Notiz zur komplexen Analysis

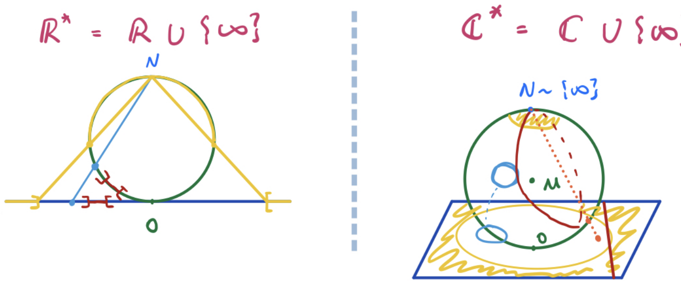
1 $\mathbb{C}^*$-Topologie

Komplexe Zahl $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Für $z \in \mathbb{C}$, es ist $z = x + y\mathrm{i}$ mit $\mathrm{Re} z := x, \mathrm{Im} z := y \in \mathbb{R}$ und $\bar{z} := x - y\mathrm{i}$.

Eigenschaften:

1. $z\bar{z} = \bar{z}z = x^2 + y^2 =: |z|^2$.
2. $z_n \xrightarrow{\mathbb{C}} z \quad \Leftrightarrow \quad d(z_n, z) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re} z_n \to \mathrm{Re} z \wedge \mathrm{Im} z_n \to \mathrm{Re} z$.
3. $f(x + y\mathrm{i}) = u + v\mathrm{i}$ stetig in $z_0 \quad \Leftrightarrow \quad u(z_n) \to u(z_0) \wedge v(z_n) \to v(z_0)$ für $z_n \to z_0$.
4. $(\mathbb{C}, |\bullet|)$ ist vollständiger normierter Raum (Banachraum).
5. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^*$ mit $z_n \to \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall R \in \mathbb{R}_+ \exists N_R \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geqslant N_R}\colon |z_n| > R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z_n} \to 0$.
6. Stereographische Projektion:



Für $S \subseteq \mathbb{R}^3$ Sphäre mit Nordpol $(0, 0, 1)$ und Südpol $(0, 0, 0)$, $(\xi, \eta, \zeta) \in S$ Punkt auf Sphäre sowie $(x, y) \in \mathbb{C}$ komplexe Zahl gilt

i. Analytischer Zusammenhang

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}, \quad \xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

ii. Geometrischer Zusammenhang

– Kreise in $S \quad \longleftrightarrow \quad$ Verallgemeinerte Kreise (Kreise+ Gerade) in $\mathbb{C}$

– Winkel werden erhalten

Also sind S und $\mathbb{C}*$ homöomorph.

Affine Abbildung $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto w = az + b$ mit $a \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{C}$

Spezialfälle:

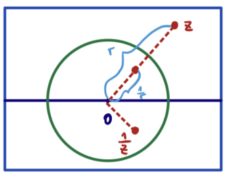
1. Parallelverschiebung $a = 1$, $w = z + b$.
2. Drehung um Winkel β um Ursprung $|a| = 1$, $b = 0$, $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} z$.
3. Stauchung/Streckung $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$, $w = az$.

Allgemeiner Fall: $w = az + b = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} z + b$ also führe obige Änderungen durch.

Eigenschaften: Kreise & Winkel erhalten, bijektiv, stetig.

Kehrungsabbildung $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}) := \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$

Dabei passieren: 1. Inversion am Kreis, 2. Spieglung am x-Achse.



Also $f(z) = \frac{1}{z}$, $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$.

Eigenschaften: Kreise & Winkel erhalten, bijektiv, stetig.

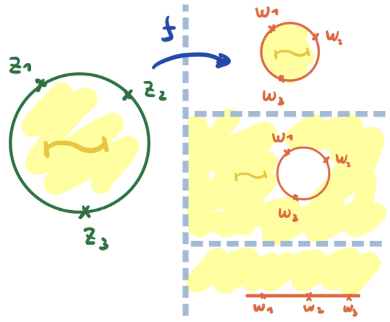
Möbiustransoformation $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \infty \mapsto \frac{a}{c}, -\frac{d}{c} \mapsto \infty$ mit $ad - bc \neq 0$

Eigenschaften:

1. $f \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ und $f^{-1} \sim \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$
2. Kreise & Winkel erhalten, bijektiv, stetig

3. Freiheitsgrad 3, somit für $\{z_1, z_2, z_3\}$ und entsprechend $\{w_1, w_2, w_3\}$ die Abbildung schon festgestellt:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\bigg/\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2}\bigg/\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$



2 Mehrwertige Abbildung & Riemannsche Fläche

Beispiel mit **Wurzelfunktion** bzgl. $n \in \mathbb{N}_{>1}$:

Für $w, z \in \mathbb{C}$: $w = \sqrt[n]{z}$ $:\Leftrightarrow$ $w^n = z$, damit $w_k = |z|^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{n}\arg z + \frac{2\pi k}{n}\right)}$ für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Modifikation des Definitionsbereichs, also „Verkleben einiger komplexen Ebene auf vernünftiger Weise", damit eine Abbildung definiert werden kann.

Details werden hier überspringen…

3 Komplexe Ableitung: Cauchy-Riemann-Gleichungen

$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x + y\mathrm{i} \mapsto u + v\mathrm{i}$ entspricht $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$, also notationsmäßig:

$$\tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = f(x + y\mathrm{i}) = f(z).$$

*Für $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt **(komplex-)differenzierbar** in $z_0 \in U$*

$:\Leftrightarrow$ *Der Grenzwert* $f'(z_0) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ *existiert.*

$\Leftrightarrow$ $f(z_0 + h) = f(z_0) + g_{z_0} h + \mathfrak{o}(|h|)$ für ein $g_{z_0} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})$.

$\Leftrightarrow$ $\tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ ist Frechét-diff.bar & es gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$u_x = v_y \quad \wedge \quad u_y = -v_x.$$

Eigenschaften unter Cauchy-Riemann-Gleichungen:

1. Jacobi-Matrix $J_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ist Drehung + Stauchung/Streckung, insb. erhält sie Kreise & Winkel.

2. Annahme: u, v sind 2-fach stetig partiell diff.bar, dann gilt $\Delta u = \Delta v = 0$, also sind u und v harmonisch.

3. Für $z = x + y\mathrm{i}$ und $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$, also $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$, definiere

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(u + v\mathrm{i})}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u + v\mathrm{i})}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Dann sehen wir: $\quad f$ komplex differenzierbar $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial z} = f'_{\mathbb{C}}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Beispiel komplex (nicht-)differenzierbarer Funktionen:

1. $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ Identitätsabbildung is differenzierbar, da $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$ und $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$.

2. $z \mapsto \bar{z}$ Konjugatsabbildung ist nicht differenzierbar, da $\frac{\partial z}{\partial z} = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$.

3. $f(z) = |z|^2$ ist nicht differenzierbar, da $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = z \neq 0$

4. $(z^n)' = nz^{n-1}$ Monome sind differenzierbar.

5. **Potenzreihe** $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^k$ haben die Eigenschaften:

   i. Konvergiert für $|z| < R := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[-k]{|a_k|}$

   ii. Konvergiert gleichmäßig für $z \in \overline{B_r}$ mit $r < R$.

   iii. Konplex differenzierbar in $|z| < R$ mit $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$.

   Beispiele dazu:

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

wobei $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$, also $\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$ sowie $\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$.

Für $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f: U \to \mathbb{C}$ sagt man

- *f ist **holomorph in $z_0 \in U$** g.d.w. f in einer kleiner Umbegung von z_0 komplex differenzierbar ist.*

- *f ist **holomorph in U**, geschrieben $f \in \mathcal{A}(U)$, g.d.w. f holomorph in jedem Punkt von U ist.*

- *f ist **ganz**, g.d.w. f ist holomorph auf ganzem $\mathbb{C}$.*

4 Zusammenhängende Mengen

Für $G \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge sagt man

- *G heißt **zusammenhängend**, g.d.w. G erlaubt keine Zerlegung von disjunkten nicht-leeren Mengen.*

- *G heißt **polygonal zusammenhängend**, g.d.w. wenn für jedes $a, b \in G$ immer einen endlichen Polygonzug $\Gamma_{ab} \subseteq G$ existiert.*

- *G heißt ein **Gebiet**, g.d.w. G offen und zusammenhängend ist.*

Topologie liefert: $\mathbb{C}$ ist lokal zusammenhängend (jeder Punkt hat Umgebungsbasis aus offenen zusammenhängenden Mengen), also sind beide Begriffe in $\mathbb{C}$ äquivalent.

Sei nun $F \subseteq (M, d)$ eine Teilmenge eines metrischen Raums. Man definiert

- *F ist **folgenkompakt**, g.d.w. jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ hat mind. einen Häufungspunkt in F.*

- *F ist **(überdeckungs)kompakt**, g.d.w. jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung erlaubt.*

Wegen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ besagt der Satz von Heine-Borel, dass für beide Begriffe für Teilmengen von $\mathbb{C}$ äquivalent sind.

Folgerung. *Für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und jedes $a, b \in G$ ist jeder endliche Polygonzug $\Gamma_{ab} \subseteq G$ kompakt.*

Satz. *Für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{A}(G)$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

i. $f' \equiv 0$; *ii.* $\mathrm{im} f = \mathrm{const}$; *iii.* $\mathrm{Re} f = \mathrm{const}$; *iv.* $|f| = \mathrm{const}$; *v.* $f = \mathrm{const}$.

Beweis. „*v.⇒Rest*" und „i. ⇒ v." sind klar.

„*ii.* ⇒ v.": Betrachte $f = u + v\mathrm{i}$ und n.V. v konstant, also $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Dann mit C-R-Gl. gilt $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ sowie $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, also Frechét-Ableitung von $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ist null, also f konstant.

Analog „*iii.* ⇒ v." bzw. „*iv.* ⇒ v.". □

5 Komplexe Kurvenintegral

Eine **Jordansche Kurve der Klasse C^1** in $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\gamma \in C^1([0, T], \mathbb{C})$, die injektiv bis auf Randpunkten ist und deren Ableitung γ' nirgends 0 ist. Mit $a := \gamma(0)$ und $b := \gamma(T)$ bezeichnen wir den Graph der jordanschen Kurve als Γ_{ab} und dies wird als gerichtet verstanden.

Für $\gamma \colon [0, T] \to \Gamma_{ab}$ Jordansche Kurve und $f \colon \Gamma_{ab} \to \mathbb{C}$ stetig definiere das **Kurvenintergral** von f bzgl. Γ_{ab} als

$$\int_{\Gamma_{ab}} f(z) \mathrm{d}z := \int_0^T (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) \mathrm{d}t.$$

Eigenschaften des Kurvenintegrals:

1. linear, additiv, gerichtet
2. zerlegbar als zwei Integrale, also reeller Teil + imaginärer Teil
3. Abschätzen des Integrals
$$\left| \int_{\Gamma_{ab}} f(z) \mathrm{d}z \right| \leqslant \max_{z \in \Gamma_{ab}} |f(z)| \cdot l(\Gamma_{ab})$$
wobei $l(\Gamma_{ab})$ die Länge der Kurve bezeichnet.
4. Newton-Leibniz falls Stammfunktion existiert, also
$$\int_{\Gamma_{ab}} f'(z) \mathrm{d}z = f(b) - f(a).$$
5. Aus 4.: Falls $a = b$, ist das Kurvenintegral bzgl. einer Ableitungsfunktion immer 0.

6 Der Integralsatz von Cauchy

Satz. ***Cauchy-Integralsatz für Dreiecke***. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\triangle \subseteq G$ ein Simplex aus 3 Punkten. Für jedes $f \in \mathcal{A}(G)$ gilt dann*

$$\oint_{\partial\triangle} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Damit kann man folgenden Satz zeigen:

Satz. *In **sternformigen Gebieten besitzt** jede **holomorphe** Funktion eine **Stammfunktion**, konkret sei $a \in G$ ein zentraler Punkt, dann gilt für jedes $z \in G$*

$$F(z) := \int_{\overline{az}} f(u)\mathrm{d}u \in \mathcal{A}(G) \qquad \textit{und} \qquad F'(z) = f(z).$$

Folgerung. *Für $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternformiges Gebiet und $f < \mathcal{A}(G)$ gilt*

1. *Für jeden geschlossenen C^1-Pfad $\Gamma \subseteq G$ gilt*

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}(z) = 0.$$

2. *Für jedes $a, b \in G$ und zwei Wege $\Gamma_{ab}, \tilde{\Gamma}_{ab} \subseteq G$ gilt*

$$\oint_{\Gamma_{ab}} f(z)\mathrm{d}(z) = \oint_{\tilde{\Gamma}_{\mathrm{ab}}} f(z)\mathrm{d}(z)$$

also ist das Wegintegral bzgl. einer holomorphen Funktion in einem sternformigen Gebiet unabhängig vom Pfad.

Für ein $w \in \mathbb{C}$ und $\Gamma \subseteq G$ ist die **Windungszahl/Umlaufzahl** definiert als

$$\nu(w, \Gamma) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{1}{z - w} \mathrm{d}z.$$

*Ein Punkt $x \in G$ heißt ein Nullpfad. Zwei Pfade $\Gamma_{ab}, \tilde{\Gamma}_{ab} \subseteq G$ heißen **homotop**, g.d.w. sie durch endlich viele elementare Deformationen ineinander übergeben.*

Eigenschaft: Für G sternförmig und Γ einen geschlossenen Pfad ist $\Gamma \subseteq G$ **homotop zum Nullpfad**, g.d.w. $\forall w \in G$: $\nu(w, \Gamma) = 0$.

Satz. ***Deformationssatz***. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{A}(G)$ und $\Gamma_{ab}, \tilde{\Gamma}_{ab} \subseteq G$ homotop. Dann sind Kurvenintegral bzgl. dieser Zwei Kurven auf f gleich, also*

$$\int_{\Gamma_{ab}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\Gamma}_{ab}} f(z)\mathrm{d}z.$$

*Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, g.d.w. jeder geschossene Pfad homotop zum Nullpfad ist.* Anschaulich hat G keine Löcher.

Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ gilt dann die Äquivalenz:

1. G ist einfach zusammenhängend.
2. $\forall w \notin G \forall \Gamma \subseteq G$ geschlossen: $\nu(w, \Gamma) = 0$.
3. $\forall \Gamma \subseteq G$ geschlossen $\forall f \in \mathcal{A}(G)$: $\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.
4. $\forall f \in \mathcal{A}(G) \setminus \{0\} \exists g \in \mathcal{A}(G)$: $f(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$.

Bemerkung. Zusammenfassung für Integralsatz von Cauchy

Für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{A}(G)$ gilt:

1. Falls f eine stetige differenzierbare Stammfunktion F besitzt, dann gilt die Formel von Newton-Leibniz. Hier genügt $f \in C(G, \mathbb{C})$.
2. $\forall \triangle \subseteq G$ 3er-Simplex: $\oint_{\partial \triangle} f(z)\mathrm{d}(z) = 0$.
3. Falls G sternförmig bzgl. $a \in G$ ist, dann hat f eine holomorphe Stammfunktion F und es gilt $F(z) = \int_{\Gamma_{az}} f(u)\mathrm{d}u$ für jedes $z \in G$. Zudem sind Kurvenintegrale von allen geschlossenen Kurven Null.
4. Falls G einfach zusammenhängend ist, dann hat f eine holomorphe Stammfunktion F und es gilt $F(z) = \int_{\Gamma_{az}} f(u)\mathrm{d}u$ für jedes $a, z \in G$. Zudem sind Kurvenintegrale von allen geschlossenen Kurven Null.

7 Die Formel von Cauchy

Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$. Sei $a \in G$ mit $\overline{U_\varepsilon(a)} \subseteq G$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Sei $\Gamma \subseteq G \setminus \{0\}$ homotop zum einfachen mathematisch positiven Umlauf von $\partial U_\varepsilon(a)$. Dann gilt*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z.$$

Beweis: $g(z) := \frac{f(z)}{z-a} \in \mathcal{A}(G \setminus \{a\})$, daher $\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \oint_\Gamma g(z)\mathrm{d}z = \oint_\Gamma \frac{f(a)}{z-a}\mathrm{d}z + \oint_\Gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\mathrm{d}z$ wobei erster Term ist $2\pi\mathrm{i}f(a)$ und zweiter Term konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0.

Satz. ***Mittelwertsformel***. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$. Sei $a \in G$ mit $\overline{U_\varepsilon(a)} \subseteq G$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

Beweis durch Einsetzen der kanonischen Parametrisierung von $\partial U_\varepsilon(a)$.

*Für $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ **analytisch im Punkt $a \in U$**, g.d.w. f hat eine eindeutige Potenzreihe-Entwicklung im Punkt a. $f: U \to \mathbb{C}$ heißt **analytisch in U**, g.d.w. f analytisch in jedem Punkt in U.*

Eigenschaften:

1. Eine analytische Funktion ist beliebig oft differenzierbar, insbesondere auch holomorph.

2. Für die Potenzreihe in a gilt $c_0 = f(a)$, $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$.

3. Für Produkt von analytischen Funktionen ist die Potenzreihe das Faltungsprodukt der beiden Potenzreihen, insb. ist die Konvergenzradius das Minimum der beiden Konvergenzradien.

Satz. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist $f \in \mathcal{A}(G)$, g.d.w. f analytisch auf G, d.h. für jedes $a \in G$ ist*

$$f(z) = c_{0,a} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,a}(z-a)^k$$

wobei

$$c_{n,a} := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial U_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

mit $\partial U_r(a) \subseteq G$.

Es gelten dazu zwei Eigenschaften:

1. *Mit R_a dem Konvergenzradius ist $R_a \geqslant \mathrm{dsit}(a, \partial G)$.*

2. *Abschätzung für Koeffizienten: Falls $\sup_{z \in G} |f(z)| \leqslant M$ ist $|c_n(a)| \leqslant M \cdot r^{-n}$ für jedes $r < R_a$.*

Folgerung aus 2:

Satz. ***Liouville***. *Jede beschränkte ganze Funktion ist eine konstante Funktion.*

Variante zur Charakterisierung von Polynomen: kommt irgendwann...

Wir entwickeln ein neues Kriterium für die Holomorphie einer Funktion, welches die Umkehrung der Satz von Cauchy für Dreiecke darstellt:

Satz. ***Morera***. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ stetig. Falls es gilt*

$$\forall \triangle \subseteq G \text{ 3-er Simplex: } \oint_{\partial \triangle} f(z) \mathrm{d}z = 0$$

dann ist $f \in \mathcal{A}(G)$.

Beweis: Für $a \in G$ beliebig und ein kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $U_\varepsilon(a)$ sternförmig, und die Bedingung an f garantiert, dass f in $U_\varepsilon(a)$ eine holomorphe Stammfunktion F besitzt. F holomorph in a, daher analytisch in a, daher beliebig oft differenzierbar in a, damit insb. f auch differenzierbar in a.

Anwendung von Morera: Spieglungsprinzip…

8 Nullstellen analytischer Funktionen

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$.

Wir schreiben $Z(f) := \{a \in G \mid f(a) = 0\}$ als die Menge der Nullstellen von f in G.

Definition. *Ein $a \in Z(f)$ heißt eine **Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$**, g.d.w. eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:*

i. $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ und $f^{(m)}(a) \neq 0$.

ii. f hat in $U_\varepsilon(a)$ die Potenzreihe-Entwicklung $f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_{k,a}(z-a)^k$ mit $c_{m,a} \neq 0$.

iii. Für ein $g \in \mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$ mit $a \notin Z(g)$ ist $f(z) = (z-a)^m g(z)$ in $U_\varepsilon(a)$.

iv. Der Grenzwert $\lim_{z \to a} (z-a)^{-m} f(z)$ existiert und ist nicht 0.

Eigenschaften von Nullstellen:

1. Multiplikativität, also falls a ist Nullstelle d.O. m bzgl. f und Nullstelle d.O. n bzgl h, dann ist a Nullstelle d.O. $m \cdot n$ bzgl. $f \cdot h$.
2. Falls $a \in Z(f)$ und $f \in \mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$ dann ist
   - entweder $f(z) \equiv 0$ in $\mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$
   - oder a ist Nullstelle endlicher Ordnung und damit ist a eine isolierte Nullstelle i.S.v. $f(z) = (z-a)^m g(z)$ in $U_\varepsilon(a)$ für ein $g \in \mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$ mit $a \notin Z(g)$.

Umgekehrt falls eine Nullstelle $a \in Z(f)$ isoliert ist, d.h. es existiert $g \in \mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$ mit $g(a) \neq 0$ und $f(z) = (z-a)^m g(z)$, dann ist wegen Stetigkeit $g \neq 0$ in $U_\varepsilon(a)$, und somit $f(z) \neq 0$ für jedes $z \in U_\varepsilon(a) \setminus \{0\}$. Damit erhalten wir

Folgerung. *Nullstellen endlicher Ordnung sind genau isolierte Nullstellen.*

Damit erhält man:

Satz. ***Identitätssatz**. Sei G ein Gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$ mit $\operatorname{acc}(Z(f)) \cap G \neq \varnothing$, also Schnitt der Häufungspunkte mit G ist nicht leer. Dann ist $f \equiv 0$.*

Beweisstrategie: Schreibe $S := \operatorname{acc}(Z(f)) \cap G \neq \varnothing$. Zeige $S \subseteq Z(f)$ und damit ist $S = Z(f)$ also S abg., und zeige dazu S ist offen. dann ist $S = G$, da G gebiet.

Folgerung. *Sei G ein Gebiet, $M \subseteq G$ sodass $\operatorname{acc}(M) \cap G \neq \varnothing$. Falls $f, g \in \mathcal{A}(G)$ die Bedingung $f|_M = g|_M$ erfüllt, dann ist $f = g$.*

Beweis mit dem Identitätssatz angewandt auf $h := f - g$.

Definition. *Seien $G, \tilde{G} \subseteq \mathbb{C}$ zwei Gebiete mit $G \subseteq \tilde{G}$. Dazu sei $f \in \mathcal{A}(G)$ und $\tilde{f} \in \mathcal{A}(\tilde{G})$. $\tilde{f}$ heißt eine **analytische Fortsetzung** von f, g.d.w. es gilt $\tilde{f}|_G = f$.*

Existenz einer analytischen Fortsetzung ist nicht unbedingt gegeben, aber im Fall von Existenz ist dies eindeutig nach dem Identitätssatz.

Beispiel: Spielglungsprinzip…

Beispiel: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert für $|z| < 1$ und kann im Punkt $z = 1$ nicht definiert werden. Aber auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ kann man $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ eindeutig fortsetzen.

Beispiel: Riemansche ζ-Funktion.

Beispiel: Fortsetzung von $\mathrm{Ln}z\ldots$

9 Maximumsprinzip

Satz. *Sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f \in \mathcal{A}(U_R(a))$. Falls f in a Maximum (oder Minimum ungleich 0) annimmt, dann ist f konstant in $U_R(a)$.*

Beweis über Mittelwertsformel und Charakterisierung konstanter holomorpher Funktion über konstanten Betrag.

Satz. ***Maximumsprinzip für beliebige Gebiete**. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Sei $f: \bar{G} \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_G \in \mathcal{A}(G)$. Dann nimmt $|f|$ globales Maximum (oder globales Minimum ungleich 0) auf ∂G.*

Beweis: $|f|$ ist stetige Funktion auf Kompakta $\bar{G}$, daher nimmt $|f|$ Maximum in $z_0 \in \bar{G}$ an. Falls $z_0 \in \partial G$, fertig. Falls $z_0 \in G$, liefert obiger Satz, dass $|f|$ auf einem $U_\varepsilon(z_0) \subseteq G$ konstant ist, damit ist $|f|$ konstant auf G, und wegen Stetigkeit auch konstant auf $\bar{G}$, also die Behauptung. □

Anwendung: Neue Abschätzung für Funktionswerte beschränkter Funktion in der Nähe von Nullstelle:

Proposition. *Sei $R, M \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f \in \mathcal{A}(U_R(0))$ mit $|f| \leqslant M$ und $f(0) = 0$. Dann gilt für jedes $z \in U_R(0)$, dass $|f(z)| \leqslant \frac{M}{R}|z|$.*

Beweis: Da $f(0) = 0$, existiert ein $g \in \mathcal{A}(U_R(0))$ s.d. $f(z) = z \cdot g(z)$. Mit Maximumsprinzip angewandt auf $g(z) = \frac{f(z)}{z} \in \mathcal{A}(U_r(0))$ für ein $r < R$ liefert die Behauptung.

10 Singularität

Definition. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$. Die Menge $\mathbb{C}\backslash G$ nennt man die Menge der **Singularitäten** von f.*

*Die Menge der isolierten Punkte vom Komplement von G, also $J_G := \mathrm{iso}(\mathbb{C}\backslash G)$, nennt man die **Menge der isolierten Singularität** von f.*

Eine isolierte Singularität $a \in J_G$ heißt

i. ***hebbar**, g.d.w. es ein $w \in \mathbb{C}$ existiert, s.d. die Funktion*

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in G \\ w, & z = a \end{cases}$$

analytisch in $G \cup \{a\}$ ist.

ii. ***Polstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$**, g.d.w. für ein $m \in \mathbb{N}$ die Funktion $(z-a)^m f(z)$ eine hebbare Singularität in a ist.*

iii. ***wesentliche Singularität**, g.d.w. Fall i. und Fall ii. nicht vortreten.*

*Eine Funktion $f \in \mathcal{A}(G)$ heißt **meromorph**, g.d.w. f keine wesentlichen Singularität in G hat.*

Bemerkung. Seien $h, g \in \mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und a eine Nullstelle d.O. m für h und n für g, d.h. $h(z) = (z-a)^m h_1(z)$ und $g(z) = (z-a)^n g_1(z)$ wobei $h_1, g_1 \in \mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$ mit $g_1(a) \neq 0 \neq h_1(a)$. Die Funktion $f := g/z$ hat dann die Gestalt

$$f(z) = (z-a)^{n-m} \frac{g_1(z)}{h_1(z)}$$

und

- falls $n \geqslant m$, besitzt f eine hebbare Singularität.
- falls $n > m$, besitzt f eine Nullstelle der Ordnung $n - m$.
- falls $n < m$, bestzt f eine Polstelle der Ordnung $m - n$.

Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k,a}(z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{k,a}(z-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,a}(z-a)^k$$

wobei die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_{k,a}(z-a)^k$ heißt **Hauptteil**, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_{k,a}(z-a)^k$ heißt **Nebenteil**. Eine Laurent-Reihe konvergiert, g.d.w. beide Teile konvergiert.

Der Nebenteil ist eine Potenzreihe und konvergiert gleichmäßig für $z \in U_R(a)$ mit Konvergenzradius $R = \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt{|c_{k,a}|}\right)^{-1}$.

Im Hauptteil kann man $w := \frac{1}{z-a}$ schreiben, dann ist $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_{k,a}(z-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k,a} w^k$, also ist der Hauptteil zu einer Potenzreihe umgewandelt, und somit konvergiert der Hauptteil in $w \in U_r(a)$ mit $r = \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt{\{c_{-k,a}\}}\right)^{-1}$, und d.h. für $z = a + \frac{1}{w}$ konvergiert der Hauptteil außerhalb $U_{1/r}(a)$.

Insgesamt erhalten wir:

- Für $R > \frac{1}{r}$ konvergiert $f(z)$ in $\frac{1}{r} < |z| < R$.
- Für $R < \frac{1}{r}$ konvergiert $f(z)$ nicht.

– Für $R = \frac{1}{r}$ trifft man keine Aussage.

Man nimmt normalerweise $r < R$ an und sagt oft, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k,a}(z-a)^k$ konvergiert im Kreisring $K_{1/r,R}$.

Eigenschaften von Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k,a}(z-a)^k$:

1. Gliedweise differenzieren ist in Ordnung, also holomorph. Nach Ableiten kommt $(z-a)^{-1}$ nicht vor. Konvergenzradius bleibt unverändert.

2. Laurent-Reihe besitzt Stammfunktion, g.d.w. $c_{-1,a} = 0$. Konvergenzradius bleibt unverändert.

3. Für einen geschlossenen Pfad $\Gamma \subseteq K_{1/r,R}$ liefert das Kurvenintegral $c_{-1,a}$, denn andere Glieder besitzen Stammfunktion.

4. Mit 3. erhält man eine Formel für $c_{k,a}$

$$c_{k,a} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma (z-a)^{-1-k} f(z) \mathrm{d}z$$

   wobei $\Gamma \subseteq K_{1/r,R}$.

5. Abschätzung für $c_{k,a}$ falls f beschränkt durch $M := \sup_{|z-a|=\rho} |f(z)|$ für $r < \rho < R$:

$$|c_{k,a}| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_\Gamma (z-a)^{-1-k} f(z) \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma |(z-a)^{-1-k} f(z)| \mathrm{d}z \leqslant M\rho^{-k}.$$

Definition. *Für eine Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k,a}(z-a)^k$ sagt man, dass der Koeffizient $c_{-1,a}$ das **Residuum** von f in a ist, also*

$$\mathrm{Res}_a(f) = \mathrm{Res}(f, a) := c_{-1,a}.$$

Satz. ***Darstellung holomorpher Funktion als Laurent-Reihe**. Sei $0 \leqslant \frac{1}{r} < R \leqslant \infty$ und $f \in \mathcal{A}(K_{1/r,R}(a))$. Dann ist f als Laurent-Reihe darstellbar.*

Bemerkung. Zusammenfassung von Darstellung von holomorphen Funktionen

1. $f \in \mathcal{A}(U_R(a)) \quad \Leftrightarrow \quad f$ analytisch auf $U_R(a)$

   $\Leftrightarrow \quad f$ hat Potenzreihe-Darstellung und gleichzeitig L-R-Darstellung

   In dem Fall besitzt f immer eine Stammfunktion.

2. $f \in \mathcal{A}(K_{1/r,R}(a)) \quad \Leftrightarrow \quad f$ hat Laurent-Reihe-Darstellung auf $K_{1/r,R}(a)$.

   In dem Fall besitzt f eine Stammfunktion, g.d.w. $c_{-1,a} = 0$.

Bemerkung. Analyse von Singularität

Sei $G = U_R(a) \backslash \{a\} = K_{0,R}(a)$ und $f \in \mathcal{A}(K_{0,R}(a))$, also $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k,a}(z-a)^{-k}$.

i. a ist hebbar, g.d.w. alle negativen Koeffizienten sind 0.

(**Riemannscher Hebbarkeitssatz**) Falls f beschränkt, dann ist a hebbar.

ii. a ist eine Polstelle d.O. m, g.d.w. $\forall k \in \mathbb{Z}_{<m}$: $c_{k,a} = 0$.
In dem Fall gilt $f(z) \xrightarrow{z\to a} \infty$.

iii. a ist wesentliche Singularität, g.d.w. Hauptteil von f unendlich ist.

11 Residuensatz & Residuenkalkül

Sei $a \in J_G$ eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{A}(G)$, d.h. $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k,a}(z-a)^k$ in $K_{0,\varepsilon}(a)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $\Gamma \subseteq K_{0,\varepsilon}(a)$ ein injektiver geschlossener Pfad. Mit der Definition von Residuum gilt

$$\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1,a} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z \qquad \Rightarrow \qquad \oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}(f,a).$$

Im Allgemeinen erhält man

Satz. ***Residuensatz***. *Sei $f \in \mathcal{A}(G)$ und $\Gamma \subseteq G$ ein geschlossener Pfad, der die isolierten SIngularitäten $\{a_1, \ldots, a_n\}$ umläuft. Dann gilt*

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f,a_j)\cdot \nu(a_j,\Gamma).$$

Bemerkung. Zur Berechnung von Residuen.

i. Falls a_j hebbar ist, gilt $\mathrm{Res}(f,a_j) = 0$.

ii. Falls a_j Polstelle d.O. m ist, gilt $(z-a_j)^m f(z) = c_{-m,a} + \cdots + (z-a_j)^{m-1}c_{-1,a} + \cdots$ und somit erhält man durch $m-1$-fache Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}(z-a_j)^m f(z)}{\mathrm{d}z^{m-1}} = (m-1)!c_{-1,a} + \frac{(m-2)!}{m-1}c_{0,a}(z-a_j) + \cdots$$

und daher mit Grenzübergang $z \to a_j$

$$\mathrm{Res}(f,a_j) = \lim_{z\to a_j} \frac{1}{(m-1)!}\cdot \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-a_j)^m f(z).$$

iii. Fals a_j wesentliche Singularität ist, trifft man keine Aussage.

Mit ii. erhält man

Lemma. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in \mathrm{iso}(\mathbb{C}\backslash G)$ eine isolierte Singularität von G. Seien $h, g \in \mathcal{A}(G)$ mit $h(a) \neq 0$ aber $g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$. Dann hat $f := h/g$ eine Polstelle a der Ordnung 1 und $\mathrm{Res}(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}$.*

Beweis: $\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a} h(z)\frac{z-a}{g(z)-g(a)} = \frac{h(a)}{g'(a)}$. $\square$

12 Das Zählen von Pol-&Nullstellen

Bemerkung. Logarithmische Ableitung.

Für ein $a\in\mathbb{C}$ und $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ gibt es zwei Szenarien:

i. Sei $f\in\mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$ s.d. a eine Nullstelle der Ordnung $m\in\mathbb{N}$ von f. Dann gilt

$$f(z)=c_{m,a}(z-a)^m+c_{m+1,a}(z-a)^{m+1}+\cdots$$

sowie

$$f'(z)=m\cdot c_{m,a}(z-a)^{m-1}+(m+1)c_{m+1,a}(z-a)^m+\cdots$$

und damit

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{c_{m,a}(z-a)^m+\cdots}{m\cdot c_{m,a}(z-a)^{m-1}+\cdots}=\frac{m}{z-a}(1+\mathcal{O}(z-a)).$$

D.h. $\frac{f'}{f}$ hat a als Polstelle d.O. 1 und somit gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},a\right)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)}=m.$$

ii. Sei $f\in\mathcal{A}(U_\varepsilon(a)\backslash\{a\})$ s.d. a eine Polstelle der Ordnung $n\in\mathbb{N}$ von f. Dann gilt

$$f(z)=c_{-n,a}(z-a)^{-n}+c_{-n+1,a}(z-a)^{-n+1}+\cdots$$

sowie

$$f'(z)=-n\cdot c_{-n,a}(z-a)^{-n-1}+(-n+1)c_{-n+1,a}(z-a)^{-n}+\cdots$$

und damit

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{c_{-n,a}(z-a)^{-n}+\cdots}{-n\cdot c_{-n,a}(z-a)^{-n-1}+\cdots}=\frac{-n}{z-a}(1+\mathcal{O}(z-a)).$$

D.h. $\frac{f'}{f}$ hat a als Polstelle d.O. 1 und somit gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f},a\right)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)}=-n.$$

Mit diesen zwei Überlegungen erhält man

Satz. *Rouche (bei Weidl)*. *Gegeben sei $G\subseteq\mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $J:=\{b_1,\dots,b_M\}\subseteq G$ und $\tilde{G}:=G\backslash J$. Sei dazu $S:=\{a_1,\dots,a_N\}\subseteq\tilde{G}$. Sei $f\in\mathcal{A}(\tilde{G})$ s.d. jedes b_k eine Polstelle d.O. m_k ist und jedes a_l eine Nullstelle d.O. n_l ist. Zudem sei $\Gamma\subseteq\tilde{G}$ eine geschlossene Kurve s.d. Γ sowohl J als auch S umläuft. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_{l=1}^{N}n_l\cdot\nu(\Gamma,a_l)-\sum_{k=1}^{M}m_k\cdot\nu(\Gamma,b_k).$$

Folgerung. *Rouche (bei Lesky)*. *Sei $G\subseteq\mathbb{C}$ ein Gebiet und $\Omega\subseteq G$ offen mit $\Gamma:=\partial\Omega$.*

Seien $g, f \in \mathcal{A}(G)$ s.d. $|g(z)| \leqslant |f(z)|$ für jedes $z \in \Gamma$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\sum_{k:a_k \in \Omega \cap Z(f)} n_l(f) = \sum_{k:a_k \in \Omega \cap Z(f+g)} n_l(f+g).$$

Beweis: Für $t \in [0,1]$ definiere $\varphi_t(z) := f(z) + t \cdot g(z)$ und damit ist

$$\sum_{k:a_k \in \Omega \cap Z(\varphi_t(z))} n_l(\varphi_t(z)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{\varphi_t'(z)}{\varphi_t(z)} \mathrm{d}z$$

eine Größe, wleche stetig von t abhängt. Aber das Integral nimmt natürliche Zahlen als Werte an, daher kann das Integral nur konstant bzgl. t sein, somit gilt die Behauptung.