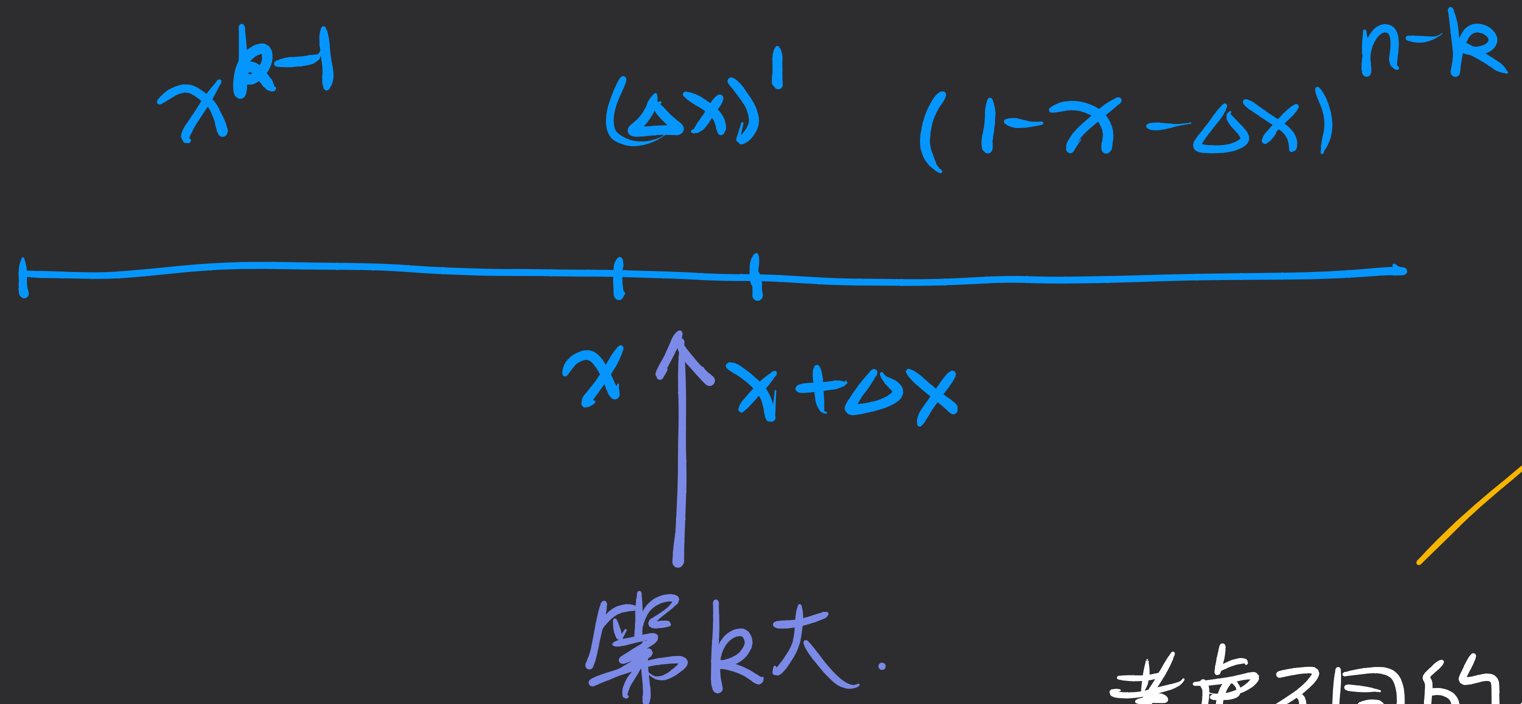
Gamma函数

[0,1] 区间分成三段 $[0,x)$, $[x, x+\Delta x]$, $(x+\Delta x, 1]$

假设n个数只有1个落在区间 $[x, x+\Delta x]$ 中，该数 x 在 $X(k)$ 中是第k大的



对于上述事件: $P(E) = x^{k-1}\cdot \Delta x \cdot (1-x-\Delta x)^{n-k}$

$= x^{k-1}\cdot(1-x)^{n-k}\cdot\Delta x + o(\Delta x)$

与事件E等价的事件有 $n\binom{n-1}{k-1}$ 个.

考虑不同的排列组合 $\left\{\right.$

- n个数中选1个数落在 $[x, x+\Delta x]$ 上有n种取法. 确定数的位置
- 余下n-1个数中有k-1个落在 $[0,x)$ 有 $\binom{n-1}{k-1}$ 个组合 确定两区间的数的选取

只要落在 $[x, x+\Delta x]$ 的数超过1个. (m个) $P(E') = x^{k-1}\cdot(1-x-\Delta x)^{n-k}\cdot(\Delta x)^m = o(\Delta x)$

$P(x \le X_{(k)} \le x+\Delta x)$

$= \underbrace{n\binom{n-1}{k-1}P(E)}_{1个} + \underbrace{o(\Delta x)}_{超过1个}$

$= n\binom{n-1}{k-1}\cdot x^{k-1}\cdot(1-x)^{n-k}\cdot\Delta x + o(\Delta x)$

$\Longrightarrow$

$X_{(k)}$ 的概率密度函数 $f(x)$ 为:

$$f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X_{(k)}\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}\cdot(1-x)^{n-k}$$

$$= n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot x^{k-1}\cdot(1-x)^{n-k}$$

Gamma 函数的基本定义.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t}\, dt \xrightarrow{t=uz} \int_0^{z\cdot\infty} (uz)^{z-1} \cdot e^{-uz} \cdot z \cdot du$$

换元: $t=uz$

换积分微元: $dt = z\,du$

换限: $[0,\infty) = [0, z\cdot\infty)$

$$= z^z \int_0^\infty u^{z-1} \cdot e^{-zu}\, du \quad ?$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{n-k}$$

(用性质②).

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n-k+1)} \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{n-k}$$

取 $\alpha = k$

$\beta = n-k+1$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

$\Downarrow$

Beta分布

Gamma 函数实际意义: 阶乘一般化. 将阶乘推广到实数域

Gamma函数性质

① 对 $z>1$. 有 $\Gamma(z) = (z-1) * \Gamma(z-1)$ 或 $\Gamma(z+1) = z * z\Gamma(z)$

证明: $\int_0^\infty \underset{f}{x^{z-1}} \cdot \underset{g'}{e^{-x}}\, dx$ $\qquad \int fg' = fg - \int gf'$

$$= \left[-x^{z-1} \cdot e^{-x}\right]_0^\infty - \left[-\int (z-1) \cdot x^{z-2} \cdot e^{-x}\, dx\right]$$

$$= 0 + (z-1) \int x^{z-2}\, e^{-x}\, dx$$

$\Gamma(z) = (z-1)\cdot\Gamma(z-1)$ 有点雏形

② 对 $n\in N^*$. $\Gamma(n)=(n-1)!$

证明 $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$

$= (n-1)\cdot(n-2)\cdot\Gamma(n-2)$

$= (n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\ \Gamma(1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 \cdot e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty$$

$= e^{-x}\Big|_\infty^0$

$\approx 1-0$

$= 1.$