CHƯƠNG 8

KHÔNG GIAN AFFINE VÀ KHÔNG GIAN EUCLID

Có thể ví Hình học giải tích như Phần xác của một thực thể mà Phần hồn của nó chính là Đại số tuyến tính. Chúng tôi đã không xuất bản Phần Hình học giải tích này trong cùng một cuốn sách với phần Đại số tuyến tính là vì hai lý do chính: Một là, chúng tôi hiểu rằng trình bày hình học bao giờ cũng là một việc rất khó và chưa yên tâm với sự trình bày trong phần Hình học giải tích dưới đây; Hai là, chúng tôi cho rằng việc kết hợp Đại số tuyến tính và Hình học giải tích trong một môn học xem ra không phù hợp với truyền thống quốc tế và không biết có phải là một giải pháp tốt lâu dài hay không.

1 Không gian affine

Chúng ta bắt đầu bằng nhận xét sau đây: "Không gian vật lý" mà chúng ta đang sống trong đó không hẳn là một không gian véctơ thực 3 chiều. Nó chỉ có vẻ giống một không gian véctơ thực 3 chiều sau khi đã chọn một điểm là gốc tọa độ. Tuy thế vai trò của mỗi điểm trong không gian mà chúng ta đang sống là như nhau, trong lúc đó véctơ 0 là một "điểm rất đặc biệt trong không gian véctơ thực 3 chiều.

Để có một mô hình tốt hơn cho "không gian vật lý" mà chúng ta đang sống, ta cần khái niệm không gian affine.

Giả sử $\mathbb{K}$ là một trường, $\mathbb{V}$ là một $\mathbb{K}$-không gian véctơ, $\mathbb{A}$ là một tập hợp khác rỗng, mỗi một phần tử của $\mathbb{A}$ sẽ được gọi là một điểm. (Trong phần Hình học giải tích, các không gian sẽ được ký hiệu bởi các chữ cái *in hoa đậm*, để phân biệt với các điểm được ký hiệu bởi các chữ cái *in hoa thường*.)

Giả sử $\Phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$ là một ánh xạ. Với mỗi một cặp điểm $M, N \in \mathbb{A}$, véctơ $\Phi(M, N)$ sẽ được ký hiệu bởi $\overrightarrow{MN}$, và được gọi là véctơ với điểm đầu M và điểm cuối N, hay véctơ nối M với N.

Định nghĩa 1.1. Một *không gian affine* trên $\mathbb{K}$ là một bộ ba $(\mathbb{A}, \mathbb{V}, \Phi)$, trong đó $\mathbb{V}$ là một $\mathbb{K}$-không gian véctơ, $\mathbb{A}$ là một tập hợp khác rỗng, và $\Phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$ là một ánh xạ sao cho hai điều kiện sau được thỏa mãn:

(a) Với mỗi M cố định thuộc $\mathbb{A}$, ánh xạ $\mathbb{A} \to \mathbb{V}$, $N \mapsto \overrightarrow{MN}$, là một song ánh.

(b) Hệ thực Charles: $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$, với mọi $M, N, P \in \mathbb{A}$.

Nếu không sợ nhầm lẫn, ta cũng thường nói $\mathbb{A}$ là một không gian affine trên $\mathbb{K}$ (hoặc một $\mathbb{K}$-không gian affine) liên kết với không gian véctơ $\mathbb{V}$ (bởi ánh xạ Φ).

Ví dụ 1.2. (a) Không gian hình học mà ta học ở Trung học phổ thông là một không gian affine thực liên kết với không gian véctơ thực 3 chiều.

(b) Cho $\mathbb{V}$ là một không gian véctơ bất kỳ trên $\mathbb{K}$. Khi đó, $\mathbb{V}$ có thể được xem như một không gian affine liên kết với chính nó, bởi ánh xạ $\Phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ xác định như sau:

$$\Phi(u, w) = \overrightarrow{uw} = w - v.$$

Cấu trúc affine này được gọi là cấu trúc affine chính tắc trên $\mathbb{V}$.

Hệ quả 1.3.

$$\overrightarrow{MN} = 0 \Longleftrightarrow M = N.$$

Chứng minh. Theo hệ thức Charles, ta có

$$\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}.$$

Từ đó, $\overrightarrow{MM} = 0$. Ngược lại, giả sử $\overrightarrow{MN} = 0 = \overrightarrow{MM}$. Vì ánh xạ $N \mapsto \overrightarrow{MN}$ là một song ánh, cho nên $M = N$. □

Cho $\mathbb{A}$ là một không gian affine liên kết với không gian véctơ $\mathbb{V}$. Nếu $\dim \mathbb{V} = n$, thì ta cũng nói số chiều của $\mathbb{A}$ trên $\mathbb{K}$ là n, và viết $\dim \mathbb{A} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{A} = n$.

Định nghĩa 1.4. Giả sử $(e_1, \ldots, e_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{V}$, và O là một điểm thuộc $\mathbb{A}$. Khi đó hệ thống $(O, e_1, \ldots, e_n)$ được gọi là một hệ *tọa độ (affine)* của $\mathbb{A}$ (hay một *hệ tọa độ (affine)* trong $\mathbb{A}$). Điểm O được gọi là gốc tọa độ, còn véctơ e_i được gọi là véctơ cơ sở thứ i trong hệ tọa độ (affine) nói trên.

Điểm $M \in \mathbb{A}$ thì ta có phân tích duy nhất

$$\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Ta nói M có tọa độ (affine) là $(x_1, \ldots, x_n)$ trong hệ tọa độ affine $(O, e_1, \ldots, e_n)$, và viết $M(x_1, \ldots, x_n)$.

Giả sử $(O', e'_1, \ldots, e'_n)$ cũng là một hệ tọa độ affine của $\mathbb{A}$, và $C = (c_{ij})_{n\times n}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $(e_1, \ldots, e_n)$ sang cơ sở $(e'_1, \ldots, e'_n)$, nghĩa là

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Gọi $(x_1, \ldots, x_n)$ và $(x'_1, \ldots, x'_n)$ tương ứng là tọa độ của M trong hai hệ tọa độ $(O, e_1, \ldots, e_n)$ và $(O', e'_1, \ldots, e'_n)$. Giả sử thêm O' có tọa độ $(b_1, \ldots, b_n)$ trong hệ tọa độ thứ nhất. Khi đó, từ hệ thức Charles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, ta thu được

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i e_i &= \sum_{i=1}^{n} b_i e_i + \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i e_i + \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j + b_i \right) e_i.\end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j + b_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Đó là công thức đổi biến tọa độ affine. Ngược lại, bất kỳ công thức nào có dạng như vậy, trong đó $C = (c_{ij})_{n \times n}$ là một ma trận không suy biến, đều là công thức biến đổi tọa độ từ một hệ tọa độ affine này sang một hệ tọa độ affine khác.

Chúng ta sẽ tổng quát hóa khái niệm trọng tâm bằng khái niệm *"trọng tâm với trọng số"*, thường được gọi là tâm tỉ cự, như sau.

Cho hệ điểm $(M_i)_{i \in I}$ trong $\mathbb{A}$ và họ các vô hướng $(\lambda_i)_{i \in I}$ trong $\mathbb{K}$, các vô hướng này hầu hết bằng 0, (tức là chúng bằng không trừ một số hữu hạn vô hướng trong họ). Khi đó, tổng $\sum_{i \in I} \lambda_i$ được xác định, mặc dù tập chỉ số I có thể vô hạn.

Mệnh đề 1.5. *Nếu $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm $G \in \mathbb{A}$ sao cho*

$$\sum_{i \in I} \lambda \overrightarrow{GM_i} = 0.$$

Định nghĩa 1.6. Điểm duy nhất G nghiệm đúng đẳng thức nói trên được gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $(M_i)_{i \in I}$ ứng với họ hệ số $(\lambda_i)_{i \in I}$ thỏa mãn giả thiết $\sum_{i \in I} \lambda_i = 0$.

Chứng minh Mệnh đề 1.5. Chọn một điểm tùy ý $O \in \mathbb{A}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = 0 &= \sum_{i\in I} \lambda_i \left(\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}\right) = 0 \\ &= \overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i\in I} \lambda_i} \left(\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{OM_i}\right).\end{aligned}$$

Như vậy, điểm G tồn tại, bởi vì tương ứng $G \mapsto \overrightarrow{OG}$ là một song ánh.

Nếu tồn tại các điểm G và G' sao cho $\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{G'M_i} = 0$, thì từ đó

$$\left(\sum_{i\in I} \lambda_i\right) \overrightarrow{GG'} = 0.$$

Vì $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$, cho nên đẳng thức trên kéo theo $\overrightarrow{GG'} = 0$ hay là $G = G'$. □

Nhận xét 1.7. Giả sử $\mathrm{Char}(\mathbb{K})$ không chia hết cho số tự nhiên m. Tâm tỉ cự của hệ m điểm $M_1, \ldots, M_m$ ứng với họ hệ số $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \lambda \neq 0$ được xác định bởi hệ thức

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i\in I} \lambda_i} \left(\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{OM_i}\right) = \frac{1}{m} \left(\sum_{i\in I} \overrightarrow{OM_i}\right).$$

Như vậy G không phụ thuộc vào giá trị chung $\lambda \neq 0$. Điểm G như thế được gọi là trọng tâm của hệ điểm $M_1, \ldots, M_m$. Từ hệ thức trên ta thấy, trong bất kỳ hệ tọa độ affine nào của $\mathbb{A}$, tọa độ affine của G là trung bình cộng các tọa độ affine của $M_1, \ldots, M_m$.

Bây giờ ta xét trường hợp riêng $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ta sẽ định nghĩa các khái niệm đoạn thẳng và tập lồi trong không gian affine $\mathbb{A}$.

Giả sử $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \geqslant 0$ với $\lambda + \mu \neq 0$. Tâm tỉ cự của hệ hai điểm $P, Q \in \mathbb{A}$ ứng với các hệ số λ, μ là điểm M xác định bởi hệ thức

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda + \mu} \left(\lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ}\right).$$

Đặt $t = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ ta thu được

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)\, \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ},$$

trong đó $0 \leqslant t \leqslant 1$. Ta có hai định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.8. Tập hợp (không phụ thuộc O) các điểm $M \in \mathbb{A}$ thỏa mãn điều kiện

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)\,\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)\,,$$

được gọi là *đoạn thẳng nối* P *và* Q, và được ký hiệu là $[P, Q]$.

Định nghĩa 1.9. Tập hợp $\Omega \subset \mathbb{A}$ được gọi là *tập lồi* nếu với mọi cặp điểm $P, Q \in \Omega$, cả đoạn thẳng $[P, Q]$ cũng nằm trong Ω, nghĩa là $[P, Q] \subset \Omega$.

Chú ý rằng hai khái niệm *đoạn thẳng* và *tập lồi* chỉ có nghĩa đối với các không gian affine thực.

2 Các phẳng trong không gian affine

Cho $(\mathbb{A}, \mathbb{V}, \Phi)$ là một $\mathbb{K}$-không gian affine, $\mathbb{W}$ là một không gian véctơ con của $\mathbb{V}$.

Định nghĩa 2.1. Tập hợp $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ xác định bởi

$$\mathbb{B} = \left\{ M \in \mathbb{A} |\ \overrightarrow{M_0 M} \in \mathbb{W} \right\}$$

được gọi là *phẳng đi qua* M_0 *với (không gian chỉ) phương* $\mathbb{W}$.

Dễ dàng thấy rằng nếu $\mathbb{B}$ là phẳng đi qua M_0 với phương $\mathbb{W}$, và M_1 là một điểm bất kỳ thuộc $\mathbb{B}$, thì $\mathbb{B}$ cũng là phẳng đi qua M_1 với phương $\mathbb{W}$.

Nếu $\mathbb{B}$ là một phẳng trong $\mathbb{A}$ đi qua $\mathbb{M}_0$ với phương $\mathbb{W}$, thì ánh xạ $\Phi_{\mathbb{B}} = \Phi|_{\mathbb{B}\times\mathbb{B}} : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{W}$ định nghĩa như sau

$$\Phi_{\mathbb{B}}(M, N) = \overrightarrow{M_0 N} - \overrightarrow{M_0 M} = \overrightarrow{MN} \in \mathbb{W}$$

xác định một cấu trúc không gian affine trên $\mathbb{B}$ liên kết với $\mathbb{W}$. Ta nói $\mathbb{B}$ là một *không gian affine* con của $\mathbb{A}$ với phương $\mathbb{W}$.

Nếu $\dim \mathbb{W} = m$ thì ta cũng viết $\dim \mathbb{B} = m$ và gọi $\mathbb{B}$ là một *m-phẳng*. Rõ ràng mỗi 0-phẳng là tập hợp chỉ gồm một điểm.

Ví dụ 2.2. Xét cấu trúc không gian affine chính tắc trên $\mathbb{A} = \mathbb{V}$ (xem Ví dụ 1.2 (b)). Giả sử $\mathbb{B}$ là một phẳng trong $\mathbb{V}$ với phương $\mathbb{W}$. Lấy bất kỳ $v_0 \in \mathbb{B}$. Khi đó $v \in \mathbb{B}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{v_0 v} = v - v_0 \in \mathbb{W}$. Nói cách khác,

$$\mathbb{B} = \{v \in \mathbb{V} |\ \overrightarrow{v_0 v} = v - v_0 \in \mathbb{W}\} = \{v_0 + w |\ w \in \mathbb{W}\}.$$

Tập hợp $\{v_0 + w |\ w \in \mathbb{W}\}$ được ký hiệu đơn giản là $v_0 + \mathbb{W}$. Như thế, trong không gian affine chính tắc $\mathbb{V}$, mỗi phẳng $\mathbb{B}$ với phương $\mathbb{W}$ đều có dạng $v_0 + \mathbb{W}$, trong đó v_0 là một điểm nào đó thuộc $\mathbb{B}$.

Định nghĩa 2.3. Mỗi 1-phẳng được gọi là một *đường thẳng*, mỗi 2-phẳng được gọi là một *mặt phẳng*. Nếu $\dim \mathbb{A} = n$, thì mỗi $(n-1)$-phẳng trong $\mathbb{A}$ được gọi là một siêu phẳng trong $\mathbb{A}$.

Có một cách khác có thể dùng để định nghĩa phẳng. Cách này tuy hơi phức tạp về mặt kỹ thuật, nhưng có ưu điểm là cho phép nhận ra một phẳng mà không cần biết không gian chỉ phương của nó. Cách định nghĩa thứ hai của phẳng bao hàm trong khẳng định sau đây mà chúng tôi đề nghị độc giả tự chứng minh xem như một bài tập

Bài tập 2.4. Tập con không rỗng $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ là một phẳng trong $\mathbb{A}$ nếu và chỉ nếu tâm tỉ cự của mọi hệ điểm trong $\mathbb{B}$ cũng nằm trong $\mathbb{B}$. Khi đó, không gian chỉ phương $\mathbb{W}$ của $\mathbb{B}$ được xác định như sau:

$$\mathbb{W} = \left\{ \overrightarrow{M_0M} | \; M \in \mathbb{B} \right\},$$

ở đây $M_0 \in \mathbb{B}$. Không gian $\mathbb{W}$ xác định như vậy không phụ thuộc điểm M_0 đã cho trong $\mathbb{B}$.

Ta sẽ mô tả hệ phương trình của các phẳng, trước hết là hệ phương trình tham số của m-phẳng.

Cho $(O, e_1, \ldots, e_n)$ là một hệ tọa độ của không gian affine $\mathbb{A}$. Giả sử $\mathbb{B}$ là một m-phẳng đi qua M_0 với không gian véctơ chỉ phương $\mathbb{W}$, ở đây $m \leqslant n$. Chọn một cơ sở $(u_1, \ldots, u_m)$ của không gian $\mathbb{W}$. Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_0} &= \sum_{i=1}^{n} b_i e_i, \quad \text{hay là } M_0\left(b_1, \ldots, b_n\right), \\ u_j &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \quad \left(j = 1, \ldots, m, \; a_{ij} \in \mathbb{K}\right). \end{aligned}$$

Nhận xét rằng $M\left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{B}$ nếu và chỉ nếu

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} \in \mathbb{W} &\Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0O} + \overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{m} t_j u_j \quad \left(t_j \in \mathbb{K}\right) \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = \sum_{j=1}^{m} t_j u_j + \overrightarrow{OM_0} = \sum_{j=1}^{m} t_j u_j + \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \\ &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} t_j e_i + \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \\ &\Longleftrightarrow \boxed{x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j + b_i \qquad \left(i = 1, \ldots, n\right).} \end{aligned}$$

Đó là hệ phương trình tham số của $\mathbb{B}$. Các t_j (với $j = 1, \dots, m$) được gọi là các tham số. Mỗi khi gán cho chúng những giá trị tùy ý trong $\mathbb{K}$, ta sẽ nhận được một điểm $M(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}$. Nhận xét rằng hệ phương trình tham số của một phẳng không xác định duy nhất.

Ngược lại, bất kỳ hệ phương trình nào có dạng như trên, trong đó $\operatorname{rank}(a_{ij})_{n\times m} = m$, đều là hệ phương trình tham số của một m-phẳng trong không gian affine m chiều. (Chúng tôi đề nghị độc giả chứng minh khẳng định này như một bài tập.)

Ví dụ 2.5. Chúng ta xét trường hợp $m = 1$. Giả sử đường thẳng $d \subset \mathbb{A}$ có không gian chỉ phương được sinh bởi véctơ $u = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. (Khi đó, ta cũng nói đường thẳng d có véctơ chỉ phương u.) Phương trình tham số của đường thẳng d là

$$\boxed{x_i = a_i t + b_i \quad (i = 1, \dots, n),}$$

trong đó t là tham số, và $\operatorname{rank}(a_1, \dots, a_n) = 1$.

Bây giờ ta chuyển qua xét phương trình tổng quát của các phẳng.

Mệnh đề 2.6. *Giả sử $(O, e_1, \dots, e_n)$ là một hệ tọa độ của không gian affine $\mathbb{A}$. Khi đó, hệ phương trình tuyến tính tương thích*

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + b_i = 0 \quad (i = 1, \dots, k,\ c_{ij}, b_i \in \mathbb{K}),$$

trong đó $\operatorname{rank}(c_{ij})_{k\times n} = n - m$ xác định (tọa độ các điểm của) một m-phẳng $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$. Ngược lại, mỗi m phẳng được xác định bởi một hệ phương trình tuyến tính như vậy.

Hệ phương trình nói trên được gọi là hệ phương trình (tổng quát) của m-phẳng $\mathbb{B}$. Nhận xét rằng hệ phương trình (tổng quát) của một phẳng là không xác định duy nhất.

Chứng minh Mệnh đề 2.6. Gọi $\mathbb{B}$ là tập hợp các điểm $M(x_1, \dots, x_n)$ thỏa mãn hệ phương trình nói trên. Theo giả thiết, hệ là tương thích, cho nên $\mathbb{B} \neq \emptyset$. Giả sử $M_0\left(x_1^0, \dots, x_n^0\right)$ là một điểm của $\mathbb{B}$, tức là $\left(x_1^0, \dots, x_n^0\right)$ là một nghiêm của hệ phương trình nói trên.

Gọi $\mathbb{W}$ là tập hợp các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng với hệ phương trình nói trên. Khi đó $\mathbb{W}$ là một $\mathbb{K}$-không gian véctơ với số chiều $\dim\mathbb{W} = n - \operatorname{rank}(c_{ij}) = n - (n-m) = m$. Bây giờ $M(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}$ khi và chỉ khi $(x_1, \ldots, x_n)$ là một nghiệm của hệ phương trình nói trên. Điều này tương đương với việc $\left(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0\right)$ là một nghiệm của hệ phương trình thuần nhất tương ứng với hệ phương trình nói trên, hay là $\overrightarrow{M_0M}(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0) \in \mathbb{W}$. Như thế, $\mathbb{B}$ là m-phẳng đi qua M_0 với không gian chỉ phương là $\mathbb{W}$.

Ngược lại, giả sử $\mathbb{B}$ là một m-phẳng đi qua M_0 với không gian chỉ phương $\mathbb{W}$. Gọi $(u_1, \ldots, u_m)$ là một cơ sở của $\mathbb{W}$. Bổ sung hệ nói trên để được một cơ sở $(u_1, \ldots, u_m, \ldots, u_n)$ của không gian véctơ $\mathbb{V}$. Giả sử M_0 có tọa độ $(b_1, \ldots, b_n)$ trong hệ tọa độ $(O, u_1, \ldots, u_n)$. Khi đó $M(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{M_0M} = \sum_{i=1}^n (x_i - b_i) u_i \in \mathbb{W}$, hay là khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_{m+1} - b_{m+1} & = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0, \\ x_n - b_n & = 0. \end{cases}$$

Đó là hệ phương trình xác định $\mathbb{B}$ với ma trận có hạng bằng $n - m$.

Mệnh đề được chứng minh. □

Mệnh đề 2.6 giải thích ý nghĩa hình học của hệ phương trình tuyến tính n ẩn

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + b_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Nếu $\operatorname{rank}(c_{ij})_{k \times n} = n - m$, thì tập các nghiệm của hệ phương trình đó lập nên một m-phẳng trong không gian affine n chiều.

Nhận xét 2.7. Mối liên hệ giữa hệ phương trình tham số và hệ phương trình tổng quát của một mặt phẳng được ghi nhận như sau.

(a) Giả sử m-phẳng $\mathbb{B}$ có hệ phương trình tham số là

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j + b_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

trong đó $\operatorname{rank}(a_{ij})_{n\times m} = m$. Không giảm tổng quát, có thể giả sử ma trận con cấp m ở phía trên của ma trận $(a_{ij})_{n\times m}$ là không suy biến. Khi đó, ta có biểu thị tuyến tính $t_1, \dots, t_m$ qua $x_1, \dots, x_m$ (một cách duy nhất). Thay những biểu thức thu được vào $(n-m)$ phương trình cuối của hệ phương trình tham số nói trên, ta có thể biểu thị $x_{m+1}, \dots, x_n$ như các hàm tuyến tính của các biến $x_1, \dots, x_m$. Đó là một hệ phương trình tổng quát của phẳng $\mathbb{B}$.

(b) Ngược lại, giả sử m-phẳng $\mathbb{B}$ có hệ phương trình tổng quát là

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + b_i = 0,$$

với $\operatorname{rank}(c_{ij})_{k\times n} = n-m$. Không giảm tổng quát, giả sử ma trận vuông cấp $(n-m)$ ở góc dưới bên phải của $(c_{ij})_{k\times n}$ không suy biến. Khi đó, ta có thể viết $x_{m+1}, \dots, x_n$ thành các hàm tuyến tính $\ell_1, \dots, \ell_{n-m}$ của các biến $x_1, \dots, x_m$. Một hệ phương trình tham số của $\mathbb{B}$ có dạng

$$\begin{cases} x_1 & = & t_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_m & = & t_m \\ x_{m+1} & = & \ell_1(x_1, \dots, x_m) = \ell_1(t_1, \dots t_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & = & \ell_{n-m}(x_1, \dots, x_m) = \ell_{n-m}(t_1, \dots, t_m), \end{cases}$$

trong đó $\ell_1, \dots, \ell_{n-m}$ là các hàm tuyến tính nói trên.

Ví dụ 2.8. Cho đường thẳng d với phương trình tham số

$$x_i = a_i t + b_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

trong đó các a_i không đồng thời bằng 0. Khi đó, hệ $(n-1)$ phương trình của đường thẳng d có thể viết dưới dạng

$$\frac{x_1 - b_1}{x_1} = \frac{x_2 - b_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n - b_n}{a_n},$$

ở đây ta quy ước rằng nếu $a_i = 0$ thì $x_i - b_i = 0$.

3 Ánh xạ affine

Định nghĩa 3.1. Ánh xạ $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ được gọi là một *ánh xạ affine* nếu có một ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ sao cho

$$\overrightarrow{F(M)\,F(N)} = f\left(\overrightarrow{MN}\right),$$

với mọi $M, N \in \mathbb{A}$. Khi đó ta nói ánh xạ affine F liên kết với ánh xạ tuyến tính f.

Mệnh đề 3.2. *Nếu F là một ánh xạ affine thì nó liên kết với một ánh xạ tuyến tính duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử F liên kết với các ánh xạ tuyến tính $f_1, f_2 : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$. Ta có

$$f_1\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{F(M)\,F(N)} = f_2\left(\overrightarrow{MN}\right),$$

với mọi $M, N \in \mathbb{A}$. Cố định một điểm $M \in \mathbb{A}$. Khi đó ánh xạ $\mathbb{A} \to \mathbb{V}$, $\mathbb{N} \mapsto \overrightarrow{MN}$ là một song ánh. Vì thế $f_1 = f_2$. □

Mệnh đề 3.3. *Với mỗi ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ và cặp điểm $O \in \mathbb{A}$, $O' \in \mathbb{A}'$, tồn tại duy nhất ánh xạ affine $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ liên kết với f và có tính chất $F(O) = O'$.*

Chứng minh. *Sự tồn tại của F:* Với mỗi $M \in \mathbb{A}$, ta đặt $F(M) = M'$ là điểm được xác định duy nhất bởi hệ thức $\overrightarrow{O'M'} = f\left(\overrightarrow{OM}\right)$. Khi đó, với mọi $M, N \in \mathbb{A}$ ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F(M)F(N)} &= \overrightarrow{F(M)F(O)} + \overrightarrow{F(O)F(N)} = -\overrightarrow{F(O)F(M)} + \overrightarrow{F(O)F(N)} \\
&= -\overrightarrow{O'M'} + \overrightarrow{O'N'} = -f\left(\overrightarrow{OM}\right) + f\left(\overrightarrow{ON}\right) \\
&= f\left(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\right) = f\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}\right) = f\left(\overrightarrow{MN}\right).
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ F là ánh xạ affine liên kết với f và $F(O) = O'$.

Tính duy nhất của F: Giả sử F' cũng là một ánh xạ affine liên kết với f và thỏa mãn $F'(O) = O'$. Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F'(O)F'(M)} &= f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{F(O)F(M)}, \\
\overrightarrow{O'F'(M)} &= \overrightarrow{O'F(M)},
\end{aligned}$$

với mọi $M \in \mathbb{A}$. Từ đó $F'(M) = F(M)$, với mọi $M \in \mathbb{A}$. Tức là $F' = F$. □

Bài tập sau đây đưa ra một phương pháp khác để nhận biết ánh xạ affine mà không cần biết ánh xạ tuyến tính liên kết với nó.

Bài tập 3.4. Chứng minh rằng ánh xạ $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ là affine nếu và chỉ nếu F chuyển tâm tỉ cự của mọi hệ điểm $(M_i)_{i\in I}$ của $\mathbb{A}$ với các hệ số $(\lambda_i)_{i\in I}$ thành tâm tỉ cự của hệ $(F(M_i))_{i\in I}$ cũng với các hệ số ấy.

Mệnh đề 3.5. *(Tính hàm tử của tương ứng ánh xạ tuyến tính - ánh xạ affine)*

(i) $id_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *là ánh xạ affine liên kết với ánh xạ tuyến tính* $id_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$.

(ii) Nếu $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, $F' : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ *là các ánh xạ affine liên kết với ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, $f' : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$, *thì* $F'F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}''$ *là ánh xạ affine liên kết với ánh xạ tuyến tính* $f'f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}''$.

Chứng minh. Với mọi $M, N \in \mathbb{A}$ ta có

(i) $\overrightarrow{id_{\mathbb{A}}(M)id_{\mathbb{A}}(N)} = \overrightarrow{MN} = id_{\mathbb{V}}\left(\overrightarrow{MN}\right)$,

(ii) $\overrightarrow{F'F(M)F'F(N)} = f'\left(\overrightarrow{F(M)F(N)}\right) = f'f\left(\overrightarrow{MN}\right)$.

□

Định nghĩa 3.6. Ánh xạ affine $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ được gọi là một *đơn cấu* (tương ứng: *toàn cấu*, *đẳng cấu*) affine nếu F là một *đơn ánh* (tương ứng: *toàn ánh*, *song ánh*). Nếu có một đẳng cấu affine $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, thì ta nói $\mathbb{A}$ *đẳng cấu affine* với $\mathbb{A}'$ và viết $A \cong A'$.

Mệnh đề 3.7. *Ánh xạ affine* $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ *là một đơn cấu (tương ứng: toàn cấu, đẳng cấu) nếu và chỉ nếu ánh xạ tuyến tính* f *liên kết với* F *là một đơn cấu (tương ứng: toàn cấu, đẳng cấu).*

Chứng minh. Lấy $\emptyset \in \mathbb{A}$, và đặt $O' = F(O) \in \mathbb{A}'$. Ta có

$$\overrightarrow{O'F(M)} = f\left(\overrightarrow{OM}\right).$$

Kết luận của mệnh đề được suy từ chỗ các tương ứng sau đây đều là các song ánh:

$$\mathbb{A} \to \mathbb{V}, M \mapsto \overrightarrow{OM},$$
$$\mathbb{A}' \to \mathbb{V}', M' \mapsto \overrightarrow{O'M'}.$$

□

Hệ quả 3.8. *Hai không gian affine hữu hạn chiều đẳng cấu với nhau nếu và chỉ nếu chúng có cùng số chiều.*

Chúng tôi đề nghị độc giả tự chứng minh mệnh đề sau đây như một bài tập.

Mệnh đề 3.9. $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ *là một đẳng cấu affine nếu và chỉ nếu nó có ánh xạ ngược* $F' : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ *cũng là một đẳng cấu affine.*

Mệnh đề 3.10. *Qua một ánh xạ affine, ảnh của mỗi phẳng là một phẳng, nghịch ảnh của mỗi phẳng cũng là một phẳng nếu nghịch ảnh này khác rỗng.*

Chứng minh. Giả sử ánh xạ affine $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ liên kết với ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$. Giả sử $\mathbb{B}$ là một phẳng trong $\mathbb{A}$ với không gian véctơ chỉ phương $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. Khi đó $F(\mathbb{B})$ là một phẳng trong $\mathbb{A}'$ với không gian chỉ phương $f(\mathbb{W})$. Thật vậy, lấy $M \in \mathbb{B}$ và đặt $M' = F(M)$, ta có

$$\mathbb{B} = \left\{ N \in \mathbb{A} | \ \overrightarrow{MN} \in \mathbb{W} \right\},$$
$$F(\mathbb{B}) = \left\{ F(N) | \ \overrightarrow{MN} \in \mathbb{W} \right\} = \left\{ N' \in \mathbb{A}' | \ \overrightarrow{M'N'} \in f(\mathbb{W}) \right\}.$$

Nếu $\mathbb{B}'$ là một phẳng trong $\mathbb{A}'$ với không gian véctơ chỉ phương $\mathbb{W}' \subset \mathbb{V}'$ và $F^{-1}(\mathbb{B}') \neq \emptyset$, thì $F^{-1}(\mathbb{B}')$ là một phẳng trong $\mathbb{A}$ với không gian chỉ phương $f^{-1}(\mathbb{W}')$. Thật vậy, chọn $M' \in \mathbb{B}'$ và $M \in F^{-1}(M')$, ta có

$$F^{-1}(\mathbb{B}') = \left\{ N \in \mathbb{A} | \ \overrightarrow{M'F(N)} \in \mathbb{W}' \right\} = \left\{ N \in \mathbb{A} | \ \overrightarrow{MN} \in f^{-1}(\mathbb{W}') \right\}.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Tiếp theo, ta tìm biểu thức toạ độ của ánh xạ affine.

Giả sử $(O, e_1, \ldots, e_n)$ và $(O', e'_1, \ldots, e'_m)$ là các hệ toạ độ affine tương ứng của $\mathbb{A}$ và $\mathbb{A}'$. Giả sử M có toạ độ $(x_1, \ldots, x_n)$ và $F(M)$ có toạ độ $(x'_1, \ldots, x'_m)$ tương ứng trong hai hệ toạ độ nói trên.

Mệnh đề 3.11. *F là một ánh xạ affine nếu và chỉ nếu tồn tại một ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$(với các yếu tố $a_{ij} \in \mathbb{K}$) và các vô hướng $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ sao cho*

$$x'_i = \sum_{j=1} a_{ij}x_j + b_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Nói cách khác, F là một ánh xạ affine nếu và chỉ nếu các toạ độ affine của điểm $F(M)$ là một hàm tuyến tính (nói chung không thuần nhất) của các toạ độ affine của điểm M.

Chứng minh. Giả sử F là một ánh xạ affine liên kết với một ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$. Gọi $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận của f trong cặp cơ sở $(e_1, \ldots, e_n)$ của $\mathbb{V}$ và $(e'_1, \ldots, e'_m)$ của $\mathbb{V}'$. Đặt $\overrightarrow{O'F(O)} = \sum_{i=1}^m b_i e'_i$, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m x'_i e'_i &= \overrightarrow{O'F(M)} = \overrightarrow{O'F(O)} + \overrightarrow{F(O)F(M)}\\ &= \overrightarrow{O'F(O)} + f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \sum_{i=1}^m b_i e'_i + f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i\right) + \sum_{i=1}^m b_i e'_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i\right) e'_i.\end{aligned}$$

Đẳng thức này tương đương với m đẳng thức sau đây trên các toạ độ

$$x'_i = \sum_{j=1} a_{ij}x_j + b_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Ngược lại, giả sử các toạ độ $(x_1, \ldots, x_n)$ của M và $(x'_1, \ldots, x'_m)$ của $F(M)$ tương ứng trong các hệ toạ độ $(O, e_1, \ldots, e_n)$ và $(O', e'_1, \ldots, e'_m)$ ràng buộc nhau bởi hệ thức nói trên. Vì O có toạ độ $(0, ..., 0)$ trong hệ toạ độ $(O, e_1, \ldots, e_n)$, nên $F(O)$ có toạ độ $(b_1, \ldots, b_m)$ trong hệ toạ độ $(O', e'_1, \ldots, e'_m)$, tức là

$$\overrightarrow{O'F(O)} = \sum_{i=1}^m b_i e'_i.$$

Gọi $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận là $A = (a_{ij})_{m\times n}$ trong cặp cơ sở $(e_1, \dots, e_n)$ của $\mathbb{V}$ và $(e'_1, \dots, e'_m)$ của $\mathbb{V}'$. Các hệ thức nói trên giữa $(x_1, \dots, x_n)$ và $(x'_1, \dots, x'_m)$ dẫn ta tới

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F(O)F(M)} &= \overrightarrow{O'F(M)} - \overrightarrow{O'F(O)}\\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i\right)e'_i - \sum_{i=1}^{m} b_i e'_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)e'_i\\ &= f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = f\left(\overrightarrow{OM}\right),\end{aligned}$$

với mọi $M \in \mathbb{A}$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F(M)F(N)} &= \overrightarrow{F(O)F(N)} - \overrightarrow{F(O)F(M)}\\ &= f\left(\overrightarrow{ON}\right) - f\left(\overrightarrow{OM}\right) = f\left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right) = f\left(\overrightarrow{MN}\right),\end{aligned}$$

với mọi $M, N \in \mathbb{A}$. Đẳng thức trên chứng tỏ rằng F là một ánh xạ affine (liên kết với ánh xạ tuyến tính f). $\square$

Gọi $Aff(\mathbb{A})$ là tập hợp tất cả các đẳng cấu affine của $\mathbb{A}$. Hợp này lập thành một nhóm đối với phép nhân là phép hợp thành các ánh xạ. Rõ ràng nếu $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'$ thì $Aff(\mathbb{A}) \cong Aff(\mathbb{A}')$. Thật vậy, nếu $h : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ là một đẳng cấu affine, thì $Aff(\mathbb{A}) \to Aff(\mathbb{A}')$, $\varphi \mapsto h\varphi h^{-1}$ là một đẳng cấu nhóm.

Ta sẽ mô tả nhóm $Aff(\mathbb{A})$ cụ thể hơn bằng cách sau đây.

Gọi $Aff(n, \mathbb{K})$ là nhóm con của nhóm $GL(n+1, \mathbb{K})$ gồm tất cả các ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} & & & | & \\ & A & & | & b\\ - & - & - & | & -\\ 0 & \cdots & 0 & | & 1\end{pmatrix},$$

trong đó $A \in GL(n, \mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$.

Kết quả sau đây là một cách diễn đạt khác của Mệnh đề 3.11.

Định lý 3.12. *Nếu không gian Affine $\mathbb{A}$ có chiều bằng n, thì ta có đẳng cấu nhóm*

$$Aff(\mathbb{A}) \cong Aff(n, \mathbb{K}).$$

Chứng minh. Cố định một hệ toạ độ affine $(O, e_1, \ldots, e_n)$ của $\mathbb{A}$. Theo Mệnh đề 3.11, mỗi phần tử $F \in Aff(\mathbb{A})$ được đặt tương ứng với một cặp (b, A), trong đó $b \in \mathbb{K}^n$, $A \in GL(n, \mathbb{K})$, theo nghĩa sau đây: Nếu x là véctơ cột toạ độ của M thì $Ax + b$ là véctơ cột toạ độ của $F(M)$.

Giả sử $F' \in Aff(\mathbb{A})$ được đặt tương ứng với cặp (b', A'). Dễ kiểm tra lại rằng dẳng cấu affine $F'F$ được đặt tương ứng với cặp $(b' + A'b, A'A)$.

Mặt khác, hiển nhiên ta có

$$\begin{pmatrix} & & & | & \\ & A' & & | & b' \\ - & - & - & | & - \\ 0 & \cdots & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & | & \\ & A & & | & b \\ - & - & - & | & - \\ 0 & \cdots & 0 & | & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & | & \\ & A'A & & | & b' + A'b \\ - & - & - & | & - \\ 0 & \cdots & 0 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Như thế, tương ứng

$$F \equiv (b, A) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} & & & | & \\ & A & & | & b \\ - & - & - & | & - \\ 0 & \cdots & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

là một đẳng cấu nhóm $Aff(\mathbb{A}) \cong Aff(n, \mathbb{K})$. □

Ví dụ 3.13. (Các phép biến đổi affine đơn giản)

(a) *Phép tịnh tiến:* Cho $\mathbb{A}$ là một không gian affine liên kết với $\mathbb{V}$. Với mọi $v \in \mathbb{V}$, ta ký hiệu bởi $T_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ ánh xạ duy nhất xác định bởi hệ thức

$$\overrightarrow{MT_v(M)} = v,$$

với mọi $M \in \mathbb{A}$. Đó là một phép biến đổi affine liên kết với ánh xạ đồng nhất $id_{\mathbb{V}}$ trên $\mathbb{V}$. Hợp thành của các phép tịnh tiến bởi các véctơ v và w là phép tịnh tiến bởi véctơ $v + w$. Do đó, tập hợp tất cả các phép tịnh tiến của $\mathbb{A}$ lập nên một nhóm con $T(\mathbb{A})$ của nhóm $Aff(\mathbb{A})$.

(b) *Phép vị tự:* Cho O là một điểm cố định trong $\mathbb{A}$. Phép vị tự tâm O với hệ số $\lambda \in \mathbb{K}$ là ánh xạ duy nhất $H : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ xác định bởi hệ thức

$$\overrightarrow{OH(M)} = \lambda \overrightarrow{OM},$$

với mọi $M \in \mathbb{A}$. Đó là một phép biến đổi affine liên kết với ánh xạ tuyến tính $\lambda id_{\mathbb{V}}$ trên $\mathbb{V}$.

4 Không gian Euclid

Trong tiết này, ta sẽ chỉ xét các không gian affine thực (tức là các không gian affine trên trường số thực).

Định nghĩa 4.1. Mỗi không gian affine $\mathbb{E}$ liên kết với một không gian véctơ Euclid được gọi là một *không gian Euclid*.

Không gian Euclid n chiều thường được ký hiệu bởi $\mathbb{E}^n$.

Định nghĩa 4.2. *Khoảng cách* giữa hai điểm M và N của không gian Euclid $\mathbb{E}$ là số thực sau đây

$$d(M, N) = \left|\overrightarrow{MN}\right|,$$

trong đó $\left|\overrightarrow{MN}\right|$ là độ dài của véctơ $\overrightarrow{MN}$ trong không gian véctơ Euclid liên kết với $\mathbb{E}$.

Từ các tính chất của tích vô hướng trong không gian véctơ Euclid, ta trực tiếp suy ra các tính chất sau đây của khoảng cách trong không gian Euclid:

(d1) Tính xác định dương: $d(M, N) \geqslant 0$, $\forall M, N \in \mathbb{E}$,
$d(M, N) = 0 \Longleftrightarrow M = N$,

(d2) Tính đối xứng: $d(M, N) = d(N, M)$, $\forall M, N \in \mathbb{E}$,

(d3) Bất đẳng thức tam giác: $d(M, N)+d(N, P) \geqslant d(M, P)$, $\forall M, N, P \in \mathbb{E}$.

Định nghĩa 4.3. Cho $\mathbb{E}^n$ là một không gian Euclid liên kết với không gian véctơ Euclid $\mathbb{V}$. Hệ toạ độ affine $(O, e_1, \dots, e_n)$ của $\mathbb{E}^n$ được gọi là một *hệ toạ độ Descartes* nếu $(e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian véctơ Euclid $\mathbb{V}$.

Mệnh đề 4.4. *Nếu M và N có toạ độ tương ứng là $(x_1, \dots, x_n)$ và $(y_1, \dots, y_n)$ trong hệ toạ độ Descartes $(O, e_1, \dots, e_n)$ thì*

$$d(M, N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_j)^2}.$$

Chứng minh. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{ON} \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_j e_i - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (y_j - x_i)\, e_i.\end{aligned}$$

Vì $(e_1, \ldots, e_n)$ là một cơ sở trực chuẩn, cho nên

$$d(M,N) = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_j)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_j)^2}.$$

$\square$

Giả sử $(O, e_1, \ldots, e_n)$ và $(O', e'_1, \ldots, e'_n)$ là các hệ toạ độ Descartes của $\mathbb{E}^n$. Gọi $C = (c_{ij})_{n\times n}$ là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $(e_1, \ldots, e_n)$ sang cơ sở trực chuẩn $(e'_1, \ldots, e'_n)$. Như thế, C là một ma trận trực giao.

Giả sử điểm M có toạ độ là $(x_1, \ldots, x_n)$ và $(x'_1, \ldots, x'_n)$ lần lượt trong các hệ toạ độ $(O, e_1, \ldots, e_n)$ và $(O', e'_1, \ldots, e'_n)$. Thêm vào đó, gọi $(b_1, \ldots, b_n)$ là toạ độ của O' trong hệ toạ độ $(O, e_1, \ldots, e_n)$. Khi đó, cũng như trong trường hợp không gian affine, ta có

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j + b_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Đó là công thức *biến đổi toạ độ* giữa hai hệ toạ độ Descartes.

Ngược lại, mỗi công thức như thế, trong đó $C = (c_{ij})_{n\times n}$là một ma trận trực giao, là công thức biến đổi toạ độ giữa hai hệ toạ độ Descartes nào đó.

Chú ý rằng, vì C là một ma trận trực giao, cho nên $\det C = \pm 1$.

Định nghĩa 4.5. Ta nói hai hệ toạ độ Descartes $(O, e_1, \ldots, e_n)$ và $(O', e'_1, \ldots, e'_n)$ của không gian Euclid $\mathbb{E}^n$ là *cùng hướng* hay *trái hướng* tuỳ theo $\det C$ bằng $(+1)$ hay (-1).

Ví dụ 4.6. Ta xét mặt phẳng trong hình học sơ cấp như một không gian Euclid 2 chiều (với cấu trúc affine và tích vô hướng) chính tắc.

Theo Mệnh đề 2.17 Chương 5, công thức biến đổi toạ độ từ một hệ toạ độ Descartes (O, e_1, e_2)sang một hệ toạ độ Descartes bất kỳ khác (O', e'_1, e'_2) có một trong hai dạng sau đây:

$$(1)\ \begin{cases} x &= x'\cos\omega - y'\sin\omega + b \\ y &= x'\sin\omega + y'\cos\omega + c, \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x &= x'\cos\omega + y'\sin\omega + b \\ y &= x'\sin\omega - y'\cos\omega + c. \end{cases}$$

Công thức (1) biến đổi toạ độ giữa hai hệ toạ độ cùng hướng, còn công thức (2) biến đổi toạ độ giữa hai hệ toạ độ trái hướng.

Khi $b = c = 0$, công thức (1) xác định phép quay hệ toạ độ quanh điểm O một góc ω, còn công thức (2) xác định phép đối xứng qua một đường thẳng đi qua O.

Với các giá trị thực bất kỳ của b và c, công thức (1) xác định tích của một phép quay với một phép tịnh tiến, còn công thức (2) xác định tích của một phép đối xứng qua một đường thẳng với một phép tịnh tiến.

5 Phẳng trong không gian Euclid

Hai khái niệm quan trọng mà ta bàn tới trong tiết này là sự vuông góc giữa các phẳng trong một không gian Euclid và khoảng cách giữa chúng.

Giả sử các phẳng $\mathbb{L}$ và $\mathbb{P}$ trong không gian Euclid $\mathbb{E}$có các không gian chỉ phương tương ứng là Λ và Π. Đó là các không gian con của không gian véctơ Euclid $\mathbb{V}$ liên kết với $\mathbb{E}$.

Định nghĩa 5.1. Ta nói $\mathbb{L}$ *vuông góc* (hay *trực giao*) với $\mathbb{P}$, và viết $\mathbb{L} \perp \mathbb{P}$, nếu các không gian chỉ phương của chúng vuông góc với nhau, tức là nếu $\Lambda \perp \Pi$.

Ví dụ 5.2. Cho hai đường thẳng $\mathbb{L}$ và $\mathbb{L}'$ trong $\mathbb{E}^n$ với phương trình tham số trong một hệ toạ độ Descartes nào đó tương ứng là:

$$\begin{array}{ll} (\mathbb{L}) & x_i = a_i t + b_i \quad (i = 1, \ldots, n), \\ (\mathbb{L}') & x_i = a_i' t + b_i' \quad (i = 1, \ldots, n). \end{array}$$

Như vậy, không gian chỉ phương của $\mathbb{L}$ và $\mathbb{L}'$ tương ứng được sinh bởi các véctơ cột $(a_1, \ldots, a_n)^t$ và $(a_1', \ldots, a_n')^t$. Do đó, $\mathbb{L}$ vuông góc với $\mathbb{L}'$ khi và chỉ khi

$$a_1 a_1' + \cdots + a_n a_n' = 0.$$

Ví dụ 5.3. Siêu phẳng $\mathbb{P}$ được cho bởi phương trình sau trong một hệ toạ độ Descartes nào đó

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b = 0.$$

Đặt $v = (a_1, \ldots, a_n)^t \in \mathbb{V}$. Khi đó, không gian chỉ phương của $\mathbb{P}$ là

$$\Pi = \{u \in \mathbb{V} |\ u \perp v\}.$$

Thật vậy, cố định một điểm $M(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}$. Khi đó $N(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{P}$ khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^n a_i (y_i - x_i) = 0$, tức là khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} \perp v$.

Véctơ $v = (a_1, \ldots, a_n)^t$ được gọi là một *véctơ pháp tuyến* của siêu phẳng $\mathbb{P}$. Nếu siêu phẳng $\mathbb{P}'$ được cho trong cùng hệ toạ độ Descartes nói trên bởi phương trình

$$a_1' x_1 + \cdots + a_n' x_n + b' = 0,$$

thì $\mathbb{P} \perp \mathbb{P}'$ khi và chỉ khi $v \perp v'$, trong đó $v' = (a'_1, \ldots, a'_n)^t$. Thật vậy, không gian véctơ chỉ phương của $\mathbb{P}'$ là

$$\Pi' = \left\{u \in \mathbb{V} |\ u \perp v'\right\}.$$

Ta có $\mathbb{P} \perp \mathbb{P}' \Longleftrightarrow \Pi \perp \Pi' \Longleftrightarrow v \perp v'$.

Bây giờ ta định nghĩa khoảng cách giữa hai phẳng trong không gian Euclid. Trong định nghĩa sau đây, có thể thay các phẳng bằng các tập bất kỳ trong không gian này.

Định nghĩa 5.4. *Khoảng cách* giữa hai phẳng $\mathbb{L}$ và $\mathbb{P}$ trong không gian Euclid $\mathbb{E}$ là số thực không âm sau đây:

$$d\left(\mathbb{L}, \mathbb{P}\right) = \inf_{M \in \mathbb{L},\ N \in \mathbb{P}} d(M, N).$$

Nói riêng, khi $\mathbb{L}$ là một 0-phẳng (tập chỉ gồm một điểm), ta có định nghĩa khoảng cách từ một điểm tới một phẳng.

Mệnh đề sau đây chỉ ra rằng, cũng như trong hình học sơ cấp, khoảng cách giữa hai phẳng chính là độ dài đường vuông góc chung của chúng.

Mệnh đề 5.5. *Giả sử các phẳng $\mathbb{L}$ và $\mathbb{P}$ trong không gian Euclid $\mathbb{E}$ có các không gian chỉ phương tương ứng là Λ và Π. Nếu có các điểm $I \in \mathbb{L}$, $J \in \mathbb{P}$ với $\overrightarrow{IJ} \perp (\Lambda + \Pi)$, thì $d(\mathbb{L}, \mathbb{P}) = d(I, J)$.*

Chứng minh. Với mọi $M \in \mathbb{L}$, $N \in \mathbb{P}$, theo hệ thức Charles, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN}.$$

Từ đó, do $\overrightarrow{IJ} \perp \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}\right)$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{MN}\right|^2 &= \left\langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN}, \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN} \right\rangle \\
&= \left|\overrightarrow{IJ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MN + JN}\right|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN} \right\rangle \\
&= \left|\overrightarrow{IJ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MN + JN}\right|^2.
\end{aligned}$$

Do đó $\left|\overrightarrow{MN}\right|^2 \geqslant \left|\overrightarrow{IJ}\right|^2$. Kết quả là ta có

$$d\left(\mathbb{L}, \mathbb{P}\right) = \inf_{M \in \mathbb{L},\ N \in \mathbb{P}} d(M, N) = d(I, J).$$

□

Để áp dụng mệnh đề trên ta cần biết cách dựng (một) đường vuông góc chung của hai phẳng. Phép dựng nói trong mệnh đề sau đây chính là tổng quát hoá của phép dựng đường vuông góc chung của hai đường thẳng trong không gian 3 chiều cổ điển.

Xét phân tích trực giao $\mathbb{V} = (\Lambda + \Pi) \oplus (\Lambda + \Pi)^{\perp}$. Gọi

$$pr^{\perp} : \mathbb{V} \to (\Lambda + \Pi)^{\perp}$$

là phép chiếu $\mathbb{V}$ lên thành phần thứ hai (theo phương của thành phần thứ nhất) trong phân tích trên. Mệnh đề sau đây trình bày một cách tổng quát tính khoảng cách giữa hai phẳng.

Mệnh đề 5.6. *Giả sử các phẳng $\mathbb{L}$ và $\mathbb{P}$ trong không gian Euclid $\mathbb{E}$ có các không gian chỉ phương tương ứng là Λ và Π. Khi đó, với mọi $M \in \mathbb{L}$, $N \in \mathbb{P}$, ta có*

$$d\left(\mathbb{L}, \mathbb{P}\right) = \left| pr^{\perp}(\overrightarrow{MN}) \right|.$$

Chứng minh. Gọi $pr : \mathbb{V} \to (\Lambda + \Pi)$ là phép chiếu $\mathbb{V}$ lên thành phần thứ nhất (theo phương của thành phần thứ hai) trong phân tích trực giao nói trên. Giả sử

$$pr\left(\overrightarrow{MN}\right) = x + y, textvi x \in \Lambda,\ y \in \Pi.$$

Tồn tại duy nhất $I \in \mathbb{L}$ và $J \in \mathbb{P}$ sao cho $\overrightarrow{MI} = x$ và $\overrightarrow{JN} = y$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{MN} - (x + y) \\ &= \overrightarrow{MN} - pr\left(\overrightarrow{MN}\right) = pr^{\perp}\left(\overrightarrow{MN}\right).\end{aligned}$$

Vì thế $\overrightarrow{IJ} \perp (\Lambda + \Pi)$. Áp dụng Mệnh đề 5.5, ta có

$$d\left(\mathbb{L}, \mathbb{P}\right) = d(I, J) = \left|\overrightarrow{IJ}\right| = \left| pr^{\perp}\left(\overrightarrow{MN}\right) \right|.$$

□

Ví dụ 5.7. Giả sử trong một hệ toạ độ Descartes nào đó của không gian Euclid $\mathbb{E}$, điểm A có toạ độ $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$, còn siêu phẳng $\mathbb{P}$ có phương trình

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b = 0.$$

Khi đó, khoảng cách từ A tới $\mathbb{P}$ được tính bằng công thức

$$d\,(A,\mathbb{P}) = \frac{\left|a_1x_1^0 + \cdots + a_nx_n^0 + b\right|}{a_1^2 + \cdots a_n^2}.$$

Thật vậy, A là một 0-phẳng được định hướng bởi không gian 0. Gọi Π là không gian chỉ phương của $\mathbb{P}$ và $\nu = (a_1, \ldots, a_n)^t$, ta có

$$\mathbb{V} = \Pi \oplus \mathcal{L}(\nu).$$

Như thế $\mathcal{L}(\nu) = \Pi^\perp = (0 + \Pi)^\perp$.

Lấy một điểm tuỳ ý $J \in \mathbb{P}$ và gọi toạ độ của nó (trong hệ toạ độ Descartes đã chọn) là $(x_1', \ldots, x_n')$. Đặt $\mu = \frac{\nu}{|\nu|}$, ta dễ thấy rằng

$$\left(\overrightarrow{AJ} - \left\langle \overrightarrow{AJ}, \mu \right\rangle \mu\right) \perp \mu.$$

Do đó, ta thu được

$$\begin{aligned} pr\left(\overrightarrow{AJ}\right) &= \overrightarrow{AJ} - \left\langle \overrightarrow{AJ}, \mu \right\rangle \mu, \\ pr^\perp(\overrightarrow{AJ}) &= \left\langle \overrightarrow{AJ}, \mu \right\rangle \mu. \end{aligned}$$

Theo Mệnh đề 5.6, ta có

$$\begin{aligned} d\,(A,\mathbb{P}) &= \left|pr^\perp\left(\overrightarrow{AJ}\right)\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{AJ}, \mu \right\rangle \mu\right| \\ &= \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{AJ}, \nu \right\rangle\right|}{|\nu|} = \frac{\left|\sum_{i=1}^n a_i(x_i' - x_i^0)\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}} \\ &= \frac{\left|\sum_{i=1}^n a_i x_i^0\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}. \end{aligned}$$

Bây giờ ta chuyển qua việc đo góc giữa một số cặp phẳng đặc biệt. Nhấn mạnh một sự kiện quan trọng là nói chung ta không định nghĩa được góc giữa hai phẳng tuỳ ý.

(1) *Góc giữa hai đường thẳng:*

Giả sử $\mathbb{E}$ là một không gian Euclid liên kết với không gian véctơ Euclid $\mathbb{V}$. Cho hai đường thẳng $\mathbb{L}$ và $\mathbb{L}'$ trong $\mathbb{E}$ được định hướng bởi các không gian vectơ con một chiều ℓ và ℓ' của $\mathbb{V}$. Lấy các véctơ khác không $u \in \ell$ và $u' \in \ell'$. Khi đó *góc* θ *giữa* $\mathbb{L}$ *và* $\mathbb{L}'$ được xác định duy nhất bởi các điều kiện sau đây

$$\cos\theta = \frac{|\langle u, u'\rangle|}{|u||u'|}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

(2) *Góc giữa hai siêu phẳng:*

Góc giữa hai siêu phẳng $\mathbb{P}$ *và* $\mathbb{P}'$ *trong không gian Euclid* $\mathbb{E}$ là góc giữa các đường thẳng $\mathbb{L}$ và $\mathbb{L}'$ trực giao theo thứ tự với $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}'$. Gọi ν và ν' là các véctơ pháp tuyến của $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}'$. Như thế, ν và ν' sinh ra các không gian véctơ chỉ phương tương ứng của $\mathbb{L}$ và $\mathbb{L}'$. Vì vậy, góc θ giữa $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}'$ được xác định duy nhất bởi các điều kiện sau đây

$$\cos\theta = \frac{|\langle \nu, \nu'\rangle|}{|\nu||\nu'|}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

(3) *Góc giữa đường thẳng và siêu phẳng:*

Góc giữa đường thẳng $\mathbb{L}$ *và siêu phẳng* $\mathbb{P}$ trong không gian Euclid $\mathbb{E}$ là góc giữa $\mathbb{L}$ và hình chiếu vuông góc của nó lên $\mathbb{P}$. Chọn u là một véctơ sinh ra không gian chỉ phương của $\mathbb{L}$ và ν là một véctơ pháp tuyến của $\mathbb{P}$. Khi đó, từ định nghĩa nói trên, góc θ giữa $\mathbb{L}$ và $\mathbb{P}$ được xác định duy nhất bởi các điều kiện sau đây

$$\sin\theta = \frac{|\langle u, \nu\rangle|}{|u||\nu|}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Bài tập

(a) Xác định góc giữa hai đường thẳng $\mathbb{L}$ và $\mathbb{L}'$ thông qua hệ phương trình tham số của chúng trong một hệ toạ độ Descartes.

(b) Xác định góc giữa hai siêu phẳng $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}'$ thông qua phương trình (tổng quát) của chúng trong một hệ toạ độ Descartes.

(c) Xác định góc giữa đường thẳng $\mathbb{L}$ và siêu phẳng $\mathbb{P}$ thông qua hệ phương trình tham số của $\mathbb{L}$ và phương trình (tổng quát) của $\mathbb{P}$ trong một hệ toạ độ Descartes.

6 Ánh xạ trực giao (ánh xạ đẳng cự)

Định nghĩa 6.1. Ánh xạ $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ giữa các không gian Euclid được gọi là một *ánh xạ trực giao* (hay *ánh xạ đẳng cự*) nếu nó là một ánh xạ affine và ánh xạ tuyến tính liên kết với nó $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ là một ánh xạ trực giao (giữa các không gian véctơ Euclid).

Mỗi ánh xạ trực giao từ $\mathbb{E}$ vào chính nó được gọi là một phép *biến đổi trực giao* (hay *biến đổi đẳng cự*) của $\mathbb{E}$.

Khẳng định sau đây được suy ngay từ Mệnh đề 3.7.

Mệnh đề 6.2. *Mỗi ánh xạ trực giao đều là một đơn ánh. Nếu* $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{E}' < \infty$*, thì mỗi ánh xạ trực giao* $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *đều là một song ánh.*

Nhận xét rằng tích của hai ánh xạ trực giao lại là một ánh xạ trực giao; Ánh xạ ngược của một song ánh trực giao cũng là một ánh xạ trực giao. Vì thế, nếu gọi $O(\mathbb{E})$ là tập hợp tất cả các phép biến đổi trực giao của không gian Euclid $\mathbb{E}$, ta có khẳng định sau đây.

Mệnh đề 6.3. *Nếu* $\mathbb{E}$ *là một không gian Euclid, thì* $O(\mathbb{E})$ *lập thành một nhóm đối với phép hợp thành các ánh xạ.*

Nó được gọi là *nhóm biến đổi trực giao* (hay *nhóm biến đổi đẳng cự*) của không gian Euclid $\mathbb{E}$.

Giả sử $(O, e_1, \ldots, e_n)$ là một hệ toạ độ Descartes của $\mathbb{E}^n$. Giả sử phép biến dổi trực giao $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ biến điểm $M\,(x_1, \ldots, x_n)$thành điểm $F(M)\,(x'_1, \ldots, x'_n)$. Khi đó, cũng như trong trường hợp ánh xạ affine, ta có:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + b_i, \quad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

trong đó $C = (c_{ij})_{n \times n}$ là ma trận trực giao của ánh xạ trực giao f (liên kết với F) trong cơ sở $(e_1, \ldots, e_n)$. Đó là *công thức biến đổi trực giao.*

Ta nói F là một *phép dời hình* (hay *phép dời hình loại 1*) nếu $\det C = 1$, và gọi F là một *phép phản dời hình* (hay *phép dời hình loại 2*) nếu $\det C = -1$. Nói cách khác, F là một phép dời hình hay phản dời hình tuỳ theo ánh xạ trực giao liên kết với nó $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$

bảo toàn hướng hay đổi hướng của không gian véctơ liên kết $\mathbb{V}$. Do đó, định nghĩa nói trên không phụ thuộc hệ toạ độ đã chọn.

Cấu trúc của nhóm biến đổi trực giao $O(\mathbb{E})$ được nêu rõ trong định lý sau đây.

Gọi $O(n)\tilde{\times}\mathbb{R}^n$ là nhóm con của nhóm tuyến tính tổng quát $GL(n+1,\mathbb{R})$ gồm tất cả các ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} & & & | & \\ & C & & | & b \\ - & - & - & | & - \\ 0 & \cdots & 0 & | & 1 \end{pmatrix},$$

trong đó $C \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$. Lặp lại chứng minh của Định lý 3.12, ta có

Định lý 6.4. *Nếu không gian Euclid $\mathbb{E}$ có chiều bằng n, thì ta có đẳng cấu nhóm*

$$O(\mathbb{E}) \cong O(n)\tilde{\times}\mathbb{R}^n.$$

Định lý sau đây giải thích vì sao ánh xạ trực giao còn có tên gọi là ánh xạ đẳng cự.

Định lý 6.5. *Ánh xạ $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ giữa các không gian Euclid là một ánh xạ trực giao nếu và chỉ nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa các điểm.*

Chứng minh. Giả sử $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ là một ánh xạ trực giao liên kết với ánh xạ trực giao $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ giữa các không gian véctơ Euclid tương ứng. Với mọi $M, N \in \mathbb{E}$, ta có

$$\left\langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN} \right\rangle = \left\langle f\left(\overrightarrow{MN}\right), f\left(\overrightarrow{MN}\right) \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{F(M)F(N)}, \overrightarrow{F(M)F(N)} \right\rangle.$$

Điều này tương đương với đẳng thức sau đây

$$\begin{aligned} d(M,N) = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN} \right\rangle} &= \sqrt{\left\langle \overrightarrow{F(M)F(N)}, \overrightarrow{F(M)F(N)} \right\rangle} \\ &= d(F(M), F(N)), \end{aligned}$$

với mọi $M, N \in \mathbb{E}$. Vậy, F là một ánh xạ bảo toàn khoảng cách giữa các điểm.

Ngược lại, giả sử $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ là một ánh xạ bảo toàn khoảng cách giữa các điểm. (Chú ý rằng ta không giả sử F là một ánh xạ affine.) Chọn một điểm $O \in \mathbb{E}$, và đặt $O' = F(O)$. Tồn tại duy nhất ánh xạ $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ được xác định bởi điều kiện

$$f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{O'F(M)},$$

với mọi $M \in \mathbb{E}$. Ta sẽ chứng minh rằng f bảo toàn tích vô hướng. Từ đó suy ra rằng nó là một ánh xạ tuyến tính và trực giao. (Xem Mệnh đề 2.2, Chương 5.)

Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$, tồn tại duy nhất các điểm $M, N \in \mathbb{E}$ sao cho$\overrightarrow{OM} = \alpha$, $\overrightarrow{ON} = \beta$. Ta có

$$\begin{aligned} d(M,N)^2 = \left|\overrightarrow{MN}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{ON}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM}\right|^2 - 2\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right\rangle \\ &= d(O,N)^2 + d(O,M)^2 - 2\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right\rangle \end{aligned}$$

Tương tự

$$d(F(M),F(N))^2 = d(O',F(N))^2 + d(O',F(M))^2 - 2\left\langle \overrightarrow{O'F(M)}, \overrightarrow{O'F(N)}\right\rangle.$$

Vì F bảo toàn khoảng cách, cho nên các đẳng thức trên kéo theo

$$\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{O'F(M)}, \overrightarrow{O'F(N)}\right\rangle.$$

Hay là

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle,$$

với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$. Do đó, theo Mệnh đề 2.2, Chương 5, $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ là một ánh xạ trực giao giữa các không gian véctơ. Dễ thử lại rằng, với mọi $M, N \in \mathbb{E}$, ta có

$$f\left(\overrightarrow{MN}\right) = f\left(\overrightarrow{ON}\right) - f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{O'F(N)} - \overrightarrow{O'F(M)} = \overrightarrow{F(M)F(N)}.$$

Đẳng thức này chứng tỏ F là ánh xạ trực giao liên kết với f. $\square$

7 Phân loại các đường bậc hai trong mặt phẳng $\mathbb{E}^2$

Định nghĩa 7.1. *Ellipse* là tập hợp tất cả các điểm trên mặt phẳng có tổng các khoảng cách từ đó đến 2 điểm cố định (trên mặt phẳng) bằng một số không đổi lớn hơn khoảng cách giữa 2 điểm ấy.

Hai điểm cố định được gọi là hai *tiêu điểm*, được ký hiệu là F_1, F_2. Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự.

Điểm M nằm trên ellipse nếu và chỉ nếu

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (a > c).$$

Chọn hệ toạ độ Decartes Oxy sao cho F_1 có toạ độ $(-c, 0)$, F_2 có toạ độ $(c, 0)$. Khi đó phương trình chính tắc của ellipse có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a^2 = b^2 + c^2).$$

Đường ellipse nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng. a được gọi là trục lớn, b được gọi là trục bé của ellipse.

Định nghĩa 7.2. *Hyperbol* là tập hợp tất cả các điểm trên mặt phẳng có giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ đó đến hai điểm cố định (trên mặt phẳng) bằng một hằng số bé hơn khoảng cách giữa hai điểm ấy.

Hai điểm cố định ấy được gọi là hai *tiêu điểm*, ký hiệu là F_1, F_2. Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ được gọi là *tiêu cự*.

Điểm M thuộc hyperbol nếu và chỉ nếu

$$|F_1M - F_2M| = 2a \quad (0 < a < c).$$

Chọn hệ tọa độ Descartes Oxy sao cho F_1 có tọa độ $(-c, 0)$, F_2 có tọa độ $(c, 0)$ thì phương trình chính tắc của hyperbol có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (b^2 = c^2 - a^2).$$

Hyperbol nhận các trục tọa độ làm các trục đối xứng, gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Trục Ox cắt hyperbol ở hai điểm $(-a, 0)$ và $(a, 0)$ nên được gọi là trục thực. Trái lại, trục Oy không cắt hyperbol nên được gọi là trục ảo.

Hyperbol có hai đường tiệm cận là $\dfrac{x}{a} \pm \dfrac{y}{b} = 0$.

Định nghĩa 7.3. *Parabol* là tập hợp tất cả các điểm trên mặt phẳng có khoảng cách từ đó đến một điểm cho trước bằng khoảng cách từ đó đến một đường thẳng cho trước, đường thẳng này không đi qua điểm đã cho.

Điểm cố định đã cho được gọi là *tiêu điểm*, ký hiệu là F. Còn đường thẳng đã cho được gọi là *đường chuẩn*, ký hiệu là Δ. Vậy M thuộc parabol nếu và chỉ nếu $FM = d(M, \Delta)$.

Chọn hệ tọa độ Descartes sao cho F có tọa độ $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ và đường chuẩn Δ đã cho có phương trình $x = -\frac{p}{2}$. Khi đó phương trình chính tắc của parabol có dạng

$$y^2 = 2px.$$

Số $p = d(F, \Delta)$ được gọi là tham số của parabol.

Parabol này nhận Ox làm trục đối xứng.

Bây giờ ta xét bài toán phân loại các *đường bậc hai*, tức là tập hợp G các điểm trên mặt phẳng ma các tọa độ của chúng trong một hệ tọa độ Descartes Oxy thỏa mãn phương trình

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

trong đó các số a_{11}, a_{12}, a_{22} không đồng thời bằng 0.

Xét ma trận của dạng toàn phương $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq, \quad (a_{21} = a_{12}).$$

Ma trận đối xứng A chéo hóa được, cụ thể là có ma trận trực giao C để cho

$$C^tAC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

trong đó λ_1, λ_2 là các giá trị riêng (thực) của A. Sau phép đổi biến

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

phương trình của G trong hệ tọa độ mới $Ox'y'$ trở thành

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + a_0 = 0.$$

Trường hợp I: $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Phương trình trên được viết lại thành

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2 + a_0' = 0.$$

Tịnh tiến hệ tọa độ Oxy đến hệ tọa độ $O'XY$, với

$$X = x' + \frac{a_1}{\lambda_1}, \quad Y = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2},$$

phương trình của đường bậc hai G trở thành

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a_0' = 0.$$

(1) $a_0 \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a_0' < 0$: G là một ellipse.

(2) $a_0 \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a_0' < 0$: G không chứa điểm nào. Ta nói G là một ellipse ảo.

(3) $a_0' \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: G là một hyperbol.

(4) $a_0' = 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: Phương trình trở thành

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0 \Longleftrightarrow \left(\sqrt{|\lambda_1|}X + \sqrt{|\lambda_1|}Y\right)\left(\sqrt{|\lambda_1|}X - \sqrt{|\lambda_2|}Y\right) = 0.$$

G là một cặp đường thẳng thực cắt nhau tại gốc tọa độ O'.

(5) $a_0' = 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$: Phương trình biểu diễn một cặp đường thẳng ảo liên hợp, cắt nhau tại một điểm thực (gốc O').

Trường hợp II: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ (hoặc tương tự $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$).

(6) $a_1' \neq 0$: Phương trình của G trong $Ox'y'$ được viết lại thành

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2 + 2a_1' x' + a_0 - \frac{a_2'}{\lambda_2} = 0$$

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2 + 2a_1'\Bigg(x' + \underbrace{\frac{a_0}{2a_1'} - \frac{a_2'^2}{2a_1'\lambda_2}}_{a_0''}\Bigg) = 0$$

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2 = -2a_1'(x' + a_0'').$$

Tính tiến $Ox'y'$ tới $O'XY$, với $X = x' + a_0''$, $Y = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}$, phương trình của G trở thành

$$\lambda_2 Y^2 = -2a_1' X : G \text{ là một parabol.}$$

Xét trường hợp $a_1' = 0$:

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2 + \underbrace{\left(a_0 - \frac{a_2'}{\lambda_2}\right)}_{c} = 0.$$

Tịnh tiến $Ox'y'$ tới $O'XY$, với $X = x$, $Y = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}$, phương trình của G trở thành

$$\lambda_2 Y^2 + c = 0.$$

(7) $a_1' = 0$, $c \neq 0$, $\lambda_2 c < 0$: G là cặp đường thẳng thực song song.

(8) $a_1' = 0$, $c \neq 0$, $\lambda_2 c > 0$: G là cặp đường thẳng ảo liên hợp song song.

(9) $a_1' = 0$, $c = 0$: G là một đường thẳng (có thể coi là đường thẳng kép hay cặp đường thẳng trùng nhau): $\lambda_2 Y^2 = 0$.

Không cần xét trường hợp $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, vì nếu thế

$$A = C \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^t = 0 \quad \text{(vô lý)}.$$

Tóm lại, bằng các phép biến đổi tọa độ Descartes (biến đổi đẳng cự) ta có thể đưa phương trình đường bậc hai tổng quát về một trong chín dạng (1)–(9).

Mặt khác, các phép biến đổi đẳng cự không thể đưa một đường cong thuộc dạng này thành đường cong thuộc dạng khác, trong số chín dạng ấy. Thật vậy, có bảy trường hợp (1) (3) (4) (5) (6) (7) (9) trong đó $G \not\equiv \emptyset$ và nó có những tính chất hình học không thay đổi sau phép biến đổi đẳng cự. (Ví dụ: Chỉ có 1 điểm, có vô hạn điểm và bị chặn (ellipse), không bị chặn và có tiệm cận (hyperbol), không bị chặn và không có tiệp cận (parabol), cặp đường thẳng cắt nhau, cặp đường thẳng song song, cặp đường thẳng kép.)

Chỉ có một trường hợp $G = \emptyset$, đó là (2) ellipse ảo và (8) cặp đường thẳng ảo song song. Nhưng các giá trị riêng của A và $C^t AC$ là như nhau, với mọi C trực giao. Vì thế các phương trình loại (2) và (8) không thể biến đổi cái này thành cái kia bởi các phép biến đổi đẳng cự.

Định nghĩa 7.4. Điểm $I\left(x_0, y_0\right)$ được gọi là *tâm của đường bậc hai* G nếu sau phép tịnh tiến hệ tọa độ tới gốc I:

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0,$$

thì phương trình của G không chứa các số hạng bậc nhất của X và Y.

Dễ thấy rằng tâm $I\left(x_0, y_0\right)$ nếu có nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 & = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 & = 0 \end{cases}$$

Trong hệ tọa độ mới IXY, phương trình của G trở thành

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + a_0' = 0.$$

Rõ ràng $M(X, Y) \in G \Longleftrightarrow M'(-X, -Y) \in G$. Vậy I là tâm đối xứng của đường bậc hai G. Nếu

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

thì G có tâm duy nhất. Ellipse, hyperbol, cặp đường thẳng cắt nhau, ... có tâm duy nhất. Parabol không có tâm. Cặp đường thẳng song song hay trùng nhau có vô số tâm.

8 Mặt bậc hai trong không gian ba chiều $\mathbb{E}^3$

Trước hết ta xét một số mặt thường gặp.

Định nghĩa 8.1. *Mặt trụ* trong không gian $\mathbb{E}^3$ là một mặt tạo bởi các đường thẳng song song với một phương cố dịnh và cắt một đường thẳng Γ cố định. Các đường thẳng đó được gọi là *đường sinh*, còn Γ được gọi là *đường chuẩn* của mặt trụ. Nếu Γ là một đường bậc hai thì mặt trụ tương ứng được gọi là *mặt trụ bậc hai*.

Trong hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, giả sử Γ nằm trong mặt phẳng Oxy và được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Khi đó phương trình của mặt trụ có đường chuẩn Γ và đường sinh song song với trục Oz

$$f(x,y) = 0.$$

Ví dụ 8.2. (Các mặt trụ bậc 2)

– Mặt trụ elliptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

– Mặt trụ hyperbolic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

– Mặt trụ parabolic

$$y^2 = 2px.$$

Định nghĩa 8.3. *Mặt nón* trong không gian $\mathbb{E}^3$ là một mặt tạo bởi các đường thẳng đi qua một điểm S cố định (gọi là *đỉnh nón*) và cắt một đường cố định Γ (gọi là *đường chuẩn*). Các đường thẳng nói trên được gọi là đường sinh. Nếu Γ là một đường bậc 2 thì mặt nón được gọi là *mặt nón bậc 2*.

Trong hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, phương trình $F(x, y, z) = 0$ trong đó F thuần nhất, tức là

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k F(x, y, z), \quad \forall \lambda,$$

xác định một mặt nón đỉnh O.

Ví dụ 8.4. Mặt nón đỉnh O với đường chuẩn là đường ellipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

có phương trình là

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Định nghĩa 8.5. Giả sử $\mathcal{C}$ là một đường cong và Δ là một đường thẳng trong mặt phẳng $\mathbb{P}$. Cho $\mathbb{P}$ quay trong $\mathbb{E}^3$ xung quanh Δ thì $\mathcal{C}$ vạch nên một mặt, gọi là *mặt tròn xoay*. Δ được gọi là *trục* và $\mathcal{C}$ là *đường sinh* của mặt tròn xoay.

Trong hệ tọa độ Descartes, $Oxyz$ của $\mathbb{E}^3$, giả sử đường cong $\mathcal{C}$ nằm trong nửa mặt phẳng $Oxyz$ $(x \geqslant 0)$ xác định bởi phương trình

$$\begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = 0 \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Khi đó phương trình mặt tròn xoay với trục Oz và đường sinh $\mathcal{C}$ là

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

Ví dụ 8.6. Mặt tròn xoay với trục Oz và đường sinh

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = 0, \quad x \geqslant 0,$$

được cho bởi phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Định nghĩa 8.7. Giả sử $Oxyz$ là một hệ tọa độ Descartes của $\mathbb{E}^3$. Tập hợp các nghiệm của phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

được gọi là một *ellipsoid*. Phương trình nói trên được gọi là *phương trình chính tắc* của một ellipsoid.

Nhận xét 8.8.

- Nếu 2 trong 3 số bằng nhau, ta có một mặt ellipsoid tròn xoay. Nếu $a = b = c$, ta có một mặt cầu.
- Gốc tọa độ là tâm đối xứng của ellipsoid. Thật vậy, nếu (x, y, z) là một nghiệm của phương trình trên, thì $(-x, -y, -z)$ cũng vậy.
- Các mặt phẳng tọa độ là các mặt phẳng đối xứng của ellipsoid.
- Các trục tọa độ là các trục đối xứng của ellipsoid.
- Giao của ellipsoid với một mặt phẳng vuông góc với một trục tọa độ hoặc là $\emptyset$ hoặc là một ellipsoid.

Định nghĩa 8.9. *Hyperboloid một tầng* là tập hợp các điểm thỏa mãn phương trình sau trong một hệ Descartes $Oxyz$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Phương trình này được gọi là *phương trình chính tắc* của hyperboloid một tầng.

Nhận xét 8.10.

- Nếu $a = b$, ta có một hyperboloid một tầng tròn xoay trục Oz.
- Hyperboloid một tầng đối xứng qua: gốc tọa độ, các mặt phẳng tọa độ, các trục tọa độ.
- Giao của hyperboloid một tầng với mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Oz là một ellipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = h \end{cases} \quad \Longleftarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h. \end{cases}$$

– Giao của hyperboloid một tầng với mỗi mặt phẳng đi qua Oz, chẳng hạn mặt phẳng $y = 0$, là một hyperbol

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 y = 0. \end{cases}$$

– Mặt nón có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

là mặt nó tiệm cận của hyperboloid một tầng đã cho.

Định nghĩa 8.11. *Hyperboloid hai tầng* là tập hợp các điểm với tọa độ trong một hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ là nghiệm phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Đó là phương trình chính tắc của Hyperboloid hai tầng.

Nhận xét 8.12. – Nếu $a = b$, ta có mặt hyperboloid hai tầng tròn xoay trục Oz.

– Mặt này đối xứng qua gốc tọa độ, các trục tọa độ, các mặt phẳng tọa độ.

– Mặt phẳng Oxy không cắt mặt này, vì hệ phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ z = 0. \end{cases}$$

– Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Oz có phương trình $z = h$ với $|h| > |c|$, cắt hyperboloid hai tầng theo một ellipse:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ z = h \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h. \end{cases}$$

Vì thế, mặt này có hai tầng không dính vào nhau.

– Giao của hyperboloid hai tầng với một mặt phẳng đi qua Oz là một hyperbol, chẳng hạn giao với $y = 0$ là đường:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0. \end{cases}$$

– Mặt nón tiệm cận của hyperbol hai tầng cũng có phương trình là

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Định nghĩa 8.13. *Paraboloid elliptic* là tập hợp các điểm thỏa mãn *phương trình chính tắc* sau trong một hệ tọa độ Descartes $Oxyz$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (p > 0, q > 0).$$

Nhận xét 8.14. – Nếu $p = q$, ta có một mặt tròn xoay trục Oz.

– Mặt paraboloid elliptic đối xứng qua trục Oz và các mặt phẳng tọa độ Oxz và Oyz. (Nó không đối xứng qua các trục tọa độ khác và mặt phẳng Oxy.)

– Giao tuyến của paraboloid elliptic với một mặt phẳng vuông góc với Oz "ở phía trên" mặt Oxy là một ellipse:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = h \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \geqslant 0. \end{cases}$$

– Giao của mặt này với một mặt phẳng qua Oz, chẳng hạn $y = 0$ là một parabol $x^2 = 2pz$.

Định nghĩa 8.15. *Paraboloid hyperbolic* có phương trình chính tắc trong hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ là

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0).$$

Nhận xét 8.16. – Mặt này đối xứng qua trục Oz và các mặt phẳng Oxz, Oyz.

– Giao của nó với mỗi mặt phẳng vuông góc với Oz là một hyperbol:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ z = h \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h \\ z = h. \end{cases}$$

– Giao của nó với mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox, chẳng hạn $x = 0$, là một parabol

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0. \end{cases}$$

– Giao của nó với mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Oy, chẳng hạn $y = 0$, là một parabol

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0. \end{cases}$$

Bây giờ ta tiến hành phân loại các mặt bậc hai.

Ta gọi là một ***mặt bậc hai*** tập hợp G các điểm của $\mathbb{E}^3$ mà tọa độ của nó trong một hệ tọa độ Descartes $Ox_1x_2x_3$ thỏa mãn phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{3} a_ix_i + a_0 = 0,$$

trong đó $A = (a_{ij})$ là một ma trận đối xứng, khác 0.

Ta đã biết, do A đối xứng nên có ma trận trục giao C để cho $C^{-1}AC = C^tAC$ là ma trận chéo $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Sau phép đổi tọa độ

$$(x_1x_2x_3) = C\left(x_1'x_2'x_3'\right),$$

hệ $Ox_1'x_2'x_3'$ cũng là một hệ Descartes (do C trực giao) và phương trình của G trở thành

$$\lambda_1x_1'^2 + \lambda_2x_2'^2 + \lambda_3x_3'^3 + 2\sum_{i=1}^{3} a_i'x_i' + a_0 = 0.$$

Trường hợp I: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Ta dùng phép tịnh tiến hệ tọa độ để đưa phương trình trên về dạng

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + a_0' = 0.$$

Xét $a_0' \neq 0$:

(1) Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a_0'$ cùng dấu, ta có ellipsoid ảo $G = \emptyset$.

(2) Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ cùng dấu và khác dấu với a_0': G là một ellipsoid.

(3), (4) Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ có hai số cùng dấu và khác dấu với số còn lại: G là một hyperboloid *một tầng* hoặc *hai tầng*.

Xét $a_0' = 0$:

(5) Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a_0'$ cùng dấu, thì $G = \{1 \text{ điểm}\}$ là một nón ảo.

(6) Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ có hai số cùng dấu và khác dấu với số còn lại, thì G là một mặt nón bậc hai.

Trường hợp II: $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $a_3' \neq 0$. Ta tính tiến hệ tọa độ để đưa phương trình của G về dạng

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2a_3' Z = 0.$$

(7) Nếu $\lambda_1\lambda_2 > 0$, thì G là một paraboloid elliptic.

(8) Nếu $\lambda_1\lambda_2 < 0$, thì G là một paraboloid hyperbolic.

Trường hợp III: $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $a_3' = 0$. Tịnh tiến hệ tọa độ để đưa phương trình của G về dạng

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a_0'' = 0.$$

(9) Nếu $a_0'' \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a_0'' < 0$: G là một mặt trụ elliptic.

(10) Nếu $a_0'' \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a_0'' > 0$: G là một mặt trụ elliptic ảo ($G = \text{Ø}$).

(11) Nếu $a_0'' \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: G là một mặt trụ hyperbolic.

(12) Nếu $a_0'' = 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: G một cặp mặt phẳng cắt nhau.

(13) Nếu $a_0'' = 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$: G là cặp mặt phẳng ảo cắt nhau tại một đường thẳng thực.

Trường hợp IV: $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $|a_2'| + |a_3'| \neq 0$. Phương trình của G trở thành

(14) $\lambda_1 x_1'^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{3} a_i' x_i' + a_0' = 0.$

Đổi hệ tọa độ Descartes bởi phép biến đổi trực giao:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1'' \\
x_2' &= \frac{a_3'}{\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}} x_2'' + \frac{a_2'}{\sqrt{a_2'^2 + a_3'}} x_3'' \\
x_3' &= -\frac{a_3'}{\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}} x_2'' + \frac{a_2'}{\sqrt{a_2'^2 + a_3'}} x_3''
\end{aligned}$$

Phương trình của G trở thành

$$\lambda_1 \left(x_1'' + \frac{a_1'}{\lambda_1} \right)^2 + 2\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2} x_3'' + a_0' + \frac{a_1'^2}{\lambda_1} = 0.$$

Tịnh tiến hệ tọa độ để thu được phương trình dạng

$$\lambda X^2 + 2a_2'' Y = 0 \quad (a_2'' = \sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}).$$

G là một mặt trụ parabolic.

Trường hợp V: $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $a_2 = a_3 = 0$. Phương trình của G trở thành

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 x_1'^2 + 2a_1' x_1' + a_0 = 0 \\
\Longleftrightarrow &\lambda_1 \left(x_1' + \frac{a_1'}{\lambda_1} \right)^2 + \left(a_0 - \frac{a_1'^2}{\lambda_1} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Tịnh tiến tọa độ để thu được phương trình

$$\lambda_1 X^2 + a_0'' = 0.$$

(15) Nếu $\lambda_1 a_0'' < 0$: G là cặp mặt phẳng song song.

(16) Nếu $a_0'' = 0$: G là một cặp mặt phẳng trùng nhau.

(17) Nếu $\lambda_1 a_0'' > 0$: G là một cặp mặt phẳng ảo song song ($G = \emptyset$).

KẾT LUẬN: Bằng cách biến đổi hệ tọa độ Descartes, phương trình của một mặt bậc hai tổng quát được đưa về một trong mười bảy dạng nói trên.

Tương tự như trường hợp đường cong, các phép biến đổi Descartes không đưa được phương trình thuộc dạng này về phương trình thuộc dạng khác.

9 Mặt kẻ bậc hai

Định nghĩa 9.1. Mặt bậc hai G được gọi là một *mặt kẻ bậc hai* nếu qua bất kỳ điểm nào của nó cũng có ít nhất một đường thẳng nằm hoàn toàn trên mặt ấy.

Các đường thẳng tạo nên các mặt kẻ được gọi là các *đường sinh thẳng* của mặt đó.

Các mặt nón bậc hai, các mặt trụ bậc hai, các cặp mặt phẳng là ví dụ về các mặt kẻ bậc hai.

Mệnh đề 9.2. *Mỗi hyperboloid một tầng là một mặt kẻ bậc hai.*

Chứng minh. Xét phương trình chính tắc của hyperboloid một tầng

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \Longleftrightarrow &\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right). \end{aligned}$$

Với các tham số λ, μ không đồng thời bằng 0, mỗi họ hệ phương trình

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) &= \mu\left(1 + \frac{z}{c}\right), \quad & \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) &= \mu\left(1 - \frac{z}{c}\right), \\ \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) &= \lambda\left(1 - \frac{z}{c}\right), \quad & \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) &= \lambda\left(1 + \frac{z}{c}\right), \end{aligned}$$

xác định một họ đường thẳng nằm hoàn toàn trên hyperboloid đã cho. Hơn nữa, qua mỗi điểm của mặt hyperboloid có một đường duy nhất của mỗi họ đường thẳng nói trên (ứng với mỗi cặp giá trị của λ, μ, sai khác một hệ số tỷ lệ khác không). □

Mệnh đề 9.3. *Mỗi paraboloid hyperbolic là một mặt kẻ bậc hai.*