课时一　　练习题

1. 设事件 A、B 互不相容，已知 $P(A)$=0.4，$P(B)$=0.5，则 $P(\bar{A}\cdot\bar{B})$=______，若 A、B 独立，则 $P(A\cup B)$=______

解：$P(\bar{A}\cdot\bar{B})=P(\overline{A\cup B})$　　$\because$ A 与 B 互不相容 $\Rightarrow P(AB)=0$

$\therefore P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-0.4-0.5+0=0.1$

若 A 与 B 相互独立 $\Rightarrow P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0.4+0.5-0.4\times 0.5=0.7$

2. 已知 A、B 是两个独立的事件，其中 $P(A)$=0.7，$P(B)$=0.3，则 $P(A\cap B)$=__________

解：$\because$ A 与 B 相互独立　$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.7\times 0.3=0.21$

3. 已知 $P(A)$=0.5，$P(A\cup B)$=0.7，若 A、B 独立，则 $P(B)$=__________

解：$\because$ A 与 B 相互独立 $\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.5+P(B)-0.5P(B)=0.7$

$\Rightarrow P(B)=0.4$

4. A、B 为随机事件，若 $P(A\cup B)$=0.5，$P(A)$=0.3，则 $P(B-A)$=________

解：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5$

$\therefore P(B)-P(AB)=0.5-P(A)=0.5-0.3=0.2$

$\therefore P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.2$

5. 甲袋中有 4 只红球，有 6 只白球，乙袋中有 6 只红球，10 只白球，现从两袋中各任取 1 球，则 2 个球颜色相同的概率是 (C)

$A.\ \dfrac{6}{40}$　　　$B.\ \dfrac{15}{40}$　　　$C.\ \dfrac{21}{40}$　　　$D.\ \dfrac{19}{40}$

解：分别从两袋中各任取一个球，有 $C_{10}^1\cdot C_{16}^1$ 种方法

取得都是红球，有 4×6 种取法

取得都是白球，有 6×10 种取法

$$\therefore P=\frac{4\times 6+6\times 10}{C_{10}^1\cdot C_{16}^1}=\frac{84}{160}=\frac{21}{40}$$

6. 甲、乙两门高射炮彼此独立地向一架飞机各发一炮，甲、乙击中飞机的概率分别为0.3和0.4，则飞机至少被击中一炮的概率为？

解：该事件的对立事件是没有被炮弹击中

设事件为 A，则 $P(A)=1-P(\overline{A})$

$P(\overline{A})=(1-0.3)\times(1-0.4)=0.7\times 0.6=0.42$

$\therefore P(A)=1-0.42=0.58$

7. 掷2颗均匀的骰子，两个点数之和为7的概率为________

解：掷两颗均匀的骰子，一共有 $6\times 6=36$ 种排法

两个点数之和为7有：$(1,6)$；$(6,1)$；$(5,2)$；$(2,5)$；$(3,4)$；$(4,3)$ 的6种排法

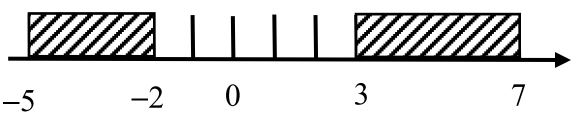
$P=\dfrac{6}{6\times 6}=\dfrac{1}{6}$

8. 设随机变量 A 为 $x\in(-5,7)$ 上的均匀分布，则关于 x 的方程 $9x^2+6Ax+A+6=0$ 有实根的概率为？

解：$\Delta=(6A)^2-4\times 9\times(A+6)\geq 0$

$\Rightarrow A\leq -2$ 或 $A\geq 3$

$\therefore P\{-5<A\leq -2, 3\leq A<7\}=\dfrac{7}{12}$



课时二　　练习题

1.　已知 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.4$，且 $B\subset A$，则 $P(B|A)=$______

解：$\because B\subset A \quad \because P(AB)=P(B) \qquad P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{0.4}{0.8}=\dfrac{1}{2}$

2.　设 A、B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1, P(B)>0, P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有（　）

$A.\ P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　　　$B.\ P(B|A)=P(\overline{A}|B)$

$C.\ P(AB)=P(A)P(B)$　　　　$D.\ P(AB)\neq P(A)P(B)$

解：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=P(B|\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

3.　设 A,B 满足 $P(B|A)=1$ 则（　）

(A)　A 是必然事件　　　(B)　$P(B|\overline{A})=0$　　(C)　$A\supset B$　　　(D)　$P(A)\leq P(B)$

解：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=1\Rightarrow P(AB)=P(A)\Rightarrow A\subset B\Rightarrow P(A)\leq P(B)$

4.　仓库中有 10 箱同种规格的产品，其中 2 箱、3 箱、5 箱分别由甲、乙、丙三个厂生产，三个厂的正品率分别为 0.7,0.8,0.9，现在从这 10 箱产品中任取一箱，再从中任取一件

(1) 求取出的产品为正品的概率

(2) 如果取出的是正品，求此件产品由乙厂生产的概率

解：(1) 设事件 A 为取出正品，B_1 为甲厂生产，B_2 为乙厂生产，B_3 为丙厂生产

$P(B_1)=0.2 \qquad P(B_2)=0.3 \qquad P(B_3)=0.5$

$P(A|B_1)=0.7 \qquad P(A|B_2)=0.8 \qquad P(A|B_3)=0.9$

$$\therefore P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

$$=0.2\times0.7+0.3\times0.8+0.5\times0.9=0.83$$

(2) $P(B_2|A)=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\dfrac{0.3\times0.8}{0.83}=\dfrac{24}{83}$

5. 某保险公司把被保险人分为3类：“谨慎的”、“一般的”、“冒失的”，统计资料表明，这3种人在一年内发生事故的概率依次为0.05, 0.15, 0.30；如果“谨慎的”被保险人占20%，“一般的占50%，“冒失的”占30%，问：

(1) 一个被保险人在一年内出事故的概率是多大？

(2) 若已知某被保险人出了事故，求他是“谨慎的”类型的概率。

解：(1) 设事件 A 为一个被保险人在一年内发生事故

B_1 为被保险人是“谨慎的”，B_2 为被保险人是“一般的”，B_3 为被保人是“冒失的”

$P(B_1)=20\%$　　$P(B_2)=50\%$　　$P(B_3)=30\%$

$P(A|B_1)=0.05$　　$P(A|B_2)=0.15$　　$P(A|B_3)=0.3$

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

$$=20\%\times0.05+50\%\times0.15+30\%\times0.3=0.175$$

(2) $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{20\%\times0.05}{17.5\%}=\dfrac{2}{35}$

课时三 练习题

1. 设随机变量 X 的分布律如下：求：(1) X 的分布函数；(2) $P\{1 \le X < 3\}$

X	-1	1	2	3
P	0.2	0.3	0.1	0.4

解：(1)当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$

当 $-1 \le x < 1$ 时，$F(x)=0.2$

当 $1 \le x < 2$ 时，$F(x)=0.2+0.3=0.5$

当 $2 \le x < 3$ 时，$F(x)=0.2+0.3+0.1=0.6$

当 $x \ge 3$ 时，$F(x)=1$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ 0.2 & -1 \le x < 1 \\ 0.5 & 1 \le x < 2 \\ 0.6 & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

(2) $P\{1 \le X < 3\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} = 0.3+0.1=0.4$

2. 离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ 0.35, & -2 \le x < 0 \\ 0.6, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$，$Y=|X+1|$，求 Y 的分布律。

解：X 的分布律

X	-2	0	1
P	0.35	0.25	0.4

$\xrightarrow{Y=|X+1|}$

Y	1	1	2
P	0.35	0.25	0.4

$\xrightarrow{\text{合并}}$

Y	1	2
P	0.6	0.4

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 2-x & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

求：（1）X 的分布函数 $F(x)$　　（2）求 $P\left\{1<X<\dfrac{3}{2}\right\}$

解：(1)当 $x<0$ 时，$F(x)=0$

当 $0 \le x < 1$ 时，$F(x)=\int_0^x x\,dx=\dfrac{x^2}{2}$

当 $1 \le x < 2$ 时，$F(x)=\int_0^1 x\,dx+\int_1^x (2-x)dx = 2x-\dfrac{x^2}{2}-1$

当 $x \ge 2$ 时，$F(x)=1$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2}{2} & 0 \le x < 1 \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

(2) $P\left\{1<X<\frac{3}{2}\right\}=F\left(\frac{3}{2}\right)-F(1)=\frac{7}{8}-\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0<x<A \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求：

(1) 常数 A　　(2) 分布函数 $F(x)$　　(3) $P\left\{-1<X<\frac{1}{2}\right\}$

解：(1) $\int_0^A f(x)dx=\int_0^A \frac{x}{2}dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^A=\frac{A^2}{4}=1 \quad \Rightarrow A=2$ 或 $A=-2$（舍去）

(2) 当 $x\le 0$ 时，$F(x)=0$

当 $0\le x<2$ 时，$F(x)=\int_0^x \frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}$

$x\ge 2$ 时，$F(x)=1$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0<x<2 \\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

(3) $P\left\{-1<X<\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(-1)=\frac{1}{16}-0=\frac{1}{16}$

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_x(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，若 $Y=1-e^{-2X}$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

解：$x>0\Rightarrow y=1-e^{-2x}\in(0,1)$

$x=-\frac{1}{2}\ln(1-y) \qquad x'=\frac{1}{2(1-y)}$

$f_Y(y)=f_X\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right)\cdot\frac{1}{2(1-y)}=2e^{-2\times\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]}\cdot\frac{1}{2(1-y)}$

$=2e^{\ln(1-y)}\cdot\frac{1}{2(1-y)}=2(1-y)\cdot\frac{1}{2(1-y)}=1$

$\boxed{e^{\ln A}=A}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}1 & (0<y<1) \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

课时四　练习题

1. 设随机变量 $X\sim b(3,0.1)$，则 $P(X>2)=\underline{0.001}$。

解：$P\{X>2\}=1-P\{X\le 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}$

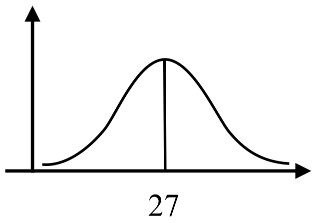
$$=1-\left[C_3^0(0.9)^3(0.1)^0+C_3^1(0.9)^2(0.1)^1+C_3^2(0.9)^1(0.1)^2\right]$$

$$=1-0.999=0.001$$

2. 设随机变量 X 服从 $N\left(27,0.2^2\right)$ 分布，则其渐近线在（ C ）处

$A.\ x=27$　　$B.\ y=27$　　$C.\ y=0$　　$D.\ x=0$

解：如图，明显看出渐近线为 $y=0$。



3. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上的均匀分布的概率密度，若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\le 0\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}(a>0,b>0)$ 为随机变量的概率密度，则 a,b 应满足（ A ）

$A.\ 2a+3b=4$　　$B.\ 3a+2b=4$　　$C.\ a+b=1$　　$D.\ a+b=2$

解：$f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ (-\infty<x<+\infty)$　　$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & -1\le x\le 3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)dx+\int_{0}^{+\infty}bf_2(x)dx=1$$

$$\Rightarrow a\int_{-\infty}^{0}f_1(x)dx+b\int_0^3\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b=1\Rightarrow 2a+3b=4$$

4. 若 $X\sim U(0,a)$，则概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & 0<x<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，分布函数值 $F(a)=\underline{1}$。

解：①当 $x<0$ 时，$F(x)=0$

②当 $0<x<a$ 时，$F(x)=\int_0^x\dfrac{1}{a}dx=\dfrac{x}{a}$

③当 $x\ge a$ 时，$F(x)=1\ \therefore F(a)=1$

5. 设随机变量 X 服从 $N(4,4)$ 分布，满足 $P\{X<a\}=P\{X\geq a\}$，则 $a=$（ C ）

A. 0 B. 2 C. 4 D. 5

解：提示：画图，关于 u 对称

6. 设 $X\sim N(1,1)$，且 $\Phi(1)=0.8413$，则 $P\{0<X<2\}=$ <u>0.6826</u>。

解：$P\{0<X<2\}=\Phi\left(\frac{2-1}{1}\right)-\Phi\left(\frac{0-1}{1}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)$

$=\Phi(1)-\left[1-\Phi(1)\right]=2\Phi(1)-1$

$=2\times0.8413-1=0.6826$

7. X 与 Y 相互独立且都服从泊松分布 $P(\lambda)$，则 $X+Y$ 服从的分布为 <u>$P(2\lambda)$</u>。

解：参考讲义泊松分布题 2

课时五　练习题

1. 已知二维随机变量$(X，Y)$的联合分布律：要使X、Y相互独立，则α,β的值为______

$X \backslash Y$	1	2	
0	0.5	0.25	0.75
1	α	β	
	$\alpha+0.5$		

解：$\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$　　①

$\because X$、Y 相互独立

$\Rightarrow P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}$

$=0.75\cdot(\alpha+0.5)=0.5$　　②　　由①②解得：$\alpha=\frac{1}{6}$，$\beta=\frac{1}{12}$

2. 设二位随机变量(X,Y)的分布律，则$P(X+Y=1)=(\ )$

$A.0.3$　　$B.0.1$　　$C.0.2$　　$D.0.4$

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.2
1	0.3	0.1	0.1

解：$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=0.2+0.1=0.3$　　选 A

3. 加油站有两套用来加油的设备，设备A是工作人员操作的，设备B是顾客自己操作的，A、B均装有两根加油软管，任取一时间，A、B正在使用的软管数分别为X、Y，X、Y的联合分布律为下表，求：

(1) $P(X\le 1,Y\le 1)$

(2) 至少有一根软管在使用的概率

(3) $P(X=Y)$

(4) $P\{X+Y=2\}$

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.08	0.06
1	0.04	0.2	0.14
2	0.02	0.06	0.3

解：(1) $P(X\le 1,Y\le 1)=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}$

$=0.1+0.08+0.04+0.2=0.42$

(2) $P\{X\ge 1,Y\ge 1\}=1-P\{X=0,Y=0\}=1-0.1=0.9$

(3) $P\{X=Y\}=P\{X=Y=0\}+P\{X=Y=1\}+P\{X=Y=Z\}$

$=0.1+0.2+0.3=0.6$

(4) $P\{X+Y=2\}=\{X=0,Y=2\}+\{X=2,Y=0\}+\{X=1,Y=1\}$

$=0.06+0.02+0.2=0.28$

4. 二维随机变量(X,Y)的联合分布列见右表，求$Z=\max(X,Y)$的分布列

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

解：$P\{Z=\max\{X,Y\}=1\}=\dfrac{1}{9}$

$$P\{Z=2\}=P\{X=2,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}+P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{11}{18}$$

$$P\{Z=3\}=P\{X=1,Y=3\}+P\{X=2,Y=3\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$$

Z	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$

5. 设 A、B 为两个随机事件，$P\{A\}=0.25, P\{B|A\}=0.5, P\{A|B\}=0.25$，令随机变量

$$X=\begin{cases}1 & A\text{发生}\\ 0 & A\text{不发生}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1 & B\text{发生}\\ 0 & B\text{不发生}\end{cases}$$

(1) 求(X,Y)的联合分布律　　(2) 求$P\{X^2+Y^2=1\}$

解：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(AB)}{0.25}=0.5\Rightarrow P(AB)=\dfrac{1}{8}$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/8}{P(B)}=\frac{1}{4}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$$

(1) $P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\cdot\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{8}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(2) $P\{X^2+Y^2=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}$

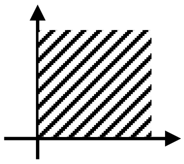
$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

课时六　　练习题

题1. 设(X,Y)的联合概率密度是$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(3x+4y)} & x>0\ y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$求：

(1) 常数k　　(2) X与Y的边缘分布，并确定是否独立，为什么？

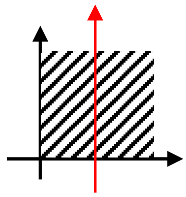
(3) $P\{0<X\le 1,0<Y\le 1\}$



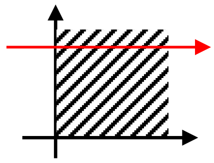
解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

$$\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}ke^{-(3x+4y)}dy=\int_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{4}ke^{-(3x+4y)}\right]_0^{+\infty}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{4}ke^{-3x}dx=-\frac{1}{12}ke^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{12}k=1$$

$\Rightarrow k=12$



(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{+\infty}12e^{-3x-4y}dy=\begin{cases}3e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$



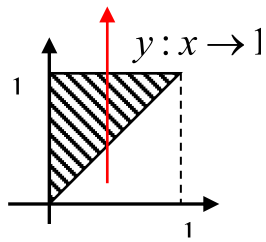
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^{+\infty}12e^{-3x-4y}dx=\begin{cases}4e^{-4y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

$\because f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$　　$\therefore X$于Y相互独立

(3) $P\{0<x\le 1,0<y\le 1\}=\int_0^1 3e^{-3x}dx\int_0^1 4e^{-4y}dy=\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-4}\right)$

题2. 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}2 & 0\le x\le 1\ \ x\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

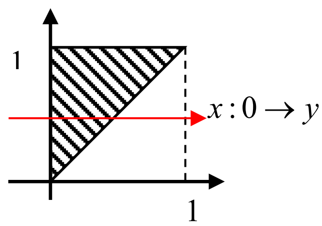
求：(1)关于X和Y的边缘密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$



(2)求$P\{X+Y\le 1\}$

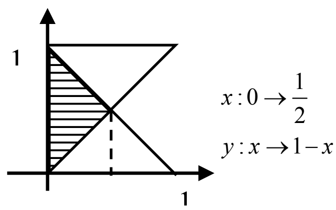
(3) X与Y是否独立，为什么？

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_x^1 2dy=\begin{cases}2(1-x) & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$



$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^y 2dx=\begin{cases}2y & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(2) $P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}2dy=\int_0^{\frac{1}{2}}(2-4x)dx=\frac{1}{2}$



(3) $f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)=2$　　$\therefore X$与Y不独立

题3．设 X 和 Y 相互独立，X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$，试求

(1)　X 和 Y 的联合概率密度

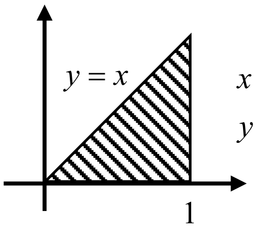
(2) 二次方程 $a^2+2Xa+Y^2=0$ 有实根的概率

解：(1) $f_X(x)=\begin{cases}1 & (0<x<1)\\ 0 & 其他\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

$\because$ X 与 Y 相互独立 $\Rightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & (0<x<1,y>0)\\ 0 & 其他\end{cases}$

(2) $\Delta=(2X)^2-4Y^2\ge 0\Rightarrow X^2\ge Y^2$

$$P\{Y^2\le X^2\}=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=\int_0^1\left(1-e^{-\frac{x}{2}}\right)dx=1-\left(2-2e^{-\frac{1}{2}}\right)=2e^{-\frac{1}{2}}-1$$



$x:0\to 1$

$y:0\to x$

课时七　练习题

1. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，其概率密度分别如下，求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

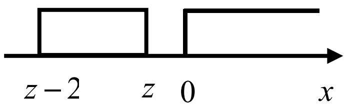
$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-2x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2} & 0\le y<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

解：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

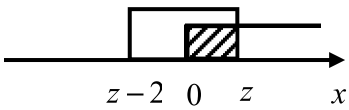
$$X 与 Y 独立 \Rightarrow f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-2x} & x>0\ \ 0\le y<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$$f(x,z-x)=\frac{1}{2}e^{-2x} \quad (x>0\quad 0\le y<2)$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 0\le y<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 0\le z-x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ z-2<x\le z \end{cases}$$

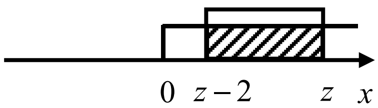


$z\le 0 \quad f_Z(z)=0$



$$\begin{cases} z>0 \\ z-2<0 \end{cases} \Rightarrow 0<z<2 时，积分区间 x:0\to z$$

$$f_Z(z)=\int_0^z \frac{1}{2}e^{-2x}dx=\frac{1}{4}\left(1-e^{-2z}\right)$$



$z-2>0 \Rightarrow z>2$ 时，积分区间 $x:z-2\to z$

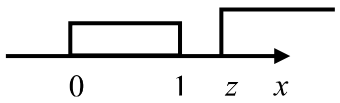
$$f_Z(z)=\int_{z-2}^z \frac{1}{2}e^{-2x}dx=\frac{1}{4}\left(e^{4-2z}-e^{-2z}\right)$$

综上：$f_Z(z)=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ \frac{1}{4}\left(1-e^{-2z}\right) & 0<z<2 \\ \frac{1}{4}\left(e^{4-2z}-e^{-2z}\right) & z>2 \end{cases}$

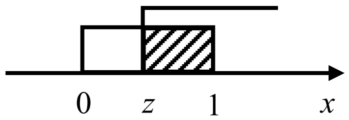
2. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1\ \ 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求 $Z=XY$ 的概率密度。

解：$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx \qquad \frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)=\frac{1}{x}$

$$\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\0<\frac{z}{x}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\0<z<x\end{cases}$$

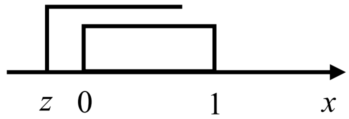


$z\geq 1$时，$f_Z(z)=0$



$0<z<1$时，积分区间 $x:z\to 1$

$f_Z(z)=\int_z^1\frac{1}{x}dx=-\ln z$



$z\leq 0$，$f_Z(z)=0$

综上：$f_z(z)=\begin{cases}-\ln z & 0<z<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

3. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立且具有相同分布 $F(x)$，

①$Z=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ 的分布函数为 $\underline{[F(z)]^4}$；

②$Z=\min\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ 的分布函数为 $\underline{1-[1-F(z)]^4}$。

解：①$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{\max\{X_1,X_2,X_3,X_4\}\leq z\}=P\{X_1\leq z,X_2\leq z,X_3\leq z,X_4\leq z\}$

$\because X_1,X_2,X_3,X_4$ 相互独立

$\therefore F_Z(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdot F_{X_3}(z)\cdot F_{X_4}(z)=[F(z)]^4$

②$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{\min\{X_1,X_2,X_3,X_4\}\leq z\}=1-P\{\min\{X_1,X_2,X_3,X_4\}>z\}$

$$\begin{aligned}&=1-P\{X_1>z,X_2>z,X_3>z,X_4>z\}\\&=1-P\{X_1>z\}P\{X_2>z\}P\{X_3>z\}P\{X_4>z\}\\&=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)][1-F_{X_3}(z)][1-F_{X_4}(z)]\\&=1-[1-F(z)]^4\end{aligned}$$

课时八 练习题

1. 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(-3,4)$，则数学期望 $E(2X+1)=$______

解：$X \sim U(-3,4)$ $\quad E(X)=\dfrac{-3+4}{2}=\dfrac{1}{2}$ $\quad E(2X+1)=2E(X)+1=2\times\dfrac{1}{2}+1=2$

2. 设 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{4}} & x>0 \\ 0 & 其它\end{cases}$，则 $E(X)=$____

解：$f(x)=F^{'}(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & \mathrm{x}>0 \\ 0 & 其它\end{cases}$ $\quad X \sim E\left(\dfrac{1}{4}\right)$ $\quad E(X)=4$

3. 如果随机变量 X 服从(　　)的均匀分布，必满足 $E(X)=8, D(X)=3$

A $[0,6]$ $\quad$ B $[1,4]$ $\quad$ C $[5,11]$ $\quad$ D $[-1,9]$

解：$\begin{cases}E(X)=\dfrac{a+b}{2}=8 \\ D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=5 \\ b=11\end{cases}$ 答案选 C

4. 设 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 X 的方差 $Var(X)=(\quad)$

A λ $\quad$ B $\dfrac{1}{\lambda}$ $\quad$ C $\dfrac{1}{\lambda^2}$ $\quad$ D $\sqrt{\lambda}$

解：$X \sim E(\lambda)$ $\quad E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ $\quad D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

5. 若 $DX=DY=2$ 且 X 与 Y 相互独立，则 $D(X-3Y)=$___

解：$D(X-3Y)=D(X)+9D(Y)=2+9\times2=20$

6. 设随机变量 X，Y 相互独立，且 $E(X)=2, E(Y)=1, D(X)=3$，则 $E(X(X+Y-2))=$__.

解：$E(X(X+Y-2))=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-E(2X)$

$=D(X)+E^2(X)+E(X)E(Y)-2E(X)$

$=3+4+2\times1-2\times2=5$

7. 若随机变量 X，Y 相互独立，则（　）

$A.\ D(XY)=D(X)D(Y)$　　　　$B.\ D(2X+Y)=2D(X)+D(Y)$

$C.\ D(2X+3Y)=4D(X)+9D(Y)$　　　　$D.\ D(X-Y)=D(X)-D(Y)$

解：选 C。X，Y 独立 $Cov(X,Y)=0$，$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$

8. 两个随机变量 X 和 Y 的协方差 $Cov(X,Y)=($　$)$

$A.E(X-EY)(Y-EX)$　　$B.E(X-EX)(Y-EY)$　　$C.E(XY)^2-(EXEY)^2$　　$D.E(XY)+EXEY$

解：选 B. $Cov(X,Y)=E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]=E(XY)-E(X)E(Y)$

9. $DX=DY=30, \rho_{XY}=0.4$，则 $Cov(X,Y)=$____

解：$Cov(X,Y)=p\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}=0.4\times\sqrt{30}\times\sqrt{30}=12$

10. 设 $D(X)=3, Y=3X+1$，则 $\rho_{XY}=$_____

$$Y=aX+B\quad \begin{cases} a>0 & \rho_{XY}=1 \\ a<0 & \rho_{XY}=-1 \end{cases}$$ 记住就行

11. 随机变量 X 和 Y 满足 $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$ 则下列说法哪个是不正确的（　）

$A.\ D(X+Y)=D(X)+D(Y)$　　$B.E(XY)=E(X)E(Y)$　　$C.X$ 与 Y 不相关　$D.X$ 与 Y 独立

解：选 D.

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$　　依题知 $Cov(X,Y)=0$　　　A 对

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$　$E(XY)=E(X)E(Y)$　　　B 对

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$ 不相关　C 对

不相关 $\nRightarrow$ 独立　　　D 错

12. 设随机变量 X 服从期望为 u，方差为 σ^2，则由切比雪夫不等式得 $P\{|X-u|\ge 3\sigma\}\le$____

解：由公式 $P\{|X-u|\ge\varepsilon\}\le\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 得 $P\{|X-u|\ge 3\sigma\}\le\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}$

13. 一个随机变量 X 的期望为 10 方差为 9 根据切比雪夫不等式，$P\{|X-10|<4\}\ge$______

解：由 $P\{|X-u|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 得 $P\{|X-u|<4\}\ge 1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

14. 已知随机变量 X 的分布律为 $P\{X=1\}=0.2, P\{X=3\}=5C, P\{X=5\}=3C$，求：

1） 求常数 C　　2）X 的数学期望和方差

解：由 $0.2+5c+3c=1$ 得 $c=0.1$

X	1	3	5
P	0.2	0.5	0.3

$E(X)=1\times0.2+3\times0.5+5\times0.3=3.2$

$E(X^2)=1\times0.2+9\times0.5+25\times0.3=12.2$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=12.2-3.2^2=1.96$

15. 设连续性随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}ax^2, & 0<x<1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$

1） 求常数 a

2） 求数学期望 $E(X)$

3） 求方差 $D(X)$

解：（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

$$\int_0^1 ax^2dx=\frac{1}{3}ax^3\Big|_0^1=\frac{a}{3}=1\Rightarrow a=3$$

（2） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\frac{3}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{4}$

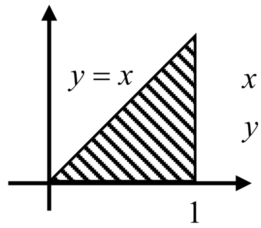
（3） $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx=\frac{3}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{3}{5}$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80}$$

16. 已知(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}Ax & 0<x<1\ \ 0<y<x\\ 0 & 其他\end{cases}$，求：

1）求常数A和$P\{X+Y<1\}$　　2）边缘概率密度

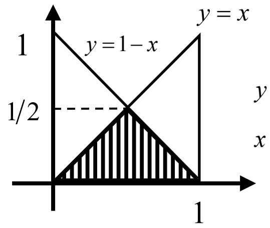
3）判断X和Y是否相互独立　　4）X和Y的相关系数ρ_{XY}



解 1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

$$\int_0^1 dx\int_0^x Axdy=\int_0^1\left[Axy\right]_0^x dx=\int_0^1 Ax^2dx=\frac{A}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{A}{3}=1\qquad\Rightarrow A=3$$

$$P\{X+Y<1\}=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{1-y}3xdx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{2}x^2\right]_y^{1-y}dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-3y\right)dy=\frac{3}{8}$$



2）$f_X(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3xy\big|_0^x=3x^2$

$$f_Y(y)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}x^2\Big|_y^1=\frac{3}{2}\left(1-y^2\right)$$

3）$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$故不相互独立

4）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x\cdot3x^2dy=\int_0^1\left[3x^2y\right]_0^x dx=\int_0^1 3x^3dx=\frac{3}{4}$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x^2\cdot3x^2dy=\int_0^1\left[3x^3y\right]_0^x dx=\int_0^1 3x^4dx=\frac{3}{5}$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x y\cdot3xdy=\int_0^1\left[\frac{3}{2}xy^2\right]_0^x dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^3dx=\frac{3}{8}$$

$$E\left(Y^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x y^2\cdot3xdy=\int_0^1\left[xy^3\right]_0^x dx=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}$$

$$D(Y)=E\left(Y^2\right)-E^2(Y)=\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{19}{320}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x xy\cdot3x^2dy=\int_0^1\left[\frac{3}{2}x^2y^2\right]_0^x dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^4dx=\frac{3}{10}$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}}{\sqrt{\frac{3}{80}}\cdot\sqrt{\frac{19}{320}}}=4.37$$

课时九　　练习题

1. 设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为$0.5kg$，标准方差为$0.1kg$，问5000只这样的零件，总重量超过$2510kg$的概率是多少？（可能用到的数据：$\Phi(1.4142)=0.9214$，$\sqrt{50}\approx 7.0711$）

解：$E(X_i)=0.5$，$D(X_i)=(0.1)^2$

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_{5000}=\sum_{i=1}^{5000}X_i\sim N\left(5000\times 0.5,5000\times(0.1)^2\right)$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{5000}X_i>2510\right\}=1-P\left\{\sum_{i=1}^{5000}X_i\le 2510\right\}=1-\Phi\left(\frac{2510-nu}{\sqrt{n}\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2510-5000\times 0.5}{\sqrt{5000}\times 0.1}\right)$$
$$=1-\Phi(1.4142)=1-0.9214=0.0786$$

2. 某电话供电网有10000盏电灯，夜晚每盏灯开灯的概率为0.7，且设开关时间彼此独立，试用中心极限定理求夜晚同时开灯盏数在6800和7200之间的概率的近似值（结果用$\Phi(x)$的值表示）。

解：$X\sim B(10000,0.7)$，近似于$N(np,np(1-p))$　$n=10000,p=0.7$

$$P\{6800\le X\le 7200\}=\Phi\left(\frac{7200-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{6800-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{7200-10000\times 0.7}{\sqrt{10000\times 0.7\times 0.3}}\right)-\Phi\left(\frac{6800-10000\times 0.7}{\sqrt{10000\times 0.7\times 0.3}}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{21}}\right)-\Phi\left(-\frac{20}{\sqrt{21}}\right)=2\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{21}}\right)-1$$

课时十　练习题

1. 设 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,1)$ 且相互独立，则 $(X_1)^2+(X_2)^2 \sim$ $\underline{\chi^2(2)}$ 分布。

解：$\because$ X_1, X_2 都服从标准正态分布 $N(0,1)$

$\therefore$ 根据 χ^2 分布定义：$(X_1)^2+(X_2)^2 \sim \chi^2(2)$ 分布

2. 设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(10)$，且 X 与 Y 相互独立，$T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/10}} \sim$ $\underline{t(10)}$。

解：X 服从 $N(0,1)$ 分布，Y 服从 $\chi^2(n)$ 分布

$\because \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$ 即 $\dfrac{X}{\sqrt{Y/10}} \sim t(10)$

3. 设 $X \sim N(1,1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 为来自总体 X 的一个样本，则 $E(\bar{X})=\underline{1}$；$D(\bar{X})=\underline{\dfrac{1}{100}}$；$E(S^2)=\underline{1}$。

解：$\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$　　$\therefore \bar{X} \sim N\left(1, \dfrac{1}{100}\right)$　　$E(S^2)=\sigma^2=1$

4. 设总体 X 服从 $\pi(1)$ 分布 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为从 X 中抽取的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值。则 $\sqrt{10}(\bar{X}-1) \sim \underline{N(0,1)}$。

解：$X \sim \pi(1)$　$E(X)=1$　$D(X)=1$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\bar{X}-1}{1/\sqrt{10}}=\sqrt{10}(\bar{X}-1) \sim N(0,1)$$

课时十一　练习题

1. 设总体 X 服从 $[0,2\theta]$ 上的均匀分布 $(\theta>0)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自该总体的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=(B)$

A. $2\overline{X}$　　B. $\overline{X}$　　C. $\dfrac{\overline{X}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2\overline{X}}$

解：$X\sim U(0,2\theta)$　　$u_1=E(X)=\dfrac{2\theta+0}{2}=\theta$

$\therefore \theta=u_1$　　即 $\hat{\theta}=\overline{X}$

2. 设总体 X，$E(X)=\mu$，$\hat{\mu}_1=\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3$，则它们中是 μ 的无偏估计量的为：$\underline{\hat{\mu}_2}$

解：$E(\hat{\mu}_1)=E\left(\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3\right)=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{1}{4}E(X_2)+\frac{1}{4}E(X_3)=\frac{3}{4}\mu\neq\mu$

$$E(\hat{\mu}_2)=E\left(\frac{1}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3\right)=\frac{1}{5}E(X_1)+\frac{2}{5}E(X_2)+\frac{2}{5}E(X_3)=\frac{5}{5}\mu=\mu$$

3. 设总体 X 服从指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，$\lambda>0$，$X_1$，$X_2$ $\cdots$ X_n 为简单的随机样本，求：

（1）λ 的矩估计量

（2）λ 的最大似然估计量

解：（1）$X\sim E(\lambda)$　　$u_1=E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$　　即 $\lambda=\dfrac{1}{u_1}$　　$\Rightarrow\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$

（2）似然函数 $L(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x)=\lambda e^{-\lambda x_1}\cdot\lambda e^{-\lambda x_2}\cdot\cdots\cdot\lambda e^{-\lambda x_n}=\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$

$$\ln L(\lambda)=\ln\lambda^n+\ln e^{\left(-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)}=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

令 $\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$

大写是似然估计量
小写是似然估计值

所以极大似然估计值 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}$

4. 设总体 X 的概率分布如下表所示；其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$，从总体 X 中抽取容量为 7 的一组样本，其样本值为 $0,1,1,1,1,0,1$，求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

X	0	1
P	θ	$1-\theta$

解：（1）求矩估计：$u_1=E(X)=0\times\theta+1\times(1-\theta)=1-\theta$

$\theta=1-u_1$ 矩估计量：$\hat{\theta}=1-\bar{X}$

$\bar{X}=\frac{1}{7}(0+1+1+1+1+0+1)=\frac{5}{7}$ 所以据估计值为：$\hat{\theta}=1-\bar{X}=1-\frac{5}{7}=\frac{4}{7}$

（2）最大似然估计：

$L(\theta)=\theta^2\cdot(1-\theta)^5$

0 出现两次：θ^2 1 出现五次：$(1-\theta)^5$

取对数：$\ln L(\theta)=2\ln\theta+5\ln(1-\theta)$

求导：$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2}{\theta}-\frac{5}{1-\theta}=0$

得最大似然估计值 $\hat{\theta}=\frac{2}{7}$

5. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta(x-3)} & x>3\\ 0 & x\le 3\end{cases}$，求 θ 的矩估计量和极大似然估计量。

解：$u_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{3}^{+\infty}\theta xe^{-\theta(x-3)}dx=3+\frac{1}{\theta}$

$\theta=\frac{1}{u_1-3}$ 矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{\bar{X}-3}$

似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\theta e^{-\theta(x_1-3)}\cdot\theta e^{-\theta(x_2-3)}\cdots\cdots\theta e^{-\theta(x_n-3)}=\theta^n e^{3n\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}$

取对数：$\ln L(\theta)=n\ln\theta+3n\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i$

求导，令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+3n-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$

极大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{n}{3n-\sum_{i=1}^{n}X_i}$

课时十二 练习题

1. 总体 X 服从 $N(\mu,100), X_1, X_2 \cdots X_{100}$ 是取自总体的简单随机样本且样本均值 $\bar{X}=10$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为多少。

解：$\sigma^2=100$ 为已知，μ 的置信区间为 $\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

$\bar{X}=10$，$\sigma=10$，$n=100$，$\alpha=1-0.95=0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$

代入得 μ 的置信区间为 $\left(10-\frac{10}{\sqrt{100}}\times 1.96, 10+\frac{10}{\sqrt{100}}\times 1.96\right)=(8.04, 11.96)$

2. 假设某校同学们概率统计成绩服从 $N(\mu,\sigma^2)$，现随机的抽取 25 位同学们测试得到的平均成绩为 78.5 分，方差为 9。(1) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。(2) 求 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间。($t_{0.025}(24)=2.6$　$\chi^2_{0.025}(24)=39$　$\chi^2_{0.975}(24)=12$)

解：(1) σ^2 未知，μ 的置信区间为 $\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

$\bar{X}=78.5$，$S=3$，$n=25$，$\alpha=1-0.95=0.05$，$t_{0.025}(24)=2.6$

代入得 μ 的置信区间为 $\left(78.5-\frac{3}{\sqrt{25}}\times 2.6, 78.5+\frac{3}{\sqrt{25}}\times 2.6\right)=(76.94, 80.06)$

(2) μ 未知，σ^2 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

$n-1=24$，$S^2=9$，$\alpha=1-0.95=0.05$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(24)=39$　　$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(24)=12$

代入公式可得 σ^2 的置信区间为 $\left(\frac{24\times 9}{39}, \frac{24\times 9}{12}\right)=(5.54, 18)$

3. 设某种油漆的12样品，其干燥时间（以小时为单位）：　10.1　10.3　10.4　10.5　10.2　9.7　9.8　10.1　10.0　9.9　9.8　10.3，假定干燥时间总体服从正态分布，试由此数据对该种油漆平均干燥时间置信水平为95%的区间估计。（$t_{0.025}(11)=2.20$）

解：σ^2未知，μ的置信区间为$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

$$\bar{X}=\frac{1}{12}(10.1+10.3+\cdots+10.3)=10.09$$

$$S^2=\frac{1}{12}\left[(10.1-10.09)^2+(10.09-10.3)^2+\cdots+(10.09-10.3)^2\right]=0.0341$$

$$S=\sqrt{S^2}=0.1847$$

$n=12$，$\alpha=1-0.95=0.05$，$t_{0.025}(11)=2.2$

代入得μ的置信区间为$\left(10.09-\frac{0.1847}{\sqrt{12}}\times2.2,10.09+\frac{0.1847}{\sqrt{12}}\times2.2\right)=(9.973,10.207)$

课时十三　　练习题

1. 已知某炼铁厂铁水含碳量服从正态分布 $N\left(4.55, 0.108^2\right)$，现在测定了 9 炉铁水，其平均含碳量为 4.84，如果方差没有变化，可否认为现在生产之铁水平均含碳量仍为 4.55？

$\left(\alpha = 0.05 \quad z_{0.025} = 1.96\right)$

解：①假设 $H_0: u = u_0 = 4.55 \qquad H_1: u \neq u_0$

②检验统计量：$Z = \dfrac{\overline{X} - u_0}{\sigma / \sqrt{n}}$　拒绝域：$|Z| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

③ $\overline{x} = 4.84 \quad u_0 = 4.55 \quad \sigma = 0.108 \quad n = 9 \quad \alpha = 0.05$

$$|Z| = \left|\frac{\overline{x} - u_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| = \left|\frac{4.84 - 4.55}{0.108 / \sqrt{9}}\right| = 8.06 \qquad Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

④ $8.06 \geq 1.96$，在拒绝域内，故拒绝 H_0，接受 H_1，不能认为现在平均含碳量仍为 4.55

2. 自动包装机加工袋装食盐，每袋盐的净重 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$（$\mu, \sigma$ 未知）按规定每袋盐的标准重量为 500 克，某天为检查机器的工作情况，随机的抽取 9 袋，测得样品均值 $\overline{X} = 499$ 克，样品标准差为 16 克，问：包装机的工作是否正常 $\left(\alpha = 0.05, t_{\alpha/2}(8) = 2.306\right)$

解：①假设 $H_0: u = u_0 = 500 \quad H_1: u \neq u_0$

②检验统计量：$t = \dfrac{\overline{X} - u_0}{S / \sqrt{n}}$　拒绝域：$|t| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

③ $\overline{x} = 499 \quad u_0 = 500 \quad S = 16 \quad n = 9 \quad \dfrac{\alpha}{2} = 0.025$

$$|t| = \left|\frac{499 - 500}{16 / \sqrt{9}}\right| = 0.1875 \qquad t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$$

④ $0.1875 \not\geq 2.306$，故不在拒绝域内，接受 H_0，即可以认为包装机工作正常

3. 在以 H_0 为原假设的假设检验中，犯第二类错误指的是 (D)

$A.$ 当 H_0 为真时，拒绝了 H_0　　$B.$ 当 H_0 为假时，拒绝了 H_0

$C.$ 当 H_0 为真时，接受了 H_0　　$D.$ 当 H_0 为假时，接受了 H_0

解：第二类错误取伪：当 H_0 为假时，接受了 H_0