

# **Darstellungstheorie von Symmetrischen Gruppen**

**Mitschrift zur Vorlesung bei Prof. A. Henke  
im Sommersemester 22**

ZHUOYAO ZENG







# VORWORT

Diese Mitschrift entsteht während meiner Teilnahme an der Vorlesung und wird mit der Open-Source-Software  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}_{\text{MACS}}$  erstellt.

Neben den Inhalten aus der Tafel habe ich versucht, die Erleuterungen von Prof. Henke mitzuschreiben. An einigen Stellen habe ich die Formulierungen nach meinem Geschmack geändert bzw. Erläuterungen von dem Skript zu Grundlagen der Darstellungstheorie von Frau Henke ergänzt. Es kann gut sein, dass ich mich irgendwo geirrt habe... Es müsste sein, dass es Tippfehler oder etwas Ähnliches in dieser Mitschrift gibt.

Für Feedback / Anmerkung jederart kann man mich gerne über Ilias oder unter [zhuoyao.zeng@gmail.com](mailto:zhuoyao.zeng@gmail.com) erreichen und darauf würde ich mich sehr freuen.



# INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT . . . . .	v
0. EINFÜHRUNG . . . . .	1
1. SYMMETRISCHE GRUPPE . . . . .	7
2. ANZAHL EINFACHER MODULN . . . . .	17
3. ANZAHL DER STANDARD-TABLEAUX I: YOUNG-FROBENIUS-FORMEL . . . . .	25
4. DER PERMUTATIONSMODUL $M^\lambda$ . . . . .	33
5. SPECHT-MODULN . . . . .	41
6. ANZAHL DER STANDARD-TABLEAUX II. DIE HAKENFORMEL . . . . .	47
7. SOCKEL- UND RADIKALREIHE VON MODULN . . . . .	53
8. EINFACHHEIT VON SPECHT-MODULN . . . . .	63
9. ROBINSON-SCHENSTED-KNUTH ALGORITHMUS . . . . .	71
10. BASIS VON SPECHT-MODULN . . . . .	79
11. EINFACHE $S_n$ -MODULN ÜBER KÖRPER VOM PRIMCHARAKTERISTIK . . . . .	89
12. DUALE MODULN . . . . .	99
13. YOUNG-REGEL . . . . .	107
14. ZERLEGUNGSMATRIX VON $S_n$ . . . . .	115





# KAPITEL 0

## EINFÜHRUNG

Dieses Kapitel dient als Motivation bzw. Einblick darin, worauf man sich in der Vorlesung freuen kann.

**Definition.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda := (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}_0$  eine Folge von natürlichen Zahlen einschließlich Null.  $\lambda$  heißt eine **Komposition** von  $n$ , kurz  $\lambda \models n$ , g.d.w. wenn gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i = n$$

insbesondere ist  $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine endliche Folge.

Gilt zusätzlich  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$ , so heißt  $\lambda$  eine **Partition** von  $n$ , kurz  $\lambda \vdash n$ , und die Zahlen  $\lambda_i$  heißen **Teile** von  $\lambda$ .

Die **Menge aller Partitionen** von  $n$  schreiben wir als  $P(n)$ .

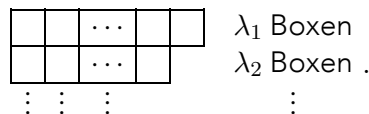
**Beispiel.** Für  $n = 5$  gibt es folgende Partitionen:  $(5)$ ,  $(4 \ 1)$ ,  $(3 \ 2)$ ,  $(3 \ 1 \ 1) =: (3 \ 1^2)$ ,  $(2 \ 1 \ 1 \ 1) =: (2 \ 1^3)$ ,  $(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) =: (1^5)$ . Kompositionen für 5 sind z.B.  $(1 \ 4)$ ,  $(1 \ 0 \ 4)$ ,  $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$ , usw..

**Bemerkung.**

- Wir visualisieren eine Partition  $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  durch ein **Young-Diagramm**  $[\lambda]$ , also formal definiert als

$$[\lambda] := \{(i \ j) : 1 \leq i, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

bzw. anschaulicherweise



Beispiel:



- Zu  $\lambda \vdash n$  ist ein **Young-Tableau** der Form  $[\lambda]$  formal definiert als eine Bijektion  $t: [\lambda] \rightarrow \{1, \dots, n\}$  bzw. anschaulich zu verstehen als eine Füllung des Young-Diagramms  $[\lambda]$  mit natürlichen Zahlen  $\leq n$  ohne Wiederholung. Beispielsweise ist zu  $\lambda = (4 \ 3 \ 1) \vdash 8$  ein Young-Tableau gegeben durch

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 8 & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

und zu  $\lambda = (2 \ 1) \vdash 3$  kann man alle 6 möglichen Young-Tableaux angeben:

1	2				
3					

1	3				
2					

2	1				
3					

2	3				
1					

3	2				
1					

3	1				
2					

- Allgemein sei  $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  und definiere

$$|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \dots = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i.$$

Dann existieren  $|\lambda|!$  viele verschiedene Tableaux der Form  $[\lambda]$ .

Wir führen noch eine zusätzliche Bedingung zu den Young-Tableaux ein:

**Definition.** Ein Tableau  $t$  zu  $\lambda \vdash n$  heißt **Standard-Tableau**, g.d.w. die Einträge in  $t$  in den Zeilen von links nach rechts und in den Spalten von oben nach unten strikt größer werden. Die **Anzahl der Standard-Tableaux** zu  $\lambda$  schreiben wir als  $f^\lambda$ .

**Beispiel.**

- a) Für  $n = 3$  erhalten wir

Partition	Standard-Tableaux	$f^\lambda$								
$\lambda = (3)$	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	1	2	3	1					
1	2	3								
$\lambda = (2 \ 1)$	<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table> <table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>	1	2	3		1	3	2		2
1	2									
3										
1	3									
2										
$\lambda = (1^3)$	<table><tr><td>1</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	1	2	3	1					
1										
2										
3										

- b) Für  $n = 4$  ergeben sich die folgenden Standard-Tableaux

Partition	Standard-Tableaux	$f^\lambda$																		
$\lambda = (4)$	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	2	3	4	1														
1	2	3	4																	
$\lambda = (3 \ 1)$	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr></table> <table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr></table> <table><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	4			1	2	4	3			1	3	4	2			3
1	2	3																		
4																				
1	2	4																		
3																				
1	3	4																		
2																				
$\lambda = (2^2)$	<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table> <table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	2	3	4	1	3	2	4	2										
1	2																			
3	4																			
1	3																			
2	4																			
$\lambda = (2 \ 1^2)$	<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr></table> <table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr></table> <table><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	1	2	3		4		1	3	2		4		1	4	2		3		3
1	2																			
3																				
4																				
1	3																			
2																				
4																				
1	4																			
2																				
3																				
$\lambda = (1^4)$	<table><tr><td>1</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>4</td></tr></table>	1	2	3	4	1														
1																				
2																				
3																				
4																				

c) Nun betrachten wir  $\lambda = (3 \ 2 \ 1)$  also hat  $[\lambda]$  die Gestalt


und wir bestimmen alle Standard-Tableaux dieser Form. Wir erhalten durch Fixieren des  $(2, 1)$ -Eintrags mit 2 oder 3 zunächst die folgenden 7 Standard-Tableaux

1	2	3
4	5	
6		

1	2	4
3	5	
6		

1	2	5
3	4	
6		

1	2	6
3	4	
5		

1	3	4
2	5	
6		

1	3	5
2	4	
6		

1	3	6
2	4	
5		

und durch Vertauschen von  $(2, 2)$ -Eintrag mit  $(3, 1)$ -Eintrag entstehen 7 weitere Standard-Tableaux, also schonmal 14 Stück. Außerdem fixieren wir den  $(2, 1)$ -Eintrags mit 4 und erhalten zwei weitere Standard-Tableaux

1	4	5
2	6	
3		

1	4	6
2	5	
3		

und das sind alle, denn der  $(2, 3)$ -Eintrag kann nicht 5 oder 6 sein, also ist  $f^\lambda = 16$ .

### Bemerkung.

a) Für  $n \in \mathbb{N}$  kann man sich leicht überlegen, dass  $f^{(n)} = 1 = f^{(1^n)}$  gilt.

Allgemein kann man zu einer Partition  $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \vdash n$  die **konjugierte Partition**  $\lambda' := (\lambda'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  durch  $\lambda'_i := |\{j: \lambda_j \geq i\}|$  definieren. Intuitiverweise ist  $\lambda'$  das Vertauschen von Zeilen und Spalten von  $\lambda$ .

Es gilt  $f^\lambda = f^{\lambda'}$  da Standard-Tableaux der Form  $f^\lambda$  in 1 zu 1 Korrespondenz zu Standard-Tableaux der Form  $f^{\lambda'}$  stehen.

b) Für  $r, s \in \mathbb{N}$  und  $\lambda = (r \ 1^s) \vdash n := r + s$  also  $[\lambda]$  von der Form

	...		

bestimmen wir nun  $f^\lambda$ . Die Bedingung von strikter Aufsteigung der Zahlen in Zeilen und Spalten impliziert, dass sobald  $r - 1$  Zahlen von  $\{2, \dots, n\}$  gewählt werden, ist ein Standard-Tableau festgelegt, und umgekehrt gilt es auch. Daher ist  $f^\lambda = \binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{s}$ .

c) Für  $n = 3$  sehen wir aus dem Beispiel von vorhin, dass es gilt

$$(f^{(3)})^2 + (f^{(2 \ 1)})^2 + (f^{(1^3)})^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6 = 3!$$

und für  $n = 4$  gilt ebenfalls

$$\sum_{\lambda \vdash 4} (f^\lambda)^2 = 1 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 1 = 24 = 4!$$

also können wir mutigerweise den folgenden Satz formulieren

**Satz.** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$n! = |S_n| = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$$

wobei  $S_n$  die symmetrische Gruppe der Ordnung  $n$  bezeichnet.

Es gibt verschiedene Beweise zu diesem Satz und wir werden eine kombinatorische Variante nehmen, bei der wir mittels des berühmten Robinson-Schensted-Knuth-Algorithmus (**RSK-Algorithmus**) eine Bijektion zwischen  $S_n$  und einem Paar von Standard-Tableaux herstellen, also  $S_n \ni \sigma \xrightarrow{1:1} (P_\sigma, Q_\sigma)$ . Wir illustrieren hier den Vorgang des Algorithmus für

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \in S_7$$

mit dem Szenario eines matimatischen Kinos:

Angenommen es gibt ein mathematisches Kino, dessen Sitzplan so


aussieht. Sieben Mathematiker, versehen jeweils mit einer Nummer für die „Wichtigkeit“ (z.B. 1 ist „wichtiger“ als 2 usw...), kommen nach der Reihenfolge 2, 5, 3, 7, 1, 6, 4 ins Kino. Da man möglichst vorne und möglichst links sitzen möchte und zuerst in die erste Reihe schaut, hat 2 als erste Person den Platz links oben genommen und 5 setzt sich neben 2, also

2	5	

Dann kommt 3 und er ist „wichtiger“ als 5, daher kann er den Platz von 5 holen und 5 muss dann in die nächste Reihe sitzen, also

2	3	
5		

und dann kommt der lucky 7, der den letzten freien Platz in der ersten Reihe nehmen kann. Nun kommt die „wichtigste“ Person — die 1 — und er nimmt klar den aller besten Platz und schmeißt 2 in die nächste Reihe. 2 nimmt dann den besten Platz in die zweite Reihe und lässt 5 in die dritte Reihe, d.h. der Sitzplan lautet nun

1	3	7
2		
5		

Als nächstes kommt 6, der den Platz von 7 übernimmt und ihn in die zweite Reihe schickt, also

1	3	6
2	7	
5		

aber dann kommt 4 und aus „Wichtigkeitsgründen“ nimmt 4 den Platz von 6, wodurch 6 in die zweite Reihe muss, und 6 lässt 7 nochmal in die dritte Reihe bewegen. Letztendlich sieht der Sitzplan so

1	3	4
2	6	
5	7	

aus und dies ist überraschenderweise ein Standard-Tableau, welches wir als  $P_\sigma$  bezeichnen. Das andere Standard-Tableau  $Q_\sigma$  resultiert aus der Reihenfolge der besetzten Sitze, also

1	2	4
3	6	
5	7	

Nachdem man sich klar mit dem Algorithmus gemacht hat und somit den Satz zur Summe von  $(f^\lambda)^2$  gezeigt hat, kann man noch viel dabei untersuchen. Beispielsweise kann man von der kombinatorischen Sicht fragen, wie  $(P_{\sigma^{-1}}, Q_{\sigma^{-1}})$  aussieht, wenn man  $\sigma$  und  $(P_\sigma, Q_\sigma)$  weißt. Wir werden uns nicht so viel mit diesen Fragen beschäftigen, sondern wir werden die Identität nutzen, um darstellungstheoretische Eigenschaften der symmetrischen Gruppen zu gewinnen.

Für gegebenes  $\lambda \vdash n$  gibt es auch eine Formel für  $f^\lambda$ . Dazu führen wir zunächst neues Vokabular ein:

**Definition.** Sei  $\lambda \vdash n$  und  $x := (i, j) \in [\lambda]$  also ist  $x$  salopp gesagt eine „Box“ in dem Young-Diagramm  $[\lambda]$ . Wir definieren

$$h(x) := \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1$$

als die **Hakenzahl** assoziiert zu  $x$ .

Geometrisch kann man die Hakenzahl gut interpretieren: Dies ist gerade die Anzahl der Boxen in  $[\lambda]$  links zu  $x$  plus die Anzahl der Boxen in  $[\lambda]$  unterhalb von  $x$  und dann plus 1, also

$$h(x) = \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \square & \square & \square & \square \\ i & \square & x & \square & \square & \square \\ & \square & \square & \square & \square & \square \\ & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

Als Beispiel lauten die Hakenzahlen der Boxen vom Young-Diagramm


jeweils

5	3	1
3	1	
1		.

**Satz.** Für jede Partition  $\lambda \vdash n$  gilt

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{x \in [\lambda]} h(x)}.$$

Diese Formel bestätigt unsere Rechnung von vorhin: Für  $\lambda = (3 \ 2 \ 1)$  liefert die Formel  $f^\lambda = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = 16$ , also ein gleiches Ergebnis.

Nun kommen wir zur Darstellungstheorie:

**Satz.** Sei  $r \in \mathbb{N}$  und  $K$  ein Körper mit  $\text{char} K = 0$ . Dann gilt

- a) Die einfachen  $KS_r$ -Moduln sind parametrisiert durch die Partitionen von  $r$ .
- b) Sei  $S^\lambda$  ein einfacher  $KS_r$ -Modul, welcher zu  $\lambda \vdash r$  korrespondiert. Dies wird auch als **Specht-Modul** genannt. Dann ist  $\dim S^\lambda = f^\lambda$ .

Die  $S^\lambda$  werden wir in der Vorlesung konstruieren.

# KAPITEL 1

## SYMMETRISCHE GRUPPE

Wir wiederholen noch die relevanten Grundbegriffe zur symmetrischen Gruppe.

**Definition 1.1.** Sei  $X \neq \emptyset$ . Eine **Permutation** auf  $X$  ist eine Bijektion  $X \xrightarrow{\sim} X$ . Man schreibt  $S_X := \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv}\}$ . Zusammen mit Komposition von Abbildungen  $(f \circ g)(x) := f(g(x))$  für  $\forall x \in X$  und  $\forall f, g \in S_X$  bildet  $S_X$  eine Gruppe, genannt die **symmetrische Gruppe** auf  $X$ .

**Bemerkung 1.2.**

- a) Durch elementare Überprüfung der Gruppenaxiomen stellt man sich fest, dass  $S_X$  tatsächlich eine Gruppe ist. Man schreibt oft  $S_n := S_X$  für  $|X| = n$ , typischerweise für  $X = \{1, \dots, n\}$ , und es gilt  $|S_n| = n!$ .
- b) Es gibt die **Matrixnotation** für Permutationen: Sei  $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  eine Permutation mit  $\sigma(1) =: a_1, \sigma(2) =: a_2, \dots, \sigma(n) =: a_n$ . Dann schreibt man oft kurz

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

Aus dieser Matrixnotation ist die **inverse Permutation direkt ablesbar**, nämlich „Vertauschen oben/unten & Sortieren“. Beispielsweise

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Bemerkung 1.3.**

- a) (**Satz von Cayley**) Jede Gruppe  $G$  ist isomorph zu einer Untergruppe von  $S_G$ .

**Beweis.** Für gegebenes  $g \in G$  sei  $\ell_g: G \rightarrow G, h \mapsto gh$  die Abbildung von Linksmultiplikation mit  $g$ . Dann ist  $\ell: G \rightarrow S_G, g \mapsto \ell_g$  ein injektiver Gruppenhomomorphismus.  $\ell$  ist tatsächlich Injektiv, denn mit  $\ell(g) = \text{id}_G$  folgt  $g = g \cdot e = \ell_g(e) = e$ , also gilt  $\ker(\ell) = \{e\}$ . □

- b) (**Einbettung von  $S_n$  in  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$ )** Jede Permutation aus  $S_n$  lässt sich eine invertierbare Matrix zuordnen, also ihre zugehörige Permutationsmatrix

$$\phi: S_n \rightarrow \text{GL}_n(K), \pi \mapsto A_\pi = (a_{ij}^{(\pi)})$$

wobei

$$a_{ij}^{(\pi)} := \begin{cases} 1 & \text{für } j = \pi(i) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Anschaulich sind Permutationsmatrizen genau diejenigen Matrizen, bei denen in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine 1 hat und sonst 0.

Wegen Satz von Cayley war die symmetrische Gruppe historisch gesehen ein sehr wichtiges Objekt, denn man dachte „wenn man  $S_n$  gut verstanden hat, hat man alle endlichen Gruppen gut verstanden da alle endlichen Gruppen liegen bereits in  $S_n$ “. Mittlerweile weißt man, dass dies nicht ausreicht...

Bemerkung 1.3 b) ist eine weitere „Einbettungsbetrachtung“ hinsichtlich der symmetrischen Gruppe. Dies ist auch eine Darstellung von  $S_n$ .

Wir führen noch weitere Notationen bzw. Begriffe ein:

**Definition 1.4.** Sei  $M$  eine Menge.

a) Für  $\pi \in S_n$  definieren wir

$$\text{supp}(\pi) := \{m \in M \mid \pi(m) \neq m\}$$

als **Träger** von  $\pi$ . Beispiel:  $\text{supp}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}\right) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ .

b) Zwei Permutation  $\pi, \sigma \in S_n$  heißen **disjunkt**, g.d.w.  $\text{supp}(\pi) \cap \text{supp}(\sigma) = \emptyset$ .

c) Ein Element  $\pi \in S_n$  heißt **Zyklus** der Länge  $k \in \mathbb{N}$ , g.d.w.  $|\text{supp}(\pi)| = k$  und man  $\text{supp}(\pi) = \{m_1, \dots, m_k\}$  so nummerieren kann, dass es gilt

$$\pi(m_i) = \begin{cases} m_{i+1} & \text{falls } i < k \\ m_1 & \text{falls } i = k. \end{cases}$$

In dem Fall schreiben wir  $\pi = (m_1 \ m_2 \ \dots \ m_k)$ . Zykeln der Länge 2 heißen **Transpositionen**. Wir bemerken hier, dass wir Produkte von Zykeln immer von rechts nach links ablesen, und dass **disjunkte Zykeln kommutieren**.

**Bemerkung 1.5.** Sei  $\pi \in S_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existieren paarweise disjunkte Zykeln  $\pi_1, \dots, \pi_t \in S_n$  s.d.  $\pi = \pi_1 \cdots \pi_t$  gilt.

**Beweis.** Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf  $M = \{1, \dots, n\}$ : Elemente  $m, m'$  aus  $M$  sind äquivalent unter  $\pi$ , also  $m \sim m'$ , g.d.w. es ein  $j \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $\pi^j(m) = m'$ .

Sei  $K_1, \dots, K_s$  die Äquivalenzklassen von  $M$  unter  $\sim$ , d.h.  $M/\sim = \{K_1, \dots, K_s\}$ .

Ist  $|K_i| \geq 2$ , dann definieren wir ein  $\sigma_i \in S_n$  durch

$$\sigma_i(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \notin K_i \\ \pi(x) & \text{falls } x \in K_i. \end{cases}$$

Sei  $a \in K_i$  und  $r \in \mathbb{N}_0$  minimal mit  $\pi^r(a) = a$ , und damit

$$K_i = \{a =: a_r, \pi(a) =: a_1, \dots, \pi^{r-1}(a) =: a_{r-1}\}$$

bzw.

$$\pi(a_j) = \begin{cases} a_{j+1} & \text{falls } j \leq r-1 \\ a_1 & \text{falls } j = r. \end{cases}$$

D.h.  $\sigma_i = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r)$  und  $\pi = \prod_{K_i \text{ mit } |K_i| \geq 2} \sigma_i$ .

Für  $i \neq j$  ist  $K_i \cap K_j = \emptyset$ , da dies Äquivalenzklassen sind, somit sind  $\sigma_i, \sigma_j$  disjunkt.  $\square$



**Satz 1.6.** Jede Permutation  $\pi \in S_n$  ist eindeutig darstellbar als Produkt disjunkter Zykeln bis auf Reihenfolge der Faktoren.

**Beweis.** Existenz nach Bemerkung 1.5.

Zur Eindeutigkeit:

Sei  $\pi = \varrho_1 \cdots \varrho_t$  und  $\pi = \tau_1 \cdots \tau_s$  Produkt paarweise disjunkter Zykeln.

O.B.d.A. sei 1 in Zykel  $\varrho_1$  bzw. in Zykel  $\tau_1$ , dann holen wir 1 ganz nach vorne durch Zykel-Permutation innerhalb  $\varrho_1$  bzw.  $\tau_1$ .

Daher ist  $\varrho_1 = (1 \ \pi(1) \ \pi^2(1) \ \cdots \ \pi^{l-1}(1))$  sowie  $\tau_1 = (1 \ \pi(1) \ \pi^2(1) \ \cdots \ \pi^{l-1}(1))$  wobei  $l := |K_1|$  und  $1 \in K_1$ . Damit ist  $\varrho_1 = \tau_1$ .

Induktiv folgt  $s = t$  und  $\varrho_i = \tau_i$  für jedes  $i$ . □

**Folgerung 1.7.** Das folgende sind Erzeugendensysteme von  $S_n$ :

- a) Menge aller Transpositionen.
- b) Menge der Transpositionen  $\{(1 \ 2), (1 \ 3), \dots, (1 \ n)\}$ .
- c) Menge der Transpositionen  $\{(1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (n-1 \ n)\}$ .

**Beweis.** Schreibe  $\pi \in S_n$  als Produkt disjunkter Zykeln, siehe Bemerkung 1.5 & Satz 1.6, und schreibe  $r$ -Zykel als Produkt von Transpositionen.

a)  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r) = (a_1 \ a_2)(a_2 \ a_3) \cdots (a_{r-2} \ a_{r-1})(a_{r-1} \ a_r).$

b)  $(i \ j) = (1 \ i)(1 \ j)(1 \ i).$

c) Sei  $k > j + 1$ . Dann ist  $(j \ k) = (j \ j+1)(j+1 \ k)(j \ j+1)$ . Mit Induktion über die Differenz  $k - j$  folgt die Behauptung. □

Folgerung 1.7 sagt uns auch, dass die Darstellung einer Permutation als Transpositionen nicht eindeutig ist.

Unser nächstes Ziel besteht darin, eine „algebraische“ Definition für die symmetrische Gruppe zu finden, also eine Definition mittels „Erzeuger & Relationen“. Bei den Relationen werden wir Eigenschaften von Signum benötigen, und das Signum einer Permutation hängt von der Darstellung als Transpositionen ab. Da diese Darstellung i.A. nicht eindeutig ist aber Signum nicht von der Darstellung abhängen sollte, stellen wir uns zunächst mit dem folgenden Lemma sicher, dass die Signum-Funktion wohldefiniert ist:

**Proposition 1.8.** Sei  $\pi \in S_n$  mit  $\tau_1 \cdots \tau_r = \pi = \tau'_1 \cdots \tau'_s$  wobei  $\tau_i, \tau'_j$  Transpositionen sind. Dann gilt  $r \equiv s \pmod{2}$ .

**Beweis.** (Nach Cauchy 1815)

- a) Schreibe  $k(\pi)$  für die Anzahl der Zykeln in der Zykelzerlegung von  $\pi$  inklusive Zykeln der Länge 1. Wir zeigen: Ist  $\pi = \tau_1 \cdots \tau_r$  Produkt von Transpositionen, dann gilt  $r \equiv n - k(\pi) \pmod{2}$ . Für  $\pi = \tau'_1 \cdots \tau'_s$  eine weitere Produktdarstellung von  $\pi$  durch Transpositionen gilt somit  $s \equiv n - k(\pi) \pmod{2}$ , also  $r \equiv s \pmod{2}$ .

b) Nun zeigen wir die Behauptung in a) mittels Induktion nach  $r$ .

$r = 0$ :

$\pi = \text{id}$ , d.h.  $k(\pi) = n$ , also  $r = 0 = n - n = n - k(\pi) \bmod 2$ .

$r > 0$ :

Sei  $\pi = \tau_1 \cdots \tau_{r-1} \tau_r$  mit  $\tau_i$  Transposition,  $\sigma := \tau_1 \cdots \tau_{r-1}$ , also  $\pi = \sigma \tau_r$ , und setze  $c := k(\sigma) < k(\pi)$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist  $r - 1 \equiv n - c \bmod 2$  also  $r \equiv n - (c - 1) \bmod 2$ .

Wir schreiben noch  $\sigma$  in Zykelzerlegung, etwa

$$\sigma = (x_1 \dots x_{l_1})(y_1 \dots y_{l_2}) \cdots (w_1 \dots w_{l_c}) \quad (1.1)$$

wobei Zykel der Länge 1 auch mitgezählt werden.

$\tau_r$  ist eine Transposition, also sei  $\tau_r = (u \ v)$ . Dann gibt es zwei Fälle zu diskutieren: Entweder kommt  $(u \ v)$  im selben Zykel vor, oder in 2 verschiedenen Zykeln, da  $\tau_r = (u \ v)$  von Länge 2 ist.

1. Fall:  $u, v$  kommen in Formel (1.1) im selben Zykel vor.

O.B.d.A. sei  $u = x_{l_1}$  und  $v = x_m$  mit  $1 \leq m \leq l_1 - 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \sigma \tau_r &= (x_1 \dots x_{l_1})(y_1 \dots y_{l_2}) \cdots (w_1 \dots w_{l_c}) (u \ v) \\ &= (x_1 \dots x_{l_1})(y_1 \dots y_{l_2}) \cdots (w_1 \dots w_{l_c}) (x_{l_1} \ x_m) \\ &= (x_1 \dots x_{l_1})(x_{l_1} \ x_m) (y_1 \dots y_{l_2}) \cdots (w_1 \dots w_{l_c}) \\ &= (x_1 \dots x_m)(x_{m+1} \ x_{l_1})(y_1 \dots y_{l_2}) \cdots (w_1 \dots w_{l_c}) \end{aligned}$$

wobei die dritte Zeile aus Kommutativität disjunkter Zykel folgt, und die vierte Zeile, also die Gleichheit

$$(x_1 \dots x_{l_1})(x_{l_1} \ x_m) = (x_1 \dots x_m)(x_{m+1} \ x_{l_1})$$

erwirbt man, wenn man die linke Seite auf  $m$  bzw.  $x_{l_1}$  anwendet.

Somit ist  $\pi = \sigma \tau_r$  ein Produkt von  $c + 1$  disjunkten Zykeln also

$$k(\pi) = k(\sigma \tau_r) = c + 1.$$

2. Fall:  $u, v$  liegen in Formel (1.1) in verschiedenen Zykeln.

O.B.d.A. sei  $u = x_{l_1}$  und  $v = y_{l_2}$ , also

$$\begin{aligned} \sigma \tau_r &= (x_1 \dots x_{l_1})(y_1 \dots y_{l_2}) \cdots (w_1 \dots w_{l_c}) (u \ v) \\ &= (x_1 \dots x_{l_1})(y_1 \dots y_{l_2}) \cdots (w_1 \dots w_{l_c}) (x_{l_1} \ y_{l_2}) \\ &= (x_1 \dots x_{l_1})(y_1 \dots y_{l_2})(x_{l_1} \ y_{l_2}) \cdots (w_1 \dots w_{l_c}) \\ &= (x_1 \dots x_{l_1} \ y_1 \dots y_{l_2}) \cdots (w_1 \dots w_{l_c}) \end{aligned}$$

wobei die dritte Zeile wieder aus Kommutativität disjunkter Zykel folgt, und die vierte Zeile, also die Gleichheit

$$(x_1 \dots x_{l_1})(y_1 \dots y_{l_2})(x_{l_1} \ y_{l_2}) = (x_1 \dots x_{l_1} \ y_1 \dots y_{l_2})$$

erwirbt man, wenn man die linke Seite auf  $x_{l_1}$  bzw.  $y_{l_2}$  anwendet.

Somit ist  $\pi = \sigma \tau_r$  ein Produkt von  $c - 1$  disjunkten Zykeln also

$$k(\pi) = k(\sigma \tau_r) = c - 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt somit  $r \equiv n - (c - 1) \pmod{2}$ , und die beiden Fälle liefern  $k(\pi) = c \pm 1$ , also gilt tatsächlich  $r \equiv n - k(\pi) \pmod{2}$ .  $\square$

Der Beweis sagt uns, dass die Anzahl der disjunkten Zykeln nach Multiplikation mit einer Transposition entweder um 1 zunimmt, oder um 1 sinkt.

Außerdem ist der Beweis wohl anders als der in Linearer Algebra vorgestellt wird, insb. wohl viel rechnerischer und vielleicht nicht ganz übersichtlich inzwischen. Ein Message daraus wäre: Keine Angst vor scheinbar lange konkrete Rechnungen, daraus kann man auch Informationen gewinnen!

**Definition 1.9.** Eine Permutation  $\pi \in S_n$  heißt **gerade**, g.d.w.  $\pi$  Produkt von einer geraden Anzahl von Transpositionen ist. Andererseits heißt  $\pi$  **ungerade**. Damit definieren wir das **Signum** als

$$\text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}, \pi \mapsto (-1)^{a_\pi}$$

wobei  $a_\pi$  die Anzahl der Transposition in der Darstellung von  $\pi$  als Produkt von Transpositionen.

**Bemerkung 1.10.**

- a) Nach Proposition 1.8 ist  $\text{sgn}$  wohldefiniert.
- b) Sei  $\pi = \tau_1 \cdots \tau_r$  und  $\sigma = \tau'_1 \cdots \tau'_s$  Produkte von Transpositionen. Dann gilt

$$\pi^{-1} = \tau_r \cdots \tau_1 \quad \text{sowie} \quad \sigma\pi = \tau'_1 \cdots \tau'_s \tau_1 \cdots \tau_r$$

und bzgl. Signum gilt

$$\text{sgn}(\pi^{-1}) = (-1)^r = \text{sgn}(\pi)$$

sowie

$$\text{sgn}(\sigma\pi) = (-1)^{r+s} = (-1)^s (-1)^r$$

also ist  $\text{sgn}$  ein Gruppenhomomorphismus.

- c) Sei  $A_n := \{\pi \in S_n \mid \pi \text{ gerade}\} = \ker(\text{sgn})$ , also ist  $A_n$  eine Untergruppe von  $S_n$  und wir nennen  $A_n$  die **alternierende Gruppe**. Es gilt

$$|A_n| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{n!}{2}$$

da  $C_2 \cong S_n / \ker(\text{sgn}) = S_n / A_n$  und damit  $2 = |C_2| = |S_n / A_n| = |S_n| / |A_n|$  nach Satz von Lagrange.

Nun sind wir in der Lage, eine „algebraische“ Definition für die symmetrische Gruppe einzuführen:

**Definition 1.11.** Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$  eine beliebige Menge von  $n - 1$  Elementen definieren wir eine Gruppe

$$G_n := \left\langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \mid \tau_i^2 = 1 \wedge 1 = (\tau_i \tau_j)^{k(i,j)} \text{ mit } k(i,j) = \begin{cases} 2 & \text{falls } |j-i| > 1 \\ 3 & \text{falls } |j-i| = 1 \end{cases} \right\rangle.$$

Die Gruppe  $G_n$  ist eine Quotientengruppe der freien Gruppe von  $n - 1$  Elementen. Wir werden zeigen, dass  $G_n$  isomorph zu  $S_n$  ist.

**Bemerkung 1.12.**

a) Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$  beobachten wir:

- Für  $|i - j| > 1$  ist  $(\tau_i \tau_j)^2 = 1$  äquivalent zu  $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ , und wir nennen diese Gleichung **(R1)**.
- Für  $|i - j| = 1$  ist  $(\tau_i \tau_j)^3 = 1$  äquivalent zu  $\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$ , und wir nennen diese Gleichung **(R2)** oder auch „Braid Relation“.

b) Einige Beispiele:

- $G_1 = \langle \rangle = \{1\}$ .
- $G_2 = \langle \tau_1 \mid \tau_1^2 = 1 \rangle \cong C_2 \cong S_2$ .
- $G_3 = \langle \tau_1, \tau_2 \mid \tau_1^2 = 1 = \tau_2^2 \wedge \tau_1 \tau_2 \tau_1 = \tau_2 \tau_1 \tau_2 \rangle = \{1, \tau_1, \tau_2, \tau_1 \tau_2, \tau_2 \tau_1, \tau_1 \tau_2 \tau_1\} \cong S_3$ .

Um  $G_n \cong S_n$  zu zeigen, ist es keine schlechte Idee, zuerst die Ordnung von  $G_n$  zu bestimmen. Dies gelingt mit dem folgenden technischen Lemma:

**Lemma 1.13.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $G_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_n \mid \tau_i^2 = 1, (R1), (R2) \rangle$  wie in Definition 1.11. Für  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  definiert man

$$\sigma_i := \tau_{n-1} \tau_{n-2} \cdots \tau_{i+1} \tau_i$$

sowie

$$H_i := G_{n-1} \sigma_i \quad \text{und} \quad H_n := G_{n-1}$$

also sind  $H_i$  Rechtsnebenklassen von  $G_n$  bzgl.  $G_{n-1}$  (aber die  $H_i$ 's könnten gleich sein und es könnte noch mehr RNK geben).

Dann gilt für jedes  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$H_i \tau_j = \begin{cases} H_i & \text{falls } 1 \leq j < i - 1 \\ H_{i-1} & \text{falls } j = i - 1 \\ H_{i+1} & \text{falls } j = i \\ H_i & \text{falls } i + 1 \leq j \leq n - 1. \end{cases}$$

**Beweis.** Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

a) Sei  $j = i$ . Dann gilt

$$H_i \tau_j = G_{n-1} \sigma_i \tau_i = G_{n-1} \sigma_{i+1} = H_{i+1}$$

wobei die zweite Gleichheit aus  $\tau_i^2 = 1$  folgt.

b) Sei  $j = i - 1$ . Dann gilt

$$H_i \tau_j = G_{n-1} \sigma_i \tau_{i-1} = G_{n-1} \sigma_{i-1} = H_{i-1}$$

wobei die zweite Gleichheit ebenfalls aus  $\tau_{i-1}^2 = 1$  folgt.

c) Sei  $1 \leq j < i - 1$ . Dann gilt

$$H_i \tau_j = G_{n-1} \sigma_i \tau_j = G_{n-1} \tau_j \sigma_i = G_{n-1} \sigma_i = H_i$$

wobei die zweite Gleichheit aus sukzessiver Anwendung von (R1) folgt und die dritte Gleichheit wegen  $\tau_j \in G_{n-1}$ .

d) Sei  $i + 1 \leq j \leq n - 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} H_i \tau_j &= G_{n-1} \sigma_i \tau_j = G_{n-1} (\tau_{n-1} \tau_{n-2} \cdots \tau_j \tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1} \tau_i) \tau_j \\ &= G_{n-1} \tau_{n-1} \tau_{n-2} \cdots \tau_j \tau_{j-1} \tau_j \cdots \tau_{i+1} \tau_i \\ &= G_{n-1} \tau_{n-1} \tau_{n-2} \cdots \tau_j \tau_{j-1} \tau_j \tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1} \tau_i \\ &= G_{n-1} \tau_j \tau_{j-1} (\tau_{n-1} \tau_{n-2} \cdots \tau_j \tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1} \tau_i) \\ &= G_{n-1} \sigma_i \end{aligned}$$

wobei in 2. Zeile (R1) auf  $\tau_j$  benutzt wird, in 3. Zeile (R2) auf den untergestrichenen Teil angewandt, in 4. Zeile (R1) auf  $\tau_{j-1}$ , und in letzter Zeile  $\tau_{j-1} \in G_{n-1}$  sowie die Definition von  $\sigma_i$ .  $\square$

**Proposition 1.14.** Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$|G_n| = n!.$$

**Beweis.** Die Strategie ist Induktion nach  $n$ . Für  $n = 1, 2, 3$  ist die Behauptung offenbar korrekt.

a) Angenommen, die Behauptung gelte für  $n - 1$ , also  $|G_{n-1}| = (n - 1)!$ . Mit der Notation von Lemma 1.13 werden wir zeigen, dass  $G_n$  eine disjunkte Vereinigung von den  $H_i$ 's ist.

In c) unten zeigen wir  $H_i \cap H_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

In b) unten zeigen wir  $G = \bigcup_{i=1}^n H_i$ .

Dann folgt  $|G_n| = \sum_{i=1}^n |H_i| = n \cdot |H_n| = n \cdot |G_{n-1}| = n!$ .

b) Klar ist  $H_i \subseteq G_n$ , also  $\bigcup_{i=1}^n H_i \subseteq G_n$ . Die Umkehrinklusion zeigen wir in zwei Schritten:

i. Nach Lemma 1.13 gilt

$$\begin{aligned} (H_1 \cup \cdots \cup H_n) \tau_j &= H_1 \tau_j \cup \cdots \cup H_n \tau_j \\ &= H_1 \cup \cdots \cup H_{j-1} \cup H_{j+1} \cup H_j \cup H_{j+2} \cup \cdots \cup H_n \\ &= \bigcup_{i=1}^n H_i. \end{aligned}$$

ii. Es ist  $1 \in H_n \subseteq \bigcup_{i=1}^n H_i$ , d.h. Multiplikation beider Seiten mit  $\tau_j$  ergibt  $\tau_j \in \bigcup_{i=1}^n H_i \tau_j = \bigcup_{i=1}^n H_i$ . Somit ist  $G_n \subseteq \bigcup_{i=1}^n H_i$ .

c) Gegenannahme: Für  $i \neq j$  und  $i \neq n \neq j$  ist  $\sigma_i \in H_j = G_{n-1} \sigma_j$ , dann gilt

$$\begin{aligned} G_{n-1} \ni \sigma_i \sigma_j^{-1} &= (\tau_{n-1} \tau_{n-2} \tau_{n-3} \cdots \tau_{i+1} \tau_i) (\tau_{n-1} \tau_{n-2} \cdots \tau_j)^{-1} \\ &= (\tau_{n-1} \tau_{n-2} \tau_{n-3} \cdots \tau_{i+1} \tau_i) (\tau_j \cdots \tau_{n-2} \tau_{n-1}) \\ &= \tau_{n-1} \tau_{n-2} \tau_{n-3} \cdots \tau_{i+1} \tau_i \tau_j \cdots \tau_{n-2} \\ &= \tau_{n-2} \tau_{n-1} \tau_{n-2} (\tau_{n-3} \cdots \tau_{i+1} \tau_i \tau_j \cdots \tau_{n-2}) \\ &=: \tau_{n-2} \tau_{n-1} \tau_{n-2} \quad x \end{aligned}$$

wobei wir in 3. Zeile (R1) auf  $\tau_{n-1}$  anwenden und in 4. Zeile (R2) auf den untergestrichenen Teil. Nach obiger Rechnung gilt

$$\tau_{n-2}\tau_{n-1}\tau_{n-2}x \in G_{n-1}$$

und dazu ist  $x, \tau_{n-2} \in G_{n-1}$ , daher  $\tau_{n-1} \in \tau_{n-2}G_{n-1}(\tau_{n-2}x)^{-1} = G_{n-1}$ , also  $\tau_{n-1} \in G_{n-1}$ , woraus  $G_n \subseteq G_{n-1}$  folgt. Dies ist aber unmöglich! Somit muss  $\sigma_i \notin H_j$  sein, d.h.  $H_i \neq H_j$  falls  $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$  und  $i \neq j$ . Da  $H_i, H_j$  Nebenklassen einer Äquivalenzrelation sind, folgt  $H_i \cap H_j = \emptyset$ . Für den verbleibenden Fall  $i \neq j = n$  folgt die Behauptung analog.  $\square$

**Satz 1.15.** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$G_n \cong S_n.$$

**Beweis.** Für jedes  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  erfüllt  $(i \ i+1) \in S_n$  die Relationen in Definition 1.11, daher definieren wir eine Abbildung

$$\gamma: G_n \rightarrow S_n, \tau_i \mapsto (i \ i+1)$$

und wenn  $\gamma$  multiplikativ erweitert wird, ist  $\gamma$  ein Gruppenhomomorphismus.

Da  $\{(i \ i+1) \in S_n \mid 1 \leq i \leq n-1\}$  ein Erzeugendensystem von  $S_n$  ist, ist  $\gamma$  automatisch surjektiv. Mit 1.14 folgt, dass  $\gamma$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

**Bemerkung 1.16.** Sei  $G$  eine Gruppe (für uns  $G = S_n$ ). Elemente  $g, h \in G$  sind **konjugiert**,  $g \sim h$ , g.d.w. es ein  $x \in G$  gibt, s.d.  $g = xhx^{-1}$  gilt. Dies ist eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen heißen die **Konjugationsklassen**. Für ein  $g \in G$  schreiben wir die Konjugationsklassen von  $g$  in  $G$  als

$$\mathcal{C}_g := \{h \in G \mid h \sim g\}.$$

Wir werden sehen, Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe durch Partitionen von  $n$  zu parametrisieren sind. Um dies zu realisieren, führen wir folgende Definition ein:

**Definition 1.17.** Sei  $\pi = \pi_1 \cdots \pi_t \in S_n$  ein Produkt disjunkter Zyklen inklusive 1-Zykel. Sei  $l_i := |\text{supp}(\pi_i)|$  die Länge vom Zykel  $\pi_i$ . O.B.d.A. sei  $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_t$ . Dann definieren wir

$$\lambda(\pi) := (l_1 \ l_2 \ \dots \ l_t) \vdash n$$

als den **Zykeltyp** von  $\pi$ .

Beispielsweise hat  $\pi = (2 \ 3)(4 \ 5 \ 6)(7 \ 8)$  in  $S_8$  den Zykeltyp  $\lambda(\pi) = (3 \ 2 \ 2 \ 1)$  aber in  $S_{10}$  den Zykeltyp  $\lambda(\pi) = (3 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1)$ .

Wir wollen zeigen, dass Elemente in gleichen Konjugationsklassen den gleichen Zykeltyp haben. Dies gelingt mit dem folgenden Lemma:

**Lemma 1.18.** Sei  $\pi \in S_n$  und  $(a_1 \ \dots \ a_r) \in S_n$  ein  $r$ -Zykel. Dann gilt

$$\pi(a_1 \ \dots \ a_r)\pi^{-1} = (\pi(a_1) \ \dots \ \pi(a_r)).$$

**Beweis.** Wir zeigen die Gleichheit dadurch, dass beide Permutationen angewandt auf gleiches  $x \in \{1, \dots, n\}$  immer gleiches Ergebnis liefert:

- Für  $x \in \{\pi(a_1), \dots, \pi(a_r)\}$  gilt

$$(\pi(a_1 \dots a_r)\pi^{-1})(\pi(a_i)) = \begin{cases} \pi(a_{i+1}) & \text{falls } i < r \\ \pi(a_1) & \text{falls } i = r. \end{cases}$$

- Sei  $x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\pi(a_1), \dots, \pi(a_r)\}$ . Da  $\pi$  bijektiv ist, existiert  $y \in \{1, \dots, n\}$ , s.d.  $\pi(y) = x$ . Nach Konstruktion ist  $y \notin \{a_1, \dots, a_r\}$ , und somit

$$(\pi(a_1 \dots a_r)\pi^{-1})(x) = x. \quad \square$$

**Satz 1.19.** Zwei Elemente  $\sigma, \tau \in S_n$  sind konjugiert, g.d.w.  $\sigma$  und  $\tau$  gleichen Zykeltyp haben, d.h.  $\lambda(\sigma) = \lambda(\tau)$ .

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “

Seien  $\sigma, \tau \in S_n$  konjugiert, also existiert ein  $\pi \in S_n$  s.d.  $\tau = \pi\sigma\pi^{-1}$ . Wir schreiben  $\sigma = \prod_{i=1}^t \sigma_i$  als Produkt von disjunkten Zykeln und damit ist

$$\tau = \pi \left( \prod_{i=1}^t \sigma_i \right) \pi^{-1} = \prod_{i=1}^t \pi \sigma_i \pi^{-1}.$$

Nach Lemma 1.18 sind alle  $\pi \sigma_i \pi^{-1}$  wieder Zykeln und sie sind auch disjunkt, also ist  $\tau$  ein Produkt von disjunkten Zykeln. Da  $\sigma_i$  und  $\pi \sigma_i \pi^{-1}$  dieselbe Zykellänge haben, gilt  $\lambda(\sigma) = \lambda(\tau)$ .

„ $\Leftarrow$ “

Für  $\sigma, \tau \in S_n$  mit gleichem Zykeltyp schreiben wir  $\sigma = \prod_{i=1}^t \sigma_i$  und  $\tau = \prod_{i=1}^t \tau_i$  als Produkt von disjunkten Zykeln und o.B.d.A. ordnen wir  $\sigma_i$  und  $\tau_i$  so an, dass  $\sigma_i$  und  $\tau_i$  gleiche Zykellänge haben, d.h.

$$\begin{aligned} \sigma &= (a_1 \dots a_{l_1}) (b_1 \dots b_{l_2}) \dots \\ \tau &= (\alpha_1 \dots \alpha_{l_1}) (\beta_1 \dots \beta_{l_2}) \dots \end{aligned}$$

und wir definieren ein  $\pi \in S_n$  durch  $\pi(a_i) := \alpha_i$ ,  $\pi(b_i) := \beta_i$ ... Nach Konstruktion gilt  $\pi\sigma\pi^{-1} = \tau$ , d.h.  $\sigma \sim \tau$ .  $\square$

**Bemerkung 1.20.** Elemente in einer Konjugationsklasse haben dieselbe Ordnung, denn für  $\pi \in S_n$  mit disjunkter Zykelzerlegung  $\pi = \prod_{i=1}^t \pi_i$  gilt

$$\text{ord}(\pi) = \text{kgV}\{l_i \mid 1 \leq i \leq t, l_i \text{ Länge von } \pi_i\}.$$





# KAPITEL 2

## ANZAHL EINFACHER MODULN

Als nächstes wiederholen wir kurz einiges von der (Gruppen-)Darstellungstheorie.

**Definition 2.1.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper und  $G$  eine endlich Gruppe. Die Menge

$$\mathbb{F}G := \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in K \right\}$$

versehen mit der Multiplikation

$$\left( \sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left( \sum_{h \in G} \beta_h h \right) := \sum_{u \in G} \gamma_u u$$

wobei

$$\gamma_u := \sum_{g, h \in G, gh=u} \alpha_g \beta_h$$

nennen wir die **Gruppenalgebra** von  $G$  bzgl.  $\mathbb{F}$ .

**Definition 2.2.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $\mathbb{F}$  ein Körper.

- a) Für ein  $n \in \mathbb{N}$  ist ein Gruppenhomomorphismus  $\varrho: G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$  eine **Darstellung** von  $G$  über  $\mathbb{F}$ . Für einen  $n \in \mathbb{N}$  und  $V$  einen  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{F}$ -Vektorraum ist eine Algebrehomomorphismus  $\varrho: \mathbb{F}G \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$  eine **Darstellung** von  $\mathbb{F}G$ .
- b) Eine abelsche Gruppe  $V$  ist ein  **$\mathbb{F}G$ -Modul**, g.d.w. es eine Abbildung

$$\mathbb{F}G \times V \rightarrow V, (\pi, v) \mapsto \pi \cdot v$$

existiert, s.d. die vier Eigenschaften

- $(r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v,$
- $r \cdot (v + w) = r \cdot v + r \cdot w,$
- $r \cdot (s \cdot v) = (rs) \cdot v$
- $1_{\mathbb{F}G} \cdot v = v$

für jedes  $v, w \in V$  und jedes  $r, s \in \mathbb{F}G$  gelten.

**Bemerkung 2.3.** Moduln über  $\mathbb{F}$ -Algebren sind automatisch  $\mathbb{F}$ -Vektorräume, da  $\mathbb{F}$  in  $\mathbb{F}G$  eingebettet wird.

**Bemerkung 2.4.** Es gilt die **Äquivalenz zwischen Moduln und Darstellungen**:

- a) Sei  $\varrho: \mathbb{F}G \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$  eine Darstellung. Dann kann man

$$\mathbb{F}G \times V \rightarrow V, (\pi, v) \mapsto \pi \cdot v := \varrho(\pi)(v)$$

definieren und diese Abbildung linear auf  $\mathbb{F}G$  erweitern. Dadurch ist  $V$  ein  $\mathbb{F}G$ -Modul.

b) Sei  $V$  ein  $\mathbb{F}G$ -Modul. Dann definiert man

$$\varrho: \mathbb{F}G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(V), [\varrho(\pi): v \mapsto \pi \cdot v].$$

$\varrho(\pi)$  ist eine  $\mathbb{F}$ -lineare Abbildung, und man kann leicht überprüfen, dass  $\varrho$  ein Algebrehomomorphismus ist.

**Definition 2.5.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{F}G$ -Modul.

- a) Ein **Unterm modul**  $U \leq V$  ist ein Untervektorraum von  $V$  mit  $\pi \cdot u \in U$  für jedes  $\pi \in G$  und  $u \in U$ .
- b)  $V$  heißt **einfach**, g.d.w. er keine echten nicht-trivialen Untermoduln besitzt. Insbesondere ist der Nullmodul nicht einfach.
- c) Eine Kette von Untermoduln  $0 = U_0 < U_1 < \dots < U_t = V$  von  $V$  heißt **Kompositionsreihe**, g.d.w. für jedes  $1 \leq i \leq t$  der Quotientenmodul  $U_i/U_{i-1}$  einfach ist. Die Quotientenmoduln  $U_i/U_{i-1}$  heißen die **Kompositionsfaktoren** von  $V$ .

**Proposition 2.6.** Jeder endlich dimensionale  $KG$ -Modul  $V$  hat eine Kompositionsreihe.

**Beweis.** Strategie: Induktion nach  $\dim V =: n$ .

Ist  $V$  einfach, so ist  $\{0\} < V$  eine Kompositionsreihe.

Sei also  $\dim V = n$  und  $V$  nicht einfach. Dann hat  $V$  echte nicht-triviale Untermoduln, und wir wählen  $U \subsetneq V$  mit maximaler Dimension. Mit Untermodulkorrespondenz folgt, dass  $V/U$  einfach ist. Da  $\dim U < \dim V = n$  ist, hat  $U$  nach Induktionsvoraussetzung eine Kompositionsreihe, etwa  $0 = U_0 < U_1 < \dots < U_s = U$  und somit erhält man eine Kompositionsreihe von  $V$ , nämlich

$$0 = U_0 < \dots < U_s = U < V. \quad \square$$

**Satz 2.7. (Jordan-Hölder)** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{F}G$ -Modul und dazu seien  $0 = U_0 < U_1 < \dots < U_s = V$  und  $0 = V_0 < V_1 < \dots < V_t = V$  zwei Kompositionsreihe von  $V$ . Dann gilt  $s = t$  und es gibt eine Permutation  $\pi \in S_t$  mit  $U_i/U_{i-1} \cong V_{\pi(i)}/V_{\pi(i)-1}$ .

Der Beweis zu Jordan-Hölder wird hier übersprungen.

**Folgerung 2.8.** Sei  $A := \mathbb{F}G$  eine endlich dimensionale Algebra, dann existieren bis auf Isomorphie nur endlich viele einfache  $A$ -Moduln.

**Beweis.**

a) Sei  $S$  ein beliebiger einfacher  $A$ -Modul und  $0 \neq s \in S$ . Die Abbildung

$$\psi: A \rightarrow S, a \mapsto a \cdot s$$

ist  $A$ -linear (Nachrechnen) und surjektiv ( $\text{im}(\psi) \neq 0$  Untermodul von  $S$  und  $S$  einfach), also gilt  $A/\ker(\psi) \cong S$  nach dem Homomorphiesatz.

- b) Nach a) ist  $\ker(\psi) < A$  ein maximaler Untermodul von  $A$  und für eine Kompositionsreihe  $0 = U_0 < U_1 < \dots < U_t = \ker(\psi) < {}_A A$  von  ${}_A A$  ist der letzte Kompositionsfaktor isomorph zu  $S$ . Das bedeutet, dass  $S$  als Kompositionsfaktoren von  ${}_A A$  vorkommt. Da  $S$  beliebig gewählt ist, kommt jeder einfacher Modul als Kompositionsfaktor von  ${}_A A$  vor. Da  $\dim {}_A A < \infty$ , hat  ${}_A A$  nach Jordan-Hölder bis auf Isomorphie nur endlich viele Kompositionsfaktoren, somit gibt es nur endlich viele einfachen Moduln von  ${}_A A$ .  $\square$

Wir zitieren noch ein Ergebnis aus der Darstellungstheorie:

**Satz 2.9.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $\mathbb{F}$  ein Zerfällungskörper von  $G$ , d.h. einfache  $\mathbb{F}G$ -Moduln bleiben weiterhin einfach als  $L$  $G$ -Moduln für jede Körpererweiterung  $L/\mathbb{F}$ . Für  $G = S_n$  erfüllen  $\mathbb{Q}$  bzw.  $\mathbb{Z}_p$  diese Bedingung. Dann gilt

- a) Falls  $\text{char}\mathbb{F} = 0$ , dann gilt

$$\# \text{ einfacher } \mathbb{F}G\text{-Moduln} = \# \text{ Konjugationsklassen von } G.$$

- b) Falls  $\text{char}\mathbb{F} = p$  eine Primzahl, dann gilt

$$\# \text{ einfacher } \mathbb{F}G\text{-Moduln} = \# p\text{-reguläre Konjugationsklassen von } G.$$

Beweis zu dem Satz wird ebenfalls übersprungen. Der Begriff „ $p$ -reguläre Konjugationsklasse“ wird aber gleich noch definiert.

Was wir bisher gemacht haben ist eine **Klassifikation von den Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe** in dem Sinne: Es gibt also so viele Konjugationsklassen von  $S_n$  wie Anzahl der Partitionen von  $n$ . Elemente in einer Konjugationsklassen haben immer gleichen Zykeltyp nach Satz 1.19, und jeder Zykeltyp ist eine Partition von  $n$ ; umgekehrt kann man für jede vorgegebene Partition  $\lambda \vdash n$  eine Permutation  $\pi \in S_n$  konstruieren, s.d.  $\pi$  gerade den Zykeltyp  $\lambda$  hat.

Damit erhalten wir:

**Folgerung 2.10.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char}\mathbb{F} = 0$ . Dann sind die einfachen  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln bis auf Isomorphie parametrisiert durch die Partitionen von  $n$ .

Wir schreiben  $S^\lambda$  für einfache  $\mathbb{F}S_n$ -Modul korrespondierend zu Konjugationsklassen mit Zykeltyp  $\lambda \vdash n$  und nennen  $S^\lambda$  ein **Specht-Modul**.

In den nächsten Kapiteln werden wir Schritt für Schritt die Specht-Moduln konstruieren, und wir werden sehen, dass die Konstruktion unabhängig vom Körper ist. Deswegen werden wir uns dafür interessieren, wann die Specht-Moduln für  $\text{char}\mathbb{F} \neq 0$  weiterhin einfach bleiben. Dazu benötigen wir den Begriff der  $p$ -Regularität:

**Definition 2.11.** Sei  $p \in \mathbb{N}$ . Eine Partition  $\lambda = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots) \vdash n \in \mathbb{N}$  heißt  **$p$ -singulär**, g.d.w. es ein  $i \in \mathbb{N}_0$  gibt, s.d.  $\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \dots = \lambda_{i+p}$  gilt. Andererfalls heißt die Partition  $\lambda$   **$p$ -regulär**.

**Beispiel 2.12.** Die Partition  $\lambda = (1 \ 1 \ 1)$  ist 2-singulär und 3-singulär aber 5-regulär. Die Partition  $\mu = (4 \ 3 \ 3 \ 1)$  ist 2-singulär aber 3-regulär.

**Bemerkung 2.13.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $g, h \in G$  mit  $g \sim h$ . Dann wissen wir Bemerkung 1.20, dass  $\text{ord}(g) = \text{ord}(h)$ . Damit können wir die **Ordnung einer Konjugationsklassen** definieren durch

$$\text{ord}(\mathcal{C}_g) := \text{ord}(g).$$

**Definition 2.14.** Sei  $G$  eine Gruppe,  $g \in G$  und  $p \in \mathbb{N}$ . Eine Konjugationsklasse  $\mathcal{C}_g$  heißt  **$p$ -regulär**, g.d.w.  $\text{ggT}(\text{ord}(\mathcal{C}_g), p) = 1$  gilt.

Sei nun  $G = S_n$ ,  $p$  eine Primzahl und  $\mathcal{C}_\lambda$  eine Konjugationsklasse vom Zykeltyp  $\lambda$  mit  $\lambda = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots) \vdash n$ . Dann ist  $\mathcal{C}_\lambda$   $p$ -regulär, g.d.w.  $\text{kgV}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots)$  und  $p$  teilerfremd sind, also g.d.w. für jedes  $i$  gilt  $p \nmid \lambda_i$ .

**Beispiel 2.15.** Für  $G = S_3$  und  $p = 2$  erhält man

$\lambda$	$\lambda$ $p$ -reg.?	$\mathcal{C}_\lambda$ $p$ -reg.?	$g \in \mathcal{C}_\lambda$	$\text{ord}(\mathcal{C}_\lambda)$
(3)	✓	✓	(1 2 3)	3
(2 1)	✓	×	(1 2)	2
(1 1 1)	×	✓	(1)(2)(3)	1

Und für  $G = S_5$  und  $p = 2$  oder  $p = 3$  erhält man

$\lambda$ 2-reg.?	$\lambda$ 3-reg.?	$\lambda$	$\pi \in \mathcal{C}_\lambda$	$\text{ord}(\pi)$	$\mathcal{C}_\lambda$ 2-reg.?	$\mathcal{C}_\lambda$ 3-reg.?
✓	✓	(5)	(1 2 3 4 5)	5	✓	✓
✓	✓	(4 1)	(1 2 3 4)	4	×	✓
✓	✓	(3 2)	(1 2 3)(4 5)	6	×	×
×	✓	(3 1 1)	(1 2 3)	3	✓	×
×	✓	(2 2 1)	(1 2)(3 4)	2	×	✓
×	×	(2 1 1 1)	(1 2)	2	×	✓
×	×	(1 1 1 1 1)	id	1	✓	✓

Man sieht von den Tabellen, dass die Anzahl der  $p$ -regulären Partitionen immer gleich der Anzahl der  $p$ -regulären Konjugationsklassen gilt, allerdings ist das Verhalten der Bijektion dazwischen ziemlich unübersichtlich.

Wir zeigen nun eine Gleichmächtigkeit zwischen

- der Menge der  $p$ -regulären Partitionen von  $n$ , sowie
- der Menge der  $p$ -regulären Konjugationsklassen von  $S_n$ .

Der Beweis geschieht über die „Erzeugendenfunktionen“, mit denen man die Anzahl der beiden Mengen vergleichen kann, ohne die Bijektion dazwischen explizit herstellen zu müssen:

**Bemerkung 2.16.** Sei  $R$  ein Ring. Die Menge

$$R[[X]] := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n X^n \mid a_n \in R \right\}$$

versehen mit termweise Addition und Faltung als Multiplikation nennt man den **Ring der formalen Potenzreihen** über  $R$ . Elemente von  $R[[X]]$  nennt man eine **formale Potenzreihe** oder eine **Erzeugendenfunktion**.

In  $R[[X]]$  gelten folgende Eigenschaften:

- Für  $A := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n X^n, B := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n X^n \in R[[X]]$  ist  $A = B$  g.d.w.  $a_n = b_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt.
- $R[[X]]$  ist ein Ring mit Eins, also  $1_{R[[X]]} = 1_R$ .
- Falls  $R$  ein Integritätsbereich ist, so auch  $R[[X]]$ .
- Ein  $A := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n X^n \in R[[X]]$  ist invertierbar, g.d.w.  $a_0$  in  $R$  invertierbar ist.

**Beispiel 2.17.**

- a) Es ist  $A := 1_R - X \in R[[X]]$  und nach Bemerkung 2.16 ist  $1_R - X$  invertierbar. Wir bestimmen nun die Inverse von  $A$ . Sei  $B := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n X^n$  invers zu  $A$ , also gilt  $AB = 1_R = BA$ . Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{array}{llll} X^0 & a_0 b_0 = 1_R & \rightsquigarrow & b_0 = 1_R \\ X^1 & a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0_R & \rightsquigarrow & b_1 = 1_R \\ X^2 & a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0_R & \rightsquigarrow & b_2 = 1_R \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}$$

also ist

$$(1_R - X)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} X^n.$$

- b) Die endlichen geometrischen Summen liegen auch in  $R[[X]]$  und es gilt

$$\sum_{k=0}^n X^k = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}.$$

Noch ein Beispiel zum Nutzen der Erzeugendenfunktion:

**Beispiel 2.18.** In einem mathematischen See gibt es 50 Frösche am Anfang vom Jahr 0. Die Frösche werden sich im Jahr um 4-fach vermehrt und am Silvester jedes Jahres werden 100 Frösche aus dem See ausgenommen. Man interessiert sich für die Anzahl der Frösche von jedem Jahr.

Zur Modellierung definieren wir  $a_n := \# \text{Frösche am Anfang vom Jahr für } n \in \mathbb{N}_0$ . Nach Voraussetzung ist  $a_0 = 50$  sowie  $a_{n+1} = 4a_n - 100$ .

Ziel ist es, eine explizite Formel für  $a_n$  zu finden.

Dazu setzen wir  $A := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n X^n$ . Zusammen mit der Rekursionsformel erhalten wir

$$A - a_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_{n+1} X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} 4a_n X^{n+1} - \sum_{n \in \mathbb{N}_0} 100 X^{n+1} = 4AX - 100X \sum_{n \in \mathbb{N}_0} X^n.$$

Dank Beispiel 2.17 a) ist  $(1 - X)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} X^n$ , und somit ist

$$A - a_0 = 4AX - \frac{100X}{1 - X}.$$

Auflösen nach  $A$  ergibt

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_0}{1-4X} - \frac{100X}{(1-X)(1-4X)} \\ &= a_0 \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (4X)^n - 100X \left( \sum_{n \in \mathbb{N}_0} X^n \right) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (4X)^n \right) \end{aligned}$$

wobei die 2. Zeile nochmal dank Beispiel 2.17 a) gilt.

Wir schreiben  $a_m := [X^m]A$  und Ziel ist nun die Koeffizienten von  $X^m$  im obigen Ausdruck zu bestimmen. Beachte

$$\begin{aligned} a_m &= a_0 4^m - 100[X^{m-1}] \left( \sum_{n \in \mathbb{N}_0} X^n \right) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (4X)^n \right) \\ &= 4^m a_0 - 100 \sum_{i=0}^{m-1} 4^{m-1-i}. \end{aligned}$$

### Bemerkung 2.19. Methode zum Abzählen bzw. Lösen einer Rekursion

Gegeben ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $a_n \in R$ . Man bildet  $A := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n X^n$  und manipuliert den Potenzreihenausdruck auf geeigneter Art und Weise. Wenn man Glück hat, wird der Ausdruck nach Umformung die Gestalt  $A = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n X^n$  hat, bei der die Koeffizienten  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  bekannt ist. Da  $a_n = b_n$  ist, erhält man somit eine neue Beschreibung für  $a_n$ . Achtung: Diese Methode garantiert keinen Erfolg.

**Satz 2.20.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\#p\text{-regulärer Konjugationsklassen von } S_n = \#p\text{-regulärer Partitionen von } n.$$

**Beweis.**

- a) Sei  $\lambda$  eine  $p$ -reguläre Partition von  $n$  und wir schreiben  $\lambda =: (1^{a_1} 2^{a_2} \dots)$  wobei jedes  $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$ , und wir setzen  $n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots$ . Setze nun

$$\begin{aligned} Q &:= \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 + X^m + X^{2m} + \dots + X^{(p-1)m}) \\ &= (1 + X + X^2 + \dots + X^{p-1})(1 + X^2 + X^4 + \dots + X^{2(p-1)}) \dots \end{aligned}$$

Aus dem ersten Produkt wählen wir  $X^{a_1}$  aus, aus dem zweiten  $X^{2a_2}$ ... Dadurch erhält man einen Summanden  $1 \cdot X^n$  in  $[X^n]Q$ . Umgekehrt kann man für  $1 \cdot X^n$  in  $[X^n]Q$  eine Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  extrahieren und dies definiert eine  $p$ -reguläre Partition  $\lambda = (1^{a_1} 2^{a_2} \dots)$ . Damit erhalten wir

$$\{p\text{-reguläre Partitionen}\} \xrightarrow{1:1} \{\text{Summanden von } X^n \text{ in } Q\}$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (\#p\text{-regulärer Partitionen von } n) X^n \\ &= \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 + X^m + X^{2m} + \dots + X^{(p-1)m}). \end{aligned}$$

- b) Nach Definition 2.14 gilt

$$\{p\text{-reguläre Konjugationsklassen von } S_n\} \xrightarrow{1:1} \{\lambda = (\lambda_i) \vdash n \mid \forall i: p \nmid \lambda_i\}.$$

Für eine  $p$ -reguläre Konjugationsklasse  $\mathcal{C}_\lambda$  von  $S_n$  mit korrespondierendem Zykeltyp  $\lambda \vdash n$  schreiben wir wieder  $\lambda = (1^{a_1} 2^{a_2} \dots) = (m^{a_m})$ . Die Bedingung  $\forall i: p \nmid \lambda_i$  ist äquivalent zu  $(\forall m \text{ mit } p|m: a_m = 0)$ . Somit definieren wir

$$\begin{aligned} R &:= \prod_{m \in \mathbb{N}, p \nmid m} (1 + X^m + X^{2m} + \dots) \\ &= (1 + X + X^2 + \dots)(1 + X^2 + X^4 + \dots)(1 + X^3 + X^6 + \dots) \dots \end{aligned}$$

Aus dem ersten Produkt wählen wir  $X^{a_1}$  aus, aus dem zweiten  $X^{2a_2}$ ... Dadurch erhält man einen Summanden  $1 \cdot X^n$  in  $[X^n]R$ . Umgekehrt kann man für jeden Summanden  $1 \cdot X^n$  in  $[X^n]R$  eine Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  extrahieren und dies bestimmt eine  $p$ -reguläre Konjugationsklasse von  $S_n$  mit Zykeltyp  $\lambda = (1^{a_1} 2^{a_2} \dots)$ . Damit erhalten wir

$$\{p\text{-reguläre Konjugationsklasse in } S_n\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{Summanden von } X^n \text{ in } R\}$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\prod_{m \in \mathbb{N}, p \nmid m} (1 + X^m + X^{2m} + \dots + X^{(p-1)m}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (\#p\text{-reguläre Konjugationsklassen von } S_n) X^n. \end{aligned}$$

c) Es bleibt noch  $Q = R$  zu zeigen, also

$$\begin{aligned} Q &= \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 + X^m + X^{2m} + \dots + X^{(p-1)m}) \\ &= \prod_{m \in \mathbb{N}} \frac{1 - X^{pm}}{1 - X^m} \\ &= \frac{(1 - X^p)(1 - X^{2p})(1 - X^{3p}) \dots}{(1 - X)(1 - X^2)(1 - X^3) \dots} \\ &= \prod_{m \in \mathbb{N}, p \nmid m} \frac{1}{1 - X^m} \\ &= \prod_{m \in \mathbb{N}, p \nmid m} (1 + X^m + X^{2m} + \dots + X^{(p-1)m}) \\ &= R \end{aligned}$$

wobei die 2. Zeile nach Beispiel 2.17 b) gilt, und in 4. Zeile nur Terme gekürzt werden. Damit sind wir fertig.  $\square$

**Folgerung 2.21.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char } \mathbb{F} = p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl. Dann sind die einfachen  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln (bis auf Isomorphie) durch die  $p$ -regulären Partitionen von  $n$  parameterisiert.

Notation für diese einfachen Moduln lautet  $D^\mu$  für  $\mu \vdash n$   $p$ -regulär.

Wie gesagt werden wir diese einfachen Moduln später explizit konstruieren. Dies ist ein großes Resultat in der Darstellungstheorie, denn für eine beliebige Gruppe  $G$  und einen beliebigen Körper  $\mathbb{F}$  ist es im Allgemeinen schwer, die einfachen  $\mathbb{F}G$ -Moduln konkret anzugeben.





# KAPITEL 3

## ANZAHL DER STANDARD-TABLEAUX I: YOUNG-FROBENIUS-FORMEL

Motivation für dieses Kapitel: In der Konstruktion der einfachen  $KS_n$ -Moduln werden wir die Dimensionen dieser Moduln kennen müssen und diese Information wird gegeben sein durch die Anzahl der Standard-Tableaux zu einer bestimmten Young-Diagramm. Daher beschäftigen wir uns zunächst mit dieser Anzahl. Im Einführungskapitel ist eine Formel mit der Hackenzahl angegeben. Diese nette Formel wird mit Hilfe der Young-Frobenius-Formel gezeigt.

Der Beweis der Young-Frobenius-Formel in dieser Vorlesung wird mit Hilfe von komplexer Analysis geführt.

Zunächst erinnern wir uns an folgende Definitionen:

**Definition 3.1.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  eine Partition von  $n$ .

a) Ein **Young-Diagramm**  $[\lambda]$  der Form  $\lambda$  ist eine Menge

$$[\lambda] = \{(i, j) | 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

und dies kann man sich mit  $k$  Zeilen von jeweils  $\lambda_i$  Boxen vorstellen. Als Beispiel erhält man für  $\lambda = (3 \ 1 \ 1)$  das Young-Diagramm

$$[\lambda] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$$

b) Ein **Young-Tableau** der Form  $[\lambda]$  ist eine Bijektion

$$t: [\lambda] \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

und dies kann man sich mit einer Füllung des Young-Diagramms mit den Zahlen 1 bis  $n$  vorstellen.

c) Ein Tableau  $t$  heißt **standard**, g.d.w. die Einträge in  $t$  in jeder Zeile und jeder Spalte strikt wachsen. Man schreibt  $f^\lambda$  für die Anzahl der Standard-Tableau der Form  $[\lambda]$ .

**Beispiel 3.2.**

a) Für  $\lambda = (2 \ 1)$  ist

$$[\lambda] = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

und mögliche Standard-Tableaux sind

1	2
3	

und

1	3
2	

also  $f^{(2\ 1)} = 2$ .

b) Für  $\lambda = (3\ 1)$  ist


und mögliche Standard-Tableaux sind

1	2	3
4		

1	2	4
3		

1	3	4
2		

also  $f^{(3\ 1)} = 3$ . Wenn man bei diesen drei Standard-Tableaux jeweils die Box  $\boxed{4}$  entfernt, dann ergibt wieder drei Standard-Tableaux allerdings zu anderen Partitionen

1	2	3
---	---	---

Standard-Tableau  
der Form  $(3)$

1	2
3	

1	3
2	

Standard-Tableau  
der Form  $(2\ 1)$

und man kann interessanterweise eine Gleichung beobachten:

$$f^{(3\ 1)} = f^{(3)} + f^{(2\ 1)}.$$

Beachte: Entfernen einer Box ergibt nicht unbedingt wieder eine Partition.

### Bemerkung 3.3. „Welche Boxen kann man löschen?“

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  mit  $\lambda_k \neq 0$  eine Partition von  $n$ . Sei dazu  $t$  Standard-Tableau Form  $[\lambda]$ , wie z.B.


Die Box  $\boxed{n}$  steht in  $t$  immer am Ende einer Spalte und am Ende einer Zeile. Im Allgemeinen nennen wir eine Boxe eine **Ecke** zu  $t$ , g.d.w. diese Box sowohl am Ende einer Spalte als auch am Ende einer Zeile steht.

Beim Beispiel von vorhin sind also die mit  $\times$  markierten Boxen Ecken

					$\times$
				$\times$	
		$\times$			
$\times$					

Für  $1 \leq i \leq k$  definieren wir noch  $\lambda \setminus i := (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_k)$  also das Ergebnis vom Entfernen der letzten Box in  $i$ -ter Zeile. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \setminus i \text{ ist eine Partition} &\Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_{i+1}. \\ &\Leftrightarrow \text{die } i\text{-te Zeile in } [\lambda] \text{ hat eine Ecke.} \end{aligned}$$

Falls  $\lambda_i$  keine Partition ist, definieren wir  $f^{\lambda \setminus i} := 0$ .

Beispiel: Für  $\lambda = (7 \ 7 \ 4 \ 3 \ 1)$  gilt:

- $\lambda \setminus 1 = (6 \ 7 \ 4 \ 3 \ 1)$  ist keine Partition.
- $\lambda \setminus 2 = (7 \ 6 \ 4 \ 3 \ 1)$  ist eine Partition.

Wir extrahieren nun einen Satz aus dem Beispiel 3.2 b):

**Satz 3.4.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  eine Partition von  $n$ . Dann gilt

$$f^\lambda = \sum_{i=1}^k f^{\lambda \setminus i}.$$

**Beweis.** Für eine beliebige Folge ganzer Zahlen  $\mu = (\mu_i)$  definieren wir

$$\text{ST}(\mu) = \begin{cases} \{\text{Standard-Tableaux der Form } \mu\} & \text{falls } \mu \text{ eine Partition ist} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

In jedem Standard-Tableaux von  $\text{ST}(\lambda)$  steht die Box  $\boxed{n}$  in eine Ecke. Entferne dieser Ecke-Box  $\boxed{n}$  liefert eine Bijektion

$$\text{ST}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \coprod_{i=1}^k \text{ST}(\lambda \setminus i)$$

und somit auch die gewünschte Formel

$$f^\lambda = \sum_{i=1}^k f^{\lambda \setminus i}.$$

□

Diese Formel ist zentral im Beweis von Young-Frobenius-Formel, die lautet:

**Satz 3.5. (Young-Frobenius-Formel)** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  eine Partition von  $n$ . Für  $1 \leq j \leq k$  definieren wir  $l_j = l_j(\lambda) := \lambda_j + k - j$ . Dann gilt

$$f^\lambda = \frac{n! \Delta_k(l_1, \dots, l_k)}{\prod_{i=1}^k l_i!}$$

mit

$$\Delta_k(l_1, \dots, l_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (l_i - l_j) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ l_k & \dots & l_2 & l_1 \\ l_k^2 & \dots & l_2^2 & l_1^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_k^{k-1} & \dots & l_2^{k-1} & l_1^{k-1} \end{pmatrix}$$

der Determinante der Vandemonde-Matrix zu  $l_1, \dots, l_k$ .

Zum Beweis der Young-Frobenius-Formel benötigen wir einige Hilfswerkzeuge.

**Bemerkung 3.6. Erinnerung an komplexe Analysis**

- a) Eine komplexwertige Funktion auf  $D \subset \mathbb{C}$  heißt holomorph/analytisch, g.d.w. die Funktion an jedem Punkt in  $D$  eine komplexe Ableitung besitzt. Eine Funktion, die holomorph auf  $\mathbb{C}$  ist, nennt man eine ganze Funktion.
- b) Polynome sind analytisch. Sind  $f, g$  Polynome mit  $g(z_0) \neq 0$ , so existiert auch die Ableitung  $\frac{f}{g}$  an der Stelle  $z_0$ .
- c) Eine Funktion  $f$ , die an  $z_0 \in \mathbb{C}$  holomorph ist, ist stetig und besitzt alle höheren Ableitungen an  $z_0$ .
- d) (**Satz von Liouville**) Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.
- e) (**Maximumsprinzip**) Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und beschränkt. Dann nimmt  $|f|$  Maximum auf  $\partial G$ .

**Lemma 3.7.** Seien  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden und definiere

$$F(z_1, \dots, z_n) := \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{z_k - z_j - 1}{z_k - z_j}$$

dann ist  $F(z_1, \dots, z_n) = n$ .

Wir machen vor dem Beweis zwei kleine Beispiele:

- Für  $n=1$  gilt  $F(z_1) = \sum_{k=1}^1 \prod_{j=1, j \neq k}^1 1 = 1$ .
- Für  $n=2$  gilt  $F(z_1, z_2) = \frac{z_1 - z_2 - 1}{z_1 - z_2} + \frac{z_2 - z_1 - 1}{z_2 - z_1} = \frac{2z_1 - 2z_2}{z_1 - z_2} = 2$ .

**Beweis.**

- i. Für  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden definieren wir eine Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{z_2, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto F(z = z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{z_k - z_j - 1}{z_k - z_j}.$$

Dank Bemerkung 3.6 a) & b) ist  $f$  analytisch an den Stellen  $z \neq z_2, \dots, z_n$ .

- ii. Wir setzen  $f$  analytisch auf  $\mathbb{C}$  fort, und zunächst für den Punkt  $z_2$ :

Laut der Definition von  $f$  bzw. von  $F$  gilt im Punkte  $z_2$

$$f(z) = F(z, z_2, \dots, z_n) = \underbrace{\frac{z - z_2 - 1}{z - z_2} g(z)}_{k=1} + \underbrace{\frac{z_2 - z - 1}{z_2 - z} g(z_2)}_{k=2} + \underbrace{h(z)}_{k=3}$$

für rationale Funktionen  $g, h$ , von welchen  $z_2$  keine Polstelle ist. Zudem gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_2} \frac{g(z) - g(z_2)}{z - z_2} = g'(z_2)$$

und somit kann man  $f$  in Punkt  $z_2$  durch

$$f(z_2) := h(z_2) + g(z_2) + g(z_2) - g'(z_2)$$

analytisch fortsetzen. Analog kann man  $f$  an  $z_3, \dots, z_n$  analytisch fortsetzen. Also wird  $f$  durch diese Fortsetzung eine ganze Funktion.

- iii. Wir zeigen die analytische Fortsetzung von  $f$  ist beschränkt. Da  $f$  analytisch ist, ist  $f$  überall definiert und insb. auf jedem Kompakta beschränkt. Das Maximumsprinzip besagt, dass auf jedem  $B_r(0)$  für jedes  $r \in \mathbb{R}_+$  die Einschränkung von  $|f(z)|$  Maximum auf  $\partial B_r(0)$  nimmt. Falls  $|f|$  unbeschränkt wäre, dann sollte das Maximum von  $|f(z)|$  auf  $\partial B_r(0)$  gegen unendlich konvergieren für  $r \rightarrow \infty$ , und dies ist gerade der Fall wenn  $|z| \rightarrow \infty$  sein. Aber mit

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \prod_{j=2}^n \frac{z - z_j - 1}{z - z_j} + \sum_{k=2}^n \frac{z - z_j - 1}{z - z_j} \prod_{j=2, j \neq k}^n \frac{z_k - z_j - 1}{z_k - z_j}$$

konvergieren beide **grünen Terme** gegen 1, und damit gilt

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 1 + \sum_{k=2}^n \prod_{j=2, j \neq k}^n \frac{z_k - z_j - 1}{z_k - z_j} = 1 + F(z_2, \dots, z_n) < \infty.$$

Insbesondere ist  $f$  eine beschränkte ganze Funktion.

- iv. Aus Bemerkung 3.6 d) Satz von Liouville und iii. ist  $f$  eine konstante Funktion. Mit Induktion kann man zeigen, dass  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) \equiv 1 + (n-1) \equiv n$   $\square$

**Lemma 3.8.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden. Man definiert

$$G(l_1, \dots, l_n) := \sum_{k=1}^n l_k \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j}$$

und stellt fest, dass es gilt

$$G(l_1, \dots, l_n) = \sum_{k=1}^n l_k - \frac{n(n-1)}{2}.$$

**Beweis.** Mit Induktion nach  $n$ .

Für  $n=1$  ist  $G(l_1) = l_1 = l_1 - \frac{1(1-1)}{2}$ , also gilt die Behauptung.

Sei die Behauptung wahr für  $n-1$  beliebige Zahlen  $l_1, \dots, l_{n-1}$ .

a) Spezialfall  $l_n = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} G(l_1, \dots, l_n) &= G(l_1, \dots, l_{n-1}, 0) \\ (\text{Definition, } l_n = 0) &= \sum_{k=1}^{n-1} l_k \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} l_k \prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} \cdot \frac{l_k - l_n - 1}{l_k - l_n} \\ (l_n = 0) &= \sum_{k=1}^{n-1} l_k \prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} \cdot \frac{l_k - 1}{l_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(l_k \text{ kürzen}) &= \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} \cdot \frac{l_k - 1}{1} \\
(l_{k-1} \text{ ausklammern}) &= \sum_{k=1}^{n-1} (l_k - 1) \prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} \\
(\text{Summe spalten}) &= \sum_{k=1}^{n-1} l_k \prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} - \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} \\
&= G(l_1, \dots, l_{n-1}) - F(l_1, \dots, l_{n-1}) \\
(\text{I.V. \& Lemma 3.7}) &= \sum_{k=1}^{n-1} l_k - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-1)2}{2} \\
(l_n = 0) &= \sum_{k=1}^n l_k - \frac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

b) Allgemeiner Fall  $l_n \in \mathbb{C}$  beliebig wird auf a) zurückgeführt.

i. Sei  $l'_k := l_k - l_n$  für jedes  $1 \leq k \leq n$ . Dann gilt  $l'_n = 0$ . Anwendung von a) auf  $l'_1, \dots, l'_n$  ergibt

$$G(l'_1, \dots, l'_n) = \sum_{k=1}^n l'_k - \frac{n(n-1)}{2}.$$

ii. Per Definition gilt

$$\frac{l'_k - l'_j - 1}{l'_k - l'_j} = \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j}$$

und somit

$$\begin{aligned}
G(l_1, \dots, l_n) &= \sum_{k=1}^n l_k \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} \\
(0 \text{ addieren}) &= \sum_{k=1}^n (l_k - l_n) \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} + l_n \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} \\
(\text{i.}) &= \sum_{k=1}^n (l_k - l_n) \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{l'_k - l'_j - 1}{l'_k - l'_j} + l_n \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{l_k - l_j - 1}{l_k - l_j} \\
(\text{Def.}) &= G(l'_1, \dots, l'_n) + l_n F(l_1, \dots, l_n) \\
(\text{a) \& Lemma 3.7}) &= \sum_{k=1}^n l'_k - \frac{n(n-1)}{2} + l_n n \\
&= \sum_{k=1}^n l_k - \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Nun sind wir endlich in der Lage, die Young-Frobenius-Formel zu zeigen:

### Bemerkung 3.9. Beweis von Young-Frobenius-Formel

Nicht überraschenderweise wieder mit Induktion nach  $|\lambda| = n$ :

i. Sei  $n = 1$ . Dann ist  $\lambda = (1)$  die einzige Möglichkeit und die Formel liefert

$$f^\lambda = \frac{1! \Delta_1(1)}{1!} = 1$$

also stimmt es überein. Für den Induktionsschritt machen wir zunächst zwei rechnungen.

ii. Sei  $1 \leq i \leq k$  fest gewählt und setze  $l'_i := l_i - 1$ . Dann gilt

$$\frac{\Delta_k(l_1, \dots, l'_i, \dots, l_k)}{\Delta_k(l_1, \dots, l_i, \dots, l_k)} = \prod_{j=1, j \neq k}^k \frac{l'_i - l_j}{l_i - l_j} = \prod_{j=1, j \neq k}^k \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j}$$

insbesondere

$$\Delta_k(l_1, \dots, l'_i, \dots, l_k) = \Delta_k(l_1, \dots, l_i, \dots, l_k) \prod_{j=1, j \neq k}^k \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j}.$$

iii. Gemäß der Notation von Lemma 3.8 gilt

$$\begin{aligned} G(l_1, \dots, l_k) &= \sum_{i=1}^k l_i \prod_{j=1, j \neq i}^k \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j} \\ (\text{Lemma 3.8}) &= \sum_{i=1}^k l_i - \frac{k(k-1)}{2} \\ (\text{Def. von } l_i) &= \sum_{i=1}^k (\lambda_i + k - i) - \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \sum_{k=1}^k \lambda_i + \sum_{k=1}^k k - \sum_{k=1}^k i - \frac{k(k-1)}{2} \\ (\lambda \vdash n) &= n + k^2 - \frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} \\ &= n. \end{aligned}$$

iv. Nun kommt der Induktionsschritt. Sei  $n > 1$ . O.B.d.A. sei  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  mit  $\lambda_k \neq 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} &f^\lambda \\ (\text{Satz 3.4}) &= \sum_{i=1}^k f^{\lambda \setminus i} \\ (\text{I.V.}) &= \sum_{i=1}^k \frac{(n-1)! \Delta_k(l_1, \dots, l'_i, \dots, l_k)}{l_1! \dots l'_i! \dots l_k!} \\ (\text{ii.}) &= \sum_{i=1}^k \frac{(n-1)! \Delta_k(l_1, \dots, l_i, \dots, l_k)}{l_1! \dots l'_i! \dots l_k!} \prod_{j=1, j \neq k}^k \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{(n-1)! \Delta_k(l_1, \dots, l_i, \dots, l_k)}{l_1! \dots l'_i! \dots l_k!} \prod_{j=1, j \neq k}^k \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j} l_i \\ (\text{Bruch unabh. von } i) &= \frac{(n-1)! \Delta_k(l_1, \dots, l_i, \dots, l_k)}{l_1! \dots l'_i! \dots l_k!} \sum_{i=1}^k l_i \prod_{j=1, j \neq k}^k \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j} \\ (\text{iii.}) &= \frac{(n-1)! \Delta_k(l_1, \dots, l_i, \dots, l_k)}{l_1! \dots l'_i! \dots l_k!} n \\ &= \frac{n! \Delta_k(l_1, \dots, l_i, \dots, l_k)}{l_1! \dots l'_i! \dots l_k!}. \end{aligned}$$

- v. Wir müssen uns noch Gedanken über eine Sache machen: Bei iv. in der 2. Zeile wird die Induktionsvoraussetzung auf  $f^{\lambda \setminus i}$  verwendet, aber die I.V. ist nur auf eine Partition anwendbar und  $\lambda \setminus i$  ist nicht unbedingt eine. Deswegen müssen wir sicherstellen, dass es keine Auswirkung zu der Summe gibt im Fall  $\lambda \setminus i$  keine Partition. Man beobachtet

$$\begin{aligned}
 f^{\lambda \setminus i} = 0 &\Leftrightarrow \lambda \setminus i \text{ ist keine Partition.} \\
 &\Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_{i+1}. \\
 &\Leftrightarrow l'_i = l_i - 1 = \lambda_i + k - i - 1 = \lambda_{i+1} + k - (i+1) = l_{i+1}. \\
 &\Leftrightarrow \Delta_k(l_1, \dots, l'_i, \dots, l_k) = 0.
 \end{aligned}$$

Somit stimmt tatsächlich die Rechnung in iv. □

Der „eigentliche“ Induktionsschritt, also Bemerkung 3.9 iv., ist eigentlich nicht lang, aber man muss so zu sagen die Rechnungen im Griff kriegen, und dies liefern die „ätzenden“ Lemmata, deren Beweise sogar Hilfswerkzeuge von Mathematik aus anderem Bereich nutzen.



# KAPITEL 4

## DER PERMUTATIONSMODUL $M^\lambda$

Wir fangen an, Permutationsmoduln zu konstruieren. Die Grundidee besteht in der Operation von  $S_n$  auf eine gewisse Menge.

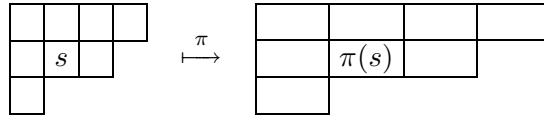
Im ganzen Kapitel sei  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl und  $\lambda \vdash n$  eine Partition.

Zur Erinnerung: ein  $\lambda$ -Tableau ist eine Bijektion  $t: [\lambda] \rightarrow \{1, \dots, n\}$  oder im Bild eine Füllung des Young-Diagramms  $[\lambda]$  mit Zahlen  $1, \dots, n$ .

**Bemerkung 4.1.** Die symmetrische Gruppe  $S_n$  operiert auf der Menge aller Young-Tableaux mit  $n$  Boxen durch

$$\pi \cdot t := \pi \circ t: [\lambda] \xrightarrow{t} \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\pi} \{1, \dots, n\}$$

bzw. graphisch gesehen



Dass dies wirklich eine  $S_n$ -Operation ist, kann man leicht überprüfen. Da  $t$  bijektiv ist, gilt  $\pi t = \sigma t$  g.d.w.  $\pi = \sigma$ .

Insbesondere ist die Menge der  $\lambda$ -Tableaux eine  $S_n$ -Menge.

Ein konkretes Beispiel lautet

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\pi=(3 \ 2 \ 4)} \pi \cdot t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

Aus dem konkreten Beispiel sieht man, dass Standard-Tableau durch Operation nicht unbedingt wieder standard wird.

**Definition 4.2.** Sei  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau.

- Der **Zeilenstabilisator**  $R_t$  ist definiert als eine Untergruppe von  $S_n$ , welche die Zeilen von  $t$  mengenweise unter der  $S_n$ -Operation in Bemerkung 4.1 fest lässt.
- Der **Spaltenstabilisator**  $C_t$  ist definiert als eine Untergruppe von  $S_n$ , welche die Spalten von  $t$  mengenweise unter der  $S_n$ -Operation in Bemerkung 4.1 fest lässt.
- Für jede disjunkte Zerlegung von  $\{1, \dots, n\}$ , also  $\{1, \dots, n\} = \coprod_{i=1}^k X_i$ , nennt man die Gruppe  $S_{X_1} \times \dots \times S_{X_k}$  eine **Young-Untergruppe** von  $S_n$ . Im Fall von einer Partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$  mit  $\lambda_i = |X_i|$ , dann schreibt man auch  $S_{\lambda_i} := S_{X_i}$  und somit  $S_\lambda := S_{X_1} \times \dots \times S_{X_k}$ .

Zeilen- & Spaltenstabilisatoren sind Young-Untergruppen von  $S_n$ . Beim Beispiel in Bemerkung 4.1 ist  $R_t = S_{\{1,2,4\}} \times S_{\{3,5\}}$  und  $C_t = S_{\{1,3\}} \times S_{\{3,5\}} \times S_{\{4\}}$ .

**Lemma 4.3.** Sei  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau und  $\pi \in S_n$ . Dann gilt

$$R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1} \quad \text{sowie} \quad C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}.$$

**Beweis.** Für jede Zykel  $(a_1, \dots, a_r)$  gilt  $\pi(a_1, \dots, a_r)\pi^{-1} = (\pi(a_1), \dots, \pi(a_r))$  und zwischen zwei disjunkten Zykeln kann man  $\pi \cdot \pi^{-1}$  hinzufügen. Daraus folgt die Behauptung, da Elemente von  $R_t$  und  $C_t$  Produkt von disjunkten Zykeln sind.  $\square$

Mit diesem harmlosen Lemma können wir weiterhin Moduln konstruieren:

**Definition 4.4.** Seien  $t, \tilde{t}$  Tableaux der Form  $\lambda$ .

- Wir sagen,  $t, \tilde{t}$  sind äquivalent, geschrieben  $t \sim \tilde{t}$ , g.d.w. wenn es ein  $\pi \in R_t$  gibt, s.d.  $\pi t = \tilde{t}$  gilt. Dies ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation.
- Die Äquivalenzklasse von  $t$  unter  $\sim$  heißt **Tabloid**, oder auch  **$\lambda$ -Tabloid**. Dafür schreiben wir  $\{t\}$  bzw. Linien zwischen den Zeilen von  $t$ .
- Ein Tabloid  $\{t\}$  heißt **standard**, g.d.w. es ein Standard-Tableau in  $\{t\}$  gibt.

**Beispiel 4.5.**

- Sei  $\lambda = (3 \ 2)$  und ein Tableau

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

gegeben. Dann schreiben wir das zugehörige Tabloid als

$$\{t\} = \frac{\overline{1 \ 2 \ 3}}{4 \ 5}$$

und wir stellen fest, dass es in  $\{t\}$  insgesamt 12 Tableaux gibt. Da  $t$  schon ein Standard-Tableau ist, ist  $\{t\}$  ein Standard-Tabloid.

- Das Tabloid

$$\{t\} = \frac{\overline{2 \ 1}}{3} = \frac{\overline{1 \ 2}}{3}$$

ist standard.

- Das Tabloid

$$\{t\} = \frac{\overline{2 \ 3}}{1}$$

ist nicht standard.

**Bemerkung 4.6.**  $S_n$  operiert auf die Menge der  $\lambda$ -Tabloids mit  $n$  Boxen. Sei also  $\pi \in S_n$  und  $\{t\}$  ein  $\lambda$ -Tabloid mit  $|\lambda| = n$ . Dann definieren wir  $\pi \cdot \{t\} := \{\pi t\}$  und wir zeigen in Lemma 4.7, dass diese Operation wohl-definiert ist. Außerdem gilt für jedes  $\pi, \sigma \in S_n$ , dass  $1_{S_n} \cdot \{t\} = \{1_{S_n} \cdot t\} = \{t\}$  sowie  $(\pi\sigma)\{t\} = \{(\pi\sigma)t\} = \{\pi(\sigma t)\} = \pi(\sigma\{t\})$ . Also ist die Menge aller  $\lambda$ -Tabloids mit  $n$  Boxen eine  $S_n$ -Menge.

**Lemma 4.7.** Die Operation in Bemerkung 4.6 ist wohl-definiert, d.h. für jedes  $\pi \in S_n$  und für alle äquivalenten  $\lambda$ -Tableaux  $t_1 \sim t_2$ , also existiert ein  $\sigma \in R_{t_1}$  s.d.  $t_2 = \sigma t_1$  erfüllt ist, gilt  $\pi t_1 \sim \pi t_2$ , also  $\{\pi t_1\} = \{\pi t_2\}$ .

**Beweis.** Die Rechnung  $\pi t_2 = \pi(\sigma t_1) = \pi\sigma(\pi^{-1}\pi)t_1 = (\pi\sigma\pi^{-1})(\pi t_1)$  besagt, dass es gilt  $\pi\sigma\pi^{-1} \in \pi R_{t_1} \pi^{-1}$ , und mit Lemma 4.3 ist somit  $\pi\sigma\pi^{-1} \in \pi R_{t_1} \pi^{-1} = R_{\pi t_1}$ , also  $\pi t_1 \sim \pi t_2$  nach Definition.  $\square$

Mit den obigen Überlegungen erhalten wir:

**Definition 4.8.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_k) \vdash n$  und  $B_\lambda$  die Menge aller  $\lambda$ -Tabloids. Für einen Körper  $\mathbb{F}$  setzen wir  $M^\lambda := \mathbb{F}\text{Span}\{B_\lambda\}$ . Auf  $M^\lambda$  definieren wir

$$\mathbb{F}S_n \times M^\lambda \rightarrow M^\lambda, (\pi, \{t\}) \mapsto \{\pi t\}.$$

Es gilt

- a)  $M^\lambda$  ist ein  $\mathbb{F}S_n$ -Modul.
- b)  $M^\lambda$  ist zyklisch und erzeugbar von jedem beliebigen  $\lambda$ -Tabloid, also erzeugbar von jedem Element der  $\mathbb{F}$ -Basis.
- c) Bzgl. der Dimension von  $M^\lambda$  gilt

$$\dim M^\lambda = |B_\lambda| = \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_k!}$$

$M^\lambda$  heißt der **Permutationsmodul** bzgl.  $\lambda$ .

**Beweis.**

- a) Nach Bemerkung 4.6 ist  $B_\lambda$  eine  $S_n$ -Menge und damit ist  $M^\lambda$  ein  $\mathbb{F}S_n$ -Modul.
- b) Seien  $\{t\}$  und  $\{s\}$  zwei  $\lambda$ -Tabloids. Dann gibt es ein  $\pi \in S_n$  (nicht unbedingt eindeutig) s.d.  $\{s\} = \pi\{t\}$  gilt, bswp.

$$t = \frac{\overline{1 \ 3 \ 2}}{\overline{4 \ 5}} \quad \& \quad s = \frac{\overline{1 \ 2 \ 5}}{\overline{4 \ 3}} \quad \rightsquigarrow \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Also ist  $\{\pi\{t\} | \pi \in S_n\} = B_\lambda$ , d.h.  $\mathbb{F}S_n\{t\} = \mathbb{F}\text{Span}\{B_\lambda\} = M^\lambda$ .

- c) Es gibt  $n!$  Möglichkeiten die Zahlen  $\{1, \dots, n\}$  in  $[\lambda]$  hinzuschreiben. Bei Tabloids spielen die Reihenfolgen der Zahlen in einer festen Zeilen keine Rolle, daher ergibt sich die Formel für  $|B_\lambda|$  und  $B_\lambda$  ist per Definition eine Basis von  $M^\lambda$ .  $\square$

Wir geben hier auch eine alternative Konstruktion von  $M^\lambda$  an:

**Bemerkung 4.9.** Sei wie zuvor  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_k) \vdash n$  und  $K$  ein Körper. Sei dazu  $S_\lambda := S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_k} = S_{\{1, \dots, \lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1, \dots, \lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{n-\lambda_k, \dots, n\}}$  eine Young-Untergruppe von  $S_n$ , also ist  $S_\lambda$  der Zeilenstabilisator von dem „basic“ Tableau

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \dots & \dots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1 + 1 & \dots & \dots & \lambda_2 \\ \hline \vdots & \dots & \ddots & \\ \hline n - \lambda_k & \dots & \dots & \lambda_k \\ \hline \end{array}$$

Sei  $\Omega := \{\pi S_\lambda \mid \pi \in S_n\}$  die Menge der Nebenklassen von  $S_\lambda$  in  $S_n$ , dann ist  $\Omega$  eine  $S_n$ -Menge mittels der Operation

$$S_n \times \Omega \rightarrow \Omega, (\sigma, \pi S_\lambda) \mapsto (\sigma\pi) S_\lambda$$

und somit kann man einen Permutationsmodul  $\mathbb{F}\Omega := \mathbb{F}\text{Span}\{\pi S_\lambda \mid \pi \in S_n\}$  mit der linearen Erweiterung obiger Operation definieren.

Es gilt dann  $M^\lambda \cong \mathbb{F}\Omega$  als  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln.

**Beweis.** Wir nehmen das „basic“ Tableau

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \dots & \dots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1 + 1 & \dots & \dots & \lambda_2 \\ \hline \vdots & \dots & \ddots & \\ \hline n - \lambda_k & \dots & \lambda_k & \\ \hline \end{array}$$

und definiere eine Abbildung

$$\psi: M^\lambda \rightarrow \mathbb{F}\Omega, \{\pi t\} \mapsto \pi S_\lambda$$

welche dann linear erweitert wird.

- a) Die Abbildung  $\psi$  ist wohl-definiert: Sei  $\{\pi t\} = \{\sigma t\}$  mit  $\pi, \sigma \in S_n$ , also  $\pi\{t\} = \sigma\{t\}$  nach Bemerkung 4.6. Somit gilt  $\{t\} = \pi^{-1}\sigma\{t\} = \{\pi^{-1}\sigma t\}$  und dies impliziert, dass  $\pi^{-1}\sigma \in R_t = S_\lambda$  gilt, also  $\sigma \in \pi S_\lambda$ , daher  $\sigma S_\lambda = \pi S_\lambda$ .
- b)  $\psi$  ist ein Modulhomomorphismus: Nach definition ist  $\psi$  bereits  $\mathbb{F}$ -linear. Für ein  $\pi \in S_n$  ist  $\psi(\pi\{t\}) = \psi(\{\pi t\}) = \pi S_\lambda = \pi \cdot 1_{S_n} S_\lambda = \pi\psi(\{t\})$ .
- c)  $\psi$  ist bijektiv: Surjektivität denn für ein beliebiges  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\pi_i S_\lambda) \in \mathbb{F}\Omega$  gilt  $\psi(\sum_{i=1}^n \alpha_i \{\pi_i t\}) = v$ . Zudem ist  $\dim \mathbb{F}\Omega = |\Omega| = [S_n: S_\lambda] = \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_k!} = \dim M^\lambda$ .  $\square$

Nun betrachten wir zwei Beispiele und versuchen, die Permutationsmoduln für zwei einfache Partitionen zu verstehen. Im Folgenden sei  $\mathbb{F}$  immer ein Körper.

**Beispiel 4.10.** Sei  $\lambda = (n)$ , d.h.  $[\lambda] = \boxed{1} \boxed{2} \dots \boxed{n}$ . Klar gibt es genau ein  $\lambda$ -Tabloid  $v := \overline{1 \ 2 \ \dots \ n}$  und somit ist  $M^{(n)} = \mathbb{F}\text{Span}\{v\}$  mit  $\pi \cdot v = v$  für jedes  $\pi \in S_n$  der triviale  $\mathbb{F}S_n$ -Modul. Wegen  $\dim M^{(n)} = 1$  ist  $M^{(n)}$  einfach. Wir schreiben  $S^{(n)} := M^{(n)}$  und später werden wir sehen, dass dies gerade der triviale Specht-Modul ist.

**Beispiel 4.11.** Sei  $\lambda = (n-1 \ 1)$  für  $n \geq 2$ .

- a) Sei  $1 \leq i \leq n$ . Wir definieren

$$v_i := \frac{\overline{1 \ 2 \ \dots \ i-1 \ i+1 \ \dots \ n}}{i}$$

und somit  $M^{(n-1 \ 1)} = \mathbb{F}\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ , d.h.  $\dim M^{(n-1 \ 1)} = n$ .

- b) Sei  $\pi \in S_n$  und  $1 \leq i \leq n$ , dann gilt  $\pi v_i = v_{\pi(i)}$ . Damit gilt  $v_j = (1 \ j)v_1$  für jedes  $2 \leq j \leq n$ , also  $M^{(n-1 \ 1)} = \mathbb{F}S_n \text{Span}\{v_1\}$ .

c)  $M^{(n-1\ 1)}$  ist aber nicht einfach:

Sei  $v := v_1 + \cdots + v_n$ . Wegen  $\pi v_i = v_{\pi(i)}$  ist  $\pi \cdot v = v$  für jedes  $\pi \in S_n$ . Daher gilt  $\mathbb{F}S_n v = \mathbb{F}S_n \text{Span}\{v\} = \mathbb{F}\text{Span}\{v\} \subsetneq M^{(n-1\ 1)}$ .

d) Für  $1 \leq i \leq n-1$  definieren wir noch  $w_i := v_n - v_i$ . Die Menge  $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$  ist  $\mathbb{F}$ -linear unabhängig und wir schreiben  $S^{(n-1\ 1)} := \mathbb{F}\text{Span}\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ . Dazu sei  $\pi \in S_n$  mit  $\pi(i) =: k$  und  $\pi(n) =: j$  und wir sehen

$$\pi w_i = \pi(v_n - v_i) = v_j - v_k = \begin{cases} w_k - w_j & \text{für } j, k < n \\ w_k & \text{für } j = 1 \\ -w_j & \text{für } k = n \end{cases} \in \mathbb{F}\text{Span}\{w_1, \dots, w_{n-1}\}.$$

Also ist  $S^{(n-1\ 1)} := \mathbb{F}\text{Span}\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$  tatsächlich ein Untermodul der Dimension  $n-1$ . Gleich sehen wir, dass  $S$  einfach ist, wenn  $\text{char}\mathbb{F} \nmid n$  gilt. Später erweist sich  $S^{(n-1\ 1)}$  als der Specht-Modul für  $\lambda = (n-1\ 1)$ .

Um  $S^{(n-1\ 1)}$  besser zu untersuchen, wiederholen wir einiges aus der Darstellungstheorie:

**Definition 4.12.** Sei  $A$  eine endlich dimensionale  $\mathbb{F}$ -Algebra (bei uns in der Vorlesung  $A := \mathbb{F}S_n$ ). Ein **A-Modul**  $M$  heißt **halbeinfach**, g.d.w. die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- a)  $M$  ist direkte Summe von einfachen  $A$ -Moduln.
- b) Jeder nicht trivialer Untermodul  $U$  von  $M$  hat ein Komplement.

Hier verzichten wir auf den Beweis der Äquivalenz, und wir bemerken, dass es weitere Charakterisierungen für halbeinfache Moduln gibt.

**Definition 4.13.** Eine endlich dimensionale  $\mathbb{F}$ -**Algebra**  $A$  heißt **halbeinfach**, g.d.w. der reguläre  $A$ -Modul halbeinfach ist.

Für Gruppenalgebren gibt es ein einfaches Kriterium zur Überprüfung der Halbeinfachheit:

**Satz 4.14. (Maschke)** Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Dann ist die Gruppenalgebra  $\mathbb{F}G$  halbeinfach, g.d.w.  $\text{char}\mathbb{F} \nmid |G|$  gilt.

Den Beweis dazu überspringen wir hier ebenfalls, und wir kehren zu den Beispielen zurück:

**Beispiel 4.15.** Seien die Notationen und Definitionen wie in Beispiel 4.10 & 4.11.

- a) Wir definieren

$$\phi: M^{(n-1\ 1)} \rightarrow S^{(n)}, v_j \mapsto v$$

und setzen dies  $\mathbb{F}$ -linear fort. Dann gilt für jedes  $\pi \in S_n$

$$\phi(\pi v_j) = \phi(v_{\pi(j)}) = v = \pi v = \pi \phi(v_j)$$

also ist  $\phi$  tatsächlich ein Modulhomomorphismus und nach Konstruktion auch surjektiv mit

$$\ker \phi = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \mid 0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j v \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \mid 0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \right\}.$$

Außerdem sehen wir, dass für jedes  $1 \leq i \leq n-1$

$$\phi(w_i) = \phi(v_n) - \phi(v_i) = v - v = 0$$

gilt, also liegen alle  $w_i$  in  $\ker \phi$ . Aus  $\dim \ker \phi = n-1 = \dim S^{(n-1, 1)}$  folgt dann  $\ker \phi = S^{(n-1, 1)} = \mathbb{F} \text{Span}\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ .

b) Sei  $\text{char } \mathbb{F} \nmid n$  und wir zeigen, dass  $S^{(n-1, 1)} = \mathbb{F} \text{Span}\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$  einfach ist.

Dazu sei  $0 \neq V \leq S^{(n-1, 1)}$ , d.h. es existiert ein  $x \in V \setminus \{0\}$ . Wir schreiben dann  $x = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i w_i$  für  $\xi_i \in \mathbb{F}$ . Da  $x \in V$  und  $V$  ein  $\mathbb{F}S_n$ -Modul ist, gilt  $\mu x \in V$  für jedes  $\mu \in \mathbb{F}S_n$ . Wähle  $\mu := \text{id} - (n \ j)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu x &= \text{id}x - (n \ j)x \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i w_i - (n \ j) \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i w_i \\ \text{(Beispiel 4.11 d)} \quad &= \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i w_i - \left( \sum_{i=1, i \neq j}^{n-1} \xi_i (w_i - w_j) - \xi_j w_j \right) \\ &= \xi_j w_j + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \right) w_j \\ &= \left( \xi_j + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \right) w_j \in V. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $c_j := \xi_j + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \neq 0$  ist für jedes  $1 \leq j \leq n-1$ .

I. Falls  $c_j = 0$  für jedes  $j \leq n-1$ . Dann Summieren aller  $c_j$  ergibt

$$0 = \sum_{j=1}^{n-1} c_j = \left( \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \right) + (n-1) \left( \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \right) = n \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i.$$

Da  $0 \neq \text{char } \mathbb{F} \nmid n$ , ist  $n \neq 0$  in  $\mathbb{F}$ , also  $\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i = 0$ . Einsetzen in  $c_j$  liefert dann, dass alle  $\xi_j = 0$  sein müssen, aber dies kann nicht sein. Also ist dieser Fall unmöglich.

II. Nach I. gibt es ein  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  mit  $c := c_j = \xi_j + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \neq 0$ . Nach obiger Rechnung ist dann  $\mu x = c w_j$ , also  $c^{-1} \mu x = w_j \in V$ . Mit  $\mu := (i \ j)$  gilt  $\mu w_j = (i \ j) w_j = w_i \in w_i$  für alle  $1 \leq i \leq n-1$ , und daher  $\{w_1, \dots, w_{n-1}\} \subseteq V$ . Das heißt aber  $S^{(n-1, 1)} \subseteq V \subseteq S^{(n-1, 1)}$ , also  $V = S^{(n-1, 1)}$ .

Beachte: Wir haben eine Kompositionsreihe für  $M^{(n-1\ 1)}$  gefunden, also

$$0 < S^{(n-1\ 1)} < M^{(n-1\ 1)}$$

mit Kompositionsfaktor  $S^{(n-1\ 1)}$  bzw.  $S^{(n)}$ .

c) Sei weiterhin  $\text{char}\mathbb{F} \nmid n$ . Wir zeigen, dass  $M^{(n-1\ 1)} \cong S^{(n-1\ 1)} \oplus S^{(n)}$ , also  $M^{(n-1\ 1)}$  halbeinfach.

i. Zunächst ein Spezialfall  $n = 2$ . Es ist  $S^{(1\ 1)} = \mathbb{F}\text{Span}\{w_1\}$  und aus

$$(1\ 2)w_1 = (1\ 2)(v_2 - v_1) = (v_1 - v_2) = -w_1$$

folgt, dass  $S^{(1\ 1)}$  der  $\text{sgn}$ -Modul ist, welcher ungleich dem trivialen Modul ist, da  $\text{char}\mathbb{F} \nmid n$  also  $1 \neq -1$ . Insb. ist  $S^{(1\ 1)} \neq S^{(2)}$ .

ii. Mit i. gilt  $S^{(n-1\ 1)} \neq S^{(n)}$  für jedes  $n \geq 2$  (der Fall  $n = 2$  kommt aus i., und für  $n > 2$  ist dies klar aus Dimensionsgrund). Wir zeigen  $S^{(n-1\ 1)} \cap S^{(n)} = 0$ . Klar ist  $S^{(n-1\ 1)} \cap S^{(n)} \leq S^{(n)}$  und falls der Schnitt nicht trivial wäre, müsste dann  $S^{(n-1\ 1)} \cap S^{(n)} = S^{(n)}$  sein, da  $\dim S^{(n)} = 1$ . Aber dies würde implizieren, dass  $S^{(n)} \neq S^{(n-1\ 1)}$  ein Untermodul von  $S^{(n-1\ 1)}$  wäre, also  $S^{(n-1\ 1)}$  nicht einfach. Widerspruch zu b).

d) Sei nun  $\text{char}\mathbb{F} \mid n$  mit  $n > 2$ . Dann ist  $S^{(n-1\ 1)}$  nicht mehr einfach.

Der triviale Modul  $S^{(n)}$  ist in dem Fall ein Untermodul von  $S^{(n-1\ 1)}$ , weil

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n-1} w_i &= -\left(\sum_{i=1}^{n-1} v_n - v_i\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} v_n + \sum_{i=1}^{n-1} v_i \\ &= -(n-1)v_n + \sum_{i=1}^{n-1} v_i \\ &= -nv_n + \sum_{i=1}^n v_i \\ &= 0 + v \end{aligned}$$

also  $S^{(n)} = \mathbb{F}\text{Span}\{v\} \subseteq \mathbb{F}\text{Span}\{w_1, \dots, w_{n-1}\} = S^{(n-1\ 1)}$ .

Beachte: Für  $p = n = 2$  ist  $S^{(2)} = S^{(1\ 1)}$  weil  $1 = -1$  in  $\mathbb{F}$ .

Am Ende des Kapitels noch einige Bemerkungen:

**Bemerkung 4.16.** Sei wie immer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \vdash n$  eine beliebige Partition von  $n$  und  $\mathbb{F}$  ein Körper.

a) Sei  $\text{char}\mathbb{F} = 0$ . Dann ist  $\mathbb{F}S_n$  nach Maschke halbeinfach, und somit ist der Permutationsmodul  $M^\lambda$  halbeinfach nach Definition 4.13, also ist  $M^\lambda$  eine direkte Summe einfacher Moduln nach Definition 4.12, und diese Zerlegung ist bekannt.

- b) Sei  $\text{char}\mathbb{F} > 0$ . Im Allgemeinen ist der Permutationsmodul  $M^\lambda$  nicht halbeinfach, aber wegen  $\dim M^\lambda < \infty$  hat  $M^\lambda$  eine Zerlegung als unzerlegbaren Moduln. Nach Krull-Remak-Schmidt ist diese Zerlegung bis auf Umordnung und Isomorphie eindeutig. Dabei ist eine Parametrisierung der unzerlegbaren direkten Summanden bekannt: Diese ist durch die Partition  $\mu \vdash n$  gegeben. Diese unzerlegbaren direkten Summanden heißen Young-Moduln, geschrieben  $Y^\mu$ . Wie oft  $Y^\mu$  als direkte Summand in  $M^\lambda$  vorkommt, ist eine offene Frage. Gelöst ist es für 2-teilige Partitionen, also Partitionen der Form  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ .
- c) Die Definition von  $M^\lambda$  ist total unabhängig vom Körper  $\mathbb{F}$ . Wir könnten deshalb den Modul  $M^\lambda$  über einem Ring  $R$  definieren, also  $M_R^\lambda := R^{B_\lambda}$  der freier  $R$ -Modul mit  $B_\lambda$  als Basis.
- d) In Analogie zu Beispiel 4.5 können wir die Tabloids über Spaltenstabilisatoren definieren, also

$$t \sim \tilde{t} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \pi \in C_t: \tilde{t} = \pi t.$$

Dies ist auch eine Äquivalenzrelation und die Notation dieser Klassen ist  $[t]$ . Wir schreiben Linien zu den Spalten, z.B.:

$$[t] = \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c|c} 4 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \end{array} \right| = \dots.$$



# KAPITEL 5

## SPECHT-MODULN

In diesem Kapitel konstruieren wir die Specht-Moduln und dann schauen wir einige (einfachen) Beispiele davon. Ihre Eigenschaften werden erst später nachgewiesen.

**Definition 5.1.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \vdash n$  eine Partition.

a) Sei  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau. Dann definieren wir die **alternierende Spaltensumme**

$$\kappa_t := \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \cdot \pi \in \mathbb{F}S_n$$

wobei zur Erinnerung  $C_t$  die Spaltenstabilisator von  $t$  ist.

b) Ein **Polytabloid** der Form  $\lambda$ , oder kurz  **$\lambda$ -Polytabloid**  $e_t$ , assoziiert zum  $\lambda$ -Tableau  $t$ , ist definiert durch

$$e_t := \kappa_t \cdot \{t\} \in \mathbb{F}S_n \cdot M^\lambda \subseteq M^\lambda.$$

**Bemerkung 5.2.** Mit der Zerlegung

$$e_t = \text{id}\{t\} + \left( \sum_{\pi \in C_t \setminus \{\text{id}\}} \text{sgn}(\pi) \cdot \pi \right) \{t\} =: \{t\} + \mu\{t\}$$

wobei  $\{t\} \neq \mu\{t\}$  da  $\text{id} \neq \mu$  sehen wir, dass  $e_t \neq 0$  gilt, und dies ist völlig unabhängig vom zugrundeliegenden Körper  $\mathbb{F}$  (oder sogar irgendeinem Ring).

Genauer ist  $e_t$  eine Summe von  $|C_t|$  vielen  $\lambda$ -Tabloids (d.h. von  $\mathbb{F}$ -linear unabhängigen Vektoren in  $M^\lambda$ ).

**Beispiel 5.3.** Wir erhalten  $e_t$  wie folgt:

- schreibe  $t$  auf,
- permutiere Zahlen in Spalten,
- gebe dem so erhaltenen Tableau ein zur Permutation gehöriges Vorzeichen, und
- zeichne Linien zwischen die Zeilen um Tabloids zu bekommen.

Konkret machen wir zwei Beispiele

a) Für ein  $(3 \ 2)$ -Tableau

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

gilt

$$\begin{aligned} e_t &= \frac{\overline{1 \ 3 \ 5}}{\overline{2 \ 4}} - \frac{\overline{2 \ 3 \ 5}}{\overline{1 \ 4}} - \frac{\overline{1 \ 4 \ 5}}{\overline{2 \ 3}} + \frac{\overline{2 \ 4 \ 5}}{\overline{1 \ 3}} \\ &= (\text{id} - (1 \ 2))(\text{id} - (3 \ 4)) \frac{\overline{1 \ 3 \ 5}}{\overline{2 \ 4}}. \end{aligned}$$

b) Für zwei (2 1)-Tableaux

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

also  $\{t_1\} = \{t_2\}$  gilt

$$t_1 = \frac{\overline{1 \ 2}}{\overline{3}} - \frac{\overline{3 \ 2}}{\overline{1}} \quad t_2 = \frac{\overline{2 \ 1}}{\overline{3}} - \frac{\overline{3 \ 1}}{\overline{2}}$$

und wegen

$$\frac{\overline{1 \ 2}}{\overline{3}} = \frac{\overline{2 \ 1}}{\overline{3}} \quad \wedge \quad \frac{\overline{3 \ 2}}{\overline{1}} \neq \frac{\overline{3 \ 1}}{\overline{2}}$$

gilt  $e_{t_1} \neq e_{t_2}$ .

Fazit:  $e_t$  hängt vom Tableau  $t$  ab (und nicht von  $\{t\}$ ).

Wir untersuchen noch die Rechenregeln der neuen Definitionen:

**Lemma 5.4.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \vdash n$  eine Partition und  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau mit Spalten  $C_1, \dots, C_s$ .

- a) Für jedes  $n \in S_n$  gilt  $\kappa_{\pi t} = \pi \cdot \kappa_t \cdot \pi^{-1}$ .
- b) Für jedes  $\pi \in C_t$  gilt  $\pi \cdot \kappa_t = \kappa_t \cdot \pi = \text{sgn}(\pi)t$ .
- c) Für  $1 \leq i \leq s$  sei  $S_{C_i}$  die symmetrische Gruppe auf Einträgen in Spalte  $C_i$ , also  $\kappa_{C_i} := \sum_{\sigma_i \in S_{C_i}} \text{sgn}(\sigma_i) \sigma_i$ . Dann gilt  $\kappa_t = \kappa_{C_1} \cdot \kappa_{C_2} \cdots \kappa_{C_s}$ .
- d) Für jedes  $\pi \in S_n$  gilt  $\pi e_t = e_{\pi t}$ .
- e) Für jedes  $\pi \in C_t$  gilt  $\pi e_t = \text{sgn}(\pi) e_t$ .

**Beweis.** a) & b):

Dank Lemma 4.3 gilt  $\pi C_t \pi^{-1} = C_{\pi t}$ . Die beiden Behauptung folgt aus Blatt 2 Aufgabe 2 mit  $H := C_t$  und  $H^{-1} = \kappa_t$  gemäß dortiger Notation.

d):

Nach 4.3 ist  $\pi C_t \pi^{-1} = C_{\pi t}$  für  $\pi \in S_n$ , und somit gilt

$$\pi e_t = \pi \kappa_t \{t\} = (\pi \kappa_t \pi^{-1}) \pi \{t\} = \kappa_{\pi t} \{\pi t\} = e_{\pi t}$$

wobei vorletzte Gleichheit aus a) folgt und die Letzte gemäß Definition 5.1.

e):

Sei  $\pi \in C_t$ . Dann gilt

$$\pi e_t = \pi \kappa_t \{t\} = \text{sgn}(\pi) \kappa_t \{t\} = \text{sgn}(\pi) e_t$$

wobei vorletzte Gleichheit aus Definition 5.1 folgt und die Letzte nach b).

c):

Nach Konstruktion ist  $C_t = S_{C_1} \times \cdots \times S_{C_s}$ . Deswegen schreiben wir ein  $\sigma \in C_t$  als  $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_s$  mit  $\sigma_i \in S_{C_i}$ , und somit gilt

$$\begin{aligned}
 \kappa_t &= \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma \\
 &= \sum_{\sigma_1 \in S_{C_1}, \dots, \sigma_s \in S_{C_s}} \operatorname{sgn}(\sigma_1 \cdots \sigma_s) \sigma_1 \cdots \sigma_s \\
 (\#) \quad &= \left( \sum_{\sigma_1 \in S_{C_1}} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \sigma_1 \right) \cdots \left( \sum_{\sigma_s \in S_{C_s}} \operatorname{sgn}(\sigma_s) \sigma_s \right) \\
 &= \kappa_{C_1} \quad \cdots \quad \kappa_{C_s}
 \end{aligned}$$

wobei (#) wegen der Identität

$$\sum_{a_1 \in A_1} \cdots \sum_{a_s \in A_s} \prod_{i=1}^s a_i = \prod_{i=1}^s \left( \sum_{a_i \in A_i} a_i \right)$$

gilt, und diese Identität kann man mit Induktion zeigen. Beispielsweise gilt für  $s = 2$ :  
 $(a_1 + \tilde{a}_1)(a_2 + \tilde{a}_2) = a_1 a_2 + a_1 \tilde{a}_2 + \tilde{a}_1 a_2 + \tilde{a}_1 \tilde{a}_2$ .  $\square$

**Beispiel 5.5.** Sei  $n \geq 2$  und  $\lambda = (2 \ 1^{n-2})$ . Die Standard-Tableaux der Form  $\lambda$  sind genau  $\{t_i \mid 2 \leq i \leq n\}$  mit

$$t_i := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & i \\ \hline \vdots & \\ \hline \end{array}$$

und zudem definieren wir

$$t_1 := \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \vdots & \\ \hline n & \\ \hline \end{array}$$

welches nicht standard ist.

a) Mit Lemma 5.4 d) erhalten wir  $(1 \ 2)e_{t_1} = e_{(1 \ 2)t_1} = e_{t_2}$  und dank Lemma 5.4 e) gilt für  $2 \leq i \leq n$   $(i \ i+1)e_{t_1} = \operatorname{sgn}(i \ i+1)e_{t_1} = -e_1$ .

b) Wir sehen

$$(1 \ 2 \ \dots \ n)e_{t_1} = e_{\underbrace{(1 \ 2 \ \dots \ n)}_{\notin C_{t_1}}t_1} = e_{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline \vdots & \\ \hline n & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}} = e_{(1 \ 2 \ \dots \ n)t_2} = (-1)^{n-2}e_{t_2} = (-1)^ne_{t_2}$$

wobei erste Gleichheit nach Lemma 5.4 d) gilt, zweite und dritte Gleichheit einfach durch Nachrechnen und vierte Gleichheit wegen Lemma 5.4 e).

c) Zudem gilt noch

$$(1 \ i)e_{t_1} = e_{(1 \ i)t_1} = e_{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline \vdots & \\ \hline i-1 & \\ \hline i & \\ \hline i+1 & \\ \hline \vdots & \\ \hline n & \\ \hline \end{array}} = e_{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & i \\ \hline \vdots & \\ \hline i-1 & \\ \hline 1 & \\ \hline i+1 & \\ \hline \vdots & \\ \hline n & \\ \hline \end{array}} = (-1)^ie_i$$

wobei erste Gleichheit nach Lemma 5.4 d) gilt, zweite Gleichheit Einsetzen von Definition, dritte Gleichheit einfach durch Nachrechnen und vierte Gleichheit wegen Lemma 5.4 e).

Nun können wir endlich die Specht-Moduln definieren:

**Definition 5.6.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \vdash n$  eine Partition von  $n$  und  $\mathbb{F}$  ein Körper. Sei  $t$  das „Basic“- $\lambda$ -Tableau, d.h.

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \dots & \dots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1 + 1 & \dots & \dots & \lambda_2 \\ \hline \vdots & \dots & \ddots & \\ \hline n - \lambda_k & \dots & \lambda_k & \\ \hline \end{array}.$$

Der **Specht-Modul**  $S^\lambda$  ist definiert durch

$$S^\lambda := \mathbb{F}S_n \cdot e_t \subseteq M^\lambda.$$

**Bemerkung 5.7.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \vdash n$  eine Partition von  $n$  und  $\mathbb{F}$  ein Körper.

- Seien  $s, t$   $\lambda$ -Tableaux mit  $t$  „basic“ und  $s \neq t$ . Dann existiert ein  $\pi \in S_n$  s.d.  $s = \pi t$  gilt. Mit Lemma 5.4 d) gilt daher  $\pi e_t = e_{\pi t} = e_s$ .
- Mit a) folgt dann  $\mathbb{F}S_n \cdot e_s = \mathbb{F}S_n \cdot \pi e_t = \mathbb{F}S_n \cdot e_t = S^\lambda$ , also ist der Specht-Modul  $S^\lambda$  von jedem beliebigen  $\lambda$ -Polytabloid erzeugt, und  $S^\lambda \neq 0$  nach Bemerkung 5.2.
- Nach b) gilt  $S^\lambda = \mathbb{F}S_n \cdot e_t = \{\sum_{S \text{ Tableau der Form } \lambda} \alpha_s e_s \mid \alpha_s \in \mathbb{F}\}$  wobei die Summe über alle  $\lambda$ -Tableaux läuft. Also ist  $\{e_s \mid s \text{ ist ein } \lambda\text{-Tableau}\}$  ein  $\mathbb{F}$ -Erzeugendensystem von  $S^\lambda$  als  $\mathbb{F}$ -Vektorraum.  
Später werden wir sehen, dass die Menge  $\{e_s \mid s \text{ ist ein Standard-}\lambda\text{-Tableau}\}$  eine  $\mathbb{F}$ -Basis von  $S^\lambda$  ist, d.h.  $\dim S^\lambda = f^\lambda$ .

Wir betrachten einige einfache Beispiele von Specht-Moduln

**Beispiel 5.8.**

- Sei  $\lambda = (n)$  und somit  $t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & n \\ \hline \end{array}$ . Wir schreiben  $v := \{t\}$  und definieren  $M^{(n)} := \mathbb{F}\text{Span}\{v\}$  mit  $\pi \cdot v = v$  für jedes  $\pi \in S_n$ .  
Es ist  $C_t = \{\text{id}\}$ , d.h.  $\kappa_t = \text{id}$  und somit  $e_t = \kappa_t \{t\} = \{t\} = v$ , also

$$S^{(n)} = \mathbb{F}S_n \cdot e_t = \mathbb{F}\text{Span}\{v\} = M^{(n)}.$$

- Sei  $\lambda = (1^n)$  und somit

$$t = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$$

und  $C_t = S_n$ .

Für  $\sigma \in S_n$  gilt nach Lemma 5.4 e)  $\sigma e_t = \text{sgn}(\sigma) e_t$ , da  $\sigma \in C_t = S_n$ . Damit erhalten wir

$$S^{(1^n)} = \mathbb{F}S_n e_t = \mathbb{F}\text{Span}\{e_t\}$$

also ist  $S^{(1^n)}$  eindimensional und isomorph zu dem  $\text{sgn}$ -Modul.

**Beispiel 5.9.** Sei nun  $n \geq 2$  und  $\lambda = (n-1, 1)$ . Wir wissen  $M^\lambda$  hat  $\mathbb{F}$ -Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  mit

$$v_i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots \\ \hline i & & \\ \hline \end{array}$$

für  $1 \leq i \leq n$ . Für jedes  $\pi \in S_n$  und  $1 \leq i \leq n$  gilt auch  $\pi \cdot v_i = v_{\pi(i)}$ .

Sei nun

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \hline n & & & \\ \hline \end{array}$$

das „basic“  $\lambda$ -Tableau.

Es ist  $C_t = S_{\{1, n\}} = \{\text{id}, (1 \ n)\}$  und somit nach Definition 5.6

$$e_t = \kappa_t\{t\} = (\text{id} - (1 \ n))v_n = v_n - v_1 =: w_1.$$

Für  $2 \leq i \leq n$  und  $\pi = (1 \ i)$  gilt aber

$$\pi e_t = \pi(v_n - v_1) = \begin{cases} w_i & \text{falls } i \neq n \\ -w_1 & \text{falls } i = n \end{cases}$$

also folgt

$$S^{(n-1, 1)} = \mathbb{F}S_n \cdot e_t = \mathbb{F}S_n w_1 = \mathbb{F}\text{Span}\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$$

und da  $w_1, \dots, w_{n-1}$  linear unabhängig über  $\mathbb{F}$  sind, gilt  $\dim S^{(n-1, 1)} = n-1 = f^\lambda$ .

Die konkreten Beispiele zu Specht-Moduln würden mit komplizierteren Partitionen schnell rechenlöstig sein...



# KAPITEL 6

## ANZAHL DER STANDARD-TABLEAUX II. DIE HAKENFORMEL

Wir beweisen in diesem Kapitel die wunderschöne Hakenformel, welche im Einführungskapitel schon erwähnt wurde. Die Young-Frobenius-Formel wird im Beweis benötigt, ebenfalls einige kombinatorische Techniken.

Wir formulieren erstmal das Ergebnis bzw. davor die nötigen Definitionen:

**Definition 6.1.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda = (\lambda_i) \vdash n$  eine Partition. Wir definieren die **konjugierte Partition**  $\lambda' = (\lambda'_i)$  durch  $\lambda'_i := |\{j: \lambda_j \geq i\}|$ .

Beachte  $[\lambda']$  entsteht aus  $[\lambda]$  durch Spiegeln an Diagonalen durch die Boxen  $(1, 1)$ ,  $(1, 2), \dots$ . D.h. Zeilen und Spalten werden vertauscht.

**Definition 6.2.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \vdash n$  und  $x := (i, j) \in [\lambda]$  also ist  $x$  salopp gesagt eine „Box“ in dem Young-Diagramm  $[\lambda]$ . Wir definieren

$$h(x) := \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1$$

als die **Hackenzahl** assoziiert zu  $x$ , also anschaulich

$$h(x) = \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} \\ & i & \boxed{x} & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} \\ & & \boxed{\phantom{x}} & \boxed{\phantom{x}} & \\ & & \boxed{\phantom{x}} & & \end{array}.$$

**Satz 6.3. (Hakenformel)** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \vdash n$ . Dann gilt

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{x \in [\lambda]} h(x)}.$$

Wir schauen ein Beispiel dazu:

**Beispiel 6.4.** Sei  $r, s, n \in \mathbb{N}$  mit  $n = r + s$  und  $\lambda = (r \ 1^s)$ . Wir tragen in  $[\lambda]$  die jeweiligen Hackenzahl der Boxen und erhalten

$$\left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} n & r-1 & \cdots & 1 \end{array}}^r \\ s \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right.$$

Mit der Hackenformel folgt

$$f^\lambda = \frac{n!}{(r-1)!s!n} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!s!} = \binom{n-1}{s} = \binom{n-1}{r-1}.$$

auf den Beweis von Satz 6.3 machen wir erstmal einige technische Vorbereitungen:

**Lemma 6.5.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$  eine Partition wobei  $\lambda_l \neq 0$ . Seien dazu  $k, m \in \mathbb{N}$  und  $m \geq \lambda_1$  und  $k \geq l$ . Dann gilt, dass die  $k+m$  Zahlen

$$\begin{aligned} \{\lambda_i + (k-i) | 1 \leq i \leq k\} &\cup \{(k-\lambda'_j) + (j-1) | 1 \leq j \leq m\} \\ \text{„vertikale Segmente“} &\quad \quad \quad \text{„horizontale Segmente“} \end{aligned}$$

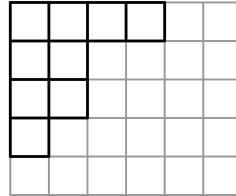
eine Permutation der Zahlen  $\{0, 1, \dots, k+m-1\}$  bilden.

Man könnte sich fragen „wen interessiert das?“ Naja, wir erklären den Vorgang, wie man sich unter dem Lemma vorstellen und die gewünschte Permutation finden kann, über ein konkretes Zahlenbeispiel.

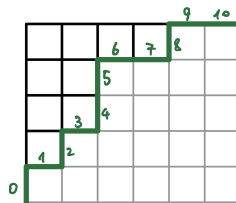
Sei z.B.  $\lambda = (4 \ 2 \ 2 \ 1)$ , also  $\lambda' = (4 \ 3 \ 1 \ 1)$  mit  $\lambda_1 = 4$ ,  $l = \lambda'_1 = 4$  und

$$[\lambda] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{bzw.} \quad [\lambda'] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

Wir betten  $[\lambda]$  in ein Rechteck der Größe  $5 \times 6$  ein, d.h.  $k=5$  sowie  $m=6$ , und die Voraussetzungen  $m=6 \geq 4 = \lambda_1$  sowie  $k=5 \geq 4 = l$  sind erfüllt. Diese „Einbettung“ sieht graphisch aus wie



und wir markieren die Segmente des Rechtecks von links unten nach rechts oben entlang des Randes von  $[\lambda]$  im Rechteck und ordnen jedem Segment einer Nummer zu, also



Diese nummerierten Segmente haben zwei Arten, nämlich

- die horizontalen Segmente

$$\begin{aligned} \{1, 3, 6, 7, 9, 10\} &= \{(k-\lambda'_j) + (j-1) | k=5, 1 \leq j \leq m=6\} \\ &= \{(k+j-1) - \lambda'_j | k=5, 1 \leq j \leq m=6\} \end{aligned}$$



- die vertikalen Segmente

$$\{0, 2, 4, 5, 8\} = \{\lambda_i + (k - i) \mid 1 \leq i \leq k = 5\}.$$

Beide Mengen sind nach Konstruktion disjunkt und die Anzahl der Segmente lautet  $k + m - 1 = 10$ . Daher definiert die Vorschrift der beiden Segmentenmenge eine Permutation von  $\{0, \dots, k + m - 1\} = \{0, \dots, 10\}$ , also

$$i \mapsto \begin{cases} \lambda_i + (k - i) & \text{für } 0 \leq i \leq k = 4 \\ (i - 1) - \lambda'_i & \text{für } k = 5 \leq i \leq k + m = 10 \end{cases}$$

und damit sind wir fertig mit der Erklärung für Lemma 6.5.

Eine „Lehre“ aus Lemma 6.5 wäre: Wenn man nach Bedeutungen für Kombinatorik sucht, scheinen die Dinge interessanter zu sein. Auf einem sauberen rigorosen Beweis dieses Lemma verzichten wir hier.

**Folgerung 6.6.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$  eine Partition, und  $k, m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq \lambda_1$  sowie  $k \geq l$ . Sei dazu  $f_{\lambda,k}(t) := \sum_{i=1}^k t^{\lambda_i + k - i}$ . Dann gilt:

- $\sum_{j=0}^{k+m-1} t^j = f_{\lambda,k}(t) + t^{m+k-1} \cdot f_{\lambda',m}(t^{-1})$ .
- $\sum_{j=0}^{k+m-1} t^j = f_{\lambda',m}(t) + t^{m+k-1} \cdot f_{\lambda,k}(t^{-1})$ .
- $\sum_{j=0}^{\lambda_1+k-1} t^j = \sum_{j=1}^{\lambda_1} t^{\lambda'_j + \lambda_1 - j} + \sum_{j=1}^k t^{\lambda_1 - 1 + j - \lambda_j}$ .

Die Farben in a) und b) deuten an, welche Unterschiede es bei den beiden Gleichungen gibt. Für den Beweis von Hackenformel werden wir eigentlich nur c) brauchen, aber c) folgt aus b), und b) ist eine Umformung von a).

Beachte bei der rechten Seite von c):

- In erster Summe ist  $\lambda'_j + \lambda_1 - j = h(1, j)$  also die Hackenzahl,
- In der zweiten Summe ist gerade  $\lambda_1 - 1 + j - \lambda_j = l_1 - l_j$  also die  $l_i$ 's bei der Young-Frobenius-Formel, siehe Satz 3.5.

**Beweis.** von Lemma 6.6:

- Potenzen von  $t$  in  $f_{\lambda,k}$  entsprechen den vertikalen Segmenten in Lemma 6.5. Zudem gilt  $t^{m+k-1} f_{\lambda',m}(t^{-1}) = \sum_{j=1}^m t^{(m+k-1) - (\lambda'_j + m - j)}$ , also entsprechen die Potenzen von  $t$  im zweiten Summanden genau den horizontalen Segmenten in Lemma 6.5. Mit Lemma 6.5 folgt dann die Gleichheit.
- Dies ist gerade a) für  $\lambda \rightsquigarrow \lambda'$ ,  $k \rightsquigarrow m$  und  $m \rightsquigarrow k$ .
- Einsetzen von  $m := \lambda_1$  in b) liefert die Behauptung. □

Noch ein technisches Lemma bevor wir zum Beweis von Hackenformel kommt:

**Lemma 6.7.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$  eine Partition, und  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq l = \lambda'_1$ . Für  $1 \leq j \leq k$  schreiben wir  $l_j := \lambda_j + k - j$ .

a) Für jedes  $1 \leq i \leq k$  gilt

$$\prod_{j=1}^{\lambda_i} (1 - t^{h(i,j)}) \prod_{j=i+1}^k (1 - t^{l_i - l_j}) = \prod_{j=1}^{l_i = \lambda_i + k - i} (1 - t^j). \quad (6.1)$$

b) Insbesondere gilt

$$\prod_{(i,j) \in [\lambda]} (1 - t^{h(i,j)}) = \frac{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{l_i} (1 - t^j)}{\prod_{i < j} (1 - t^{l_i - l_j})}.$$

**Beweis.**

a) Wir teilen den Beweis von a) in zwei Schritte:

i. Sei  $i = 1$ . Dann ist  $h(1, j) = \lambda_1 + \lambda'_j - j$  und  $l_1 - l_j = \lambda_1 - 1 + j - \lambda_j$ . Nach Lemma 6.6 c) gilt  $\sum_{j=1}^{\lambda_1 + k - 1} t^j = \sum_{j=1}^{\lambda_1} t^{h(1,j)} + \sum_{j=2}^k t^{l_1 - l_j}$  (auf beiden Seiten werden  $t^0 = 1 = t^{l_1 - l_1}$  subtrahiert). Wenn man  $t^a$  durch  $1 - t^a$  ersetzt, sowie  $\sum$  durch  $\prod$ , ist die Gleichung immer noch gültig, und somit erhalten wir

$$\prod_{j=1}^{\lambda_1 + k - 1} (1 - t^j) = \prod_{j=1}^{\lambda_1} (1 - t^{h(1,j)}) \cdot \prod_{j=2}^k (1 - t^{l_1 - l_j})$$

also gilt die Behauptung für  $i = 1$ .

ii. Wir definieren eine Partition  $\mu = (\mu_1 \dots) = (\lambda_i \lambda_{i+1} \dots)$  und setzen  $m = \lambda_1$  unverändert und  $\bar{k} := k - (i - 1)$ . Da  $\bar{k} \geq \mu'_1$  erfüllt ist, können wir i. auf  $\mu$  anwenden. Damit erhält man (6.1) für jedes  $1 \leq i \leq k$ .

b) Wir teilen (6.1) durch  $\prod_{j=i+1}^k (1 - t^{l_i - l_j})$  und dann bilden wir ein Produkt über alle  $i$ 's. Auf der linken Seite gilt  $\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{\lambda_i} \dots = \prod_{(i,j) \in [\lambda]} \dots$  und im Nenner auf der rechten Seite gilt  $\prod_{i=1}^k \prod_{j=i+1}^k \dots = \prod_{i < j} \dots$ .  $\square$

**Bemerkung 6.8. Beweis der Hakenformel.**

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$  zeigen wir  $f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{x \in [\lambda]} h(x)}$ .

Wir wählen ein  $k \geq l = \lambda'_1$  und setzen  $l_j := \lambda_j + k - j$  für  $1 \leq i \leq k$ .

a) Wir behaupten:

$$\prod_{x \in [\lambda]} h(x) = \frac{\prod_{i=1}^k l_i!}{\prod_{i < j} (l_i - l_j)}.$$

Angenommen, diese Gleichheit ist gezeigt, dann folgt mit der Young-Frobenius-Formel:

$$f^\lambda = \frac{n! \prod_{i < j} (l_i - l_j)}{\prod_{i=1}^k l_i!} = \frac{n!}{\prod_{x \in [\lambda]} h(x)}.$$

b) Es bleibt noch die Behauptung in a) zu zeigen. Dazu teilen wir die Gleichung in Lemma 6.7 b) durch

$$(1-t)^n = \frac{(1-t)^{n + \frac{k(k-1)}{2}}}{(1-t)^{\frac{k(k-1)}{2}}}$$

und erhalten

$$\begin{array}{ccc} \prod_{x \in [\lambda]} \frac{1-t^{h(x)}}{1-t} & = & \frac{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{l_i} \frac{1-t^j}{1-t}}{\prod_{i < j} \frac{(1-t)^{l_i - l_j}}{1-t}} \\ t \rightarrow 1 \downarrow & & \downarrow t \rightarrow 1 \\ \prod_{x \in [\lambda]} h(x) & = & \frac{\prod_{i=1}^k l_i!}{\prod_{i < j} (l_i - l_j)}. \end{array}$$

□



# KAPITEL 7

## SOCKEL- UND RADIKALREIHE VON MODULN

Specht-Moduln sind i.A. nicht einfach falls  $\text{char}\mathbb{F} \neq 0$ . In solchen Fällen möchte man dann wissen, inwieweit die Specht-Moduln nicht einfach sind. Dafür bräuchte man die Theorie von Sockel- und Radikalreihen.

Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper und  $A$  eine endlich dimensionale  $\mathbb{F}$ -Algebra.

**Definition 7.1.** Sei  $V$  ein  $A$ -Modul.

Wir definieren das **Radikal** von  $V$  als den Schnitt aller maximalen Untermoduln von  $V$  also

$$\text{rad}V := \bigcap_{M < V \text{ mit } M \text{ maximal}} M$$

sowie den **Sockel** von  $V$  als die Summe aller einfachen Untermoduln von  $V$  also

$$\text{soc}V := \sum_{S \leq V \text{ mit } S \text{ einfach}} S.$$

Radikal und Sockel sind beide Untermoduln von  $V$ .

**Satz 7.2.** Für  $V$  einen endlich dimensionalen  $A$ -Modul sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- a)  $V$  ist halbeinfach, d.h. jeder Untermodul von  $V$  hat ein Komplement, also  $\forall M \leq V \exists M' \leq V: V = M \oplus M'$ .
- b)  $V$  ist gleich dem Sockel von  $V$ , also  $V = \text{soc}V$ .
- c)  $V$  ist Summe aller einfachen Untermoduln von  $V$ , also  $V = \sum_{S \leq V \text{ mit } S \text{ einfach}} S$ .
- d)  $V$  ist endliche direkte Summe von einfachen Untermoduln von  $V$ , also  $\exists$  einfache Untermoduln  $V_1, \dots, V_t \leq V: V = \bigoplus_{i=1}^t V_i$ .
- e) Radikal von  $V$  ist 0, also  $\text{rad}V = 0$ .

**Beweis.** „a)  $\Rightarrow$  b)“

Sei  $V$  halbeinfach. Dann hat  $\text{soc}V \leq V$  als Untermodul ein Komplement  $W \leq V$  in  $V$ , also  $V = \text{soc}V \oplus W$ . Wir zeigen  $W = 0$ . Gegenannahme:  $W \neq 0$ . Mit  $\dim W \leq \dim V < \infty$  besitze  $W$  ein Kompositionsreihe und somit einen nicht trivialen einfachen Untermodul  $0 \neq V_\alpha \leq W$ . Es ist  $V_\alpha \leq \text{soc}V$  per Definition von Sockel. Aus  $V = \text{soc}V \oplus W$  folgt aber dann  $0 \neq V_\alpha \leq \text{soc}V \cap W = 0$ . Widerspruch!

„b)  $\Rightarrow$  c)“

Dies folgt direkt aus der Definition von Sockel.

„c)  $\Rightarrow$  d)“

Sei  $W$  eine direkte Summe maximaler Dimension von einfachen Untermoduln  $V_\alpha$  in  $V$ . Nach Voraussetzung ist  $V = \sum V_\alpha$  Summe einfacher Moduln. Angenommen  $W \neq V$ . Dann existiert ein einfacher Modul  $V_\alpha \leq V$  mit  $V_\alpha \not\leq W$ . Der Schnitt  $V_\alpha \cap W < V_\alpha$  ist damit ein echter Untermodul des einfachen Moduls  $V_\alpha$ . Nach Definition 2.5 b) ist  $V_\alpha \cap W = 0$ . Es folgt, dass  $W \oplus V_\alpha \leq V$  direkte Summe einfacher Moduln ist mit  $\dim(W \oplus V_\alpha) > \dim W$ , ein Widerspruch zur Maximalität von  $W$ . Also ist  $V = W$ , das heißt, der Modul  $V$  ist eine direkte Summe einfacher Moduln, und diese ist endlich, da  $V$  endlich-dimensional ist.

„d)  $\Rightarrow$  e)“

Sei  $V = \bigoplus_{i=1}^t V_i$  eine endliche direkte Summe einfacher Moduln  $V_i$ . Wir setze dann  $W_j := \bigoplus_{i=1, i \neq j}^t V_i$  für  $1 \leq j \leq t$ . Mit Untermodulkorrespondenz sieht man, dass  $W_j < V$  maximale Untermoduln in  $V$  sind. Der Schnitt von allen maximalen Untermoduln von  $V$  ist enthalten im Schnitt der maximalen Untermoduln  $W_j$  von  $V$ , und letzterer ist bereits Null. Mit Definition des Radikals folgt, dass  $\text{rad} V = 0$  ist.

„e)  $\Rightarrow$  a)“

Dieser Beweisschritt ist der Schwierigste. Wir machen Induktion nach der Dimension von  $V$ . Ist  $\dim V = 1$ , so ist der Modul  $V$  einfach, und damit bereits halbeinfach. Sei also  $\dim V > 1$ . Sei  $0 \neq W < V$  ein echter Untermodul von  $V$ . Wir konstruieren ein Komplement zu  $W$  in  $V$ .

Hierzu müssen wir zunächst Vorarbeiten leisten:

- i. Sei  $S_W \leq W$  ein einfacher Untermodul von  $W$ . Falls  $S_W \leq M$  für alle maximalen Untermoduln  $M$  von  $V$ , dann gilt  $S_W \leq \bigcap_{M < V, M \text{ max.}} M = \text{rad} V$  per Definition von  $\text{rad} V$ . Mit der Voraussetzung  $\text{rad} V = 0$  folgt damit  $S_W = 0$ , ein Widerspruch zu Definition eines einfachen Moduls. Also existiert ein maximaler Untermodul  $M_W$  in  $V$  mit  $S_W \not\leq M_W$ . Damit ist  $S_W \cap M_W < S_W$  echter Untermodul eines einfachen Moduls, also  $S_W \cap M_W = 0$ . Es folgt  $M_W \leq S_W + M_W = S_W \oplus M_W \leq V$ , und da  $M_W$  maximaler Untermodul von  $V$  ist, gilt  $S_W \oplus M_W = V$ .
- ii. Da  $M_W$  Untermodul von  $V$  ist, folgt  $\text{rad} M_W \leq \text{rad} V = 0$ , also  $\text{rad} M_W = 0$ . Es ist  $\dim M_W < \dim V$ , also ist nach Induktionsvoraussetzung  $M_W$  ein halbeinfacher Modul. Dam existiert zum Untermodul  $W \cap M_W \leq M_W$  ein Komplement  $W'$  in  $M_W$ , das heisst, es ist  $M_W = (W \cap M_W) \oplus W'$ .

Mit dem hiermit konstruierten Modul  $W'$  können wir nun die Behauptung beweisen. Wir wollen zeigen, dass  $V = W \oplus W'$  ist. Wir müssen also zeigen, dass  $V = W + W'$  und  $W \cap W' = 0$  ist. Sei  $v \in V$  beliebig. Wegen  $S_W \oplus M_W = V$  existieren eindeutige Elemente  $s \in S$  und  $m \in M_W$  mit  $v = s + m$ . Mit der Gleichung  $M_W = (W \cap M_W) \oplus W'$  existieren  $w \in W \cap M_W$  und  $w' \in W'$  mit  $m = w + w'$ . Also ist  $v = s + m = (s + w) + w' \in W + W'$ , da  $S \leq W$  ist. Also ist  $V = W + W'$ . Als nächstes zeigen wir, dass der Schnitt  $W \cap W' = 0$  ist. Mit  $M_W = (W \cap M_W) \oplus W'$  folgt

$$0 = (W \cap M) \cap W' = W \cap (M \cap W') = W \cap W',$$

da  $W' \leq M$  nach Konstruktion in ii). Also ist in der Tat  $V = W \oplus W'$ , der Modul  $W'$  ist also ein Komplement zu  $W$  in  $V$ .  $\square$

**Lemma 7.3.** Untermoduln, Quotientenmoduln, homomorphe Bilder und direkte Summe von halbeinfachen Moduln sind wieder halbeinfach.

Den Beweis überlassen wir als Übung. Ein Hinweis dazu: Man könnte in folgender Reihenfolge den Beweis durchführen: i. homomorphe Bilder, ii. Quotientenmoduln, iii. Untermoduln, iv. direkte Summe halbeinfacher Moduln.

**Proposition 7.4.** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $A$ -Modul.

- a) Der Quotientenmodul  $V/\text{rad}V$  ist halbeinfach, und  $\text{rad}V$  ist der kleinste Untermodul von  $V$  s.d. der Quotientenmodul halbeinfach ist.
- b) Der Sockel ist der größte halbeinfache Untermodul von  $V$ .

**Beweis.**

a) Wir zeigen die Behauptung in zwei Teile:

- i. Nach der Untermodulkorrespondenz hat jeder maximale Untermodul von  $V/\text{rad}V$  die Form  $M/\text{rad}V$  für einen maximalen Untermodul  $M \leq V$ . Damit folgt:

$$\begin{aligned} \text{rad}(V/\text{rad}V) &= \bigcap_{M \leq V, M \text{ max.}} M/\text{rad}V \\ &= \left( \bigcap_{M \leq V, M \text{ max.}} M \right) / \text{rad}V \\ &= \text{rad}V / \text{rad}V = 0 \end{aligned}$$

Nach Satz 7.2 ist damit also der Modul  $V/\text{rad}V$  halbeinfach.

- ii. Sei nun  $W \leq V$  ein Untermodul mit der Eigenschaft, dass  $V/W$  halbeinfach ist. Wir wollen zeigen, dass dann  $W \subseteq \text{rad}V$  ist, und in diesem Sinne ist damit  $\text{rad}V$  der größte Untermodul von  $V$ , so dass der Quotient halbeinfach ist. Nach Voraussetzung ist der Modul  $V/W$  halbeinfach, also folgt:

$$0 = \text{rad}(V/W) = \bigcap_{W \leq M \leq V, M \text{ max.}} M/W = \left( \bigcap_{W \leq M \leq V, M \text{ max.}} M \right) / W.$$

Damit folgt, dass

$$\text{rad}V = \bigcap_{M \leq V, M \text{ max.}} M \subseteq \bigcap_{W \leq M \leq V, M \text{ max.}} M = W.$$

Die Inklusion gilt, weil auf der rechten und größeren Seite über weniger Mengen  $M \leq V$  geschnitten wird als auf der linken Seite.

- b) Um diese Behauptung zu zeigen, brauchen wir eine Technik, um den Sockel von  $V$  besser auszurechnen. Dies gelingt mit dem Jacobson-Radikal, welches im Folgenden wiederholt wird.  $\square$

**Bemerkung 7.5. (Erinnerung an Charakterisierungen von Jacobson-Radikal)** Um Sockel und Radikal von einem Modul zu bestimmen, ist das Jacobson-Radikal  $J(A)$  der Algebra  $A$  hilfreich. Here erinnern wir uns an einige Charakterisierungen davon ohne Beweis.

$$\begin{aligned}
 J(A) &:= \bigcap_{I \text{ max. Linksideal von } A} I \\
 &= \bigcap_{M \leqslant_A A \text{ mit } M \text{ max.}} A \\
 (\text{Definition 7.1}) &= \text{rad}_A A \\
 &= \text{größtes beiseitiges nilpotentes Ideal in } A \\
 &= \bigcap_{S \text{ einfacher } A\text{-Modul}} \text{Ann}(S)
 \end{aligned}$$

wobei  $\text{Ann}(S) = \{a \in A \mid aS = 0\}$ . Außerdem schreiben wir oft einfach  $\text{rad} A := J(A)$ .

Beachte:  $J(A)$  nilpotent heißt, dass es ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, s.d.  $(\text{rad} A)^n = 0$  ist. Aber i.A. hat  $A$  mehr nilpotente Elemente als  $\text{rad} A$ .

Bemerkung 7.5 liefert eine Methode, um Sockel und Radikal eines  $A$ -Moduls zu berechnen:

**Proposition 7.6.** Sei  $U$  ein  $A$ -Modul. Dann gilt

- a)  $\text{rad} U = \text{rad} A \cdot U$ .
- b)  $\text{soc} U = \{u \in U \mid \text{rad} A \cdot u = 0\}$ .

**Beweis.**

a) „ $\supseteq$ “: Sei  $U$  ein  $A$ -Modul und  $V$  ein Untermodul von  $U$  mit  $U/V$  halbeinfach. Da  $U/V$  eine direkte Summe einfacher Moduln ist, und das Radikal alle einfachen Moduln annulliert, folgt aus Bemerkung 7.5, dass  $\text{rad} A \cdot U/V = 0$  ist. Es ist also  $0 = a(u + V) = a \cdot u + V$  für alle  $a \in \text{rad} A$  und  $u \in U$  und das bedeutet  $a \cdot u \in V$  bzw.  $\text{rad} A \cdot U \subseteq V$ . Wir wählen nun  $V = \text{rad} U$ . Dann erhalten wir  $\text{rad} A \cdot U \subseteq \text{rad} U$ .

„ $\subseteq$ “: Es ist  $\text{rad} A \cdot (U / \text{rad} A \cdot U) = \text{rad} A \cdot U / \text{rad} A \cdot U = 0$ . Mittels „Deflation“ ist damit der  $A$ -Modul  $U / \text{rad} A \cdot U$  auch ein  $\bar{A} := A / \text{rad} A$ -Modul. Da  $\bar{A}$  halbeinfache Algebra ist, folgt  $U / \text{rad} A \cdot U$  ist ein halbeinfacher Modul. Nach Proposition 7.4 ist  $\text{rad} U$  der kleinste Untermodul von  $U$ , so dass  $U / \text{rad} U$  halbeinfach ist. Also folgt  $\text{rad} U \subseteq \text{rad} A \cdot U$ .

b) „ $\supseteq$ “: Definiere  $W := \{u \in U \mid \text{rad} A \cdot u = 0\}$ . Nach Satz 7.2 ist  $\text{soc} U$  ein halbeinfacher Modul. Nach Bemerkung 7.5 ist somit  $\text{rad} A \cdot \text{soc} U = 0$ . Also ist  $0 \neq \text{soc} U \subseteq W$ .

„ $\subseteq$ “: Seien  $u, v \in W$ . Dann ist  $a \cdot u = 0 = a \cdot v$  bzw.  $a(u \pm v) = 0$  für alle  $a \in \text{rad} A$ . Damit ist  $u \pm v \in W$ , also  $W$  eine abelsche Gruppe. Sei  $b \in A$  und  $a \in \text{rad} A$ . Dann ist  $a(bu) = (ab)u = 0$ , denn  $ab \in \text{rad} A$ , weil  $\text{rad} A$  ein Ideal ist. Also ist  $bu \in W$ . Damit ist  $W$  ein Untermodul von  $U$ . Aus der Definition von  $W$  folgt  $0 = \text{rad} A \cdot W = \text{rad} W$ . Nach Satz 7.2 ist damit  $W$  ein halbeinfacher Untermodul von  $U$ . Es ist  $\text{soc} U$  der größte halbeinfache Untermodul von  $U$ , also gilt  $W \subseteq \text{soc} U$ .  $\square$



Mit Proposition 7.6 können wir nun Radikal- & Sockelreihen konstruieren. Zunächst betrachten wir die Radikalreihe:

**Bemerkung 7.7.** Es ist  $\text{rad}M \leq M$  ein Untermodul mit  $M/\text{rad}M$  halbeinfach nach Proposition 7.4. Wir erhalten die Radikalreihe des Moduls  $M$  durch Iterieren:

Bilde das Radikal von Modul  $\text{rad}M$ , also

$$\text{rad}^2M := \text{rad}(\text{rad}M) = \text{rad}A \cdot (\text{rad}M) = \text{rad}A \cdot \text{rad}A \cdot M =: \text{rad}^2A \cdot M.$$

Es ist  $\text{rad}^2M \leq \text{rad}M$  ein Untermodul mit  $\text{rad}M/\text{rad}^2M$  halbeinfach nach Proposition 7.4. Allgemein setzen wir

$$\text{rad}^kM := (\text{rad}A)^k \cdot M = \text{rad}(\text{rad}^{k-1}M).$$

Nach Bemerkung 7.5 ist  $\text{rad}A$  ein nilpotentes Ideal und es existiert eine natürliche Zahl  $n$  mit  $\text{rad}^nA := (\text{rad}A)^n = 0$ . Damit existiert auch eine (möglicherweise andere) natürliche Zahl  $n$  mit  $\text{rad}^nM = 0$ . Sei nun  $l$  die kleinste natürliche Zahl mit  $\text{rad}^{l-1}M \neq 0$  und  $\text{rad}^lM = 0$ . Die endliche Folge von Untermoduln

$$M =: \text{rad}^0M \supsetneq \text{rad}^1M \supsetneq \dots \supsetneq \text{rad}^{l-1}M \supsetneq 0$$

heißt die **Radikalreihe** von  $M$  und  $l$  heisst die **Länge der Radikalreihe** von  $M$ .

Man sieht leicht, dass  $M$  halbeinfach ist g.d.w.  $l = 1$  gilt.

Die Subquotienten  $\text{rad}^iM/\text{rad}^{i+1}M$  aus der Radikalreihe sind nach Konstruktion halbeinfach, und wir schreiben sie als direkte Summen einfacher Moduln  $S_{i,j}$ :

$$\begin{aligned} M/\text{rad}M &= S_{1,1} \oplus \dots \oplus S_{1,t_1} \\ \text{rad}M/\text{rad}^2M &= S_{2,1} \oplus \dots \oplus S_{2,t_2} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \text{rad}^{l-2}M/\text{rad}^{l-1}M &= S_{l-1,1} \oplus \dots \oplus S_{l-1,t_{l-1}} \\ \text{rad}^{l-1}M &= S_{l,1} \oplus \dots \oplus S_{l,t_l}. \end{aligned}$$

Wir beschreiben den Modul  $M$  daher auch mit dem Bild

$$M = \begin{pmatrix} S_{1,1} \dots S_{1,t_1} \\ S_{2,1} \dots S_{2,t_2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ S_{l-1,1} \dots S_{l-1,t_{l-1}} \\ S_{l,1} \dots S_{l,t_l} \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 7.8.** Der Sockel  $\text{soc}M$  ist nach Proposition 7.4 der grösste halbeinfache Untermodul von  $M$ . Wir erhalten die Sockelreihe von  $M$  durch Iterieren:

Wenn  $M$  nicht halbeinfach ist, ist der Sockel von  $M/\text{soc}M$  nicht trivial, und wir bilden in diesem Fall erneut den Sockel, jetzt von  $M/\text{soc}M$ . Mit Untermodulkorrespondenz angewandt auf die Projektion  $M \twoheadrightarrow M/\text{soc}M$  sehen wir, dass es zu dem Modul vom Quotientenmodul  $\text{soc}(M/\text{soc}M) \leq M/\text{soc}M$  ein Untermodul  $\text{soc}M \leq \text{soc}^2M \leq M$  in  $M$  existiert mit

$$\text{soc}^2M/\text{soc}M = \text{soc}(M/\text{soc}M).$$

Sei bereits der Untermodul  $\text{soc}^{n-1}M \leq M$  definiert. Mit dem obigen Argument folgt, dann existiert ein Untermodul  $\text{soc}^n M$  mit  $\text{soc}^{n-1}M \leq \text{soc}^n M \leq M$ , sodass

$$\text{soc}^n M / \text{soc}^{n-1} M = \text{soc}(M / \text{soc}^{n-1} M) \quad (7.1)$$

ist. Wir zeigen mit Induktion nach  $n$ , dass

$$\text{soc}^n M = \{m \in M \mid \text{rad}^n A \cdot m = 0\}. \quad (7.2)$$

Der Induktionsanfang für  $n=2$  enthält genau dieselben Argumente wie wir sie im Induktionsschritt verwenden. Wir machen deshalb gleich den Induktionsschritt. Angenommen, wir wissen, dass Gleichung (7.2) für  $n-1$  gilt.

- i. Der Sockel eines Moduls ist nach Satz 7.2 ein halbeinfacher Modul. Aus (7.1) folgt, dass  $\text{soc}^n M / \text{soc}^{n-1} M$  halbeinfach ist, also  $\text{rad} A \cdot (\text{soc}^n M / \text{soc}^{n-1} M) = 0$ . Das Rechnen mit Nebenklassen impliziert also  $\text{rad} A \cdot \text{soc}^n M \subseteq \text{soc}^{n-1} M$ . Multiplikation von links mit  $\text{rad}^{n-1} A$  liefert

$$\text{rad}^n A \cdot \text{soc}^n M \subseteq \text{rad}^{n-1} A \cdot \text{soc}^{n-1} M = 0$$

wobei beim letzten Gleichheitszeichen die Induktionsvoraussetzung benutzt wird. Es folgt, dass  $\text{soc}^n M \subseteq \{m \in M \mid \text{rad}^n A \cdot m = 0\}$ .

- ii. Umgekehrt, sei nun  $m \in M$  mit  $0 = \text{rad}^n A \cdot m = \text{rad}^{n-1} A (\text{rad} A \cdot m)$ . Dann ist wegen Induktionsvoraussetzung  $\text{rad} A \cdot m \in \text{soc}^{n-1} M$ , das heißt im Quotientenmodul  $M / \text{soc}^{n-1} M$  gilt die Gleichung

$$\text{rad} A \cdot (m + \text{soc}^{n-1} M) = \text{rad} A \cdot m + \text{soc}^{n-1} M = 0 + \text{soc}^{n-1} M.$$

Also ist  $m + \text{soc}^{n-1} M \in \text{soc}(M / \text{soc}^{n-1} M) = \text{soc}^n M / \text{soc}^{n-1} M$ , wobei „ $\in$ “ wegen Proposition 7.6 gilt, und „ $=$ “ wegen (7.1). Somit ist  $m \in \text{soc}^n M$ , und das heißt aber  $\{m \in M \mid \text{rad}^n A \cdot m = 0\} \subseteq \text{soc}^n M$ .

Da das Radikal  $\text{rad} A$  der Algebra  $A$  nach Bemerkung 7.5 ein nilpotentes Ideal ist, impliziert Gleichung (7.2), dass es ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\text{soc}^m M = M$ . Die endliche Folge von Untermoduln

$$0 =: \text{soc}^0 M \subsetneq \text{soc}^1 M \subsetneq \text{soc}^2 M \subsetneq \cdots \subsetneq \text{soc}^m M$$

heißt die **Sockelreihe** von Modul  $M$ , und  $m \in \mathbb{N}_0$  minimal mit  $\text{soc}^m M = M$  heißt die **Länge der Sockelreihe** von  $M$ . Man könnte diese Reihe auch durch einen Untermodulverband beschrieben werden

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M / \text{soc} M \\ \cup & & \cup \\ \vdots & & \vdots \\ \cup & & \cup \\ \text{soc}^{i+1} M & \longrightarrow & \text{soc}^{i+1} M / \text{soc} M = \text{soc}^{i+1}(M / \text{soc} M) \\ \cup & & \cup \\ \text{soc}^i M & \longrightarrow & \text{soc}^i M / \text{soc} M = \text{soc}^i(M / \text{soc} M) \\ \cup & & \cup \\ \vdots & & \vdots \\ \cup & & \cup \\ \text{soc} M & \longrightarrow & \text{soc} M / \text{soc} M = \text{soc}(M / \text{soc} M) \\ \cup & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Die folgenden Moduln sind nach Gleichung (7.1) halbeinfach, und wir schreiben sie deshalb als direkte Summen einfacher Moduln  $T_{i,j}$ , siehe Satz 7.2:

$$\begin{aligned} \text{soc}^m M / \text{soc}^{m-1} M &= T_{m,1} \oplus \cdots \oplus T_{m,t_m} \\ \text{soc}^{m-1} M / \text{soc}^{m-2} M &= T_{m-1,1} \oplus \cdots \oplus T_{m-1,t_{m-1}} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \text{soc}^2 M / \text{soc} M &= T_{2,1} \oplus \cdots \oplus T_{2,t_2} \\ \text{soc} M &= T_{1,1} \oplus \cdots \oplus T_{1,t_1}. \end{aligned}$$

Wir beschreiben den Modul  $M$  daher auch mit dem Bild

$$M = \begin{pmatrix} T_{m,1} \cdots T_{m,t_m} \\ T_{m-1,1} \cdots T_{m-1,t_{m-1}} \\ \vdots \\ T_{2,1} \cdots T_{2,t_2} \\ T_{1,1} \cdots T_{1,t_1} \end{pmatrix}$$

Wir bemerken noch, dass die  $S_{i,j}$  aus Bemerkung 7.7 und die  $T_{k,l}$  hier dieselben sind nach Jordan-Hölder, aber die beiden Schichtungen müssen i.A. nicht übereinstimmen.

Als nächstes schauen wir uns einige Beispiele von Radikal- und Sockelreihen an.

Die Beispiele mit symmetrischen Gruppen sind i.A. schwer und wir fangen mit zwei einfacheren Fällen an:

**Beispiel.** Sei  $A := \mathbb{F}[X] / \langle X^n \rangle$  mit  $\mathbb{F}$  einem Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Wir bestimmen die Radikal- & Sockelreihe vom regulären Modul  ${}_A A$ .

Da  $A$  ein Quotient von  $\mathbb{F}[X]$  ist, wobei  $\mathbb{F}[X]$  ein Hauptidealring ist, entspricht ein Untermodul  $M \leqslant {}_A A$  einem Ideal  $\langle Y \rangle \triangleleft \mathbb{F}[X]$  mit  $Y | X^n$ , im Bild also

$$\begin{array}{ccc} A & \longleftarrow & \mathbb{F}[X] \\ \cup \wr & & \cup \wr \\ M & \longleftarrow & \langle Y \rangle \\ \cup \wr & & \cup \wr \\ 0 & \longleftarrow & \langle X^n \rangle. \end{array}$$

und somit gilt  $M = \langle X^i \rangle / \langle X^n \rangle$  mit  $0 \leqslant i \leqslant n$ . Wir erhalten eine eindeutige Modulkette, die gleichzeitig die Radikal- und Sockelreihe von  ${}_A A$  ist, also

$$\begin{array}{ccccc} A & = & \text{rad}^0 A & = & \text{soc}^n A \\ \cup \wr & & & & \\ \langle X \rangle / \langle X^n \rangle & = & \text{rad} A & = & \text{soc}^{n-1} A \\ \cup \wr & & & & \\ \vdots & & & & \\ \cup \wr & & & & \\ \langle X^{n-1} \rangle / \langle X^n \rangle & = & \text{rad}^{n-1} A & = & \text{soc} A \\ \cup \wr & & & & \\ 0 & = & \text{rad}^n A & = & \text{soc}^0 A \end{array}$$

und wir sehen, dass für  $1 \leqslant i \leqslant n-1$  gilt

$$\text{rad}^i A = \text{soc}^{n-i} A \cong {}_A \mathbb{F}$$

wobei  $X$  als 0 auf  ${}_A \mathbb{F}$  operiert.

**Beispiel.** Sei nun  $A := T_3(\mathbb{F})$  die Algebra der oberen Dreiecksmatrizen und wir bestimmen die Radikal- & Sockelreihe vom regulären Modul  ${}_A A$ .

Als erstes sollen wir folgende Bezeichnungen vereinbaren:

$$P_1 := \begin{pmatrix} \mathbb{F} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & & \\ & \mathbb{F} & \\ & & \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & & \\ & \mathbb{F} & \\ & & \mathbb{F} \end{pmatrix}$$

und es existieren Einbettungen  $P_1 \hookrightarrow P_2 \hookrightarrow P_3$  wobei wir dann die 3 einfachen  ${}_A A$  Moduln

$$S_1 := P_1 \quad S_2 = \begin{pmatrix} & \mathbb{F} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} := P_2 / P_1 \quad S_3 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ \mathbb{F} & & \end{pmatrix} := P_3 / P_2$$

erhalten können.

Bzgl. Radikalreihe sehen wir

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ & \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ & & \mathbb{F} \end{pmatrix} \supsetneq \text{rad} A = \begin{pmatrix} & \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ & & \mathbb{F} \\ & & \end{pmatrix} \supsetneq \text{rad}^2 A = \begin{pmatrix} & & \mathbb{F} \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \supsetneq \text{rad}^3 A = 0$$

und somit

$$A / \text{rad} A = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & & \\ & \mathbb{F} & \\ & & \mathbb{F} \end{pmatrix} \quad \text{rad} A / \text{rad}^2 A = \begin{pmatrix} & \mathbb{F} & \\ & & \mathbb{F} \\ & & \end{pmatrix} \quad \text{rad}^2 A / \text{rad}^3 A = \begin{pmatrix} & & \mathbb{F} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Deshalb erhalten wir als Radikalreihe

$$A = \begin{matrix} S_1 S_2 S_3 \\ S_1 S_2 \\ S_1. \end{matrix}$$

Bzgl. Sockelreihe sehen wir

$$\text{soc} A = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad \text{soc}^2 A / \text{soc} A = \begin{pmatrix} & \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad \text{soc}^3 A / \text{soc}^2 A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ \mathbb{F} & & \end{pmatrix}$$

und somit erhalten wir als Sockelreihe

$$A = \begin{matrix} S_3 \\ S_2 S_2 \\ S_1 S_1 S_1. \end{matrix}$$

Insbesondere sind die Radikal- & Sockelreihe von  ${}_A A$  verschieden.

Die Bestimmung von Radikal- & Sockelreihen eines Moduls hängt stark davon ab, wie gut man sich mit diesem Modul auskennt. Für die Gruppenalgebra einer symmetrischen Gruppen  $\mathbb{F} S_n$  gibt es folgende Schwierigkeiten:

- Im Allgemeinen ist es schwierig, das Radikal von  $\mathbb{F} S_n$  zu bestimmen, daher auch schwer, die Radikalreihe von  $\mathbb{F} S_n$ -Moduln zu bestimmen.
- Im Fall  $\text{char} K \neq 0$  ist es schwierig, alle einfachen  $\mathbb{F} S_n$ -Moduln zu bestimmen, daher auch schwierig, die Sockelreihen von  $\mathbb{F} S_n$ -Moduln zu bestimmen.

Dennoch gelingt es noch für einige einfachen Fälle:

**Beispiel. Radikal- & Sockelreihe von  $_{\mathbb{F}S_n}\mathbb{F}S_n$  mit  $\mathbb{F}$  einem Körper und  $n \in \{1, 2, 3\}$** 

- Betrachte  $_{\mathbb{F}S_1}\mathbb{F}S_1$ :  
 $\mathbb{F}S_1 \cong \mathbb{F}$  und dies ist der einzige einfache Modul, somit sind Radikal- & Sockelreihe für  $_{\mathbb{F}S_1}\mathbb{F}S_1$  trivial.
- Betrachte  $_{\mathbb{F}S_2}\mathbb{F}S_2$ , wobei  $S_2 = \{\text{id}, \sigma := (1\ 2)\}$ :  
 Es gilt  $\dim \mathbb{F}S_2 = 2$  und es gibt nur zwei 1-dimensionale Darstellungen von  $\mathbb{F}S_2$ , nämlich  $\mathbb{F}_{\text{tr}}$  die triviale Darstellung sowie  $\mathbb{F}_{\text{VZ}}$  die sgn-Darstellung (wir identifizieren hier die Moduln mit den zugehörigen Darstellungen). Beide Moduln  $\mathbb{F}_{\text{tr}}$  sowie  $\mathbb{F}_{\text{VZ}}$  sind einfach.  
 Es gibt zwei Fälle zu diskutieren:

- Für  $\text{char}\mathbb{F} \neq 2$  ist  $\mathbb{F}S_2$  halbeinfach nach Maschke und es gilt  $\mathbb{F}_{\text{tr}} \not\cong \mathbb{F}_{\text{VZ}}$ . Somit gilt  $_{\mathbb{F}S_2}\mathbb{F}S_2 \cong \mathbb{F}_{\text{tr}} \oplus \mathbb{F}_{\text{VZ}}$  aus Dimensionsgründen und die Anzahl der einfachen  $\mathbb{F}S_2$ -Moduln passt auch der Anzahl der Partitionen von 2, also

$$\mathbb{F}_{\text{tr}} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \mathbb{F}_{\text{VZ}} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

- Für  $\text{char}\mathbb{F} = 2$  ist  $\mathbb{F}S_2$  nicht halbeinfach und es gilt  $\mathbb{F}_{\text{tr}} \cong \mathbb{F}_{\text{VZ}}$ . Die Partition



ist 2-singulär und wir wissen  $_{\mathbb{F}S_2}\mathbb{F}S_2 = M^{(1\ 1)}$ . In  $M^{(1\ 1)}$  ist der Specht-Modul  $S^{(2)} \cong \mathbb{F}_{\text{tr}}$  enthalten mit dem Quotient  $M^{(1\ 1)} / S^{(2)} \cong \mathbb{F}_{\text{tr}}$ . Alternativerweise kann man auch sagen,  $\langle \text{id} + \sigma \rangle$  ist ein echter Untermodul von  $\mathbb{F}S_2$  mit einem Quotient  $\mathbb{F}S_2 / \langle \text{id} + \sigma \rangle \cong \mathbb{F}_{\text{tr}}$ . Wenn wir nochmal das erste Beispiel schauen, sehen wir

$$\begin{array}{l} \mathbb{F}S_2 \cong \mathbb{F}[X] / \langle X^2 \rangle \\ \text{id} + \sigma \leftrightarrow X \end{array}$$

und somit ist  $0 \subsetneq \mathbb{F}_{\text{tr}} \subsetneq \mathbb{F}S_2$  sowohl die Radikal- als auch die Sockelreihe.

- Betrachte  $_{\mathbb{F}S_3}\mathbb{F}S_3$ :  
 Für dieses Beispiel haben wir eigentlich schon einige Vorarbeit durchgeführt. In Beispiel 4.10 haben wir gesehen, dass  $S^{(n)} = M^{(n)}$  die triviale Darstellung ist. Zudem liefert uns Beispiel 4.15 eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S^{(2\ 1)} \longrightarrow M^{(2\ 1)} \xrightarrow{\phi} S^{(3)} \longrightarrow 0.$$

Also kennen wir schon die Spechtmoduln für  $n = 3$ , nämlich:

$$\begin{array}{ccc} S^{(1\ 1\ 1)} & S^{(3)} & S^{(2\ 1)} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Da  $|\mathbb{F}S_3| = 6$ , gibt es wieder eine Fallunterscheidung zu machen:

- Für  $\text{char}\mathbb{F} \neq 2, 3$  ist  $\mathbb{F}S_3$  halbeinfach, und es gilt

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}S_3 & \cong & \mathbb{F}_{VZ} & \oplus & \mathbb{F}_{\text{tr}} & \oplus & \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ \mathbb{F} & \mathbb{F} \end{pmatrix} \\ & & \wr & & \wr & & \wr \\ & & S^{(1 \ 1 \ 1)} & \not\cong & S^{(3)} & & (S^{(2 \ 1)})^2 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

- Für  $\text{char}\mathbb{F} = 2$  ist  $\mathbb{F}S_3$  nicht halbeinfach, aber  $\mathbb{F}_{\text{tr}} = S^{(3)} \cong S^{(1 \ 1 \ 1)} = \mathbb{F}_{VZ}$  sowie  $S^{(2 \ 1)}$  sind einfach. Es gilt hier

$$\mathbb{F}S_3 \cong \mathbb{F}[X]/\langle X^2 \rangle \oplus \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ \mathbb{F} & \mathbb{F} \end{pmatrix}.$$

- Für  $\text{char}\mathbb{F} = 3$  wissen wir aus Beispiel 4.15, dass  $S^{(2 \ 1)}$  nicht einfach ist mit  $S^{(3)} \subsetneq S^{(2 \ 1)}$ . Zudem ist  $\mathbb{F}_{\text{tr}} = S^{(3)} \not\cong S^{(1 \ 1 \ 1)} = \mathbb{F}_{VZ}$ . Nach einigen Rechnungen werden wir feststellen, dass

$$\mathbb{F}S_3 \cong M^{(2 \ 1)} \oplus M'$$

wobei  $M^{(2 \ 1)}$  und  $M'$  jeweils eine Radikalreihe (die gleichzeitig die Sockelreihe ist)

$$M^{(2 \ 1)} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \begin{array}{c} \mathbb{F}_{\text{tr}} \\ \mathbb{F}_{VZ} \\ \mathbb{F}_{\text{tr}} \end{array} \quad M' = \begin{array}{c} \mathbb{F}_{VZ} \\ \mathbb{F}_{\text{tr}} \\ \mathbb{F}_{VZ} \end{array}$$

besitzen (Notationen vgl. Beispiel 4.11). Wir geben hier eine Anleitung für die Rechenschritte bzgl.  $M^{(2 \ 1)}$ . Es gilt nämlich

- $\mathbb{F}_{\text{tr}} \cong \langle v_1 + v_2 + v_3 \rangle \subsetneq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = M^{(2 \ 1)}$ ,
- $\mathbb{F}_{VZ} \cong \langle \bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 \rangle \subsetneq M^{(2 \ 1)} / \langle v_1 + v_2 + v_3 \rangle$  und
- $\mathbb{F}_{\text{tr}} \cong (M^{(2 \ 1)} / \langle v_1 + v_2 + v_3 \rangle) / \langle \bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 \rangle$ .

Zudem sollte man noch zeigen, dass  $\langle v_1 + v_2 + v_3 \rangle$  der einzige 1-dimensionale Untermodul von  $M^{(2 \ 1)}$  ist, und  $\langle \bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 \rangle$  ebenfalls der einzige 1-dimensionale Untermodul von  $M^{(2 \ 1)} / \langle v_1 + v_2 + v_3 \rangle$ .

Die Rechenschritte bzgl.  $M'$  sind analog.

Wir beobachten an diesen Beispielen, dass die Längen der Radikalreihen und die Längen der Sockelreihen jeweils übereinstimmen. Dies gilt auch im Allgemeinen, und diese gemeinsame Länge heisst die **Loewy-Länge** des gegebenen Moduls.

# KAPITEL 8

## EINFACHHEIT VON SPRECHT-MODULN

Wir zeigen nun die Einfachheit von den Specht-Moduln im Fall  $\text{char } F \nmid |S_n| = n!$ . Dafür benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen, insb. Ordnungsrelationen auf den Partitionen und ihre Eigenschaften.

**Definition 8.1.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl und  $\lambda = (\lambda_i)$  und  $\mu = (\mu_i)$  Partitionen von  $n$ .

a) Es ist  $\lambda < \mu$  in der **lexikographischen Ordnung**, g.d.w. für das kleinste  $\lambda_j \neq \mu_j$  gilt  $\lambda_j < \mu_j$ .

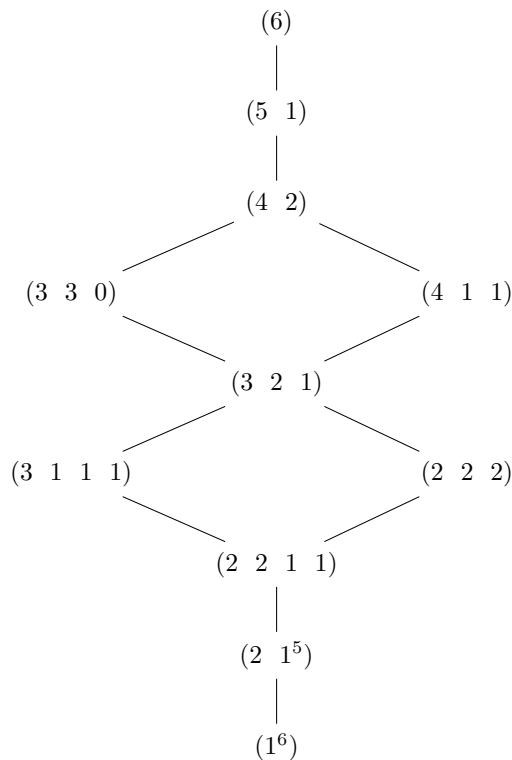
b) Es ist  $\lambda \leq \mu$  in der **Dominanzordnung**, g.d.w. für jedes  $j \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_j \leq \mu_1 + \cdots + \mu_j.$$

**Bemerkung 8.2.**

a) Die lexikographische Ordnung ist eine Totalordnung (Dies gilt auch für Kompositionen).

b) Die Dominanzordnung für  $n \leq 5$  ist eine Totalordnung. Für  $n \geq 6$  ist die Dominanzordnung eine partielle Ordnung, z.B. für  $n = 6$  sehen wir



also bspw. sind  $(3 \ 3 \ 0)$  und  $(4 \ 4 \ 1)$  nicht vergleichbar.

**Lemma 8.3.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl und  $\lambda = (\lambda_i)$  und  $\mu = (\mu_i)$  Partitionen von  $n$ . Dann gilt:

- a) Falls  $\lambda \triangleright \mu$ , dann  $\lambda \geq \mu$ .
- b)  $\lambda \triangleright \mu$  g.d.w.  $\mu' \triangleright \lambda'$ .

**Beweis.**

a) Sei  $\lambda \triangleright \mu$ . Dann gilt nach Definition 8.1  $\sum_{j \leq i} \lambda_j \geq \sum_{j \leq i} \mu_j$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Sei dann  $t \in \mathbb{N}$  minimal mit  $\sum_{j \leq t} \lambda_j > \sum_{j \leq t} \mu_j$ , also  $\sum_{j \leq t-1} \lambda_j = \sum_{j \leq t-1} \mu_j$ . Dann liefert Subtraktion der Ungleichung mit der Gleichung  $\lambda_t > \mu_t$  und somit  $\lambda > \mu$  in lexikographische Ordnung.

b) Wir schreiben  $\lambda' = (\lambda'_i)$  und  $\mu' = (\mu'_i)$  und nehmen an, dass  $\lambda \triangleright \mu$  gilt.

i. Gegenannahme:  $\mu' \not\triangleright \lambda'$ . Dann gibt es ein  $i \geq 1$  s.d.

$$\mu'_1 + \cdots + \mu'_i < \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_i \quad (8.1)$$

gilt. Wir wählen  $i$  minimal mit dieser Eigenschaft, also

$$\mu'_1 + \cdots + \mu'_{i-1} \geq \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_{i-1}$$

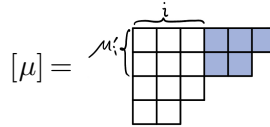
und d.h. auch

$$\mu'_i < \lambda'_i. \quad (8.2)$$

ii. Wegen  $\sum_{j \geq 1} \mu'_j = n = \sum_{j \geq 1} \lambda'_j$  und Formel (8.1) gilt dann

$$\mu'_{i+1} + \mu'_{i+2} + \cdots > \lambda'_{i+1} + \lambda'_{i+2} + \cdots \quad (8.3)$$

und dies ist eine Summation entlang der Spalten. Wir summieren jetzt entlang der Zeilen



und die schraffierte Fläche im Bild ist

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{\mu'_i} (\mu_j - i) \\
 \text{(zur Spaltensumme)} \quad &= \sum_{j \geq i+1} \mu'_j \\
 \text{(Formel (8.3))} \quad &> \sum_{j \geq i+1} \lambda'_j \\
 \text{(zur Zeilensumme)} \quad &= \sum_{j=1}^{\lambda'_i} (\lambda_j - i) \\
 \text{(Formel (8.2))} \quad &> \sum_{j=1}^{\mu'_i} (\lambda_j - i) \\
 \text{(Voraussetzung } \lambda \triangleright \mu) \quad &\geq \sum_{j=1}^{\mu'_i} (\mu_j - i)
 \end{aligned}$$



also  $\sum_{j=1}^{\mu'_i} (\mu_j - i) > \sum_{j=1}^{\mu'_i} (\mu_j - i)$  Widerspruch! Damit folgt:  $\lambda \triangleright \mu$  impliziert  $\mu' \triangleright \lambda'$ .

Durch Konjugation, wegen  $(\lambda')' = \lambda$ , folgt

$$\mu' \triangleright \lambda' \quad \Rightarrow \quad \lambda \triangleright \mu. \quad \square$$

Wir stellen hier eine interessante aber für unsere Theorie irrelevante Aussage vor:

**Satz 8.4. (Gale-Ryser)** Eine  $n \times n$  Matrix  $A = (a_{i,j})$  heißt eine 0-1-Matrix, g.d.w. jedes  $a_{i,j} \in \{0, 1\}$  ist. Mit der konstanten 1 Vektor  $1_n := (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{F}^n$  definiert man auch die Zeilensumme

$$r(A) := A \cdot 1_n = \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right)_{1 \leq i \leq n}$$

sowie die Spaltensumme

$$c(A) := A^T \cdot 1_n = \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)_{1 \leq j \leq n}.$$

Seien nun  $\lambda, \mu$  Partitionen von  $n$ . Dann sind folgende zwei Bedingungen äquivalent:

- i. Es gibt eine 0-1-Matrix  $A$  mit Zeilensumme  $r(A) = \lambda$  und  $c(A) = \mu$ .
- ii.  $\lambda' \triangleright \mu$  oder äquivalenterweise  $\mu' \triangleright \lambda$ .

**Beweis.** Wir zeigen hier nur „i.  $\Rightarrow$  ii.“ anhand eines Beispiels. Die Gegenrichtung wird mit einem induktiven konvergenten Algorithmus gezeigt und hier nicht vorgeführt.

Sei  $\alpha$  die Anzahl der Teile von  $\lambda$  und  $\beta$  die Anzahl der Teile von  $\mu$ .

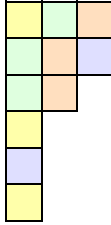
Gegeben ist eine Matrix  $A = (a_{i,j}) \in M_{\alpha \times \beta}(F)$  mit  $a_{i,j} \in \{0, 1\}$ . Zudem sehen wir  $n := |\lambda| = |\mu| = \#$  aller Einsen in  $A$ .

Wir beschreiben das ganze mit dem Szenario von „Autos & Sitzplätzen“:

Für  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_\alpha)$  sei  $\lambda_i$  die Anzahl der Sitzplätze in Auto  $i$ ; für  $\mu = (\mu_1 \dots \mu_\beta)$  sei  $\mu_j$  die Anzahl der Personen in Familie  $j$ .

Regel: Platziere genau eine Person aus Familie  $j$  in Auto  $i$ , also ist dies der Fall g.d.w.  $a_{i,j} = 1$ .

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda = r(A) = (3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1) \\ \mu = c(A) = (3 & 3 & 3 & 2) \end{cases} \rightsquigarrow [\lambda] =$$


also bilden wir  $[\lambda]$  durch Löschen der Nullen und dann schieben der Einträge nach links. Die Zeile  $i$  von  $[\lambda]$  repräsentiert genau die Situation von Auto  $i$  und wer in Auto  $i$  aus Familie  $j$  sitzt. Zudem stellt jede Spalte von  $A$  die Situation jeder Familie dar und wir sehen, dass alle Leute aus Familie 1 in der ersten Spalte von  $[\lambda]$  sitzen, alle Leute aus Familie 2 in der ersten beiden Spalten, alle Leute aus Familie 3 in ersten drei Spalten, etc...

Die ersten  $k$  Familie bestehen aus  $\mu_1 + \dots + \mu_k$  Mitgliedern, und es gilt ja

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &\geq \mu_1 \\ \lambda'_1 + \lambda'_2 &\geq \mu_1 + \mu_2 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^k \lambda'_i &\geq \sum_{i=1}^k \mu_i \end{aligned}$$

und mit Definition 8.1 folgt dann  $\lambda' \triangleright \mu$ .  $\square$

Obiges Lemma ist mehr oder weniger „for fun“.

Wir kehren nun zu unserem eigentlichen Interesse und sammeln noch einige Hilfsresultate:

**Lemma 8.5. (basic combinatorial lemma)** Sei  $n$  eine natürliche Zahl, und  $\lambda, \mu$  Partitionen von  $n$ . Sei dazu  $t_1$  ein  $\lambda$ -Tableau und  $t_2$  ein  $\mu$ -Tableau.

- a) Falls es für jedes  $i \in \mathbb{N}$  gilt, dass die Zahlen in Reihe  $i$  von  $t_2$  in verschiedenen Spalten von  $t_1$  liegen, dann ist  $\lambda \triangleright \mu$ .
- b) Falls  $\lambda = \mu$ , dann existiert ein  $\sigma \in R_{t_2}$  und ein  $\pi \in C_{t_1}$  s.d.  $\sigma t_2 = \pi t_1$ .

**Beweis.** Wir illustrieren den Beweis wieder durch ein konkretes Beispiel.

Sei  $\lambda = (4 \ 3 \ 1)$ ,  $\mu = (3 \ 2 \ 2 \ 1)$  und zudem

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 2 & 6 \\ \hline 4 & 3 & 7 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{sowie} \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline 8 & & \\ \hline \end{array}.$$

- a) Eigentlich sagt die Voraussetzung „Zahlen in Reihe  $i$  von  $t_2$  in verschiedenen Spalten von  $t_1$  liegen“ salopp schon, dass es „mehr Plätze in den ersten  $i$  Spalten von  $[\lambda]$  als in  $[\mu]$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ “ und damit  $\lambda \triangleright \mu$ . Um dies besser zu sehen und um b) zu zeigen, führen wir folgende Schritte durch:

Wir lassen  $t_2$  fest. Zahlen in  $t_1$  in Spalten zu permutieren, ändert die Voraussetzung „Zahlen in Reihe  $i$  von  $t_2$  in verschiedenen Spalten von  $t_1$  liegen“ nicht. Dann:

- i. Permutieren Zahlen aus Zeile 1 von  $t_2$  in  $t_1$  in ihrer Spalte in die erste Zeile von  $t_1$ , also im Beispiel

$$\begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}.$$

Dann passen alle  $\mu_1$  Zahlen in erster Zeile von  $t_2$  in die erste Zeile von  $t_1$  der Länge  $\lambda_1$ . Also ist  $\lambda_1 \geq \mu_1$ . Sei das neue Tableau

$$t'_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 6 \\ \hline 4 & 5 & 7 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

- ii. In zweiter Zeile von  $t_2$  gibt es  $\mu_2$  Zahlen. Nach der Voraussetzung liegen diese  $\mu_2$  Zahlen in verschiedenen Spalten von  $t_1$  (oder von  $t'_1$ ). Genauso für  $\mu_1$  Zahlen aus Zeile 1 von  $t_1$ . Also in jeder Spalte von  $t_1$  gibt es höchstens eine Zahl aus erster Zeile von  $t_1$  und eine Zahl aus zweiter Zeile von  $t_1$ . Bewege diese in Spalte von  $t_1$  nach oben in die ersten zwei Zeilen von  $t_1$ , dann folgt  $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$ . Somit erhalten wir

$$t''_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 6 \\ \hline 4 & 5 & 7 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}$$

also in diesem Beispiel keine Veränderung...

- iii. Die Schritte gehen weiter, und wir sehen  $\sum_{i=1}^k \lambda'_i \geq \sum_{i=1}^k \mu_i$  für jedes  $k$ .
- b) Sei nun  $\lambda = \mu$ . Alle bisher durchgeführten Vertauschungen waren in Spalten von  $t_1$ . Diese definieren ein  $\pi \in C_{t_1}$ . Die Tableaux  $\pi t_1$  und  $t_2$  haben jetzt dank  $\lambda = \mu$  dieselben Einträge in jeder Zeile, nur in verschiedener Reihenfolge. Somit existiert ein  $\sigma \in R_{t_2}$ , s.d.  $\sigma t_2 = \pi t_1$ .  $\square$

**Lemma 8.6.** Seien  $a, b$  Zahlen in der selben Spalte von Tableau  $t$ . Dann existiert ein  $s \in \mathbb{F}S_n$  s.d.  $\kappa_t = s(1 - (a \ b))$ .

**Beweis.** Wir definieren  $U := \{\text{id}, (a \ b)\} \leq C_t$ . Sei  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$  Vertreter-System der Nebenklassen von  $U$  in  $C_t$ , dann gilt

$$C_t = \coprod \sigma_i U = \{\sigma_i | 1 \leq i \leq m\} \coprod \{\sigma_i(a \ b) | 1 \leq i \leq m\}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \text{(Definition 5.1)} &= \sum_{\pi \in C_t}^{\kappa_t} \text{sgn}(\pi) \cdot \pi \\ &= \sum_{i=1}^m \text{sgn}(\sigma_i) \cdot \sigma_i + \sum_{i=1}^m \text{sgn}(\sigma_i(a \ b)) \cdot \sigma_i(a \ b) \\ &= \sum_{i=1}^m \text{sgn}(\sigma_i) \cdot \sigma_i \cdot (1 - (a \ b)) \\ &=: \underbrace{\sum_{i=1}^m \text{sgn}(\sigma_i) \cdot \sigma_i}_s \cdot (1 - (a \ b)) \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 8.7.** Seien  $\lambda, \mu$  Partitionen von  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_1$  ein  $\lambda$ -Tableau.

- a) Falls der  $\mathbb{F}$ -Vektorraum  $\kappa_{t_1} \cdot M^\mu \neq 0$ , dann ist  $\lambda \geq \mu$ .
- b) Sei  $\lambda = \mu$ , dann ist  $\kappa_{t_1} \cdot M^\mu = \mathbb{F} \cdot e_{t_1}$  also eindimensional.

**Beweis.**

- a) Spezialfall  $\mu = (1^n)$ . Dann gilt immer  $\lambda \triangleright \mu$  für jede Partition  $\lambda \vdash n$ . Sei nun  $\mu \neq (1^n)$ .
- i. Nach Voraussetzung ist  $\kappa_{t_1} \cdot M^\mu \neq 0$ . Da Basis von  $M^\mu$  alle  $\mu$ -Tabloids sind, existiert dann ein  $\mu$ -Tableau  $t_0$  mit  $\kappa_{t_1} \cdot \{t_0\} \neq 0$ . Seien  $a, b$  Zahlen in derselben Zeile von  $t_0$ , d.h.  $(a \ b) \in R_{t_0}$ , dann gilt

$$(1 - (a \ b))\{t_0\} = \{t_0\} - \{(a \ b)t_0\} = \{t_0\} - \{t_0\} = 0.$$

- ii. Falls  $a, b$  zusätzlich in derselben Spalte von  $t_1$  stehen würden. Dann gilt nach Lemma 8.6

$$\kappa_{t_1} \cdot \{t_0\} = s(1 - (a \ b)) \cdot \{t_0\} = 0$$

was aber ein Widerspruch zu den Eigenschaften von  $\{t_0\}$  ist. Also müssen die Zahlen  $a, b$  in verschiedenen Spalten von  $t_1$  stehen. Damit gilt für jedes  $i \in \mathbb{N}$ , dass die Zahlen in Zeile  $i$  von  $t_0$  liegen in verschiedenen Spalten von  $t_1$ , und somit folgt  $\lambda \triangleright \mu$ .

- b) Sei  $\lambda = \mu$ . Da  $0 \neq e_{t_1} = \kappa_{t_1} \cdot \{t_1\}$  ist und  $\lambda = \mu$ , gilt ja  $\kappa_{t_1} \cdot M^\lambda = \kappa_{t_1} \cdot M^\mu \neq 0$ . Sei  $t_2$  ein  $\mu$ -Tableau mit  $\kappa_{t_1} \{t_2\} \neq 0$ . Da  $t_1$  und  $t_2$  beide die gleiche Form  $\lambda = \mu$  haben, gilt nach Lemma 8.5 b), dass es ein  $\sigma \in R_{t_2}$  und ein  $\pi \in C_{t_1}$  gibt, s.d.  $\sigma t_2 = \pi t_1$ . Dann folgt  $\{t_2\} = \{\sigma t_2\} = \{\pi t_1\} = \pi \{t_1\}$  und damit auch

$$\kappa_{t_1} \cdot \{t_2\} = \kappa_{t_1} \cdot \pi \cdot \{t_1\} = \pi \cdot e_{t_1} = \text{sgn}(\pi) \cdot e_{t_2} = \pm e_{t_2}.$$

Da die Menge der  $\lambda$ -Tabloids eine Basis von  $M^\lambda$  ist, folgt  $\kappa_{t_1} \cdot M^\lambda = \mathbb{F} \cdot e_{t_1}$ .  $\square$

**Proposition 8.8.** Seien  $\lambda, \mu$  Partitionen von  $n \in \mathbb{N}$  und  $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}(M^\lambda, M^\mu)$ .

- a) Falls  $S^\lambda \not\subseteq \ker \phi$ , dann gilt  $\lambda \triangleright \mu$ .
- b) Falls  $\lambda = \mu$ , dann ist  $\phi|_{S^\lambda}$  eine Multiplikation mit einer Konstante.

**Beweis.**

- a)  $S^\lambda \not\subseteq \ker \phi$  bedeutet, dass es ein  $0 \neq u \in S^\lambda$  gibt, s.d.  $\phi(u) \neq 0$ . Nach Definition 5.6 ist  $S^\lambda = \mathbb{F}\text{Span}\{e_t | t \text{ ist ein } \lambda\text{-Tableau}\}$ , somit schreiben wir  $u = \sum_{t: \lambda\text{-Tableau}} \alpha_t e_t$ . Dann folgt

$$0 \neq \phi(u) = \sum_{t: \lambda\text{-Tableau}} \alpha_t \phi(e_t) \stackrel{\text{Def. } e_t}{=} \sum_{t: \lambda\text{-Tableau}} \alpha_t \phi(\kappa_t \{t\}) = \sum_{t: \lambda\text{-Tableau}} \alpha_t \kappa_t \phi(\{t\})$$

wobei jedes  $\kappa_t \phi(\{t\}) \in \kappa_t M^\mu$  ist. D.h., es existiert ein  $\lambda$ -Tableau  $t$  mit  $\kappa_t M^\mu \neq 0$  und mit Proposition 8.7 a) folgt ja  $\lambda \triangleright \mu$ .

- b) Sei nun  $\lambda = \mu$ . Dann ist  $\phi(e_t) = \phi(\kappa_t \{t\}) = \kappa_t \phi(\{t\}) \in \kappa_t \cdot M^\mu$ . Nach Proposition 8.7 b) existiert somit ein  $\alpha \in \mathbb{F}$  mit  $\phi(e_t) = \alpha \cdot e_t$ .

Wir wissen, der Sprechmodul ist zyklisch und erzeugt von  $e_t$ , also Elemente in  $S^\lambda$  haben die Form  $r \cdot e_t$  für ein  $r \in \mathbb{F}S_n$ . Daher gilt  $\phi(r \cdot e_t) = r \phi(e_t) = r \alpha e_t = \alpha (r \cdot e_t)$ . D.h. für jedes  $x \in S^\lambda$  gilt  $\phi(x) = \alpha x$  und somit ist  $\phi|_{S^\lambda}$  eine Multiplikation mit einer Konstante.  $\square$

**Satz 8.9.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char}\mathbb{F} = 0$  oder  $\text{char}\mathbb{F} \nmid |S_n| = n!$  und  $\lambda, \mu$  zwei Partitionen von  $n$ .

- a) Falls  $S^\lambda \cong S^\mu$ , dann ist  $\lambda = \mu$ .
- b) Der Specht-Modul  $S^\lambda$  ist einfach.

Beachte: Beide Behauptungen sind falsch für  $\text{char}\mathbb{F} \mid n! = |S_n|$ , z.B. es ist  $S^{(n)} = S^{(1^n)}$  für  $\text{char}\mathbb{F} = 2$ , und  $S^{(n-1, 1)}$  ist nicht einfach für  $\text{char}\mathbb{F} = 2$  und  $n \geq 4$ .

**Beweis.**

- a) Nach Maschke ist  $\mathbb{F}S_n$  halbeinfache Algebra, d.h. alle  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln sind halbeinfach, insb. existiert zu  $S^\lambda \leq M^\lambda$  ein Komplement  $T^\lambda$ , d.h.  $M^\lambda = S^\lambda \oplus T^\lambda$ .  
Sei  $\varphi: S^\lambda \xrightarrow{\sim} S^\mu$  ein Isomorphismus, d.h.  $\varphi(S^\lambda) \neq 0$ . Wir erweitern  $\varphi$  zu einem Homomorphismus auf  $\phi: M^\lambda \rightarrow M^\mu$  durch Nullfortsetzung, also  $\phi|_{S^\lambda} = \varphi$  sowie  $\phi|_{T^\lambda} = 0$ . Da  $\varphi(S^\lambda) \neq 0$ , ist  $S^\lambda \not\subseteq \ker \phi$ , also nach Proposition 8.8 a)  $\lambda \geq \mu$ . Aus Symmetrie-Gründen gilt auch  $\mu \geq \lambda$ , also insgesamt  $\lambda = \mu$ .
- b) Gegenannahme:  $S^\lambda$  ist nicht einfach. Dann existiert ein Untermodul  $0 \neq U_1 < S^\lambda$ . Da  $\mathbb{F}S_n$  halbeinfache Algebra ist, ist  $S^\lambda$  halbeinfach, also hat  $U_1$  ein Komplement  $U_2$  in  $S^\lambda$ , d.h.  $S^\lambda = U_1 \oplus U_2$ , und somit  $M^\lambda = S^\lambda \oplus T^\lambda = U_1 \oplus U_2 \oplus T^\lambda$ .  
Definiere  $\phi: M^\lambda \rightarrow M^\lambda, u_1 + u_2 + t \mapsto u_1$ , also die Projektion von  $M^\lambda$  auf  $U_1$  entlang  $U_2 \oplus T^\lambda$ . Nach Proposition 8.8 b) ist  $\phi|_{S^\lambda}$  Multiplikation mit einer Konstante. Aber wir sehen,  $\phi|_{U_1} = 1_{\mathbb{F}} \cdot (-)$  und  $\phi|_{U_2} = 0_{\mathbb{F}} \cdot (-)$ , ein Widerspruch. Damit kann  $S^\lambda$  nur einfach sein.  $\square$

**Folgerung 8.10.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char}\mathbb{F} = 0$  oder  $\text{char}\mathbb{F} \nmid |S_n| = n!$ . Dann ist  $\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$  ein vollständiges Vertreter-System der einfachen  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln.

D.h. für  $\lambda \neq \mu$  ist  $S^\lambda \not\cong S^\mu$  und falls ein  $\mathbb{F}S_n$ -Modul  $S$  einfach ist, gibt es ein eindeutiges  $\lambda \vdash n$  s.d.  $S \cong S^\lambda$ .

**Beweis.** Nach Satz 8.9 sind die Moduln  $S^\lambda$  einfach und paarweise nicht isomorph. Außerdem haben wir die richtige Anzahl einfacher Moduln gefunden:

$$\begin{aligned} & \text{Anzahl der Partitionen von } n \\ \text{(Satz 1.19)} &= \text{Anzahl der Konjugationsklassen von } S_n \\ \text{(Satz 2.9)} &= \text{Anzahl der nicht-isomorphen einfachen } \mathbb{F}S_n\text{-Moduln} \end{aligned} \quad \square$$

Unser nächstes Ziel ist zu zeigen:

$$\dim S^\lambda = f^\lambda$$

also entspricht die Dimension des Specht-Moduls gerade der Anzahl der Standard-Tableau zu  $\lambda$ .

Die Strategie dazu ist, wir zeigen  $n! = |S_n| = \dim \mathbb{F}S_n = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$  über den Robinson-Schensted-Knuth-Algorithmus und der Satz von Wedderburn liefert  $\mathbb{F}S_n = \bigoplus (S^\lambda)^{\dim S^\lambda}$ . Zusammen mit einer Abschätzung für die Dimension von  $S^\lambda$  über  $f^\lambda$  werden wir dann  $\sum (f^\lambda)^2 = n! = \sum (\dim S^\lambda)^2$  erhalten.



# KAPITEL 9

## ROBINSON-SCHENSTED-KNUTH ALGORITHMUS

Wir erläutern den Algorithmus wieder in einem konkreten Szenario:

Frau H. betreibt ein Kino mit  $n^2$  Plätzen:

1, 1	1, 2	...	1, n
2, 1	2, 2	...	2, n
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n, 1	n, 2	...	n, n

und die Platzqualität ist durch lexikographische Ordnung gegeben, also

$$(1, 1) < (1, 2) < \dots < (1, n) < (2, 1) < \dots < (n, n)$$

wobei  $(1, 1)$  der beste Platz ist und  $(n, n)$  der schlechteste. In jeder Vorführung werden nur  $n$  Plätze ausgegeben und die Tickets haben Nummer  $1, \dots, n$  wobei die Nummer Prioritäten bedeutet, also im Sinne davon, dass 1 die höchste Priorität hat und  $n$  die niedrigste.

Die Personen treten nacheinander ein, und zwar in irgendeiner Reihenfolge  $a_1, \dots, a_n$ , also definiert diese Reihenfolge eine Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

und nachdem eine Person eingetreten ist, finden ggf. einige Änderungen vom Sitzplan gemäß der Regeln für Platzierung statt. Nur wenn jeder im Kino auf dem neuen Platz sitzt, kommt die nächste Person ins Kino rein.

Die Regeln für Platzierung sind dynamisch und lauten wie folgt:

- $a_1$  setzt sich auf  $(1, 1)$ .
- $a_i$  geht zu Reihe 1. Dann vergleicht  $a_i$  seine Nummer mit denen von jedem in Reihe 1. Dann gibt es zwei Fälle:
  - Falls alle  $b$  in Reihe 1  $b < a_i$  erfüllen, dann setzt sich  $a_i$  rechts neben die  $b$ 's,

also

$$\boxed{b_1 \mid \dots \mid b_j \mid a_i} \quad 1. \text{ Reihe}$$

- Falls es in Reihe 1 ein  $b_1$  mit  $a_i < b_1$  gibt, und somit evtl. auch  $b_2, \dots$  in Reihe 1 existieren mit  $a < b_1 < b_2 < \dots$ , also

$$\boxed{\dots \mid b_1 \mid b_2 \mid \dots} \quad 1. \text{ Reihe}$$

dann vertreibt  $a_i$  das arme  $b_1$  von seinem Platz und  $a_i$  setzt sich auf diesen Platz, also

$$\boxed{\dots \mid b_1 \mid b_2 \mid \dots} \quad 1. \text{ Reihe}$$

$\nearrow$   
 $a_i$

und  $b_1$  geht in Reihe 2. Für  $b_1$  in Reihe 2 gibt es wieder zwei Fälle:

- Entweder sind alle  $c < b_1$  in Reihe 2, dann besetzt  $b_1$  in Reihe 2 rechts,
- oder es gibt  $c_1, c_2$  in Reihe 2 s.d.  $b_1 < c_1 < \dots$  und somit vertreibt  $b_1$  den Platz von  $c_1$ , also

$$\boxed{\dots \mid c_1 \mid c_2 \mid \dots} \quad 2. \text{ Reihe}$$

$\nearrow$   
 $b_1$

und  $c_1$  geht in Reihe 3...

- Die Kettenreaktion läuft weiter bis alle auf den entsprechenden Plätzen sitzen.
- Dann kommt  $a_{i+1}$  rein, und der ganze Prozess geht weiter...

Eine Webseite für interaktive Beispiele <https://www.integral-domain.org/lwilliams/Applets/Math/RS.php>

Nun betrachten wir einige Beispiele. Dabei notieren wir den Anfangssitzplan einfach als  $\emptyset$ :

- Für  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{array}{llll} 1 & \rightarrow & \emptyset & \rightsquigarrow \boxed{1} \\ 2 & \rightarrow & \boxed{1} & \rightsquigarrow \boxed{1 \mid 2} \\ 3 & \rightarrow & \boxed{1 \mid 2} & \rightsquigarrow \boxed{1 \mid 2 \mid 3} \end{array}$$



- Für  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$3 \rightarrow \emptyset \rightsquigarrow \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

- Für  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ :

$$1 \rightarrow \emptyset \rightsquigarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$3 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

- Für  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ :

$$3 \rightarrow \emptyset \rightsquigarrow \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Wir sehen schon, dass die Zuordnung  $\pi \mapsto \text{Sitzplan}$  ist nicht injektiv.

Noch ein komplizierteres Beispiel: 2 tritt ins Kino ein und löst eine Kettenreaktion auf, also

$$2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 9 \\ \hline 4 & 7 & \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow 5 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 9 \\ \hline 4 & 7 & \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow 6 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 8 \\ \hline 3 & 5 & 9 \\ \hline 4 & 7 & \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow 7 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 8 \\ \hline 3 & 5 & 9 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array}$$

wobei wir beobachten können, dass die Sitzpläne vor und nach der Kettenreaktion Standardtableaux sind.

Um die Nicht-Injektivität der Zuordnung  $\pi \mapsto \text{Sitzplan}$  zu retten, können wir in einem zweiten Plan protokollieren, wann ein Platz zum ersten Mal besetzt wurde.

Für eine Permutation  $\pi$  schreiben wir  $P$  für den resultierenden Sitzplan und  $Q$  für das entsprechende Protokoll. Der Zuordnungsprozess  $\pi \mapsto (P, Q)$  ist der **Robinson-Schensted-Knuth Algorithmus (RSK-Algorithmus)**.

Wir schauen uns wieder zuerst ein Beispiel an:

Für  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$  sehen die Entwicklungsverläufe von  $P$  und  $Q$  wie folgt aus:

$P$	$Q$																		
<table><tr><td>2</td></tr></table>	2	<table><tr><td>1</td></tr></table>	1																
2																			
1																			
<table><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table>	2	5	<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	2														
2	5																		
1	2																		
<table><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td></td></tr></table>	2	3	5		<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	1	2	3											
2	3																		
5																			
1	2																		
3																			
<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>	2	3	7	5			<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	4	3								
2	3	7																	
5																			
1	2	4																	
3																			
<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	7	2			5			<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	4	3			5		
1	3	7																	
2																			
5																			
1	2	4																	
3																			
5																			
<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	6	2	7		5			<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	4	3	6		5		
1	3	6																	
2	7																		
5																			
1	2	4																	
3	6																		
5																			
<table><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td></td></tr></table>	1	3	4	2	6		5	7		<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td></td></tr></table>	1	2	4	3	6		5	7	
1	3	4																	
2	6																		
5	7																		
1	2	4																	
3	6																		
5	7																		

Die „Zwischen-Tableaux“ in dem Entstehungsprozess von  $P$  und  $Q$ , also z.B.

1	3	7
2		
5		

ist zwar kein Standard-Tableau zu irgendeiner Partition, aber eine „Teilmenge“ von einem Standard-Tableau, z.B. ein „Auszug“ von

1	3	7
2	4	
5	6	

Solche „Zwischen-Tableaux“ werden wir im Folgenden benötigen und sollen wir sie noch sauber definieren: Sei  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq n$  und  $\mu = (\mu_i) \vdash m$  bzw.  $\lambda = (\lambda_i) \vdash n$  mit  $\mu_i \leq \lambda_i$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Dann heißt eine Injektion  $t: [\mu] \rightarrow \{1, \dots, n\}$  ein **partielles Tableau** von  $\lambda$ . Ein partielles Tableau heißt **standard**, g.d.w. die Einträge in die Zeile und in die Spalte jeweils aufsteigen.

Wir beobachten in den Beispielen, dass in jedem Schritt des RSK-Algorithmus (ab  $a_i$  eintritt bis die dadurch entstehenden Kettenreaktion fertig ist) sowohl das Input als auch das Output Partitionen und Standard-Tableaux sind. Dies wollen wir auch im Allgemeinen festhalten:

**Lemma 9.1.** Sei  $t$  ein (partiell)es Standard-Tableau (zur Partition  $\lambda$ ). Einfügen von  $a$  zu  $t$ , also  $a \rightarrow t$ , erzeugt ein (partiell)es Standard-Tableau zu einer Partition.

**Beweis.** Verfolge die Rauswurf-Route.

Wenn ein  $a$  kommt, gibt es zwei Fälle:

- $a$  setzt sich in 1. Reihe, also z.B.

$$a \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \dots \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline <a & a \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \end{array}$$

In diesem Fall gilt die Aussage.

- Falls es in der 1. Reihe

$$a \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline <b & b & >b \\ \hline \end{array}$$

mit  $a < b$  und  $b$  minimal ist, dann nimmt  $a$  den Platz von  $b$ . Hinter  $b$  sitzt (bevor  $a$  kommt) entweder niemand oder ein  $c$ . Dann gibt es wieder zwei Fälle zu diskutieren:

- Falls niemand hinter  $b$  sitzt, ist die aktuelle Reihe echt länger als die Nächste. Damit setzt sich  $b$  entweder hinter  $a$  oder weiter links aber dann die Zahl vor  $b$  ist echt kleiner als  $b$ , also entsteht nach Einfügen von  $a$  zu  $t$  weiterhin eine Partition und ein Standard-Tableau.
- Falls ein  $c$  hinter  $b$  sitzt (bevor  $a$  kommt), also

$$a \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline <b & b & >b \\ \hline <c & c & >c \\ \hline \end{array}$$

dann muss nach Konstruktion  $b < c$  sein.  $a$  vertreibt den Platz von  $b$  und  $b$  geht in die nächste Reihe, also

$$b \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline <b & a & >b \\ \hline <c & c & >c \\ \hline \end{array}$$

$b$  kann entweder  $c$  vertreiben oder jemanden weiter links. D.h.  $b$  bekommt den Platz hinter  $a$  (mit  $a < b$ ) oder weiter links aber jedenfalls hinter einer Zahl  $< b$ . Daher bleibt das Tableau standard. Da Rauswurf-Route abwärts und schwach nach links ist, ist die Partitionseigenschaft auch erhalten.  $\square$

Wir überlegen uns noch für  $Q$ . Nach Konstruktion gehört  $Q$  jeweils zur selben Partition wie  $P$  in jedem Schritt, daher bleibt  $Q$  nach jedem Schritt weiterhin eine Partition. Eingetragen wird in  $Q$  nur eine größere Zahl, entweder rechts in Reihe, oder unten in Spalte, daher bleibt  $Q$  in jedem Schritt standard.

Mit Induktion folgt dann

**Satz 9.2.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und zu einer Partition  $\lambda \vdash n$  schreiben wir die Menge der Standard-Young-Tableau von  $\lambda$  als  $\text{ST}(\lambda)$ . Das Einfügen im RSK-Sinne definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{ins: } S_n &\rightarrow \bigcup_{\lambda \vdash n} \text{ST}(\lambda) \times \text{ST}(\lambda) \\ \sigma &\mapsto (P, Q) \end{aligned}$$

wobei  $P$  der Sitzplan und  $Q$  das Protokoll bezeichnen.

Nächstes Ziel ist zu zeigen, dass  $\text{ins}$  bijektiv ist. Dann nennen wir es **Robinson-Schensted(-Knuth) Korrespondenz**.

$\bigcup_{\lambda \vdash n} \text{ST}(\lambda) \times \text{ST}(\lambda)$  hat keine algebraische Struktur, daher sollen wir eine inverse Abbildung finden, um Bijektivität von  $\text{ins}$  zu zeigen. Bevor wir dies allgemein definieren, schauen wir uns ein Beispiel an:

Gegeben ist ein fertiger Sitzplan aber nur die Position des letzten besetzten Platzes, also z.B.

$$P = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & \\ 7 & & \end{array} \quad \text{und} \quad Q = \begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & \\ 9 & & \end{array}.$$

Dann sehen wir, der letzte Platz, der neu besetzt wurde, ist in Reihe 4 und besetzt von 7, also muss 7 aus Reihe 3 vertrieben werden. Dann muss 6 „schuld“ sein, denn sonst wäre das Tableau nicht standard, also muss 6 von Reihe 2 in Reihe 3 gekommen sein und 7 vertrieben haben. D.h. in Reihe 3 sollte zuvor

$$6 \rightarrow 4 \quad 7$$

↙

sein. Mit analogen Argumenten stellen wir fest: 5 hat die 6 in Reihe 2 vertrieben und 2 hat 5 in Reihe 1 vertrieben. Insgesamt muss es vor dem letzten Schritt

1	5	8
3	6	9
4	7	

sein und 2 ist neugekommen.

Nun schauen wir uns allgemein an. Falls uns folgendes partielles Tableau vorliegt

$<b$	$b$	$d$	$e$
$<c$	$c$		

also  $b < d < e$  und  $b < c$ , wobei  $c$  laut dem Protokoll  $Q$  auf den neuen Platz vertrieben wird. Dann muss  $c$  von  $b$  verdrängt sein, und das bedeutet:  $c$  war zuvor auf dem Platz von  $d$ . Damit erhalten wir:

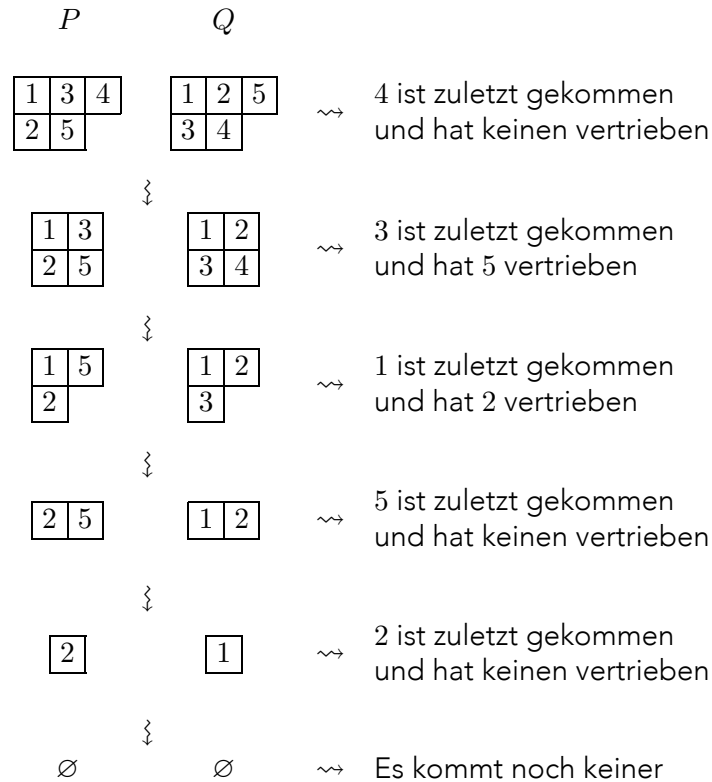
**Lemma 9.3.** Das Entfernen  $t \rightarrow x$  ist invers zum Einfügen  $x \rightarrow t$  gemäß RSK. Dies definiert inverse Abbildung  $\text{del}: \bigcup_{\lambda \vdash n} \text{ST}(\lambda) \times \text{ST}(\lambda) \rightarrow S_n$ .

Um die Abbildung  $\text{del}$  besser zu verstehen schauen wir uns wieder ein Beispiel an.

Seien ein Paar von Standard-Young-Diagrammen  $(P, Q)$  gegeben durch

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

dann wissen wir:



und somit erhalten wir als entsprechende Permutation durch rückwärts Ablesen:

$$\text{del}(P, Q) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mit den Abbildungen  $\text{ins}$  und  $\text{del}$  erhalten wir dann:

**Satz 9.4. RSK-Korrespondenz ist eine Bijektion.**

Als eine Bijektion liefert die RSK-Korrespondenz insbesondere

$$n! = |S_n| = \left| \bigcup_{\lambda \vdash n} \text{ST}(\lambda) \times \text{ST}(\lambda) \right| = \sum_{\lambda \vdash n} |\text{ST}(\lambda)|^2 = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$$

und wir vergeben diesem wichtigen Resultat eine Nummer:

**Folgerung 9.5.** Es gilt

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2.$$

Zur RSK-Korrespondenz geben wir hier noch einige Anmerkungen an:

- Falls  $\pi \in S_n$  dem Paar  $(P, Q) \in \bigcup_{\lambda \vdash n} \text{ST}(\lambda) \times \text{ST}(\lambda)$  entspricht, dann entspricht  $\pi^{-1}$  dem Paar  $(Q, P)$ . Hierzu führen wir keinen Beweis durch.
- Das heißt aber, falls  $P = Q$  ist, entspricht das Paar  $(P, Q)$  einem  $\pi = \pi^{-1} \in S_n$ , also eine Involution  $\pi^2 = \text{id}$ .
- Daher zählt  $\sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda$  die Involutionen in  $S_n$ .

Beispielsweise wenn wir  $\mathbb{C}S_3$  betrachten, dann wissen wir aus dem Beispiel am Ende von Kapitel 7 schon, dass

$$\mathbb{C}S_3 \cong \underbrace{(\mathbb{C})_{1 \times 1}}_{\text{triv. Darst.}} \oplus \underbrace{(\mathbb{C})_{1 \times 1}}_{\text{sgn-Darst.}} \oplus \underbrace{(\mathbb{C})_{2 \times 2}}_{\text{nat. Darst.}}$$

und andererseits wissen wir, dass  $\sum_{\lambda \vdash 3} f^\lambda = 4$  ist. Das passt zusammen, denn in  $S_3$  gibt es tatsächlich 4 Involutionen, nämlich  $\text{id}$ ,  $(1\ 2)$ ,  $(2\ 3)$  und  $(1\ 3)$ .

Unser Ziel ist eigentlich zu zeigen  $\dim S^\lambda = f^\lambda$  und nun sind wir einem Schritt näher. Im nächsten Kapitel setzen wir weiter mit der Zielrealisierung fort.

# KAPITEL 10

## BASIS VON SPECHT-MODULN

Wir erinnern uns zuerst an einige relevante Definitionen. Sei  $\mathbb{F}$  ein beliebiger Körper und  $\lambda \vdash n$  eine Partition.

- Zwei  $\lambda$ -Tableaux  $t, t'$  sind äquivalent, also  $t \sim t'$ , g.d.w. es ein  $\pi \in R_t$  gibt s.d.  $\pi t = t'$  gilt. Die Äquivalenzklasse zum Tableau  $t$  heißt ein  $\lambda$ -Tabloid, geschrieben  $\{t\}$ .
- Ein  $\lambda$ -Tabloid  $\{t\}$  heißt **standard**, g.d.w.  $\{t\}$  ein Standard-Tableau  $t'$  als Repräsentanten hat.
- Zu einem  $\lambda$ -Tableau  $t$  ist seine alternierende Spaltensumme  $\kappa_t$  definiert durch  $\kappa_t := \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \pi$  und damit wird das Polytabloid  $e_t$  zu  $t$  definiert als  $e_t := \kappa_t \{t\}$ .

**Definition 10.1.** Ein Polytabloid  $e_t$  heißt **standard**, g.d.w.  $t$  ein Standard-Tableau ist, also steigen die Einträge von  $t$  in Zeilen und in Spalten strikt auf.

**Bemerkung 10.2.** Sei  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau und  $\pi \in C_t$ . Dann gilt nach Lemma 5.4

$$\pi \cdot e_t = e_{\pi t} = \text{sgn}(\pi) e_t = \pm e_t.$$

Damit folgt aber

$$\mathbb{Z}S^\lambda = \mathbb{Z}\text{Span}\{e_s | s \text{ ist } \lambda\text{-Tableau}\} = \mathbb{Z}\text{Span}\{e_s | s \text{ ist Spaltenstandard-}\lambda\text{-Tableau}\}.$$

Unser Ziel ist nun zu zeigen, dass  $S^\lambda$  als  $\mathbb{F}$ -Basis die Standard-Polytabloid der Form  $\lambda$  hat. Dafür benötigen wir eine Totalordnung auf den Tabloids:

**Definition 10.3.** Seien  $\{t_1\}$  und  $\{t_2\}$  Tabloids der Form  $\lambda$ . Wir sagen  $\{t_1\} < \{t_2\}$ , g.d.w. es ein  $i \in \mathbb{N}$  gibt, s.d. die folgenden beiden Bedingungen gelten:

- i. Für jedes  $j > i$  ist der Eintrag  $j$  in  $\{t_1\}$  und  $\{t_2\}$  in derselben Zeile.
- ii. Eintrag  $i$  ist in  $\{t_1\}$  in einer höheren Zeile als in  $\{t_2\}$ .

Beispielsweise sehen wir, für

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

gilt  $\{t_1\} < \{t_2\}$  mit  $i = 3$ .

**Bemerkung 10.4.**

- a) Die Ordnung in Definition 10.3 ist eine Totalordnung.

b) Sei  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau, welches spaltenstandard ist. Dann gilt

$$e_t = \{t\} + \text{linear Kombi. von Tabloids } \{t'\} \text{ mit } \{t'\} < \{t\}.$$

**Beweis.**

a) ist klar.

b) Wir schauen uns zuerst einen Spezialfall an, nämlich  $\lambda = (1^n)$  und

$$t = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}.$$

Es ist  $\kappa_t = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \pi$  und somit

$$e_t = \kappa_t \{t\} = \{t\} + \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\text{id}\}} \pm \{\sigma t\}.$$

Wir vergleichen nun  $\{t\}$  und  $\{\sigma t\}$ . Sei  $i := \max \{j: \sigma(j) \neq j\}$ , dann ist  $i$  in  $\sigma t$  in einer höheren Zeile als in  $t$ , und somit  $\{\sigma t\} < \{t\}$ .

Der allgemeiner Fall wird analog gezeigt.  $\square$

**Lemma 10.5.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper. Die Menge  $\{e_t \mid t \text{ Standard-}\lambda\text{-Tableau}\} \subseteq S^\lambda$  ist linear unabhängig über  $\mathbb{F}$ . Insbesondere gilt

$$\dim S^\lambda \geq f^\lambda.$$

**Beweis.** Sei  $0 = \sum_{t \text{ standard } \lambda\text{-Tableau}} \alpha_t e_t$  mit jedem  $\alpha_t \in \mathbb{F}$ . Sei dann  $\{\hat{t}\}$  das größtes Tabloid mit  $\hat{t}$  standard und wir schreiben die anderen Standard-Tabloids als  $e_{t_1}, e_{t_2}, \dots$

Nach Bemerkung 10.4 gilt

$$\begin{array}{lll} e_{\hat{t}} & = & \{\hat{t}\} + \text{linear Kombi. von Tabloids } \{t'\} \text{ mit } \{t'\} < \{\hat{t}\} \\ e_{t_1} & = & \{t_1\} + \text{linear Kombi. von Tabloids } \{t'\} \text{ mit } \{t'\} < \{t_1\} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

und somit sehen wir

$$0 = \sum_{\substack{t \text{ standard} \\ \lambda\text{-Tableau}}} \alpha_t e_t = \alpha_{\hat{t}} e_{\hat{t}} + \sum_{\substack{t \text{ standard} \\ \lambda\text{-Tableau} \\ \text{mit } \{t\} < \{\hat{t}\}}} \alpha_t e_t = \text{lineare Kombi. von } \{\hat{t}\}, \{t_1\}, \dots$$

Nach Definition 4.8 bilden die  $\lambda$ -Tabloids eine Basis von  $M^\lambda$ , also sind sie  $\mathbb{F}$ -linear unabhängig. Daraus folgt, dass jedes  $\alpha_t$  in der linearen Kombination 0 sein muss.  $\square$

**Lemma 10.6.** Sei  $\mathbb{F}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und zusätzlich  $\text{char } \mathbb{F} = 0$  oder  $\text{char } \mathbb{F} \nmid n!$ . Dann ist  $\{e_t \mid t \text{ Standard-}\lambda\text{-Tableau}\}$  eine Basis von  $S^\lambda$ .

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist  $\mathbb{F}S_n$  halbeinfach nach Satz von Maschke. Außerdem liefert Satz 8.9, dass die Specht-Moduln  $S^\lambda$  für alle  $\lambda \vdash n$  einfach sind und zudem für zwei unterschiedliche Partitionen  $\lambda \neq \mu$  noch  $S^\lambda \not\cong S^\mu$  gilt, d.h. die Specht-Moduln bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der einfachen  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln.



Zusammen mit dem Satz von Wederburn erhalten wir

$$\mathbb{F}S_n \cong \bigoplus_{i=1}^{\text{Anzahl einfacher Moduln}} M_{n_i}(\mathbb{F}) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{\dim S^\lambda}(\mathbb{F})$$

wobei Lemma 10.5 besagt  $\dim S^\lambda \geq f^\lambda$ , also gilt

$$n! = \dim \mathbb{F}S_n = \sum_{\lambda \vdash n} (\dim S^\lambda)^2 \geq \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 \stackrel{\text{RSK}}{=} n!$$

und d.h.

$$\sum_{\lambda \vdash n} (\dim S^\lambda)^2 = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2.$$

Daraus folgt  $\dim S^\lambda = f^\lambda$  für jedes  $\lambda \vdash n$  und zusammen mit Lemma 10.5 wird die Behauptung gezeigt.  $\square$

Obiges Lemma nutzt tatsächlich die Voraussetzungen, dass  $\mathbb{F}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper ist und zusätzlich  $\text{char } \mathbb{F} = 0$  oder  $\text{char } \mathbb{F} \nmid n!$  gilt. Andererfalls können wir dann die Einfachheit von  $S^\lambda$  und den Satz von Wederburn nicht verwenden.

Aber die Dimensionsformel für  $S^\lambda$  gilt eigentlich unabhängig vom Körper. Für die anderen Fälle müssen wir anders und geschickt argumentieren.

**Definition 10.7.** Sei  $\lambda \vdash n$ ,  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau und  $i, j \in \mathbb{N}_{\leq \lambda_1}$  mit  $i \neq j$ . Sei  $X$  eine Teilmenge von Spalte  $i$  von  $t$  und  $Y$  eine Teilmenge von Spalte  $j$  von  $t$ . Es ist  $S_X \times S_Y \leq S_{X \cup Y}$ . Sei  $\{\pi_1, \dots, \pi_t\}$  ein Vertretersystem der Nebenklassen von  $S_X \times S_Y$  in  $S_{X \cup Y}$ . Damit definieren wir ein **Garnir-Element**  $G_{XY}$  als

$$G_{XY} := \sum_{i=1}^t \text{sgn}(\pi_i) \pi_i.$$

**Beispiel 10.8.**

- a) Sei  $\lambda = (2 \ 1)$  und  $t = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ . Sei  $X = \{2, 3\}$  und  $Y = \{1\}$ . Nebenklassenvertreter von  $U := S_{\{1\}} \times S_{\{2,3\}} \leq S_{\{1,2,3\}}$  lauten

$$\begin{aligned} \text{id} \cdot U &= \{\text{id}, (2 \ 3)\} \\ (1 \ 2) \cdot U &= \{(1 \ 2), (1 \ 2 \ 3)\} \\ (1 \ 3) \cdot U &= \{(1 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\} \end{aligned}$$

also z.B.  $G_{XY} = \text{id} - (1 \ 2) - (1 \ 3)$  und das Garnir-Element ist nicht eindeutig.

- b) Wir nutzen Garnir-Elemente um Nullrelationen zu erzeugen:

$$\begin{aligned} G_{XY} \cdot e_t &= (\text{id} - (1 \ 2) - (1 \ 3)) \cdot \left( \frac{\overline{2 \ 1}}{\underline{3}} - \frac{\overline{3 \ 1}}{\underline{2}} \right) \\ &= \left( \frac{\overline{2 \ 1}}{\underline{3}} - \frac{\overline{3 \ 1}}{\underline{2}} \right) - \left( \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}} - \frac{\overline{3 \ 2}}{\underline{1}} \right) - \left( \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}} - \frac{\overline{1 \ 3}}{\underline{2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

c) Wie wählen wir die Repräsentanten?

i. Für  $g, h \in S_{X \cup Y}$  gilt

$$\begin{aligned} g(S_X \times S_Y) = h(S_X \times S_Y) &\Leftrightarrow h^{-1}g \in S_X \times S_Y \\ &\Leftrightarrow h^{-1}gX \subseteq X \quad \wedge \quad h^{-1}gY \subseteq Y \\ &\Leftrightarrow h^{-1}gX = X \quad \wedge \quad h^{-1}gY = Y \\ &\Leftrightarrow gX = hX \quad \wedge \quad gY = hY. \end{aligned}$$

ii. Bilde alle geordneten Paare  $(X', Y')$  mit

- $|X| = |X'|$  und  $|Y| = |Y'|$ ,
- $X \cap Y = \emptyset = X' \cap Y'$ ,
- $X \cup Y = X' \cup Y'$ .

Wähle Element  $\pi = \pi_{X', Y'} \in S_{X \cup Y}$  mit  $\pi X = X'$  und  $\pi Y = Y'$  (und  $\pi$  fixiert alles außerhalb von  $X \cup Y$ ).

Dann ist  $\{\pi_{X', Y'} \in S_{X \cup Y} \mid \pi X = X' \wedge \pi Y = Y'\}$  ein Repräsentantensystem von  $S_X \times S_Y$  in  $S_{X \cup Y}$ .

Wähle hierbei  $\pi_{X', Y'}$  so, dass nur eine Teilmenge von  $X$  mit einer Teilmenge von  $Y$  vertauscht wird.

Wir formulieren jetzt i.A. unter welcher Bedingung ein Garnir-Element eine Nullrelation erzeugen kann:

**Proposition 10.9.** Sei  $\lambda \vdash n$  und  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau mit  $\lambda_1$  Anzahl der Spalten von  $t$  und  $\lambda'_i$  die Länge der  $i$ -ten Spalte von  $t$ . Sei  $i \in \mathbb{N}_{<\lambda_1}$  und  $X$  eine Teilmenge von Spalte  $i$  von  $t$  und  $Y$  eine Teilmenge von Spalte  $i+1$  von  $t$ .

Sei  $G_{XY}$  das zugehörige Garnir-Element. Ist  $|X| + |Y| > \lambda'_i$ , dann gilt  $G_{XY} \cdot e_t = 0$ .

Beachte die Rechnung findet über  $\mathbb{Z}$  statt, also unabhängig vom Körper.

**Beweis.** Für eine Untergruppe  $H \leq S_n$  schreiben wir  $H^- := \sum_{h \in H} \text{sgn}(h)h$ .

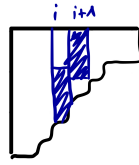
a) Es ist  $S_{X \cup Y} = \coprod_{i=1}^t \pi_i(S_X \times S_Y)$  also disjunkte Vereinigung der Nebenklassen, damit gilt

$$\begin{aligned} S_{X \cup Y}^- &= \sum_{i=1}^{|X \cup Y|} \sum_{\sigma_1 \in S_X} \sum_{\sigma_2 \in S_Y} \text{sgn}(\pi_i \sigma_1 \sigma_2) \pi_i \sigma_1 \sigma_2 \\ &= \sum_{i=1}^{|X \cup Y|} \text{sgn}(\pi_i) \pi_i \sum_{\sigma_1 \in S_X} \text{sgn}(\sigma_1) \sigma_1 \sum_{\sigma_2 \in S_Y} \text{sgn}(\sigma_2) \sigma_2 \\ &= G_{XY} \quad S_X^- \quad S_Y^-. \end{aligned}$$

b) Es ist  $S_X \subseteq C_t$  und  $S_Y \subseteq C_t$ . Für  $S \in \{S_X, S_Y\}$  und  $h \in S$  gilt aber  $h \cdot e_t \stackrel{\text{Lem. 5.4}}{=} \text{sgn}(h) \cdot e_t$ , d.h.  $\text{sgn}(h)h \cdot e_t = e_t$ , und damit

$$S_{X \cup Y}^- \cdot e_t \stackrel{a)}{=} G_{XY} S_X^- S_Y^- e_t = G_{XY} |S_X| \cdot |S_Y| \cdot e_t = |X|! \cdot |Y|! \cdot G_{XY} \cdot e_t.$$

- c) Sei  $\tau \in C_t$ . Wegen  $|X| + |Y| > \lambda'_i$  existiert ein  $x \in X$  und ein  $y \in Y$  s.d.  $x, y$  in derselben Zeile von  $\tau t$  liegen, bildlich also



Nach Lemma 8.6 gilt

$$S_{X \cup Y}^- \{\tau t\} = \sum_{j=1}^d (\text{sgn}(\sigma_j) \sigma_j) \underbrace{(1 - (x \ y))}_{\{\tau t\} - \{\tau t\}} \{\tau t\} = 0$$

mit  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_d\}$  gewisse Nebenklassenvertreter von  $S$  in  $S_{X \cup Y}$ . Daraus folgt

$$S_{X \cup Y}^- \cdot e_t = S_{X \cup Y}^- \left( \sum_{\tau \in C_t} \text{sgn}(\tau) \tau \{t\} \right) = \sum_{\tau \in C_t} \text{sgn}(\tau) S_{X \cup Y}^- \{\tau t\} = 0$$

und zusammen mit b)

$$|X|! \cdot |Y|! \cdot G_{XY} \cdot e_t = 0$$

also  $G_{XY} \cdot e_t = 0$ . □

Auf den  $\lambda$ -Tableaux definieren wir noch eine neue Ordnung

**Definition 10.10.** Seien  $s, t$   $\lambda$ -Tableaux. Wir sagen  $t \succ s$ , g.d.w. die größte Zahl, die in verschiedenen Spalten von  $s$  und  $t$  liegt, in irgendeiner Spalte von  $t$  weiter rechts als in  $s$  liegt.

Beispielsweise gilt für  $\lambda = (2 \ 2) \vdash 4$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array} \prec \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} \prec \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} \prec \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \prec \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

wobei wir sehen, dass das größte Tableau standard ist.

**Bemerkung 10.11.**

- Definition 10.10 definiert eine Totalordnung.
- Das größte Element in dieser Ordnung ist ein Standard-Tableau.

**Satz 10.12.** Sei  $s$  ein spaltenstandard  $\lambda$ -Tableau, d.h. Spalten von  $s$  sind strikt aufsteigend. Dann ist  $e_s$  eine  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination von Standard-Polytabloids, d.h.

$$e_s \in \mathbb{Z}\text{Span}\{e_t \mid t \text{ Standard-}\lambda\text{-Tableau}\}.$$

Wir zeigen Satz 10.12 später. Aber falls dies gezeigt ist, erhalten wir zusammen mit Lemma 10.5 sofort:

**Folgerung 10.13.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper. Die Menge  $\{e_t \mid t \text{ Standard-}\lambda\text{-Tableau}\}$  ist eine  $\mathbb{F}$ -Basis von  $S^\lambda$ . Insbesondere gilt

$$\dim S^\lambda = |\{\text{Standard-}\lambda\text{-Tableaux}\}| = f^\lambda.$$

**Bemerkung 10.14.** Um Satz 10.12 zu zeigen, nutzen wir die Nullrelationen der Form  $G_{XY}e_t = 0$  und die Ordnungsrelation aus Definition 10.10, um ein beliebiges Polytabloid  $e_s$  mittels dem sog. „straightening algorithm“ als  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination von Standard-Polytabloids, also  $e_s = \sum_{t \text{ std. Tableau}} \alpha_t e_t$  mit  $\alpha_t \in \mathbb{Z}$ , zu schreiben.

Wir betrachten einige Beispiele:

a) Es ist  $0 = (\text{id} - (1\ 2) - (1\ 3)) \cdot e_{\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}}$ , und somit

$$\begin{array}{c} e_{\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}} \\ \text{nicht standard} \end{array} = (1\ 2) \cdot e_{\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}} + (1\ 3) \cdot e_{\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}} = e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}} - e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}} \\ \text{standard} \quad \text{standard}$$

also gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}S^{(2\ 1)} &= \mathbb{Z}\text{Span}\{e_s \mid s \text{ ist } (2\ 1)\text{-Tableau}\} \\ &\stackrel{\text{Bem. 10.2}}{=} \mathbb{Z}\text{Span}\{e_s \mid s \text{ ist Spaltenstandard-}\lambda\text{-Tableau}\} \\ &= \mathbb{Z}\text{Span}\left\{ e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}} \text{ (standard)}, e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}} \text{ (standard)}, e_{\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}} \text{ (nicht standard)} \right\} \\ &= \mathbb{Z}\text{Span}\left\{ e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}, e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}} \right\} \end{aligned}$$

und d.h.  $\left\{ e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}, e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}} \right\}$  bildet eine Basis von  $S^{(2\ 1)}$ . Bzgl.  $\prec$  sehen wir auch

$$\begin{array}{ccc} \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix} & \prec & \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix} & \prec & \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \\ \text{nicht standard} & & \text{standard} & & \text{standard} \end{array}$$

b) Sei nun  $t = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{smallmatrix}$  nicht standard.

i. Betrachte  $X = \{5\}$  und  $Y = \{2, 4\}$ . Es ist  $G_{XY} = \text{id} - (2\ 5) - (4\ 5)$  und somit  $G_{XY} \cdot e_t = 0$ , also

$$\begin{aligned} e_t &= (2\ 5)e_t + (4\ 5)e_t \\ &= e_{\begin{smallmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}} + e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}} \\ &\quad \text{nicht standard} \quad \text{standard} \\ &= - e_{\begin{smallmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}} + e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}} \\ &\quad \text{nicht standard} \quad \text{standard} \end{aligned}$$

und wir arbeiten im nächsten Schritt noch an  $\begin{smallmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}$ .

ii. Betrachte  $X' = \{4, 5\}$  und  $Y' = \{3\}$ . Aus  $0 = G_{X'Y'} \cdot e$  folgt

$$e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} = e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} + e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} = e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} - e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}.$$

standard                  standard

Insgesamt erhalten wir

$$e_t = e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline \end{array} = e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} - e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} + e \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

und alle Tableaux sind standard.

### Bemerkung 10.15. Beweis von Satz 10.12

Sei  $\lambda \vdash n$  fest. Da es endlich viele  $\lambda$ -Tableaux gibt und sie nach Bemerkung 10.11 totalgeordnet sind mit einem Standard-Tableau als größtes Element, kann man die Aussage mittels Induktion nach dieser Kette von Tableaux.

Der Induktionsanfang wird auf dem größten Element bzgl.  $\succ$  durchgeführt und da dies nach Bemerkung 10.11 standard ist, gilt die Aussage klar.

Sei nun  $s$  ein beliebiges Spaltenstandard- $\lambda$ -Tableau.

Die Induktionsvoraussetzung lautet, dass für jedes Spaltenstandard- $\lambda$ -Tableau  $t$  mit  $t \succ s$  gilt, dass  $e_t$  eine  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination von Standard- $\lambda$ -Polytabloids ist.

Im Induktionsschritt zeigen wir, dass die Aussage für  $e_s$  auch gilt.

a) Sei Zeile  $q$  in Tableau  $s$  nicht standard, d.h. es existiert ein  $i$  mit

$$x_q := (q, i)_s > (q, i+1)_s =: y_q$$

also bildlich z.B.

$$s = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & i & i+1 \\ \hline & & y_1 & \\ & & \vdots & \\ & & x_q & y_q \\ & & \vdots & \\ & & x'_q & \\ \hline \end{array}$$

Nach Voraussetzung von „Spaltenstandard“ gilt also  $x_q < x_{q+1} < \dots < x_{\lambda'_i}$  und  $y_1 < y_2 < \dots < y_q$  aber  $x_q > y_q$ .

Dann setzen wir  $X := \{x_q, \dots, x_{\lambda'_i}\}$  sowie  $Y := \{y_1, \dots, y_q\}$ , und  $G_{XY} := \sum_{j=1}^k \text{sgn}(\pi_j) \pi_j$  mit  $\pi_j$  so, dass  $\pi_1 = \text{id}$  und für  $2 \leq j \leq k$  eine Teilmenge von  $Y$  mit einer Teilmenge von  $X$  vertauscht wird. Nach Proposition 10.9 ist  $G_{XY} \cdot e_s = 0$ .

b) Für  $2 \leq j \leq k$  sei  $u_j$  Spaltenstandard-Tableau, dessen Spalten mit  $\pi_j \cdot s$  mengenweise übereinstimmen.

Behauptung: Für  $2 \leq j \leq k$  ist  $u_j \succ s$ .

Dazu: Nach Wahl der  $\pi_j$  bleiben alle Elemente außerhalb von  $X \cup Y$  unter  $\pi_j$  fest. Sei  $x_{\max} := \max \{X \cap \pi_j Y\}$ , also das größte Element, welches in  $s$  in Spalte  $i$  liegt und in  $\pi_j s$  in Spalte  $i+1$ . Nach Definition 10.10 heißt es aber dann  $\pi_j s \succ s$  und da Spalten von  $u_j$  und  $\pi_j \cdot s$  mengenweise übereinstimmen, gilt  $u_j \succ s$ .



und ist  $\{t_1\}$  Summand von  $e_t$ , dann steht  $n$  in  $\{t_1\}$  in Zeile  $\leq r_i$ .

Nun definieren wir

$$V_i := \mathbb{F}\text{Span}\{e_t \mid t \text{ Standard-}\lambda\text{-Tableau mit } n \text{ in Zeile } \leq r_i\}.$$

Nach Definition ist  $V_i$  ein  $\mathbb{F}$ -Vektorraum und wir zeigen nun dass  $V_i$  ein  $\mathbb{F}S_{n-1}$ -Modul ist.

Dazu sei  $\sigma \in S_{n-1}$ . Dann ist  $\sigma e_t = e_{\sigma t} =: e_s$  und ist hierbei  $\{t_1\}$  ein Summand von  $e_s$ , so steht  $n$  in Box in Zeile  $\leq r_i$ . Nach Satz 10.12 gilt  $e_s = \sum_{\tilde{t} \text{ standard}} \lambda_{\tilde{t}} e_{\tilde{t}}$  und  $n$  liegt in Zeile  $\leq r_i$ . Daraus folgt,  $V_i$  ist ein  $\mathbb{F}S_{n-1}$ -Modul mit

$$\mathbb{F}S_{n-1}S^\lambda = V_m \supseteq \dots \supseteq V_2 \supseteq V_1 \supseteq 0$$

also eine Filtrierung als  $\mathbb{F}S_{n-1}$ -Moduln.

b) Wir zeigen noch dass die Subquotienten Specht-Moduln sind:

i. Schreibe  $\lambda^i := \lambda \setminus r_i$ . Dann definieren wir

$$\varphi_i: M^\mu \rightarrow M^{\lambda^i}, \varphi_i(\{t\}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ nicht in Zeile } r_i \text{ von } \{t\} \\ \{t^i\} & \text{falls } n \text{ in Zeile } r_i \text{ von } \{t\} \end{cases}$$

wobei  $\{t^i\}$  das Tabloid  $\{t\}$  ohne Box mit Eintrag  $n$  in Zeile  $r_i$  bedeutet, also löscht man am Ende der Zeile  $r_i$  eine Box sowie den Eintrag  $n$ .

Wir sollen zeigen, dass  $\varphi_i \in \text{Hom}_{\mathbb{F}S_{n-1}}(M^\mu, M^{\lambda^i})$  ist.

Sei  $\sigma \in S_{n-1}$  und  $\{t\} \in M^\mu$ . Dann gilt

$$\varphi_i(\sigma\{t\}) = \varphi_i(\{\sigma t\}) = \sigma\{t^i\} = \sigma\varphi_i(\{t\}).$$

ii. Wir untersuchen  $\varphi_i(e_t)$ . Sei  $t$  standard, d.h.  $n$  ist in Eckbox von  $t$ .

- Sei  $n$  in Zeile  $r_j < r_i$ , dann ist  $e_t \stackrel{a)}{=} \sum_{t' \text{ standard}} \pm \{t'\}$  mit  $n$  in Zeilen  $\leq r_j < r_i$  von  $\{t'\}$ . Also folgt  $\varphi_i(e_t) = \sum_{t' \text{ standard}} \pm \varphi_i(\{t'\}) = 0$ .
- Sei  $n$  in Zeile  $r_i$  von  $t$ . Angenommen  $\{t'\}$  ist Summand von  $e_t$  und  $n$  ist in Zeile  $r_i$ , dann ist  $\varphi_i(\{t'\}) = 0$ . Die Summanden  $\varphi_i(\{t'\}) \neq 0$  in  $\varphi_i(e_t)$  entsprechen genau den Summanden  $e_{t^i}$ , also folgt  $\varphi_i(e_t) = e_{t^i}$ .

iii. Nach ii. gilt also  $\varphi_i(V_i) = \mathbb{F}\text{Span}\{e_{t^i} \mid t^i \text{ Standard-}\lambda \setminus r_i\text{-Tableau}\} \stackrel{\text{Fol. 10.13}}{=} S^{\lambda \setminus r_i}$  sowie  $V_{i-1} \subseteq \ker \varphi_i$ , also  $V_1 \subseteq \ker \varphi_2, V_2 \subseteq \ker \varphi_3, \dots$ , und damit ist

$0 \subseteq V_1 \cap \ker \varphi_1 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \cap \ker \varphi_2 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_{m-1} \cap \ker \varphi_m \subseteq V_m = S^\lambda$  eine Filtrierung von  $S^\lambda$  mit Quotienten

$$V_i / (V_i \cap \ker \varphi_i) = V_i / \ker \varphi_i|_{V_i} \cong \text{im } \varphi_i|_{V_i} = \varphi_i(V_i) \stackrel{\text{ii.}}{=} S^{\lambda \setminus r_i}.$$

Nach Satz 3.4 gilt  $f^\lambda = \sum_{i=1}^m f^{\lambda \setminus r_i}$  und nach Folgerung 10.13 gilt also  $\dim S^\lambda = \sum_{i=1}^m \dim S^{\lambda \setminus r_i}$ . Daher ist die Summe der Dimensionen von Subquotienten  $V_i / (V_i \cap \ker \varphi_i)$  bereits  $S^\lambda$ , also muss  $V_i = V_{i+1} \cap \ker \varphi_{i+1}$  sein. Damit ist die obige Filtrierung zu

$$\{0\} =: V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_m := \mathbb{F}S_{n-1}S^\lambda$$

wobei jedes Subquotient  $V_i / V_{i-1} \cong S^{\lambda \setminus r_i}$  erfüllt.  $\square$





# KAPITEL 11

## EINFACHE $S_n$ -MODULN ÜBER KÖRPER VOM PRIMCHARAKTERISTIK

Im ganzen Kapitel sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char}\mathbb{F} = p > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \vdash n$  eine Partition.

Wir wissen bereits, im Fall von  $\text{char}\mathbb{F} \mid n!$  ist der Specht-Modul  $S^\lambda$  i.A. nicht einfach. Unser Ziel ist nun, die einfachen  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln in solchen Fällen zu finden.

Dazu bräuchten wir wieder Werkzeuge aus der linearen Algebra:

**Definition 11.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{F}$ -Vektorraum und  $W \leq V$  ein Untervektorraum. Eine Abbildung

$$\langle \bullet, \bullet \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

heißt eine **Bilinearform**, g.d.w.  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  linear in jedem Argument ist. Zu  $W$  definieren wir eine Menge

$$W^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in W: \langle v, u \rangle = 0\}.$$

Außerdem definieren wir:

- a) Eine Bilinearform  $\langle \bullet, \bullet \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  heißt **symmetrisch**, g.d.w. für jedes  $v, w \in V$  gilt  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ .
- b) Eine Bilinearform  $\langle \bullet, \bullet \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  heißt **nicht-ausgeartet**, g.d.w.  $V^\perp = 0$  ist. Andererfalls heißt  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  **ausgeartet**.
- c) Eine Bilinearform  $\langle \bullet, \bullet \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  heißt **nicht-ausgeartet auf  $W$** , g.d.w. die Einschränkung  $\langle \bullet, \bullet \rangle|_{W \times W}$  nicht-ausgeartet ist.

**Bemerkung 11.2.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{F}$ -Vektorraum,  $W \leq V$  ein Unterraum und  $\langle \bullet, \bullet \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  eine Bilinearform.

- i. Die Menge  $W^\perp$  ist ein Unterraum von  $V$ .
- ii. Ist  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  symmetrisch, so auch  $\langle \bullet, \bullet \rangle|_{W \times W}$ .
- iii. Es kann sein, dass  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  nicht-ausgeartet ist, aber  $\langle \bullet, \bullet \rangle|_{W \times W}$  ausgeartet ist.
- iv. Es gilt folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} & \langle \bullet, \bullet \rangle \text{ ist nicht-ausgeartet auf } W. \\ \Leftrightarrow & \quad W \cap W^\perp = \{0\}. \\ \Leftrightarrow & \quad W \oplus W^\perp = V. \end{aligned}$$

Alle Aussagen lassen sich einfach zeigen und wir verzichten auf ihre Beweise hier. Nun versuchen wir eine Bilinearform auf  $M^\lambda = \mathbb{F}\text{Span}\{\lambda\text{-Tabloids}\}$  zu definieren:

**Definition 11.3. (Bilinearform auf  $M^\lambda$ )** Auf  $M^\lambda$  definieren wir eine Bilinearform

$$\langle \bullet, \bullet \rangle: M^\lambda \times M^\lambda \rightarrow \mathbb{F}, \langle \{t_1\}, \{t_2\} \rangle \mapsto \delta_{\{t_1\}, \{t_2\}}$$

und  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  ist **symmetrisch, nicht-ausgeartet** und  **$S_n$ -invariant** im Sinne im Sinne von

$$\forall \lambda\text{-Tableaux } t_1, t_2 \forall \sigma \in S_n: \langle \{t_1\}, \{t_2\} \rangle = \langle \{\sigma t_1\}, \{\sigma t_2\} \rangle.$$

**Beweis.** Symmetrie ist klar.

Für „Nicht-Ausgeartet“ wählen wir ein  $w = \sum_{\{t\} \lambda\text{-Tabloid}} \lambda_{\{t\}} \{t\} \in M^\lambda$  mit  $\langle v, w \rangle = 0$  für jedes  $v \in M^\lambda$ . Dann gilt insb. für jedes  $\lambda$ -Tabloid  $\{s\}$ , dass

$$0 = \langle \{s\}, w \rangle = \left\langle \{s\}, \sum_{\{t\} \lambda\text{-Tabloid}} \lambda_{\{t\}} \{t\} \right\rangle = \sum_{\{t\} \lambda\text{-Tabloid}} \lambda_{\{t\}} \langle \{s\}, \{t\} \rangle = \lambda_{\{s\}}$$

also  $w = 0$ .

Für  $S_n$ -Invarianz wählen wir zwei  $\lambda$ -Tabloids  $t_1, t_2$  sowie ein  $\sigma \in S_n$  und wir betrachten zwei Fälle:

- Falls  $t_1 \sim t_2$ , also  $\sigma t_1 \sim \sigma t_2$ , dann  $1 = \langle \{t_1\}, \{t_2\} \rangle = \langle \{\sigma t_1\}, \{\sigma t_2\} \rangle = \langle \sigma \{t_1\}, \sigma \{t_2\} \rangle$ .
- Falls  $t_1 \not\sim t_2$ , also  $\sigma t_1 \not\sim \sigma t_2$ , dann  $0 = \langle \{t_1\}, \{t_2\} \rangle = \langle \{\sigma t_1\}, \{\sigma t_2\} \rangle = \langle \sigma \{t_1\}, \sigma \{t_2\} \rangle$ .  $\square$

Ab jetzt meinen wir mit  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  immer die Bilinearform auf  $M^\lambda$  wie in Definition 11.3.

**Bemerkung 11.4.**

- a) Sei  $H \leq S_n$  und  $H^- := \sum_{h \in H} \text{sgn}(h)h$ . Dann gilt für jedes  $u, v \in M^\lambda$

$$\langle H^- u, v \rangle = \langle u, H^- v \rangle$$

und insb.

$$\langle \kappa_t u, v \rangle = \langle u, \kappa_t v \rangle$$

für jedes  $t$ -Tableau.

- b) Für jeden Untermodul  $U \leq M^\lambda$  ist  $U^\perp$  auch ein Untermodul von  $M^\lambda$ .

**Beweis.** Der Beweis beruht im Wesentlichen auf die  $S_n$ -Invarianz von  $\langle \bullet, \bullet \rangle$ .

Für a) sehen wir

$$\begin{aligned} \langle H^- u, v \rangle &= \left\langle \sum_{h \in H} \text{sgn}(h)h u, v \right\rangle \\ &= \sum_{h \in H} \text{sgn}(h) \langle h u, v \rangle \\ (S_n\text{-Invarianz}) \quad &= \sum_{h \in H} \text{sgn}(h) \langle u, h^{-1} v \rangle \\ &= \sum_{h^{-1} \in H} \text{sgn}(h^{-1}) \langle u, h^{-1} v \rangle \\ &= \left\langle u, \sum_{h^{-1} \in H} \text{sgn}(h^{-1}) h^{-1} v \right\rangle \\ &= \langle u, H^- v \rangle. \end{aligned}$$

Für b) sei  $v \in U^\perp$ , also  $\langle v, u \rangle = 0$  für jedes  $u \in U$ . Dann gilt  $0 = \langle \sigma v, u \rangle = \langle v, \sigma^{-1}u \rangle$  für jedes  $s \in S_n$ , also  $\sigma^{-1}u \in U^\perp$ . Da  $\sigma$  beliebig ist, gilt  $\sigma u \in U^\perp$ .  $\square$

Mit dieser Bemerkung können wir eine Beziehung zwischen dem Specht-Modul und allen anderen Untermoduln von  $M^\lambda$  herstellen:

**Satz 11.5. (Untermoduletheorem)** Für jeden Untermodul  $U \leq M^\lambda$  gilt entweder  $S^\lambda \subseteq U$  oder  $U \subseteq (S^\lambda)^\perp$ .

**Beweis.** Sei  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau. Für ein  $u \in U$  gilt  $\kappa_t u \in U$ , da  $U$  ein Modul ist. Zu  $\kappa_t u$  gibt es zwei Fälle zu diskutieren:

- Falls es ein  $u \in U$  existiert, s.d.  $\kappa_t u \neq 0$ :  
Nach Proposition 8.7 b) existiert ein  $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$  s.d.  $\kappa_t u = \alpha e_t$ , also  $e_t \in U$  und somit  $S^\lambda = \mathbb{F} S_n \cdot e_t \subseteq U$ .

- Falls  $\kappa_t u = 0$  für jedes  $u \in U$ :  
Dann gilt insb.  $\kappa_t(\pi^{-1}u) = 0$  für jedes  $\pi \in S_n$ , also auch

$$0 = \langle \kappa_t \pi^{-1}u, \{t\} \rangle \stackrel{\text{Bem. 11.4}}{=} \langle \pi^{-1}u, \kappa_t \{t\} \rangle = \langle \pi^{-1}u, e_t \rangle \stackrel{\text{Def. 11.3}}{=} \langle u, \pi e_t \rangle$$

also  $u \in (S^\lambda)^\perp$ .  $\square$

Jetzt sind wir in der Lage, einen neuen Modul zu definieren, welcher sich oft als einfach erweist:

**Definition 11.6.** Wir definieren

$$D^\lambda := S^\lambda / (S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp)$$

und sehen, dass

$$D^\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S^\lambda = S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp \quad \Leftrightarrow \quad S^\lambda \subseteq (S^\lambda)^\perp.$$

Bzgl. dieser Konstruktion gibt es drei Fragen:

- i. Wann ist  $D^\lambda$  Null?
- ii. Wann ist  $D^\lambda$  einfach, wenn  $D^\lambda \neq 0$  ist?
- iii. Für eine andere Partition  $\mu \vdash n$  mit  $\mu \neq \lambda$ , gilt dann  $D^\lambda \not\cong D^\mu$ ?

Wir fangen mit der zweiten Frage an:

**Satz 11.7. (Einfachheit von  $D^\lambda$ )** Falls  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp \neq S^\lambda$ , dann ist der Modul  $D^\lambda$  einfach.

**Beweis.** Sei  $U \leq S^\lambda$  ein echter Untermodul. Dann liefert Satz 11.5  $U \subseteq (S^\lambda)^\perp$  da  $S^\lambda \subseteq U$  unmöglich ist, also  $U \subseteq S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp$ . Dies zeigt, dass  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp$  ein eindeutiger maximaler Untermodul von  $S^\lambda$  ist, und damit ist  $D^\lambda = S^\lambda / (S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp)$  einfach.  $\square$

Um mehr über  $D^\lambda$  zu wissen, führen wir folgenden Satz aus linearer Algebra ein:

**Proposition 11.8.** Sei  $M$  ein  $\mathbb{F}$ -Vektorraum und  $\langle \bullet, \bullet \rangle: M \times M \rightarrow \mathbb{F}$  eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform. Zudem sei  $V \leq M$  ein Unterraum mit Basis  $\{e_1, \dots, e_k\}$ . Dann entspricht die Dimension von  $V / (V \cap V^\perp)$  dem Rang der Gram-Matrix von  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  bzgl.  $\{e_1, \dots, e_k\}$ , also

$$\dim V / (V \cap V^\perp) = \text{rk}(\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Insbesondere ist diese Dimension unabhängig von Wahl der Basis.

**Beweis.** Sei  $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$  der Dualraum und  $\phi: V \rightarrow V^*, v \mapsto \psi_v := \langle v, \bullet \rangle$ . Beachte die Zuordnung  $\phi$  ist linear. Sei dazu  $B^* := \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$  die Dualbasis zu  $B := \{e_1, \dots, e_k\}$ , d.h. für jedes  $i, j \in \mathbb{N}_{\leq k}$  ist  $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$ .

a) Behauptung:  $M_{B^*}^B(\phi) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}$ .

Dazu sehen wir, dass wir jedes  $\phi(e_i) = \psi_{e_i}$  „umständlicher“ umschreiben können, denn für jedes  $t \in \mathbb{N}_{\leq k}$  gilt

$$\psi_{e_i}(e_t) = \langle e_i, e_t \rangle = \sum_{j=1}^k \langle e_i, e_j \rangle \varepsilon_j(e_t) = \left( \sum_{j=1}^k \langle e_i, e_j \rangle \varepsilon_j \right)(e_t)$$

also  $\phi(e_i) = \sum_{j=1}^k \langle e_i, e_j \rangle \varepsilon_j$  und somit die Behauptung.

b) Beachte

$$\ker \phi = \{v \in V \mid \psi_v = 0\} = \{v \in V \mid \forall u \in V: \langle v, u \rangle = 0\} = \{v \in V \mid v \in V^\perp\} = V \cap V^\perp$$

und nach dem Homomorphiesatz gilt daher  $V / (V \cap V^\perp) = V / \ker \phi \cong \text{im } \phi$ . Somit erhalten wir

$$\dim V / (V \cap V^\perp) = \dim \text{im } \phi = \text{rk}(\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}$$

und wir wissen aus linearer Algebra, dass der Rang einer darstellenden Matrix ist unabhängig von Wahl der Basis.  $\square$

Aus diesem Satz folgt direkt

**Folgerung 11.9.** Falls  $D^\lambda \neq 0$  ist, dann gilt

$$\dim D^\lambda = \text{rk}(\text{Gram-Matrix von } \langle \bullet, \bullet \rangle \text{ bzgl. } S^\lambda)$$

und die Dimension von  $D^\lambda$  hängt nur von  $\text{char } \mathbb{F}$  ab, nicht von  $\mathbb{F}$  selber.

**Beweis.** Nach Folgerung 10.13 hat  $S^\lambda$  Basis  $\{e_t \mid t \text{ ist Standard-}\lambda\text{-Tableau}\}$ . Die Tabloids, die in der Linearkombination  $e_t = \sum_{\{s\} \in \lambda\text{-Tabloid}} \lambda_{\{s\}} \{s\}$  vorkommen, haben Koeffizienten  $\lambda_{\{s\}} \in \{0, 1, -1\}$ , und somit ist entweder  $\langle e_t, e_s \rangle \in \mathbb{Z}$  falls  $\text{char } \mathbb{F} = 0$  oder  $\langle e_t, e_s \rangle \in \mathbb{Z}_p$  falls  $\text{char } \mathbb{F} = p > 0$ . Daraus folgt, dass der Rang der Gram-Matrix von  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  bzgl.  $S^\lambda$  nur von  $\text{char } \mathbb{F}$  abhängt.  $\square$

**Bemerkung 11.10.**

- a) Folgerung 11.9 liefert ein theoretisches Resultat für die Dimension von  $D^\lambda$ , aber der Vorgang dabei, also den Rang der Gram-Matrix zu bestimmen, ist in der Praxis kaum verwendbar, denn die Größe der Gram-Matrix wächst faktoriell zu  $n$ . Es ist ein total offenes Problem, wie man eine „finale“ Formel für  $\dim D^\lambda$  finden kann.
- b) Eine Darstellung  $\mathfrak{X}$  heißt absolut irreduzibel, g.d.w.  $\mathfrak{X}$  irreduzibel bleibt bei Erweiterung des Körpers  $\mathbb{F}$  zu  $L$ . Also sind die zugehörigen  $D^\lambda$  Darstellungen absolut irreduzibel nach Folgerung 11.9, denn  $\dim S^\lambda = f^\lambda$  ist unabhängig vom Körper und  $\dim D^\lambda = \dim S^\lambda / (S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp)$  hängt nur von  $\text{char}\mathbb{F}$  ab, also hängt  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp$  nur von  $\text{char}\mathbb{F}$  ab.

Wir betrachten ein konkretes Beispiel bevor wir uns weiter mit der Theorie beschäftigen:

**Beispiel 11.11.** Sei  $n=4$  und  $\lambda=(2\ 2)$ . Dann gibt es nur zwei Standard-Tableaux, nämlich

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

und wir schreiben  $e_i := e_{t_i}$  für  $i \in \{1, 2\}$ . Dann ist  $\{e_1, e_2\}$  Basis von  $S^{(2\ 2)}$  und wir rechnen sie aus:

$$e_1 = \frac{\overline{1\ 2}}{\overline{3\ 4}} - \frac{\overline{3\ 2}}{\overline{1\ 4}} - \frac{\overline{1\ 4}}{\overline{3\ 2}} + \frac{\overline{3\ 4}}{\overline{1\ 2}}$$

$$e_2 = \frac{\overline{1\ 3}}{\overline{2\ 4}} - \frac{\overline{2\ 3}}{\overline{1\ 4}} - \frac{\overline{1\ 4}}{\overline{2\ 3}} + \frac{\overline{2\ 4}}{\overline{1\ 3}}.$$

Das bedeutet

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 4 \quad \langle e_1, e_2 \rangle = 2 \quad \langle e_2, e_2 \rangle = 4$$

und somit ist die Gram-Matrix

$$G^{(2\ 2)} := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen dabei:

- Ist  $\text{char}\mathbb{F} = 2$ , so ist  $G^{(2\ 2)} = 0^{2 \times 2}$ , d.h.  $D^{(2\ 2)} = 0$ .
- Ist  $\text{char}\mathbb{F} = 3$ , so gilt  $4 = 1$  und die Zeilen von  $G^{(2\ 2)}$  sind dann linear abhängig, also  $\text{rk}(G^{(2\ 2)}) = 1$ .
- Ist  $\text{char}\mathbb{F} \geq 5$ , so ist  $\text{rk}(G^{(2\ 2)}) = 2$ , also  $\dim D^{(2\ 2)} = 2$ .

Aus diesem Beispiel sehen wir, dass  $D^{(2\ 2)}$  im Fall  $\text{char}\mathbb{F} = 2$  verschwindet, also wenn  $(2\ 2)$  nicht 2-regulär ist. Dies erzeugt eine Vermutung dafür, dass  $D^\lambda = 0$ , falls  $\lambda$   $p$ -regulär ist. Tatsächlich gilt sogar mehr, aber um das zu sehen, müssen wir einige Vorbereitungen machen.

Wir beginnen mit einer neuen Äquivalenzrelation auf den Tabloids:

**Definition 11.12.** Seien  $t_1, t_2$  zwei  $\lambda$ -Tableaux. Wir definieren

$$\begin{aligned} \{t_1\} \sim \{t_2\} &: \Leftrightarrow i, j \text{ liegen in } t_1 \text{ in der selben Zeile g.d.w. sie in } t_2 \text{ in derselben Zeile sind.} \\ &\Leftrightarrow \{t_1\} \text{ entsteht aus } \{t_2\} \text{ durch Vertauschen ganzer Zeile.} \end{aligned}$$

Bspw. gilt

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}.$$

**Bemerkung 11.13.**

- $\sim$  in Definition 11.12 ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge der  $\lambda$ -Tabloids.
- Sei  $\{t\}$  ein  $\lambda$ -Tabloid mit  $\lambda = (1^{a_1} 2^{a_2} \dots)$ , d.h.  $\{t\}$  hat  $a_j$ -Zeilen der Länge  $j$ . Damit existieren  $a_j!$  Möglichkeiten, die Zeile der Länge  $j$  im Sinne von Definition 11.12 zu permutieren, und d.h., die Äquivalenzklasse von  $\{t\}$  enthält  $\prod_{j \in \mathbb{N}} a_j!$  viele Elemente. Beachte: Dieses Argument hängt nicht von  $t$  ab! **Daher hat jede Äquivalenzklasse  $\prod_{j \in \mathbb{N}} a_j!$  viele Elemente.**
- Wir schreiben im folgenden  $e_t$  um, in dem wir die Summanden von  $e_t$  nach Äquivalenzklassen gruppieren, also

$$e_t = \pm \left( \begin{array}{c} \prod_{j \in \mathbb{N}} a_j! \text{ Summanden} \\ \text{aus 1. Äquivalenzklassen} \end{array} \right) \pm \left( \begin{array}{c} \prod_{j \in \mathbb{N}} a_j! \text{ Summanden} \\ \text{aus 2. Äquivalenzklassen} \end{array} \right) \pm \dots$$

Dabei müssen wir aber noch das Vorzeichen jedes Summanden verstehen und dies leistet folgende Proposition:

**Proposition 11.14.** Sei  $\lambda = (1^{a_1} 2^{a_2} \dots)$  und  $t, \tilde{t}$   $\lambda$ -Tableaux.

- Es gilt  $\prod_{j \in \mathbb{N}} a_j! \langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle$ .
- Erhält man  $\tilde{t}$  aus  $t$ , in dem man die Einträge in umgekehrter Reihenfolge aufzählt, dann gilt  $\langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle = \prod_{j \in \mathbb{N}} (a_j!)^j$ .

Die Bedingung in b) ist erfüllt, z.B. für  $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$  und  $\tilde{t} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline \end{array}$ .

**Beweis.**

- Sei  $\{t_1\}$  ein gemeinsamer Summand von  $e_t$  und  $e_{\tilde{t}}$ . Falls solches  $\{t_1\}$  nicht existiert, ist  $\langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle = 0$  und die Aussage gilt offenbar. Für jedes  $\{t_2\} \sim \{t_1\}$  ist  $\{t_2\}$  ebenfalls ein Summand von  $e_t$  und  $e_{\tilde{t}}$ . Ob  $\{t_1\}$  und  $\{t_2\}$  mit gleichen oder verschiedenen Vorzeichen in  $e_t$  bzw. in  $e_{\tilde{t}}$  auftauchen, hängt nicht von  $t$  bzw.  $\tilde{t}$  ab, sondern nur von  $\{t_1\}$  und  $\{t_2\}$ . Wir machen nun eine Fallunterscheidung:
  - Angenommen  $\{t_1\}$  hat in der Summe für  $e_t$  und  $e_{\tilde{t}}$  gleiches Vorzeichen, also

$$\begin{aligned} e_t &= \dots + \varepsilon_1 \{t_1\} + \varepsilon_2 \{t_2\} \dots \\ e_{\tilde{t}} &= \dots + \varepsilon_1 \{t_1\} + \varepsilon_2 \{t_2\} \dots \end{aligned}$$

mit  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2 \in \{-1, 1\}$ . Dann ist  $\varepsilon'_2 = \varepsilon_2$ , denn  $\varepsilon'_2$  wird genauso nur durch  $\varepsilon_1$  und  $\{t_1\} \sim \{t_2\}$  berechnet wie  $\varepsilon_2$ . Damit sehen wir, dass in diesem Fall alle  $\prod_{j \in \mathbb{N}} a_j!$  Elemente in der Äquivalenzklassen von  $\{t_1\}$  den Summanden zu  $\langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle$  tragen, also insgesamt  $\sum_{\{s\} \sim \{t\}} \langle \varepsilon\{s\}, \varepsilon\{s\} \rangle = \sum_{\{s\} \sim \{t\}} 1 = \prod_{j \in \mathbb{N}} a_j!$ .

- ii. Angenommen  $\{t_1\}$  hat in der Summe für  $e_t$  und  $e_{\tilde{t}}$  unterschiedliches Vorzeichen, also

$$\begin{aligned} e_t &= \cdots + \varepsilon_1\{t_1\} + \varepsilon_2\{t_2\} \cdots \\ e_{\tilde{t}} &= \cdots - \varepsilon_1\{t_1\} + \varepsilon'_2\{t_2\} \cdots \end{aligned}$$

mit  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2 \in \{-1, 1\}$ . Dann ist  $\varepsilon'_2 = -\varepsilon_2$ , denn  $\varepsilon'_2$  wird genauso nur durch  $\varepsilon_1$  und  $\{t_1\} \sim \{t_2\}$  berechnet wie  $\varepsilon_2$ . Folglich ist der entsprechende Beitrag von den Elementen der Äquivalenzklassen von  $\{t_1\}$  zu  $\langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle$  gerade  $\sum_{\{s\} \sim \{t\}} \langle \varepsilon\{s\}, \varepsilon\{s\} \rangle = -\prod_{j \in \mathbb{N}} a_j!$ .

Mit der Umschreibung von  $e_t$  aus Bemerkung 11.13 c) folgt  $\prod_{j \in \mathbb{N}} a_j! |\langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle|$ .

- b) Wir definieren eine Untergruppe  $U \leq C_t$ , bestehend aus den Elementen  $\pi \in C_t$  mit

$$\forall i \in \mathbb{N}: i \text{ und } \pi(i) \text{ gehören in } t \text{ zu Zeilen gleicher Länge.}$$

Also z.B. für  $\lambda = (4 \ 3 \ 3 \ 1) =: (j^{a_j})_{j \in \mathbb{N}}$  und

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 8 & 9 & 10 & \\ \hline 11 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{sowie} \quad \tilde{t} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 7 & 6 & 5 & \\ \hline 10 & 9 & 8 & \\ \hline 11 & & & \\ \hline \end{array}$$

ist  $U = S_{\{5,8\}} \times S_{\{6,9\}} \times S_{\{7,10\}} \cong S_{a_3} \times S_{a_3} \times S_{a_3}$ .

Im Allgemeinen ist

$$U \cong \cdots \times \underbrace{S_{a_j} \times \cdots \times S_{a_j}}_{j \text{ mal vor}} \times \cdots$$

und somit gilt  $|U| = \prod_{j \in \mathbb{N}} (a_j!)^j$ . Jedes Tabloid, welches Summand in  $e_t$  und  $e_{\tilde{t}}$  ist, hat die Form  $\{\pi t\}$  für ein  $\pi \in U$ . Es kommt mit der selben Vorzeichen vor. Somit folgt  $\langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle = |U| = \prod_{j \in \mathbb{N}} (a_j!)^j$ .

□

Die Vorarbeit ist fertig und wir können die Frage beantworten, wann  $D^\lambda \neq 0$  ist:

**Satz 11.15.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char } \mathbb{F} = p > 0$ . Dann ist  $D^\lambda \neq 0$  g.d.w.  $\lambda$  **p-regulär** ist.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “ durch Kontraposition:

Sei  $\lambda = (1^{a_1} \ 2^{a_2} \ \dots)$  nicht  $p$ -regulär, d.h. es gibt ein  $j \in \mathbb{N}$ , s.d.  $a_j \geq p$ , also  $p \mid \prod_{j \in \mathbb{N}} a_j!$ . Sei  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau. Wegen  $p \mid \prod_{j \in \mathbb{N}} a_j!$  gilt nach Proposition 11.14  $\langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle = 0$  für alle  $\lambda$ -Tableau  $\tilde{t}$ , insb. für alle Standard- $\lambda$ -Tableaux, welche eine Basis von  $S^\lambda$  bildet, also  $\langle e_t, v \rangle = 0$  für jedes  $v \in S^\lambda = \mathbb{F} \text{Span}\{e_{\tilde{t}} \mid \tilde{t} \text{ standard}\}$ . Daher ist  $e_t \in (S^\lambda)^\perp$ . Da  $(S^\lambda)^\perp$  nach Bemerkung 11.4 ein Untermodul ist, folgt  $S^\lambda = \mathbb{F} S_n \cdot e_t \subseteq (S^\lambda)^\perp$ , also  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = S^\lambda$ , und somit  $D^\lambda = S^\lambda / (S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp) = S^\lambda / S^\lambda = 0$ .

„ $\Leftarrow$ “

Sei jetzt  $\lambda = (1^{a_1} 2^{a_2} \dots)$   $p$ -regulär, d.h.  $0 \leq a_j \leq p-1$  für jedes  $j \in \mathbb{N}$ . Sei  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau und  $\tilde{t}$  wie in Proposition 11.14 b). Dank  $p$ -Regularität ist  $\langle e_t, e_{\tilde{t}} \rangle = \prod_{j \in \mathbb{N}} (a_j!)^j \neq 0$ . Daher gilt  $e_t \notin (S^\lambda)^\perp$ , also  $S^\lambda = FS_n \cdot e_t \not\subseteq (S^\lambda)^\perp$ , und somit  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp \subsetneq S^\lambda$ . Folglich ist  $D^\lambda = S^\lambda / (S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp) \neq 0$ .  $\square$

Es bleibt noch eine Frage übrig: Könnte  $D^\lambda \cong D^\mu$  sein für  $\lambda, \mu \vdash n$  mit  $\lambda \neq \mu$ ?

**Satz 11.16.** Seien  $\lambda, \mu \vdash n$  beide  $p$ -regulär. Falls  $D^\lambda \cong D^\mu$ , dann folgt  $\lambda = \mu$ .

Mit obigem Satz folgt:

**Folgerung 11.17.** Sei  $\mathbb{F}$  Körper mit  $\text{char} \mathbb{F} = p > 0$ . Dann ist  $\{D^\lambda \mid \lambda \text{ } p\text{-regulär}\}$  ein vollständiges Vertretersystem nicht isomorpher einfacher  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln.

**Beweis.** (von Folgerung 11.17) Nach Satz 11.16 sind die Moduln in  $\{D^\lambda \mid \lambda \text{ } p\text{-regulär}\}$  paarweise nicht isomorph. Nach Satz 11.7 ist  $D^\lambda$  einfach. Nach Folgerung 2.21 sind die einfachen  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln durch die  $p$ -regulären Partitionen von  $n$  parameterisiert, und damit ist das Vertretersystem vollständig.  $\square$

Verbleibende Aufgabe: Satz 11.16 zu beweisen. Dazu zeigen wir zuerst die folgende technische Aussage:

**Proposition 11.18.** Seien  $\lambda, \mu \vdash n$  zwei Partitionen mit  $\lambda = (1^{a_1} 2^{a_2} \dots)$   $p$ -regulär und  $\text{char} \mathbb{F} = p$ . Zudem sei  $U \leq M^\mu$  ein Untermodul und  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}(S^\lambda, M^\mu/U)$ . Dann gilt:

- a) Ist  $\varphi \neq 0$ , so ist  $\lambda \triangleright \mu$  gemäß Definition 8.1.
- b) Ist  $\lambda = \mu$ , so existiert ein  $\alpha \in \mathbb{F}$  s.d. für jedes  $s \in S^\lambda$  gilt  $\varphi(s) = \alpha s + U$ .

**Beweis.** Sei  $t$  ein  $\lambda$ -Tableau. Wir erhalten ein neues Tableau  $\tilde{t}$  durch Rückwärtslesen der Zeilen von  $t$ .

- i. Es ist dann  $e_{\tilde{t}} \in M^\lambda$  und somit  $\kappa_t \cdot e_{\tilde{t}} \in \kappa_t \cdot M^\lambda \stackrel{\text{Prop. 8.7b)}}{=} \mathbb{F} \cdot e_t$ , d.h. es gibt ein  $\beta \in \mathbb{F}$  s.d.  $\kappa_t \cdot e_{\tilde{t}} = \beta \cdot e_t$ . Wir zeigen  $\beta \neq 0$ :

$$\beta \stackrel{\text{Def. 11.3}}{=} \langle \beta e_t, \{t\} \rangle = \langle \kappa_t e_{\tilde{t}}, \{t\} \rangle \stackrel{\text{Bem. 11.4}}{=} \langle e_{\tilde{t}}, \kappa_t \{t\} \rangle = \langle e_{\tilde{t}}, e_t \rangle \stackrel{\text{Prop. 11.14}}{=} \prod_{j \in \mathbb{N}} (a_j!)^j \stackrel{\lambda \text{ } p\text{-reg.}}{\neq} 0.$$

- ii. Wir beweisen a): Sei  $0 \neq \varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}(S^\lambda, M^\mu/U)$ . Es ist  $\varphi(e_t) \neq 0$ , denn sonst wäre  $\varphi = 0$  also ein Widerspruch. Somit gilt

$$0 \neq \beta \varphi(e_t) = \varphi(\beta e_t) = \varphi(\kappa_t e_{\tilde{t}}) = \kappa_t \varphi(e_{\tilde{t}}) = \underbrace{\kappa_t(\text{Element aus } M^\mu)}_{\neq 0} + U$$

also  $\kappa_t M^\mu \neq 0$  und daher nach Proposition 8.7 a)  $\lambda \triangleright \mu$ .

- iii. Wir beweisen b): Sei  $\lambda = \mu$ . Wie oben gilt

$$\beta \varphi(e_t) = \kappa_t(\text{Element aus } M^\mu) = (\text{Skalares Vielfachen von } e_t) + U$$



also existiert ein geeignetes  $\alpha \in \mathbb{F}$  s.d.  $\varphi(e_t) = \alpha e_t + U$ . Mit  $S^\lambda = \mathbb{F}\text{Span}\{e_t\}$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 11.19. (Beweis von Satz 11.16)** Nach Konstruktion ist  $S^\mu \leq M^\mu$ , also gilt  $D^\mu = S^\mu / (S^\mu \cap (S^\mu)^\perp) \leq M^\mu / (S^\mu \cap (S^\mu)^\perp)$ . Sei nun  $D^\lambda \cong D^\mu$  über einem  $\varphi: D^\lambda \xrightarrow{\sim} D^\mu$ . Damit erhalten wir ein  $\tilde{\varphi}: S^\lambda \twoheadrightarrow D^\lambda \xrightarrow{\varphi} D^\mu \hookrightarrow M^\mu / (S^\mu \cap (S^\mu)^\perp)$  wobei  $\tilde{\varphi} \neq 0$ . Mit Proposition 11.18 a) gilt dann  $\lambda \geq \mu$ . Aus Symmetrie-Gründen gilt auch  $\mu \geq \lambda$ , und damit  $\lambda = \mu$ .  $\square$



# KAPITEL 12

## DUALE MODULN

Unser jetziges Ziel besteht darin, den Specht-Modul  $S^\lambda$  im Fall von  $S^\lambda$  nicht einfach besser zu verstehen. Dazu nutzen wir wieder Werkzeuge aus der linearen Algebra, dieses Mal die dualen Räume.

Im ganzen Kapitel sei  $\mathbb{F}$  ein Körper.

**Bemerkung 12.1.** Sei  $M$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{F}$ -Vektorraum mit  $\dim M =: n \in \mathbb{N}$  und  $N \leq M$  ein Unterraum.

- i. Wir nennen  $M^* := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(M, \mathbb{F})$  den dualen Raum von  $M$ . Wir wählen eine Basis  $\{e_1, \dots, e_k\}$  von  $V$  und erweitern dies zur Basis  $B := \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$  von  $M$ . Sei  $B^* := \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \subseteq M^*$  die duale Basis von  $M^*$  definiert durch  $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ .
- ii. Zu  $V$  definieren wir den Annulator  $V^\circ := \{f \in M^* \mid \forall v \in V: f(v) = 0\}$ . Es ist dann  $V^\circ \leq M^*$  mit Basis  $\{\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n\}$ . Insbesondere gilt  $\dim M = \dim V + \dim V^\circ$ .
- iii. Sei  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform auf  $M$ . Wir wissen bereits  $V^\perp := \{m \in M \mid \forall v \in V: \langle m, v \rangle = 0\} \leq M$  ist ein Unterraum. Außerdem gilt
  - $V \subseteq (V^\perp)^\perp$ .
  - Ist  $U \leq V$ , dann  $V^\perp \leq U^\perp$ .
  - Ist  $U, V \leq M$ , dann  $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$ .
- iv. Mittels  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  bekommen wir einen neuen Vektorraumisomorphismus zwischen  $M$  und  $M^*$ , nämlich

$$\phi: M \rightarrow M^*, m \mapsto \langle m, \bullet \rangle =: \psi_m.$$

Wegen Linearität von  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  im 2. Argument ist jedes  $\psi_m \in M^*$ ; Linearität im 1. Argument liefert Linearität von  $\phi$ . Zudem ist  $\ker \phi = M^\perp = 0$ . Also ist  $\phi$  wirklich ein Vektorraumisomorphismus. Außerdem kann man durch Nachrechnen zeigen, dass  $\phi(V^\perp) = V^\circ$  gilt.

- v. Nach iv. gilt somit  $\dim V^\circ = \dim \phi(V^\perp) = \dim V^\perp$ , also

$$\dim(V^\perp)^\perp = \dim M - \dim V^\perp = \dim M - \dim V^\circ = \dim M - (\dim M - \dim V) = \dim V$$

und daher  $V = (V^\perp)^\perp$ .

Mit diesen Überlegungen erhalten wir folgende nützliche Aussage:

**Proposition 12.2.** Wir nutzen weiterhin die Notationen aus Bemerkung 12.1. Für Unterräume  $U \leq V \leq M$ , also  $M^\perp = 0 \leq V^\perp \leq U^\perp \leq M$ , gilt  $V/U \cong (U^\perp/V^\perp)^*$ , insbesondere  $V \cong (M/V^\perp)^*$ .

**Beweis.** Wir definieren

$$\phi: V \rightarrow (U^\perp / V^\perp)^*, v \mapsto \psi_v$$

mit

$$\psi_v: (U^\perp / V^\perp)^* \rightarrow K, x + V^\perp \mapsto \langle v, x \rangle$$

und zeigen dass  $\phi$  ein wohldefinierter surjektiver Vektorraumhomomorphismus ist mit  $\ker \phi = U$ .

- i. Linearität von  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  im 2. Argument impliziert jedes  $\psi_v \in (U^\perp / V^\perp)^*$ ; Linearität im 1. Argument liefert Linearität von  $\phi$ . Wohldefiniertheit gilt auch, da  $x - x' \in V^\perp$  für Repräsentanten  $x, x'$  mit  $x + V^\perp = x' + V^\perp$ , und zusammen mit Linearität von  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  folgt, dass das Bild von  $\psi_v$  unabhängig von Wahl des Repräsentanten.
- ii. Wir rechnen  $\ker \phi$  aus:

$$\ker \phi = \{v \in V \mid \psi_v = 0\} = \{v \in V \mid \forall x \in U^\perp: \langle v, x \rangle = 0\} = \{v \in V \mid v \in (U^\perp)^\perp = U\} = U.$$

Vergleich der Dimensionen

$$\dim(U^\perp / V^\perp)^* = \dim(U^\perp / V^\perp) = \dim U^\perp - \dim V^\perp = \dim V - \dim U = \dim(V/U)$$

liefert die Behauptung.  $\square$

Bisher ist es nur lineare Algebra, aber wir wollen doch mehr — eine Links- $\mathbb{F}G$ -Modulstruktur auf  $M^*$ . Für einen Links- $\mathbb{F}G$ -Modul  $M$  ist der duale Raum  $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}G M, \mathbb{F})$  automatisch ein Rechts- $\mathbb{F}G$ -Modul mit  $M^* \times \mathbb{F}G \rightarrow M^*, (\psi, a) \mapsto \psi(a \cdot (-))$ . Um eine Links- $\mathbb{F}G$ -Modulstruktur auf  $M^*$  zu definieren, nutzen wir die Tatsache, dass die Rechts- $G$ -Menge  $M^*$  durch  $G^{\text{op}} \times M^* \rightarrow M^*, g \star \psi := \psi(g \cdot (-))$  immer eine Links- $G^{\text{op}}$ -Menge wird, wobei  $G^{\text{op}}$  die entgegengesetzte Gruppe von  $G$  bezeichnet. Zusammen mit dem Anti-Isomorphismus  $i: G^{\text{op}} \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$  bekommen wir wieder eine Links- $G$ -Mengestruktur auf  $M^*$  durch Komposition, also

$$\begin{array}{ccc} G \times M^* & \xrightarrow{\quad \quad} & M^* \\ i \times \text{id}_{M^*} \downarrow & & \uparrow \text{id}_{M^*} \\ G^{\text{op}} \times M^* & \xrightarrow{\quad \star \quad} & M^*. \end{array}$$

Dies halten wir nochmal fest durch eine Definition:

**Definition 12.3.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper,  $G$  eine endliche Gruppe und  $M$  ein  $\mathbb{F}G$ -Modul. Mit der Abbildung

$$G \times M^* \rightarrow M^*, (g, \psi) \mapsto g \cdot \psi := \psi(g^{-1}(-))$$

bekommt  $M^*$  eine  $\mathbb{F}G$ -Modulstruktur, und man nennt es den **dualen Modul**.

Man kann auch durch elementares Nachrechnen zeigen, dass  $M^*$  tatsächlich ein  $\mathbb{F}G$ -Modul ist, z.B., für  $g, h \in G$  und  $\psi \in M^*$  gilt

$$(gh)\psi = \psi((gh)^{-1}(-)) = \psi(h^{-1}g^{-1}(-)) = \psi(h^{-1}(g^{-1}(-))) = (h\psi)(g^{-1}(-)) = g(h\psi).$$

**Bemerkung 12.4. (Einige Eigenschaften des dualn Moduls)**

- a) Sei  $\mathfrak{X}$  eine Matrix-Darstellung zu  $M$  bzgl. Basis  $B$  und  $\mathfrak{X}^*$  Matrix-Darstellung zu  $M^*$  bzgl. dualer Basis  $B^*$ . Für jedes  $g \in G$  gilt dann  $\mathfrak{X}^*(g) = \mathfrak{X}(g)^T$ .
- b) Für einen Untermodul  $V \leq M$  gilt  $V^\circ \leq M^*$ , also **ist der Annulator ein Untermodul**, denn:  
Sei  $f \in V^\circ$ ,  $g \in G$  und  $v \in V$ . Dann ist  $(gf)(v) = f(g^{-1}v) \stackrel{g^{-1}v \in V}{=} 0$ , also  $gf \in V^\circ$ .
- c) Es gilt  $(U \oplus V)^* \cong U^* \oplus V^*$  mittels  $f \mapsto (f|_U, f|_V)$ .
- d) Es gilt  $(M^*)^* \cong M$  als  $\mathbb{F}G$ -Moduln.
- e) Es gilt folgende Äquivalenzen:

$$\begin{array}{ll} M \text{ einfach} & \Leftrightarrow M^* \text{ einfach.} \\ M \text{ halbeinfach} & \Leftrightarrow M^* \text{ halbeinfach.} \end{array}$$

Die verbleibenden Beweise der Aussagen überspringen wir hier.

Mit Definition 12.3 versuchen wir Proposition 12.2 zu verallgemeinern:

**Proposition 12.5.** Sei  $M$  ein  $\mathbb{F}G$ -Modul. Sei  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  eine symmetrische, nicht-ausgeartete,  $G$ -invariante Bilinearform auf  $M$ . Seien  $U \leq V \leq M$  Untermoduln. Dann sind  $V^\perp \leq U^\perp$  Untermoduln von  $M$  mit  $V/U \cong (U^\perp/V^\perp)^*$  als  $\mathbb{F}G$ -Moduln.

**Beweis.** Es reicht zu zeigen, dass die Abbildung  $\phi: V \rightarrow (U^\perp/V^\perp)^*$ ,  $v \mapsto \psi_v = \langle v, \bullet \rangle$  aus Beweis von Proposition 12.2 ein Modulhomomorphismus ist. Für beliebige  $v \in V$ ,  $g \in G$  und  $[x] = x + V^\perp \in U^\perp/V^\perp$  gilt

$$\phi(gv)([x]) = \psi_{gv}([x]) = \langle gv, x \rangle \stackrel{G\text{-inv.}}{=} \langle v, g^{-1}x \rangle = \psi_v(g^{-1}[x]) = (g\psi_v)([x]) = (g\phi(v))([x])$$

also  $\phi(gv) = g\phi(v)$ . □

Für unser Interesse ist natürlich  $G = S_n$ . Es muss aber betont werden, dass ein  $\mathbb{F}S_n$ -Modul  $M$  im Allgemeinen nicht isomorph zu seinem dualen Modul  $M^*$  ist. Jedoch gilt folgende überraschende Aussage:

**Satz 12.6.** Sei  $\lambda \vdash n$  eine Partition. Dann ist  $(D^\lambda)^* \cong D^\lambda$  als  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln, d.h.  **$D^\lambda$  ist selbstdual**.

**Beweis.** Wir schreiben  $V := S^\lambda$ , also  $D^\lambda = S^\lambda / (S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp) = V / (V \cap V^\perp)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} D^\lambda &= V / (V \cap V^\perp) \\ (2. \text{ Isomorphiesatz}) &\cong (V + V^\perp) / V^\perp \\ (\text{Proposition 12.5}) &\cong ((V^\perp)^\perp / (V + V^\perp)^\perp)^* \\ (\text{Bemerkung 12.1}) &\cong (V / (V \cap V^\perp))^* \\ &= (D^\lambda)^* \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Noch eine allgemeine Aussage für die Untermoduln des dualen Moduls:

**Proposition 12.7.** Sei  $V \leq M$  ein Untermodul. Dann gilt  $(M/V)^* \cong V^\circ$  als Moduln mit  $M^*/(M/V)^* \cong V^*$ , also

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{(\quad)^*} & M^* \\
 M/V \downarrow & \swarrow (\quad)^* & \downarrow V^* \\
 V & & V^\circ \cong (M/V)^* \\
 V \downarrow & \swarrow (\quad)^* & \downarrow V^\circ \cong (M/V)^* \\
 \{0\} & \xrightarrow{(\quad)^*} & \{0\}.
 \end{array}$$

**Beweis.**

- a) Wir zeigen  $V^\circ \cong (M/V)^*$ , indem wir nachrechnen, dass  $\phi: V^\circ \rightarrow (M/V)^*, f \mapsto \bar{f}$  mit  $\bar{f}: M/V \rightarrow F, m+V \mapsto f(m)$  ein wohldefinierter Modulisomorphismus ist. Wohldefiniertheit folgt daraus, dass jedes  $f \in V^\circ$  per Definition  $V$  annulliert. Rest ist Nachrechnen.
- b) Wir zeigen  $M^*/V^\circ \cong V^*$ , indem wir allgemeinen Homomorphiesatz auf die Abbildung  $\phi: M^* \rightarrow V^*, f \mapsto f|_V$  anwenden.  $\phi$  ist offenbar linear und surjektiv. Zudem gilt  $\ker \phi = V^\circ$ .  $\square$

Nun betrachten wir Beispiele dazu, dass nicht jeder Modul selbstdual ist.

**Beispiel 12.8.**

- a) Sei  $p|n$ . Nach Beispiel 4.15 wissen wir  $D^{(n)} \leq S^{(n-1,1)}$  mit  $S^{(n-1,1)}/D^{(n)}$  einfach. Aus  $D^{(n-1,1)} = S^{(n-1,1)}/(\text{eind.max.UM})$  folgt, dass  $D^{(n)}$  der eindeutige maximale Untermodul von  $S^{(n-1,1)}$  ist, also  $D^{(n)} = S^{(n-1,1)} \cap S^{(n-1,1)\perp}$ . Somit erhalten wir eine eindeutige Kompositionsreihe von  $S^{(n-1,1)}$

$$0 \subseteq \overset{D^{(n)}}{D^{(n)}} \subseteq \overset{D^{(n-1,1)}}{S^{(n-1,1)}}$$

und somit ist  $S^{(n-1,1)}$  uniserial, d.h. Sockel- und Radikalreihe von  $S^{(n-1,1)}$  stimmen überein, also

$$S^{(n-1,1)} = \begin{matrix} D^{(n)} \\ D^{(n-1,1)} \end{matrix}.$$

Nach Proposition 12.7 gilt aber

$$S^{(n-1,1)*} = \begin{matrix} D^{(n-1,1)} \\ D^{(n)} \end{matrix}$$

da

$$\begin{array}{ccc}
 S^{(n-1,1)} & & S^{(n-1,1)*} \\
 D^{(n-1,1)} \downarrow & & \downarrow D^{(n)*} \cong D^{(n)} \\
 D^{(n)} & & D^{(n-1,1)*} \cong D^{(n-1,1)} \\
 D^{(n)} \downarrow & & \downarrow D^{(n-1,1)*} \\
 \{0\} & & \{0\}
 \end{array}$$

und d.h.  $S^{(n-1, 1)}$  ist nicht selbstdual.

b) Sei  $n = 4$ ,  $\text{char}\mathbb{F} = 3$  und  $\lambda = (2, 2)$ . Wir behaupten

$$S^{(2, 2)} = \frac{D^{(2, 2)}}{S^{(2, 2)} \cap S^{(2, 2)\perp}}$$

mit  $\dim D^{(2, 2)} = \dim S^{(2, 2)} \cap S^{(2, 2)\perp} = 1$ .

- Es ist  $\dim S^{(2, 2)} = 2$ , da es nur zwei Standard- $\lambda$ -Tableaux gibt. Beispiel 11.11 liefert  $\dim D^{(2, 2)} = 1$ , und somit ist  $\dim S^{(2, 2)} \cap S^{(2, 2)\perp} = 1$ , da per Definition  $D^{(2, 2)} = S^{(2, 2)} / (S^{(2, 2)} \cap S^{(2, 2)\perp})$ .
- Insbesondere ist  $S^{(2, 2)} \cap S^{(2, 2)\perp}$  ein einfacher  $\mathbb{F}S_4$ -Modul, also existiert nach Folgerung 11.17 eine 3-reguläre Partition  $\mu \vdash 4$ , s.d.  $S^{(2, 2)} \cap S^{(2, 2)\perp} \cong D^\mu$  gilt, d.h.  $\mu \in \{(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1)\}$ . Um  $\mu$  zu finden, versuchen wir zuerst  $S^{(2, 2)} \cap S^{(2, 2)\perp}$  besser zu verstehen.
- Wir beginnen mit der Überlegung, welche 1-dimensionale Untermoduln  $S^{(2, 2)}$  hat. Sei  $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$  mit  $\mathbb{F}\text{Span}\{v\} =: V$  einem Untermodul von  $S^{(2, 2)}$ . D.h., für jedes  $\sigma \in S_4$  ist  $\sigma v \in V$ , also ist  $v$  ein Eigenvektor von  $\rho(\sigma)$  wobei  $\rho: S_4 \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F})$  die korrespondierende Darstellung zu  $V$ . Also ist  $v$  ein simultaner Eigenvektor für jedes  $\rho(\sigma)$  mit  $\sigma \in S_4$  beliebig.
- In der Übung werden wir feststellen, dass es einen eindeutigen 1-dimensionalen Untermodul von  $S^{(2, 2)}$  gibt, welcher isomorph zu  $D^{(4)}$  ist.

Unser Ziel ist, duale Specht-Moduln zu verstehen.

### Notation 12.9.

- a) Sei  $M$  ein  $\mathbb{F}S_n$ -Modul. Wir schreiben  $M_{\mathbb{F}}$  für  $M$ , um zu betonen, über welchem Körper die gemachte Aussage gilt.
- b) Sei  $\lambda \vdash n$  und  $v \in M_{\mathbb{Q}}^\lambda$  mit  $v = \sum_{\{s\}} \lambda_s \{s\}$  mit  $\lambda_s \in \mathbb{Z}$ . Wir schreiben  $\bar{v} := \sum_{\{s\}} \bar{\lambda}_s \{s\}$  mit  $\bar{\lambda}_s := \lambda_s \bmod p$  für eine Primzahl  $p$ .

**Bemerkung 12.10.** Sei  $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_k) \vdash n$  eine Partition.

a) Nach Bemerkung 12.1 gilt  $\dim M_{\mathbb{F}}^\lambda = \dim S_{\mathbb{F}}^\lambda + \dim (S_{\mathbb{F}}^\lambda)^\perp$ , also

$$\dim (S_{\mathbb{F}}^\lambda)^\perp = \underbrace{\frac{\dim M_{\mathbb{F}}^\lambda}{n!}}_{\substack{\prod_{i=1}^k \lambda_i! \\ \text{unabhängig von } \mathbb{F}}} - \underbrace{\dim S_{\mathbb{F}}^\lambda}_{\substack{\text{Bestimmbar durch} \\ \text{Hakenzahlformel} \\ \text{unabhängig von } \mathbb{F}}}$$

also ist  $\dim (S_{\mathbb{F}}^\lambda)^\perp$  nur abhängig von  $\lambda$  (nicht von  $\mathbb{F}$  oder  $\text{char}\mathbb{F}$ ).

b) Es ist  $S^\lambda + (S^\lambda)^\perp \leq M^\lambda$  und es gilt Gleichheit wenn  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = \{0\}$ . Wir behaupten, im Fall von  $\text{char}\mathbb{F} = 0$  gilt  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = \{0\}$ .

Beweis dazu: In dem Fall  $\text{char}\mathbb{F} = 0$  ist  $S^\lambda$  einfach, also gilt  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = S^\lambda$  oder  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$ . Gegenannahme:  $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = S^\lambda$ . Dann gilt  $S^\lambda \leq (S^\lambda)^\perp \leq M^\lambda$ , also insb.  $\langle S^\lambda, S^\lambda \rangle = 0$ , aber für jedes  $\lambda$ -Tableau  $t$  ist  $\langle e_t, e_t \rangle = \sum_{\sigma \in C_t} 1 > 0$ , also Widerspruch. Somit gilt die Behauptung.

**Definition 12.11.** Sei  $M$  ein  $\mathbb{F}S_n$ -Modul. Wir schreiben  $M^{\text{sgn}}$  für den  $\mathbb{F}S_n$ -Modul mit zugrundeliegenden Vektorraum  $M$  und Operation

$$*: S_n \times M^{\text{sgn}} \rightarrow M^{\text{sgn}}, \sigma * m := \text{sgn}(\sigma)\sigma \cdot m.$$

Nach Aufgabe 5 vom Blatt 7 gilt

a)  $M^{\text{sgn}}$  ist ein  $\mathbb{F}S_n$ -Modul und  $(M^{\text{sgn}})^{\text{sgn}} = M$ .

b) Für einen  $\mathbb{F}S_n$ -Modul  $U$  gilt

$$U \leq M \quad \Leftrightarrow \quad U^{\text{sgn}} \leq M^{\text{sgn}}.$$

Insbesondere gilt

$$M \text{ einfach} \quad \Leftrightarrow \quad M^{\text{sgn}} \text{ einfach}$$

und zudem

$$(M/U)^{\text{sgn}} = M^{\text{sgn}}/U^{\text{sgn}}.$$

Nun sind wir in der Lage, mehr über den dualen Specht-Modul auszusagen:

**Satz 12.12.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper und  $\lambda \vdash n$ . Dann ist  $(S^\lambda)^{\text{sgn}} \cong (S^{\lambda'})^*$ .

**Beweis.** Die Behauptung folgt mit allgemeinem Homomorphiesatz angewandt auf eine geschickt definierte Abbildung, und wir gliedern den Beweis in drei Teile:

a) Sei  $\lambda = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots)$  und  $t$  das „basic“- $\lambda$ -Tableau, also

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \dots & \dots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1 + 1 & \dots & \dots & \lambda_2 \\ \hline \vdots & \dots & \ddots & \\ \hline n - \lambda_k & \dots & \lambda_k & \\ \hline \end{array}.$$

Sei zudem  $t'$  das konjugierte Tableau, d.h.  $t'$  ist ein  $\lambda'$ -Tableau und entsteht durch Vertauschen der Zeilen und Spalten von  $t$ .

Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi : M^{\lambda'} &\rightarrow (M^\lambda)^{\text{sgn}} \\ \{\pi t'\} &\mapsto \pi * e_t = \text{sgn}(\pi)\pi \cdot e_t \end{aligned}$$

und erweitern dies linear.

- i. Da  $M^{\lambda'}$  nach Definition 4.8 von jedem  $\lambda'$ -Tableau erzeugt wird, ist  $\varphi$  nach Konstruktion ein wohldefinierter Modulhomomorphismus mit  $\text{im}\varphi = (S^\lambda)^{\text{sgn}}$ . Beachte die Koeffizienten in der Definition von  $\varphi$  können wir alle in  $\mathbb{Z}$  wählen und sie können als module einer Primzahl  $p$  reduziert werden.



ii. Wir zeigen, dass  $\varphi$  wohldefiniert ist für jede Charakteristik.

Dazu sei  $\{\pi t'\} = \{\tilde{\pi} t'\}$  für  $\pi, \tilde{\pi} \in S_n$ . Mit  $\{\pi t'\} = \{\tilde{\pi} \pi^{-1} \pi t'\}$  sehen wir dann  $\tilde{\pi} \pi^{-1} \in R_{\pi t'} = C_{\pi t}$ . Mit Lemma 5.4 folgt dann  $e_{\tilde{\pi} t} = (\tilde{\pi} \pi^{-1}) e_{\pi t} = \text{sgn}(\tilde{\pi} \pi^{-1}) e_{\pi t}$ , also  $\tilde{\pi} e_t = \text{sgn}(\tilde{\pi}) e_{\tilde{\pi} t} = \text{sgn}(\pi) e_{\pi t} = \pi * e_t$ .

b) Wir zeigen  $\ker \varphi = (S^{\lambda'})^{\perp}$  für beliebige Körper.

i. Allgemeiner Homomorphiesatz liefert  $M^{\lambda'} / \ker \varphi \cong (S^{\lambda})^{\text{sgn}}$  und somit

$$\begin{aligned} \dim \ker \varphi &= \dim M^{\lambda'} - \dim (S^{\lambda})^{\text{sgn}} &= \dim M^{\lambda'} - \dim S^{\lambda} \\ & \stackrel{\text{Satz 6.3}}{=} \dim M^{\lambda'} - \dim S^{\lambda'} \\ & \stackrel{\text{Bem. 12.1}}{=} \dim (S^{\lambda'})^{\perp}. \end{aligned}$$

ii. Mit der Rechnung

$$\begin{aligned} \varphi(e_{t'}) &= \varphi(\kappa_{t'}\{t'\}) = \kappa_{t'}\varphi(\{t'\}) &= \sum_{\sigma \in C_{t'}} \text{sgn}(\sigma) \sigma * \varphi(\{t'\}) \\ & \stackrel{\text{Def.}*}{=} \sum_{\sigma \in C_{t'}} \text{sgn}(\sigma)^2 \sigma \cdot \varphi(\{t'\}) \\ &= \sum_{\sigma \in R_t} \text{sgn}(\sigma)^2 \sigma \cdot \varphi(\{t'\}) \\ &= \sum_{\sigma \in R_t} 1 \quad \sigma \quad e_t \end{aligned}$$

sehen wir

$$\langle \varphi(e_{t'}), \{t\} \rangle = \sum_{\sigma \in R_t} \langle \sigma e_t, \{t\} \rangle \stackrel{S_n\text{-inv.}}{=} \sum_{\sigma \in R_t} \langle e_t, \{\sigma^{-1}t\} \rangle = \sum_{\sigma \in R_t} \langle e_t, \{t\} \rangle = |R_t|.$$

iii. Für  $\text{char} \mathbb{F} = 0$ , also  $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{F}$ , gilt nach Teil ii.  $\langle \varphi(e_{t'}), \{t\} \rangle = |R_t| \neq 0$  und somit  $\varphi(e_{t'}) \neq 0$ , also  $\varphi(S^{\lambda'}) \neq 0$ . Deshalb ist  $S^{\lambda'} \not\subseteq \ker \varphi \leq M^{\lambda'}$ , also nach Satz 11.5  $\ker \varphi \leq (S^{\lambda'})^{\perp}$ . Mit Teil i. folgt  $\ker \varphi = (S^{\lambda'})^{\perp}$ .

iv. Im Fall  $\text{char} \mathbb{F} = p > 0$ , also  $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{F}$ , kann man zeigen, dass es eine Basis  $\{f_1, \dots, f_k\}$  von  $\ker \varphi_{\mathbb{Q}} = (S^{\lambda'}_{\mathbb{Q}})^{\perp}$  existiert mit  $f_i = \sum \lambda_{\{s\}} \{s\}$  und  $\lambda_{\{s\}} \in \mathbb{Z}$ , s.d.  $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k\}$  eine Basis von  $(S^{\lambda'}_{\mathbb{F}})^{\perp}$  ist mit  $\bar{f}_i = \sum \overline{\lambda_{\{s\}}} \{s\}$ , also  $\overline{\lambda_{\{s\}}} \in \mathbb{Z}_p$ . Der Beweis dazu lassen wir hier weg.

Da  $\varphi_{\mathbb{Q}}(f_i) = 0$ , ist also  $\varphi_{\mathbb{F}}(\bar{f}_i) = 0$ . Somit ist  $\mathbb{F}\text{Span}\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k\} \subseteq \ker \varphi_{\mathbb{F}}$ , d.h.  $(S^{\lambda'}_{\mathbb{F}})^{\perp} \subseteq \ker \varphi_{\mathbb{F}}$ . Mit Teil i. folgt daher  $\ker \varphi_{\mathbb{F}} = (S^{\lambda'}_{\mathbb{F}})^{\perp}$ .

c) Zusammengefasst gilt für beliebigen Körper  $\mathbb{F}$

$$(S^{\lambda})^{\text{sgn}} = \text{im} \varphi \cong M^{\lambda'} / \ker \varphi = M^{\lambda'} / (S^{\lambda'})^{\perp} \stackrel{\text{Prop. 12.5}}{=} (S^{\lambda'})^*.$$

□

Am Ende des Kapitels bemerken wir eine interessante Aspekte:

**Bemerkung 12.13.** Sei  $\lambda$  eine  $p$ -reguläre Partition von  $n$  und wir schreiben  $pP(n)$  für die Menge der  $p$ -regulären Partitionen von  $n$ .

Nach Definition 12.11, Satz 11.7 und Übung ist  $(D^\lambda)^{\text{sgn}}$  einfach. Daher existiert nach Folgerung 11.17 eine weitere  $p$ -reguläre Partiton  $\mu \vdash n$  s.d.  $(D^\lambda)^{\text{sgn}} \cong D^\mu$ . Dies definiert eine Abbildung

$$m: pP(n) \rightarrow pP(n), \lambda \mapsto \mu \text{ mit } (D^\lambda)^{\text{sgn}} \cong D^\mu.$$

Im Jahr 1979 hat Mullineux eine komplizierte kombinatorische Vermutung für die Eigenschaft von  $m$  gemacht und dies wird im Jahr 1997 von Klescher und Ford bewiesen.

Als Beispiel zu  $m$  betrachten wir  $n = 4$  und  $p = 3$ . Mit Folgerung 11.9 wissen wir

$$\dim D^{(4)} = 1 \quad \dim D^{(3 \ 1)} = 3 \quad \dim D^{(2 \ 2)} = 1 \quad \dim D^{(2 \ 1 \ 1)} = 3$$

bzw. mit Satz 6.3

$$\dim S^{(4)} = 1 \quad \dim S^{(3 \ 1)} = 3 \quad \dim S^{(2 \ 2)} = 2 \quad \dim S^{(2 \ 1 \ 1)} = 3 \quad \dim S^{(1 \ 1 \ 1 \ 1)} = 1.$$

Aus Definition 11.6 folgt direkt

$$D^{(4)} = S^{(4)} \text{ (der triviale Modul)} \quad D^{(3 \ 1)} = S^{(3 \ 1)} \quad D^{(2 \ 1 \ 1)} = S^{(2 \ 1 \ 1)}.$$

Es ist  $(D^{(4)})^{\text{sgn}} \neq D^{(4)}$  aber  $(D^{(4)})^{\text{sgn}} = D^{(2 \ 2)}$  der  $\text{sgn}$ -Modul.

Zudem sehen wir

$$D^{(3 \ 1)} = (D^{(3 \ 1)})^{\text{sgn}} = (S^{(3 \ 1)})^{\text{sgn}} \stackrel{\text{Satz 12.12}}{\cong} (S^{(2 \ 1 \ 1)})^* = (D^{(2 \ 1 \ 1)})^* \cong D^{(2 \ 1 \ 1)}$$

und nach 12.8 b) wissen wir bereits

$$S^{(2 \ 2)} = \frac{D^{(2 \ 2)}}{D^{(4)}}.$$

# KAPITEL 13

## YOUNG-REGEL

In diesem Kapitel wollen wir den Permutationsmodul  $M^\lambda$  besser verstehen. Als Spoiler verraten wir hier schon, dass wir eine schöne Zerlegung für  $M^\lambda$  finden werden.

**Konvention.** Sei  $\lambda \vdash n$  eine Partition.

- $t$  bezeichnet immer das Basic- $\lambda$ -Tableau, also

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \dots & \dots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1 + 1 & \dots & \dots & \lambda_2 \\ \hline \vdots & \dots & \ddots & \\ \hline n - \lambda_k & \dots & \lambda_k & . \\ \hline \end{array}$$

- In diesem Kapitel können Tableaux wiederholte Einträge haben und solche Tableaux notieren wir mit großem Buchstaben.

Ein  $\lambda$ -Tableau mit wiederholten Einträgen  $T$  definiert eine Folge  $\mu := (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $\mu_i$  der Anzahl von  $i$  in  $T$ .

Wir nennen das Tableau  $T$  ein  $\lambda$ -Tableau  $T$  vom Typ  $\mu$ , g.d.w.  $\mu$  eine Partition ist, also  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ . In dem Fall stellt sich heraus, dass  $\mu$  wieder eine Partition von  $n$  sein wird.

Ein Beispiel dazu: Das  $(4 \ 1)$ -Tableau  $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}$  ist vom Typ  $(3 \ 2)$ .

**Definition 13.1.** Seien  $\lambda, \mu \vdash n$  Partitionen und  $\mathbb{F}$  ein beliebiger Körper.

- Wir bezeichnen die Menge der  $\lambda$ -Tableaux vom Typ  $\mu$  mit  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$  und den  $\mathbb{F}$ -Vektorraum mit Basis indiziert durch Elemente aus  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$  mit  $\mathbb{F}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}] := \mathbb{F}\text{Span}\{\mathcal{T}_{\lambda\mu}\}$ .

Zudem nennen wir ein Tableau  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  **semi-standard**, g.d.w. Einträge in  $T$  schwach aufsteigend in Zeilen und stark aufsteigend in Spalten sind, und wir setzen  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^\circ := \{T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu} \mid T \text{ semi-standard}\}$ .

- Für ein  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  und ein  $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$  schreiben wir  $\mathbf{T}(i)$  als den Eintrag in  $T$ , welcher in derselben Partition steht wie  $i$  im Basic- $\lambda$ -Tableau  $t$ , d.h.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline T(1) & \dots & \dots & T(\lambda_1) \\ \hline T(\lambda_1 + 1) & \dots & \dots & T(\lambda_2) \\ \hline \vdots & \dots & \ddots & \\ \hline T(n - \lambda_k) & \dots & T(\lambda_k) & . \\ \hline \end{array}$$

Zu  $\pi \in S_n$  definieren wir das Tableau  $\pi T$  durch  $(\pi T)(i) := T(\pi^{-1}i)$ .

**Beispiel 13.2.** Wir setzen das Beispiel von vorhin fort, d.h.  $\lambda = (4 \ 1)$ ,  $\mu = (3 \ 2)$  und

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline T(1) & T(2) & T(3) & T(4) \\ \hline T(5) & & & \\ \hline \end{array}$$

also  $T(1) = T(2) = 2$ ,  $T(3) = T(4) = T(5) = 1$ .

Sei nun  $\pi = (1 \ 2 \ 3)$ . Aus

$$\pi^{-1}t = (1 \ 3 \ 2) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

folgt dann

$$\pi T = (1 \ 2 \ 3)T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline T(3) & T(1) & T(2) & T(4) \\ \hline T(5) & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}.$$

**Bemerkung 13.3. (Modulstruktur auf  $\mathbb{F}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ )** Für  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  ist  $\pi T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  für jedes  $\pi \in S_n$ . Außerdem ist  $\text{id}T = T$  und  $(\sigma\pi)T(i) = T((\sigma\pi)^{-1}i) = T(\pi^{-1}\sigma^{-1}i) = \pi T(\sigma^{-1}i) = \sigma(\pi T)(i)$  also  $(\sigma\pi)T = \sigma(\pi T)$ . Deshalb ist  $\mathbb{F}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  ein  $\mathbb{F}S_n$ -Modul.

Wir verlinken nun den neuen  $\mathbb{F}S_n$ -Modul  $\mathbb{F}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  mit dem Permutationsmodul:

**Lemma 13.4.** Seien  $\lambda, \mu \vdash n$  Partitionen und  $\mathbb{F}$  ein beliebiger Körper. Dann gilt

$$\mathbb{F}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}] \cong M^\mu$$

als Moduln.

**Beweis.** Wir definieren  $\phi: M^\mu \rightarrow \mathbb{F}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ ,  $\{s\} \mapsto T$  mit  $T$  einem  $\lambda$ -Tableau wobei  $T(i)$  der Zeilenindex von der Zeile ist, in der  $i$  in  $\{s\}$  steht. Beispielsweise ist

$$\{s\} = \frac{\overline{1 \ 3 \ 4}}{\overline{2 \ 5}} = \frac{\overline{1 \ 4 \ 3}}{\overline{2 \ 5}} \rightsquigarrow \begin{array}{l} 1 = T(1) = T(3) = T(4) \\ 2 = T(2) = T(5) \end{array}$$

und somit

$$\phi(\{s\}) = T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline T(1) & T(2) & T(3) & T(4) \\ \hline T(5) & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}.$$

- Nach Konstruktion ist  $\phi$  wohl-definiert.
- Da  $\{s\}$  von der Form  $\mu = (\mu_1 \ \mu_2 \ \dots)$  ist, hat  $T$  insgesamt  $\mu_1$  viele Einträge 1,  $\mu_2$  viele Einträge 2, usw.. Also ist tatsächlich  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$ .
- Durch  $\phi$  wird Basis von  $M^\mu$  auf Basis von  $\mathbb{F}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  abgebildet, d.h.  $\phi$  ist ein Vektorraumisomorphismus.
- Wir sollen noch zeigen, dass  $\phi$  auch  $S_n$ -linear ist, also  $\pi\phi(\{s\}) = \phi(\{\pi s\})$ . Dazu sei  $T := \phi(\{s\})$  und  $\tilde{T} := \phi(\{\pi s\})$ . Wegen  $\tilde{T}(i) = \text{Zeilenindex von } i \text{ in } \{\pi s\} = \text{Zeilenindex von } \pi^{-1}i \text{ in } \{s\} = T(\pi^{-1}i) = (\pi T)(i)$  gilt tatsächlich  $\pi\phi(\{s\}) = \tilde{T} = \pi T = \phi(\{\pi s\})$ . □

Im Rahmen der weiteren Untersuchung werden wir gewisse Begriffe, die früher für Standard-Tableaux definiert werden, auf Tableaux mit wiederholten Einträgen übertragen. Dies halten wir hier fest:

**Bemerkung 13.5.** Sei  $\lambda \vdash n$  eine Partition von  $n$ .

- a) Für ein Tableau  $T$  schreiben wir  $\{T\}$  für Zeilenäquivalenzklassen von  $T$ , also „**Zeilen-Tabloid**“ wie in Definition 4.4, sowie  $[T]$  für die Spaltenäquivalenzklassen von  $T$ , also „**Spalten-Tabloid**“ wie in Bemerkung 4.16.

$S_n$  operiert in Analogie zu Kapitel 4 auf den Zeilen-/Spalten-Tabloids.

- b) Wir definieren eine partielle Ordnung auf Spalten-Tabloids:

Zu einem Spalten-Tabloid  $[S]$  und  $i \in \mathbb{N}$  definieren wir einen Teil-Tabloid  $[S^i]$  durch löschen der Elemente  $> i$  in  $[S]$  und  $\lambda^i$  als die Form bzw. Gestalt von  $[S^i]$ . Sei  $(\lambda_S^i)_{i \in \mathbb{N}}$  die Kompositionsfolge von  $[S]$ . Analog erhalten wir die Kompositionsfolge  $(\lambda_T^i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $T$ . Dann definieren wir

$$[S] \triangleleft [T] \quad : \Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}: \lambda_S^i \trianglelefteq \lambda_T^i \text{ in der Dominanzordnung aus Def. 8.1.}$$

Beispielsweise sehen wir, für

$$[S] = \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| \left| 1 \right| \quad \text{und} \quad T = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \left| 2 \right|$$

gilt

$$\lambda_S^1 = (0 \ 1 \ 1) \trianglelefteq \lambda_T^1 = (1 \ 1 \ 0)$$

$$\lambda_S^2 = (1 \ 2 \ 1) \trianglelefteq \lambda_T^2 = (2 \ 1 \ 1)$$

$$\lambda_S^3 = (2 \ 2 \ 1) \trianglelefteq \lambda_T^3 = (2 \ 2 \ 1)$$

also  $[S] \triangleleft [T]$ .

- c) Falls  $k < l$  und  $k$  in  $T$  in einer Spalte weiter links als  $l$  steht, dann gilt  $[T] \triangleright [\tilde{T}]$  wobei  $\tilde{T}$  aus  $T$  entsteht, indem wir Einträge  $k, l$  vertauschen. Induktiv nach Anzahl möglicher Vertauschung folgt: Falls  $T$  semi-standard ist und  $S \in \{T\}$  mit  $S \neq T$ , dann gilt  $[T] \triangleright [S]$ .

**Definition 13.6.** Seien  $\lambda, \mu \vdash n$  Partitionen und  $t$  das Basic- $\lambda$ -Tableau. Dank Lemma 13.4 identifizieren wir  $\mathbb{F}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$  mit  $M^\mu$ .

- a) Zu  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  definieren wir den Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \phi_T : M^\lambda &\rightarrow M^\mu \\ \{t\} &\mapsto \sum_{S \in \{T\}} S. \end{aligned}$$

Da das Tabloid  $\{t\}$  den Modul  $M^\lambda$  erzeugt, ist  $\phi_T$  tatsächlich ein  $\mathbb{F}S_n$ -Modulhomomorphismus. Wohl-definiertheit von  $\phi_T$  wird durch die Summe über alle  $S \in \{T\}$  garantiert.

- b) Zu  $\phi_T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}(M^\lambda, M^\mu)$  schreiben wir  $\bar{\phi}_T := \phi_T|_{S^\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}(S^\lambda, M^\mu)}$  für die Einschränkung von  $\phi_T$  auf  $S^\lambda$ .

**Bemerkung 13.7.**

- a) Wir betrachten das Beispiel von vorhin nun im Bezug auf Definition 13.6, also  $\lambda = (4 \ 1)$ ,  $\mu = (3 \ 2)$  und

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array} \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \phi_T(\{t\}) = & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} + \\ & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

und wir geben noch  $\bar{\phi}_T$  auf  $e_t$  an, da  $\mathbb{F}S_n \cdot e_t = S^\lambda$ , also:

$$\phi_T(e_t) = \phi_T(\kappa_t \cdot \{t\}) = \kappa_t \phi(\{t\}) = \kappa_t \sum_{S \in \{T\}} S.$$

- b) Für  $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$  und  $\phi_T$  gilt

$$\kappa_t \cdot S = 0 \Leftrightarrow \text{Es existiert eine Spalte in } S, \text{ in der es 2 gleiche Einträge gibt}$$

denn:

„ $\Rightarrow$ “:

Sei  $\kappa_t \cdot S = 0$ , d.h.  $0 = S + \sum_{\pi \in C_t \setminus \{\text{id}\}} \text{sgn}(\pi) \pi S$ . Wegen Linearunabhängigkeit der verschiedenen Tableaux existiert somit ein  $\pi \in C_t \setminus \{\text{id}\}$ , s.d.  $\text{sgn}(\pi) = -1$  und  $S = \pi S$  gilt. Wir schreiben  $\pi$  als Produkt disjunkter Zykeln  $\pi_1, \dots, \pi_k$ .

Da  $\pi \neq \text{id}$  und  $\pi \in C_t$ , erfüllt mindestens ein  $\pi_j$  die Eigenschaft, dass  $\pi_j$  nur innerhalb einer Spalte die Einträge vertauscht und  $\pi_j S = S$ . In dieser Spalte gibt es dann mind. zwei gleiche Einträge.

„ $\Leftarrow$ “:

Sei  $S(i) = S(j)$  in derselben Spalte von  $S$  mit  $i \neq j$ . Dann ist  $(i \ j) \in C_t$  und somit  $(\text{id} - (i \ j))S = S - S = 0$ . Nach Lemma 8.6 existiert somit ein  $\xi \in \mathbb{F}S_n$  s.d.  $\kappa_t \cdot S = \xi(\text{id} - (i \ j))S = 0$  gilt.

Für  $\text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}(S^\lambda, M^\mu)$  können wir eine Basis finden:

**Satz 13.8.** Die Menge  $B := \{\bar{\phi}_T \mid T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^\circ\}$  bildet eine  $\mathbb{F}$ -Basis von  $\text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}(S^\lambda, M^\mu)$ .

Die Technik zum Beweis dieses Satzes haben wir schonmal gehabt: Die lineare Unabhängigkeit von  $B$  zeigen wir ähnlich wie man die lineare Unabhängigkeit der Standard-Polytabloids bei  $S^\lambda$  nachweist; mit dem Garnir-Element zeigt man, dass  $B$  ein Erzeugendensystem bildet. Wir werden die lineare Unabhängigkeit von  $B$  am Ende des Kapitels nachholen und lassen die Eigenschaft eines Erzeugendensystems weg.

Aus diesem Satz folgt etwas Interessantes:

**Folgerung 13.9. (Young's Rule)** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper der Charakteristik 0. Für Partitionen  $\lambda, \mu \vdash n$  nennen wir  $|T_{\lambda\mu}^\circ|$  die Koska-Zahl zu  $\lambda$  vom Typ  $\mu$ . Dann gilt

$$M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (S^\lambda)^{|T_{\lambda\mu}^\circ|}.$$

**Beweis.** Mit  $\text{char}\mathbb{F} = 0$  ist  $\mathbb{F}S_n$  halbeinfach nach Maschke, insb. ist  $M^\mu$  halbeinfach. Die Klassifikation der einfachen  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln liefert dann  $M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (S^\lambda)^{m_{\lambda\mu}}$  mit  $m_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}_0$ .

Damit gilt aber

$$\begin{aligned} |T_{\lambda\mu}^\circ| &\stackrel{\text{Satz 13.8}}{=} \dim \text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}(S^\lambda, M^\mu) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}\left(S^\lambda, \bigoplus_{\rho \vdash n} (S^\rho)^{m_{\rho\mu}}\right) \\ &= \dim \left( \bigoplus_{\rho \vdash n} \text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}(S^\lambda, S^\rho)^{m_{\rho\mu}} \right) \\ &= \sum_{\rho \vdash n} m_{\rho\mu} \dim \text{Hom}_{\mathbb{F}S_n}(S^\lambda, S^\rho) \\ &\stackrel{\text{Schur's Lemma}}{=} \sum_{\rho \vdash n} m_{\rho\mu} \delta_{\lambda, \rho} \\ &= m_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

$$\text{also } M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (S^\lambda)^{m_{\lambda\mu}} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} (S^\lambda)^{|T_{\lambda\mu}^\circ|}.$$

□

### Beispiel 13.10.

a) Sei  $\mu = (2 \ 2 \ 1) \vdash 5$ . Zu allen  $\lambda \vdash 5$  listen wir alle  $\lambda$ -Tableaux vom Typ  $\mu$  mit  $\lambda \triangleright \mu$  auf

$$\begin{aligned} \lambda = (2 \ 2 \ 1) : & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \\ \\ \lambda = (3 \ 1 \ 1) : & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \\ \\ \lambda = (3 \ 2) : & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} \\ \\ \lambda = (4 \ 1) : & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} \\ \\ \lambda = (5) : & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$M^{(2 \ 2 \ 1)} \cong S^{(5)} \oplus S^{(4 \ 1)} \oplus S^{(4 \ 1)} \oplus S^{(3 \ 2)} \oplus S^{(3 \ 2)} \oplus S^{(3 \ 1 \ 1)} \oplus S^{(2 \ 2 \ 1)}.$$

b) Außerdem gilt i.A.

$$m_{(n)\mu} = 1 \quad \text{mit} \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline \end{array}$$

$$m_{\mu\mu} = 1 \quad \text{mit} \quad T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & 1 \\ \hline 2 & \dots & 2 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline n & \dots & n \\ \hline \end{array}$$

und für jedes  $\lambda \vdash n$  gilt  $m_{\lambda(1^n)} = f^\lambda$ , d.h.

$$M^{(1^n)} \cong_{\mathbb{F}S_n} \mathbb{F}S_n \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (S^\lambda)^{f^\lambda}.$$

Nun kümmern wir uns um die lineare Unabhängigkeit in Satz 13.8. Wir zeigen diese Aussage in einem leicht allgemeineren Setting durch folgende Bemerkung:

**Bemerkung 13.11.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{F}$ -Vektorraum mit Basis  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ .

- Für  $v \in V$  sagen wir „ $b_i$  kommt in  $v$  vor“, g.d.w.  $b_i^*(v) \neq 0$ , also in der Linearkombination  $\sum_{j=1}^m \lambda_j b_j = v$  ist der Koeffizient  $\lambda_i \neq 0$ .
- Auf  $V$  sei eine Äquivalenzrelation gegeben und wir schreiben  $[v]$  für die Äquivalenzklasse von  $v \in V$ . Sei  $\trianglelefteq$  eine partielle Ordnung auf  $\{[v] \mid v \in V\}$ . Sei außerdem  $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$  und  $b_i \in B$  kommt in  $v_i$  vor, derart, dass die beiden Bedingungen

i.  $[b_i] \trianglerighteq [b]$  für jedes  $b \neq b_i$  wobei  $b$  in  $v$  vorkommt

ii.  $\{[b_i] \mid 1 \leq i \leq m\}$  ist paarweise verschieden

erfüllt sind. Dann ist  $\{v_1, \dots, v_m\}$  linear unabhängig.

Um dies zu sehen, sei o.B.d.A.  $[b_1]$  maximal unter  $\{[b_i] \mid 1 \leq i \leq m\}$ . Nach Bedingung i. kommt  $b_1$  nur in  $v_1$  vor. Falls  $\sum_{j=1}^m c_j v_j = 0$ , so folgt  $c_1 = 0$ . Induktiv folgt  $c_i = 0$  für jedes  $i$ .

Jetzt müssen wir noch schauen, wie diese Bemerkung auf unserem Setting anzuwenden ist.

**Proposition 13.12.** Die Menge  $\{\bar{\phi}_T \mid T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^\circ\}$  ist linear unabhängig.

**Beweis.**

- Sei  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^\circ = \{T_1, \dots, T_m\}$  und  $t$  wie immer das Basic- $\lambda$ -Tableau. Nach Voraussetzung sind  $T_1, \dots, T_m$  semi-standard, daher enthält  $[T_i] = \{S \mid \exists \pi \in C_T: S = \pi T_i\}$  genau ein Semi-Standard-Tableau, nämlich  $T_i$ . Somit sind  $[T_1], \dots, [T_m]$  paarweise verschieden, da  $T_1, \dots, T_m$  paarweise verschieden sind.



- b) Nach Beispiel 13.7 gilt  $\phi_{T_i}(e_t) = \kappa_t(\sum_{S \in \{T_i\}} S)$ . Da  $T_i$  alle semi-standard sind, folgt aus Bemerkung 13.5, dass für jedes  $S \in \{T_i\}$  mit  $S \neq T_i$  gilt  $[T_i] \triangleright [S]$ . Insbesondere folgt daraus  $\kappa_t[T_i] = [T_i] \triangleright [S] = \kappa_t[S]$ .
- c) Somit erfüllt die Menge  $\{\bar{\phi}_{T_1}(e_t), \dots, \bar{\phi}_{T_m}(e_t)\}$  die Voraussetzungen in Bemerkung 13.11, also ist diese Menge linear unabhängig. Sei nun  $0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{\phi}_{T_i}$ . Dann ist insb.  $0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{\phi}_{T_i}(e_t)$ . Die lineare Unabhängigkeit liefert dann  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$  also ist  $\{\bar{\phi}_{T_1}, \dots, \bar{\phi}_{T_m}\}$  linear unabhängig.  $\square$



# KAPITEL 14

## ZERLEGUNGSMATRIX VON $S_n$

Im ganzen Kapitel sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char}\mathbb{F} = p > 0$ . Aus Folgerung 11.17 wissen wir, dass  $\{D^\mu \mid \mu \vdash n \text{ } p\text{-reguläre Partition}\}$  ein vollständiges Vertretersystem nicht isomorpher einfacher  $\mathbb{F}S_n$ -Moduln sind. Wenn der Specht-Modul  $S^\lambda$  nicht einfach ist, dann kommt welche  $D^\mu$  als Kompositionsfaktoren in der Kompositionsreihe von  $S^\lambda$ . Diese Information schauen wir uns in diesem Kapitel an.

**Definition 14.1.** Zu  $n \in \mathbb{N}$  und  $p$  eine Primzahl schreiben wir  $P(n)$  als die Menge der Partitionen von  $n$  und  $pP(n)$  die Menge der  $p$ -regulären Partitionen von  $n$ . Dann definieren wir  $D_{n,p}$  die **Zerlegungsmatrix** (decomposition matrix) von  $S_n$  bzgl.  $p$  als

$$D_{n,p} := ([S^\lambda : D^\mu])_{\lambda \in P(n), \mu \in pP(n)}$$

wobei  $[S^\lambda : D^\mu]$  die Vielfachheit von  $D^\mu$  als Kompositionsfaktor von  $S^\lambda$  bezeichnet.

Die Zerlegungsmatrix ist wohldefiniert nach Satz von Jordan-Hölder.

**Bemerkung 14.2.** Im Allgemeinen ist es ein offenes schweres Problem, die Zerlegungsmatrix für beliebiges  $n, p$  auszurechnen. Man kennt heutzutage nur noch die Ergebnisse für ganz kleine Zahlen — wohl nur für  $n \leq 25$ . Somit ist es i.A. schwer, die Struktur von  $S_{\mathbb{F}}^\lambda$  zu bestimmen.

Wir wollen im Folgenden einige Beispiele betrachten und kleine Aussagen treffen.

**Beispiel 14.3.** Sei  $\text{char}\mathbb{F} = p > n$ . Nach Satz von Maschke ist  $\mathbb{F}S_n$  halbeinfach, damit sind alle Partitionen  $\lambda \vdash n$   $p$ -regulär und  $0 \neq D^\lambda = S^\lambda / (S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp)$ , insb.  $\dim D^\lambda \leq \dim S^\lambda$ .

Wegen der Halbeinfachheit können wir aus Satz von Wederburn sehen, dass

$$\dim \mathbb{F}S_n = n! = \sum_{\mathbb{F}S_n M \text{ einfach}} (\dim M)^2 = \sum_{\lambda \vdash n} (\dim D^\lambda)^2 \leq \sum_{\lambda \vdash n} (\dim S^\lambda)^2 = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$$

also muss  $\dim D^\lambda = \dim S^\lambda$  und somit  $D^\lambda = S^\lambda$  für jedes  $\lambda \vdash n$  gelten.

Folglich gilt  $D_{n,p} = I$ , also ist Zerlegungsmatrix für  $p > n$  die Einheitsmatrix.

Nach diesem nicht spannenden Beispiel schauen wir uns auch konkrete Fälle an. Dabei nutzen wir die „Computer-Algebraiker-Schreibweise“ für die Dimensionen der verschiedenen Moduln, also falls zwei Moduln nicht isomorph sind aber gleiche Dimensionen  $k$  haben, dann schreiben wir die Moduln direkt mit  $k_a$  und  $k_b$ .

**Beispiel 14.4.** Sei  $n = 3$ .

- a) Sei  $p = 2$ , also  $p = 2 \nmid 3 = n$ . Es gibt nur zwei 2-reguläre Partitionen von 3, nämlich  $(3)$  und  $(2 \ 1)$ . Dimensionen von Specht-Moduln kennen wir aus Folgerung 10.13, und Dimensionen von den  $D^\lambda$  kann man mit Folgerung 11.9 ausrechnen. Aus Dimensionsgründen erhalten wir sofort

	$D^{(3)} = 1_a \quad D^{(2 \ 1)} = 2_a$	
$1_a = S^{(3)}$	1	0
$2_a = S^{(2 \ 1)}$	0	1
$1_b = S^{(1 \ 1 \ 1)}$	1	0

also

$$D_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Sei  $p = 3$ , also  $p = 3 \mid 3 = n$ . Mit analogen Überlegungen erhalten wir

	$D^{(3)} = 1_a \quad D^{(2 \ 1)} = 1_b$	
$1_a = S^{(3)}$	1	0
$2_a = S^{(2 \ 1)}$	1	1
$1_b = S^{(1 \ 1 \ 1)}$	0	1

also

$$D_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 14.5.** Sei  $\lambda$  eine  $p$ -reguläre Partition, so dass  $S^\lambda$  genau zwei Kompositionsfaktoren hat. Dann ist  $0 \leq D := S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp \leq S^\lambda$  die einzige Kompositionsreihe, also ist  $S^\lambda$  uniserial mit

$$S^\lambda = \begin{matrix} D^\lambda \\ D \end{matrix}.$$

Das bedeutet auch, dass  $D$  einfach ist. Nach Folgerung 11.17 existiert somit eine  $p$ -reguläre Partition  $\mu \vdash n$  s.d.  $D \cong D^\mu$  ist.

Beispielsweise ist  $\lambda = (n - 1 \ 1)$  mit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  eine  $p$ -reguläre Partition für  $p \in \{2, 3\}$ . Nach Blatt 9 gilt dann

$$D^{(n-1 \ 1)} = \begin{cases} n - 1 = \dim S^{(n-1 \ 1)}, & p \nmid n \\ n - 2, & p \mid n \end{cases}$$

also auch

$$S^{(n-1 \ 1)} = \begin{cases} D^{(n-1 \ 1)}, & p \nmid n \\ D^{(n-1 \ 1)} \\ D^{(n)}, & p \mid n. \end{cases}$$

Für eine Zerlegungsmatrix  $D_{n,p} := ([S^\lambda: D^\mu])_{\lambda \in P(n), \mu \in pP(n)}$  können wir die „Untermatrix“  $([S^\lambda: D^\mu])_{\lambda \in pP(n), \mu \in pP(n)}$  betrachten, also quasi „die Einschränkung auf den Specht-Moduln der  $p$ -regulären Partitionen“, und dies ist klar eine quadratische Matrix. In Beispiel 14.4 sind beide Untermatrizen (die ersten zwei Zeilen) unteren Dreiecksmatrizen, und dies ist kein Zufall:

**Satz 14.6.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char}\mathbb{F} = p > 0$ . Seien  $\lambda, \mu \vdash n$  wobei  $\mu$   $p$ -regulär. Dann gilt

- a) Falls  $[S^\lambda: D^\mu] \neq 0$ , ist  $\mu \triangleright \lambda$  in der Dominanzordnung.
- b) Es ist  $[S^\mu, D^\mu] = 1$ .

**Beweis.** Wir „recyclen“ die Sätze von früheren Kapiteln:

- a) Sei  $D^\mu$  ein Kompositionsfaktor von  $S^\lambda \leq M^\lambda$  und  $S^\lambda$  besitze eine Kompositionsreihe

$$S^\lambda \supseteq U_1 \supseteq \cdots \supseteq U_i \supseteq^{D^\mu} U_{i+1} \supseteq \cdots \supseteq \{0\}$$

mit  $D^\mu \cong U_i/U_{i+1}$ . Dann ist  $\iota: D^\mu \hookrightarrow S^\lambda/U \hookrightarrow M^\lambda/U$  eine wohl-definierte Einbettung und die Abbildung  $\varphi: S^\mu \rightarrow D^\mu \hookrightarrow M^\lambda/U$  ist ungleich Null. Proposition 11.18

a) liefert direkt  $\mu \triangleright \lambda$ .

- b) Sei nun  $\lambda = \mu$ . Gegenannahme, es ist  $[S^\mu, D^\mu] \geq 2$ . Wir schreiben  $D := S^\mu \cap (S^\mu)^\perp$ . Nach Definition von  $D^\mu$  ist

$$S^\mu = \begin{matrix} D^\mu \\ D \end{matrix}.$$

Da  $[S^\mu, D^\mu] \geq 2$ , tritt  $D^\mu$  in der Kompositionsreihe von  $D$  vor, also existiert eine Kompositionsreihe von  $S^\mu$

$$S^\lambda \supseteq^{D^\mu} D \supseteq \cdots \supseteq \tilde{U} \supseteq^{D^\mu} U \supseteq \cdots \supseteq \{0\}$$

mit  $\tilde{U}/U \cong D^\mu$ . Damit ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi : S^\mu & \twoheadrightarrow & S^\mu/D & \xrightarrow{\sim} & \tilde{U}/U & \hookrightarrow & D/U \hookrightarrow S^\mu/U \hookrightarrow M^\mu/U \\ & & \parallel & & & & \\ & & D^\mu & & & & \end{array}$$

nicht Null. Dann wissen wir mit Proposition 11.18 b), dass es ein  $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$  existiert, s.d. für jedes  $s \in S^\mu$  gilt  $\varphi(s) = \alpha s + U \in M^\mu/U$ , und die Eigenschaft von  $\varphi$  liefert sogar  $\varphi(s) = \alpha s + U \in D/U$ . Das bedeutet aber  $0 \neq \alpha s \in D$  für jedes  $s \in S^\mu$ , also  $S^\mu \subseteq D \subseteq S^\mu$ , und somit  $S^\mu = D$ . Folglich ist  $D^\mu = S^\mu/D = 0$  und das ist ein Widerspruch zu Satz 11.15.  $\square$

**Folgerung 14.7.** Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper mit  $\text{char}\mathbb{F} = p > 0$ . Mit passender Ordnung von Zeilen und Spalten von  $D_{n,p}$  gilt

$$D_{n,p} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & & \\ * & \ddots & \\ * & * & 1 \\ * & * & * \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} p\text{-regulärer Teil} \\ p\text{-singulärer Teil.} \end{array} \right.$$

**Beweis.** Wir ordnen die Zeilen/Spalten lexikographisch „ $\geq$ “ mit großen  $p$ -regulären Partitionen oben/links, derart, dass

$$D_{n,p} = \left( \begin{array}{c|c} * & \\ \hline & * \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} * & \\ \hline & * \end{array}} \right\} \begin{array}{l} p\text{-regulärer Teil} \\ p\text{-singulärer Teil} \end{array}$$

erfüllt ist. Nach Lemma 8.3 impliziert die Dominanzordnung  $\alpha \triangleright \beta$  schon die lexikographische Ordnung  $\alpha \geq \beta$ . Zusammen mit Satz 14.6 erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Nun schauen wir uns weiterhin konkrete Beispiele an:

**Beispiel 14.8.** Sei  $n = 4$ .

- a) Sei  $p = 2$ . Es gibt nur zwei 2-reguläre Partitionen von 4, nämlich  $(4)$  und  $(3 \ 1)$ . Dimensionen von Specht-Moduln kennen wir aus Folgerung 10.13, und Dimensionen von den  $D^\lambda$  kann man mit Folgerung 11.9 ausrechnen. Aus Dimensionsgründen, Satz 14.6 sowie

$$S^{(2 \ 1 \ 1)} \stackrel{p=2}{=} (S^{(2 \ 1 \ 1)})_{\text{sgn}} \stackrel{\text{Satz 12.12}}{=} (S^{(3 \ 1)})^* \stackrel{\text{Bsp. 14.5}}{=} \begin{pmatrix} D^{(3 \ 1)} \\ D^{(4)} \end{pmatrix}^* \stackrel{\text{Prop. 12.7}}{=} \begin{pmatrix} D^{(4)} \\ D^{(3 \ 1)} \end{pmatrix}^* \stackrel{\text{Satz 12.6}}{=} D^{(3 \ 1)}$$

erhalten wir

	$D^{(4)} = 1_a \quad D^{(3 \ 1)} = 2_a$	
$1_a = S^{(4)}$	1	
$3_a = S^{(3 \ 1)}$	1	1
$2_a = S^{(2 \ 2)}$	0	1
$3_b = S^{(2 \ 1 \ 1)}$	1	1
$1_b = S^{(1^4)}$	1	0

also

$$D_{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

- b) Sei  $p = 3$ . Es gibt vier 3-reguläre Partitionen von 4, und zwar  $(4)$ ,  $(3 \ 1)$ ,  $(2 \ 2)$  und  $(2 \ 1 \ 1)$ . Dimensionen von Specht-Moduln kennen wir aus Folgerung 10.13, und Dimensionen von den  $D^\lambda$  kann man mit Folgerung 11.9 ausrechnen. Aus Dimensionsgründen, Satz 14.6 und  $S^{(1^4)} \neq S^{(4)} = D^{(4)}$  erhalten wir

	$D^{(4)} = 1_a$	$D^{(3 \ 1)} = 3_a$	$D^{(2 \ 2)} = 1_b$	$D^{(2 \ 1 \ 1)} = 3_b$
$1_a = S^{(4)}$	1			
$3_a = S^{(3 \ 1)}$	0	1		
$2_a = S^{(2 \ 2)}$	1	0	1	
$3_b = S^{(2 \ 1 \ 1)}$	0	0	0	1
$1_b = S^{(1^4)}$	0	0	1	0

also

$$D_{4,3} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 14.9.** Sei  $n = 5$  und  $p = 3$ .

- a) Es gibt fünf 3-reguläre Partitionen von 5, und zwar  $(5)$ ,  $(4 \ 1)$ ,  $(3 \ 2)$ ,  $(3 \ 1 \ 1)$  und  $(2 \ 2 \ 1)$ . Dimensionen von Specht-Moduln kennen wir aus Folgerung 10.13, und Dimensionen von den  $D^\lambda$  kann man mit Folgerung 11.9 ausrechnen. Aus Dimensionsgründen, Satz 14.6 und Teil b) & c) erhalten wir

	$D^{(5)} = 1_a$	$D^{(4 \ 1)} = 4_a$	$D^{(3 \ 2)} = 1_b$	$D^{(3 \ 1 \ 1)} = 6_a$	$D^{(2 \ 2 \ 1)} = 4_b$	
$1_a = S^{(5)}$	1					
$4_a = S^{(4 \ 1)}$	0	1				
$5_a = S^{(3 \ 2)}$	0	1	1			siehe c)
$6_a = S^{(3 \ 1 \ 1)}$	0	0	0	1		siehe c)
$5_b = S^{(2 \ 2 \ 1)}$	1	0	0	0	1	
$4_b = S^{(2 \ 1^3)}$	0	0	0	0	1	siehe b), c)
$1_b = S^{(1^5)}$	0	0	1	0	0	

also

$$D_{5,3} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

- b) Aus Blatt 10 wissen wir  $(D^{(5)})^{\text{sgn}} = \mathbb{F}_{\text{sgn}} = D^{(3 \ 2)}$ . Zudem gilt aus Dimensionsgründen  $D^{(4 \ 1)} = S^{(4 \ 1)}$  und somit  $(D^{(4 \ 1)})^{\text{sgn}} = (S^{(4 \ 1)})^{\text{sgn}} \stackrel{\text{Satz 12.12}}{=} (S^{(2 \ 1^3)})^* \stackrel{\text{Satz 12.6}}{=} S^{(2 \ 1^3)}$ , wobei die Einfachheit von  $S^{(2 \ 1^3)}$  aus  $(S^{(2 \ 1^3)})^* \cong (D^{(4 \ 1)})^{\text{sgn}}$  folgt.
- c) Nach Definition 11.6 ist

$$S^{(3 \ 2)} = \begin{matrix} D^{(3 \ 2)} \\ X \end{matrix} \quad \text{mit } X := S^{(3 \ 2)} \cap (S^{(3 \ 2)})^\perp \text{ eind. max.}$$

sowie

$$S^{(2 \ 2 \ 1)} = \begin{matrix} D^{(2 \ 2 \ 1)} \\ Y \end{matrix} \quad \text{mit } Y := S^{(2 \ 1 \ 1)} \cap (S^{(2 \ 1 \ 1)})^\perp \text{ eind. max. einfach.}$$

Wir wissen

$$(S^{(3 \ 2)})^* \stackrel{\text{Prop. 12.7}}{=} \begin{matrix} X^* \\ (D^{(3 \ 2)})^* \end{matrix} \stackrel{\text{Satz 12.6}}{=} \begin{matrix} X^* \\ D^{(3 \ 2)} \end{matrix}$$

und somit

$$D^{(2 \ 2 \ 1)}_Y = S^{(2 \ 2 \ 1)} = S^{(2 \ 2 \ 1)} \stackrel{\text{Satz 12.12}}{=} ((S^{(3 \ 2)})^*)^{\text{sgn}} = \frac{(X^*)^{\text{sgn}}}{(D^{(3 \ 2)})^{\text{sgn}}} \stackrel{\text{Satz 12.6}}{=} \frac{X^{\text{sgn}}}{D^{(5)}}$$

wobei die Einfachheit von  $X^*$  aus  $D^{(2 \ 2 \ 1)} \cong X^{\text{sgn}}$  folgt und  $(D^{(3 \ 2)})^{\text{sgn}} \cong D^{(5)}$  aus Übung. Insgesamt sehen wir  $Y \cong D^{(5)}$  und  $X \cong D^{(2 \ 2 \ 1)}$ , daher

$$S^{(2 \ 2 \ 1)} = \frac{D^{(2 \ 2 \ 1)}}{D^{(5)}} \quad \text{sowie} \quad S^{(3 \ 2)} = \frac{D^{(3 \ 2)}}{(D^{(2 \ 2 \ 1)})^{\text{sgn}}} = \frac{D^{(3 \ 2)}}{D^{(4 \ 1)}}$$

wobei  $(D^{(2 \ 2 \ 1)})^{\text{sgn}} \cong D^{(4 \ 1)}$  aus der Tatsache folgt, dass  $(D^{(2 \ 2 \ 1)})^{\text{sgn}} \neq D^{(4 \ 1)}$  und es nur zwei 4-dimensionale einfachen Moduln gibt. Mit diesem Ergebnis erhalten wir noch  $S^{(2 \ 1^3)} \stackrel{\text{b)}}{=} (D^{(4 \ 1)})^{\text{sgn}} = D^{(2 \ 2 \ 1)}$ .

Man könnte sich fragen, ob die Einträge in  $D_{n,p}$  immer 0 oder 1 wären. Die Antwort dazu ist nein:

**Beispiel 14.10.** Sei  $n = 5$  und  $p = 2$ . In dem Fall werden wir

	$D^{(5)} = 1_a$	$D^{(4 \ 1)} = 4_a$	$D^{(3 \ 2)} = 4_b$
$1_a = S^{(5)}$	1		
$4_a = S^{(4 \ 1)}$	0	1	
$5_a = S^{(3 \ 2)}$	1	0	1
$6_a = S^{(3 \ 1 \ 1)}$	2	0	1
$5_b = S^{(2 \ 2 \ 1)}$	1	0	1
$4_b = S^{(2 \ 1^3)}$	0	1	0
$1_b = S^{(1^5)}$	1	0	0

erhalten, d.h.

$$D_{5,2} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 2 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Wir geben hier nur noch eine Skizze an, wie man die Einträge bzgl.  $S^{(3 \ 1 \ 1)}$  erhält:

Es gilt eigentlich

$$S^{(3 \ 1 \ 1)} = \frac{D^{(5)}}{D^{(3 \ 2)}} = \frac{D^{(5)}}{D^{(5)}}$$

und um dies zu sehen, könnte man durch folgende Schritte durchführen:

- Man zeigt  $D^{(5)} \leq S^{(3 \ 1 \ 1)}$ .
- Man zeigt  $D^{(5)} \not\leq S^{(3 \ 1 \ 1)} / D^{(5)}$ . Somit gibt es ein  $N \leq S^{(3 \ 1 \ 1)} / D^{(5)}$  mit  $\dim N = 4$  und  $N$  einfach. Aus Dimensionsgründen folgt dann  $[S^{(3 \ 1 \ 1)} : D^{(5)}] = 2$ .
- Um  $N \cong D^{(3 \ 2)}$  zu zeigen, muss man dann fleißig rechnen...