Chương 1

Không gian affine và phẳng

1.1 Không gian affine

Hình học cổ điển trong chương trình phổ thông trung học (PTTH) được xây dựng với các đối tượng cơ bản là điểm, đường thẳng, mặt phẳng và một hệ tiên đề qui định những mối "quan hệ" ban đầu giữa chúng. Hình học định nghĩa theo cách này có ưu điểm là trực quan, dễ trình bày và phù hợp với khả năng tiếp thu cũng như trình độ của học sinh PTTH, nhưng có nhược điểm là sẽ gặp khó khăn khi mở rộng cho trường hợp nhiều chiều vì sẽ có quá nhiều đối tượng cơ bản (các phẳng) và theo đó chắc chắn sẽ là một hệ thống tiên đề phức tạp. Hơn nữa nhiều chứng minh trong hình học cổ điển thường đòi hỏi sự khôn ngoan, mưu mẹo và thường không có phương pháp thống nhất. Sau các thành tựu của đại số và nhất là của Đại số tuyến tính, người ta đã tìm thấy một cách trình bày lại hình học cổ điển đơn giản hơn, dưới dạng tổng quát hơn và có phương pháp nghiên cứu một cách thống nhất (phương pháp tọa độ). Hình học affine được xây dựng với chỉ hai đối tượng cơ bản là điểm, vector cùng với 8 tiên đề về vector và hai tiên đề về điểm. Các chứng minh trong hình học affine đa số ngắn gọn và chủ yếu sử dụng các thành tựu của Đại số tuyến tính. Các khái niệm như các phẳng (đường thẳng và mặt phẳng là các phẳng 1-chiều và 2-chiều) sẽ có định nghĩa của chúng. Có thể có những định nghĩa khác nhau (nhưng tương đương) về một không gian affine (Bài tập **??** là một ví dụ) nhưng định nghĩa dưới đây là một định nghĩa kinh điển được trình bày trong hầu hết các giáo trình về Hình học affine ở Việt Nam.

1.1.1 Không gian affine

Định nghĩa 1. Cho $\mathbb{V}$ là một không gian vector trên trường $\mathbb{K}$ và $\mathbb{A}$ là một tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó được gọi là *điểm*. Các vector, để thuận tiện cho việc trình bày cũng như để có tính trực quan, thường được ký hiệu bằng các chữ thường với một mũi tên ở bên trên như $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \ldots, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \ldots$; còn các điểm thường được ký hiệu bằng các chữ hoa $A, B, C \ldots, M, N, P, \ldots$. Giả sử có ánh xạ

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{V} \\ (M, N) &\longmapsto \Phi(M, N) \end{aligned}$$

thoả mãn hai điều kiện sau:

1. với điểm $M \in \mathbb{A}$ và vector $\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}$, có một và chỉ một điểm $N \in \mathbb{A}$ sao cho $\Phi(M, N) = \overrightarrow{v}$;
2. với ba điểm M, N, P tuỳ ý của $\mathbb{A}$ ta luôn luôn có

$$\Phi(M, N) + \Phi(N, P) = \Phi(M, P).$$

Khi đó ta nói $\mathbb{A}$ là một *không gian affine*, hay đầy đủ hơn $\mathbb{A}$ là *không gian affine trên trường* $\mathbb{K}$ *liên kết với không gian vector* $\mathbb{V}$ *bởi ánh xạ liên kết* Φ.

$\mathbb{V}$ được gọi là *không gian vector liên kết* với (hay *không gian nền* của) $\mathbb{A}$ và thường được ký hiệu lại là $\overrightarrow{\mathbb{A}}$. Còn Φ được gọi là *ánh xạ liên kết* và để thuận tiện cũng như trực quan hơn ta thay ký hiệu $\Phi(M, N)$ bằng $\overrightarrow{MN}$. Khi đó các điều kiện trong định nghĩa có thể được viết lại như sau:

1. $\forall M \in \mathbb{A}, \forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathbb{A}};\ \exists!\ N \in \mathbb{A},\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{v}$;
2. $\forall M, N, P \in \mathbb{A};\ \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Đẳng thức trong điều kiện 2 của định nghĩa được gọi là *hệ thức Chasles.*

Khi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ta nói $\mathbb{A}$ là một *không gian affine thực*. Khi $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ta nói $\mathbb{A}$ là một *không gian affine phức*.

Đôi khi ta nói $\mathbb{A}$ là một $\mathbb{K}$-*không gian affine* để nhấn mạnh về trường $\mathbb{K}$.

$(\mathbb{A}, \overrightarrow{\mathbb{A}}, \Phi)$ là ký hiệu đầy đủ của một không gian affine. Trong trường hợp không có điều gì gây nhầm lẫn, để đơn giản ta chỉ ghi vắn tắt là $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ hoặc $\mathbb{A}$.

Khi $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ là không gian vector n-chiều thì ta nói $\mathbb{A}$ là không gian affine n-chiều và dùng ký hiệu $\mathbb{A}^n$ để nhấn mạnh về số chiều của $\mathbb{A}$. Ký hiệu số chiều của $\mathbb{A}$ là $\dim \mathbb{A}$. Như vậy

$$\dim \mathbb{A} = \dim \overrightarrow{\mathbb{A}}.$$

Trong giáo trình này, nếu không nói gì thêm thì không gian affine là không gian affine n-chiều và trường $\mathbb{K}$ sẽ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc là trường số phức $\mathbb{C}$. Tuy vậy, một số chương như các chương liên quan đến siêu mặt bậc hai chỉ sẽ chú trọng đến việc trình bày trong không gian thực. Các vấn đề liên quan đến không gian phức sẽ được giới thiệu trong các phụ lục. Các không gian affine trên một trường $\mathbb{K}$ tùy ý như $\mathbb{K}$ là trường hữu hạn, $\mathbb{K}$ là trường có đặc số khác không ... sẽ là các đề tài dành cho sinh viên làm tiểu luận, niên luận, khóa luận hoặc đề tài nghiên cứu.

1.1.2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Đối với hình học giải tích ở PTTH, chúng ta cần phân biệt không gian ba chiều thông thường, là không gian chỉ gồm các điểm, ký hiệu là $\mathbb{E}^3$ và không gian các vector "tự do", ký hiệu là $\overrightarrow{\mathbb{E}}^3$. Phép cộng vector và phép nhân vector với một số thực chứng tỏ $\overrightarrow{\mathbb{E}}^3$ là một không gian vector ba chiều. Khi đó việc "vẽ" vector nối hai điểm A và B chính là ánh xạ liên kết Φ. Chúng ta có $\mathbb{E}^3$ là một không gian affine liên kết với $\overrightarrow{\mathbb{E}}^3$ vì có thể kiểm tra dễ dàng ánh xạ

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{E}}^3\\ (A, B) &\longmapsto \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

thoả mãn các điều kiện nêu trong Định nghĩa 1.

Ví dụ 2. Cho $\mathbb{V}$ là không gian vector trên trường $\mathbb{K}$. Ánh xạ

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V}\\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &\longmapsto \Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) := \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\end{aligned}$$

rõ ràng là thoả mãn các điều kiện của Định nghĩa 1 nên $\mathbb{V}$ là không gian affine liên kết với chính nó. Ta nói Φ xác định một *cấu trúc affine chính tắc* trên không gian vector $\mathbb{V}$ hay $\mathbb{V}$ là *không gian affine với cấu trúc affine chính tắc*.

Trường hợp đặc biệt, $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \cdots \times \mathbb{K}}_{n}$ là một không gian affine n chiều với cấu trúc affine chính tắc.

Với ví dụ này chúng ta thấy mỗi không gian vector là một không gian affine. Ngược lại chúng ta có thể đưa cấu trúc vector vào không gian affine $\mathbb{A}$ bằng cách chọn cố định một điểm $O \in \mathbb{A}$ và đồng nhất mỗi điểm $M \in \mathbb{A}$ với vector $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$ (xem Bài tập **??**). Như vậy chúng ta thấy không gian affine và không gian vector cùng chiều (ví dụ không gian nền của nó chẳng hạn) chỉ "khác" nhau ở "một điểm cố định".

Chú ý. Các bài tập ở mục này sẽ cho chúng ta thêm một số ví dụ về "chuyển cấu trúc affine" từ một không gian affine vào một không gian bất kỳ nhờ một song ánh; tích của hai không gian affine (là một không gian affine); không gian affine thương và một định nghĩa khác (tương đương với Định nghĩa 1) của không gian affine v.v....

1.1.3 Một số tính chất đơn giản suy ra từ định nghĩa

Sau đây là một số tính chất đơn giản suy ra từ định nghĩa của không gian affine.

Với mọi $M, N, P, Q \in \mathbb{A}$, ta có

1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ khi và chỉ khi $M = N$,
2. $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$,
3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$,
4. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$.

Chứng minh.

1. Giả sử $M = N$. Theo hệ thức Chasles ta có
$$\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}.$$
Do đó
$$\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}.$$
Ngược lại, nếu $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ thì theo chứng minh trên ta cũng có $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$. Do đó, theo điều kiện thứ nhất trong Định nghĩa 1, ta có $M = N$.

2. Theo hệ thức Chasles ta có
$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{O}.$$
Do đó
$$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}.$$

3. Ta có
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}.$$

4. Suy ra từ hệ thức Chasles và tính chất 2. □

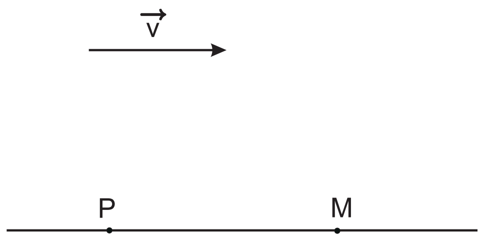
1.2 Phẳng-Độc lập affine và phụ thuộc affine-Bao affine

1.2.1 Phẳng

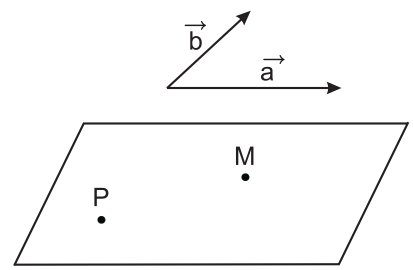
Phẳng là khái niệm mở rộng theo số chiều của các khái niệm quen thuộc như điểm (0-chiều), đường thẳng (1-chiều) và mặt phẳng (2-chiều). Trong $\mathbb{E}^3$, một đường thẳng d được hoàn toàn xác định nếu như chúng ta biết một điểm $P \in d$ và một vector chỉ phương $\overrightarrow{v}$ của nó. Một mặt phẳng α được hoàn toàn xác định nếu như chúng ta biết một điểm $P \in \alpha$ và một cặp vector chỉ phương $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ của nó. Chúng ta có thể mô tả đường thẳng d và mặt phẳng α như sau
$$d = \{M \in \mathbb{E}^3 : \overrightarrow{PM} = a\overrightarrow{v}; a \in \mathbb{R}\},$$
$$\alpha = \{M \in \mathbb{E}^3 : \overrightarrow{PM} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}; a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Theo cách mô tả này, định nghĩa sau đây hoàn toàn tự nhiên

Định nghĩa 2. Cho $(\mathbb{A}, \overrightarrow{\mathbb{A}}, \Phi)$ là một không gian affine, P là một điểm thuộc $\mathbb{A}$ và $\overrightarrow{\alpha}$ là một không gian vector con của $\overrightarrow{\mathbb{A}}$. Tập hợp
$$\alpha = \{M \in \mathbb{A} : \overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{\alpha}\}$$
gọi là *phẳng* đi qua P với *(không gian chỉ) phương* $\overrightarrow{\alpha}$.

Nếu $\dim \overrightarrow{\alpha} = m$, ta nói α là một *phẳng m-chiều* hay một *m-phẳng* và viết $\dim \alpha = m$. Như vậy
$$\dim \alpha = \dim \overrightarrow{\alpha}.$$



Hình 1.1: Đường thẳng được xác định bởi một điểm và một vector chỉ phương.



Hình 1.2: Mặt phẳng được xác định bởi một điểm và một cặp vector chỉ phương.

Theo cách gọi thông thường, 1-phẳng là *đường thẳng*, còn 2-phẳng là *mặt phẳng*. *Siêu phẳng* là tên gọi của phẳng có đối chiều 1, tức là nếu số chiều của không gian là n thì số chiều của siêu phẳng sẽ là $n-1$.

Nhận xét.

1. Nếu α là phẳng đi qua điểm P thì $P \in \alpha$ và $\forall M, N \in \alpha$, vector $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{\alpha}$.

2. 0-phẳng là tập chỉ gồm một điểm. Do đó ta có thể xem một điểm là một 0-phẳng.

3. Điểm P trong định nghĩa của phẳng α không đóng vai trò gì đặc biệt so với các điểm khác của α, điểm P bình đẳng với mọi điểm của α. Điều này có nghĩa là:

$$\forall Q \in \alpha;\ \alpha = \{M \in \mathbb{A} : \overrightarrow{QM} \in \overrightarrow{\alpha}\}.$$

4. Giả sử α là phẳng đi qua P với phương $\overrightarrow{\alpha}$ và β là phẳng đi qua Q với phương $\overrightarrow{\beta}$. Khi đó $\alpha \subset \beta$ khi và chỉ khi $P \in \beta$ và $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$.

   Từ đó suy ra $\alpha \equiv \beta$ khi và chỉ khi $P \in \beta$ (hay $Q \in \alpha$) và $\overrightarrow{\alpha} \equiv \overrightarrow{\beta}$.

5. Nếu α là phẳng với phương $\overrightarrow{\alpha}$ thì α là không gian affine liên kết với $\overrightarrow{\alpha}$ bởi ánh xạ liên kết

$$\Phi|_{\alpha\times\alpha} : \alpha \times \alpha \longrightarrow \overrightarrow{\alpha}.$$

   Chính vì thế chúng ta có thể xem phẳng là *không gian affine con*.

Để xác định phương $\overrightarrow{\alpha}$ của một m-phẳng α chúng ta chỉ cần biết một cơ sở của $\overrightarrow{\alpha}$ là đủ. Chính vì thế ở PTTH người ta dùng các khái niệm vector chỉ phương của một đường thẳng và cặp vector chỉ phương của một mặt phẳng thay cho khái niệm không gian chỉ phương của chúng.

Do đó, trong trường hợp nhiều chiều chúng ta có thể dùng tên gọi *hệ vector chỉ phương* để chỉ một cơ sở của không gian chỉ phương. Có điều đáng chú ý là một m-phẳng chỉ có một không gian chỉ phương duy nhất nhưng có vô số hệ vector chỉ phương khác nhau.

1.2.2 Độc lập affine và phụ thuộc affine

Các khái niệm *độc lập affine* và *phụ thuộc affine* trong Hình học affine là các khái niệm tương tự các khái niệm *độc lập tuyến tính* và *phụ thuộc tuyến tính* trong Đại số tuyến tính.

1.2.3 Độc lập affine và phụ thuộc affine

Định nghĩa 3. Hệ $m+1$ điểm $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ $(m \geq 1)$ của không gian affine $\mathbb{A}$ được gọi là *độc lập affine* nếu hệ m vector $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$ của $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ là một hệ vector độc lập tuyến tính.

Hệ điểm không độc lập affine gọi là *phụ thuộc affine.*

Chú ý.

1. Trong giáo trình này, cũng như trong một số các giáo trình về ĐSTT, khái niệm hệ vector khác với khái niệm tập hợp, mặc dù dùng ký hiệu như nhau. Trong một số giáo trình khác, nhiều tác giả sử dụng ký hiệu (   ) để chỉ một hệ vector.
2. Đối với hệ các điểm, đôi khi chúng ta sẽ nói vắn tắt *độc lập* và *phụ thuộc* thay cho cụm từ *độc lập affine* và *phụ thuộc affine.* Còn khi nói về hệ các vector thì các cụm từ *độc lập* và *phụ thuộc* sẽ thay cho *độc lập tuyến tính* và *phụ thuộc tuyến tính.*
3. Tập gồm chỉ một điểm A_0 bất kỳ (trường hợp m = 0) luôn được qui ước là độc lập.
4. Trong định nghĩa trên điểm A_0 bình đẳng như các điểm khác vì dễ chứng minh rằng (chứng minh xin dành cho bạn đọc), hệ $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi hệ vector
$$\{\overrightarrow{A_iA_0}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_m}\},\ i \in \{1, 2, ..., m\}$$
độc lập tuyến tính.
5. Hệ $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ phụ thuộc affine khi và chỉ khi hệ vector $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$ phụ thuộc tuyến tính.
6. Hệ con của một hệ độc lập là độc lập, còn hệ con của một hệ phụ thuộc thì chưa chắc đã phụ thuộc.

Ví dụ 3. 1. Hệ hai điểm $\{P, Q\}$ trong $\mathbb{A}$ là độc lập khi và chỉ khi $P \neq Q$.

2. Hệ ba điểm $\{P, Q, R\}$ trong $\mathbb{A}$ là độc lập khi và chỉ khi chúng không thuộc một đường thẳng (không thẳng hàng).
3. Hệ bốn điểm $\{P, Q, R, S\}$ trong $\mathbb{A}$ là độc lập khi và chỉ khi chúng không cùng thuộc một mặt phẳng (không đồng phẳng).
4. Tổng quát, hệ $m+1$ điểm $\{A_0, A_1, ..., A_m\}$ trong $\mathbb{A}$ là độc lập khi và chỉ khi chúng không cùng thuộc một $(m-1)$-phẳng.

Định lý 1.2.1. *Trong không gian affine n chiều* $\mathbb{A}^n$, *với* $0 < m \le n+1$, *luôn tồn tại các hệ* m *điểm độc lập. Mọi hệ gồm hơn* $n+1$ *điểm đều phụ thuộc.*

Chứng minh. Giả sử $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ là một cơ sở nào đó của $\overrightarrow{\mathbb{A}^n}$. Lấy $A_0 \in \mathbb{A}^n$. Khi đó tồn tại duy nhất các điểm A_i sao cho

$$\overrightarrow{A_0A_i} = \overrightarrow{e_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Theo định nghĩa, hệ $\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là hệ gồm $n+1$ điểm độc lập. Khi đó, dĩ nhiên hệ $\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}\}$, với $0 < m \le n+1$, là hệ gồm m điểm độc lập.

Nếu hệ $\{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_p\}$ gồm hơn $n+1$ điểm, tức là $p > n$, thì hệ $\{\overrightarrow{B_0B_1}, \overrightarrow{B_0B_2}, \ldots, \overrightarrow{B_0B_p}\}$ là hệ có nhiều hơn n vector nên phụ thuộc tuyến tính. Theo định nghĩa, hệ gồm $p+1$ điểm $\{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_p\}$ phụ thuộc affine. □

1.2.4 Giao của các phẳng-Bao affine

Cho $\{\alpha_i : i \in I\}$ là một họ không rỗng các phẳng trong không gian affine $\mathbb{A}$.

Định lý 1.2.2. *Nếu* $\bigcap_{i\in I} \alpha_i \neq \emptyset$ *thì* $\bigcap_{i\in I} \alpha_i$ *là một phẳng có phương là* $\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{\alpha}_i$.

Chứng minh. Vì $\bigcap_{i\in I} \alpha_i \neq \emptyset$ nên tồn tại $P \in \bigcap_{i\in I} \alpha_i$. Điểm $M \in \bigcap_{i\in I} \alpha_i$ khi và chỉ khi $M \in \alpha_i, \forall i \in I$; tức là khi và chỉ khi $\overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{\alpha}_i$, $\forall i \in I$. Điều này tương đương với $\overrightarrow{PM} \in \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{\alpha}_i$. Nói cách khác

$$\bigcap_{i\in I} \alpha_i = \{M \in \mathbb{A} : \overrightarrow{PM} \in \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{\alpha}_i\},$$

nghĩa là $\bigcap_{i\in I} \alpha_i$ là phẳng đi qua P với không gian chỉ phương là $\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{\alpha}_i$. □

Định nghĩa 4. Phẳng $\bigcap_{i\in I} \alpha_i$ trong Định lý 1.2.2 được gọi là *phẳng giao* của các phẳng α_i.

Từ định nghĩa trên, chúng ta dễ nhận thấy rằng $\bigcap_{i\in I} \alpha_i$ chính là phẳng lớn nhất (theo quan hệ bao hàm) chứa trong tất cả các phẳng α_i, $i \in I$.

Định nghĩa 5. Cho $\mathbf{X}$ là một tập con khác rỗng của không gian affine $\mathbb{A}$. Khi đó giao của mọi phẳng chứa $\mathbf{X}$ trong $\mathbb{A}$ sẽ là một cái phẳng, gọi là *bao affine* của $\mathbf{X}$, ký hiệu $\langle \mathbf{X} \rangle$.

Bao affine $\langle \mathbf{X} \rangle$ của tập $\mathbf{X}$ là cái phẳng bé nhất (theo quan hệ bao hàm) chứa $\mathbf{X}$.

Định nghĩa 6. Cho $\{\alpha_i : i \in I\}$ là một họ không rỗng các phẳng. Bao affine của tập hợp $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ được gọi là *phẳng tổng* (hay vắn tắt *tổng*) của các phẳng α_i, ký hiệu $\sum_{i\in I} \alpha_i$.

Như vậy phẳng tổng là phẳng bé nhất (có số chiều bé nhất) chứa tất cả các α_i, $i \in I$.
Khi I là tập hữu hạn, chẳng hạn $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ thì ta viết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ hay $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ để biểu thị cho tổng của các phẳng α_i, thay cho $\sum_{i\in I} \alpha_i$.

Dễ thấy rằng nếu $\mathbf{X}$ là một hệ hữu hạn điểm, $\mathbf{X} = \{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$, thì tổng $P_0 + P_1 + \ldots + P_m$ (xem các P_i là các 0-phẳng) là phẳng có số chiều bé nhất đi qua các điểm này. Hơn nữa $\dim(P_0 + P_1 + \ldots + P_m) = \operatorname{rank}\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots \overrightarrow{P_0P_m}\}$. Do đó, nếu hệ điểm $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ độc lập thì $\dim(P_0 + P_1 + \ldots + P_m) = m$.

Chứng minh nhận xét này xin dành cho bạn đọc.

Định lý 1.2.3. *Cho α và β là hai cái phẳng. Nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì với mọi điểm $P \in \alpha$ và với mọi điểm $Q \in \beta$ ta có $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Ngược lại nếu có điểm $P \in \alpha$ và có điểm $Q \in \beta$ sao cho $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ thì $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.*

Chứng minh. Giả sử $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Lấy điểm $M \in \alpha \cap \beta$. Khi đó với mọi điểm $P \in \alpha$ và với mọi điểm $Q \in \beta$, ta có $\overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{MQ} \in \overrightarrow{\beta}$. Do đó

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}.$$

Ngược lại giả sử có điểm $P \in \alpha$ và có điểm $Q \in \beta$ sao cho $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Do $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ nên

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}; \quad \text{với} \quad \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\beta}.$$

Khi đó tồn tại duy nhất điểm $M \in \alpha$ và tồn tại duy nhất điểm $N \in \beta$ sao cho $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{QN} = -\overrightarrow{v}$. Do đó, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{QN}$ hay $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PM}$ nên $N \equiv M$, tức là $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. □

Chúng ta có định lý sau nói về số chiều của tổng hai cái phẳng, tương tự như định lý nói về số chiều của tổng hai không gian vector con.

Định lý 1.2.4. *Giả sử α và β là hai cái phẳng với phương lần lượt là $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$. Khi đó*

1. *nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì*
$$\dim(\alpha + \beta) = \dim \alpha + \dim \beta - \dim(\alpha \cap \beta);$$

2. *nếu $\alpha \cap \beta = \emptyset$ thì*

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim \alpha + \dim \beta - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) + 1.$$

Chứng minh.

1. Nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì theo Định lý 1.2.2, $\alpha \cap \beta$ là phẳng có phương $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}$. Lấy $P \in \alpha \cap \beta$ và gọi γ là phẳng đi qua P với phương $\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Rõ ràng là $\alpha \subset \gamma$ và $\beta \subset \gamma$. Ngoài ra nếu có phẳng γ' chứa α và β thì $P \in \gamma'$ và phương của γ' phải chứa $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$. Nói cách khác ta có $\gamma \subset \gamma'$. Vậy γ là phẳng bé nhất chứa α và β, tức là $\gamma = \alpha + \beta$. Do đó

$$\begin{aligned}
\dim(\alpha + \beta) &= \dim \gamma = \dim \overrightarrow{\gamma} = \dim(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) \\
&= \dim \overrightarrow{\alpha} + \dim \overrightarrow{\beta} - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) \\
&= \dim \alpha + \dim \beta - \dim(\alpha \cap \beta).
\end{aligned}$$

2. Giả sử $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Lấy $P \in \alpha$ và $Q \in \beta$, theo Định lý 1.2.3 ta có $\overrightarrow{PQ} \notin \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Gọi $\overrightarrow{\gamma}$ là không gian con một chiều sinh bởi $\overrightarrow{PQ}$, ta có $(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) \cap \overrightarrow{\gamma} = \{\overrightarrow{0}\}$. Gọi η là phẳng đi qua P với phương là $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}$ thì rõ ràng $\alpha \subset \eta$ và $\beta \subset \eta$. Do đó $\alpha + \beta \subset \eta$.

   Ngoài ra nếu η' là phẳng chứa α và β thì $P \in \eta'$ và phương $\overrightarrow{\eta'}$ của η' phải chứa $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ và $\overrightarrow{\gamma}$. Do đó $\eta \subset \eta'$. Từ đây suy ra rằng η là cái phẳng bé nhất chứa cả α và β, hay nói cách khác $\eta = \alpha + \beta$.

   Do $\dim((\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) \cap \overrightarrow{\gamma}) = 0$ nên ta có

$$\begin{aligned}
\dim(\alpha + \beta) &= \dim \eta \\
&= \dim(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}) \\
&= \dim \overrightarrow{\alpha} + \dim \overrightarrow{\beta} + \dim \overrightarrow{\gamma} - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) \\
&= \dim \alpha + \dim \beta + 1 - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}).
\end{aligned}$$

□

1.3 Vị trí tương đối

Mục này nêu các định nghĩa về các vị trí tương đối có thể xảy ra giữa hai phẳng như cắt nhau, chéo nhau và song song. Cần phải chú ý là các định nghĩa nêu ở mục này không hoàn toàn giống như ở các định nghĩa tương tự ở PTTH. Các ví dụ ngay sau định nghĩa sẽ giúp chúng ta thấy rõ sự khác nhau này. Lý do chọn các định nghĩa như thế này là để các phát biểu liên quan đến các vị trí tương đối giữa các phẳng được phát biểu một cách đơn giản và ngắn gọn hơn. Cũng có thể trình bày các định nghĩa sao cho phù hợp với các định nghĩa đã biết ở PTTH. Vấn đề này được đưa vào phần bài tập (xem Bài tập **??**).

Định nghĩa 7. Hai phẳng α và β được gọi là *cắt nhau cấp* r nếu $\alpha \cap \beta$ là một r - phẳng. Chúng được gọi là *chéo nhau cấp* r nếu $\alpha \cap \beta = \emptyset$ và $\dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) = r$. Chúng được gọi là *song song* (với nhau) nếu $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$ hoặc $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha}$.

Ví dụ 4. Xét trong không gian 3 chiều thông thường $\mathbb{E}^3$.

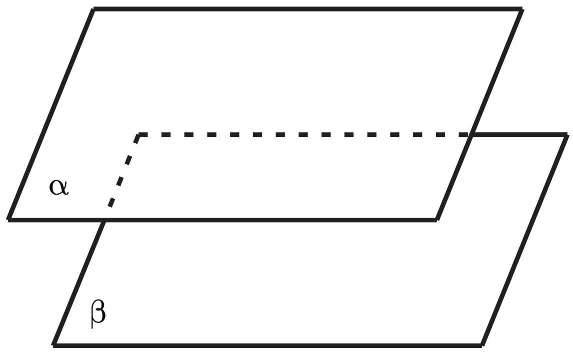
1. Hai đường thẳng "cắt nhau theo nghĩa ở PTTH" là hai 1-phẳng cắt nhau cấp 0. Tổng của chúng là mặt phẳng duy nhất xác định bởi hai đường thẳng đó.

2. Hai mặt phẳng "cắt nhau theo nghĩa ở PTTH" là hai 2-phẳng cắt nhau cấp 1. Tổng của chúng chính là $\mathbb{E}^3$.

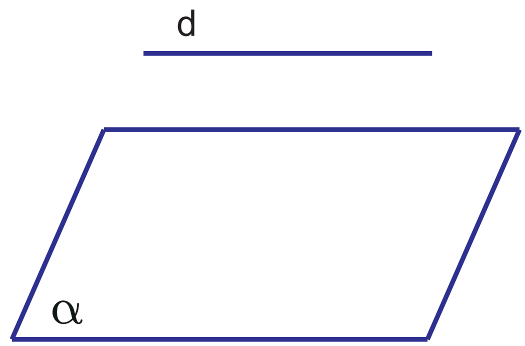
3. Hai đường thẳng "song song theo nghĩa ở PTTH" là hai 1-phẳng song song. Chúng cũng là hai 1-phẳng chéo nhau cấp 1. Tổng của chúng chính là mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.

4. Tương tự, hai mặt phẳng "song song theo nghĩa ở PTTH" là hai 2-phẳng song song. Chúng cũng là hai 2-phẳng chéo nhau cấp 2.

5. Hai đường thẳng "chéo nhau theo nghĩa ở PTTH" là hai 1-phẳng chéo nhau cấp 0. Tổng của chúng chính là $\mathbb{E}^3$.



Hình 1.3: Hai mặt phẳng song song hay hai mặt phẳng chéo nhau cấp 2.



Hình 1.4: Đường thẳng song song với mặt phẳng hay đường thẳng và mặt phẳng chéo nhau cấp 1.

6. Theo Định lý 1.2.4, trong $\mathbb{E}^3$ không tồn tại hai mặt phẳng chéo nhau cấp 0 hoặc cấp 1.

Định lý 1.3.1. *Cho hai phẳng song song α và β. Nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì $\alpha \subset \beta$ hoặc $\beta \subset \alpha$.*

Chứng minh.

Do α và β có điểm chung nên giao $\alpha \cap \beta$ là một phẳng với phương $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}$. Do α và β song song nên $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$ hoặc $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha}$. Nếu $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$ thì $\alpha \cap \beta = \alpha$ tức là $\alpha \subset \beta$. Nếu $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha}$ thì $\alpha \cap \beta = \beta$, tức là $\beta \subset \alpha$. □

Định lý 1.3.2. *Qua một điểm A có một và chỉ một m-phẳng song song với m-phẳng α đã cho.*

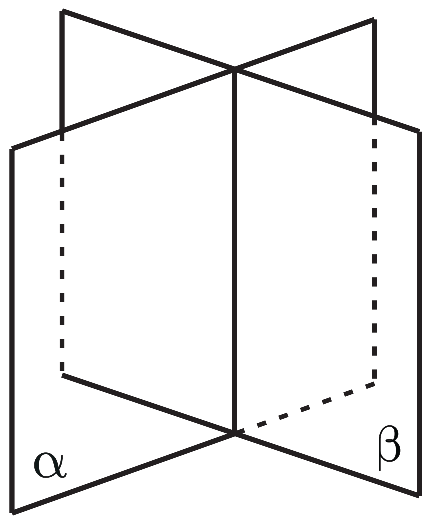
Chứng minh. Gọi β là m-phẳng đi qua A với phương là $\overrightarrow{\alpha}$. Khi đó β là phẳng m-chiều song song với α. Nếu β' cũng là m-phẳng đi qua A và song song với α thì suy ra $\overrightarrow{\beta}' = \overrightarrow{\beta} (= \overrightarrow{\alpha})$. Do β và β' có điểm chung nên theo Định lý 1.3.1 ta suy ra $\beta \equiv \beta'$. □

Hình 2.

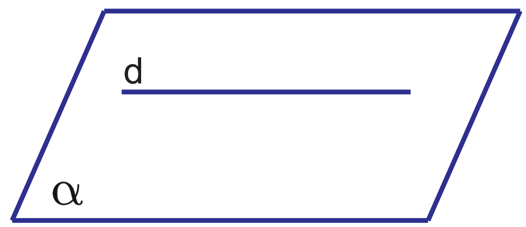
Định lý 1.3.3. *Trong không gian affine n chiều $\mathbb{A}^n$ cho một siêu phẳng α và một m-phẳng β $(1 \leq m \leq n-1)$. Khi đó α và β hoặc song song hoặc cắt nhau theo một $(m-1)$-phẳng.*

Chứng minh. Nếu $\beta \subset \alpha$ thì theo định nghĩa ta có α và β song song.

Nếu $\beta \not\subset \alpha$, thì $\alpha + \beta = \mathbb{A}$. Ta có hai trường hợp.



Hình 1.5: Hai mặt phẳng cắt nhau cấp 1.



Hình 1.6: Đường thẳng thuộc mặt phẳng hay đường thẳng và mặt phẳng cắt nhau cấp 1.

1. Trường hợp 1: $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Áp dụng công thức 1 của Định lý 1.2.4 ta có

$$\dim \mathbb{A} = \dim \alpha + \dim \beta - \dim(\alpha \cap \beta),$$

hay

$$n = n - 1 + m - \dim(\alpha \cap \beta).$$

Suy ra $\quad \dim(\alpha \cap \beta) = m - 1.$

Vậy α và β cắt nhau theo một $(m-1)$-phẳng (cắt nhau cấp $m-1$).

2. Trường hợp 2: $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Áp dụng công thức 2 của Định lý 1.2.4 ta có

$$n = n - 1 + m + 1 - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}).$$

Suy ra $\dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) = m$. Điều này chứng tỏ $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta}$, hay $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha}$, tức α và β song song. □

1.4 Mục tiêu affine-Phương trình của phẳng

Trong mục này chúng ta sẽ đưa vào không gian affine một "hệ tọa độ". Nhờ có "hệ tọa độ" này các đối tượng hình học như điểm, phẳng và sau này là siêu mặt bậc hai v.v. . . sẽ được đồng nhất với đối tượng đại số như tọa độ (phần tử của $\mathbb{K}^n$), phương trình, hệ phương trình đại số . . . . Nhờ vậy, chúng ta có thể áp dụng Đại số tuyến tính vào việc nghiên cứu các đối tượng hình học (phương pháp tọa độ trong hình học). Bắt đầu từ đây chúng ta sẽ thấy dần vai trò của Đại số tuyến tính trong việc nghiên cứu hình học affine. Đại số tuyến tính cũng đóng vai trò chính trong việc xây dựng và nghiên cứu Hình học xạ ảnh. Điều này giải thích lý do Hình học affine cùng với Hình học xạ ảnh, trong chương trình Hình học dành cho Sinh viên Sư phạm Toán, được gọi chung một cái tên là Hình học tuyến tính. Chúng ta sẽ thấy nhiều kết quả của Hình học affine (và sau này là các kết quả trong Hình học xạ ảnh) chính là các kết quả của Đại số tuyến tính được “trình bày" lại theo ngôn ngữ hình học.

1.4.1 Mục tiêu và tọa độ affine

Trong Hình học giải tích ở PTTH hai hệ tọa độ thường được dùng là hệ tọa độ Descartes, hệ tọa độ gồm 1 điểm gốc O và một hệ các vector trực chuẩn; hệ tọa độ trực giao, hệ tọa độ gồm 1 điểm gốc O và một hệ các vector trực giao. Hệ tọa độ affine (hệ tọa độ xiên), ít được thấy giới thiệu trong các sách của PTTH.

Định nghĩa 8. Cho $\mathbb{A}^n$ là một không gian affine n chiều. Hệ $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$, gồm một điểm $O \in \mathbb{A}^n$ và một cở sở $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ của $\overrightarrow{\mathbb{A}^n}$, được gọi là một *mục tiêu affine* (hay vắn tắt *mục tiêu*) của $\mathbb{A}^n$. Điểm O được gọi là *gốc*, vector $\overrightarrow{e_i}$ được gọi là *vector cơ sở* thứ i, $i = 1, 2, ..., n$.

Để chỉ mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ thường chúng ta sẽ viết $\{O; \overrightarrow{e_i}\}_{i=1,2,\ldots,n}$ hay đơn giản hơn nữa là $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$.

Giả sử $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ là một mục tiêu của không gian affine $\mathbb{A}^n$. Khi đó với mọi $M \in \mathbb{A}^n$, vector $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{A}^n$, nên ta có biểu diễn tuyến tính của $\overrightarrow{OM}$ qua cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$:

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}.$$

Điều này có nghĩa là vector $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$, $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Khi đó bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, viết tắt (x_i), cũng được gọi là *tọa độ* của M đối với (hay trong) mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ và x_i được gọi là *tọa độ thứ i* của M. Để chỉ điểm M có tọa độ (x_i) đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$, ta thường dùng một trong các ký hiệu

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n)/_{\{O;\overrightarrow{e_i}\}} \quad \text{hoặc} \quad M(x_i)/_{\{O;\overrightarrow{e_i}\}}.$$

Tuy nhiên nếu không có gì gây nhầm lẫn, ta chỉ viết

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{hay} \quad M(x_i).$$

Giả sử M có tọa độ (x_i) và N có tọa độ (y_i) đối với mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{e_i} - \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \overrightarrow{e_i}.$$

Hay vector $\overrightarrow{MN}$ có tọa độ $(y_i - x_i)$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$.

Như vậy, *"tọa độ của vector bằng tọa độ của điểm ngọn trừ đi tọa độ của điểm gốc".*

Nhận xét.

1. Giả sử trên $\mathbb{A}^n$ đã chọn mục tiêu cố định $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ M &\longmapsto (x_i) \end{aligned}$$

   với (x_i) là tọa độ của M đối với mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$. Ta có φ là một song ánh. Ánh xạ này cho phép đồng nhất mỗi điểm của $\mathbb{A}$ với một phần tử của $\mathbb{K}^n$ và nhờ đó sau này các đối tượng hình học sẽ được đồng nhất với các đối tượng đại số.

2. Xét mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ của $\mathbb{A}^n$ và gọi $E_i \in \mathbb{A}^n,\ i = 1, ..., n$ là các điểm sao cho

$$\overrightarrow{OE}_i = \overrightarrow{e_i}.$$

   Khi đó hệ điểm $\{O, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ là hệ điểm độc lập affine. Ngược lại một hệ gồm $n+1$ điểm $\{O, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ độc lập xác định mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ với $\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{OE_i}$. Do đó ta cũng gọi một hệ $n+1$ điểm độc lập trong $\mathbb{A}^n$ là một mục tiêu affine và dùng ký hiệu $\{O; E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ hoặc $\{O; E_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ hoặc $\{O; E_i\}$ để chỉ một mục tiêu với điểm gốc là O. Theo định nghĩa ta có điểm O có tọa độ $(0, 0, \ldots, 0)$ và điểm E_i có tọa độ $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, số 1 đứng ở vị trí thứ i, đối với mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{E_i}\}$.

3. Siêu phẳng đi qua n điểm độc lập $O, E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_n$ được gọi là *siêu phẳng tọa độ thứ i*. Dễ thấy điểm M thuộc siêu phẳng tọa độ thứ i khi và chỉ khi $x_i = 0$, với x_i là tọa độ thứ i của M.

1.4.2 Công thức đổi mục tiêu

Giả sử trong không gian affine $\mathbb{A}^n$ ta có hai mục tiêu affine khác nhau $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ và $\{O', \overrightarrow{e_i}'\}$. Một điểm $M \in \mathbb{A}^n$ sẽ có hai bộ tọa độ khác nhau (x_i) và (x'_i) tương ứng đối với chúng. Vấn đề cần quan tâm là tìm mối liên hệ giữa các bộ tọa độ này. Giả sử

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} b_i \overrightarrow{e_i},$$

và

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1}' &= c_{11}\overrightarrow{e_1} + c_{21}\overrightarrow{e_2} + \ldots + c_{n1}\overrightarrow{e_n} \\ \overrightarrow{e_2}' &= c_{12}\overrightarrow{e_1} + c_{22}\overrightarrow{e_2} + \ldots + c_{n2}\overrightarrow{e_n} \\ & \ldots \\ \overrightarrow{e_n}' &= c_{1n}\overrightarrow{e_1} + c_{2n}\overrightarrow{e_2} + \ldots + c_{nn}\overrightarrow{e_n} \end{cases}$$

hay viết gọn $\overrightarrow{e_j}' = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\overrightarrow{e_i},\quad j = 1, 2, \ldots, n$. Điểm M có tọa độ trong hai mục tiêu đó theo thứ tự là (x_i) và (x'_i), có nghĩa là

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}, \quad \overrightarrow{O'M} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \overrightarrow{e_j}'.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \sum_{i=1}^{n} b_i \overrightarrow{e_i} + \sum_{j=1}^{n} x'_j \overrightarrow{e_j}' \\ = \sum_{i=1}^{n} b_i \overrightarrow{e_i} + \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j + b_i) \overrightarrow{e_i}.\end{aligned}$$

Do đó,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Công thức trên được viết dưới dạng tường minh

$$\begin{cases} x_1 & = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1n}x'_n + b_1 \\ x_2 & = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + \ldots + c_{2n}x'_n + b_2 \\ & \ldots \\ x_n & = c_{n1}x'_1 + c_{n2}x'_2 + \ldots + c_{nn}x'_n + b_n \end{cases}, \tag{1.2}$$

hay dưới dạng ma trận

$$[x] = C[x'] + [b], \tag{1.3}$$

với

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}'\}$, do đó C không suy biến ($\det C \neq 0$) và

$$[x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [x'] = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Công thức (1.1) (hay (1.2), (1.3)) và ma trận C lần lượt được gọi là *công thức đổi tọa độ* (hay *công thức đổi mục tiêu*) và *ma trận đổi tọa độ* (hay *ma trận đổi mục tiêu*) từ mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ sang mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{e_i}'\}$.

Ví dụ 5. Trong không gian affine $\mathbb{A}$ cho mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$. Giả sử O' là điểm có tọa độ (b_i) đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ và $\overrightarrow{e_i}' = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \ldots + \overrightarrow{e_i}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$.

1. Do ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$ là ma trận đơn vị nên công thức đổi tọa độ từ mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ sang mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{e_i}\}$ có dạng

$$x_i = x'_i + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Do ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}'\}$ là ma trận

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

nên công thức đổi tọa độ từ mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ sang mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}'\}$ có dạng

$$x_i = x'_i + x'_{i+1} + \ldots + x'_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

và công thức đổi tọa độ từ mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ sang mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{e_i}'\}$ có dạng

$$x_i = x'_i + x'_{i+1} + \ldots + x'_n + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

1.4.3 Phương trình của m-phẳng

Phương trình tham số. Cho $\mathbb{A}^n$ là một không gian affine n chiều, với mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ cho trước, và α là một m-phẳng đi qua điểm P với phương $\overrightarrow{\alpha}$, $0 < m < n$. Giả sử

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} b_i \overrightarrow{e_i},$$

và $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_m}\}$ là một cở sở của $\overrightarrow{\alpha}$, với

$$\overrightarrow{a_p} = \sum_{i=1}^{n} a_{ip} \overrightarrow{e_i}; \quad p = 1, 2, \ldots, m.$$

Điểm M có tọa độ (x_i) đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ thuộc α khi và chỉ khi $\overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{\alpha}$, tức là khi và chỉ khi có các phần tử $t_p \in \mathbb{K}$, $p = 1, 2, \ldots, m$ sao cho

$$\overrightarrow{PM} = \sum_{p=1}^{m} t_p \overrightarrow{a_p}.$$

Ta có

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i} - \sum_{i=1}^{n} b_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - b_i) \overrightarrow{e_i}, \tag{1.4}$$

và ta cũng có

$$\overrightarrow{PM} = \sum_{i=1}^{n} t_p \overrightarrow{a_p} = \sum_{p=1}^{m} t_p \sum_{i=1}^{n} a_{ip} \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{p=1}^{m} a_{ip} t_p) \overrightarrow{e_i}. \tag{1.5}$$

Nên từ (1.4) và (1.5) ta suy ra

$$x_i = \sum_{p=1}^{m} a_{ip} t_p + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Hệ phương trình (1.6) được viết dưới dạng tường minh

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{1m}t_m + b_1 \\ x_2 &= a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{2m}t_m + b_2 \\ & \ldots \\ x_n &= a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \ldots + a_{nm}t_m + b_n \end{cases}, \tag{1.7}$$

hay dưới dạng ma trận

$$[x] = A[t] + [b], \tag{1.8}$$

với

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

là ma trận có hạng bằng m và

$$[x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [t] = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Hệ phương trình (1.6), (1.7) và (1.8) có thể viết dưới dạng vector

$$\overrightarrow{x} = t_1\overrightarrow{a_1} + t_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + t_m\overrightarrow{a_m} + \overrightarrow{b} \tag{1.9}$$

với $\overrightarrow{x}$ là vector có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $\overrightarrow{b}$ là vector có tọa độ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Hệ phương trình (1.6) (hay (1.7), (1.8), (1.9)) được gọi là *phương trình tham số* của m-phẳng α còn các phần tử $t_p,\ p = 1, 2, ..., m$ gọi là các *tham số*.

Nhận xét.

1. Ánh xạ $M \in \alpha \mapsto (t_1, t_2, ..., t_m) \in \mathbb{K}^m$ là một song ánh từ α lên $\mathbb{K}^m$. Như vậy, mỗi điểm $M \in \alpha$ có thể đồng nhất với một bộ m số.
2. Do hệ vector $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p}\}$ độc lập nên ma trận $A = (a_{ip})_{n\times m}$ có hạng bằng m.
3. Ngược lại, dễ thấy một hệ phương trình dạng (1.6) (hay (1.7), (1.8), (1.9)) với hạng ma trận hệ số $A = (a_{ip})_{n\times m}$ bằng m sẽ là phương trình của m-phẳng đi qua điểm P có tọa độ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ với không gian chỉ phương $\overrightarrow{\alpha}$ có một cơ sở là $\{\overrightarrow{a_p} : \overrightarrow{a_p} = \sum_{i=1}^{n} a_{ip}\overrightarrow{e_i},\ p = 1, 2, \ldots, m\}$.

Ví dụ 6. Phương trình tham số của một đường thẳng α trong không gian affine n chiều có dạng

$$x_i = a_i t + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Trong đó t là tham số, các phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng 0 là các thành phần tọa độ của vector chỉ phương $\overrightarrow{a}$ của α, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ là tọa độ của điểm P cho trước thuộc α còn (x_i) là tọa độ của điểm tùy ý $M \in \alpha$.

Phương trình tổng quát. Trong không gian affine n chiều $\mathbb{A}^n$ cho m-phẳng α có phương trình tham số (1.7). Nếu xem phương trình tham số của α là một hệ gồm n phương trình đối với m ẩn $t_1, t_2, \ldots, t_m$ còn các $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, là các hằng thì từ điều kiện ma trận hệ số $A = (a_{ip})_{n\times m}$ có hạng là m ta có thể chọn trong n phương trình của hệ một hệ gồm m phương trình độc lập (có định thức của hệ khác không). Không mất tính tổng quát có thể giả sử đó là hệ gồm m phương trình đầu. Giải hệ m phương trình đó (là hệ Crammer) ta tìm được các nghiệm $t_1, t_2, \ldots, t_m$, biểu thị một cách duy nhất (do đó các t_i là duy nhất) dưới dạng bậc nhất qua các $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Thay m giá trị này của các t_i vào $n - m$ phương trình còn lại ta thu được hệ phương trình dạng

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j + x_{m+i} + c_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n - m. \tag{1.10}$$

Hay viết dưới dạng tường minh

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \ldots + c_{1m}x_m + x_{m+1} + c_1 = 0 \\ c_{21}x_1 + \ldots + c_{2m}x_m + x_{m+2} + c_2 = 0 \\ \ldots \\ c_{(n-m)1}x_1 + \ldots + c_{(n-m)m}x_m + x_n + c_{n-m} = 0 \end{cases}. \tag{1.11}$$

Ma trận hệ số của hệ phương trình (1.10) có hạng $n - m$ vì có định thức con cấp $n - m$ ứng với các ẩn $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ là

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Mỗi điểm thuộc m-phẳng α sẽ có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình trên và ngược lại.
Tóm lại, mỗi m-phẳng trong không gian $\mathbb{A}^n$ được biểu thị bằng một hệ phương trình tuyến tính có hạng bằng $n - m$.
Ta sẽ chứng minh điều ngược lại, mỗi hệ phương trình tuyến tính dạng

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ c_{21}x_1 + \ldots + c_{2n}x_n + c_2 = 0 \\ \ldots \\ c_{(n-m)1}x_1 + \ldots + c_{(n-m)n}x_n + c_{n-m} = 0 \end{cases}, \tag{1.12}$$

với ma trận hệ số có hạng bằng $n - m$ sẽ xác định một m-phẳng nào đó của $\mathbb{A}^n$.
Thật vậy, do hạng của ma trận hệ số bằng $n-m$ nên hệ phương trình (1.12) luôn có nghiệm theo Định lý Kronecker-Capelli. Gọi $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ là một nghiệm của hệ và gọi $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}),\ j = 1, 2, \ldots, m$ là một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng. Đặt $P(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{A}^n$ và $\overrightarrow{a_j}(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \in \overrightarrow{\mathbb{A}^n};\ j = 1, 2, \ldots, m$. Hệ vector $\{\overrightarrow{a_j}\}$ là hệ vector độc lập nên sinh ra một không gian con m-chiều $\overrightarrow{\alpha}$ của $\overrightarrow{\mathbb{A}^n}$. Chú ý rằng mỗi vector $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\alpha}$ có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình tuyến thuần nhất tương ứng. Gọi α là m-phẳng đi qua P với phương là $\overrightarrow{\alpha}$ thì do mỗi nghiệm của hệ phương trình tuyến tính là tổng của một nghiệm riêng và một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng nên ta dễ dàng suy ra điểm

$M(x_i) \in \alpha$ khi và chỉ khi (x_i) là nghiệm của hệ. Thật vậy, $M \in \alpha$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{u}(u_i) \in \overrightarrow{\alpha}$. Về phương diện tọa độ ta có

$$(x_i) - (b_i) = (u_i),$$

hay

$$(x_i) = (b_i) + (u_i),$$

tức là (x_i) là một nghiệm của hệ.
Như vậy, mỗi m-phẳng được đặc trưng bởi một hệ phương trình dạng (1.12) với ma trận hệ số có hạng bằng $n - m$. Ta gọi hệ phương trình dạng (1.12) là *phương trình tổng quát* của m-phẳng.

Ví dụ.

1. Phương trình tổng quát của một siêu phẳng trong $\mathbb{A}^n$ đối với một mục tiêu affine cho trước có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0, \tag{1.13}$$

   trong đó các phần tử $a_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, \ldots, n$ không đồng thời bằng không.

   Như vậy từ phương trình tổng quát của m-phẳng, ta có thể xem một m-phẳng là giao của $n - m$ siêu phẳng (độc lập) nào đó.

2. Phương trình tổng quát của siêu phẳng đi qua điểm P có tọa độ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - b_i) = 0, \tag{1.14}$$

   trong đó các phần tử $a_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, \ldots, n$ không đồng thời bằng không.

3. Trong $\mathbb{A}^n$ với mục tiêu cho trước $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$, cho n điểm độc lập $A_1, \ldots, A_n$ với A_i có tọa độ $(a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ đối mục tiêu đã cho. Gọi α là siêu phẳng đi qua $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi đó điểm M có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ thuộc α khi và chỉ khi vector $\overrightarrow{A_1M}$ cùng với các vector $\overrightarrow{A_1A_i},\ i = 2, 3, \ldots, n$ lập thành một hệ phụ thuộc tuyến tính, tức là khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_{11} & x_2 - a_{21} & \ldots & x_n - a_{n1} \\ a_{12} - a_{11} & a_{22} - a_{21} & \ldots & a_{n2} - a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} - a_{11} & a_{2n} - a_{21} & \ldots & a_{nn} - a_{n1} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.15}$$

   hay

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ 1 & a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.16}$$

   Khai triển (1.16), ta được một phương trình tuyến tính bậc nhất đối với n biến $x_1, x_2, ..., x_n$. Đây chính là phương trình tổng quát của siêu phẳng α.

1.5 Tâm tỉ cự. Tỉ số đơn

1.5.1 Tâm tỉ cự

Định nghĩa 9. Cho họ điểm $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\} \subset \mathbb{A}^n$ và họ hệ số $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, thoả mãn điều kiện

$$\lambda := \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m \neq 0.$$

Lấy một điểm O tùy ý của $\mathbb{A}^n$, khi đó

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \ldots + \lambda_m \overrightarrow{OP_m})$$

là một vector xác định của $\mathbb{A}^n$. Do đó tồn tại duy nhất một điểm $G \in \mathbb{A}^n$ sao cho

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\lambda}(\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \ldots + \lambda_m \overrightarrow{OP_m}). \tag{1.17}$$

Ta gọi điểm G là *tâm tỉ cự* của họ $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ gắn với họ hệ số $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$.

Định lý 1.5.1. *Điểm G là tâm tỉ cự của họ điểm $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ gắn với họ hệ số $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ khi và chỉ khi G thoả mãn hệ thức*

$$\lambda_1 \overrightarrow{GP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{GP_2} + \ldots + \lambda_m \overrightarrow{GP_m} = \overrightarrow{0}. \tag{1.18}$$

Chứng minh. Thật vậy,

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\lambda}(\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \ldots + \lambda_m \overrightarrow{OP_m}) \\
\Leftrightarrow &(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m)\overrightarrow{OG} = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \ldots + \lambda_m \overrightarrow{OP_m} \\
\Leftrightarrow &\lambda_1(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP_1}) + \ldots + \lambda_m(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP_m}) = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow &\lambda_1 \overrightarrow{GP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{GP_2} + \ldots + \lambda_m \overrightarrow{GP_m} = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

□

Từ Định lý 1.5.1 ta dễ dàng chứng minh hai hệ quả sau.

Hệ quả 1.5.2. *Tâm tỉ cự không phụ thuộc vào điểm O được chọn mà chỉ phụ thuộc vào hệ điểm $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ và họ hệ số $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$.*

Hệ quả 1.5.3. *Khi thay họ hệ số $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ bởi họ hệ số $\{k\lambda_1, k\lambda_2, \ldots, k\lambda_m\}$, $k \neq 0$, thì tâm tỉ cự vẫn không thay đổi.*

Định nghĩa 10. Tâm tỉ cự G của $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ gắn họ hệ số $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ với $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m$ (theo Hệ quả 1.5.3 ta có thể chọn $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 1$) gọi là *trọng tâm* của hệ điểm đó.

Dễ thấy trọng tâm G được xác định bởi hệ thức

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overrightarrow{OP_i}, \tag{1.19}$$

trong đó $O \in \mathbb{A}$ tùy ý, hay

$$\sum_{i=1}^{m}\overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}. \tag{1.20}$$

Trọng tâm của hệ hai điểm $\{P, Q\}$ còn gọi là *trung điểm* của cặp điểm P, Q.

Chúng ta cần chú ý rằng mọi hệ m điểm có trọng tâm khi và chỉ khi đặc số của trường $\mathbb{K}$ là khác m. Trong trường hợp $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ thì mọi hệ hữu hạn điểm đều có trọng tâm.

Định lý sau cho thấy có thể dùng khái niệm tâm tỉ cự để đặc trưng các phẳng.

Định lý 1.5.4. *Tập tất các các tâm tỉ cự với họ các hệ số khác nhau của hệ điểm $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ trong không gian affine $\mathbb{A}^n$ chính là phẳng $\alpha = P_0 + P_1 + \ldots + P_m$.*

Chứng minh. Dễ thấy $\overrightarrow{\alpha}$ được sinh bởi hệ vector $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_m}\}$. Ta có thể giả sử một cơ sở của α là $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\}$, tức là α là cái phẳng k-chiều. Giả sử điểm $G \in \alpha$. Điều này tương đương với $\overrightarrow{P_0G} \in \overrightarrow{\alpha}$ hay $\overrightarrow{P_0G} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overrightarrow{P_0P_i}$. Ta có

$$\overrightarrow{P_0G} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\overrightarrow{GP_i} - \overrightarrow{GP_0}) \Leftrightarrow (1 - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i)\overrightarrow{GP_0} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}.$$

Đẳng thức này chứng tỏ G là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ gắn với họ hệ số

$$\{1 - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0\}.$$

Ngược lại, giả sử G là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ gắn với họ hệ số $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m}\lambda_i(\overrightarrow{GP_0} + \overrightarrow{P_0P_i}) = \overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{GP_0} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{P_0P_i} = \overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0G} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{P_0P_i}.\end{aligned}$$

Đẳng thức này chứng tỏ $\overrightarrow{P_0G} \in \overrightarrow{\alpha}$, hay $G \in \alpha$. □

Hệ quả 1.5.5. *Cho hệ $m+1$ điểm $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$, $\alpha = P_0 + P_1 + \ldots + P_m$ và một điểm O tùy ý. Khi đó điểm $M \in \alpha$ khi và chỉ khi tồn tại các μ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$; $\sum_{i=0}^{m}\mu_i = 1$ sao cho*

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m}\mu_i\overrightarrow{OP_i}.$$

Hơn nữa, nếu hệ điểm $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$, là độc lập thì các μ_i tồn tại duy nhất.

Chứng minh. Theo Định lý 1.5.4, $M \in \alpha$ khi và chỉ khi M là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ gắn với họ hệ số $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ nào đó. Đặt $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=0}^m \lambda_i}$. Theo định nghĩa của tâm tỉ cự ta có khẳng định thứ nhất của hệ quả.

Giả sử hệ điểm $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ là độc lập và

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \mu_i \overrightarrow{OP_i}, \quad \text{với } \sum_{i=0}^{m} \mu_i = 1.$$

Ta có $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^m \mu_i \overrightarrow{OP_i} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0M} = \sum_{i=1}^m \mu_i \overrightarrow{P_0P_i}$. Từ đây suy ra $\mu_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ là duy nhất và do đó μ_0 cũng duy nhất.

1.5.2 Tỉ số đơn

Định nghĩa 11. Cho hai điểm phân biệt $P, Q \in \mathbb{A}$. Điểm $M \neq Q$ thuộc đường thẳng PQ (phẳng $P + Q$) khi và chỉ khi có $k \in \mathbb{K} - \{1\}$ để $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MQ}$. Ta gọi k là *tỉ số đơn* của hệ ba điểm $\{P, Q, M\}$, kí hiệu $k = (PQM)$.

Nhận xét. Dễ nhận thấy rằng nếu $k = (PQM)$ thì điểm M là tâm tỉ cự của hệ $\{P, Q\}$ gắn với họ hệ số $\{1, -k\}$. Khi $k = -1$, ta có M là trung điểm (trọng tâm) của cặp điểm $\{P, Q\}$.

Sau đây là một số tính chất của tỉ số đơn.

Tính chất. Trong $\mathbb{A}^n$ cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng. Ta có

1. $(ABC) + (ACB) = 1$,
2. $(ABC).(BAC) = 1$,
3. $(BCA) = 1 - \frac{1}{(ABC)}$.

Chứng minh. Giả sử rằng $(ABC) = k$, tức là $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$ hay $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{CB}$. Từ đây suy ra

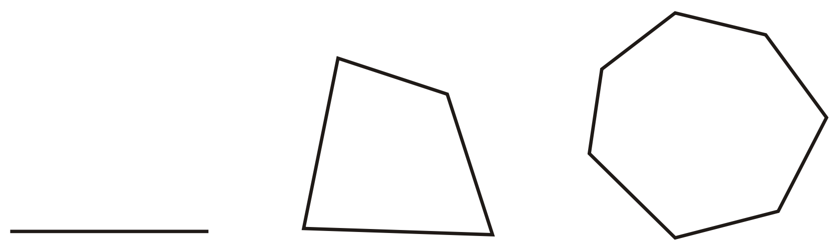
$$\overrightarrow{BA} = (1 - k)\overrightarrow{BC} \quad \text{hay} \quad (ACB) = 1 - k.$$

Bạn đọc dễ dàng chứng minh được các đẳng thức còn lại một cách tương tự. □

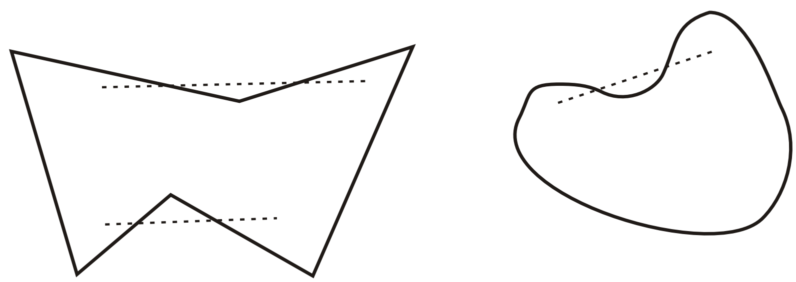
1.6 Tập lồi trong không gian affine thực

1.6.1 Tập lồi

Đoạn thẳng. Trong không gian affine thực $\mathbb{A}$ cho hai điểm P và Q. Tập hợp tất cả những điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = (1 - t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ}$, với O là một điểm tùy ý và $0 \leq t \leq 1$, được gọi là *đoạn*



Hình 1.7: Các tập lồi.



Hình 1.8: Các tập không lồi.

thẳng PQ. Hai điểm P và Q gọi là hai *mút* của đoạn thẳng PQ. Các điểm khác của đoạn thẳng PQ được gọi là *nằm ở giữa* P và Q.

Nhận xét.

1. Trong trường hợp $P \neq Q$, theo Hệ quả 1.5.5, đường thẳng $P + Q$ là tập tất cả các điểm M thỏa mãn:
$$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OP} + \mu\overrightarrow{OQ} \text{ với } \lambda + \mu = 1.$$
Từ đây ta suy ra đoạn thẳng PQ là tập con của đường thẳng $P + Q$.
Đoạn thẳng PQ gồm hai điểm mút P (ứng với $\lambda = 1$), Q (ứng với $\lambda = 0$) và những điểm nằm ở giữa P và Q.

2. Khi $P \equiv Q$, đoạn thẳng PQ chỉ gồm một điểm P.

Từ đây trung điểm của cặp điểm $\{P, Q\}$ còn gọi là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Tập lồi. Tập X trong không gian affine thực $\mathbb{A}$ được gọi là một *tập lồi* nếu với mọi $P, Q \in X$, đoạn thẳng PQ chứa trong X.

Bao lồi của một tập. Dễ thấy giao của một họ không rỗng các tập lồi là một tập lồi. Từ đây ta có định nghĩa *bao lồi* của một tập $\mathbf{X} \subset \mathbb{A}$ là giao của tất cả các tập lồi chứa $\mathbf{X}$, tức là tập lồi bé nhất chứa $\mathbf{X}$.

1.6.2 Ví dụ về tập lồi

Dễ thấy mỗi m-phẳng trong không gian affine thực là một tập lồi. Các ví dụ sau đây, trong trường hợp $1, 2, 3$ chiều là các đối tượng đã được gặp ở PTTH.

Nửa không gian. Mỗi siêu phẳng α trong không gian affine $\mathbb{A}$ sẽ chia $\mathbb{A} - \alpha$ thành 2 tập lồi. Xét không gian thương 1-chiều $\overrightarrow{\mathbb{A}}/\overrightarrow{\alpha}$, lấy $[\overrightarrow{u}]$ là một vector khác không của nó và gọi

$$p : \overrightarrow{\mathbb{A}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{A}}/\overrightarrow{\alpha}$$

là phép chiếu chính tắc. Với O là một điểm thuộc α, ta có hai tập hợp

$$X = \{M \in \mathbb{A} :\ p(\overrightarrow{OM}) = \lambda[\overrightarrow{u}],\ \lambda > 0\};$$

$$Y = \{M \in \mathbb{A} :\ p(\overrightarrow{OM}) = \lambda[\overrightarrow{u}],\ \lambda < 0\}.$$

Ta sẽ chứng minh chúng là hai tập lồi. Thật vậy, giả sử $M, N \in X;\ p(\overrightarrow{OM}) = \lambda[\overrightarrow{u}],\ \lambda > 0$ và $p(\overrightarrow{ON}) = \mu[\overrightarrow{u}],\ \mu > 0$. Khi đó với mọi P thuộc đoạn thẳng MN, $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{ON}$ với $0 \leq t \leq 1$, ta có

$$p(\overrightarrow{OP}) = (1-t)p(\overrightarrow{OM}) + tp(\overrightarrow{ON}) = ((1-t)\lambda + t\mu)[\overrightarrow{u}].$$

Dễ thấy với $0 \leq t \leq 1$ thì $(1-t)\lambda + t\mu > 0$, tức là $P \in X$. Chứng minh cho trường hợp $M, N \in Y$ hoàn toàn tương tự.

Nhận xét. Chứng minh cho các nhận xét sau đây xin dành cho bạn đọc.

1. Việc chia không gian thành hai tập X và Y không phụ thuộc vào việc chọn điểm O và vector $[\overrightarrow{u}]$.
2. Nếu lấy một điểm $P \in X$ thì có thể mô tả hai tập X và Y như sau: X là tập các điểm $M \in \mathbb{A} - \alpha$ sao cho đoạn thẳng PM không cắt α còn Y là tập các điểm $M \in \mathbb{A} - \alpha$ sao cho đoạn thẳng PM cắt α tại một điểm.

Hình hộp m-chiều. Trong $\mathbb{A}^n$, cho điểm O và hệ vector độc lập $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_m}\}$. Khi đó tập hợp

$$\mathbf{H} = \{M \in \mathbb{A}^n :\ \overrightarrow{OM}\ =\ \sum_{i=1}^{m} x_i \overrightarrow{e_i},\ 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, ..., m\ \}$$

gọi là một *hình hộp m-chiều* hay *m-hộp.* Các điểm của $\mathbf{H}$ ứng với x_i chỉ nhận hai giá trị 0 hoặc 1, gọi là các *đỉnh* của m-hộp. Có tất cả 2^m đỉnh.

Từ định nghĩa, 0-hộp là một điểm, 1-hộp là một đoạn thẳng. Theo cách gọi thông thường 2-hộp là *hình bình hành,* 3-hộp là *hình hộp.*

Có thể xây dựng các khái niệm như mặt bên k-chiều, cạnh của hình hộp. Vấn đề này được đưa vào phần bài tập như là một đề tài nhỏ cho bạn đọc tập dượt nghiên cứu.

Định lý 1.6.1. *Mỗi hình hộp là một tập lồi.*

Chứng minh. Giả sử $M, N \in \mathbf{H}$, $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{m} x_i \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{ON} = \sum_{i=1}^{m} y_i \overrightarrow{e_i};\ 0 \leq x_i, y_i \leq 1, i = 1, 2, ..., m$. Khi đó với mọi P thuộc đoạn thẳng MN, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{ON} \\ &= (1-t)\sum_{i=1}^{m} x_i \overrightarrow{e_i} + t\sum_{i=1}^{m} y_i \overrightarrow{e_i} \\ &= \sum_{i=1}^{m} ((1-t)x_i + ty_i)\overrightarrow{e_i}.\end{aligned}$$

Dễ thấy $0 \leq (1-t)x_i + ty_i \leq 1$, tức là $P \in \mathbf{H}$. □

Đơn hình m-chiều. Trong $\mathbb{A}^n$, cho hệ điểm độc lập $\{A_0, A_1, ..., A_m\}$. Lấy $O \in \mathbb{A}^n$, khi đó tập

$$\mathbf{C} = \{\ M \in \mathbb{A}^n :\ \overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} x_i \overrightarrow{OA_i},\ x_i \geq 0,\ x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1\}$$

được gọi là một *đơn hình m-chiều* hay *m-đơn hình*. Các điểm $A_0, A_1, ..., A_m$ gọi là các đỉnh của C.

Từ định nghĩa, 0-đơn hình là một điểm, 1-đơn hình là một đoạn thẳng. Theo cách gọi thông thường 2-đơn hình gọi là *tam giác*, 3-đơn hình gọi là *tứ diện*.

Trong m-đơn hình C lấy $(k+1)$ đỉnh $(0 \leq k \leq m-1)$ thì $(k+1)$ đỉnh đó lập thành một k-đơn hình gọi là mặt bên k-chiều của C. Khi đó $(m-k)$ đỉnh còn lại lập thành một $(m-k-1)$-đơn hình gọi là mặt bên đối diện của mặt bên k-chiều đang xét. Mặt bên 0-chiều là đỉnh, mặt bên 1-chiều gọi là cạnh của đơn hình C.
Từ đây, trọng tâm của hệ điểm $\{A_0, A_1, ..., A_m\}$ cũng được gọi là trọng tâm của đơn hình.

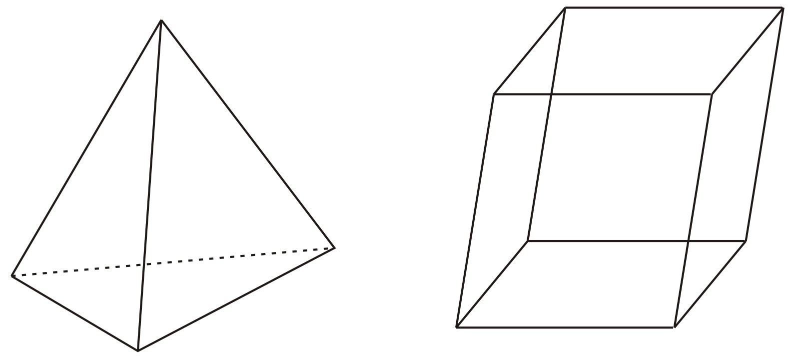
Nhận xét.

1. Định nghĩa của đơn hình không phụ thuộc vào điểm O được chọn. Thật vậy, với $x_i \geq 0,\ x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} x_i \overrightarrow{OA_i} \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \sum_{i=0}^{m} x_i (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_i}) \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{O'M} = \sum_{i=0}^{m} x_i \overrightarrow{O'A_i}.\end{aligned}$$

2. Nếu chúng ta chọn $O = A_0$, thì ta có

$$\mathbf{C} = \{\ M \in \mathbb{A}^n :\ \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{m} x_i \overrightarrow{A_0A_i},\ x_i \geq 0,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq 1\}.$$



Hình 1.9: Đơn hình và hình hộp

Định lý 1.6.2. *Mỗi đơn hình là một tập lồi*

Chứng minh. Giả sử $M, N \in \mathbf{C}$, $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^m x_i\overrightarrow{OA_i}$, $\overrightarrow{ON} = \sum_{i=0}^m y_i\overrightarrow{OA_i}$; $x_i, y_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, m; \sum_{i=0}^m x_i = 1$, $\sum_{i=0}^m y_i = 1$. Khi đó với mọi P thuộc đoạn thẳng MN, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{ON}\\ &= (1-t)\sum_{i=0}^m x_i\overrightarrow{OA_i} + t\sum_{i=0}^m y_i\overrightarrow{OA_i}\\ &= \sum_{i=0}^m((1-t)x_i + ty_i)\overrightarrow{OA_i}.\end{aligned}$$

Dễ thấy $(1-t)x_i + ty_i \geq 0$ và $\sum_{i=0}^m((1-t)x_i + ty_i) = (1-t)\sum_{i=0}^m x_i + t\sum_{i=0}^m y_i = 1$, tức là $P \in \mathbf{C}$.$\square$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài tập 1.1. Chứng minh rằng có thể xem trường số phức $\mathbb{C}$ là một không gian affine thực 2 chiều.

Bài tập 1.2. Cho không gian affine n chiều $(\mathbb{A}, \overrightarrow{\mathbb{A}}, \Phi)$ và một tập hợp $B \neq \emptyset$ tùy ý. Chứng minh rằng nếu có song ánh $f : \mathbb{A} \longrightarrow B$ thì có thể xây dựng B trở thành một không gian affine n chiều (chuyển cấu trúc affine từ $\mathbb{A}$ sang B nhờ song ánh f).

Bài tập 1.3. Cho $(\mathbb{A}, \overrightarrow{\mathbb{A}}, \Phi)$ và $(\mathbb{A}', \overrightarrow{\mathbb{A}'}, \Phi')$ là hai không gian affine và ánh xạ

$$\begin{aligned}\Phi \times \Phi' : (\mathbb{A} \times \mathbb{A}') \times (\mathbb{A} \times \mathbb{A}') &\longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{A}} \times \overrightarrow{\mathbb{A}'}\\ ((M, M'), (N, N')) &\longmapsto (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}).\end{aligned}$$

Chứng minh rằng $(\mathbb{A} \times \mathbb{A}', \overrightarrow{\mathbb{A}} \times \overrightarrow{\mathbb{A}'}, \Phi \times \Phi')$ là một không gian affine.

Bài tập 1.4. Cho $(\mathbb{A}, \overrightarrow{\mathbb{A}}, \Phi)$ là một không gian affine và $\overrightarrow{\alpha}$ là một không gian vector con của $\overrightarrow{\mathbb{A}}$. Hai điểm $M, N \in \mathbb{A}$ gọi là $\overrightarrow{\alpha}$-*tương đương* nếu $\overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{\alpha}$.

1. Chứng minh rằng quan hệ trong định nghĩa trên là một quan hệ tương đương.
2. Ký hiệu tập các lớp tương đương là $\mathbb{A}/_{\overrightarrow{\alpha}}$ và lớp tương đương chứa M là $[M]$. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned}\Phi_{\overrightarrow{\alpha}} : \mathbb{A}/_{\overrightarrow{\alpha}} \times \mathbb{A}/_{\overrightarrow{\alpha}} &\longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{A}}/_{\overrightarrow{\alpha}}\\ ([M],[N]) &\longmapsto [\overrightarrow{MN}].\end{aligned}$$

   Chứng minh rằng $(\mathbb{A}/_{\overrightarrow{\alpha}}, \overrightarrow{\mathbb{A}}/_{\overrightarrow{\alpha}}, \Phi_{\overrightarrow{\alpha}})$ là một không gian affine.

Bài tập 1.5. Cho $\mathbb{A}$ là không gian affine và O là một điểm của $\mathbb{A}$. Khi đó ánh xạ biến điểm $M \in \mathbb{A}$ thành vector $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$ là một song ánh. Nhờ song ánh này có thể chuyển cấu trúc không gian vector từ $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ lên $\mathbb{A}$. Hãy xây dựng các phép toán cụ thể trên $\mathbb{A}$ để $\mathbb{A}$ là một không gian vector.

Bài tập 1.6. Trong $\mathbb{A}^n$ cho α và α' là hai siêu phẳng song song phân biệt, β là m-phẳng không chứa trong α ($\beta \not\subset \alpha$). Chứng minh rằng nếu β cắt α thì β cũng cắt α'. Trong trường hợp α và α' là các phẳng song song phân biệt tuỳ ý thì kết quả trên có còn đúng không? Tìm các kết quả đã biết ở PTTH để minh họa.

Bài tập 1.7. Xét không gian vector $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ với cấu trúc affine chính tắc. Chứng minh mỗi không gian vector con của $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ là một cái phẳng. Điều ngược lại có đúng không? Cho ví dụ.

Bài tập 1.8. Cho một điểm A và một m-phẳng α không chứa điểm đó. Chứng minh rằng có một và chỉ một $(m+1)$-phẳng đi qua A và chứa α. Tìm các kết quả đã biết ở PTTH để minh họa.

Bài tập 1.9. Chứng minh rằng nếu các phẳng α và β song song với phẳng γ thì $\alpha \cap \beta$, nếu khác rỗng, là một phẳng song song với γ. Tìm các kết quả đã biết ở PTTH để minh họa.

Bài tập 1.10. Chứng tỏ nếu hai siêu phẳng phân biệt α và β cắt nhau, siêu phẳng γ song song với $\alpha \cap \beta$ sao cho các giao $\alpha \cap \gamma$ và $\beta \cap \gamma$ đều khác rỗng thì $\alpha \cap \gamma$ song song với $\beta \cap \gamma$. Tìm các kết quả đã biết ở PTTH để minh họa.

Bài tập 1.11. Trong $\mathbb{A}^n$, hãy xét vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một m-phẳng. Xét cụ thể các trường hợp $n = 2, 3, 4$.

Bài tập 1.12. Cho α là một m-phẳng, A là một điểm không thuộc α.

1. Có bao nhiêu l-phẳng β, $l \leq m$, qua A và song song với α. Hãy nhận xét về $\alpha \cap \beta$.
2. Có bao nhiêu l-phẳng β, $l > m$, qua A và song song với α. Hãy nhận xét về $\alpha \cap \beta$.

Bài tập 1.13. Cho α và β là hai cái phẳng có số chiều lần lượt là p và q. Chứng minh rằng α và β song song khi và chỉ khi chúng cắt nhau cấp r hoặc chéo nhau cấp r với $r = \min\{p, q\}$.

Bài tập 1.14. Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n ẩn trên trường số thực $\mathbb{R}$ với $m \leq n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = a_m \end{cases}.$$

Giả sử $\operatorname{rank}(a_{ij}) = m$, chứng minh rằng:

1. tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng là một không gian vector con $(n-m)$-chiều của $\mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\overrightarrow{\alpha}$;

2. tập nghiệm của hệ phương trình trên là một $(n-m)$-phẳng của không gian affine $\mathbb{R}^n$ (cấu trúc affine chính tắc) với phương là $\overrightarrow{\alpha}$.

Bài tập 1.15. Cho hệ gồm $p+1$ điểm $\{M_0, M_1, \ldots, M_p\}$ trong không gian affine $\mathbb{A}^n$. Chứng minh rằng

1. $\dim(M_0 + M_1 + \ldots + M_p) \leq p$;

2. hệ $\{M_0, M_1, \ldots, M_p\}$ độc lập affine khi và chỉ khi $\dim(M_0 + M_1 + \ldots + M_p) = p$;

3. nếu hệ $\{M_0, M_1, \ldots, M_p\}$ độc lập affine thì

$$M_0 + M_1 + \ldots + M_p = (M_0 + M_1 + \ldots + M_k) + (M_{k+1} + M_{k+2} + \ldots + M_p)$$

   và

$$(M_0 + M_1 + \ldots + M_k) \cap (M_{k+1} + M_{k+2} + \ldots + M_p) = \emptyset.$$

Bài tập 1.16. Biết phương trình tham số của một m-phẳng α đối với một mục tiêu affine cho trước trong $\mathbb{A}^n$. Hãy cho nhận xét về phương trình tham số của m-phẳng β song song với α.

Bài tập 1.17. Cho phương trình tổng quát của m-phẳng α. Chứng minh rằng tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng xác định phương của α.

Bài tập 1.18. Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của m-phẳng $E_0+E_1+\ldots+E_m$ và của siêu phẳng $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ trong đó $\{E_0; \overrightarrow{E_0E_i}\}$ là một mục tiêu affine cho trước của $\mathbb{A}^n$.

Bài tập 1.19. Trong $\mathbb{A}^n$ cho mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$. Lấy điểm $E \in \mathbb{A}^n$ sao cho

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \ldots + \overrightarrow{e_n}.$$

Tìm công thức đổi toạ độ từ mục tiêu đã cho đến mục tiêu

$$\{E; \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \ldots, \overrightarrow{e_n} + \overrightarrow{e_1}\}.$$

Bài tập 1.20. Trong $\mathbb{A}^3$ cho các điểm có toạ độ đối với mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ (mục tiêu (1))

$$A_0(1,1,1), \quad A_1(2,0,0), \quad A_2(1,0,0), \quad A_3(1,1,0);$$
$$A'_0(0,0,0), \quad A'_1(1,1,0), \quad A'_2(2,0,1), \quad A'_3(1,0,1).$$

1. Chứng minh rằng $\{A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}\}$ và $\{A'_0; \overrightarrow{A'_0A'_1}, \overrightarrow{A'_0A'_2}, \overrightarrow{A'_0A'_3}\}$ là các mục tiêu affine của $\mathbb{A}^3$ (mục tiêu (2) và mục tiêu (3)).

2. Tìm các công thức đổi toạ độ từ mục tiêu (1) sang mục tiêu (2) và từ mục tiêu (2) sang mục tiêu (3).

Bài tập 1.21. Trong không gian affine $\mathbb{A}^n$ với một mục tiêu affine cho trước, hãy xét giao của đường thẳng và siêu phẳng cho bởi các phương trình

$$\frac{x_1 - b_1}{a_1} = \frac{x_2 - b_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n - b_n}{a_n}$$

và

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d = 0.$$

Bài tập 1.22. Trong $\mathbb{A}^4$ viết phương trình tổng quát của phẳng có số chiều bé nhất

1. đi qua điểm $A(1,2,1,1)$ và có phương chứa hai vector $\overrightarrow{a}(0,1,2,0)$, $\overrightarrow{b}(1,1,0,0)$;
2. đi qua điểm $M(1,0,1,0)$ và có phương chứa ba vector $\overrightarrow{a}(1,0,1,0)$, $\overrightarrow{b}(2,1,2,1)$, $\overrightarrow{c}(4,1,4,1)$;
3. đi qua hai điểm $A(1,1,1,1), B(2,3,1,0)$ và có phương chứa các vector $\overrightarrow{a}(0,1,1,1)$, $\overrightarrow{b}(1,2,0,0)$;
4. đi qua hai điểm $A(1,1,1,1), B(2,3,1,0)$ và có phương chứa các vector $\overrightarrow{a}(3,4,2,1)$, $\overrightarrow{b}(2,2,-2,2)$;
5. đi qua ba điểm $A(2,1,2,1), B(1,1,1,1), C(2,0,2,0)$ và có phương chứa các vector $\overrightarrow{a}(2,3,1,4)$, $\overrightarrow{b}(0,0,0,1)$.

Viết phương trình các phẳng (cùng số chiều) đi qua $O(0,0,0,0)$ và lần lượt song song với các phẳng trong các câu trên.

Bài tập 1.23. Trong không gian $\mathbb{A}^4$ viết phương trình tham số của mặt phẳng có phương trình tổng quát

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & -1 & =0 \\ -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & +2 & =0 \end{cases}.$$

Bài tập 1.24. Trong không gian $\mathbb{A}^4$ cho 4 điểm $A(3,1,1,2), B(0,1,0,0), C(3,2,3,2)$, $D(1,0,0,1)$.

1. Tìm giao điểm của đường thẳng AB với các siêu phẳng tọa độ.
2. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD.

Bài tập 1.25. Trong $\mathbb{A}^4$ xét vị trí tương đối của hai cái phẳng α và β, biết phương trình của chúng lần lượt như sau:

1.
$$\alpha : \begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -1 & =0 \\ -x_1 & +x_2 & & -x_4 & +2 & =0 \end{cases},$$
$$\beta : \begin{cases} x_1 & -x_2 & & -x_4 & +1 & =0 \\ -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & +3 & =0 \end{cases}.$$

2.
$$\alpha: \quad 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2 = 0,$$
$$\beta: \quad \begin{cases} x_1 &= & & 1 \\ x_2 &= & t & +1 \\ x_3 &= & t & +1 \\ x_4 &= & 2t & +1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.
$$\alpha: \quad \begin{cases} 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & -6 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & +1 & = 0 \end{cases},$$
$$\beta: \quad \begin{cases} x_1 &= & t & +2 \\ x_2 &= & -t & +1 \\ x_3 &= & -t & +1 \\ x_4 &= & 2t & -1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 1.26. Cho hệ điểm $\{P_i : \ i \in I\}$, với $I \neq \emptyset$, trong không gian affine $\mathbb{A}^n$. Gọi α là bao affine của hệ điểm đó.

1. Chứng minh rằng α chính là tập các tâm tỉ cự của các hệ con hữu hạn không rỗng của hệ điểm đã cho.

2. Giả sử I là tập hợp hữu hạn. Chứng minh rằng hệ điểm $\{P_i : \ i \in I\}$ là độc lập affine khi và chỉ khi với mọi $M \in \alpha$, tồn tại duy nhất (sai khác một hằng số khác không) một họ hệ số $\{\lambda_i : \ i \in I\}$ để M là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{P_i : \ i \in I\}$ gắn với họ hệ số đó. Họ hệ số $\{\lambda_i : \ i \in I\}$ như thế gọi là *tọa độ tỉ cự* của M đối với hệ điểm $\{P_i : \ i \in I\}$.

Bài tập 1.27 (Định lý Thales)**.** Trong $\mathbb{A}^n$ cho ba m-phẳng song song phân biệt. Hai đường thẳng d và d' cắt ba m-phẳng đó lần lượt tại bộ ba điểm A, B, C và A', B', C'. Chứng minh rằng

$$(ABC) = (A'B'C').$$

Bài tập 1.28. Trong $\mathbb{A}^n$ cho ba siêu phẳng cùng đi qua một $(n-2)$-phẳng γ. Hai đường thẳng song song d và d' cắt ba siêu phẳng đó lần lượt tại bộ ba điểm A, B, C và A', B', C' (các điểm $A, B, C, A', B', C' \notin \gamma$). Chứng minh $(ABC) = (A'B'C')$.

Bài tập 1.29 (Định lý Menelaüs, Định lý Ceva)**.** Trong không gian affine $\mathbb{A}^2$ cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và ba điểm P, Q, R theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB không trùng với các điểm A, B, C. Chứng minh rằng:

1. Điều kiện cần và đủ để ba điểm P, Q, R thẳng hàng là
$$(BCP).(CAQ).(ABR) = 1.$$

2. Điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng AP, BQ, CR đồng qui hay song song là
$$(BCP).(CAQ).(ABR) = -1.$$

Bài tập 1.30. Chứng minh rằng đơn hình chính là bao lồi của tập các đỉnh và chứa trong bao affine của tập các đỉnh.

Bài tập 1.31. Cho m-đơn hình với các đỉnh $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$.

1. Chứng minh rằng bao affine của hai mặt đối diện là chéo nhau.
2. Xét các đường thẳng nối một đỉnh với trọng tâm $(m-1)$-mặt bên đối diện. Chứng minh rằng các đường thẳng này đồng qui tại một điểm G.

   Xét các trường hợp đặc biệt $m = 2, 3$.
3. Gọi G' và G'' là trọng tâm của một cặp mặt bên đối diện, hãy tính $(G'G''G)$.

   Xét các trường hợp đặc biệt $m = 2, 3$.

Bài tập 1.32.

1. Chứng minh rằng bao lồi của một hệ hữu hạn điểm $\{P_1, \ldots, P_m\}$ trong không gian affine thực $\mathbb{A}^n$ là tập các tâm tỉ cự của hệ điểm đó gắn với họ hệ số $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ cùng dấu.
2. Chứng minh rằng bao lồi của một tập $\mathcal{S}$ trong không gian affine thực $\mathbb{A}^n$ là tập các tâm tỉ cự của của các hệ hữu hạn điểm $\{P_1, \ldots, P_m\} \subset \mathcal{S}$ gắn với họ hệ số $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ cùng dấu.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I.

Bài tập 1.33. Chứng minh rằng định nghĩa sau tương đương với định nghĩa đã biết của không gian affine.

Cho $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ là một không gian vector trên trường $\mathbb{K}$ và $\mathbb{A}$ là một tập hợp khác rỗng. Giả sử có ánh xạ

$$\begin{aligned} + : \mathbb{A} \times \overrightarrow{\mathbb{A}} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ (p, v) &\longmapsto p + v, \end{aligned}$$

thoả mãn các điều kiện sau:

1. $p + 0 = p,\ \forall p \in \mathbb{A}$;
2. $(p + v) + u = p + (v + u),\ \forall p \in \mathbb{A}, v, u \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$;
3. *với $p \in \mathbb{A}$ và $q \in \mathbb{A}$, tồn tại duy nhất $v \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$ sao cho*

$$q = p + v.$$

Khi đó ta nói rằng $\mathbb{A}$ là một không gian affine trên trường $\mathbb{K}$ liên kết với không gian vector $\overrightarrow{\mathbb{A}}$.

Bài tập 1.34. Trong không gian affine $\mathbb{A}^n$, chứng minh rằng hệ $m+1$ điểm $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ độc lập affine khi và chỉ khi với mọi điểm O, từ hai đẳng thức

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0} \quad \text{và} \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0 \ (\lambda_i \in \mathbb{K})$$

ta suy ra $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Bài tập 1.35. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $m+1$ điểm $A_0, A_1, \ldots, A_m$ trong không gian affine n chiều ($n \geq m$) cùng thuộc một $(m-1)$-phẳng là với điểm O tùy ý ta luôn có

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = 0$$

với $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$ và $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 \neq 0$.

Bài tập 1.36. Cho α là p-phẳng, β là q-phẳng trong không gian affine n chiều $\mathbb{A}^n$.

1. Chứng minh rằng nếu α và β cắt nhau cấp r thì

   $$0 \leq r \leq \min(p,q) \quad \text{và} \quad p+q-r \leq n.$$

   Ngược lại nếu cho các số nguyên không âm r, p, q không lớn hơn n thỏa điều kiện trên thì có thể tìm được các p-phẳng α và q-phẳng β để α và β cắt nhau cấp r không?

2. Xét vấn đề tương tự đối với trường hợp chéo nhau cấp r. Điều kiện ở đây là

   $$0 \leq r \leq \min(p,q) \quad \text{và} \quad p+q-r+1 \leq n.$$

Bài tập 1.37. Cho α và β là hai cái phẳng chéo nhau cấp 0. Xét hai hệ điểm độc lập $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\} \subset \alpha$ và $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \ldots, B_l\} \subset \beta$. Chứng minh rằng $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ độc lập.

Bài tập 1.38. Cho $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ và $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \ldots, B_l\}$ là hai hệ điểm độc lập. Giả sử $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ độc lập. Chứng minh rằng tồn tại hai cái phẳng chéo nhau α và β sao cho $\mathcal{A} \subset \alpha; \mathcal{B} \subset \beta$. Hãy cho các ví dụ cụ thể về các trường hợp α và β chéo nhau cấp $0, 1, 2, \ldots$.

Bài tập 1.39. Cho hai cái phẳng α và β chéo nhau, có số chiều lần lượt là p và q. Hãy tìm các điều kiện để số chiều của $\alpha + \beta$ lớn nhất, số chiều của $\alpha + \beta$ bé nhất. Trong mỗi trường hợp, xác định số chiều của $\alpha + \beta$ và cho các ví dụ cụ thể để minh họa.

Bài tập 1.40. Dùng định nghĩa ở bài tập **??**, hãy trình bày lại các khái niệm và các định lý, mệnh đề, bổ đề... trong chương này.

Bài tập 1.41. Hãy đưa ra các định nghĩa song song, chéo nhau giữa các phẳng sao cho phù hợp với cách hiểu ở PTTH. Phát biểu lại các bài tập liên quan đến tính chéo nhau và song song cho thích hợp với định nghĩa mới này.

Bài tập 1.42. Cho hệ điểm độc lập $\{M_0, M_1, \ldots, M_p\}$ trong không gian affine $\mathbb{A}^n$. Giả sử M_i có tọa độ $(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ cho trước. Hãy viết phương trình tham số của m-phẳng $M_0 + M_1 + \ldots + M_p$.

Bài tập 1.43. Trong không gian affine $\mathbb{A}^n$ với một mục tiêu affine cho trước, cho hai siêu phẳng phân biệt α và α' có phương trình tổng quát theo thứ tự là

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0 \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} a'_i x_i + b' = 0.$$

1. Chứng minh rằng α và α' song song khi và chỉ khi hai vector $\overrightarrow{a}(a_i)$ và $\overrightarrow{a}'(a'_i)$ phụ thuộc tuyến tính.

2. Giả sử $\alpha \cap \alpha' \neq \emptyset$. Khi đó $\dim \alpha \cap \alpha' = n-2$. Chứng minh rằng mọi siêu phẳng chứa $\alpha \cap \alpha'$ đều có phương trình dạng
$$\lambda(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b) + \lambda'(\sum_{i=1}^{n} a'_i x_i + b') = 0,$$
trong đó λ và λ' không đồng thời triệt tiêu (phương trình của chùm siêu phẳng xác định bởi α và α').

Bài tập 1.44. Trong $\mathbb{A}^n$ cho m-phẳng α, $0 \le m \le n-2$, và hai điểm phân biệt M, N không thuộc α. Chứng minh rằng, tồn tại $(m+1)$-phẳng chứa m-phẳng α và không chứa hai điểm M, N. Từ đó suy ra, tồn tại một siêu phẳng chứa α và không chứa hai điểm M, N.

Bài tập 1.45. Trong không gian $\mathbb{A}^4$ với mục tiêu đã chọn.

1. Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của cái phẳng α có số chiều bé nhất chứa hai đường thẳng d_1, d_2 sau đây
$$d_1 : \begin{cases} x_1 = & t+1 \\ x_2 = & t+2 \\ x_3 = & t+3 \\ x_4 = & t+4 \end{cases}; \qquad d_2 : \begin{cases} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & +1 = 0 \\ & & & x_4 - 3 = 0 \end{cases}.$$

2. Viết phương trình của siêu phẳng đi qua $M(1, 1, 1, 1)$ và chứa α.

3. Cho hai điểm $A(1, 3, -1, 2)$ và $B(-1, -2, 1, 3)$. Hãy tìm giao điểm của đường thẳng AB với các siêu phẳng tọa độ.

4. Xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng sau
$$P : \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 7 = 0 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 10 = 0 \end{cases}; \quad Q : \begin{cases} 4x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 14 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10 = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 1.46. Trong không gian affine $\mathbb{A}^n$ với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ cho các điểm P_i với $\overrightarrow{OP_i} = a_i \overrightarrow{e_i}$, $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng, hệ n điểm $\{P_1, ..., P_n\}$ là độc lập và phương trình của siêu phẳng đi qua n điểm trên là
$$\frac{x_1}{a_1} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1.$$

Bài tập 1.47. Trong $\mathbb{A}^n$ với mục tiêu đã chọn, hãy tìm công thức tính tọa độ trọng tâm của một hệ điểm. Tổng quát hơn, hãy tìm công thức tính tọa độ của tâm tỉ cự.

Bài tập 1.48. Chứng minh rằng trong một đơn hình m-chiều các đường thẳng nối hai trọng tâm của hai mặt bên đối diện luôn luôn đi qua một điểm cố định. Hãy phát biểu bài toán cho trường hợp đơn hình hai chiều và đơn hình ba chiều.

Bài tập 1.49 (Định lí Pappus)**.** Trong mặt phẳng affine $\mathbb{A}^2$ cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O. Gọi A, B, C là 3 điểm phân biệt thuộc d không trùng với điểm O; A', B', C' là 3 điểm phân biệt thuộc d' không trùng với điểm O. Giả sử $B'C$ cắt BC' tại M, CA' cắt $C'A$ tại N, $A'B$ cắt AB' tại P. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 1.50 (Định lí Desargues)**.** Trong mặt phẳng affine $\mathbb{A}^2$ cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Giả sử BC và $B'C'$ cắt nhau tại M, CA và $C'A'$ cắt nhau tại N, AB cắt $A'B'$ tại P. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi AA', BB', CC' đồng qui hoặc song song

Bài tập 1.51. Cho tam giác ABC, P là một điểm trên BC và M là một điểm trên AP. Đường thẳng qua P và song song với CM và đường thẳng qua B song song với AP cắt nhau tại B'. Đường thẳng qua P song song với BM và qua C song song với AP cắt nhau tại C'. Lấy I, J, K là các trung điểm của các đoạn thẳng PM, BB', CC'. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng và M, B', C' cũng thẳng hàng.

Bài tập 1.52. Trên một tờ giấy vẽ hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại một điểm ở ngoài tờ giấy đó. Qua một điểm M không nằm trên d hoặc d', hãy dựng đường thẳng đi qua M và giao điểm của d và d'.

Bài tập 1.53. Giả sử G_1 là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{P_1, \ldots, P_k\}$ gắn với họ hệ số $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$; G_2 là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{P_{k+1}, \ldots, P_m\}$ gắn với họ hệ số $\{\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m\}$; G_3 là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{P_1, \ldots, P_m\}$ gắn với họ hệ số $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Chứng minh rằng nếu G_1, G_2, G_3 là 3 điểm phân biệt thì chúng thẳng hàng. Hãy tính tỉ số đơn $(G_1G_2G_3)$.

Bài tập 1.54. Trong không gian affine $\mathbb{A}^n$ với mục tiêu đã chọn. Chứng minh rằng tập các điểm có tọa độ là nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính và bất phương trình tuyến tính n biến là một tập lồi (xem $\emptyset$ là tập lồi).

Bài tập 1.55. Hãy chứng tỏ rằng, đơn hình và hình hộp n chiều trong không gian affine thực $\mathbb{A}^n$ là giao của các nửa không gian.

Chương 2

Ánh xạ affine

2.1 ÁNH XẠ AFFINE

Người ta cần biết có bao nhiêu "loại" không gian affine. Công việc này tùy theo chúng ta muốn phân loại theo tiêu chuẩn nào. Có thể phân loại theo trường cơ sở $\mathbb{K}$. Theo cách phân loại này chúng ta có không gian affine thực, phức, không gian affine trên trường hữu hạn v.v..... Đối với các không gian trên cùng một trường $\mathbb{K}$, một tiêu chuẩn phân loại đơn giản là phân loại theo số chiều. Theo đó chúng ta có không gian affine 1-chiều, 2-chiều, 3-chiều, ..., n-chiều v.v..... Một tiêu chuẩn phân loại có vẻ hợp lý và mô tả đúng bản chất của không gian affine là phân loại theo quan hệ *"tương đương affine"*. Hai không gian affine được gọi là "tương đương" nếu chúng có "cấu trúc affine như nhau" hay nói một cách khác, chúng sai khác nhau một song ánh có tính chất bảo toàn cấu trúc affine, đẳng cấu affine. Chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng hai không gian là "tương đương affine" khi và chỉ khi chúng có cùng số chiều. Điều này có nghĩa là hai cách phân loại trên cho cùng một kết quả. Như vậy chúng ta sẽ không phân biệt hai không gian affine cùng chiều trên cùng một trường $\mathbb{K}$. Đầu tiên chúng ta sẽ làm quen với các ánh xạ "bảo toàn" ánh xạ liên kết giữa các không gian affine.

Như đã biết ở chương I, nếu chúng ta "quên" đi vai trò đặc biệt của phần tử $\overrightarrow{0}$ của không gian vector $\mathbb{V}$, thì chúng ta sẽ có cấu trúc affine chính tắc tương ứng xác định bởi ánh xạ liên kết $\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$. Lúc này vai trò của các "vector" là như nhau. Ánh xạ tuyến tính φ giữa hai không gian vector $\mathbb{V}$ và $\mathbb{V}'$ bảo toàn hai phép toán: cọng vector và nhân vector với một vô hướng. Ánh xạ tuyến tính dĩ nhiên biến "phần tử đặc biệt" $\overrightarrow{0}$ của $\mathbb{V}$ thành "phần tử đặc biệt" $\overrightarrow{0'}$ của $\mathbb{V}'$. Nếu chúng ta xét $\mathbb{V}$ và $\mathbb{V}'$ như là các không gian affine với cấu trúc affine chính tắc xác định bởi các ánh xạ liên kết Φ và Φ', thì dĩ nhiên tính chất này sẽ không còn cần thiết nữa. Dễ nhận thấy φ có tính chất sau

$$\varphi(\Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \Phi'(\varphi(\overrightarrow{u}), \varphi(\overrightarrow{v})).$$

Tính chất này sẽ được dùng để đặc trưng cho một loại ánh xạ giữa hai không gian affine mà chúng ta rất quan tâm, đó là ánh xạ affine.

2.1.1 Định nghĩa và một số tính chất cơ bản

Định nghĩa 1. Cho hai không gian affine $\mathbb{A}$ và $\mathbb{A}'$ trên cùng trường $\mathbb{K}$ và ánh xạ $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$. Nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính $\varphi : \overrightarrow{\mathbb{A}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{A}}'$ sao cho với mọi $M, N \in \mathbb{A}$ ta có

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN}),$$

thì f được gọi là *ánh xạ affine* liên kết với φ. Ánh xạ φ được gọi là *ánh xạ tuyến tính liên kết* hay *ánh xạ nền* của ánh xạ affine f. Để thuận tiện cho việc trình bày, ánh xạ nền của f sẽ được ký hiệu là $\overrightarrow{f}$.

Theo định nghĩa, dễ thấy mỗi ánh xạ affine chỉ có một ánh xạ tuyến tính liên kết. Ví dụ về ánh xạ hằng dưới đây cho thấy một ánh xạ tuyến tính có thể liên kết với nhiều ánh xạ affine.

Ví dụ 1. 1. **Ánh xạ đồng nhất** $Id_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}, \quad f(M) = M, \quad \forall M \in \mathbb{A}$ của không gian affine $\mathbb{A}$ là một ánh xạ affine. Ánh xạ tuyến tính liên kết với $Id_{\mathbb{A}}$ chính là ánh xạ đồng nhất $Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}}$của $\overrightarrow{\mathbb{A}}$.

2. **Ánh xạ hằng** $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$, biến mọi điểm của $\mathbb{A}$ thành một điểm cố định nào đó của $\mathbb{A}'$, là một ánh xạ affine. Ánh xạ tuyến tính liên kết $\overrightarrow{f}$ của f là ánh xạ "không" θ, biến mọi vector thành vector không $\overrightarrow{0}$. Đây là một ví dụ cho thấy nhiều ánh xạ affine có thể cùng liên kết với chỉ một ánh xạ tuyến tính.

3. **Phép chiếu song song.** Trong không gian affine n chiều $\mathbb{A}^n$ cho m-phẳng α và $(n-m)$-phẳng β sao cho $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \{\overrightarrow{0}\}$. Dựa vào định lý về số chiều của phẳng tổng ta dễ dàng chứng minh được rằng $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Do $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \{\overrightarrow{0}\}$, ta suy ra $\alpha \cap \beta$ là 0-phẳng, tức là giao của α và β là tập chỉ có một điểm.

   Giả sử M là một điểm bất kỳ của $\mathbb{A}^n$, gọi α' là m-phẳng đi qua M và song song với α và β' là $(n-m)$-phẳng đi qua M và song song với β. Theo lập luận như trên, α' cắt β tại một điểm duy nhất ký hiệu là M_β và β' cắt α tại một điểm duy nhất ký hiệu là M_α. Các ánh xạ

$$\begin{aligned} \rho_\alpha : \mathbb{A}^n &\longrightarrow \alpha \\ M &\longmapsto M_\alpha \end{aligned}$$

   và

$$\begin{aligned} \rho_\beta : \mathbb{A}^n &\longrightarrow \beta \\ M &\longmapsto M_\beta \end{aligned}$$

lần lượt được gọi là *phép chiếu song song* lên phẳng α theo phương β và *phép chiếu song song* lên phẳng β theo phương α. Ta gọi α là cơ sở và β là phương chiếu của phép chiếu ρ_α. Tương tự, β là cơ sở và α là phương chiếu của phép chiếu ρ_β. Ta sẽ chứng minh ρ_α là ánh xạ affine. Phép chứng minh cho trường hợp ρ_β được thực hiện hoàn toàn tương tự.

Theo giả thiết đã cho, ta có $\overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\mathbb{A}}$. Gọi $\rho_{\overrightarrow{\alpha}}$ là phép chiếu lên thành phần thứ nhất

$$\rho_{\overrightarrow{\alpha}} : \overrightarrow{\mathbb{A}} \longrightarrow \overrightarrow{\alpha}.$$

Với mọi $M, N \in \mathbb{A}$, ta có

$$\overrightarrow{\rho_\alpha(M)\rho_\alpha(N)} = \overrightarrow{M_\alpha N_\alpha},$$

còn

$$\rho_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{MN}) = \rho_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{MM_\alpha}) + \rho_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{M_\alpha N_\alpha}) + \rho_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{N_\alpha N}) = \overrightarrow{M_\alpha N_\alpha}.$$

Từ đây suy ra ρ_α là ánh xạ affine liên kết với $\rho_{\overrightarrow{\alpha}}$.

Dễ thấy ρ_α và ρ_β có các tính chất

$$\rho_\alpha^2 = \rho_\alpha, \quad \rho_\beta^2 = \rho_\beta, \quad \rho_\alpha\rho_\beta = \rho_\beta\rho_\alpha = h;$$

trong đó h là ánh xạ hằng, biến mọi điểm thành giao điểm của α và β.

Định nghĩa 2. Nếu ánh xạ affine f là một đơn ánh thì ta nói f là *đơn cấu affine*, nếu f là toàn ánh thì ta nói f là *toàn cấu affine*, nếu f là song ánh thì ta nói f là *đẳng cấu affine*.

Đôi lúc để đơn giản, ta chỉ nói vắn tắt là *đơn cấu, toàn cấu* hoặc *đẳng cấu* nếu không có gì gây nhầm lẫn.

Khi $\mathbb{A} = \mathbb{A}'$, tức là $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$, ta nói f là một *tự đồng cấu affine* của $\mathbb{A}$.

Nếu có một đẳng cấu affine từ $\mathbb{A}$ vào $\mathbb{A}'$ thì ta nói $\mathbb{A}$ và $\mathbb{A}'$ *đẳng cấu (affine) với nhau* và ký hiệu $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'$. Nếu $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ là đẳng cấu affine thì ta nói f là một *tự đẳng cấu affine* của $\mathbb{A}$. Quan hệ đẳng cấu giữa các không gian affine là một quan hệ tương đương và hai không gian affine đẳng cấu khi và chỉ khi chúng có cùng số chiều.

Định lý 2.1.1. *Cho $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ là ánh xạ affine. Khi đó*

1. *f là đơn cấu, toàn cấu hoặc đẳng cấu affine khi và chỉ khi ánh xạ liên kết $\overrightarrow{f}$ theo thứ tự là đơn cấu, toàn cấu hoặc đẳng cấu tuyến tính;*

2. *f là đẳng cấu affine thì ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ cũng là một đẳng cấu affine và $\overrightarrow{f^{-1}} = (\overrightarrow{f})^{-1}$.*

Chứng minh.

1. Lấy $P \in \mathbb{A}$ và đặt $P' = f(P) \in \mathbb{A}'$. **Trường hợp đơn cấu.** Giả sử f là đơn cấu và $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$ mà $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$. Khi đó tồn tại duy nhất các điểm $M, N \in \mathbb{A}$ sao cho $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PN}$. Ta có
$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{f(P)f(M)},$$
$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PN}) = \overrightarrow{f(P)f(N)}.$$
Từ $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$ ta suy ra $f(M) = f(N)$. Do f là đơn ánh nên $M = N$ hay $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. Vậy $\overrightarrow{f}$ là đơn cấu tuyến tính. Ngược lại, nếu $\overrightarrow{f}$ là đơn cấu tuyến tính thì lập luận hoàn toàn tương tự ta sẽ chứng minh được f là đơn cấu.

   Trường hợp toàn cấu. Giả sử f là toàn cấu. Khi đó với $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{P'M'} \in \overrightarrow{\mathbb{A}'}$, ta gọi M là một điểm của $\mathbb{A}$ sao cho $f(M) = M'$. Điểm M luôn tồn tại vì f là toàn ánh. Đặt $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PM} \in \mathbb{A}$. Ta có:
$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{f(P)f(M)} = \overrightarrow{P'M'} = \overrightarrow{u}'.$$
Điều này chứng tỏ $\overrightarrow{f}$ là toàn cấu. Ngược lại, nếu $\overrightarrow{f}$ là toàn cấu tuyến tính thì lập luận hoàn toàn tương tự ta sẽ chứng minh được f là toàn cấu affine.

   Trường hợp đẳng cấu. Được suy ra từ hai trường hợp trên.

2. Giả sử f là đẳng cấu. Khi đó với $M' = f(M) \in \mathbb{A}'$ và $N' = f(N) \in \mathbb{A}'$ ta có
$$\overrightarrow{f^{-1}(M')f^{-1}(N')} = \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{M'N'}).$$
Suy ra f^{-1} là ánh xạ affine và $\overrightarrow{f^{-1}} = (\overrightarrow{f})^{-1}$. □

□

Định lý sau cho thấy hợp của hai ánh xạ affine cũng là một ánh xạ affine.

Định lý 2.1.2. *Nếu $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ và $g : \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}''$ là các ánh xạ affine lần lượt liên kết với các ánh xạ tuyến tính $\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{g}$ thì $g \circ f$ là ánh xạ affine liên kết với $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$, tức là*
$$\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}.$$

Chứng minh. Với mọi $M, N \in \mathbb{A}$ ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{(g \circ f)(M)(g \circ f)(N)} &= \overrightarrow{g(f(M))g(f(N))} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f(M)f(N)})\\ &= \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})) = (\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f})(\overrightarrow{MN}).\end{aligned}$$
Vậy $g \circ f$ là ánh xạ affine và $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. □

Các định lý sau cho thấy ánh xạ affine cũng có các tính chất tương tự như ánh xạ tuyến tính.

Định lý 2.1.3. *Cho $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ là ánh xạ affine liên kết với ánh xạ tuyến tính $\overrightarrow{f}$. Khi đó*

1. *Nếu α là một cái phẳng trong $\mathbb{A}$ với phương $\overrightarrow{\alpha}$ thì $f(\alpha)$ là một cái phẳng trong $\mathbb{A}'$ với phương $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\alpha})$ và $\dim f(\alpha) \leq \dim \alpha$. Trong trường hợp nếu f là một đơn cấu thì $\dim f(\alpha) = \dim \alpha$.*

2. *Giả sử α' là một cái phẳng trong $\mathbb{A}'$ với phương $\overrightarrow{\alpha}'$. Nếu $f^{-1}(\alpha')$ khác rỗng thì $f^{-1}(\alpha')$ là một cái phẳng trong $\mathbb{A}$ với phương $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{\alpha}')$.*

Chứng minh.

1. Lấy $P \in \alpha$ và đặt $P' = f(P)$. Gọi $\alpha' = \{M' \in \mathbb{A}' : \overrightarrow{P'M'} \in \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\alpha})\}$ là cái phẳng trong $\mathbb{A}'$ đi qua điểm P' với phương là $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\alpha})$. Ta sẽ chứng minh $f(\alpha) = \alpha'$. Ta có $M' \in f(\alpha) \Leftrightarrow \exists M \in \alpha, f(M) = M'$. Vì $\overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{\alpha}$ nên $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{P'M'} \in \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\alpha})$, tức là $M' \in \alpha'$.

   Ngược lại giả sử $M' \in \alpha'$, có nghĩa là $\overrightarrow{P'M'} \in \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\alpha})$. Khi đó tồn tại $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{P'M'}$. Vì $P \in \alpha$ và $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\alpha}$ nên tồn tại duy nhất điểm $M \in \alpha$, sao cho $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{v}$. Do $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{P'f(M)} = \overrightarrow{P'M'}$, ta suy ra $f(M) = M'$, tức là $M' \in f(\alpha)$.

   Do $\dim \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\alpha}) \leq \dim \overrightarrow{\alpha}$ nên $\dim f(\alpha) \leq \dim \alpha$.

   Theo Định lý 2.1.1, f là đơn cấu khi và chỉ khi $\overrightarrow{f}$ là đơn cấu. Trong trường hợp này $\dim \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\alpha}) = \dim \overrightarrow{\alpha}$ nên $\dim f(\alpha) = \dim \alpha$.

2. Do $f^{-1}(\alpha') \neq \emptyset$ nên tồn tại $P \in f^{-1}(\alpha')$. Gọi $P' = f(P) \in \alpha'$ và $\alpha = \{M \in \mathbb{A} : \overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{\alpha}')\}$, là cái phẳng trong $\mathbb{A}$ đi qua điểm P với phương là $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{\alpha}')$. Ta có $M \in f^{-1}(\alpha') \Leftrightarrow f(M) \in \alpha'$. Khi đó $\overrightarrow{P'f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PM}) \in \overrightarrow{\alpha'}$ nên suy ra $\overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{\alpha'})$, tức là $M \in \alpha$.

   Ngược lại giả sử $M \in \alpha$, có nghĩa là $\overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{\alpha}')$. Do $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{P'f(M)} \in \overrightarrow{\alpha'}$, nên suy ra $f(M) \in \alpha'$, tức là $M \in f^{-1}(\alpha')$. □

2.1.2 Sự xác định ánh xạ affine.

Ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định nếu biết được ảnh của một cơ sở. Ánh xạ affine cũng tương tự như vậy, nó hoàn toàn được xác định nếu biết được ảnh của một mục tiêu.

Định lý 2.1.4. *Cho $\mathbb{A}$ và $\mathbb{A}'$ là các $\mathbb{K}$-không gian affine, $\varphi : \overrightarrow{\mathbb{A}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{A}'}$ là ánh xạ tuyến tính, $P \in \mathbb{A}$ và $P' \in \mathbb{A}'$. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ affine $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ sao cho $f(P) = P'$ và $\overrightarrow{f} = \varphi$.*

Nói cách khác ánh xạ affine hoàn toàn được xác định khi biết ánh xạ tuyến tính liên kết và một cặp điểm tương ứng.

Chứng minh. Xét ánh xạ $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ xác định bởi $f(M) = M'$ sao cho $\overrightarrow{P'M'} = \varphi(\overrightarrow{PM})$, $\forall M \in \mathbb{A}$. Rõ ràng $f(P) = P'$ và với mọi $M, N \in \mathbb{A}$ ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{f(P)f(N)} - \overrightarrow{f(P)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{PN}) - \varphi(\overrightarrow{PM}) \\ &= \varphi(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}) = \varphi(\overrightarrow{MN}).\end{aligned}$$

Do đó f là ánh xạ affine liên kết với φ.

Chúng ta đã chỉ ra sự tồn tại, phần còn lại là chứng minh cho tính duy nhất.

Giả sử tồn tại ánh xạ affine $g : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ liên kết với φ và $g(P) = P'$. Khi đó với mọi $M \in \mathbb{A}$ ta có

$$\overrightarrow{g(P)g(M)} = \varphi(\overrightarrow{PM}) = \overrightarrow{f(P)f(M)}.$$

Do $g(P) = f(P) = P'$, nên suy ra $g(M) = f(M)$. Vậy $f = g$.

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét. Nếu $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}'$ và φ là đẳng cấu tuyến tính thì f là một đẳng cấu affine.

Hệ quả 2.1.5. *Cho $\mathbb{A}$ và $\mathbb{A}'$ là hai $\mathbb{K}$-không gian affine, $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ là mục tiêu của $\mathbb{A}$, $O' \in \mathbb{A}'$ và $\{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \dots, \overrightarrow{e_n}'\}$ là một hệ vector trong $\overrightarrow{\mathbb{A}'}$. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ affine $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ sao cho*

$$f(O) = O' \quad \text{và} \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_i}', \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nói cách khác, ánh xạ affine hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một mục tiêu. Hơn nữa, nếu $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}'$ và $\{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \dots, \overrightarrow{e_n}'\}$ là một cơ sở của $\mathbb{A}'$ thì f là một đẳng cấu affine.

Chứng minh. Theo kết quả của ĐSTT, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $\varphi : \overrightarrow{\mathbb{A}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{A}'}$ sao cho

$$\varphi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_i}', \; i = 1, ..., n.$$

Áp dụng Định lý 2.1.4 cho ánh xạ tuyến tính φ và cặp điểm O, O' ta thu được ánh xạ affine cần tìm. Phần còn lại là hiển nhiên vì lúc này φ là đẳng cấu tuyến tính. □

Nhận xét. Trong hệ quả trên nếu thay mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ bằng hệ $n + 1$ điểm độc lập $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ cũng như O' và hệ vector $\{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \dots, \overrightarrow{e_n}'\}$ bởi hệ $n + 1$ điểm $\{A_0', A_1', \dots, A_n'\}$ thì ta có kết quả tương tự: *Tồn tại duy nhất ánh xạ affine biến A_i thành A_i', $i = 0, 1, \dots n$, tức là ánh xạ affine hoàn toàn được xác định bởi ảnh của $n + 1$ điểm độc lập affine* Hơn nữa, nếu $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}'$ và $\{A_0', A_1', \dots, A_n'\}$ là hệ điểm độc lập thì f là một đẳng cấu affine.

2.1.3 Định lý cơ bản của ánh xạ affine

Một câu hỏi được đặt ra là, tính chất nào "đủ" để đặc trưng cho một ánh xạ affine. Định lý 2.1.8 trong mục này sẽ cho ta một đặc trưng như vậy cho trường hợp đẳng cấu affine.

Định lý 2.1.6. *Ánh xạ affine bảo toàn tâm tỉ cự của mọi hệ hữu hạn điểm.*

Chứng minh. Giả sử $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ là ánh xạ affine, G là tâm tỉ cự của họ $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ gắn với họ hệ số $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$, tức là ta có

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}.$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{GP_i}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(P_i)} = \overrightarrow{0}.$$

Điều này chứng tỏ $f(G)$ là tâm tỉ cự của họ $\{f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_m)\}$ gắn với họ hệ số $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$. □

Chúng ta có ngay hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.1.7. *Ánh xạ affine bảo toàn tỉ số đơn của các bộ ba điểm thẳng hàng (nếu tỉ số đơn ấy xác định).*

Định lý 2.1.8. *Cho f là một song ánh từ $\mathbb{K}$-không gian affine $\mathbb{A}$ lên $\mathbb{K}$-không gian affine $\mathbb{A}'$. Nếu f bảo tồn tính thẳng hàng của mọi hệ ba điểm thẳng hàng (tức là nếu M, N, P là ba điểm thẳng hàng thì $f(M), f(N), f(P)$ cũng thẳng hàng) và bảo toàn tỉ số đơn của chúng (tức là $(MNP) = (f(M)f(N)f(P))$ thì f là một đẳng cấu affine.*

Chứng minh. Lấy I là một điểm tùy ý của $\mathbb{A}$ và $g : \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}$ là một đẳng cấu affine biến $f(I)$ thành I thì $h = g \circ f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ là một song ánh giữ I bất động. Dễ thấy h cũng có tính chất bảo toàn tính thẳng hàng và tỉ số đơn của của mọi hệ ba điểm thẳng hàng.

Xét ánh xạ $\varphi : \overrightarrow{\mathbb{A}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{A}}$ xác định bởi

$$\varphi(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{h(I)h(M)} = \overrightarrow{Ih(M)}.$$

Ta sẽ chứng minh φ là một ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, nếu $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ thì ta có

$$\varphi(\overrightarrow{x}) = \varphi(\overrightarrow{0}) = \varphi(\overrightarrow{II}) = \overrightarrow{h(I)h(I)} = \overrightarrow{0}.$$

Do đó, nếu $\lambda = 0$ hay $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ thì $\lambda\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ và $\lambda(\varphi(\overrightarrow{x})) = \overrightarrow{0}$. Nên $\varphi(\lambda\overrightarrow{x}) = \lambda(\varphi(\overrightarrow{x})) = \overrightarrow{0}$.

Nếu $\lambda \neq 0$ và $\overrightarrow{x} \neq 0$ (ta chỉ cần xét $\lambda \neq 1$), lấy $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{x}, \overrightarrow{IN} = \lambda\overrightarrow{x}$ thì N, M, I là bộ ba điểm phân biệt, thẳng hàng và $(NMI) = \lambda$. Theo giả thiết ba điểm $h(N), h(M), h(I)$ là phân biệt, thẳng hàng và $(h(N), h(M), h(I)) = \lambda$ tức là $\overrightarrow{h(I)h(N)} = \lambda\overrightarrow{h(I)h(M)}$, hay

$$\varphi(\lambda\overrightarrow{x}) = \lambda(\varphi(\overrightarrow{x})).$$

Nếu hệ $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\}$ phụ thuộc tuyến tính, chúng ta dễ dàng chứng minh $\varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \varphi(\overrightarrow{x}) + \varphi(\overrightarrow{y})$. Còn nếu hệ $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\}$ độc lập tuyến tính thì ta lấy $M, N \in \mathbb{A}$ sao cho $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{x}, \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{y}$ và gọi P là trung điểm của đoạn MN tức là $\overrightarrow{IP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})$. Khi đó $(MNP) = -1$ nên $(h(M)h(N)h(P)) = -1$.

Vậy $h(P)$ cũng là trung điểm của đoạn $h(M)h(N)$, tức là

$$\overrightarrow{Ih(P)} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ih(M)} + \overrightarrow{Ih(N)}) \quad \text{hay} \quad \varphi(\frac{1}{2}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})) = \frac{1}{2}(\varphi(\overrightarrow{x}) + \varphi(\overrightarrow{y})).$$

Mà

$$\varphi(\frac{1}{2}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})) = \frac{1}{2}\varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}),$$

do đó

$$\varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \varphi(\overrightarrow{x}) + \varphi(\overrightarrow{y}).$$

Vậy φ là một ánh xạ tuyến tính và do đó h là một ánh xạ affine. Do h là song ánh nên h là đẳng cấu. Suy ra $f = g^{-1} \circ h$ là một đẳng cấu affine. □

Như vậy có thể nói tính chất thẳng hàng và tỉ số đơn của các bộ ba điểm thẳng hàng là các tính chất cơ bản của hình học affine.

2.2 Biểu thức tọa độ của ánh xạ affine.

2.2.1 Biểu thức tọa độ.

Cho $\mathbb{A}^n$ và $\mathbb{A}^m$ là hai K- không gian affine, $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ là ánh xạ affine, $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ là một mục tiêu affine của $\mathbb{A}^n$ và $\{O'; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_m}\}$ là một mục tiêu affine của $\mathbb{A}^m$. Khi đó f hoàn toàn được xác định bởi điểm $f(O)$ và ánh xạ tuyến tính liên kết $\overrightarrow{f}$. Giả sử

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{p=1}^{m} a_{pi}\overrightarrow{u_p} \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

và

$$\overrightarrow{O'f(O)} = \sum_{p=1}^{m} b_p\overrightarrow{u_p}.$$

Nếu $M \in \mathbb{A}^n$ có tọa độ (x_i) đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ và $f(M)$ có tọa độ (x'_p) đối với mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{u_p}\}$ thì

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{m} x'_p \overrightarrow{u_p} &= \overrightarrow{O'f(M)} = \overrightarrow{O'f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)} \\
&= \overrightarrow{O'f(O)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \\
&= \sum_{p=1}^{m} b_p \overrightarrow{u_p} + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{p=1}^{m} b_p \overrightarrow{u_p} + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{p=1}^{m} a_{pi} \overrightarrow{u_p} \right) \\
&= \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{pi} x_i \overrightarrow{u_p} + \sum_{p=1}^{m} b_p \overrightarrow{u_p} = \sum_{p=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{pi} x_i + b_p \right) \overrightarrow{u_p}.
\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$x'_p = \sum_{i=1}^{n} a_{pi} x_i + b_p \ ; \quad p = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.1}$$

Công thức 2.1 được viết dưới dạng tường minh như sau

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \ldots \\ x'_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \end{cases} . \tag{2.2}$$

Các công thức 2.1 và 2.2 được gọi là *biểu thức tọa độ* hay *phương trình* của f đối với các mục tiêu đã cho. Ngược lại khi cho trước các mục tiêu affine của $\mathbb{A}^n$ và $\mathbb{A}^m$ thì các công thức đó xác định một ánh xạ affine $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ biến điểm M có tọa độ (x_i) đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ nào đó của $\mathbb{A}^n$ thành điểm $f(M)$ có tọa độ (x'_i) đối với mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{u_j}\}$ nào đó của $\mathbb{A}^m$.

Nhận xét.

1. Công thức 2.1 và 2.2 có thể viết dưới dạng ma trận

   $$[x'] = A[x] + [b],$$

   trong đó

   $$[x'] = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} \quad ; \quad A = (a_{pi})_{m \times n} \quad ; \quad [b] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

2. Do ma trận A là ma trận mà các cột lần lượt là các cột tọa độ của $\overrightarrow{f} e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ đối với mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{u_p}\}$ nên ánh xạ affine $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ là đơn cấu, toàn cấu hay đẳng cấu affine khi và chỉ khi hạng của ma trận $(a_{pi})_{m \times n}$ theo thứ tự là n, m hay $n = m$.

2.3 PHÉP BIẾN ĐỔI AFFINE

2.3.1 Biến đổi affine.

Định nghĩa 3. Mỗi tự đẳng cấu của không gian affine $\mathbb{A}$ được gọi là một *phép biến đổi affine* (hay vắn tắt *biến đổi affine*) của $\mathbb{A}$.

Tập các phép biến đổi affine của $\mathbb{A}$, với phép toán hợp các ánh xạ là một nhóm con của nhóm các phép biến đổi của $\mathbb{A}$ (nhóm các song ánh từ $\mathbb{A}$ lên $\mathbb{A}$), gọi là nhóm affine của $\mathbb{A}$ và được ký hiệu là $\mathrm{Af}(\mathbb{A})$.

Giả sử $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ là một phép biến đổi affine của $\mathbb{A}$. Một điểm M của $\mathbb{A}$ sẽ gọi là *điểm bất động* đối với f hay là *điểm kép* của f nếu $f(M) = M$. Một *hình* $H \subset \mathbb{A}$ (tức là một tập hợp con của $\mathbb{A}$) gọi là *bất động* đối với f nếu $f(H) = H$.

Xét phép biến đổi tuyến tính $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathbb{A}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{A}}$ liên kết với f. Mỗi không gian con m-chiều của $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ bất động đối với $\overrightarrow{f}$ (tức là không gian con m-chiều $\overrightarrow{W}$ của $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ sao cho $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{W}) = \overrightarrow{W}$) sẽ được gọi là một *phương bất động* (m-chiều) đối với f (hay của f).

Đối với một hệ tọa độ affine cho trước của $\mathbb{A}^n$, phép biến đổi affine f có biểu thức tọa độ

$$[x'] = A[x] + [b]$$

với A là ma trận vuông cấp n không suy biến, tức là $\det A \neq 0$. Khi đó điểm M có tọa độ (x_i) là điểm bất động của f khi và chỉ khi (x_i) là nghiệm của hệ phương trình:

$$[x] = A[x] + [b]$$

hay

$$(A - I_n)[x] + [b] = 0.$$

Hệ phương trình trên nếu có nghiệm sẽ xác định một phẳng trong $\mathbb{A}^n$ (xem Bài tập **??**). Đây là phẳng mà mỗi điểm của nó là một điểm bất động của f.

Nhận xét. Dễ thấy, phép biến đổi affine biến m-phẳng thành m-phẳng và bảo toàn tính cắt nhau, chéo nhau và song song của các phẳng.

Định lý 2.3.1. *Phép biến đổi affine biến đơn hình m-chiều thành đơn hình m-chiều và biến hình hộp m-chiều thành hình hộp m-chiều.*

Chứng minh. Xét m-đơn hình

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathbb{A} : \overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} t_i \overrightarrow{OA_i},\ t_i \geq 0,\ t_0 + t_1 + ... + t_m = 1\ \}$$

và giả sử $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ là phép biến đổi affine của $\mathbb{A}$. Ta sẽ chứng minh $f(\mathcal{C})$ cũng là một đơn hình m-chiều.

Thật vậy, đặt
$$I = f(O),\ B_i = f(A_i),\ i = 0, 1, 2, ..., n.$$

Ta có
$$\overrightarrow{If(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \sum_{i=0}^{m} t_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=0}^{m} t_i \overrightarrow{IB_i},$$

nên suy ra
$$f(\mathcal{C}) = \{M' \in \mathbb{A} : \overrightarrow{IM'} = \sum_{i=0}^{m} t_i \overrightarrow{IB_i},\ t_i \geq 0,\ t_0 + t_1 + ... + t_m = 1\}.$$

Nói cách khác, $f(\mathcal{C})$ là đơn hình m-chiều đỉnh $B_0, B_1, ..., B_m$.

Phép chứng minh cho trường hợp hình hộp m-chiều hoàn toàn tương tự. $\square$

Sau đây là hai ví dụ quen thuộc về phép biến đổi affine.

2.3.2 Phép tịnh tiến của không gian affine.

Cho $\mathbb{A}$ là một không gian affine. Với $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$ cho trước, ánh xạ
$$T_{\overrightarrow{v}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$

xác định bởi, $\forall M \in \mathbb{A}$
$$T_{\overrightarrow{v}}(M) = M' \quad \text{sao cho} \quad \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v},$$
gọi là *phép tịnh tiến* theo vector $\overrightarrow{v}$.

Định lý 2.3.2. *$T_{\overrightarrow{v}}$ là một phép biến đổi affine liên kết với phép đồng nhất $Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}}$ của $\overrightarrow{\mathbb{A}}$. Ngược lại nếu f là một phép biến đổi affine của $\mathbb{A}$ mà $\overrightarrow{f} = Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}}$, thì f là một phép tịnh tiến.*

Chứng minh. Với mọi $M, N \in \mathbb{A}$, đặt $T_{\overrightarrow{v}}(M) = M'$ và $T_{\overrightarrow{v}}(N) = N'$. Ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{T_{\overrightarrow{v}}(M)T_{\overrightarrow{v}}(N)} &= \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}\\ &= -\overrightarrow{v} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{MN} = Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{MN}).\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $T_{\overrightarrow{v}}$ là phép biến đổi affine liên kết với $Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}}$.

Giả sử f là một phép biến đổi affine của $\mathbb{A}$ mà $\overrightarrow{f} = Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}}$. Ta sẽ chứng minh f là một phép tịnh tiến. Lấy $P \in \mathbb{A}$ cố định, đặt $f(P) = P'$ và $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PP'}$. Khi đó với mọi $M \in \mathbb{A}$ ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Mf(M)} &= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{Pf(P)} + \overrightarrow{f(P)f(M)}\\ &= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{PM}\\ &= \overrightarrow{PP'}\\ &= \overrightarrow{v}.\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ f là phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PP'}$.

Nhận xét Chúng ta dễ dàng chứng minh các nhận xét sau:

1. Khi $\overrightarrow{v} = 0$, $T_{\overrightarrow{v}}$ chính là phép đồng nhất của $\mathbb{A}$.
2. Nếu $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ thì $T_{\overrightarrow{v}}$ là phép biến đổi affine của $\mathbb{A}$ không có điểm bất động.
3. Với mọi $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$, ta có $T_{\overrightarrow{v}} \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$.
4. Với mọi $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$, ta có $(T_{\overrightarrow{v}})^{-1} = T_{-\overrightarrow{v}}$.

   Từ các nhận xét 3 và 4, ta suy ra tập tất cả các phép tịnh tiến của $\mathbb{A}$ lập thành một nhóm con Abel của nhóm Af($\mathbb{A}$), gọi là *nhóm tịnh tiến* của $\mathbb{A}$, ký hiệu là T($\mathbb{A}$).

Định lý 2.3.3. *Mọi phép biến đổi affine của $\mathbb{A}$ luôn phân tích được thành tích của một phép biến đổi affine có điểm bất động và một phép tịnh tiến hoặc tích của một phép tịnh tiến với một phép biến đổi affine có điểm bất động.*

Chứng minh. Giả sử $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ là một phép biến đổi affine. Lấy $O \in \mathbb{A}$ và đặt $O' = f(O)$.

Gọi $T_{\overrightarrow{v}}$ là phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OO'}$ và h là phép biến đổi affine với $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{f}$ và $h(O') = O'$.

Khi đó $h \circ T_{\overrightarrow{v}}$ là phép biến đổi affine có ánh xạ nền là $\overrightarrow{f} \circ Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}} = \overrightarrow{f}$. Hơn nữa ta có:

$$(h \circ T_{\overrightarrow{v}})(O) \ = \ h(T_{\overrightarrow{v}}(O)) = h(O') = O'.$$

Cho nên, theo định lý về sự xác định ánh xạ affine, ta có

$$h \circ T_{\overrightarrow{v}} = f.$$

Nếu chọn h là phép biến đổi affine với $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{f}$ và $h(O) = O$, thì ta sẽ có

$$T_{\overrightarrow{v}} \circ h = f.$$

□

Dễ thấy cách phân tích như chứng minh trên là không duy nhất.

2.3.3 Phép vị tự của không gian affine.

Cho $\mathbb{A}$ là một không gian affine. Với điểm $O \in \mathbb{A}$ và $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, ánh xạ

$$f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$

xác định bởi, $\forall M \in \mathbb{A}$

$$f(M) = M' \quad \text{sao cho} \quad \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM},$$

gọi là *phép vị tự* tâm O tỷ số λ.

Định lý 2.3.4. *1. Phép vị tự f tâm O tỷ số λ là một phép biến đổi affine với $\overrightarrow{f} = \lambda Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}}$.*

2. Nếu f là một phép biến đổi affine của $\mathbb{A}$ mà $\overrightarrow{f} = \lambda Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}}$, với $\lambda \neq 0, 1$; thì f là một phép vị tự tỷ số λ.

Chứng minh.

1. Với mọi $M, N \in \mathbb{A}$, đặt $f(M) = M'$ và $f(N) = N'$. ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} \\ &= \lambda\overrightarrow{MO} + \lambda\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{MN} \\ &= \lambda Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{MN}).\end{aligned}$$

   Vậy f là một phép biến đổi affine của $\mathbb{A}$ với $\overrightarrow{f} = \lambda Id_{\overrightarrow{\mathbb{A}}}$.

2. Lấy $P \in \mathbb{A}$, xét vector $\frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{Pf(P)}$. Vector này xác định do $\lambda \neq 1$. Khi đó tồn tại duy nhất điểm O sao cho $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{Pf(P)}$, tức là $\lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{Of(P)}$. Mặt khác, ta có $\lambda\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}$. Từ đây suy ra $O = f(O)$, hay O là điểm bất động của f.
   Khi đó với mọi $M \in \mathbb{A}$

$$\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \lambda\overrightarrow{OM}.$$

   Vậy f là phép vị tự tâm O tỷ số λ. □

Nhận xét. Chúng ta dễ dàng chứng minh các nhận xét sau đây:

1. Khi $\lambda = 1$, phép vị tự f chính là phép đồng nhất $Id_{\mathbb{A}}$. Nếu $\lambda \neq 1$, phép vị tự có một điểm bất động duy nhất chính là tâm vị tự của nó.

2. Nếu f là phép vị tự tâm O tỷ số λ và g là phép vị tự tâm O tỷ số μ, thì $f \circ g = g \circ f$ là phép vị tự tâm O tỷ số $\lambda\mu$.

3. Nếu f là phép vị tự tâm O tỷ số λ thì f^{-1} là phép vị tự tâm O tỷ số $\frac{1}{\lambda}$.

   Từ các nhận xét 2 và 3 ở trên, ta có thể suy ra rằng tập các phép vị tự cùng tâm O lập thành một nhóm con Abel của nhóm $\mathrm{Af}(\mathbb{A})$. Chú ý rằng tập tất cả các phép vị tự (không nhất thiết cùng tâm) không lập thành một nhóm. Nhưng tập gồm tất cả các phép vị tự và phép tịnh tiến của $\mathbb{A}$ với phép toán hợp các ánh xạ lại là một nhóm con của nhóm $\mathrm{Af}(\mathbb{A})$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

Bài tập 2.1. Cho $\mathbb{V}$ và $\mathbb{W}$ là các $\mathbb{K}$-không gian vector với cấu trúc affine chính tắc. Hãy chứng minh rằng mỗi ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ là một ánh xạ affine. Điều ngược lại có đúng không ?

Bài tập 2.2. Trong không gian affine $\mathbb{A}^3$ với mục tiêu affine đã chọn cho các điểm

$$A_0(1,1,1)\ ,\quad A_1(2,0,0)\ ,\quad A_2(1,0,0)\ ,\quad A_3(1,1,0);$$

$$A_0'(0,0,0)\ ,\quad A_1'(0,1,0)\ ,\quad A_2'(2,0,1)\ ,\quad A_3'(1,0,1).$$

1. Chứng minh rằng các hệ gồm bốn điểm $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ và $\{A_0', A_1', A_2', A_3'\}$ đều độc lập.
2. Tìm biểu thức tọa độ của phép biến đổi affine $f : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3$ thỏa điều kiện $f(A_i) = A_i',\ i = 0, 1, 2, 3,$ đối với mục tiêu đã cho.
3. Viết biểu thức tọa độ của ánh xạ affine đó đối với mục tiêu $\{A_0; A_1, A_2, A_3\}$.

Bài tập 2.3. Chứng minh rằng ánh xạ affine bảo tồn tính cắt nhau và song song của hai phẳng. Ánh xạ affine có bảo tồn tính chéo nhau của hai phẳng không?

Bài tập 2.4. Cho $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ là ánh xạ affine, α' và β' là các phẳng của $\mathbb{A}'$ sao cho $f^{-1}(\alpha') \neq \emptyset$ và $f^{-1}(\beta') \neq \emptyset$.

1. Chứng minh rằng nếu α', β' chéo nhau hoặc song song thì các ảnh ngược tương ứng $f^{-1}(\alpha')$ và $f^{-1}(\beta')$ cũng chéo nhau hoặc song song.
2. Trong trường hợp $\alpha' \cap \beta' \neq \emptyset$, hãy cho ví dụ để có thể xảy ra
$$f^{-1}(\alpha') \cap f^{-1}(\beta') = \emptyset.$$

Bài tập 2.5. Cho $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ là hai $\mathbb{K}$-không gian affine cùng số chiều và $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ là một đẳng cấu affine. Chứng minh rằng

1. Nếu α là m-phẳng của $\mathbb{A}$ thì $f(\alpha)$ là m-phẳng của $\mathbb{A}'$.
2. f bảo toàn tính cắt nhau, chéo nhau và song song của các phẳng.

Bài tập 2.6. Cho phẳng α trong $\mathbb{K}$-không gian affine $\mathbb{A}$, không gian vectơ con $\overrightarrow{\beta} \neq \{\overrightarrow{0}\}$ của $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ sao cho $\overrightarrow{\mathbb{A}} = \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta}$ và $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ M &\longmapsto f(M) \quad \text{sao cho } \overrightarrow{M_1 f(M)} = \lambda \overrightarrow{M_1 M}, \end{aligned}$$

trong đó M_1 là giao điểm của α với phẳng đi qua M có phương $\overrightarrow{\beta}$. Ta gọi f là phép *thấu xạ affine* với cơ sở α, phương $\overrightarrow{\beta}$ và hệ số λ.

1. Chứng minh mỗi phép thấu xạ affine là một phép biến đổi affine.
2. Tìm các điểm bất động của f.
3. Trong trường hợp α là siêu phẳng, chứng minh rằng các đường thẳng nối ảnh và tạo ảnh song song với nhau.

Chú ý.

– Khi $\dim\ \alpha = 0$, tức là $\alpha = \{O\}$, $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{A}$ thì f là phép vị tự tâm O hệ số λ.

– Khi $\lambda = -1$, f còn gọi là *phép đối xứng xiên* theo phương $\overrightarrow{\beta}$ qua phẳng α. Hơn nữa nếu $\alpha = \{O\}$ $(\dim\ \alpha = 0)$ thì ta có phép *đối xứng tâm* với tâm là điểm O.

Bài tập 2.7. Phép biến đổi affine của $\mathbb{K}$-không gian affine $\mathbb{A}$ gọi là có tính chất đối hợp nếu $f^2 = f \circ f$ là phép biến đổi đồng nhất của $\mathbb{A}$. Dễ thấy phép đối xứng xiên theo phương $\overrightarrow{\beta}$ qua phẳng α là một *phép biến đổi affine đối hợp*. Chứng minh rằng mọi phép biến đổi affine đối hợp khác ánh xạ đồng nhất là một phép đối xứng xiên.

Bài tập 2.8. Chứng minh rằng mọi phép biến đổi affine của không gian affine $\mathbb{A}$, với $\dim \mathbb{A} \geq 2$, giữ bất động phương của mọi đường thẳng (tức là biến đường thẳng thành đường thẳng song song) là một phép tịnh tiến hay phép vị tự.

Bài tập 2.9. Trong không gian affine $\mathbb{A}^3$ cho phép biến đổi affine f có biểu thức toạ độ đối với hệ toạ độ affine $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ là

$$\begin{cases} x_1' &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 1 \\ x_2' &= 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2 \\ x_3' &= 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5 \end{cases}.$$

Hãy tìm các điểm bất động và phương bất động một chiều của f.

Bài tập 2.10. Chứng minh rằng mỗi biến đổi affine của $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ đều có ít nhất một điểm bất động hoặc một phương bất động 1-chiều.

Bài tập 2.11. Chứng minh rằng trong một đơn hình m-chiều các đường thẳng nối hai trọng tâm của hai mặt bên đối diện luôn luôn đi qua một điểm cố định. Hãy phát biểu bài toán cho trường hợp đơn hình hai chiều và đơn hình ba chiều.

Bài tập 2.12. Trong $\mathbb{A}^n$ cho mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}, i = 1, 2, \ldots, n$. Xét ánh xạ f biến điểm $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thành điểm $M'(0, 0, \ldots, 0, x_k, \ldots, x_n)$. Chứng tỏ f là một phép chiếu song song. Tìm cơ sở và phương chiếu phép chiếu f.

Bài tập 2.13. Chứng minh rằng hạn chế của một ánh xạ affine lên một m-phẳng cũng là một ánh xạ affine.

Bài tập 2.14. Cho $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ là một ánh xạ affine. Chứng minh rằng:

1. f là đơn cấu khi và chỉ khi $\dim \mathbb{A} = \dim f(\mathbb{A})$;
2. f là toàn cấu khi và chỉ khi $\dim f(\mathbb{A}) = \dim \mathbb{A}'$;
3. f là đẳng cấu khi và chỉ khi $\dim \mathbb{A} = \dim f(\mathbb{A}) = \dim \mathbb{A}'$.

Bài tập 2.15. Cho các ánh xạ affine từ $\mathbb{A}^3$ vào chính nó

$$f : \begin{cases} x'_1 &= 0 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{cases}; \quad g : \begin{cases} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= 0 \\ x'_3 &= x_3 \end{cases}; \quad h : \begin{cases} x'_1 &= x_1 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng, các ánh xạ f, g, h là các phép chiếu song song. Tìm cơ sở và phương chiếu của mỗi phép chiếu.

Bài tập 2.16. Trong không gian affine thực $\mathbb{A}^3$ cho hai mặt phẳng phân biệt α và α'. Cho hai tam giác $ABC \subset \alpha$ và $MNP \subset \alpha'$.

1. Có bao nhiêu đẳng cấu affine từ α vào α' biến tam giác ABC thành tam giác MNP.
2. Có bao nhiêu phép biến đổi affine của $\mathbb{A}^3$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.
3. Trong bài toán này, nếu thay tam giác ABC bằng hình bình hành $ABCD$ và tam giác MNP bằng hình bình hành $MNPQ$ thì kết quả ở câu 1 và câu 2 như thế nào?

Bài tập 2.17. Cho $f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ là một song ánh thỏa mãn điều kiện, với mọi điểm $M, N \in \mathbb{A}^2$ ta có $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ và $\overrightarrow{Nf(N)}$ cùng phương với $\overrightarrow{Mf(M)}$. Chứng minh rằng, f là một phép tịnh tiến.

Bài tập 2.18. Trong $\mathbb{A}^3$ cho ánh xạ f có biểu thức tọa độ đối với mục tiêu cho trước

$$\begin{cases} x'_1 &= 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1 \\ x'_2 &= x_1 - x_2 + x_3 - 1 \\ x'_3 &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 \end{cases}.$$

1. Chứng minh rằng f là phép biến đổi affine.
2. Tìm ảnh và tạo ảnh của điểm $M(1,-2,1)$.
3. Tìm ảnh và tạo ảnh của đường thẳng đi qua điểm $N(1,1,1)$ với vector chỉ phương $\overrightarrow{v}(1,2,1)$.
4. Tìm ảnh và tạo ảnh của mặt phẳng:

$$\begin{cases} x_1 &= & 2t_1 - t_2 + 1 \\ x_2 &= & t_1 + t_2 - 2 \\ x_3 &= & -t_1 - t_2 + 3 \end{cases}.$$

Bài tập 2.19. Trong $\mathbb{A}^3$ với mục tiêu cho trước, cho ánh xạ affine f có biểu thức tọa độ

$$\begin{cases} x'_1 &= & 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2 \\ x'_2 &= & 5x_1 - x_2 + 5x_3 - 3 \\ x'_3 &= & -2x_1 - x_2 - x_3 + 1 \end{cases}.$$

Tìm điểm bất động và phương bất động 1-chiều của f.

Bài tập 2.20. Chứng minh rằng, nếu một phép biến đổi affine của $\mathbb{A}^n$ có $n+1$ điểm bất động độc lập thì f là phép đồng nhất.

Bài tập 2.21. Trong $\mathbb{A}^3$ cho tứ diện $ABCD$. Viết biểu thức tọa độ của phép biến đổi affine f đối với mục tiêu $\{A; B, C, D\}$ trong các trường hợp sau:

1. $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D, f(D) = A$;
2. $f(A) = B, f(B) = A, f(C) = D, f(D) = C$;
3. $f(A) = C, f(B) = D, f(C) = A, f(D) = B$.

Bài tập 2.22. Trong $\mathbb{A}^n$ cho hai mục tiêu $\{O; E_i\}$ và $\{O'; E'_i\}$. Biết công thức đổi mục tiêu từ $\{O; E_i\}$ sang $\{O'; E'_i\}$có dạng

$$\begin{cases} x_1 &= x'_1 + 1 \\ x_2 &= x'_1 + x'_2 + 2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n &= x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n + n \end{cases}.$$

Hãy tìm biểu thức tọa độ của phép biến đổi affine đối với mục tiêu $\{O, E_i\}$ biến O thành O' và E_i thành E'_i.

Bài tập 2.23. Chứng minh rằng:

1. tích của hai phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến;

2. tích của một phép tịnh tiến và một phép vị tự là một phép vị tự hoặc một phép tịnh tiến;

3. tích của hai phép vị tự là một phép vị tự hoặc một phép tịnh tiến;

Hãy cho các ví dụ cụ thể để minh họa.

Bài tập 2.24. Trong không gian affine $\mathbb{A}^n$,

1. hai tam giác có tương đương affine không? 2 đơn hình m-chiều có tương đương affine không?

2. Hai hình bình hành có tương đương affine không? Hai hình hộp m-chiều có tương đương affine không?

3. Hai hình thang có tương đương affine không? (Hãy nêu một định nghĩa thích hợp cho khái niệm hình thang)

Bài tập 2.25. Chứng minh rằng, tập tất cả các phép tịnh tiến của không gian affine $\mathbb{A}^n$ với phép toán hợp ánh xạ lập thành một nhóm và nhóm này đẳng cấu với nhóm cộng của $\overrightarrow{\mathbb{A}^n}$. Tập gồm tất cả các phép vị tự và phép tịnh tiến của không gian affine $\mathbb{A}^n$ lập thành một nhóm với phép toán hợp ánh xạ. Nhóm này có giao hoán không?

Bài tập 2.26. Chứng minh rằng, tập $\mathbb{V}$ tất cả các phép vị tự cùng tâm của không gian affine $\mathbb{A}^n$ lập thành một nhóm với phép toán hợp ánh xạ và nhóm này đẳng cấu với nhóm nhân của nhóm $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Tìm nhóm con hai phần tử của $\mathbb{V}$.

Bài tập 2.27. Chứng minh rằng, các khái niệm tính chất sau là bất biến affine, tức là không thay đổi qua các phép biến đổi affine: phẳng, hệ điểm độc lập, tâm tỉ cự, tỉ số đơn, tỉ số kép, hình tam giác, trung tuyến của tam giác; tính cắt nhau, song song, chéo nhau của hai phẳng,

Bài tập 2.28. Cho f là phép biến đổi affine của $\mathbb{A}^n$. Chứng minh rằng:

1. f có phương bất biến một chiều hoặc hai chiều;

2. nếu f có điểm kép thì f có đường thẳng hoặc mặt phẳng bất động;

Hãy cho ví dụ chứng tỏ rằng f có thể không có đường thẳng hoặc mặt phẳng bất động.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

Bài tập 2.29. Viết biểu thức tọa độ dạng đơn giản nhất của phép tịnh tiến và phép vị tự trong một mục tiêu affine chọn thích hợp.

Bài tập 2.30. Cho α là m-phẳng, β là $(n-m)$-phẳng, $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \{\overrightarrow{0}\}$

1. Giả sử α' là m-phẳng song song với α và f là phép chiếu song song lên α theo phương β. Chứng minh rằng $f|_{\alpha'} : \alpha' \longrightarrow \alpha$ là một đẳng cấu (phép chiếu song song từ α' lên α theo phương β).

2. Gọi I là giao điểm của α và β. Giả sử $f : \alpha \longrightarrow \alpha$ và $g : \beta \longrightarrow \beta$ là các ánh xạ affine sao cho $f(I) = g(I)$. Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ affine $h : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ sao cho $h|_\alpha = f$ và $h|_\beta = g$. Nếu f và g là các đẳng cấu, hãy chứng minh h cũng là đẳng cấu.

Bài tập 2.31. Cho $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ là ánh xạ affine có biểu thức tọa độ đối với một mục tiêu affine cho trước là
$$[x'] = A[x] + [u].$$

1. Tìm điều kiện cần và đủ để f là phép chiếu song song. Khi đó, hãy tìm cơ sở và phương chiếu của f.

2. Áp dụng với $f : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3$ có biểu thức tọa độ là $[x'] = A[x] + [u]$, trong đó
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad [u] = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bài tập 2.32. Trong không gian affine $\mathbb{A}^n$ có bao nhiêu phép biến đổi affine

1. biến n-đơn hình cho trước S thành n-đơn hình cho trước S';

2. biến $(n-1)$-đơn hình cho trước S thành $(n-1)$-đơn hình cho trước S'.

Bài tập 2.33. Hai hình được gọi là *tương đương affine* nếu có phép biến đổi affine biến hình này thành hình kia.

1. Tìm điều kiện để hai tập hợp mà mỗi tập gồm 2 điểm tương đương affine. Câu hỏi tương tự cho trường hợp số điểm của hai tập hợp là 3, 4.

2. Tổng quát, tìm điều kiện để 2 tập hợp gồm $m+1$ điểm trong không gian affine $\mathbb{A}^n$ là tương đương affine.

Bài tập 2.34. Dùng phép chiếu song song để chứng minh định lý Thalès.

Bài tập 2.35. Trong không gian affine $\mathbb{A}^n$ cho siêu phẳng α có phương trình $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ và phép biến đổi affine f có biểu thức tọa độ $[x'] = A[x] + [u]$ đối với một mục tiêu nào đó. Tìm điều kiện cần và đủ để α là hình bất động của f.

Bài tập 2.36. trong $\mathbb{A}^n$ cho siêu phẳng α và 2 điểm $M, N \notin \alpha$ nhưng $\overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{\alpha}$.

1. Chứng minh rằng, tồn tại duy nhất một ánh xạ affine giữ bất động mọi điểm của α và biến M thành N. Khi đó, f được gọi là *phép thấu xạ trượt* theo cơ sở α với phương thấu xạ (không gian con 1-chiều) xác định bởi $\overrightarrow{MN}$. Hãy xác định $\overrightarrow{f}$.

2. Chỉ dùng các đường thẳng, hãy dựng ảnh của một điểm bất kỳ qua f.

Bài tập 2.37. Chứng minh rằng, với phép thấu xạ qua siêu phẳng hoặc phép thấu xạ trượt thì đường thẳng nối ảnh và tạo ảnh là đường thẳng bất động. Mỗi m-phẳng và ảnh của nó hoặc song song hoặc cắt nhau trên cơ sở thấu xạ.

Bài tập 2.38. Chứng minh rằng, phép biến đổi affine của $\mathbb{A}^n$ có một siêu phẳng mà mọi điểm đều là điểm bất động là phép thấu xạ hoặc phép thấu xạ trượt mà cơ sở là siêu phẳng nói trên.

Bài tập 2.39. Trong $\mathbb{A}^3$ cho các phép biến đổi affine f và g có biểu thức tọa độ đối với một mục tiêu affine đã cho là $[x'] = A[x] + [u]$, $[x'] = B[x] + [v]$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chứng tỏ rằng f là phép thấu xạ và g là phép thấu xạ trượt. Tìm cơ sở, hệ số thấu xạ của f, cơ sở và phương thấu xạ của g.

Bài tập 2.40. Chứng minh rằng, nếu một phép biến đổi affine của $\mathbb{A}^n$ có một phương 1-chiều mà mọi đường thẳng có phương đó đều bất động thì f là một trong các phép sau đây: phép tịnh tiến, phép thấu xạ qua siêu phẳng, phép thấu xạ trượt.

Bài tập 2.41. Chứng minh rằng, mọi phép biến đổi affine của $\mathbb{A}^n$ có thể phân tích thành hợp của không quá $n+1$ phép thấu xạ qua siêu phẳng hoặc thấu xạ trượt.

Bài tập 2.42. Chứng minh rằng, tập $\mathbb{H}$ tất cả các phép thấu xạ cùng cơ sở và cùng phương thấu xạ của không gian affine $\mathbb{A}^n$ lập thành một nhóm giao hoán với phép toán hợp ánh xạ và nhóm này đẳng cấu với nhóm nhân của nhóm $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Tìm nhóm con hai phần tử của $\mathbb{H}$.

Bài tập 2.43. Chứng minh rằng, tập $\mathbb{H}$ tất cả các phép thấu xạ trượt cùng cơ sở và cùng phương thấu xạ của không gian affine $\mathbb{A}^n$ lập thành một nhóm giao hoán với phép toán hợp ánh xạ.

Chỉ số

Chương 3

Siêu mặt bậc hai

Phẳng là các đối tượng hình học bậc nhất, được đồng nhất với các phương trình và hệ phương trình tuyến tính bậc nhất. Siêu mặt bậc hai là các đối tượng bậc hai, được đồng nhất với các phương trình bậc hai. Các kết quả đẹp đẽ của ĐSTT về các dạng toàn phương và các dạng song tuyến tính đối xứng đã được áp dụng để nghiên cứu các siêu mặt bậc hai. Các đối tượng bậc cao hơn không được giới thiệu trong giáo trình này do các phương trình bậc cao hơn khó được khảo sát bằng công cụ ĐSTT. Các mặt bậc cao hơn hai được nghiên cứu trong Hình học-Đại số. Một điều dễ hiểu là đối với các siêu mặt bậc hai, tập các không điểm của một hàm bậc hai, sẽ rất chặt chẽ nếu được trình bày cho các không gian trên trường số phức, một trường đóng đại số. Tuy nhiên, việc trình bày như vậy không gần gủi với cách hiểu ở PTTH. Chính vì thế chúng tôi chọn cách trình bày cho không gian thực, mặc dù biết rằng cách trình bày như vậy sẽ khó khăn và có nhiều điểm không chặt chẽ. Siêu mặt bậc hai trên không gian phức sẽ được giới thiệu trong các bài phụ lục.

3.1 Siêu mặt bậc hai.

3.1.1 Định nghĩa siêu mặt bậc hai.

Định nghĩa 1. Trong không gian affine n-chiều $\mathbb{A}$ cho mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$. *Siêu mặt bậc hai* (affine) trong $\mathbb{A}$ là tập hợp S gồm tất cả các điểm $M \in \mathbb{A}$ có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đối với mục tiêu đã cho thoả mãn một phương trình bậc hai dạng

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0, \tag{3.1}$$

trong đó các $a_{ij} \in \mathbb{K}$, không đồng thời bằng 0 và $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Điều này có nghĩa là ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

là đối xứng và khác không.

Phương trình 3.1 gọi là *phương trình của siêu mặt bậc hai đối với mục tiêu đã cho* và có thể viết dưới dạng ma trận

$$[x]^t A[x] + 2\ [a]^t[x] + a_0 = 0. \tag{3.2}$$

Theo cách gọi thông thường, siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ gọi là *đường bậc hai* và siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{A}^3(\mathbb{K})$ gọi là *mặt bậc hai*.

Ma trận $A = (a_{ij})_n$ gọi là *ma trận bé* và ma trận

$$B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gọi là *ma trận lớn* của siêu mặt bậc hai.

Một siêu mặt bậc hai gọi là *không suy biến* nếu ma trận lớn không suy biến ($\det B \neq 0$) và gọi là *suy biến* nếu ma trận lớn suy biến ($\det B = 0$).

Dựa vào các tính chất đặc trưng, người ta gọi một siêu mặt bậc hai suy biến với hạng lớn bằng hạng bé là một *siêu nón bậc hai* và một siêu mặt bậc hai suy biến với hạng lớn khác hạng bé là *siêu trụ bậc hai*. Chúng ta sẽ thấy rõ ý nghĩa của các tên gọi này ở các Bài tập **??** và **??**.

Nhận xét 1. 1. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng khái niệm siêu mặt bậc hai không phụ thuộc vào việc chọn mục tiêu trong $\mathbb{A}^n$. Thật vậy giả sử ta có phép đổi mục tiêu

$$[x] = C[x'] + [b].$$

Thay giá trị của $[x]$ vào 3.2, ta được

$$\begin{aligned} & [x]^t A[x] + 2\ [a]^t[x] + a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (C[x'] + [b])^t A(C[x'] + [b]) + 2\ [a]^t(C[x'] + [b]) + a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & ([x']^t C + [b]^t)A(C[x'] + [b]) + 2\ [a]^t(C[x'] + [b]) + a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & [x']^t CAC[x'] + ([x']^t CA[b] + [b]^t AC[x'] + 2[a]^t C[x']) + [a]^t[b] + a_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Do $[x']^tCA[b]$ và $[b]^tAC[x']$ đều là các ma trận vuông cấp 1 nên

$$([x']^tCA[b])^t = [b]^tAC[x'] = [x']^tCA[b].$$

Do đó 3.3 trở thành

$$[x']^tC^tAC[x'] + 2([b]^tAC + 2[a]^tC)[x'] + [a]^t[b] + a_0 = 0, \tag{3.4}$$

tức là cũng có dạng 3.1.

2. Dễ thấy hạng của ma trận bé cũng không phụ thuộc vào mục tiêu đã chọn. Tương tự, hạng của ma trận lớn cũng vậy. Do chứng minh cồng kềnh chúng ta sẽ không trình bày ở đây mà sẽ đưa vào phần bài tập cuối chương. Do vậy các khái niệm suy biến không suy biến của siêu mặt bậc hai, siêu trụ, siêu nón cũng không phụ thuộc vào mục tiêu đã chọn.

Ví dụ 1. 1. Trong $\mathbb{A}^2$ phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0, b > 0,$$

xác định một đường bậc hai gọi là ellipse.

2. Trong $\mathbb{A}^3$ phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a > 0, b > 0, c > 0,$$

xác định một mặt bậc hai gọi là mặt ellipsoid.

Định lý 3.1.1. *Nếu S là một siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{A}^n$ và f là một phép biến đổi affine của $\mathbb{A}^n$ thì ảnh $f(S)$ cũng là một siêu mặt bậc hai của $\mathbb{A}^n$.*

Chứng minh.

Giả sử S có phương trình dạng 3.1 đối với mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ và $f : A^n \longrightarrow A^n$ là một phép biến đổi affine. Gọi $\{O'; \overrightarrow{w_i}\}$ là ảnh của mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ qua phép biến đổi affine f, với $O' = f(O)$ và $\overrightarrow{w_i} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_i});\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Nếu điểm M có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$, thì do

$$\overrightarrow{O'f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f}(\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{w_i}$$

nên điểm $M' = f(M)$ cũng có tọa độ là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nhưng đối với mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{w_i}\}$. Điều này chứng tỏ, các điểm của $f(S)$ có tọa độ đối với mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{w_i}\}$ cũng thỏa mãn phương trình 3.1. Nói cách khác, phương trình của S đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ và phương trình của $f(S)$ đối với mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{w_i}\}$ là giống nhau.

Theo định nghĩa, $f(S)$ cũng là một siêu mặt bậc hai và hiển nhiên tính suy biến hay không suy biến cũng được bảo toàn. $\square$

3.1.2 Tâm của siêu mặt bậc hai.

Định nghĩa 2. *Tâm* của siêu mặt bậc hai S là điểm I sao cho nếu chọn I làm gốc mục tiêu thì phương trình của S có dạng đơn giản

$$[x]^t A[x] + a = 0, \tag{3.5}$$

tức là không có mặt các số hạng bậc nhất.

Nếu tâm I của S thuộc S thì I gọi là *điểm kì dị* của S.

Nhận xét. Tâm của siêu mặt bậc hai S là tâm đối xứng của nó. điều này có nghĩa là phép đối xứng qua I, tức là phép vị tự tâm I tỷ số -1 của A^n (biến điểm $M \in A^n$ thành điểm M' sao cho tỉ số đơn $(MM'I) = -1$), biến S thành chính nó.

Thật vậy, dễ thấy điểm M có tọa độ $(x_1, ..., x_n)$ thỏa mãn phương trình 3.5 khi và chỉ khi M' đối xứng qua I có tọa độ $(-x_1, ..., -x_n)$ thỏa mãn phương trình 3.5. Từ đây suy ra I là tâm đối xứng của S. Điều ngược lại cũng đúng. Nếu I là tâm đối xứng của siêu mặt bậc hai S thì I là tâm của S (xem bài tập **??**

Định lý 3.1.2. *Trong không gian affine $\mathbb{A}^n$, cho siêu mặt bậc hai S có phương trình dạng 3.2 đối với mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ cho trước. Khi đó S có tâm duy nhất nếu và chỉ nếu* $\det A \neq 0$. *Trường hợp* $\det A = 0$ *thì S có vô số tâm hoặc không có tâm.*

Chứng minh.

Giả sử siêu mặt bậc hai S có phương trình dạng 3.2 và I là điểm có tọa độ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$. Phép đổi mục tiêu từ $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ sang $\{I; \overrightarrow{e_i}\}$ có công thức dạng

$$[x] = [x'] + [b].$$

Thay giá trị của $[x]$ vào phương trình 3.2 ta thu được phương trình của S đối với mục tiêu mới là

$$[x']^t A[x'] + 2(A[b] + [a])^t[x'] + f([b]) = 0.$$

Theo định nghĩa, điểm I là tâm của S khi và chỉ khi

$$A[b] + [a] = 0.$$

Nói cách khác I là tâm của S khi và chỉ khi tọa độ của I là một nghiệm của hệ phương trình

$$A[x] + [a] = 0. \tag{3.6}$$

Từ đó S có tâm duy nhất khi và chỉ khi phương trình 3.6 có nghiệm duy nhất, tức là $\det A \neq 0$. Nếu $\det A = 0$ thì 3.6 vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm nên S không có tâm hoặc có vô số tâm. □ Nếu $\operatorname{rank} A = r \leq n$ và phương trình 3.6 có nghiệm thì tập nghiệm của 3.6 xác định một $(n-r)$-phẳng trong A^n gọi là *phẳng tâm* của S.

Nhận xét.

1. Theo chứng minh Định lý 3.1.1, một phép biến đổi affine sẽ biến siêu mặt bậc hai S có tâm là I thành siêu mặt bậc hai có tâm $f(I)$.

2. Theo chứng minh Định lý 3.1.2, để tìm tâm của một siêu mặt bậc hai ta chỉ việc giải hệ phương trình 3.6

3. Để tìm điểm kỳ dị ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} A[x] + [a] = 0 \\ [x]^t A[x] + 2[a]^t[x] + a_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A[x] + [a] = 0 \\ ([x]^t A + [a]^t)[x] + [a]^t[x] + a_0 = 0 \end{cases},$$

hay hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} A[x] + [a] = 0 \\ [a]^t[x] + a_0 = 0 \end{cases}.$$

3.1.3 Phương tiệm cận và đường tiệm cận

Định nghĩa 3. 1. Cho siêu mặt bậc hai S có phương trình dạng 3.1 đối với mục tiêu cho trước $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$. Vector $\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{0}$ được gọi là *vector chỉ phương tiệm cận* nếu tọa độ $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ của $\overrightarrow{c}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ trong $\overrightarrow{\mathbb{A}^n}$ thoả mãn điều kiện

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_i c_j = 0,$$

hay dưới dạng ma trận

$$[c]^t A[c] = 0.$$

Khi đó không gian vector con một chiều $\langle \overrightarrow{c} \rangle$ sinh bởi $\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{0}$ được gọi là một *phương tiệm cận*.

2. Trường hợp S có tâm duy nhất và có vector chỉ phương tiệm cận $\overrightarrow{c}$ thì đường thẳng đi qua tâm và nhận $\overrightarrow{c}$ làm vector chỉ phương gọi là *đường tiệm cận* của siêu mặt bậc hai S. Khi đó tập hợp tất cả các đường tiệm cận của S sẽ lập thành một siêu nón gọi là *siêu nón tiệm cận* của S (xem bài tập **??**).

3. Cho hai vector khác không của $\mathbb{V}^n$, $\overrightarrow{c}$ có tọa độ $(c_1, ..., c_n)$, và $\overrightarrow{d}$ có tọa độ $(d_1, ..., d_n)$. Ta nói $\overrightarrow{c}$ *liên hợp* với $\overrightarrow{d}$, hay phương $\langle \overrightarrow{c} \rangle$ liên hợp với phương $\langle \overrightarrow{d} \rangle$, đối với S nếu

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_i d_j = 0,$$

hay viết dưới dạng ma trận

$$[c]^t A[d] = 0.$$

4. Phương $\langle \overrightarrow{c} \rangle$ gọi là *phương đặc biệt* của S nếu $\overrightarrow{c}$ liên hợp với mọi vector khác không đối với S.

Nhận xét.

1. Từ định nghĩa và chứng minh Định lý 3.1.1 ta suy ra được phép biến đổi affine f biến đường tiệm cận của S thành đường tiệm cận của $f(S)$. Hiển nhiên $\overrightarrow{f}$ biến vector chỉ phương tiệm cận (phương tiệm cận) thành vector chỉ phương tiệm cận (phương tiệm cận) của $f(S)$. Hai phương liên hợp đối với S biến thành hai phương liên hợp đối với $f(S)$.

2. Nếu $\overrightarrow{c}$ liên hợp với $\overrightarrow{d}$ thì $\overrightarrow{d}$ liên hợp với $\overrightarrow{c}$ (đối với S).

3. Vector $\overrightarrow{c}$ là một vector chỉ phương tiệm cận của S khi và chỉ khi $\overrightarrow{c}$ liên hợp với chính nó (đối với S).

4. Mọi phương đặc biệt đều là phương tiệm cận.

Ví dụ 2. Trong không gian affine hai chiều thông thường, ta có

- Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ không có phương tiệm cận.

- Hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có hai có hai vector chỉ phương tiệm cận là $\overrightarrow{c_1}(a, b)$ và $\overrightarrow{c_2}(a, -b)$. Các đường tiệm cận tương ứng là

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{và} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

- Parabola $y^2 = 2px$ có một vector chỉ phương tiệm cận là $\overrightarrow{c}(0, 1)$, nhưng không có đường tiệm cận nào vì không có tâm.

3.1.4 Siêu phẳng kính liên hợp của siêu mặt bậc hai.

Giao của đường thẳng và siêu mặt bậc hai. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm B có tọa độ $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ với vector chỉ phương $\overrightarrow{c}$ có tọa độ $(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Khi đó phương trình tham số của d là

$$x_i = c_i t + b_i \quad i = 1, 2, \dots, n; \tag{3.7}$$

hay dưới dạng ma trận

$$[x] = [c]t + [b]. \tag{3.8}$$

Tọa độ giao điểm của d với siêu mặt bậc hai S là nghiệm của hệ phương trình gồm các phương trình 3.2 và 3.8. Thay giá trị của $[x]$ trong 3.8 vào 3.2 ta có phương trình

$$([c]^t t + [b]^t)A([c]t + [b]) + 2[a]^t([c]t + [b]) + a_0 = 0.$$

Khai triển phương trình này ta thu được

$$[c]^t A[c]t^2 + 2Pt + Q = 0, \tag{3.9}$$

trong đó

$$P = [b]^t A[c] + [a]^t[c] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_i c_j + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i,$$

$$Q = f(b) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_i b_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_0.$$

Ta có các trường hợp sau:

1. Vector $\overrightarrow{c}$ không phải là một vector chỉ phương tiệm cận, tức là $[c]^t A[c] \neq 0$. Ta có 3.9 là một phương trình bậc hai thực sự nên có thể có hai nghiệm thực phân biệt, hai nghiệm ảo liên hợp hoặc nghiệm kép. Tương ứng, đường thẳng cắt siêu mặt bậc hai tại hai điểm, không cắt siêu mặt bậc hai (trường hợp này có thể xem d cắt S tại hai điểm ảo) hoặc tại một điểm kép M_0 (trong trường hợp này ta nói đường thẳng tiếp xúc với siêu mặt bậc hai tại M_0).

2. Vector $\overrightarrow{c}$ là một vector chỉ phương tiệm cận, tức là $[c]^t A[c] = 0$. Phương trình 3.9 trở thành

   $$2Pt + Q = 0, \tag{3.10}$$

   – Nếu $P \neq 0$, thì phương trình 3.9 có một nghiệm duy nhất. Đường thẳng cắt siêu mặt bậc hai tại một điểm.

   – Nếu $P = 0$ và $Q \neq 0$, thì phương trình 3.9 vô nghiệm. Đường thẳng không cắt siêu mặt bậc hai.

– Nếu $P = Q = 0$, thì mọi giá trị của t đều là nghiệm của 3.9. Suy ra toàn bộ đường thẳng nằm trên siêu mặt bậc hai. Ta gọi đường thẳng này là đường sinh thẳng của siêu mặt bậc hai.

Siêu phẳng kính. Trong không gian affine $\mathbb{A}^n$, cho siêu mặt bậc hai S có phương trình 3.2 đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ cho trước. Xét tập hợp các đường thẳng có cùng vector chỉ phương $\overrightarrow{c}$ có tọa độ $(c_1, ..., c_n)$ không phải là một vector chỉ phương tiệm cận của S.

Gọi d là một đường thẳng trong tập hợp các đường thẳng này. Giả sử d cắt S tại hai điểm thực phân biệt hoặc trùng nhau (điểm kép) M_1 và M_2. Gọi B là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2 có tọa độ $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Khi đó d có phương trình 3.8 và hai điểm M_1 và M_2 tương ứng với hai giá trị t_1, t_2 là hai nghiệm thực phân biệt hoặc trùng nhau (nghiệm kép) của phương trình 3.9. Tọa độ của chúng có thể viết dưới dạng ma trận $[b] + [c]t_1$ và $[b] + [c]t_2$. Đoạn thẳng M_1M_2 gọi là một dây cung của S.

Do B là trung điểm của dây cung M_1M_2 (tức là $\overrightarrow{BM_1} = -\overrightarrow{BM_2}$) nên ta có

$$[c](t_1 + t_2) = 0.$$

Từ đó suy ra $t_1 = -t_2$.

Xét phương trình 3.9, điều kiện để tổng hai nghiệm bằng 0 là

$$P = [b]^t A[c] + [a]^t[c] = 0.$$

Như vậy nếu điểm B là trung điểm của dây cung M_1M_2 có phải có tọa độ thỏa mãn phương trình

$$[x]^t A[c] + [a]^t[c] = 0,$$

hay

$$[c]^t A[x] + [c]^t[a] = 0. \tag{3.11}$$

Do $\overrightarrow{c}$ không phải là vector chỉ phương tiệm cận ta suy ra $[c]^t A \neq 0$. Phương trình 3.11 xác định một siêu phẳng. Trường hợp S có tâm thì rõ ràng tâm của S cũng nằm trên siêu phẳng này. Siêu phẳng có phương trình 3.11 gọi là *siêu phẳng kính* của S liên hợp với phương $\langle\overrightarrow{c}\rangle$ của các dây cung nói trên. Tóm lại ta có

Định lý 3.1.3. *Tập hợp trung điểm của các dây cung có cùng phương không phải là phương tiệm cận của một siêu mặt bậc hai S nằm trên một siêu phẳng.*

Ví dụ 3. Trong không gian affine hai chiều thông thường siêu phẳng kính liên hợp còn gọi là *đường kính liên hợp.* Ta có

1. Đường kính liên hợp với phương $\langle \overrightarrow{c} \rangle$, với $\overrightarrow{c}$ có tọa độ (c_1, c_2), của ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ là đường thẳng có phương trình
$$\frac{c_1 x}{a^2} + \frac{c_2 y}{b^2} = 0.$$

2. Đường kính liên hợp với phương $\langle \overrightarrow{c} \rangle$, với $\overrightarrow{c}$ có tọa độ (c_1, c_2), của hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ là đường thẳng có phương trình
$$\frac{c_1 x}{a^2} - \frac{c_2 y}{b^2} = 0.$$

3. Đường kính liên hợp với phương $\langle \overrightarrow{c} \rangle$, với $\overrightarrow{c}$ có tọa độ (c_1, c_2), của parabola $y^2 = 2px$ là đường thẳng có phương trình
$$c_2 y = pc_1.$$

3.1.5 Tiếp tuyến và siêu tiếp diện của siêu mặt bậc hai.

Định nghĩa 4. Trong $\mathbb{A}^n$ cho siêu mặt bậc hai S. Đường thẳng d gọi là *tiếp tuyến* của S nếu:

– hoặc phương của d không là phương tiệm cận và d giao với S tại đúng một điểm (điểm kép), ta nói d tiếp xúc với S tại điểm ấy;

– hoặc phương của d là phương tiệm cận và toàn bộ đường thẳng d nằm trong S, trong trường hợp này ta nói d tiếp xúc với S tại mọi điểm của d.

Cho S là siêu mặt bậc hai có phương trình 3.1, điểm $B \in S$ có tọa độ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, vector $\overrightarrow{c}$ có tọa độ $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ và đường thẳng d đi qua điểm B với vector chỉ phương là $\overrightarrow{c}$. Chúng ta sẽ tìm điều kiện cần và đủ để d là một tiếp tuyến của S. Nhắc lại rằng, phương trình xác định giao điểm giữa d và S có dạng:
$$[c]^t A[c]t^2 + 2Pt + Q = 0,$$
trong đó
$$P = [b]^t A[c] + [a]^t [c] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_i c_j + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i,$$
$$Q = f(b) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_i b_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_0.$$
Do $B \in S$, nên ta có $Q = 0$. Phương trình trở thành
$$[c]^t A[c]t^2 + 2Pt = 0,$$

hay

$$([c]^t A[c]t + 2P)t = 0. \tag{3.12}$$

1. Nếu $[c]^t A[c] \neq 0$, tức là $\overrightarrow{c}$ không phải là một vector chỉ phương tiệm cận, thì đường thẳng d là tiếp tuyến khi và chỉ khi 3.12 có nghiệm kép, tức là $P = [b]^t A[c] + [a]^t [c] = 0$.

2. Nếu $[c]^t A[c] = 0$, tức là $\overrightarrow{c}$ là một vector chỉ phương tiệm cận, thì đường thẳng d là tiếp tuyến khi và chỉ khi $d \subset S$. Điều này cũng tương đương với $P = [b]^t A[c] + [a]^t [c] = 0$.

Tóm lại, trong cả hai trường hợp đường thẳng d là tiếp tuyến khi và chỉ khi

$$[b]^t A[c] + [a]^t [c] = 0. \tag{3.13}$$

Trường hợp B là điểm kì dị của S thì mọi đường thẳng đi qua B đều là tiếp tuyến của S tại B. Thật vậy, nếu B là điểm kỳ dị thì B là một tâm nên thỏa mãn phương trình $A[b] + [a] = 0$. Do đó thỏa mãn phương trình 3.13.

Trường hợp B không phải là điểm kì dị của S. Khi đó các tiếp tuyến của S tại M_0 lập thành một siêu phẳng qua B. Siêu phẳng này gọi là *siêu tiếp diện* hay *siêu phẳng tiếp xúc* của S tại điểm B.

Thật vậy, điểm M có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nằm trên một tiếp tuyến đi qua B khi và chỉ khi $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{c}$ thỏa mãn phương trình 3.13 tức là

$$[b]^t A([x] - [b]) + [a]^t ([x] - [b]) = 0.$$

hay

$$([b]^t A + [a]^t)([x] - [b]) = 0. \tag{3.14}$$

Do B không phải là điểm kỳ dị nên $[b]^t A + [a]^t = (A[b] + [a])^t \neq 0$. Phương trình 3.14 là phương trình của một siêu phẳng.

Ví dụ 4. Trong không gian affine hai chiều thông thường ta có

1. Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ của ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là đường thẳng có phương trình
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

2. Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ của hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là đường thẳng có phương trình
$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

3. Tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ của parabola $y^2 = 2px$ là đường thẳng có phương trình
$$y_0 y = p(x + x_0).$$

3.2 Phân loại affine các siêu mặt bậc hai.

3.2.1 Phương trình chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai.

Phương trình của siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{A}^n$ có dạng đơn giản hay phức tạp tùy thuộc vào việc chọn hệ tọa độ affine. Nói chung phương trình của siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{A}^n$ có thể có đến $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ hạng tử, nhưng nếu mục tiêu được chọn thích hợp thì có thể chỉ còn không quá $(n+1)$ hạng tử .

Định lý dưới đây khẳng định điều đó và chứng minh của định lý cho phép ta chọn được mục tiêu affine thích hợp để phương trình của siêu mặt bậc hai có dạng đơn giản nhất.

Định lý 3.2.1. *Luôn luôn tồn tại một mục tiêu affine thích hợp sao cho mọi siêu mặt bậc hai của $\mathbb{A}^n$ có phương trình là một trong các dạng sau:*

1. $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2 - 1 = 0$ *(dạng I);*
2. $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0$ *(dạng II);*
3. $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2 - 2x_{r+1} = 0$ *(dạng III).*

Các phương trình có dạng I, II và III như trên gọi là phương trình dạng chuẩn tắc *của siêu mặt bậc hai.*

Chứng minh. Giả sử siêu mặt bậc hai S có phương trình dạng 3.1. Xét dạng toàn phương tương ứng

$$H(\overrightarrow{x}) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Theo các kết quả từ Đại số tuyến tính ta có thể tìm được một phép đổi cơ sở trong $\overrightarrow{\mathbb{A}^n}$ (ứng với phép đổi mục tiêu giữ nguyên gốc trong $\mathbb{A}^n$) sao cho biểu thức tọa độ của H được đưa về dạng chuẩn tắc.

$$H(\overrightarrow{x}') \;=\; \sum_{i=1}^{k} x_i'^2 - \sum_{i=k+1}^{r} x_i'^2;\; 0 \le k \le n;\; 1 \le r \le n.$$

Khi đó phương trình của S đối với mục tiêu mới có dạng

$$\sum_{i=1}^{k} x_i'^2 - \sum_{i=k+1}^{r} x_i'^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i'x_i' + a_0' = 0.$$

Sử dụng phép đổi mục tiêu

$$\begin{cases} x'_i = \bar{x}_i - a'_i & i = 1, 2, \ldots, k \\ x'_i = \bar{x}_i + a'_i & i = k+1, k+2, \ldots, r \\ x'_i = \bar{x}_i & i = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

phương trình trên trở thành

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} \bar{x}_i^2 + 2 \sum_{i=r+1}^{n} a'_i \bar{x}_i + b = 0. \tag{3.15}$$

Ta có các trường hợp sau:

1. Trường hợp $a'_{r+1} = \ldots = a'_n = 0$ hoặc $r = n$ và $b \neq 0$. Xét phép đổi mục tiêu

$$\begin{cases} X_i = \sqrt{\frac{1}{-b}}\bar{x}_i & b < 0 \\ X_i = \sqrt{\frac{1}{b}}\bar{x}_i & b > 0 \end{cases}$$

   ta đưa được phương trình 3.15 về dạng I.

2. Trường hợp $a'_{r+1} = \ldots = a'_n = 0$ và $b = 0$. Phương trình 3.15 đã có dạng II.

3. Trường hợp tồn tại $a'_j \neq 0 \quad (j > r)$. Ta có thể giả sử $a'_{r+1} \neq 0$. Sử dụng phép đổi mục tiêu

$$\begin{cases} X_i & = \bar{x}_i \qquad\qquad \text{nếu} \quad i \neq r+1 \\ X_{r+1} & = -\sum\limits_{j=r+1}^{n} a'_j \bar{x}_j - \frac{b}{2} \end{cases}$$

   ta đưa phương trình 3.15 về dạng III.

Ví dụ 5. Trong $\mathbb{A}^3$ cho siêu mặt bậc hai S có phương trình đối với mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ cho trước là

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1 + 6x_2 + 2 \ = \ 0.$$

Tìm phương trình dạng chuẩn tắc của S và mục tiêu affine tương ứng.

Giải. Trước hết xét dạng toàn phương tương ứng trong $\overrightarrow{\mathbb{A}^3}$

$$H(\overrightarrow{x}) \ = \ x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Ta có

$$H(\overrightarrow{x}) \ = \ (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2.$$

Đặt

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ X_2 = x_2 - x_3 \\ X_3 = x_3 \end{cases}, \tag{3.16}$$

có nghĩa là ta đang sử dụng phép đổi cơ sở xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - X_2 - 2X_3 \\ x_2 = X_2 + X_3 \\ x_3 = X_3 \end{cases}, \tag{3.17}$$

ta đưa được biểu thức tọa độ của H về dạng chuẩn tắc

$$H(\overrightarrow{X}) = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2.$$

Cơ sở tương ứng là $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$; trong đó $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{w_2} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{w_3} = -2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Xem 3.17 là phép đổi mục tiêu affine trong $\mathbb{A}^n$, phương trình của S đối với mục tiêu mới $\{O; \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$ là

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + 2X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 2 = 0.$$

Dùng phép đổi mục tiêu

$$\begin{cases} X_1 &= \sqrt{2}y_1 - 1 \\ X_2 &= \sqrt{2}y_2 - 2 \\ X_3 &= \sqrt{2}y_3 + 1 \end{cases}, \tag{3.18}$$

ta thu được phương trình dạng chuẩn tắc

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - 1 = 0, \tag{3.19}$$

với mục tiêu affine tương ứng $\{I; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$, trong đó điểm I có tọa độ $(-1, -1, 1)$ đối với mục tiêu đã cho $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ và

$$\overrightarrow{u_1} = \sqrt{2}\overrightarrow{e_1}; \quad \overrightarrow{u_2} = \sqrt{2}(-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}); \quad \overrightarrow{u_3} = \sqrt{2}(-2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}).$$

Phương trình 3.19 là phương trình dạng chuẩn tắc của S.

Nhận xét.

1. Nếu siêu mặt bậc hai S có phương trình chuẩn tắc dạng I thì S có tâm và tâm không thuộc S. Nếu S có phương trình chuẩn tắc dạng II thì S có tâm và tâm thuộc S. Nếu S có phương trình chuẩn tắc dạng III thì S không có tâm.

2. Do r là hạng, k và $(r-k)$ là chỉ số dương và chỉ số âm của dạng toàn phương trong phương trình nên chúng đều những bất biến qua phép đổi tọa độ. Suy ra hai phương trình cùng một dạng nhưng khác nhau ở r hoặc k hoặc $r-k$ thì không thể là phương trình chuẩn tắc của cùng một siêu mặt bậc hai được.

3.2.2 Phân loại affine các siêu mặt bậc hai.

Chúng ta quan tâm đến các bất biến affine của các siêu mặt bậc hai, các tính chất không thay đổi qua các phép biến đổi affine, mà chúng ta gọi là các *tính chất affine*. Hiển nhiên S và $f(S)$, với f là một phép biến đổi affine, sẽ có cùng các tính chất affine. Do đó, một cách tự nhiên là chúng ta không phân biệt hai siêu mặt bậc hai sai khác một phép biến đổi affine. Hai siêu mặt bậc hai như vậy gọi là *tương đương affine*. Quan hệ này thực sự là một quan hệ tương đương nên phân loại tập các siêu mặt bậc hai thành các lớp tương đương. Ta gọi sự phân loại này là *phân loại affine*. Có bao nhiêu loại siêu mặt bậc hai trên một không gian cụ thể theo sự phân loại này? Làm thế nào nào để mô tả chúng? Định lý 3.2.2 dưới đây sẽ cho ta câu trả lời.

Định nghĩa 5. Hai siêu mặt bậc hai trong A^n gọi là *cùng loại* nếu phương trình chuẩn tắc của chúng cùng một dạng và cùng các giá trị r, k. Nói cách khác hai siêu mặt bậc hai cùng loại nếu phương trình chuẩn tắc của chúng (đối với hai mục tiêu affine thích hợp nào đó) là hoàn toàn giống nhau.

Định lý sau cho thấy sự phân loại các siêu mặt bậc hai theo phương trình của chúng trong định nghĩa trên thực chất chính là sự phân loại affine các siêu mặt bậc hai.

Định lý 3.2.2. *Hai siêu mặt bậc hai tương đương affine, tức là có phép biến đổi affine biến siêu mặt này thành siêu mặt kia, khi và chỉ khi chúng cùng loại. Nói cách khác sự phân loại nêu trong Định nghĩa 5 là sự phân loại affine.*

Chứng minh. Giả sử phương trình của S đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ và phương trình của S' đối với mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{e_i}'\}$ là những phương trình chuẩn tắc hoàn toàn giống nhau. Xét phép biến đổi affine f biến mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ thành mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{e_i}'\}$ ta suy ra $f(S) = S'$.

Ngược lại, giả sử f là phép biến đổi affine và $f(S) = S'$. Gọi $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ là mục tiêu affine sao cho phương trình của S có dạng chuẩn tắc và $\{O'; \overrightarrow{e_i}'\}$ là ảnh của mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ qua phép biến đổi f. Khi đó phương trình chuẩn tắc của S' đối với mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{e_i}'\}$ là hoàn toàn giống phương trình chuẩn tắc của S đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$. Suy ra S và S' cùng loại.

Định lý đã được chứng minh xong.

Sau đây là bảng phân loại các siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{A}^2$ và trong $\mathbb{A}^3$. Chúng sẽ giúp chúng ta nhìn lại các đường bậc hai và các mặt bậc hai đã biết trong hình học giải tích đã học trước đây dưới cái nhìn tổng quát hơn.

Phân loại affine các đường bậc hai trong $\mathbb{A}^2$. Trong $\mathbb{A}^2$, một đường bậc hai có phương trình dạng tổng quát

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a \ = \ 0.$$

Theo các Định lý 3.2.1 và 3.2.2 ta có thể sắp xếp các đường bậc hai thành 9 loại sau đây dựa trên phương trình chuẩn tắc của chúng với tên gọi như sau:

1.	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	đường ellipse;
2.	$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	đường hyperbola;
3.	$-x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	đường ellipse ảo;
4.	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	cặp đường thẳng ảo cắt nhau (tại một điểm thực);
5.	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	cặp đường thẳng cắt nhau;
6.	$x_1^2 - 2x_2 = 0$	đường parabola;
7.	$x_1^2 - 1 = 0$	cặp đường thẳng song song;
8.	$-x_1^2 - 1 = 0$	cặp đường thẳng ảo song song ;
9.	$x_1^2 = 0$	cặp đường thẳng trùng nhau.

Phân loại affine các mặt bậc hai trong $\mathbb{A}^3$.

Trong $\mathbb{A}^3$, một mặt bậc hai có phương trình dạng tổng quát

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 +$$

$$+ 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a \ = \ 0.$$

Theo các Định lý 3.2.1 và 3.2.2 và dựa vào phương trình dạng chuẩn tắc, chúng ta có được 17 loại mặt bậc hai khác nhau với tên gọi của chúng như sau:

1.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 =$	mặt elipsoid;
2.	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	mặt hyperboloid một tầng ;
3.	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	mặt hyperoloid hai tầng;
4.	$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	mặt ellipsoid ảo;
5.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	mặt nón ảo;
6.	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	mặt nón;
7.	$x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$	mặt paraboloid elliptic;
8.	$x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$	mặt paraboloid hyperbolic (mặt yên ngựa);
9.	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	mặt trụ ellipse;
10.	$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	mặt trụ hyperbola;
11.	$-x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	mặt trụ ellipse ảo;
12.	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	cặp mặt phẳng ảo cắt nhau;
13.	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	cặp mặt phẳng cắt nhau;
14.	$x_1^2 - 1 = 0$	cặp mặt phẳng song song;
15.	$-x_1^2 - 1 = 0$	cặp mặt phẳng ảo song song;
16.	$x_1^2 = 0$	cặp mặt phẳng trùng nhau;
17.	$x_1^2 - 2x_2 = 0$	mặt trụ parabola.

Chương 4

KHÔNG GIAN EUCLID

4.1 Không gian Euclid

Cần nhắc lại rằng, các không gian (vector, affine) trong bài giảng này là các **không gian thực**.

Trong không gian affine, do không gian nền chỉ đơn thuần là không gian tuyến tính nên các vấn đề liên quan đến metric không được đề cập đến. Nếu không gian nền là không gian vector Euclid, tức là không vector với một tích vô hướng, thì chúng ta sẽ nhận thấy rằng có thể xây dựng các khái niệm liên quan đến tích vô hướng như: độ dài, khoảng cách, góc, tính vuông góc.... Điều này sẽ làm cho hình học trở nên phong phú hơn, đa dạng hơn và thú vị hơn. Việc đưa các khái niệm liên quan đến metric làm cho không gian trở nên gần gủi và quen thuộc hơn đối với chúng ta. Hình học giải tích ở PTTH trở thành một trường hợp riêng. Các vấn đề được giới thiệu ở PTTH, nay sẽ được trình bày lại một cách chặt chẽ và tổng quát hơn. Chúng tôi cố gắng bám sát những kết quả quen biết ở phổ thông để giúp các bạn ôn lại, nhìn lại chúng ở một góc nhìn tổng quát hơn. Để giúp bạn đọc có thể tiếp thu phần này một cách thuận lợi, chúng tôi viết thêm phần phụ lục nhằm nhắc lại các kiến thức và kết quả cần thiết trong ĐSTT. Hy vọng điều này sẽ giúp ích được ít nhiều cho các bạn. Chúng ta hãy bắt đầu cuộc hành trình vào thế giới của không gian Euclid. Đầu tiên chắc chắn sẽ là những khái niệm cần thiết.

4.1.1 Không gian Euclid. Mục tiêu trực chuẩn

Định nghĩa 1. Một không gian affine thực được gọi là *không gian Euclid* nếu không gian vector liên kết là một không gian vector Euclid.

Như vậy thuật ngữ không gian Euclid để chỉ một không gian affine với nền là không gian vector với một tích vô hướng. Do đó các khái niệm cũng như các kết quả được trình bày trong hình học affine sẽ được áp dụng vào hình học Euclid mà sẽ không có một lời giải thích nào thêm. Chúng ta sẽ dùng ký hiệu $\mathbb{E}$ để chỉ không gian Euclid và $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ để chỉ không gian nền của nó. Đôi lúc để nhấn mạnh số chiều ta dùng ký hiệu $\mathbb{E}^n$ và $\overrightarrow{\mathbb{E}^n}$.

Ví dụ.

1. Không gian 2 chiều trong hình học giải tích phẳng ở PTTH là không gian Euclid 2 chiều, được ký hiệu $\mathbb{E}^2$. Không gian nền của nó chính là không gian các vector tự do trong mặt phẳng, ký hiệu $\overrightarrow{\mathbb{E}^2}$, với tích vô hướng chính tắc.
2. Không gian 3 chiều thông thường trong hình học giải tích ở PTTH là không gian Euclid 3 chiều, được ký hiệu $\mathbb{E}^3$. Không gian nền của nó chính là không gian các vector tự do, ký hiệu $\overrightarrow{\mathbb{E}^3}$, với tích vô hướng chính tắc.
3. Không gian vector Euclid $\overrightarrow{\mathbb{E}^n}$ là không gian Euclid n-chiều liên kết với chính nó với cấu trúc affine chính tắc.

Định nghĩa 2. Cho $\mathbb{E}^n$ là một không gian Euclid n-chiều. Một mục tiêu affine của $\mathbb{E}^n$ gọi là *mục tiêu trực chuẩn* nếu cơ sở tương ứng là cơ sở trực chuẩn của $\overrightarrow{\mathbb{E}^n}$. Tọa độ của điểm $M \in \mathbb{E}^n$ đối với một mục tiêu trực chuẩn được gọi là *tọa độ trực chuẩn*.

Ví dụ. Xét không gian $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc và cấu trúc affine chính tắc. Mục tiêu affine $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ với điểm $O = (0, 0, ..., 0)$ và $\{\overrightarrow{e_i}\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$, là một mục tiêu trực chuẩn.

Nhận xét.

1. Trong $\mathbb{E}^n$, xét công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu trực chuẩn$\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ sang mục tiêu trực chuẩn $\{O'; \overrightarrow{e_i}'\}$
$$[x] = A[x'] + [a]. \tag{4.1}$$
Do A là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{e_i}\}$ sang cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{e_i}'\}$ nên A là một ma trận trực giao.
2. Ngược lại, mỗi công thức dạng 4.1 với A là ma trận trực giao, là công thức chuyển mục tiêu từ một mục tiêu trực chuẩn đã cho sang một mục tiêu trực chuẩn hoàn toàn xác định.

4.1.2 Trực giao trong không gian Euclid

Nếu trong hình học affine, giữa hai cái phẳng chỉ có thể nói đến các vị trí tương đối: cắt nhau, song song và chéo nhau; thì nay trong hình học Euclid, một vị trí tương đối quan trọng là vị trí trực giao (vuông góc) được xét đến. Cần chú ý rằng khái niệm trực giao ở đây có chỗ khác biệt so với khái niệm vuông góc trong hình học ở PTTH. Chúng ta sẽ phân tích sự khác biệt này ở các ví dụ.

Định nghĩa 3. Hai phẳng α và β trong không gian Euclid $\mathbb{E}$ gọi là *trực giao* (hay *vuông góc*) với nhau, kí hiệu $\alpha \perp \beta$, nếu phương của chúng là các không gian vector con trực giao trong $\overrightarrow{\mathbb{E}}$. Nếu các phương $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ bù trực giao trong $\overrightarrow{\mathbb{E}}$, ta nói α và β là bù trực giao hay α bù trực giao với β hay β bù trực giao với α.

Ví dụ. Các ví dụ sau được xét trong không gian Euclid 3-chiều thông thường.

1. Do vector $\overrightarrow{0}$ là vuông góc với mọi vector nên một điểm, tức là 0-phẳng, trực giao với mọi phẳng trong $\mathbb{E}$.
2. Hai đường thẳng vuông góc, theo nghĩa thông thường ở PTTH, là hai đường thẳng trực giao với nhau.
3. Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng, theo nghĩa thông thường ở PTTH, là hai phẳng bù trực giao.
4. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, theo nghĩa thông thường ở PTTH, **không phải** là hai phẳng trực giao.

Theo định nghĩa, hai phẳng α và β trực giao khi và chỉ khi $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta}$, nên $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \{\overrightarrow{0}\}$. Từ đây suy ra $\dim(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) = \dim \overrightarrow{\alpha} + \dim \overrightarrow{\beta} = \dim \alpha + \dim \beta$. Do đó,

1. nếu $\dim \alpha + \dim \beta > n$, thì α và β không trực giao (điều này cho thấy hai mặt phẳng trong không gian Euclid 3 chiều không thể trực giao nhau);
2. nếu α và β bù trực giao nhau thì $\dim \alpha + \dim \beta = n$, hay nói cách khác $\alpha + \beta = \mathbb{E}^n$.

Người ta gọi hai phẳng là *đối trực giao* nếu các phẳng bù trực giao với chúng là trực giao với nhau.

Cũng với lập luận tương tự như trên, định lý sau cho ta thấy rõ về giao của các phẳng trực giao.

Định lý 4.1.1. *Trong không gian Euclid* $\mathbb{E}$, *1. hai phẳng trực giao có không quá một điểm chung;*

2. hai phẳng bù trực giao có một điểm chung duy nhất.

Chứng minh.

1. Giả sử hai phẳng α và β trực giao trong $\mathbb{E}$. Do $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \{\overrightarrow{0}\}$, nên nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì giao của chúng chỉ có thể là một điểm.

2. Để chứng minh phần còn lại của định lý, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng giao của hai phẳng bù trực giao α và β luôn luôn khác rỗng. Giả sử $\alpha \cap \beta = \emptyset$, theo định lý về số chiều của phẳng tổng, ta có
$$\dim(\alpha + \beta) = \dim \alpha + \dim \beta + 1 = n + 1 > n.$$
Điều mâu thuẩn này chứng tỏ $\alpha \cap \beta \neq$ và do đó theo phần 1 thì α và β có giao là một điểm. □

Trong hình học không gian ở PTTH, chúng ta đã rất quen thuộc với các định lý như: *"Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song hoặc trùng nhau. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song hoặc trùng nhau*" hoặc *"Qua một điểm có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng đã cho. Qua một điểm có một và chỉ một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng đã cho*". Định lý và hệ quả sau đây mở rộng các điều đó.

Định lý 4.1.2. *Trong $\mathbb{E}^n$ cho hai phẳng bù trực giao α và β. Nếu phẳng γ trực giao với β thì γ song song với α.*

Chứng minh.

Theo định nghĩa α và β bù trực giao khi và chỉ khi $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$ bù trực giao. Khi đó, $\overrightarrow{\alpha}$ là tập tất cả các vector vuông góc với $\overrightarrow{\beta}$ và do đó $\overrightarrow{\gamma} \subset \overrightarrow{\beta}$.

Hệ quả 4.1.3. *Qua một điểm A cho trước của $\mathbb{E}^n$ có một và chỉ một $(n-m)$-phẳng bù vuông góc với một m-phẳng α đã cho.*

Chứng minh. Gọi $\overrightarrow{\beta}$ là phần bù trực giao của $\overrightarrow{\alpha}$ và gọi β là phẳng đi qua A với phương là $\overrightarrow{\beta}$. Khi đó β là $(n-m)$-phẳng bù vuông góc với α. Nếu $(n-m)$-phẳng β' cũng bù trực giao với phẳng α thì β và β' song song (theo Định lý 4.1.2), có cùng số chiều và có điểm chung nên chúng trùng nhau.

4.2 Khoảng cách và thể tích

4.2.1 Khoảng cách trong không gian Euclid

Nhờ vào tích vô hướng, chúng ta có thể định nghĩa khoảng cách giữa hai điểm, khoảng cách giữa hai phẳng và một cách tổng quát là khoảng cách giữa hai hình.

Định nghĩa 4.

1. Khoảng cách giữa hai điểm M, N trong $\mathbb{E}$, ký hiệu $d(M,N)$, là độ dài của vector $\overrightarrow{MN}$.
$$d(M,N) := \|\overrightarrow{MN}\|.$$
2. Khoảng cách giữa hai phẳng α và β trong $\mathbb{E}$, ký hiệu $d(\alpha,\beta)$ là số $\inf\limits_{N\in\beta, M\in\alpha} d(M,N)$. Như vậy,
$$d(\alpha,\beta) := \inf_{N\in\beta, M\in\alpha} d(M,N).$$

Nhận xét.

1. Nếu α và β là các 0-phẳng thì hai định nghĩa trên là trùng nhau.
2. Chúng ta có thể định nghĩa khoảng cách giữa hai hình tùy ý tương tự như định nghĩa khoảng cách giữa hai phẳng.
3. Dễ thấy d là một metric trong $\mathbb{E}$, tức là $\forall M, N, P \in \mathbb{E}$
   (a) $d(M,N) \geq 0, \quad d(M,N) = 0 \Leftrightarrow M = N$;
   (b) $d(M,N) = d(N,M)$;
   (c) $d(M,N) + d(N,P) \geq d(M,P)$ (bất đẳng tức tam giác).

4.2.2 Đường vuông góc chung của hai phẳng

Định nghĩa 5. Trong $\mathbb{E}$ cho hai phẳng α, β và d là đường thẳng cắt cả α lẫn β. Nếu $d\perp\alpha$ và $d\perp\beta$ thì d được gọi là *đường vuông góc chung* của α và β.

Định lý 4.2.1. *Nếu đường vuông góc chung d của α và β cắt α tại A, cắt β tại B thì*
$$d(\alpha,\beta) = d(A,B).$$
Khi đó, với $M \in \alpha$ và $N \in \beta$ thì $d(\alpha,\beta) = d(M,N) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN} \in \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}$.

Chứng minh.

Với mọi $M \in \alpha$ và $N \in \beta$ ta có
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}.$$
Suy ra
$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN}).$$
Do $\overrightarrow{MA} \in \overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{BN} \in \overrightarrow{\beta}$
$$\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN}) = 0,$$
cho nên
$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2.$$
Từ đây suy ra $d(A, B) \leq d(M, N)$. Vậy theo định nghĩa, ta có
$$d(A, B) = d(\alpha, \beta).$$

Theo giả thiết
$$\begin{aligned} d(\alpha, \beta) = d(M, N) &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN} = 0 \quad \text{(theo chứng minh trên)} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN} \in \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}. \end{aligned}$$

Định lý 4.2.2. *Nếu $\alpha \cap \beta = \emptyset$ thì luôn luôn tồn tại đường vuông góc chung của α và β. Hơn nữa, đường vuông góc chung này là duy nhất khi và chỉ khi*
$$\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \{\overrightarrow{0}\}.$$

Chứng minh. Từ giả thiết $\alpha \cap \beta = \emptyset$, ta suy ra $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{\mathbb{E}}$. Thật vậy, nếu $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\mathbb{E}}$ thì khi đó ta có $\forall A \in \alpha, \forall B \in \beta$, ta luôn có $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ nên $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Do đó tồn tại duy nhất không gian vector con $\overrightarrow{\gamma}$ bù trực giao với $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$.
Lấy $P \in \alpha$ và $Q \in \beta$, thì ta có phân tích duy nhất $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ với $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ còn $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\gamma}$. Lại do $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ nên $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ với $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{b} \in \overrightarrow{\beta}$. Khi đó tồn tại duy nhất điểm $A \in \alpha$ và điểm $B \in \beta$ sao cho:
$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{a}, \qquad \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{b}.$$

Ta có
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{u} + \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\gamma}$. Do $\alpha \cap \beta = \emptyset$ nên $A \neq B$. Đường thẳng AB chính là đường vuông góc chung của α và β.

Phần còn lại của định lý được suy ra trực tiếp từ Định lý 4.2.1.

Từ chứng minh của hai định lý trên, ta dễ dàng suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 4.2.3. 1. *Với điểm $A \notin \alpha$ có duy nhất $H \in \alpha$ sao cho $\langle\overrightarrow{AH}\rangle \perp \overrightarrow{\alpha}$ và $d(A, H) = d(A, \alpha)$. Ta gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên phẳng β.*

2. *Nếu α, β là hai phẳng song song và $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$ thì mọi đường thẳng đi qua $A \in \alpha$ và trực giao với β là đường vuông góc chung của α và β. Như vậy ta có $d(\alpha, \beta) = d(A, \beta)$ với mọi $A \in \alpha$.*

4.2.3 Các công thức tính khoảng cách

Trong mục này, không gian Euclid luôn được giả thiết là đã có một mục tiêu trực chuẩn.

Khoảng cách giữa hai điểm. Giả sử điểm M có tọa độ $(x_1, ..., x_n)$ và điểm N có tọa độ $(y_1, ..., y_n)$ đối với mục tiêu trực chuẩn đã cho $\{O; \overrightarrow{e_i}\}$ của $\mathbb{E}^n$. Khi đó dễ thấy

$$d(M, N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Khoảng cách giữa hai phẳng tùy ý. Trong $\mathbb{E}^n$ xét hai phẳng α và β. Ta có các trường hợp sau:

1. $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Khi đó $d(\alpha, \beta) = 0$.

2. $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Khi đó α và β có đường vuông góc chung AB, với $A \in \alpha$ và $B \in \beta$. Gọi $\{\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}\}$ là một cơ sở bất kỳ của $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$, $M \in \alpha$ và $N \in \beta$; ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}.$$

Do

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AB},$$

nên

$$\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}, \overrightarrow{MN}) = \det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}, \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN}) + \det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}, \overrightarrow{AB})$$

Chú ý rằng

$$\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}, \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN}) = 0,$$

nên cuối cùng ta có

$$\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}, \overrightarrow{MN}) = \det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}, \overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 \det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}).$$

Do đó

$$d(\alpha, \beta)^2 \ = \ \frac{\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}, \overrightarrow{MN})}{\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m})}. \tag{4.2}$$

Nhận xét.

1. Trong trường hợp $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, do $\overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ nên

   $$\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}, \overrightarrow{MN}) = 0.$$

   Do đó công thức 4.2 cũng có thể dùng để tính khoảng cách trong trường hợp này.

2. Có thể mô tả các bước để tính khoảng cách giữa 2 phẳng α và β như sau:
   (a) Lấy các điểm $M \in \alpha$ và $N \in \beta$.
   (b) Chọn một cơ sở của $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$.
   (c) Tính $\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}, \overrightarrow{MN})$ và $\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m})$.
   (d) Tính $\dfrac{\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m}, \overrightarrow{MN})}{\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, ..., \overrightarrow{\omega_m})}$.

3. Để tính khoảng cách từ một điểm A đến một m-phẳng α, ta có thể xem A là một 0-phẳng và áp dụng công thức 4.2. Chúng ta cũng có thể tính theo cách khác như sau: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên α. Khoảng cách từ A đến H chính là khoảng cách cần tìm. Các bước thực hiện cụ thể như sau:
   (a) Viết phương trình của phẳng β đi qua A bù trực giao với α.
   (b) Tìm giao điểm H của α và β.
   (c) Tính khoảng cách AH.

4. Ta xét một trường hợp đặc biệt, khoảng cách từ một điểm đến một siêu phẳng. Đối với trường hợp này, ta có một công thức đơn giản hơn nhiều (so với công thức 4.2) và rất quen thuộc đối với bạn đọc. Trong $\mathbb{E}$ cho siêu phẳng α. Vector $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ của $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ gọi là *vector pháp* (hay *pháp vector*) của α nếu $\langle \overrightarrow{n} \rangle \perp \overrightarrow{\alpha}$. Khi $\|\overrightarrow{n}\| = 1$ ta gọi $\overrightarrow{n}$ là *pháp vector đơn vị*.

   Giả sử α có phương trình tổng quát

   $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a \ = \ 0. \tag{4.3}$$

Khi đó dễ thấy rằng vector $\overrightarrow{n}$ có tọa độ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ là một vector pháp của α. Nếu $\overrightarrow{n}$ là vector pháp đơn vị, tức là $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$ thì 4.3 gọi là *phương trình pháp dạng* của α.

Từ định nghĩa ta thấy nếu α có phương trình tổng quát dạng 4.3 thì phương trình pháp dạng của α sẽ là

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b = 0,$$

với $b_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ và $b = \dfrac{a}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$.

Giả sử α là siêu phẳng có phương trình 4.3 và điểm A có tọa độ $(X_1, ..., X_n)$. Gọi H là hình chiếu của A lên α, tức là $H \in \alpha$ và đường thẳng HA bù trực giao với α. Từ đây, suy ra $\overrightarrow{HA} = t\overrightarrow{n}$. Ta có

$$d(A, \alpha) = \|\overrightarrow{HA}\| = \|t\overrightarrow{n}\| = |t|\|\overrightarrow{n}\|.$$

Do $\overrightarrow{HA} = t\overrightarrow{n}$ ta suy ra H có tọa độ $(X_1 - ta_1, ..., X_n - ta_n)$. Do $H \in \alpha$ nên

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - ta_i) + a = 0.$$

Hay

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a = (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)t = \|\overrightarrow{n}\|^2 t = \pm\|\overrightarrow{n}\| d(A, \alpha).$$

Từ đây suy ra

$$d(A, \alpha) = \frac{|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

Trường hợp nếu 4.3 là phương trình pháp dạng của α thì ta có công thức đơn giản

$$d(A, \alpha) = |\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a|.$$

Các ví dụ.

1. Trong $\mathbb{E}^2$ cho đường thẳng $\triangle$

   $$ax + by + c = 0$$

   và $A(x_0, y_0) \in \mathbb{E}^2$. Khi đó

   $$d(A, \triangle) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

   là một công thức quen thuộc trong Hình học giải tích phẳng.

2. Trong $\mathbb{E}^3$ cho mặt phẳng α
$$ax + by + cz + d = 0$$
và $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{E}^3$. Khi đó
$$d(A, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
là một công thức quen thuộc trong Hình học giải tích trong không gian.

3. Trong $\mathbb{E}^4$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước xét điểm $A(1, 0, 0, 1)$ và siêu phẳng α có phương trình tổng quát
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 = 0.$$
Khoảng cách từ A đến α là
$$d(A, \alpha) = \frac{|1.1 + 1.0 + 1.0 + 1.1 - 4|}{\sqrt{1 + 1 + 1 + 1}} = 1.$$

4. Trong $\mathbb{E}^4$ với mục tiêu trực chuẩn cho hai mặt phẳng α và β có phương trình lần lượt là:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases};$$
$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}.$$
Ta xác định phương của $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$. Phương của $\overrightarrow{\alpha}$ là các vector có tọa độ thỏa mãn phương trình:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$
Từ đây tìm được một cơ sở của $\overrightarrow{\alpha}$ là $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}\}$ với $\overrightarrow{w_1}$ có tọa độ $(0, -1, 0, 1)$ và $\overrightarrow{w_2}$ có tọa độ $(-2, 1, 1, 0)$.

Phương của $\overrightarrow{\beta}$ là các vector có tọa độ thỏa mãn phương trình:
$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}.$$
Từ đây tìm được một cơ sở của $\overrightarrow{\beta}$ là $\{\overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\}$ với $\overrightarrow{w_3}$ có tọa độ $(-2, 0, 1, -1)$ và $\overrightarrow{w_4}$ có tọa độ $(0, 1, 0, 0)$. Một cơ sở của $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ là một hệ vector tối đại của hệ $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\}$. Ta có thể chọn $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_4}\}$.

Lấy hai điểm $M \in \alpha$ có tọa độ $(3, 1, 0, 0)$ và điểm $N \in \beta$ có tọa độ $(-1, 0, 3, 0)$. Ta có

$$d(\alpha,\beta)^2 = \frac{\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}, \overrightarrow{\omega_4}, \overrightarrow{MN})}{\det Gr(\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}, \overrightarrow{\omega_4})} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16}{5}.$$

Vậy

$$d(\alpha,\beta) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

4.2.4 Góc trong không gian Euclid

Nhắc lại rằng, góc giữa hai vector khác không $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là số $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, xác định bởi

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|.\|\overrightarrow{b}\|}.$$

Góc giữa hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 trong $\mathbb{E}$ lần lượt có các vector chỉ phương là $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là số $\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, xác định bởi

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}|}{\|\overrightarrow{a}\|.\|\overrightarrow{b}\|}.$$

Góc giữa hai siêu phẳng.

Góc giữa hai siêu phẳng α và β trong $\mathbb{E}^n$ được định nghĩa là góc giữa hai đường thẳng lần lượt trực giao với α và β. Nếu gọi $\overrightarrow{n}$ và $\overrightarrow{m}$ lần lượt là các pháp vector của α và β, thì góc giữa hai siêu phẳng α và β tính theo công thức:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{m}|}{\|\overrightarrow{n}\|.\|\overrightarrow{m}\|}.$$

Góc giữa đường thẳng và siêu phẳng.

Trong $\mathbb{E}$ cho đường thẳng d và siêu phẳng α. Khi đó góc θ $(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2})$ giữa đường thẳng d và siêu phẳng α được định nghĩa là góc phụ với góc giữa đường thẳng d và đường thẳng trực giao với α. Nếu gọi $\overrightarrow{\alpha}$ là vector chỉ phương của d và $\overrightarrow{n}$ là pháp vector của α thì θ được tính như sau

$$\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{a}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{a}\|.\|\overrightarrow{n}\|}.$$

4.2.5 Thể tích trong không gian Euclid

Thể tích của hình hộp. Cho m-hộp H xác định bởi điểm O và hệ m vector $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \ldots, \overrightarrow{w_m}\}$. Khi đó thể tích của m-hộp H, ký hiệu $V(H)$, được định nghĩa là số $\sqrt{\det Gr(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \ldots, \overrightarrow{w_m})}$. Như vậy,

$$V(H) := \sqrt{\det Gr(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \ldots, \overrightarrow{w_m})}.$$

Nếu H là 1-hộp, tức là một đoạn thẳng, thể tích của H chính là độ dài của H. Khi H là 2-hộp, thuật ngữ diện tích sẽ được thay thế cho thể tích.

Ta gọi $(m-1)$-hộp H' xác định bởi O và hệ $m-1$ vector $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \ldots, \overrightarrow{w_{m-1}}\}$ là đáy của hộp H. Gọi P là điểm sao cho $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{w_m}$. Khoảng cách từ P đến $(m-1)$-phẳng chứa H' gọi là chiều cao của hộp H, ký hiệu h. Ta có công thức sau mà chứng minh dành cho bạn đọc như là một bài tập.

$$V(H) = V(H')h.$$

Thể tích của đơn hình. Cho m-đơn hình S xác định bởi hệ $m+1$ điểm $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m\}$. Thể tích của S, ký hiệu $V(S)$ được định nghĩa là số

$$V(S) := \frac{1}{m!}V(H),$$

trong đó H là hình hộp xác định bởi điểm P_0 và hệ m vector $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_m}\}$. Chiều cao của hình hộp H cũng gọi là chiều cao của đơn hình S. Đáy của đơn hình S là $(m-1)$-đơn hình S' xác định bởi hệ m điểm $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}\}$. Khi đó ta có công thức mà chứng minh cũng xin dành cho bạn đọc như là một bài tập.

$$V(S) := \frac{1}{m}V(S')h,$$

Khi $m = 2, 3$ ta có các công thức quen thuộc ở PTTH.

Chương 5

Biến đổi đẳng cự

5.1 Ánh xạ đẳng cự và biến đổi đẳng cự.

5.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1. Cho $\mathbb{E}$ và $\mathbb{E}'$ là hai không gian Euclid. Ánh xạ affine

$$f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$$

gọi là *ánh xạ đẳng cự* từ $\mathbb{E}$ vào $\mathbb{E}'$ nếu $\overrightarrow{f}$ là ánh xạ tuyến tính trực giao. Nếu f là song ánh, tức là $\overrightarrow{f}$ là một đẳng cấu tuyến tính trực giao, ta nói f là một *đẳng cấu đẳng cự*. Khi đó $\mathbb{E}$ và $\mathbb{E}'$ gọi là hai không gian đẳng cấu đẳng cự, ký hiệu $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}'$. Một tự đẳng cấu đẳng cự từ $\mathbb{E}$ vào chính nó gọi là một *biến đổi đẳng cự*.

Đôi lúc chúng ta sẽ nói vắn tắt "đẳng cấu" để thay cho cụm từ "đẳng cấu đẳng cự" nếu không có gì gây nhầm lẫn.

Nhận xét.

1. Do các ánh xạ tuyến tính trực giao đều là đơn ánh, ta suy ra mọi ánh xạ đẳng cự là đơn ánh. Do đó mọi ánh xạ đẳng cự từ không gian vector Euclid $\mathbb{E}$ vào chính nó là đều biến đổi đẳng cự.

2. Dễ thấy tích của hai ánh xạ đẳng cự là một ánh xạ đẳng cự và tập các phép biến đổi đẳng cự của $\mathbb{E}$ là một nhóm con của nhóm $\mathrm{Af}(\mathbb{E})$, ký hiệu $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$, gọi là *nhóm đẳng cự* của $\mathbb{E}^n$.

Định lý sau cho ta một đặc trưng quan trọng của các ánh xạ đẳng cự và giải thích tên gọi của nó.

Định lý 5.1.1. *Ánh xạ* $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ *là một ánh xạ đẳng cự khi và chỉ khi* f *bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ, tức là* $d(f(M), f(N)) = d(M, N)$ *với mọi cặp điểm* $M, N \in \mathbb{E}$

Chứng minh.

Giả sử $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ là ánh xạ đẳng cự. Do ánh xạ tuyến tính nền $\overrightarrow{f}$ của f là ánh xạ tuyến tính trực giao nên với mọi $M, N \in \mathbb{E}^n$ ta có:

$$d(f(M), f(N)) = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\| = d(M, N).$$

Ngược lại, giả sử $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ là ánh xạ thoả điều kiện

$$d(f(M), f(N)) = d(M, N), \forall M, N \in \mathbb{E}.$$

Chọn $O \in \mathbb{E}$ và xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \overrightarrow{\mathbb{E}} &\longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{E}'}, \\ \overrightarrow{OM} &\longmapsto \varphi(\overrightarrow{OM}) := \overrightarrow{f(O)f(M)}. \end{aligned}$$

Với mọi $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{y} = \overrightarrow{ON} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$, ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN}^2 &= d(M, N)^2 = d(f(M), f(N))^2 = \overrightarrow{f(M)f(N)}^2 \\ &= [\overrightarrow{f(O)f(N)} - \overrightarrow{f(O)f(M)}]^2 \\ &= \overrightarrow{f(O)f(N)}^2 + \overrightarrow{f(O)f(M)}^2 - 2\overrightarrow{f(O)f(N)}.\overrightarrow{f(O)f(M)} \\ &= \overrightarrow{ON}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\varphi(\overrightarrow{ON}).\varphi(\overrightarrow{OM}). \end{aligned}$$

Nhưng

$$\overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{ON}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM}.$$

Từ đây suy ra $\varphi(\overrightarrow{x}).\varphi(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$, với mọi $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}$. Do đó φ là một ánh xạ trực giao. Theo định nghĩa của φ, f là ánh xạ affine nhận φ làm ánh xạ nền. Nói cách khác f là một ánh xạ đẳng cự.

5.1.2 Phương trình dạng chính tắc của phép biến đổi đẳng cự

Trong không gian Euclid $\mathbb{E}^n$, cho $\{O; \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ là một mục tiêu trực chuẩn. Khi đó một biến đổi đẳng cự $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ sẽ có phương trình

$$[x'] = A[x] + [a], \tag{5.1}$$

đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$, trong đó A là một ma trận trực giao cấp n.

Ngược lại, dễ thấy mỗi phương trình dạng 5.1 với A là một ma trận trực giao sẽ là phương trình của một phép biến đổi đẳng cự đối với một mục tiêu trực chuẩn nào đó của $\mathbb{E}^n$.

Do A là ma trận trực giao nên $\det A = \pm 1$. Nếu $\det A = 1$, ta nói f là *phép dời loại 1*, hay *phép dời thuận*. Nếu $\det A = -1$, ta nói f là *phép dời loại 2*, hay *phép dời nghịch*. Một số tác giả dùng khái niệm phép dời để chỉ phép dời loại 1 và phép phản chiếu để chỉ phép dời loại 2.

Do mọi ma trận trực giao đều đồng dạng với một ma trận dạng chính tắc, chúng ta có kết quả sau

Định lý 5.1.2 (Dạng chính tắc của phép biến đổi đẳng cự)**.** *Trong không gian Euclid* $\mathbb{E}$, $n \geq 3$ *luôn luôn tồn tại mục tiêu trực chuẩn thích hợp sao cho phương trình của phép biến đổi đẳng cự* f *cho trước có ma trận* A *dạng*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & O & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & O & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix};$$

trong đó

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \varphi_i \leq \pi, \quad i = 1, 2, \ldots k.$$

Ta gọi A *là ma trận dạng chính tắc của* f.

Ví dụ.

1. Phép đồng nhất của $\mathbb{E}$ là phép biến đổi đẳng cự. Đây là phép dời loại 1.

2. Phép tịnh tiến
$$T_{\overrightarrow{a}} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$$
là một phép biến đổi đẳng cự có ánh xạ nền là ánh xạ đồng nhất của $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ nên nó là một phép dời loại 1.

3. Trong $\mathbb{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn đã cho, phép biến đổi đẳng cự có phương trình
$$\begin{cases} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= -x_3 \end{cases}$$
là một phép dời loại 2; còn phép biến đổi đẳng cự có phương trình
$$\begin{cases} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 \\ x_3' &= -x_3 \end{cases}$$
là một phép dời loại 1.

5.1.3 Một số phép biến đổi đẳng cự đặc biệt

Sau đây là các ví dụ khác về phép biển đổi đẳng cự đã từng được biết đến ở PTTH.

Phép đối xứng qua một m-phẳng. Nhắc lại rằng, phép thấu xạ affine f với cơ sở α, phương $\overrightarrow{\beta}$, hệ số $\lambda = -1$ gọi là phép *đối xứng xiên* qua phẳng α. Nếu thêm giả thiết $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$ bù trực giao nhau thì f được gọi là *phép đối xứng trực giao*, hay phép đối xứng vuông góc (nói tắt là phép đối xứng) qua phẳng α.

Chúng ta đã biết: " *Một phép biến đổi affine có tính chất đối hợp, nghĩa là $f^2 = Id$, hoặc là ánh xạ đồng nhất Id hoặc là phép đối xứng xiên" (xem bài tập* **??***).* Tương tự chúng ta có kết quả cho phép biến đổi đẳng cự: *"Một phép biến đổi đẳng cự có tính chất đối hợp hoặc là ánh xạ đồng nhất Id hoặc là phép đối xứng qua một m-phẳng".* Nếu $f \neq Id$ thì f là phép đối xứng xiên qua một m-phẳng α với phương $\overrightarrow{\beta}$ nào đó. Chúng ta chỉ cần chứng minh $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta}$ nữa là đủ. Với mọi $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\beta}$ ta có $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$. Do đó,
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}.$$
Nên $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Ví dụ 1. Phép đối xứng tâm trong $\mathbb{E}^3$ (ở PTTH) là phép đối xứng qua một 0-phẳng. Đây là phép dời loại 2.

Ví dụ 2. Phép đối xứng trục trong $\mathbb{E}^3$ (ở PTTH) là phép đối xứng qua một 1-phẳng. Đây là phép dời loại 1.

Ví dụ 3. Phép đối xứng qua mặt phẳng trong $\mathbb{E}^3$ (ở PTTH) là phép đối xứng qua một 2-phẳng. Đây là phép dời loại 2.

Nhận xét.

1. Phép biến đổi đẳng cự giữ bất động mọi điểm của siêu phẳng α hoặc là phép đồng nhất hoặc là phép đối xứng qua siêu phẳng α (xem Bài tập **??**).

2. Mọi phép dời loại 2 giữ bất động mọi điểm của một $(n-2)$-phẳng α là phép đối xứng qua một siêu phẳng $\beta \supset \alpha$. (xem Bài tập **??**).

Phép quay quanh một $(n-2)$-phẳng.

Cho α_1 và α_2 là hai siêu phẳng phân biệt, khi đó $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \beta$ là một $(n-2)$-phẳng. Ta ký hiệu hai phép đối xứng qua α_1 và α_2 lần lượt là S_{α_1} và S_{α_2}. Khi đó tích $S_{\alpha_1} \circ S_{\alpha_2}$ được gọi là một *phép quay* quanh $(n-2)$-phẳng β sinh bởi (theo thứ tự) S_{α_1} và S_{α_2}.

Nhận xét.

1. Do phép đối xứng qua siêu phẳng là phép dời loại 2, nên phép quay quanh $(n-2)$-phẳng là một phép dời loại 1.

2. Phép quay quanh $(n-2)$-phẳng β giữ bất động mọi điểm của β. Ngược lại, một phép dời loại 1 f giữ bất động một $(n-2)$-phẳng β sẽ là một phép quay quanh β. Khi đó ta có thể chọn hai siêu phẳng α_1 và α_2 bằng nhiều cách khác nhau để $f = S_{\alpha_1} \circ S_{\alpha_2}$.

3. Với điểm $M \in \mathbb{E}$, gọi γ là phẳng đi qua M và bù trực giao với β. Ta có $\beta \cap \gamma = \{I\}$. Có thể nhận thấy rằng
$$\angle(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = 2\angle(\alpha_1, \alpha_2) = \theta,$$
với M' là ảnh của M qua phép quay quanh $(n-2)$-phẳng β sinh bởi S_{α_1} và S_{α_2}. Do đó ta có thể nói đến góc quay θ của phép quay. Ta có thể xem phép đồng nhất là phép quay quanh $(n-2)$-phẳng bất kỳ với góc quay $\theta = 0$. Trong trường hợp β và $\mathbb{E}$ được định hướng, chúng ta có thể nói đến phép quay với góc quay âm và phép quay hoàn toàn được xác định bởi một $(n-2)$-phẳng và góc quay θ. Do đó một phép quay quanh $(n-2)$-phẳng β với góc quay θ được ký hiệu $R_{\beta,\theta}$.

4. Trong trường hợp tổng quát, do $S_{\alpha_1} \circ S_{\alpha_2} \neq S_{\alpha_2} \circ S_{\alpha_1}$ nên nói chung, phép quay quanh $(n-2)$-phẳng β sinh bởi S_{α_1} và S_{α_2} và phép quay quanh $(n-2)$-phẳng β sinh bởi S_{α_2} và S_{α_1} là khác nhau (góc quay của chúng đối nhau).

5.2 Phân loại các phép biến đổi đẳng cự trong $\mathbb{E}^2$ và trong $\mathbb{E}^3$

5.2.1 Phân loại các phép biến đổi đẳng cự trong $\mathbb{E}^2$

Tích của một phép đối xứng qua đường thẳng α, S_α, và một phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{v}}$ với $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\alpha}$ gọi là một *phép đối xứng trượt*. Đường thẳng α được gọi là *trục trượt*. Khi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ phép đối xứng trượt là một phép đối xứng. Chúng ta có các kết quả sau:

Định lý 5.2.1. *1. Mọi phép dời loại 1 của mặt phẳng $\mathbb{E}^2$ hoặc là một phép tịnh tiến hoặc là phép quay (quanh một điểm).*

2. Mọi phép dời loại 2 của mặt phẳng $\mathbb{E}^2$ đều là phép đối xứng trượt.

Chúng ta có một ứng dụng của định lý **??** khá thú vị như sau. Cho tam giác ABC. Ký hiệu S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} lần lượt là các phép đối xứng qua đường thẳng AB, BC, CA. Do phép đối xứng qua đường thẳng trong mặt phẳng là phép dời loại 2, ta suy ra tích $S_{AB} \circ S_{BC} \circ S_{CA} := f$ là một phép dời loại 2 nên là một phép đối xứng trượt. Từ đây chúng ta suy ra được rằng trung điểm của M và $f(M)$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định, đó là trục trượt. Có thể thay tam giác ABC bằng đa giác có số lẻ đỉnh và vẫn có kết quả tương tự.

5.2.2 Phân loại các phép biến đổi đẳng cự trong $\mathbb{E}^3$

Trong $\mathbb{E}^3$ chúng ta có các phép biến đổi đẳng cự đặc biệt sau đây:

1. **Phép đối xứng trượt** là tích của một phép đối xứng qua mặt phẳng α và một phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{v}}$ với $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\alpha}$. Đây là một phép dời loại 2.

2. **Phép quay quanh một đường thẳng** là phép quay quanh $(n-2)$-phẳng trong không gian 3-chiều. Đây là phép dời loại 1.

3. **Phép đối xứng quay** là tích của một phép đối xứng qua mặt phẳng α và một phép quay quanh đường thẳng d trực giao với α. Đây là một phép dời loại 2.

4. **Phép xoắn ốc** là tích của một phép quay quanh đường thẳng d với một phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{v}}$, với $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{d}$. Đây là một phép dời loại 1.

Chúng ta có các kết quả sau:

Định lý 5.2.2. *1. Mọi phép dời loại 1 trong $\mathbb{E}^3$ là một phép xoắn ốc (các phép tịnh tiến, hoặc phép quanh quanh đường thẳng là các trường hợp đặc biệt).*

2. Mọi phép dời loại 2 trong $\mathbb{E}^3$ hoặc là một phép đối xứng trượt hoặc là một phép đối xứng quay (phép đối xứng là một trường hợp đặc biệt).

5.3 Phép đồng dạng

Cho hai không gian Euclid $\mathbb{E}$ và $\mathbb{E}'$. Ánh xạ affine $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ gọi là *ánh xạ đồng dạng* tỉ số k nếu ánh xạ liên kết $\overrightarrow{f}$ là ánh xạ tuyến tính đồng dạng tỉ số k $(k > 0)$ từ $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ vào $\overrightarrow{\mathbb{E}'}$. Nhắc lại rằng, ánh xạ tuyến tính $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathbb{E}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{E}'}$ là đồng dạng nếu

$$\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \rangle = k \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle, \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathbb{E}}.$$

Một ánh xạ đồng dạng là song ánh được gọi là một *đẳng cấu đồng dạng*. Một tự đẳng cấu đồng dạng của $\mathbb{E}$ gọi là *phép đồng dạng* của $\mathbb{E}$.

Từ định nghĩa ta suy ra được các tính chất sau:

1. Biến đổi đẳng cự của $\mathbb{E}$ là phép đồng dạng tỷ số $k = 1$.
2. Ánh xạ đồng dạng giữa các không gian Euclid luôn luôn là đơn ánh. Từ đó mọi tự đồng cấu đồng dạng của không gian Euclid n-chiều $\mathbb{E}^n$ đều là phép đồng dạng.
3. Tập hợp các phép đồng dạng của $\mathbb{E}^n$ lập thành một nhóm con của nhóm affine $\mathrm{Af}(\mathbb{E}^n)$, ký hiệu $\mathrm{Sym}(\mathbb{E}^n)$, gọi là nhóm đồng dạng của $\mathbb{E}^n$. Hơn nữa, ta có

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n) \subset \mathrm{Sym}(\mathbb{E}^n) \subset \mathrm{Af}(\mathbb{E}^n)$$

Ví dụ 4. Phép vị tự là một phép đồng dạng.

Tương tự phép chứng minh Định lý 5.1.1 ta có

Định lý 5.3.1. *Ánh xạ $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ giữa các không gian Euclid $\mathbb{E}$ và $\mathbb{E}'$ là ánh xạ đồng dạng tỉ số k $(k > 0)$ khi và chỉ khi*

$$d(f(M), f(N)) = kd(M, N), \ \forall M, N \in \mathbb{E}.$$

5.4 Phép giải các bài toán affine trong không gian Euclid

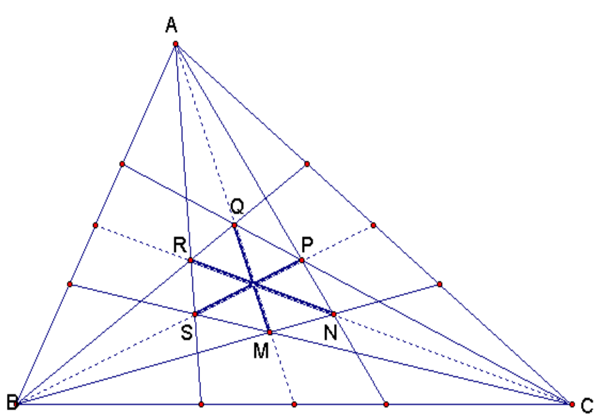
Ta xét một lớp các bài toán đặc biệt trong hình học Euclid. Đó ;à các bài toán mà giả thiết và kết luận sẽ không đề cập gì đến các khái niệm cũng như tính chất liên quan đến tích vô hướng (các khái niệm về lượng, chỉ có trong không gian Euclid như độ dài, góc, tính vuông góc v.v...) mà chỉ đề cập đến các khái niệm và tính chất affine (bất biến qua các phép biến đổi affine). Ta gọi các bài toán như vậy là các *bài toán affine*. Vì mỗi không gian Euclid là một không gian affine nên ta có thể xem bài toán trên là một bài toán trong không gian Affine. Với cách nhìn nhận như vậy, ta có thể dùng hình tương đương affine để giải một số các bài toán này. Có thể mô tả phương pháp này như sau: Giả sử bài toán affine (trong hình học Euclid) đang xét liên quan đến một hình H. Khi đó ta sẽ chọn một hình H' tương đương affine với hình H nhưng đặc biệt hơn, mà đối với hình H' bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn. Về thực chất ta đang dùng một phép biến đổi affine của $\mathbb{E}$ biến hình H thành hình H'. Giải bài toán đối với hình H'. Khi đó bài toán cũng sẽ đúng đối với hình H, do phép biến đổi affine bảo toàn các khái niệm và tính chất affine.

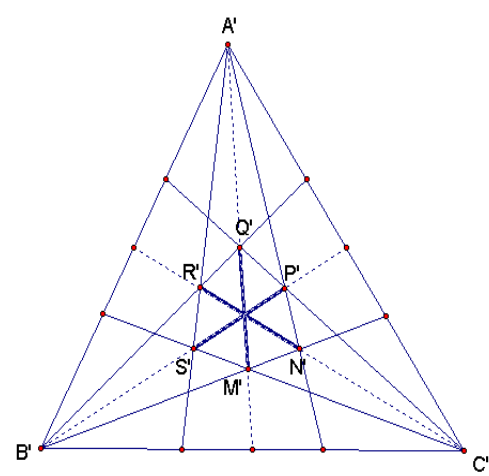
Các ví dụ sau đây sẽ làm sáng tỏ hơn lập luận trên.

Ví dụ.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC bất kỳ trong $\mathbb{E}^2$. Chia ba các cạnh và xét các đường thẳng nối các đỉnh và các điểm chia của cạnh đối diện. Các giao điểm của chúng lập thành một hình lục giác. Chứng minh ba đường chéo của lục giác này đồng quy tại một điểm.

Giải: Rõ ràng đây là một bài toán của hình học affine. Tam giác là một khái niệm của hình học affine, khái niệm "chia ba" là khái niệm của hình học affine vì có thể phát biểu lại dưới dạng tỉ số đơn. Tương tự khái niệm lục giác và tính chất đồng quy đều có thể mô tả bằng ngôn ngữ affine.





Xét phép biến đổi affine $f : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ biến tam giác ABC thành tam giác đều $A'B'C'$. Khi đó lục giác $MNPQRS$ biến thành lục giác $M'N'P'Q'R'S'$. Do các tam giác $B'M'C'$ và $B'Q'C'$ cân nên hai điểm M' và Q' nằm trên đường trung trực của cạnh $B'C'$ (và cũng là các đường trung tuyến). Tương tự hai điểm S' và P' nằm trên đường trung trực của cạnh $A'C'$ và l hai điểm R' và N' nằm trên đường trung trực của cạnh $A'B'$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh cho tam giác $A'B'C'$.

Xét phép biến đổi affine

$$f^{-1} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$$

biến tam giác đều $A'B'C'$ thành tam giác ABC. Khi đó các đường chéo $M'N', P'Q', R'S'$ biến thành các đường chéo MN, PQ, RS. Do các đường chéo $M'N', P'Q', R'S'$ đồng quy tại G'; ta suy ra các đường chéo MN, PQ, RS đồng qui tại $G = f^{-1}(G')$.

Nhận xét. Cách giải này không thể áp dụng cho đối tượng là học sinh PTTH. Tuy vậy dựa vào cách giải này có thể định hướng lời giải cho bài toán ban đầu. Theo dõi các bước chứng minh, chúng ta nhận thấy rằng các cặp điểm $(M', Q'), (P', S')$ và (R', N') nằm trên các đường trung tuyến của tam giác $A'B'C'$, nên ảnh của chúng qua ánh xạ f^{-1} cũng nằm trên các đường trung tuyến của tam giác ABC, vì phép biến đổi affine bảo toàn các đường trung tuyến. Từ đó chúng ta nhận thấy rằng chỉ cần chứng minh bài toán sau là đủ để có lời giải cho bài toán trên.

Bài toán trung gian. *Cho tam giác ABC, và hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NA}{NC}$. Chứng minh rằng giao điểm của BN và CM nằm trên trung tuyến xuất phát từ A.*

Bài toán 2. Trong $\mathbb{E}^2$ cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho

$$(MBC) = (NCA) = (PAB) = \frac{1}{3}.$$

Chứng minh mỗi đoạn thẳng trong ba đoạn thẳng AM, BN, CP bị hai đoạn thẳng còn lại chắn thành ba đoạn có độ dài tỉ lệ $3 : 3 : 1$.

Giải: Đây là một bài toán affine vì dễ thấy các giả thiết và kết luận là các khái niệm affine.

Xét phép biến đổi affine f biến tam giác ABC thành tam giác đều $A'B'C'$. Các giao điểm M, N, P, E, F, G biến thành M', N', P', E', F', G' một cách tương ứng.

Ta có tam giác A'E'N' đồng dạng với tam giác A'C'M' nên

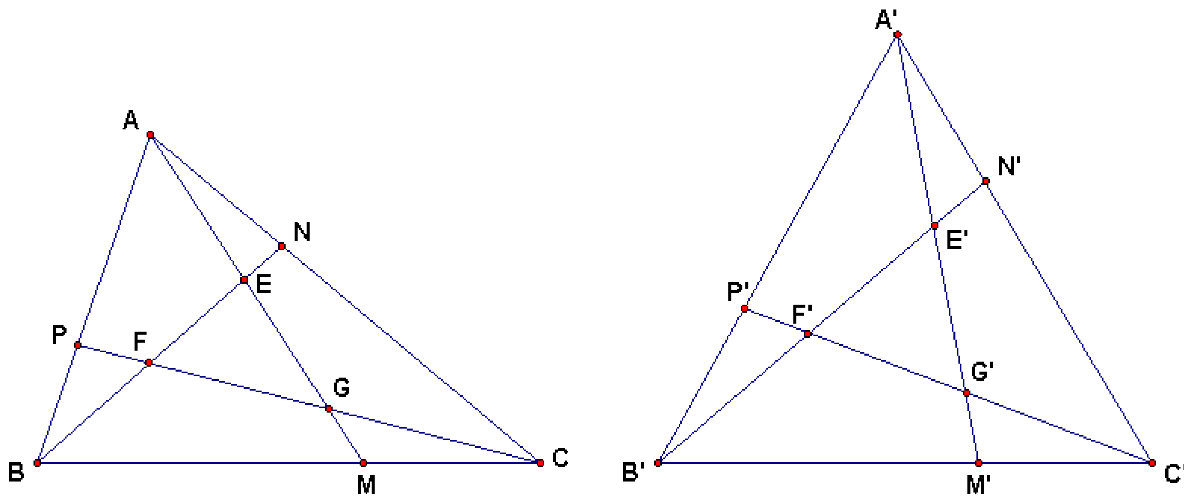
$$\frac{A'E'}{A'C'} = \frac{E'N'}{C'M'}.$$

Suy ra

$$\frac{A'E'}{E'N'} = \frac{A'C'}{C'M'} = \frac{C'B'}{C'M'} = 3.$$

Do tính chất đối xứng, tam giác $A'E'N'$ bằng tam giác $C'G'M'$ nên $E'N' = G'M'$. Từ đó

$$A'E' \;=\; 3.E'N' \;=\; 3.G'M'.$$



Ngoài ra, tam giác $A'P'G'$ đồng dạng với tam giác $A'M'B'$ nên ta có

$$\frac{P'G'}{M'B'} = \frac{A'G'}{A'B'}.$$

Suy ra

$$\frac{P'G'}{A'G'} = \frac{M'B'}{A'B'} = \frac{2}{3}.$$

Mà tam giác $A'P'G'$ bằng tam giác $B'M'E'$ nên $P'G' = E'M'$.

Suy ra $\frac{E'M'}{A'G'} = \frac{2}{3}$. Do đó $2A'E' = E'G' + 3G'M' = E'G' + A'E'$, hay $A'E' = E'G' = 3G'M'$.

Lý luận tương tự cho các trường hợp còn lại .

Phép biến đổi affine f^{-1} cho ta kết quả tương tự đối với tam giác ABC.

Bài toán 3. Trong $\mathbb{E}^2$ cho tam giác ABC bất kỳ. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho

$$(BMC) = (CNA) = (APB).$$

Chứng minh tam giác tạo thành bởi ba đường thẳng AM, BN, CP và tam giác ABC có cùng trọng tâm.

Giải: Đây là bài toán affine . Xét phép biến đổi affine f biến tam giác ABC thành tam giác đều $A'B'C'$.

Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ thì G' cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $G'A' = G'B' = G'C'$.

Suy ra các tam giác $A'C_1G', B'A_1G', C'B_1G'$ bằng nhau nên

$$G'A_1' = G'B_1' = G'C_1'.$$

Mà tam giác $A_1'B_1'C_1'$ đều nên G' cũng là trọng tâm của tam giác $A_1'B_1'C_1'$.

Phép affine f^{-1} biến tam giác $A'B'C'$ trở lại thành tam giác ABC. Ta suy ra kết quả tương tự cho tam giác ABC.

Chương 6

Siêu mặt bậc hai trong không gian Euclid

6.1 Siêu mặt bậc hai.

6.1.1 Phương trình dạng chính tắc của siêu mặt bậc hai.

Như đã biết đối với một siêu mặt bậc hai luôn tồn tại *mục tiêu affine* thích hợp sao cho phương trình của siêu mặt bậc hai có dạng đơn giản nhất, dạng chuẩn tắc. Vấn đề tương tự được đặt ra cho siêu mặt bậc hai trong không gian Euclid, khi mà các mục tiêu luôn được giả thiết là mục tiêu trực chuẩn. Định lý sau đây giải quyết vấn đề đó.

Định lý 6.1.1. *Trong không gian Euclid $\mathbb{E}$ luôn tồn tại một cơ sở trực chuẩn thích hợp sao cho phương trình của một siêu mặt bậc hai có một trong ba dạng sau, gọi là* phương trình dạng chính tắc *của siêu mặt bậc hai:*

1. *Dạng I:* $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + ... + \lambda_r X_r^2 = 1, \quad \lambda_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad 1 \leq r \leq n;$
2. *Dạng II:* $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + ... + \lambda_r X_r^2 = 0, \quad \lambda_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad 1 \leq r \leq n;$
3. *Dạng III:* $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + ... + \lambda_r X_r^2 = 2pX_{r+1}, \quad \lambda_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad p > 0,$
$1 \leq r \leq n-1.$

Chứng minh. Giả sử đối với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ của $\mathbb{E}^n$, siêu mặt bậc hai S có phương trình là:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0. \tag{6.1}$$

Xét phần bậc hai của 6.1

$$H(\overrightarrow{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j. \tag{6.2}$$

Đây là một dạng toàn phương trong không gian vector Euclid $\overrightarrow{\mathbb{E}^n}$ nên có thể đưa về dạng chính tắc. Điều này có nghĩa là tồn tại một cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$ của $\overrightarrow{\mathbb{E}^n}$ sao cho đối với cơ sở này 6.2 có dạng chính tắc:

$$H(\overrightarrow{y}) = \sum_{i=1}^{r} k_iy_i^2, \quad 1 \leq r \leq n, \quad k_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, r. \tag{6.3}$$

Gọi $S = (s_{ij})_n$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$. Xét phép đổi mục tiêu giữ nguyên gốc từ mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ sang mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$. Phép đổi mục tiêu này có phương trình

$$x_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} s_{ij}y_j, \quad i = 1, \dots, n. \tag{6.4}$$

Khi đó phương trình của S đối với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$ có dạng

$$\sum_{i=1}^{r} k_iy_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_iy_i + b = 0, \quad 1 \leq r \leq n, \quad k_i \neq 0. \tag{6.5}$$

Nếu dùng phép đổi mục tiêu có phương trình (tịnh tiến điểm gốc)

$$\begin{cases} y_i = z_i - \frac{b_i}{k_i}, & i = 1, 2, ..., r \\ y_j = z_j, & j = r+1, ..., n \end{cases};$$

thì đối với mục tiêu trực chuẩn mới $\{I; \overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$ phương trình của S có dạng

$$\sum_{i=1}^{r} k_i z_i^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} c_i z_i + c = 0, \quad 1 \le r \le n, k_i \neq 0. \tag{6.6}$$

Ta có các trường hợp sau:

1. $c_i = 0,\ i = r+1, ..., n$ và $c \neq 0$. Khi đó 6.6 có dạng I với các hệ số $\lambda_i = -\frac{k_i}{c}, i = 1, ..., r$.
2. $c_i = 0,\ i = r+1, ..., n$ và $c = 0$. Khi đó 6.6 có dạng II với các hệ số $\lambda_i = k_i,\ i = 1, ..., r$.
3. $r < n$ và tồn tại $c_i \neq 0,\ i = r+1, ..., n$, chẳng hạn $c_{r+1} \neq 0$.

Đặt

$$p = \sqrt{\sum_{j=r+1}^{n} c_j^2},\ d_i \ = \ \frac{c_i}{p}, \quad i = r+1, ..., n$$

và thay vào 6.6, ta có

$$\sum_{i=1}^{r} k_i z_i^2 + 2p(\sum_{i=r+1}^{n} d_i z_i + \frac{c}{2p}) = 0,$$

trong đó các d_i thoả điều kiện $\sum_{i=r+1}^{n} d_i^2 = 1$.

Bây giờ xét phép đổi mục tiêu có phương trình

$$\begin{cases} X_i & = z_i, i = 1, ..., r \\ X_{r+1} & = -\sum_{i=r+1}^{n} d_i z_i - \frac{c}{2p} \\ X_j & = \sum_{k=r+1}^{n} d_{jk} z_k, j = r+2, ..., n \end{cases},$$

trong đó các d_{jk} được chọn sao cho ma trận của phép biến đổi là ma trận trực giao. Điều này có nghĩa là mục tiêu mới là một mục tiêu trực chuẩn.

Khi đó phương trình của S đối với mục tiêu trực chuẩn mới là

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i^2 = 2pX_{r+1},\ \lambda_i = -k_i,\ 1 \le r \le n.$$

Đây là phương trình dạng III.

Ví dụ 1. Tìm phương trình chính tắc của siêu mặt bậc hai S trong $\mathbb{E}^3$ có phương trình đối với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3},\}$ là

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 9 = 0.$$

Giải. Xét dạng toàn phương tương ứng của S trong $\overrightarrow{\mathbb{E}^3}$:

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Bước 1. Đưa dạng toàn phương tương ứng H về dạng chính tắc. Ma trận của H là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của A

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-2).$$

Như vậy, ta có ba giá trị riêng $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$. Để tìm các vector riêng ứng với $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ta lần lượt giải các hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 & = 0 \ ; \\ x_1 & = 0 \end{cases} \tag{6.7}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 & = 0 \ ; \\ x_1 - x_3 & = 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 & = 0 \ . \\ x_1 + 2x_3 & = 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

Từ các hệ phương trình 6.7, 6.8, 6.9 ta có thể chọn ba vector riêng tương ứng $\overrightarrow{a_1}(0, 1, -1)$, $\overrightarrow{a_2}(1, 1, 1)$, $\overrightarrow{a_3}(2, -1, -$
Chuẩn hóa ta có cơ sở trực chuẩn $\overrightarrow{\omega_1}(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overrightarrow{\omega_2}(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $\overrightarrow{\omega_3}(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$ của $\overrightarrow{\mathbb{E}^3}$. Đối với cơ sở mới $\{\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}, \overrightarrow{\omega_3}\}$, H có dạng chính tắc

$$H(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2,$$

và phép biến đổi tọa độ tương ứng là

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{\sqrt{6}}{3}y_3 \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}y_3 \\ x_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}y_3 \end{cases}.$$

Bước 2. Xác định dạng chính tắc của siêu mặt bậc hai.

Ta có phương trình của S đối với mục tiêu trực chuẩn mới $\{O; \overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}, \overrightarrow{\omega_3}, \}$ là

$$2y_1^2 + 3y_2^2 + 6\sqrt{3}y_2 + 9 = 0.$$

Xét phép tịnh tiến mục tiêu

$$\begin{cases} y_1 &= X_1 \\ y_2 &= X_2 - \sqrt{3} \\ y_3 &= X_3 \end{cases},$$

ta thu được phương trình chính tắc của S

$$2X_1^2 + 3X_2^2 = 0.$$

Mục tiêu trực chuẩn tương ứng là $\{I; \overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}, \overrightarrow{\omega_3}\}$, với

$$I(-1,-1,-1) \quad (\text{do } \overrightarrow{OI} = -\sqrt{3}\overrightarrow{\omega_2} = -(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}));$$

$$\overrightarrow{\omega_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}), \quad \overrightarrow{\omega_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}), \quad \overrightarrow{\omega_3} = \frac{\sqrt{6}}{6}(2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}).$$

6.1.2 Gọi tên một số siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{E}^n$

Dựa vào các phương trình dạng chính tắc, chúng ta sẽ gọi tên một số siêu mặt bậc hai. Cách gọi tên này phù hợp với các tên gọi đã biết ở PTTH.

1. Siêu mặt bậc hai có phương trình dạng I với $r = n$ và các $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$ gọi là *siêu mặt ellipsoid* $(n-1)$-chiều và phương trình của nó có thể viết dưới dạng:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1.$$

Các $a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ gọi là các *bán trục* của siêu mặt ellipsoid. Các ellipse trong $\mathbb{E}^2$ và các ellipsoid trong $\mathbb{E}^3$ thuộc dạng này.

2. Siêu mặt bậc hai có phương trình dạng I với $r = n$ và các $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ mang dấu khác nhau gọi là *siêu mặt hyperboloid* và phương trình có thể viết dưới dạng:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + ... + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - ... - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1.$$

   Các hệ số $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$ gọi là các *bán trục thực*. Các hệ số $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n > 0$ gọi là các *bán trục ảo*. Các hyperbola trong $\mathbb{E}^2$, các hyperboloid 1 tầng và 2 tầng trong $\mathbb{E}^3$ thuộc dạng này.

3. Siêu mặt bậc hai có phương trình dạng II với $r = n$ và các hệ số $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ mang dấu khác nhau gọi là *siêu mặt nón* (thực).
   Các cặp đường thẳng cắt nhau trong $\mathbb{E}^2$, các cặp mặt phẳng cắt nhau, các mặt nón trong $\mathbb{E}^3$ thuộc dạng này.

4. Siêu mặt bậc hai có phương trình dạng III với $r = n - 1$ và các hệ số $\lambda_i,\ i = 1, ..., n - 1$ cùng dấu gọi là *siêu mặt paraboloid elliptic*, trường hợp các $\lambda_i,\ i = 1, ..., n - 1$ mang dấu khác nhau gọi là *siêu mặt paraboloid hyperbolic*.
   Các đường parabola trong $\mathbb{E}^2$, các mặt paraboloid elliptic và paraboloid hyperbolic (mặt yên ngựa) trong $\mathbb{E}^3$ thuộc dạng này.

5. Siêu mặt bậc hai có phương trình dạng I, II với $r < n$ và dạng III với $r < n - 1$ gọi là các *siêu mặt trụ* (elliptic, hyperbolic, parabolic…).
   Các cặp đường thẳng trùng nhau, các cặp đường thẳng song song trong $\mathbb{E}^2$; các mặt trụ elliptic, hyperbolic và parabolic, các cặp mặt phẳng cắt nhau, các cặp mặt phẳng trùng nhau trong $\mathbb{E}^3$ thuộc dạng này.

Chú ý. Có những phương trình dạng I, II mà tập các điểm có tọa độ (thực) thỏa mãn chúng là tập chỉ gồm có một điểm (phương trình dạng II với $r = n$ và các hệ số $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ cùng dấu) hoặc tập rỗng (phương trình dạng I với $r = n$ và $\lambda_i < 0, i = 1, ..., n$). Nếu xét trong không gian phức, tức là không gian mà các điểm có tọa độ là bộ các số phức, thì chúng sẽ xác định một tập lớn hơn nhiều. Vì thế trong một số giáo trình các phương trình này được xem là phương trình của các *siêu mặt bậc hai ảo*. Ví dụ:

1. Phương trình dạng I với $r = n$ và $\lambda_i < 0, i = 1, ..., n$ được xem là phương trình của *siêu mặt ellipsoid ảo*.

2. Siêu mặt bậc hai có phương trình dạng II với $r = n$ và các hệ số $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ cùng dấu được xem là phương trình của *siêu mặt nón ảo*.

6.2 Phương chính và siêu phẳng kính chính

6.2.1 Các định nghĩa

Trong $\mathbb{E}$ với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n},\}$ cho siêu mặt bậc hai S có phương trình

$$[x]^t A[x] + 2[a]^t[x] + b = 0.$$

Mỗi vector riêng $\overrightarrow{c}$ của ma trận A xác định một phương (không gian con một chiều $\langle\overrightarrow{c}\rangle$ sinh bởi $\overrightarrow{c}$) gọi là một *phương chính* của S. Cho $\langle\overrightarrow{c}\rangle$ là một phương chính không phải phương tiệm cận, khi đó siêu phẳng kính của S liên hợp với phương $\langle\overrightarrow{c}\rangle$ gọi là một *siêu phẳng kính chính* của S. Trong không gian Euclid 2-chiều $\mathbb{E}^2$, siêu phẳng kính chính gọi là đường kính chính.

Nhận xét.

1. Phương chính $\langle\overrightarrow{c}\rangle$ không phải phương tiệm cận của S khi và chỉ khi giá trị riêng λ ứng với vector $\overrightarrow{c}$ là khác 0.

   Thật vậy, giả sử λ là giá trị riêng ứng với vector riêng $\vec{c}$. Ta có

   $$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{c}\rangle \text{ không là phương tiệm cận} &\Leftrightarrow [c]^t A[c] \neq 0\\ &\Leftrightarrow [c]^t(\lambda[c]) = \lambda(\overrightarrow{c})^2 \neq 0\\ &\Leftrightarrow \lambda \neq 0 \quad (\text{do } (\overrightarrow{c})^2 > 0).\end{aligned}$$

2. Siêu phẳng kính chính α liên hợp với phương chính $\langle\overrightarrow{c}\rangle$ nhận $\overrightarrow{c}$ làm một pháp vector. Ngược lại một siêu phẳng kính α liên hợp với phương $\langle\overrightarrow{c}\rangle$ mà nhận $\overrightarrow{c}$ làm pháp vector sẽ là một siêu phẳng kính chính, và do đó $\langle\overrightarrow{c}\rangle$ sẽ là phương chính.

   Thật vậy, phương trình của siêu phẳng kính có dạng

   $$[x]^t A[c] + [a]^t[c] = 0.$$

   Do đó, nếu $A[c] = \lambda[c]$ thì $\overrightarrow{c}$ là một pháp vector của α.

   Ngược lại, từ phương trình của siêu phẳng kính ta nhận thấy $A[c]$ là một pháp vector. Do đó nếu $\overrightarrow{c}$ cũng là một pháp vector, ta suy ra $A[c] = \lambda[c]$, tức là $\overrightarrow{c}$ là một vector riêng và α là siêu phẳng kính chính.

3. Từ nhận xét trên ta suy ra phép đối xứng qua siêu phẳng kính chính sẽ biến S thành chính nó.

Chúng ta dễ dàng chứng minh định lý sau:

Định lý 6.2.1. *Phương trình của siêu mặt bậc hai S đối với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ có dạng:*

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0, \tag{6.10}$$

khi và chỉ khi các vector $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ là những phương chính của S.

6.2.2 Siêu phẳng kính chính trong $\mathbb{E}^2$.

Trong $\mathbb{E}^2$ với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ cho đường bậc hai C có phương trình:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Ta tìm điều kiện để phương $\langle \overrightarrow{c}(c_1, c_2)\rangle$ là phương chính. Do $\langle \overrightarrow{d}(-c_2, c_1)\rangle$ là phương vuông góc với $\langle \overrightarrow{c}\rangle$ nên $\langle \overrightarrow{c}\rangle$ là phương chính khi và chỉ khi $\overrightarrow{c}$ liên hợp với $\overrightarrow{d}$, tức là

$$-Ac_1c_2 + B(c_1^2 - c_2^2) + Cc_1c_2 = 0. \tag{6.11}$$

1. Nếu $A = C$ và $B = 0$, khi đó C là một đường tròn. Mọi cặp số (c_1, c_2) đều thoả 6.11 nên từ đây suy ra mọi phương đều là phương chính và mọi đường thẳng qua tâm đường tròn đều là đường kính chính.

2. Nếu $A \neq C$ và $B = 0$, khi đó C có thể là một ellipse, một hyperbola hoặc là một parabola. Phương trình 6.11 có dạng
$$(C - A)c_1c_2 = 0.$$
Ta tìm được hai phương chính $\langle \overrightarrow{c_1}(c_1, 0)\rangle, \langle \overrightarrow{c_2}(0, c_2)\rangle$ vuông góc nhau.

3. Nếu $A \neq C$ và $B \neq 0$, khi đó phương trình 6.11 là phương trình bậc hai với ẩn số $t = \frac{c_1}{c_2}$ ($c_2 \neq 0$ vì nếu $c_2 = 0$ thì từ 6.11 suy ra $c_1 = 0$) có dạng
$$Bt^2 + (C - A)t - B = 0. \tag{6.12}$$
Rõ ràng 6.12 có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thoả $t_1t_2 = -1$. Do đó ta có hai phương chính vuông góc với nhau.

Từ phân tích trên chúng ta rút ra kết luận: *Trong $\mathbb{E}^2$, nếu siêu mặt bậc C không phải là đường tròn thì C có đúng hai phương chính liên hợp nhau và vuông góc với nhau. Từ đó suy ra, nếu C có tâm duy nhất, tức là $AC - B^2 \neq 0$, thì có hai đường kính chính vuông góc nhau, đó là hai trục* *đối xứng của C. Còn nếu C không có tâm hoặc có vô số tâm, tức là $AC - B^2 = 0$, thì một phương chính sẽ là phương tiệm cận nên không có đường kính liên hợp với nó, phương chính thứ hai vuông góc với phương tiệm cận và đường kính liên hợp với nó sẽ là trục đối xứng duy nhất của C có phương là phương tiệm cận.*

Ví dụ . Trong $\mathbb{E}^2$, ellipse, hyperbola có hai đường kính chính vuông góc nhau là hai trục đối xứng của chúng. Parabola có một phương chính là phương tiệm cận, phương chính còn lại vuông góc với phương tiệm cận và đường kính chính tương ứng là trục đối xứng duy nhất của parabol.

6.3 Siêu cầu và siêu phẳng đẳng phương

6.3.1 Siêu cầu

Định nghĩa 1. Trong $\mathbb{E}^n$ cho điểm I và số thực $r \geq 0$. Tập hợp

$$C(I, r) = \{M \in \mathbb{E}^n \mid d(I, M) = r\}$$

gọi là một *siêu cầu* tâm I bán kính r.

Theo cách gọi thông thường, *siêu cầu* trong $\mathbb{E}^2$ gọi là đường tròn còn siêu cầu trong $\mathbb{E}^3$ gọi là *mặt cầu*. Khi $r = 0$, ta có khái niệm *siêu cầu điểm*.

Giả sử I có tọa độ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ đối với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ của $\mathbb{E}^n$. Ta có phương trình của siêu cầu có dạng

$$(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 = r^2 \tag{6.13}$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = r^2. \tag{6.14}$$

Từ phương trình 6.14 ta thấy siêu cầu là một siêu mặt bậc hai. Khi $I \equiv O$, phương trình của siêu cầu $C(O; r)$ có dạng đơn giản

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = r^2. \tag{6.15}$$

Đặt $b_i = -a_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ và $b = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - r^2$ thì 6.14 có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b = 0. \tag{6.16}$$

Đảo lại, mỗi phương trình dạng 6.16 xác định một siêu cầu $C(I;r)$ với $I(-b_1,...,-b_n)$ và $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2 - b}$, nếu $\sum_{i=1}^n b_i^2 \geq b$.

Ví dụ 2. Trong $\mathbb{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, xét mặt bậc hai có phương trình

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3 = 0. \tag{6.17}$$

Dễ thấy phương trình 6.17 tương đương phương trình dạng chính tắc

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 + (x_3 + 1)^2 = 9. \tag{6.18}$$

Từ đây suy ra mặt bậc hai là mặt cầu tâm $(1, -2, -1)$ bán kính $r = 3$.

6.3.2 Miền trong và miền ngoài của siêu cầu

Định nghĩa 2. Trong $\mathbb{E}^n$ cho siêu cầu $C(I;r)$. Tập hợp các điểm $M \in \mathbb{E}^n$ sao cho $d(I,M) < r$ gọi là *miền trong* của siêu cầu, còn tập hợp các điểm $M \in \mathbb{E}^n$ sao cho $d(I,M) > r$ gọi là *miền ngoài* của siêu cầu.

Mệnh đề 6.3.1.

1. *Điểm M thuộc miền trong của $C(I;r)$ khi và chỉ khi mọi đường thẳng chứa M đều cắt $C(I;r)$ tại hai điểm phân biệt.*
2. *Điểm M thuộc miền ngoài của $C(I;r)$ khi và chỉ khi tồn tại một đường thẳng chứa M mà không cắt $C(I;r)$.*
3. *Mọi siêu phẳng đi qua tâm của siêu cầu đều là siêu phẳng kính chính.*

Chứng minh.

1. Chọn mục tiêu trực chuẩn mà gốc là tâm I. Khi đó phương trình của siêu cầu có dạng

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \ = \ r^2.$$

   Lấy điểm $M(x_1^0, ..., x_n^0)$ và xét đường thẳng l qua M có phương trình tham số

$$\begin{cases} x_1 & = \ x_1^0 + c_1 t \\ x_2 & = \ x_2^0 + c_2 t \\ \vdots & = \quad \vdots \\ x_n & = \ x_n^0 + c_n t \end{cases},$$

   trong đó $\overrightarrow{c}(c_1, ..., c_n)$ là vector chỉ phương đơn vị.

Giao điểm của đường thẳng l với siêu cầu $C(I;r)$ (ứng với tham số t) là nghiệm của phương trình

$$(x_1^0+c_1t)^2+(x_2^0+c_2t)^2+...+(x_n^0+c_nt)^2 \;=\; r^2, \tag{6.19}$$

hay

$$t^2+2(\overrightarrow{c}.\overrightarrow{IM})t+d(I,M)^2-r^2 \;=\; 0. \tag{6.20}$$

Từ đó, nếu M thuộc miền trong của $C(I;r)$, tức là $d(I,M)<r$, thì phương trình 6.20 có hai nghiệm phân biệt nên l cắt $C(I;r)$ tại hai điểm phân biệt.

Đảo lại, giả sử mọi đường thẳng qua M đều cắt $C(I;r)$ tại hai điểm phân biệt. Chọn l là đường thẳng qua M nhận $\overrightarrow{IM}$ làm pháp vector thì $\overrightarrow{c}.\overrightarrow{IM} \;=\; 0$ nên phương trình 6.20 trở thành

$$t^2+d(I,M)^2-r^2 \;=\; 0. \tag{6.21}$$

Do phương trình 6.21 có hai nghiệm phân biệt nên ta phải có $d(I,M) \;<\; r$, hay M thuộc miền trong xác định bởi $C(I;r)$.

2. Chứng minh tương tự trường hợp 1.

3. Đối với siêu cầu, do ma trận bé là ma trận chéo nên mọi phương đều là phương chính. Từ đó mọi siêu phẳng đi qua tâm của siêu cầu đều là siêu phẳng kính chính. □

6.3.3 Phương tích và siêu phẳng đẳng phương.

Định nghĩa 3. Trong $\mathbb{E}^n$ cho siêu cầu $C(I;r)$ và điểm $M\in\mathbb{E}^n$. Ta định nghĩa *phương tích* của M đối với $C(I;r)$, ký hiệu $\mathcal{P}(M,C)$, là số

$$d(I,M)^2-r^2.$$

Từ định nghĩa, điểm M thuộc siêu cầu khi và chỉ khi $\mathcal{P}(M,C)=0$, điểm M thuộc miền trong của siêu cầu khi và chỉ khi $\mathcal{P}(M,C)<0$, còn điểm M thuộc miền ngoài của siêu cầu khi và chỉ khi $\mathcal{P}(M,C)>0$.

Nếu $C(I;r)$ có phương trình dạng 6.16 và M có tọa độ $(x_1^0,...,x_n^0)$ thì ta tính được

$$\mathcal{P}(M,C)=\sum_{i=1}^n x_i^0+2\sum_{i=1}^n b_ix_i^0+b. \tag{6.22}$$

Định lý 6.3.2. *Cho C_1 và C_2 là hai siêu cầu trong $\mathbb{E}^n$. Khi đó tập hợp*

$$\{M\in\mathbb{E}^n:\mathcal{P}(M,C_1)=\mathcal{P}(M,C_2)\}$$

có là một siêu phẳng α trực giao với đường thẳng nối hai tâm của siêu cầu.

Chứng minh.

Giả sử $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ là mục tiêu trực chuẩn trong $\mathbb{E}^n$, siêu cầu C_1 có tâm $I_1(a_1, ..., a_n)$, bán kính r_1 và siêu cầu C_2 có tâm $I_2(b_1, ..., b_n)$, bán kính r_2 với $I_1 \neq I_2$.

Với điểm $M(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{E}^2$. Khi đó,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(M, C_1) = \mathcal{P}(M, C_2) &\Leftrightarrow d(M_1, M)^2 - r_1^2 = d(I_2, M)^2 - r_2^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 - r_1^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - b_i)^2 - r_2^2.\end{aligned}$$

Ta thu được phương trình

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)x_i + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 - b_i^2) + r_2^2 - r_1^2) = 0. \tag{6.23}$$

Do $I_1 \neq I_2$, nghĩa các hệ số $b_i - a_i$, i=1,2,..., n không đồng thời bằng không, nên phương trình 6.23 xác định một siêu phẳng nhận $\overrightarrow{I_1I_2}$ là pháp vector. □

Định nghĩa 4. Siêu phẳng α trong Định lý 6.3.2 được gọi là *siêu phẳng đẳng phương* của hai siêu cầu C_1 và C_2, ký hiệu $\Pi(C_1, C_2)$. Trong $\mathbb{E}^2$ siêu phẳng đẳng phương được gọi là *trục đẳng phương*.

6.3.4 Giao của siêu cầu với siêu phẳng.

Trong $\mathbb{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ cho siêu cầu $C(I; r)$ tâm $I(a_1, ..., a_n)$, bán kính r và siêu phẳng α có phương trình pháp dạng

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + d \ = \ 0.$$

Gọi H là hình chiếu của I lên α, ta có

$$d(I, H) \ = \ |c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_na_n + d|.$$

Từ đó có các trường hợp sau:

1. $d(I, H) < r$. Khi đó H thuộc miền trong của $C(I; r)$ và siêu phẳng α cắt siêu cầu. Giao của chúng là siêu cầu tâm H bán kính $\sqrt{r^2 - d(I, H)^2}$ trong siêu phẳng α.
2. $d(I, H) = r$. Khi đó H thuộc siêu cầu và mọi đường thẳng đi qua H trong α đều là tiếp tuyến của siêu cầu tại H. Siêu phẳng α tiếp xúc với siêu cầu.
3. $d(I, H) < r$. Ta có H thuộc miền ngoài của $C(I; r)$ và α không có điểm chung với $C(I; r)$.

6.4 Phân loại Euclid các siêu mặt bậc hai trong$\mathbb{E}^n$

6.4.1 Siêu mặt bậc hai cùng loại Euclid.

Trong $\mathbb{E}^n$ cho siêu mặt bậc hai S. Theo Định lý 6.1.1 luôn luôn tồn tại một mục tiêu trực chuẩn thích hợp sao cho phương trình của S có một trong ba dạng I, II hoặc III, gọi là phương trình dạng chính tắc của S.

Hai phương trình chính tắc gọi là giống nhau nếu chúng thuộc cùng dạng I hoặc cùng dạng II hoặc cùng dạng III và thoả các điều kiện

1. Nếu chúng thuộc cùng dạng I thì các hệ số bậc hai của chúng đôi một giống nhau.
2. Nếu chúng thuộc cùng dạng II thì có một số thực $a \neq 0$ sao cho khi nhân a với các hệ số bậc hai của một trong hai phương trình, ta sẽ nhận được hệ số bậc hai của phương trình còn lại.
3. Nếu chúng thuộc cùng dạng III thì khi nhân ± 1 với các hệ số bậc hai của một trong hai phương trình, ta sẽ nhận được các hệ số bậc hai của phương trình còn lại.

Định nghĩa 5. Hai siêu mặt bậc hai của $\mathbb{E}^n$ gọi là cùng loại *Euclid* nếu phương trình chính tắc của chúng (đối với các mục tiêu trực chuẩn thích hợp nào đó của $\mathbb{E}^n$) là giống nhau.

Định lý sau cho ta một tiêu chuẩn để phân loại Euclid các siêu mặt bậc hai dựa vào phương trình dạng chính tắc của chúng.

Định lý 6.4.1. *Hai siêu mặt bậc hai của $\mathbb{E}^n$ cùng loại Euclid khi và chỉ khi chúng tương đương đẳng cự với nhau. Nói cách khác, sự phân loại trong định nghĩa trên là phân loại Euclid.*

Chứng minh.

Giả sử S và S' là tương đương đẳng cự, tức là tồn tại phép đẳng cự

$$f : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

sao cho $f(S) = S'$.

Nếu S có phương trình chính tắc đối với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ của $\mathbb{E}^n$ thì $f(S) = S$ cũng có phương trình chính tắc hoàn toàn giống như của S nhưng đối với mục tiêu trực chuẩn $\{I; \overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}, \ldots, \overrightarrow{\omega_n}\}$, trong đó

$$I = f(O); \quad \overrightarrow{\omega_i} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_i}), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Do đó, hai siêu mặt S và S' cùng loại.

Đảo lại, giả sử hai siêu mặt bậc hai S và S' cùng loại, tức là tồn tại trong $\mathbb{E}^n$ hai mục tiêu trực chuẩn và $\{I;\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2},\ldots,\overrightarrow{\omega_n}\}$ sao cho phương trình chính tắc của S đối với mục tiêu $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n}\}$và phương trình chính tắc của S' đối với mục tiêu $\{I;\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2},\ldots,\overrightarrow{\omega_n}\}$ là giống nhau.

Trước hết giả sử phương trình của S và S' thuộc cùng dạng chính tắc I hoặc II.

Xét phép biến đổi affine $f:\mathbb{E}^n\longrightarrow\mathbb{E}^n$ sao cho

$$f(O)=I;\quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{e_i})=\overrightarrow{\omega_i},\ \ i=1,2,...,n.$$

Do $\overrightarrow{f}$ biến cơ sở trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn nên $\overrightarrow{f}$ là phép biến đổi trực giao. Suy ra f là biến đổi đẳng cự. Khi đó phương trình của $f(S)$ đối với mục tiêu trực chuẩn $\{I;\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2},\ldots,\overrightarrow{\omega_n}\}$ hoàn toàn giống như phương trình của S đối với mục tiêu trực chuẩn $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n}\}$ nên suy ra $f(S)$ và S' có phương trình chính tắc giống nhau đối với mục tiêu $\{I;\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2},\ldots,\overrightarrow{\omega_n}\}$. Nói cách khác S' trùng với $f(S)$ hay S và S' tương đương đẳng cự.

Bây giờ giả sử phương trình của S và S' thuộc cùng dạng III. Xét phép đổi mục tiêu biến mục tiêu trực chuẩn $\{I;\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2},\ldots,\overrightarrow{\omega_n}\}$ thành mục tiêu $\{I;\overrightarrow{\omega_1}',\overrightarrow{\omega_2}',\ldots,\overrightarrow{\omega_n}'\}$ trong đó $\{\overrightarrow{\omega_1}',\overrightarrow{\omega_2}',\ldots,\overrightarrow{\omega_n}'\}$ suy từ $\{\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2},\ldots,\overrightarrow{\omega_n}\}$ bằng cách thay đổi thứ tự thích hợp các vector sao cho phương trình của S' đối với mục tiêu mới $\{I;\overrightarrow{\omega_1}',\overrightarrow{\omega_2}',\ldots,\overrightarrow{\omega_n}'\}$ hoàn toàn giống như phương trình của S đối với mục tiêu $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n}\}$. Sử dụng phép biến đổi affine

$$f:\mathbb{E}^n\longrightarrow\mathbb{E}^n$$

sao cho

$$f(O)\ =\ I \text{ và } \overrightarrow{f}(e_i)=\overrightarrow{\omega_i}',\ i=1,...,n$$

và lý luận tương tự như trên ta cũng suy ra được S và S' tương đương đẳng cự.

□

Nhận xét 1.

1. Hai siêu mặt bậc hai cùng loại Euclid thì cùng loại affine nhưng đảo lại không đúng. Nói cách khác, phân loại Euclid các siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{E}^n$ chi tiết hơn phân loại affine trong $\mathbb{E}^n$.

2. Nhờ định lý 4.1.2 ta có thể phân loại đẳng cự (Euclid) các siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{E}^n$ dựa vào phương trình chính tắc của chúng. Hai siêu mặt bậc hai cùng loại Euclid khi và chỉ khi chúng có phương trình chính tắc giống nhau.