采样时刻执行一次最优控制算法<sup>[20]</sup>。

### 3.1 基于线性 ARX 模型的预测控制

模型预测控制算法需要预测未来，故必须已知控制对象的大概模型（这里的大概是相对于传统和现代控制理论都需要已知对象的精确模型），对于线性离散系统来说，在没有干扰和噪声的情况下，系统的自回归模型为式（3-1）：

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_y} a_i y(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u} b_j u(k-j) \quad (3-1)$$

在第 $k$ 时刻，基于线性自回归模型式（3-1）对第 $k+t$ 步的输出进行预测，有

$$\begin{cases} y_p(k+t|k) = \sum_{i=1}^{n_y} a_i y_{act}(k-i+t) + \sum_{j=1}^{n_u} b_j u_{act}(k-j+t) \\ y_{act}(k-i+t) = \begin{cases} y(k-i+t), & k-i+t \leq k \\ y_p(k-i+t|k), & k-i+t > k \end{cases} \\ u_{act}(k-j+t) = \begin{cases} u(k-j+t), & k-j+t \leq k \\ u_p(k-j+t), & k-j+t > k \end{cases} \end{cases} \quad (3-2)$$

其中 $y_p(k+t|k)$ 表示在第 $k$ 时刻对第 $k+t$ 步输出的预测值， $y_{act}$ 和 $u_{act}$ 表示为了计算 $y_p(k+t|k)$ 需要已知的量， $u_p$ 表示未来计划的输入。根据线性自回归模型式（3-2）依次计算 $y_p(k+t|k)$  ( $t = 1, 2, \dots, f$ )，就能获取未来第1到第 $f$ 步的输出预测量。

令



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Y}_p = \begin{pmatrix} y_p(k+1|k) \\ y_p(k+2|k) \\ \vdots \\ y_p(k+f|k) \end{pmatrix} \\ \mathbf{U}_p = \begin{pmatrix} u_p(k) \\ u_p(k+1) \\ \vdots \\ u_p(k+g) \\ u_p(k+g+1) \\ \vdots \\ u_p(k+f-1) \end{pmatrix} \\ u_p(k+g) = u_p(k+g+1) = \dots = u_p(k+f-1) \end{array} \right. \quad (3-3)$$

称 $f$ 为预测步长， $g+1$ 为控制步长。欲求出 $\mathbf{Y}_p$ ，需人为设定 $\mathbf{U}_p$ 的第一到 $g+1$ 项。

在预测控制算法中，每一时刻最优控制的目的是使系统的期望输出从第 $k$ 时刻的实际输出值 $y(k)$ 出发沿着一条事先规定的轨迹逐渐到达设定值，这条轨迹就被称为参考轨迹。参考轨迹一般采用从当前采样时刻系统的实际输出值出发到达系统输出参考值的一阶惯性曲线。

$$y_r(k+t) = y(k) + (r - y(k)) \left( 1 - \exp\left(-\frac{T}{T_r} t\right) \right), t = 1, 2, \dots, f \quad (3-4)$$

式(3-4)由一阶惯性环节解得。其中， $y_r(k+t)$ 是参考轨迹在第 $k+t$ 时刻的值， $r$ 是参考信号， $T$ 是采样周期， $T_r$ 是一阶惯性环节的时间常数。将上式化简，并令 $\alpha = \exp\left(-\frac{T}{T_r}\right)$ ，有

$$y_r(k+t) = \alpha^t y(k) + (1 - \alpha^t) r \quad (3-5)$$

其中， $\alpha$ 是预测控制中一个很重要的常数，其值在0和1之间， $\alpha$ 越大，系统越稳定，响应越慢，反之，系统越不稳定，响应越快。

要使预测轨迹尽可能地贴合参考轨迹，需要解最优化问题：

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J = \|\mathbf{Y}_p - \mathbf{Y}_r\|_2^2 \\ \mathbf{Y}_r = \begin{pmatrix} y_r(k+1) \\ y_r(k+2) \\ \vdots \\ y_r(k+f) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3-6)$$

其中， $\mathbf{Y}_r$ 表示参考轨迹， $J$ 表示在预测步长内，所有时刻残差的平方和。

则最优的控制序列为

$$\text{the optimal } \mathbf{U}_p = \min_{\arg \mathbf{U}_p} J \quad (3-7)$$

预测控制算法在每一采样时刻求解完优化问题后，只需要把优化控制序列 $\mathbf{U}_p$ 的第一项作用于控制实际对象。实际过程中通常对系统输入有上下界约束：

$$lb \leq u_p \leq hb \quad (3-8)$$

$J$ 化简后会变成关于 $u_p(k), u_p(k+1), \dots, u_p(k+g)$ 的二次函数，故上述最优化问题实际上一个二次规划问题（Quadratic Programming, QP）。二次规划问题有多种解法，如拉格朗日方法、有效集法等，在此不详细叙述。

### 3.2 基于 RBF-ARX 模型的预测控制

RBF-ARX 模型由于在不同的工作点有不同的线性模型，因此要设计自适应预测控制算法，即在每个采样点都要更新线性模型。基于 RBF-ARX 模型设计自适应预测控制算法，有两种不同的方案。

#### 1. 方案一：在每次采样仅更新一次线性模型

每次采样仅更新一次线性模型，则式（3-2）中计算 $y_p(k+t|k)$ 的式子变为

$$\begin{aligned} y_p(k+t|k) = & \phi_0(\mathbf{W}(k)) \\ & + \sum_{i=1}^{n_y} \phi_{y,i}(\mathbf{W}(k)) y_{act}(k-i+t) \\ & + \sum_{j=1}^{n_u} \phi_{u,j}(\mathbf{W}(k)) u_{act}(k-j+t) \end{aligned} \quad (3-9)$$

由上式可看出，计算 $y_p(k+t|k) (t=1,2,\dots,f)$ 都使用 $k$ 时刻的线性模型，这样可能会使预测结果与实际相差较大，但控制序列的求解仍是二次规划（QP）问题。

#### 2. 方案二：在每次采样更新 $f$ 次线性模型

每次采样更新 $f$ 次线性模型，则式（3-2）中计算 $y_p(k+t|k)$ 的式子变为

$$\begin{aligned} y_p(k+t|k) = & \phi_0(\mathbf{W}(k-1+t)) \\ & + \sum_{i=1}^{n_y} \phi_{y,i}(\mathbf{W}(k-1+t)) y_{act}(k-i+t) \\ & + \sum_{j=1}^{n_u} \phi_{u,j}(\mathbf{W}(k-1+t)) u_{act}(k-j+t) \end{aligned} \quad (3-10)$$

由上式可看出，每向前预测一步，就更新一次模型，计算未来输出序列的过程使用了未来的工作点状态，这样可能会获取更为准确的预测结果，但这种方式会使控制序列  $U_p$  的元素同时出现在二次项和指数项，目标函数  $J$  将变为关于控制序列的超越式，最优化问题将不是二次规划，优化问题的求解时间将大大延长，且不能保证最优解。对于高采样率的系统，这种方案将严重拖慢系统运行速度。

方案一和方案二的不同控制效果将会在第 5 章仿真。

### 3.3 运行速度的提升

系统的运行时间大部分用于预测控制的实时优化算法，故改善优化算法可以提高系统运行速度。待优化参数的初始值对非线性优化算法的执行时长有决定性作用。对于模型预测控制，设控制步长为 3，第  $k$  时刻的优化控制量设为

$$U_{optimal}(k) = (u_{optimal}(k|k), u_{optimal}(k+1|k), u_{optimal}(k+2|k)) \quad (3-11)$$

其中  $u_{optimal}(k+t|k)$  表示在第  $k$  时刻确定的第  $k+t$  时刻的最优控制量，模型预测控制将  $U_{optimal}(k)$  的第一项  $u_{optimal}(k|k)$  输出。对于  $k+1$  时刻，可认为系统的线性模型相较于  $k$  时刻没有发生大的变化，由于  $U_{optimal}(k)$  是  $k$  时刻的最优控制轨迹，故  $k+1$  时刻的最优控制轨迹应当十分接近除开第一项  $u_{optimal}(k)$  后的  $U_{optimal}(k)$ ，故  $k+1$  时刻控制轨迹的初始值应当选为

$$U_{initial}(k+1) = (u_{optimal}(k+1|k), u_{optimal}(k+2|k), u_{optimal}(k+2|k)) \quad (3-12)$$

按照这种选取初始值的方式，只有预测控制算法开始执行时的第 0 时刻无法确定最优控制轨迹合适的初始值，这时只能在控制信号限制范围内随机地选取。

## 第4章 基于 RBF-ARX 模型的磁悬浮小球系统建模

### 4.1 磁悬浮小球系统的物理模型

本章的研究对象是 HUMUSOFT 公司的 CE152 磁悬浮小球模型<sup>[21]</sup>。



图 4-1 CE152 磁悬浮小球系统，在 Matlab 的官方网站上可下载仿真模型<sup>[21]</sup>

该系统由一个通电线圈和一个在磁场中悬浮的小铁球组成。一个与 AD 转换器相连的电感式线性位置传感器用来测量小球的位置。线圈由一个连接到 DA 转换器的功率放大器驱动。基本的控制任务是控制小铁球在由线圈产生的磁场中能够以给定的位置漂浮。由此可见，该系统是一个单输入单输出系统。CE152 磁悬浮小球系统的物理结构可由下图说明。

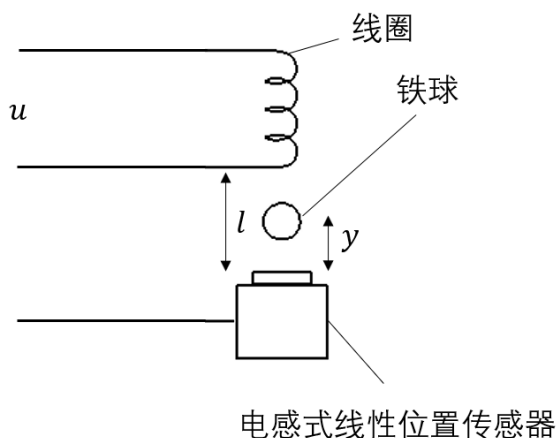


图 4-2 CE152 磁悬浮小球系统结构简图<sup>[21]</sup>

图 4-2 中  $l$  表示小球的活动范围,  $y$  表示小球的高度 (系统不运行时  $y = 0$ , 以重力方向为负方向),  $m$  和  $g$  分别表示小球的质量和当地的重力加速度。假设小球只受到自身的重力  $mg$  和线圈对小球的吸引力  $F$ , 则基于牛顿第二定律有

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F - mg \quad (4-1)$$

一般认为线圈对小球的吸引力与电流的平方成正比, 与线圈和小球间隙长度的平方成反比<sup>[3][4][14]</sup>。

$$F = F(i, y) = K \left( \frac{i}{l - y} \right)^2 \quad (4-2)$$

其中,  $K$  是一个常数, 与系统的参数有关。 $i$  是闭合电路的电流。系统是以电压为输入的, 忽略小铁球对电路电感的影响, 则根据电路理论<sup>[22]</sup>有

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (4-3)$$

其中  $R$  和  $L$  分别是电路的总电阻和总电感。式 (4-2) 反映了  $F, i, y$  之间强烈的非线性关系。如果小球悬浮在某一位置  $y_0$ , 则  $F(i_0, y_0) = mg$ 。在某一瞬时刻,  $y_0$  和  $i_0$  变化很小, 吸引力  $F$  为常数, 则该系统可以被认为是线性系统。

## 4.2 磁悬浮小球系统的 RBF-ARX 模型

上节磁悬浮小球系统的物理模型对实际情况做出很多假设, 如忽略了磁饱和和小球与电路之间的电感等因素。另外,  $R$  和  $L$  可能会在运行过程中发生变化 (由于温度变化), 故基于此物理模型设计的控制方案可能控制效果不会很好。因此, 有必要考虑其他的建模方式。本节基于第 2 章阐述的 RBF-ARX 模型对磁悬浮小球系统进行建模。

用 RBF-ARX 模型建模不需要考虑系统内部的状态和行为, 只需考虑输入和输出。CE152 系统输入为电压, 范围  $0 \sim 1V$ , 实际输出为小球的位置, 这一物理量被电感式线性位置传感器所测量, 然后经过 AD 转换器输出  $0 \sim 0.998V$  电压。输出  $0V$  表示  $y = 0$ , 输出  $0.998V$  表示小球与线圈接触。根据以上信息, 可以构建磁悬浮小球的 RBF-ARX 模型:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(k) = \phi_0(\mathbf{W}(k-1)) + \sum_{i=1}^{n_y} \phi_{y,i}(\mathbf{W}(k-1))y(k-i) + \sum_{j=1}^{n_u} \phi_{u,j}(\mathbf{W}(k-1))u(k-j) \\ \phi_0(\mathbf{W}(k-1)) = c_0^0 + \sum_{num=1}^m c_{num}^0 \exp(-\lambda_{num}^y \|\mathbf{W}(k-1) - \mathbf{Z}_{num}^y\|_2^2) \\ \phi_{y,i}(\mathbf{W}(k-1)) = c_{i,0}^y + \sum_{num=1}^m c_{i,num}^y \exp(-\lambda_{num}^y \|\mathbf{W}(k-1) - \mathbf{Z}_{num}^y\|_2^2) \\ \phi_{u,j}(\mathbf{W}(k-1)) = c_{j,0}^u + \sum_{num=1}^m c_{j,num}^u \exp(-\lambda_{num}^u \|\mathbf{W}(k-1) - \mathbf{Z}_{num}^u\|_2^2) \\ \mathbf{W}(k-1) = (y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_w))^T \end{array} \right. \quad (4-4)$$

其中， $u$ 为电路输入电压， $y$ 为 AD 转换器输出电压（一一线性对应小球的位置）。该 RBF-ARX 模型以过去时刻的历史输出构建状态变量 $\mathbf{W}(k-1)$ 。

### 4.3 磁悬浮小球系统 RBF-ARX 模型辨识

RBF-ARX 模型的辨识主要包括阶次的确定和参数辨识。阶次可事先人为给定，之后对比训练后的均方误差来决定最优的阶次。此外，应当注意在保证准确度的前提下， $\mathbf{W}(k-1)$ 的阶次应当越小越好。

参数辨识需要获取训练和验证数据样本，为获得可靠的数据样本，需使磁悬浮小球系统在稳定范围内运行较长时间，可通过如下的控制系统实现。

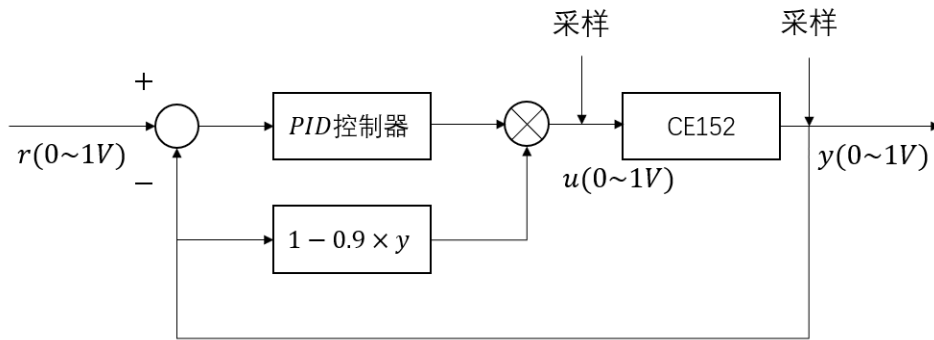


图 4-3 获取输入输出数据所使用的控制系统

该控制系统相比普通 PID 控制，在控制信号上乘了一个线性衰减因子。根据小球与线圈的距离使控制信号获得不同程度的衰减，这种控制方式可以增强系统的稳定性，能够在一定范围内有效控制磁悬浮系统，但系统响应可能会变慢。基于该控制方案在 Simulink 中搭建仿真模型，系统中参考信号是在系统稳定范围内的随机的阶跃信号，并且在控制信号中加入了白噪声信号，以充分反映系统的动态行为<sup>[7]</sup>。

采样周期 5ms，运行 50s，总共采样 10001 组数据。以第 1000 到第 5000 组为训练数据，以第 5001 到 10000 组为验证数据。另外，为了简化算法代码，每个 RBF 网络的中心数量设为一个，且只使用 $\lambda$ 的初始值，不对 $\lambda$ 进化优化。

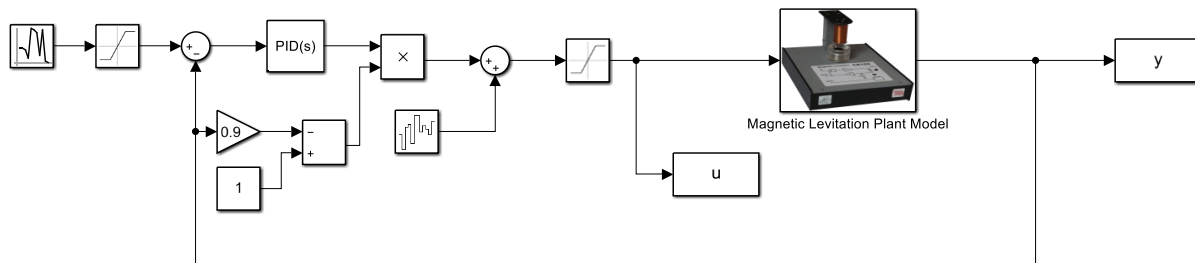


图 4-4 获取输入输出采样数据所使用的 Simulink 仿真模型

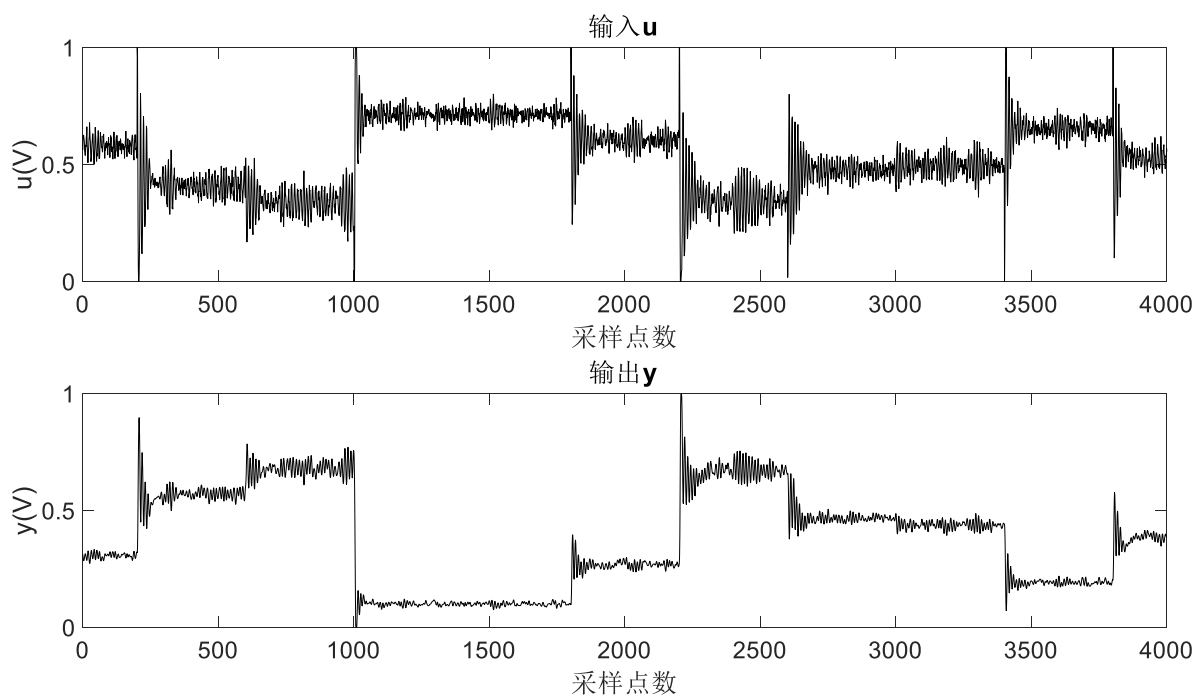


图 4-5 训练数据，总共 4001 组数据

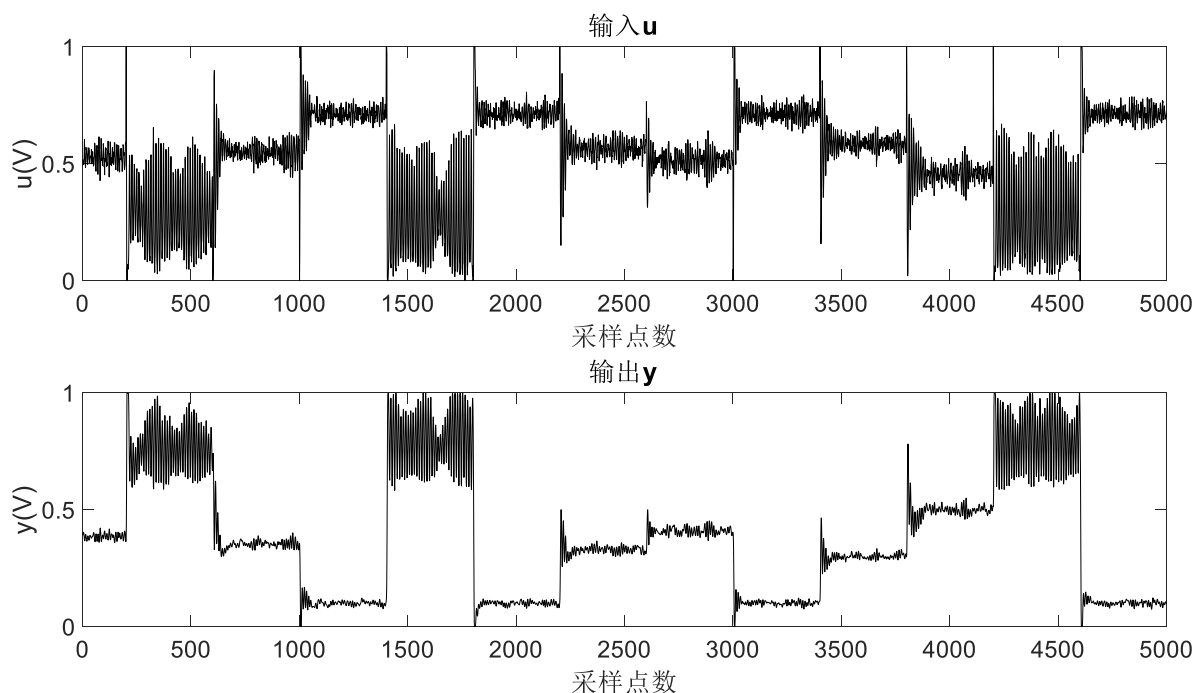


图 4-6 验证数据，总共 5000 组数据

从训练数据 4-5 和验证数据 4-6 均可以看出，该控制系统在参考信号小于 0.7V 时具有较好的控制效果。但当铁球与电磁铁过分靠近时（参考信号  $> 0.7V$ ），磁悬浮小球系统输入和输出均出现较大的振荡，这是因为小球受到的吸引力与小球和线圈之间的间隙近似呈平方反比关系，当小球过分靠近线圈时，系统的动态特性变化很大，造成控制系统不稳定。

RBF-ARX 模型的训练算法采用 SNPOM 算法。经过多次训练和比较，RBF-ARX 系统的阶数确定为

$$n_y = 7, n_u = 3, n_w = 2 \quad (4-5)$$

训练结果如下：



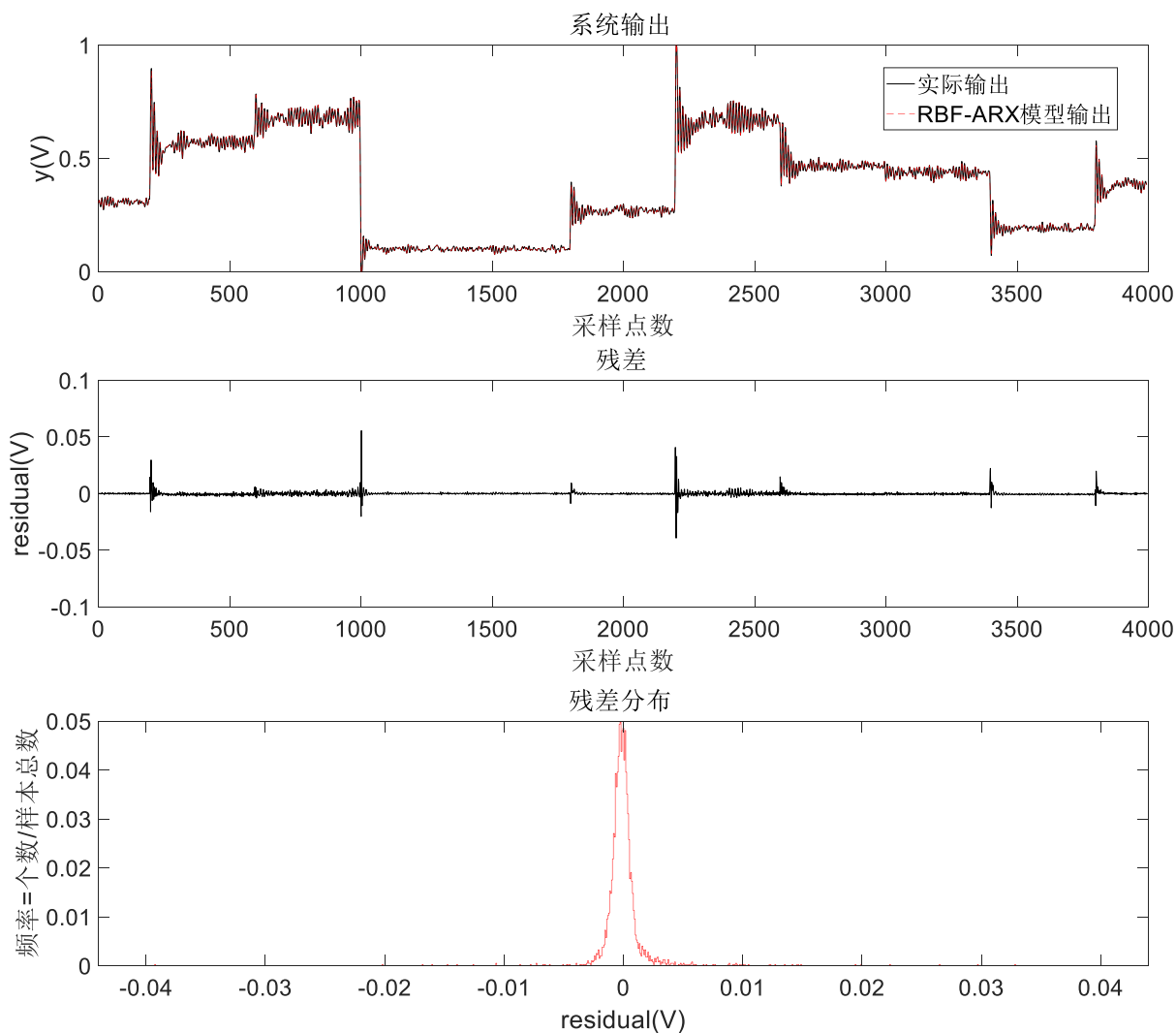
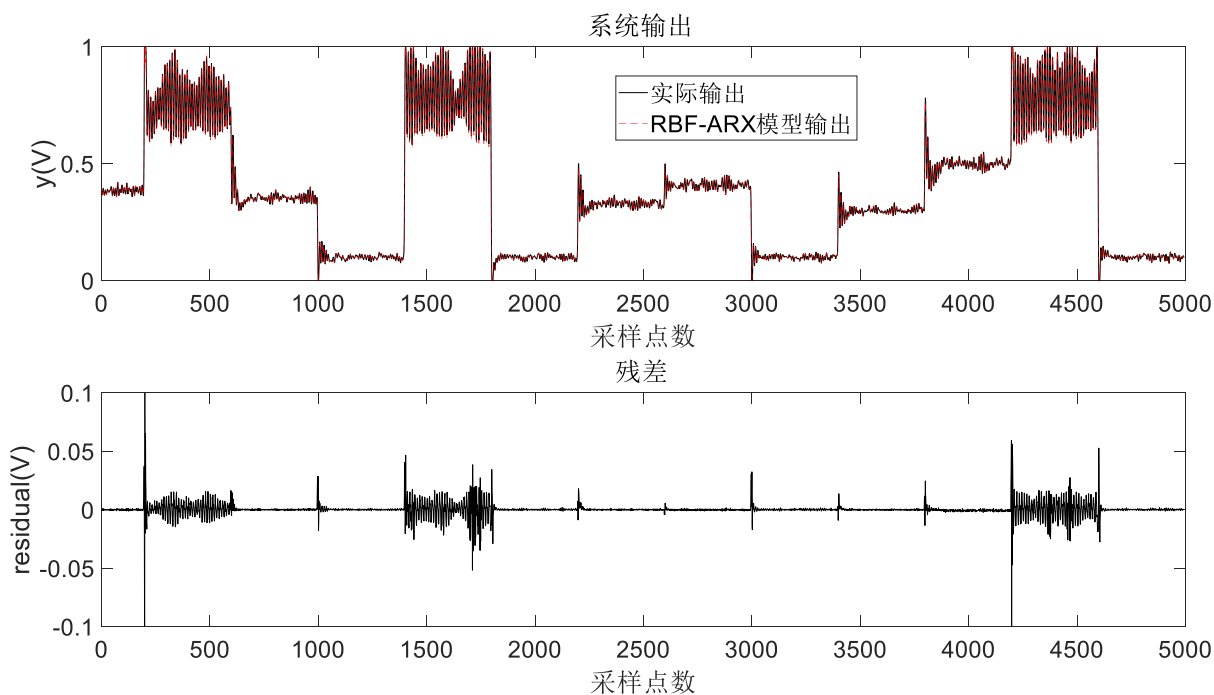


图 4-7 训练结果，均方误差  $MSE = 4.8071e-06$



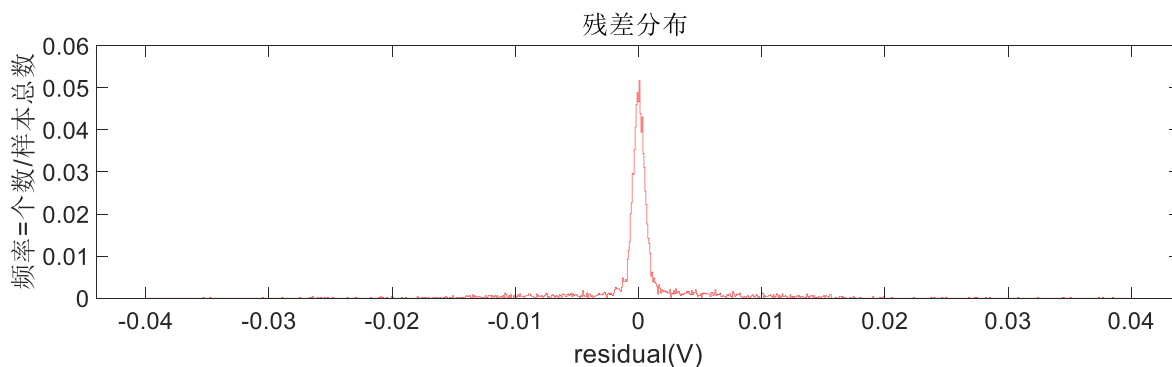


图 4-8 验证结果，均方误差  $MSE = 2.915e-05$

图 4-7 和图 4-8 分别显示了训练和验证过程中观测数据与 RBF-ARX 模型的一步向前预测输出值的比较、残差和残差频率密度曲线。从这两个图中，我们可以看出，无论是训练数据还是验证数据，辨识获得的 RBF-ARX 模型的输出与实际输出值均非常接近。均方误差均为较低水平，残差主要集中在  $-0.01V$  和  $+0.01V$  之间，大致呈正态分布，且从频率密度曲线的形状可看出残差的方差很小。另外，从时域上的误差来看，残差较大的值主要集中在系统阶跃和振荡（主要在参考信号大于  $0.7V$  时）时，故在设计控制系统时，应着重考虑稳定性，以减少建模误差所带来的影响。

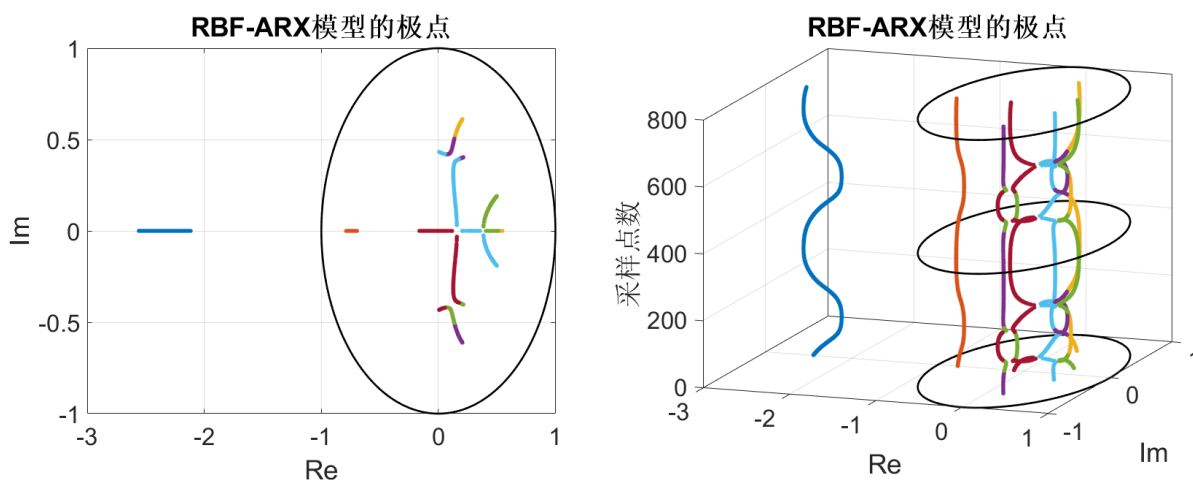


图 4-9 随状态变化的 RBF-ARX 模型极点

图 4-9 画出了 RBF-ARX 模型的极点在参考信号为正弦信号时随时间变化的过程，时间的单位为采样点数。其中，左边为二维图，反映了“极点轨迹”；右边为三维图，反映了极点随时间推移演化的过程，两图中不同的颜色表示不同的极点。从图 4-9 中可看出，该 RBF-ARX 模型的动态特性随时间（状态）变化，并且总有一个极点在单位圆外，解释了磁悬浮小球系统在任何状态下都是不稳定的<sup>[23]</sup>。

## 第5章 基于 RBF-ARX 模型的磁悬浮小球预测控制

### 5.1 预测控制器的分析和设计

根据第 3 章的分析，模型预测控制器有三个关键的参数，参考模型参数 $\alpha$ ，预测步长 $f$ ，控制步长 $g + 1$ ；预测模型采用第 4 章训练得到的 RBF-ARX 模型，并使用第 3 章的方案 1；目标函数采用残差的平方和。

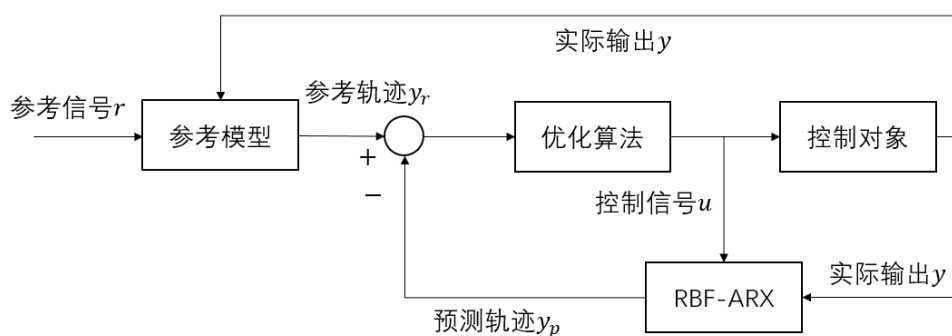


图 5-1 模型预测控制算法

磁悬浮小球系统的预测控制器如图 5-1 所示。在每个采样时刻，只要优化算法能够找到最优解，则该系统就是稳定的<sup>[24]</sup>。在 Simulink 设计预测控制器如图所示，其中，模型预测控制算法采用 S 函数编写。

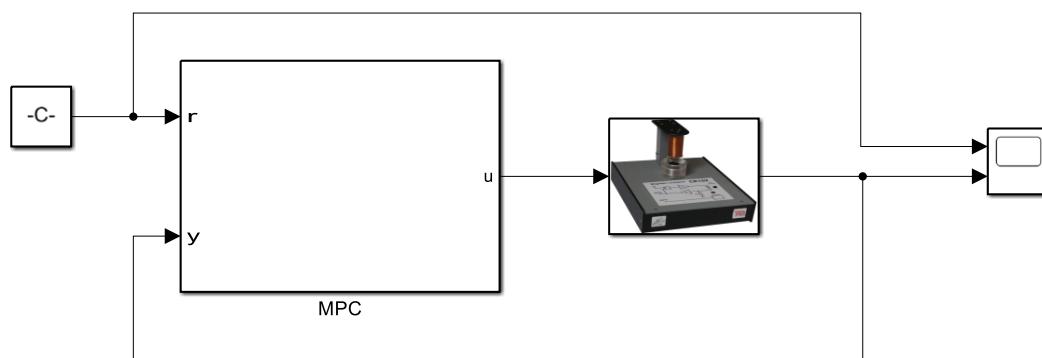


图 5-2 基于 RBF-ARX 的预测控制算法的仿真模型

表 5-1 方案一的参数选取

$\alpha$ (参考轨迹参数)	$f$ (预测步长)	$(g + 1)$ (控制步长)
0.9	10	3
0.88	15	3
0.9	15	3
0.92	15	3
0.9	20	3

在仿真过程中，若控制步长过大，则需要优化的变量增多，会严重拖慢优化算法的执行速度。经过仿真，优化算法在控制步长大于 3 时就会很慢，且小于 3 时，系统响应就会产生较大的振荡，故控制步长取为 3。在相同的参考信号下，对表 5-1 中的参数仿真，可得仿真结果如下。

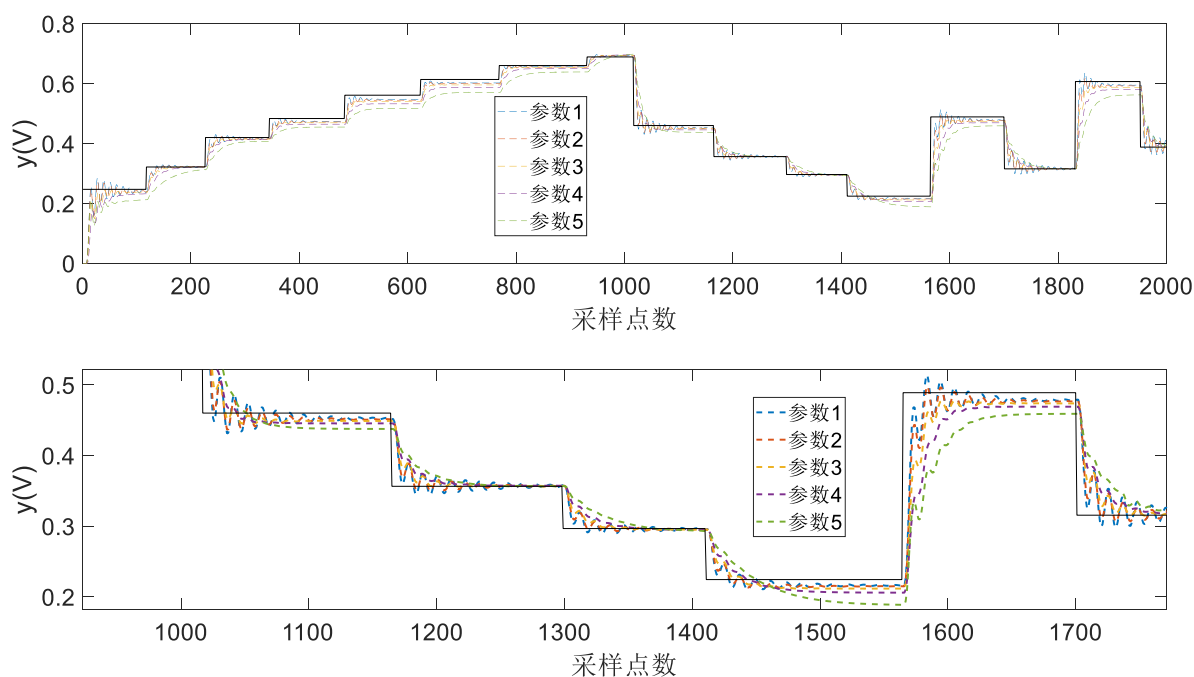


图 5-3 方案一不同参数的仿真结果

对比图 5-3 第一组、第三组和第五组参数的仿真结果，可知 $\alpha$ 越大，系统越稳定，稳态误差越大，这是由于 $\alpha$ 增大，参考轨迹的惯性变大。对比第二组、第三组和第四组参数的仿真结果，可知 $f$ 越大，系统越稳定，稳态误差越大，这是由于 RBF-ARX 模型存在建模误差。尽管这种误差很小，但每向前预测一步，误差就会累积。随着预测步长 $f$ ，累积的误差就越多，从而稳态误差增大，但优化算法优化的时域越长，因而控制系统越稳定。

取方案一中的第三组参数，用相同的参数分别仿真方案一和方案二，可得仿真结果图 5-4。

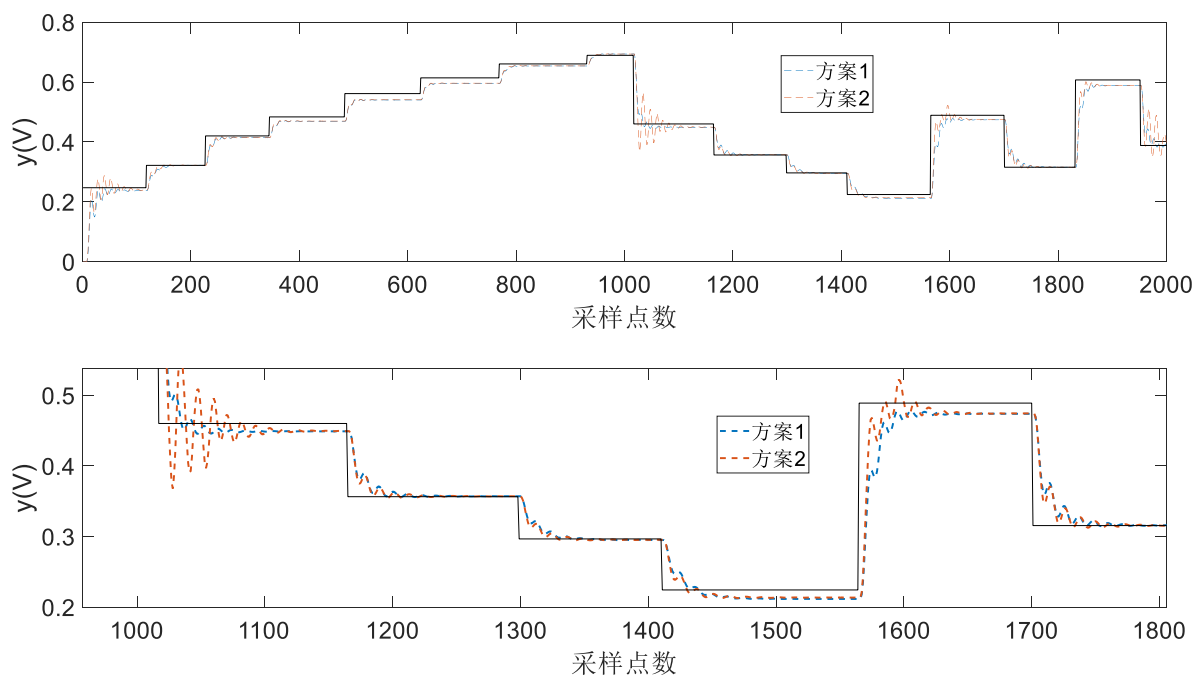


图 5-4 方案一和方案二的仿真结果

从仿真结果图 5-4 可以看出，方案二在牺牲运算速度的前提下，对比方案一在响应速度和稳态误差上并无明显优势。

## 5.2 稳态误差的减小

根据上一节的分析，减小稳态误差的措施有：

- 减小参考轨迹参数 $\alpha$
- 减小预测步长 $f$
- 提高预测模型（RBF-ARX）精度

但这三种方式都不能从根本上消除稳态误差，且第一和第二种方式还会加剧振荡。并且在现有的算法基础上，提高模型精度变得非常困难。因此必须思考其他的能够减小或消除稳态误差的方式。

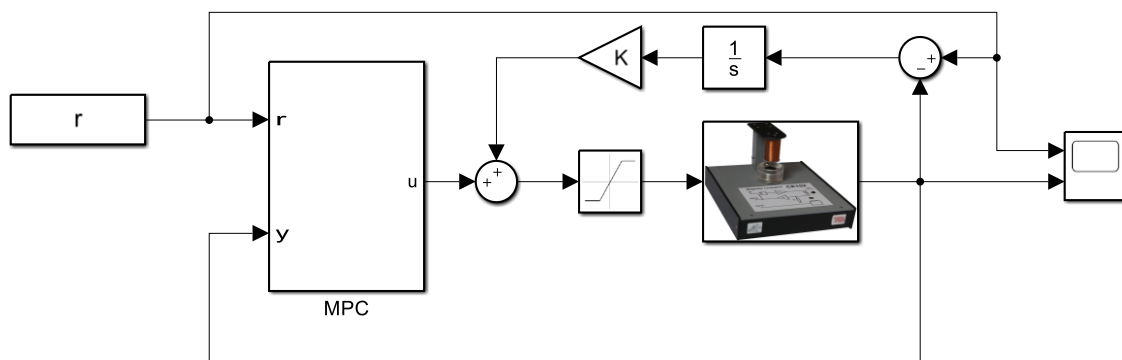


图 5-5 加积分补偿后的仿真模型

图 5-5 中的控制方案在原有的预测控制器上增加了一个积分补偿器，积分补偿器以误差作为输入，输出与原有的控制信号相加。 $K$ 用来调节积分补偿器的作用效果。取不同的 $K$ 值仿真，并比较加积分补偿和不加积分补偿的仿真结果。

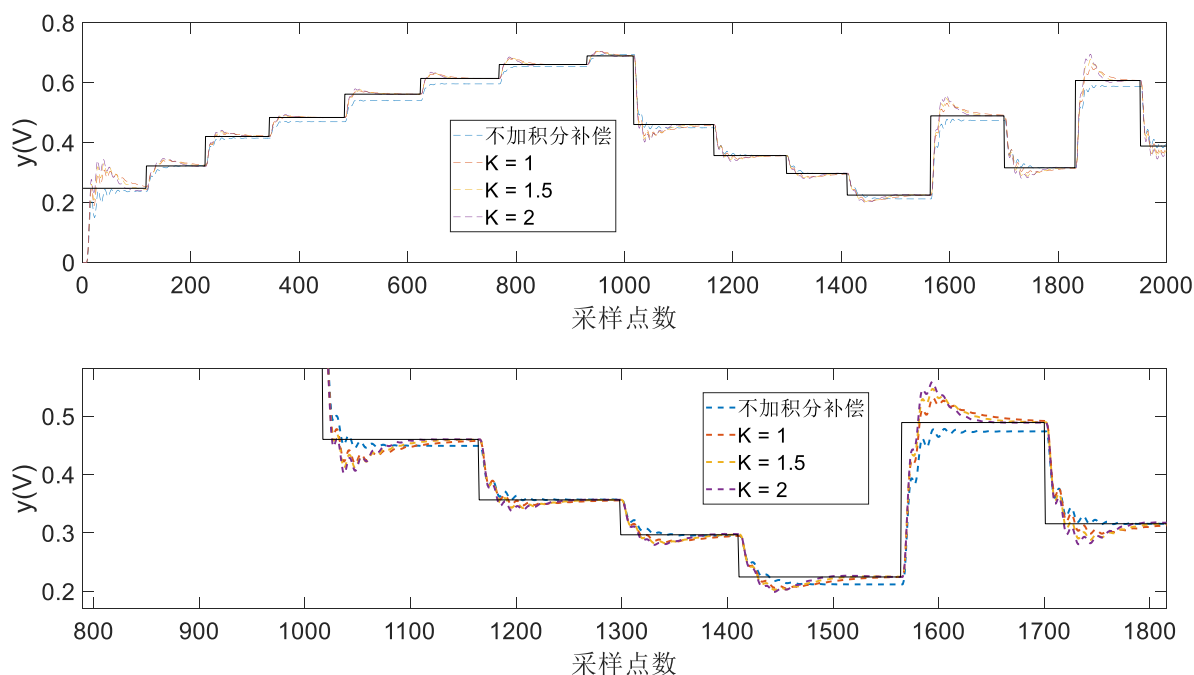


图 5-6 加积分补偿和不加积分补偿的比较

仿真结果显示，加了积分补偿之后，稳态误差被完全消除了，但是系统的超调量增加了，这是因为控制信号增加了一个来自积分器的输出，控制信号相比原来的更大。另外， $K$ 用于调整积分器的控制效果，其值越大，系统响应越快，同时超调也越大。图 5-5 中的控制思路与 PI 控制器颇为相似，PI 控制器中，P 控制器起主要控制作用，I 控制

器用来消除稳态误差<sup>[23]</sup>。同样，图 5-5 中模型预测控制器起主要控制作用，积分器用来消除稳态误差。

## 小结

### ➤ 结论

本文采用 RBF-ARX 模型描述磁悬浮小球这一非线性系统, 采用 SNPOM 方法获得了模型参数的最优估计值, 并基于 RBF-ARX 模型设计了预测控制算法, 分析了预测控制参数对控制性能的影响, 此外, 根据仿真结果剖析了预测控制的稳态误差来源, 并提出了改善稳态误差的措施。本文的主要研究结论如下:

1. RBF-ARX 模型显示出对非线性动态系统的强拟合能力, 是一种快速而可靠的非线性系统建模方法。
2. SNPOM 优化算法在 RBF-ARX 模型的参数估计上表现优异, 其分类待优化参数的思想在其他优化问题上应当会有更广泛的应用。
3. 只要模型能准确预测, 预测控制算法就会有比较好的表现。
4. I 控制器不止在 PID 控制器中起消除稳态误差的作用, 还可以应用在其他控制方案上。本文为基于 RBF-ARX 模型的预测控制器增加了一个积分补偿器, 消除了稳态误差。

### ➤ 不足与改进

1. 仿真过程中, 由于预测控制的实时优化是一个二次规划问题, 求解仍需较长的时间。应用 Y. Wang 和 S. Boyd 的方法<sup>[25]</sup>可能会取得突破。
2. RBF-ARX 模型的训练数据取自一个 PID 控制系统, 该 PID 控制系统存在不稳定控制范围, 在该范围内数据部分无法采集, 造成 RBF-ARX 模型在该范围内的预测误差较大, 间接造成预测控制算法在该范围内不稳定。改进采集数据所使用的 PID 控制系统, 扩大其稳定范围, 可能会解决该问题。
3. 将 I 控制器应用于预测控制虽然能消除稳态误差, 但在一些稳态误差本来就不明显地方引入了超调。
4. 由于模型预测控制的控制量由优化算法解得, 求解过程模糊, 控制性能无法事先设计, 需要不断仿真, 因此可以考虑使用其他控制方案, 如滑模控制等。



➤ 毕业要求指标点达成情况

- ✓ 在毕业设计过程中，明确了设计任务和目的，独立查阅了文献资料、设计了磁悬浮小球系统的控制方案。本控制方案设计过程不涉及具体的电路硬件，只探讨控制方案的可行性和有效性，对环境、社会可持续发展无影响。
- ✓ 在毕业设计过程中，自学了相关教材、查阅了有关文献，了解了与本设计任务有关的国内外研究状况。在消化整理有关文献资料的基础上，撰写了一份 15 页以上的调研报告。
- ✓ 翻译了一篇与本课题有关的英文期刊学术论文。
- ✓ 以磁悬浮小球系统为对象，实现了对系统的控制。
- ✓ 采用了 RBF-ARX 模型对磁悬浮小球系统建模，确定了模型的最优阶次。
- ✓ 基于 RBF-ARX 模型应用预测控制，实现了系统的无静差稳定控制。
- ✓ 设计和调试了基于 RBF-ARX 模型的预测控制系统，根据仿真结果分析预测控制参数对控制效果的影响。
- ✓ 按照本专业毕业设计论文内容与质量考评要求，撰写了毕业设计论文。论文概念正确、层次清晰、逻辑性强、图标规范，符合《毕业设计指导书》指定的格式要求。所呈交的论文是本人在指导老师带领下进行的研究工作，不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。完成了毕业设计论文答辩，按照评审意见修改并完善了毕业设计论文。

## 致 谢

大学四年的学习生活如白驹过隙，回首大学走过的时间，感慨良多，特别是当我写完这篇毕业论文的时候，有一种如释重负的感觉。

首先要感谢的是我的毕业设计导师彭辉教授。第一次在最优控制的课堂上见到彭老师时，他的学者气质和博学多识都深深地打动了我。在毕业设计过程中，每一次遇到问题，与老师讨论，他总能给我指出问题的关键所在，并提出解决方案，令我茅塞顿开。此外，这篇论文，彭老师花了大量的精力修改，大到行文逻辑、思路，小到英文摘要的每一个单词和语法。这种高标准、严要求、认真做事的工作作风给予我熏陶，让我受益匪浅。在彭老师的细心指导下，毕业设计的整个过程大大地让我更加深刻地理解自动化专业的所学，也提升我的个人科研能力，为我今后的工作和学习奠定了坚实的基础，也为我的科研之路指明了方向。在此，再次感谢彭辉老师，能成为他的学生是我一生的骄傲。

我还要感谢本科四年中陪伴在我身边的同学和朋友，感谢他们为我的学习和生活提出宝贵意见和建议，有了他们的支持、鼓励和帮助，我才能充实地度过了这四年的学习生活。此外，我要感谢我的家人，他们替我分担生活的压力，使我能专心于毕业设计工作。最后，我想感谢广大在抗疫前线奋战的工人、护士和医生，他们使我们这些学生免受病毒的侵蚀，给予我们正常的生活保障。

书到用时方恨少。在此以勉励自己在以后的研究工作中多学习、不马虎、认真思考，成为一名合格的研究工作者。

## 参考文献

- [1] Sanchanta M. High-Speed Rail Approaches Station[EB/OL]. The Wall Street Journal:  
<https://www.wsj.com/articles/SB10001424052748704762904575024611266446690>, 2020-4-25.
- [2] Basore P A. Passive Stabilization of Flywheel Magnetic Bearings[D]. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology (USA), 1980.
- [3] Kim C Y, Kim K H. Gain scheduled control of magnetic suspension systems[C]. Proc. Amer. Contr. Conf., 1994.
- [4] Trumper D L, Olson M, Subrahmanyam P K. Linearizing control of magnetic suspension systems[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1997(5):427-438.
- [5] Boonsatit N, Pukdeboon C. Adaptive Fast Terminal Sliding Mode Control of Magnetic Levitation System[J]. Control Autom Electr Syst, 2016(27):359-367.
- [6] 张嗣瀛, 高立群. 现代控制理论(第二版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2017.
- [7] Lairi M, Bloch G. A neural network with minimal structure for maglev system modeling and control[C]. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Intelligent Control Intelligent Systems and Semiotics (Cat. No.99CH37014), Cambridge, MA, USA, 1999.
- [8] Baechle T, Hentzelt S, Graichen K. Nonlinear model predictive control of a magnetic levitation system[J]. Control Engineering Practice, 2013.21(9):1250-1258.
- [9] 王小川, 史峰, 郁磊. Matlab 神经网络 43 个案例分析[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2019.
- [10] 何晓群, 刘文卿. 应用回归分析(第五版)[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2019.
- [11] Hajjaji A E, Ouladsine M. Modeling and nonlinear control of magnetic levitation systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2001.48(4):831-838.
- [12] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling

- and control[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1985.SMC-15(1):116-132.
- [13]Jang S R. ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1993.23(3):665-685.
- [14]Qin Y, Peng H, Ruan W, et al. A modeling and control approach to magnetic levitation system based on state-dependent ARX model[J]. Journal of Process Control, 2014.24(1):93-112.
- [15]Peng H, Ozaki T, Haggan-Ozaki V, Toyoda Y. A parameter optimization method for radial basis function type models[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2003.14(2):432-438.
- [16]覃业梅. 基于状态相依模型的复杂系统建模及控制方法研究[D]. 博士论文,中南大学,2015.
- [17]Priestley M B. State dependent models: A general approach to nonlinear time series analysis[J]. Time Series Anal., 1980(1):57-71.
- [18]Marquardt D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters[J], SIAM J. Appl. Math., 1963(11):431-441.
- [19]Mathwork. Solve nonlinear least-squares (nonlinear data-fitting) problems[EB/OL]. <https://ww2.mathworks.cn/help/optim/ug/lsqnonlin.html>, 2020-04-05.
- [20]李国勇,杨丽娟. 神经·模糊·预测控制及其MATLAB实现(第4版)[M]. 北京:电子工业出版社, 2018.
- [21]Humusoft. Educational Models: CE152 Magnetic Levitation Model[EB/OL]. <http://www.humusoft.cz/models/ce152/>, 2020-04-25.
- [22]李飞,李中华,宋学瑞,陈宁. 电路理论[M]. 北京:中国水利水电出版社,2017.
- [23]王建辉,顾树生. 自动控制原理(第二版)[M]. 北京:清华大学出版社,2014.
- [24]Gan M, Peng H. Stability analysis of RBF network-based state-dependent autoregressive model for nonlinear time series[J]. Applied Soft Computing, 2012.12(1):174-181.
- [25]Wang Y, Boyd S. Fast Model Predictive Control Using Online Optimization[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2010.18(2):267-278.