Beta分布

1. Beta分布的概率密度函数

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du}$$

①

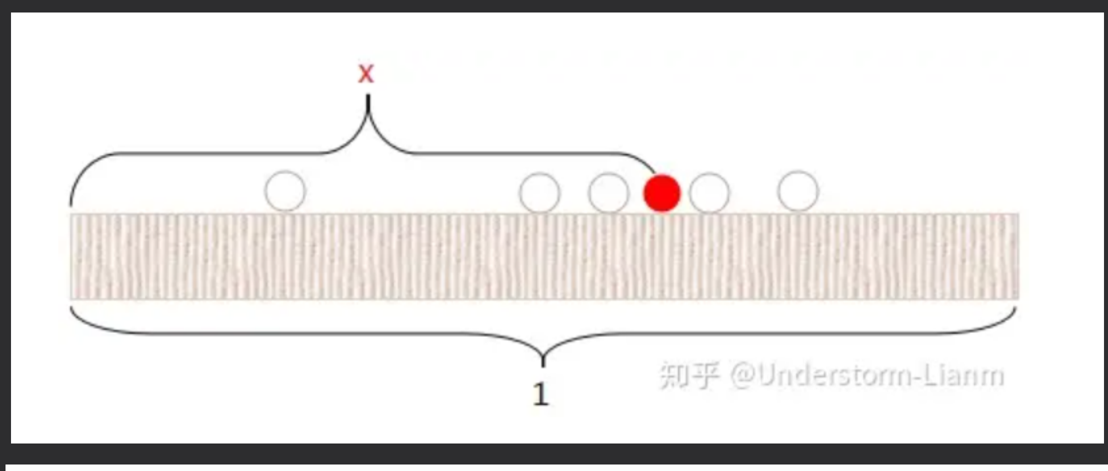
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{\beta-1}$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\cdot x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{\beta-1}$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du$$

①.



假设向长度为1的桌子上扔一个红球（如上图），它会落在0到1这个范围内，设这个长度值为 x，再向桌上扔一个白球，那么这个白球落在红球左边的概率即为 x。若一共扔了 n 次白球，其中每一次都是相互独立的，假设落在红球左边的白球数量为 k，那么随机变量 K 服从参数为 n 和 x 的二项分布，即 $K \sim Binomial(n,x)$，有

$$P(K=k|x) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \tag{1}$$

X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，即 $X \sim U[0,1]$

K 对每一个 x 都有上面的分布，对于所有可能的 x，K 的分布为

$$P(K=k) = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\mathbf{d}x = \binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\mathbf{d}x \tag{2}$$

现在，我们换一种方式来丢球：

> 先将这 $n+1$ 个球都丢出来，再选择一个球作为红球，任何一个球被选中的概率均为 $\frac{1}{n+1}$，
> 此时红球左边有 $0,1,2\ldots n$ 个球的概率均为 $\frac{1}{n+1}$，有
> $P(K=k)=\int_0^1\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\mathbf{d}x=\boxed{\binom{n}{k}}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\mathbf{d}x=\boxed{\frac{1}{n+1}}$ $\quad = \frac{k!}{(n-k)!\,k!}$
> 则
> $$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\mathbf{d}x=\frac{(n-k)!k!}{n!}\frac{1}{n+1}=\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} \tag{3}$$

$$\begin{cases} k=\alpha-1 \\ n-k=\beta-1 \\ \alpha+\beta=n+2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{(\alpha+1)!(\beta+1)!}{(\alpha+\beta+1)!}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

2.3 共轭先验分布

根据贝叶斯公式可知　　BlueBrown　Bayes theorem

$$P(\theta|x) = \frac{P(x|\theta)P(\theta)}{P(x)}$$

e.g. 投掷一个非均匀硬币. 用参数为θ的伯努利模型. θ为硬币正面的概率. x的分布为:

$$P(x|\theta) = \theta^{x}\cdot(1-\theta)^{1-x}$$ 先验

其共轭先验为Beta分布,具有两个参数α和β (超参数). α和β决定了θ.

其Beta分布形式为

$$P(\theta|\alpha,\beta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{\int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\,d\theta}$$ 共轭先验

后验概率

$$P(\theta|x) \propto P(x|\theta)\cdot P(\theta)$$
$$\propto \left(\theta^{x}(1-\theta)^{x}\right)\left(\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\right)$$
$$= \theta^{x+\alpha-1}\cdot(1-\theta)^{x+\beta-1}$$

归一化后

$$\frac{\theta^{x+\alpha-1}\cdot(1-\theta)^{x+\beta-1}}{\int_0^1 \theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{x+\beta-1}d\theta}$$
$$= \frac{\Gamma(2x+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(x+\beta)} x^{x+\alpha-1}(1-x)^{x+\beta-1}$$

2.4 从Beta分布推广到Dirichlet分布

如果 $p \sim Beta(t|\alpha,\beta)$. 则有:

$$E(p) = \int_0^1 t\cdot Beta(t|\alpha\cdot\beta)\,dt$$
$$= \int_0^1 t\cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1}\cdot(1-t)^{\beta-1}dt$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt$$

~ 类似概率分布 $Beta(t|\alpha+1,\beta)$

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot t^{\alpha}\cdot(1-t)^{\beta-1}dt = 1$$

$$\int_0^1 t^{\alpha}\cdot(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!} \cdot \frac{\alpha!}{(\alpha+\beta)!}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$ 均值(期望)