Exercice 1
On note la fonction ϕ définie par :

$$\begin{aligned} \phi :\ [0\,;\,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = 2\,x^3 - x^2 + x - 1\,. \end{aligned}$$

1. Justifier précisément que la fonction ϕ est continue sur $[0\,;\,1]$.
2. Calculer $\phi(0)$ et $\phi(1)$. Donner
   — l'énoncé précis que l'on peut déduire de cette information sur l'équation $\phi(x) = 0$;
   — la justification précise de ce résultat.
3. Après avoir cité les conditions permettant d'appliquer l'algorithme de dichotomie pour résoudre numériquement $\phi(x) = 0$, donner la trace de l'algorithme en complétant le tableau suivant :

n	a_n	p_n	b_n	$\phi(a_n)$	$\phi(p_n)$	$\phi(b_n)$
1						
2	...					
$\vdots$						
10	...					

4. À la lecture de ce tableau, la suite (p_n) est–elle monotone ?
5. On suppose qu'une valeur approchée à 10^{-6} près de la solution de $\phi(x) = 0$ est $0{,}738984$. La précision $|p_n - p^*|$ s'améliore–t–elle toujours d'une itération à l'autre ?
6. Calculer le nombre d'itérations à réaliser si on veut une approximation à 10^{-6} près.

Exercice 2 (Nombre d'or)
Le nombre d'or, noté x^* est l'unique solution positive de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0\,.$$

On cherche à déterminer une valeur numérique du nombre d'or par l'algorithme de dichotomie.

1. Donner l'expression analytique du nombre d'or en résolvant l'équation du second degré.
2. Justifier précisément et complètement le fait que l'on puisse appliquer l'algorithme de dichotomie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. En particulier,
   — définir précisément la fonction utilisée ;
   — donner ses propriétés utile en justifiant précisément ;
   — citer clairement les théorèmes utilisés et justifier qu'ils s'appliquent.
3. Donner alors la trace des 5 premières itérations de l'algorithme.
4. Calculer le nombre d'itérations à réaliser pour obtenir une précision à 10^{-8} près.

Exercice 3
On note la fonction ϕ définie par :

$$\begin{aligned} \phi :\ [-1\,;\,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x - 1\,, \end{aligned}$$

et on cherche à résoudre numériquement l'équation $\phi(x) = 0$.

1. Calculer la valeur de ϕ pour tous les points entiers de l'intervalle [-1 ; 2] et en déduire un résultat **précis** et **soigneusement justifié** sur le nombre de solutions à l'équation $\phi(x) = 0$.
2. On cherche à déterminer numériquement une solution négative de cette équation en utilisant l'algorithme de dichotomie. Justifier que c'est possible et donner le nombre d'itérations à réaliser pour obtenir une approximation à 3.10^{-5} près.

3. Coder sur la grille ci-dessous la valeur de p_5.

	$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$
	.
	$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$
$\boxed{+}$	$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$
$\boxed{-}$	$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$

Exercice 4 ($*$)

$$\begin{aligned} \phi : [0\,;\,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = \frac{x^3 - 2\,x^2}{x+1} + \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

1. Calculer $\phi(0)$, $\phi(1)$ et $\phi(2)$. En déduire **en justifiant précisément** qu'il existe au moins 2 solutions à l'équation $\phi(x) = 0$.
2. Après avoir justifié, donner la trace des 4 premières étapes de l'algorithme de dichotomie appliqué à l'intervalle $[1\,;\,2]$.

n	a_n	p_n	b_n	$\phi(a_n)$	$\phi(p_n)$	$\phi(b_n)$
1						
2						
...						

3. En notant x^* la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'algorithme précédent, déterminer un nombre suffisant d'itérations pour garantir
$$|p_n - x^*| < 0{,}0005\,.$$
4. Étudier le comportement de l'algorithme de dichotomie appliqué à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Exercice 5 ($*$)
On veut déterminer une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près. Déterminer une équation simple dont $\sqrt{3}$ est solution, puis utiliser l'algorithme de recherche par dichotomie pour en donner une valeur approchée. On justifiera soigneusement toute la démarche.

Exercice 6 ($*$)
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \sin(\pi\,x)$ s'annule uniquement si x est un entier. On choisit $a \in]-1\,;\,0[$ et $b \in]2\,;\,3[$.

1. Donner les limites possibles pour l'algorithme de recherche par dichotomie.
2. Montrer que
$$\lim_{n\uparrow\infty} p_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a+b<2 \\ 1 & \text{si } a+b=2 \\ 2 & \text{si } a+b>2 \end{cases}\,.$$

Exercice 7
On cherche résoudre numériquement l'équation $3\,x^4 - 4\,x^3 = -\frac{1}{2}$. Peut–on appliquer l'algorithme de dichotomie (à une fonction à définir) sur l'intervalle $[0\,;\,2]$? $[0\,;\,1]$? $[1\,;\,2]$? Que peut–on dire sur le nombre de solution ?

Exercice 8 ($**$)
L'algorithme de dichotomie peut être légèrement modifié : au lieu de choisir le point $p = \frac{a+b}{2}$ comme point de coupure de l'intervalle $[a\,;\,b]$, on choisit l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par $\begin{pmatrix} a \\ \phi(a) \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} b \\ \phi(b) \end{pmatrix}$ avec l'axe des abscisses. Le reste de la procédure est identique ainsi que la majoration de l'erreur. Cette méthode est appelée méthode de la *fausse position*.

1. Tracer la représentation graphique d'une fonction satisfaisant les conditions pour appliquer l'algorithme de dichotomie et illustrer graphiquement la méthode de la fausse position.
2. Déterminer l'expression analytique du point de coupure p pour un intervalle $[a\,;\,b]$ fixé.
3. Donner la trace des 4 premières itérations de l'algorithme de la fausse position pour trouver une solution numérique à 10^{-3} près à l'équation $\phi(x)=0$ où la fonction ϕ est définie par

$$\begin{aligned} \phi : [1\,;\,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = \frac{x^3-2\,x^2}{x+1} + \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

   Comparer avec l'exercice 4, sachant qu'une solution approchée est $1{,}7807$.

Exercice 9
Soit ϕ la fonction

$$\begin{aligned} \phi :\ [0\,;\,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = 4\,x+3-x^4\,. \end{aligned}$$

Dresser le tableau de variation de ϕ et en déduire le nombre de solutions respectives des équations $\phi(x)=0$ et $\phi(x)=3$. On justifiera la réponse.

Exercice 10
On note ϕ la fonction définie par

$$\begin{aligned} \phi :\ [0\,;\,4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = x^4-4\,x^3+4\,x^2+1. \end{aligned}$$

Montrer que l'équation $\phi(x)=\sqrt{2}$ a exactement deux solutions dans $[0\,;\,2]$.

Exercice 11
Soit ϕ la fonction

$$\begin{aligned} \phi :\ [-1\,;\,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = \frac{3\,x^2+1}{x^2+2}\,. \end{aligned}$$

Dresser le tableau de variation de ϕ et en déduire le nombre de solutions respectives des équations $\phi(x)=2$ et $\phi(x)=1$. On justifiera la réponse.

Exercice 12 $(*)$
Soit ϕ la fonction

$$\begin{aligned} \phi :\ [0\,;\,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = \sqrt{x^2-4\,x+5}\,. \end{aligned}$$

Dresser le tableau de variation de ϕ et en déduire le nombre de solutions respectives des équations $\phi(x)=0$ et $\phi(x)=\sqrt{2}$. On justifiera la réponse.

Exercice 13
Soit ϕ une fonction définie sur l'intervalle $[-1;2]$, continue et dérivable sur cet intervalle et telle que la dérivée ϕ' :

- s'annule uniquement en 0 et en 1 ;

— est strictement négative sur l'intervalle $]0; 1[$;
— est strictement positive en dehors de l'intervalle $[0; 1]$;
— $\phi(-1) = \frac{1}{4}$, $\phi(0) = \frac{1}{2}$, $\phi(1) = -\frac{1}{2}$ et $\phi(2) = 1$

À l'aide de ces données, est-il possible d'affirmer que

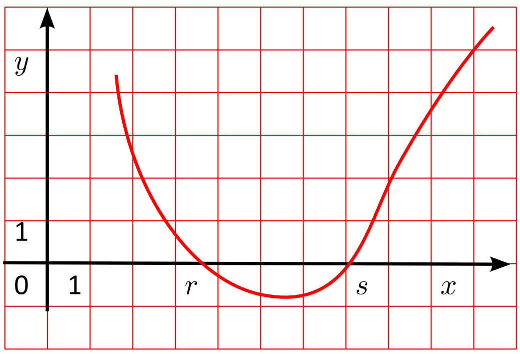
1. L'équation
$$\phi(x) = 0$$
admet une unique solution sur l'intervalle $[-1; 2]$
2. L'équation $\phi(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-1; 2]$
3. L'équation $\phi(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 1]$
4. ϕ est strictement positive sur l'intervalle $[-1; 0]$
5. ϕ est strictement positive sur l'intervalle $[0; 2]$
6. L'équation $\phi(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$

Exercice 14
Soit ϕ, la fonction

$$\begin{aligned} \phi :\ [-1\,;\,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = -2\,x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 1\,. \end{aligned}$$

À l'aide du tableau de variation, donner le nombre de solutions de l'équation $\phi(x) = 0$, ainsi que des intervalles disjoints contenant chacun une solution unique (justifier).

Exercice 15
Le graphe d'une fonction ϕ est donné sur la figure suivante :



1. Utiliser graphiquement la méthode de Newton pour trouver une approximation d'une solution de l'équation $\phi(x) = 0$, en prenant $x_0 = 2$ comme condition initiale. Faire figurer x_1 et x_2 sur le graphique.
2. La méthode converge–t–elle si on choisit maintenant $x_0 = 9$? Pour quelle raison ?

Exercice 16
On veut obtenir une approximation de $\sqrt[3]{2}$ en résolvant l'équation $x^3 - 2 = 0$ sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

1. Écrire la fonction ϕ utilisée et vérifier, en justifiant soigneusement, que les conditions pour utiliser la méthode de Newton sont satisfaites.
2. Compléter la définition de la suite donnée par la méthode de Newton :
$$\begin{cases} x_0 \in [1\,;\,2] \\ x_n = \ldots, \quad n \geqslant 1\,. \end{cases}$$
3. On choisit $x_0 = 2$. À l'aide d'une calculatrice, donner la trace de l'algorithme jusqu'à l'obtention d'une valeur approchée à 10^{-4} près, sachant que $\sqrt[3]{2} \simeq 1{,}25992$.

4. Montrer que la suite converge vers $\sqrt[3]{2}$ si $x_0 = 2$.
5. Peut–on garantir la convergence si $x_0 = 1$? Calculer x_1 et montrer que la suite converge vers $\sqrt[3]{2}$ si $x_0 = 1$.

Exercice 17 ($*$)
On veut résoudre numériquement l'équation $x^3 + 4\,x^2 - 10 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution à cette équation dans l'intervalle $[1\,;\,2]$. On définira soigneusement la fonction utilisée et on justifiera l'application des théorèmes.
2. Compléter la définition de la suite donnée par la méthode de Newton :

$$\begin{cases} x_0 \in [1\,;\,2] \\ x_n = \ldots, \quad n \geqslant 1\,, \end{cases}$$

   et calculer les premiers termes pour $x_0 = 2$. La suite semble–t–elle converger ?
3. Montrer que la suite converge vers x^* si $x_0 = 2$.
4. Étudier la convergence de la suite pour $x_0 = 1$?

Exercice 18 ($**$)
Résoudre numériquement l'équation :

$$\frac{x^3 - 2\,x^2}{x+1} = -\frac{1}{4} \qquad \text{où } x \geq 0\,,$$

en utilisant la méthode de Newton pour trouver une solution $x^* \in [1\,;\,2]$. On détaillera soigneusement la démarche et on étudiera la convergence. On suggère de suivre la démarche suivante :

1. Existence et unicité de la solution.
2. Écriture précise de la suite.
3. Détermination des valeurs de x_0 pour lesquelles le critère suffisant de convergence s'applique.
4. Calcul des premiers termes et commentaires sur la vitesse de convergence apparente (comparer avec Exercices 4 et 8).
5. Étude du comportement de la suite pour les autres valeurs de x_0.

On pourra prendre des valeurs approchées au centièmes dans les calculs si nécessaires.

Exercice 19 (Extrait partiel 2021)
On veut résoudre numériquement l'équation $3\,x^4 - 2\,x^2 + x - 2 = 0$, pour laquelle on suppose (on peut aussi le démontrer) qu'il existe une solution unique a dans l'intervalle $[0\,;\,2]$. On souhaite utiliser une méthode de point fixe au moyen de la suite

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = f(u_{n-1}), \qquad \text{pour } n \geq 1\,, \end{cases}$$

En supposant que la suite converge, pour lesquelles des fonctions f suivantes la limite pourra-t-elle être a ?

1. $3\,x^4 - 2\,x^2 + 2\,x - 2$
2. $x^2\,(2 - 3\,x^2) + 2$
3. $\sqrt{\dfrac{x\,(1 + 3\,x^3)}{2} - 1}$
4. $\dfrac{2\,x^2 + x + 2}{3\,x^3}$
5. $\dfrac{2}{3}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{3\,x}$

Exercice 20 ($*$Extrait partiel 2021)
On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ par

$$f(x) = 1 - \frac{x^3 - 3\,x + 1}{\sqrt{x^3 - 3\,x + 3}}\ .$$

On admet (on peut aussi le démontrer) que f est dérivable sur $[-2\,;\,2]$ et que le tableau de signe de f' est donné ci–dessous.

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Parmi les intervalles suivants, lesquels sont stables par f ?

1. $[-2\,;\,2]$
2. $[-1\,;\,2]$
3. $[1-\frac{3}{\sqrt{5}}\,;\,2]$
4. $[-1\,;\,1]$
5. $[1\,;\,2]$
6. $[-2\,;\,-1]$

Exercice 21 ($*$Extrait partiel 2021)
On cherche une valeur approchée à $\sqrt{3}$. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par $f(x) = 2 + x - \sqrt{x^2+1}$. On suppose (on peut aussi le démontrer) que f est dérivable et que pour tout $x \in [1\,;\,2]$ on a

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ .$$

Mener à bien tous les calculs nécessaires pour décider des affirmations qui sont vraies :

1. f est croissante sur $[1\,;\,2]$
2. L'intervalle $[1\,;\,2]$ est stable par f
3. L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1\,;\,2]$
4. f n'est pas monotone sur $[1\,;\,2]$
5. f est décroissante sur $[1\,;\,2]$
6. f s'annule au moins une fois sur $[1\,;\,2]$

Exercice 22 (Nombre d'or, suite)
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \in [1\,;\,2] \\ x_n = f(x_{n-1}), \qquad \text{pour } n \geq 1\ , \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} f\,:\,[1\,;\,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sqrt{x+1}\ . \end{aligned}$$

1. À l'aide d'une calculatrice, calculer les 5 premiers termes de la suite pour $x_0 = 1$.
2. Montrer que le seul point fixe de f dans $[1\,;\,2]$ est le nombre d'or x^*.
3. Montrer que $[1\,;\,2]$ est un intervalle stable par f.

4. Montrer que f est dérivable sur $[1\,;\,2]$ et que sa dérivée f' vérifie
$$\forall\, x \in [1\,;\,2], \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$
5. Déduire des questions précédentes que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x^*. On citera avec précision les théorèmes utilisés.
6. Donner un nombre d'itération suffisant pour garantir une approximation à 10^{-8} près.

Exercice 23 (Extrait partiel 2021)
On note f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$, telle que f' soit croissante sur $[-1\,;\,1]$, $f'(-1) = -\frac{1}{2}$ et $f'(1) = \frac{1}{4}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles peuvent être déduites de ces données ?

1. $\forall\, x \in]-1\,;\,1[f, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$
2. f est continue en 0
3. $\forall\, x \in]-1\,;\,1[f, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$
4. $\forall\, x \in]-1\,;\,1[f, \quad |f'(x)| \leqslant -\frac{1}{2}$
5. $f'(\frac{1}{2}) > 0$

Exercice 24
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$ et telle que l'image par f de l'intervalle $[-2\,;\,3]$ soit l'intervalle $[-1\,;\,1]$. Avec ces données du problème, on peut affirmer sans calcul supplémentaire que :

1. L'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $[-2\,;\,3]$
2. f est dérivable et $|f|$ est majorée par $k < 1$ sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$
3. f est strictement monotone sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$
4. Il existe au moins un point fixe pour f dans l'intervalle $[-2\,;\,3]$
5. Si de plus f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{2}$, alors il existe un unique point fixe pour f dans l'intervalle $[-2\,;\,3]$.

Exercice 25 ($*$)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par $f(x) = 3 + x - \sqrt{x^2 + 2\,x + 2}$. On suppose (ou pas) qu'on a démontré que l'intervalle $[1\,;\,2]$ est stable par f. On suppose de plus (ou pas) que f est dérivable, que f' l'est aussi et que pour tout $x \in [1\,;\,2]$ on a
$$f'(x) = 1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2\,x + 2}}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + 2\,x + 2}\right)^3}$$
Mener à bien tous les calculs nécessaires pour décider des affirmations qui sont vraies :

1. f' n'est pas monotone sur $[1\,;\,2]$
2. f' est décroissante sur $[1\,;\,2]$
3. $\forall\, x \in [1\,;\,2], \quad |f'(x)| \leqslant f'(1)$
4. $\forall\, x \in [1\,;\,2], \quad |f'(x)| \leqslant f'(2)$
5. f' est négative ou nulle sur $[1\,;\,2]$
6. f admet un unique point fixe dans $[1\,;\,2]$

Exercice 26 (Extrait partiel 2021)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$. On suppose qu'on a démontré les résultats suivants :

— l'image de l'intervalle $[-1\,;\,2]$ par f est l'intervalle $[0\,;\,1]$
— f est dérivable et $\forall\, x \in [-1\,;\,2] \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

On définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par la formule

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ x_n = f(x_{n-1}), \qquad \text{pour } n \geq 1 \text{ ,} \end{cases}$$

À l'aide de ces données du problème, on peut affirmer sans calcul supplémentaire que

1. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
2. $(\forall\, n \geq 1), \quad 0 \leq x_n \leq 1$
3. Pour tout $n \geq 0$, on a $f(x_n) \geq \frac{1}{2}\, x_{n-1}$
4. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers l'unique point fixe de f dans l'intervalle $[-1\,;\,2]$
5. f est strictement monotone sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$

Exercice 27 (Extrait partiel 2021)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;\,3]$. On suppose que f est dérivable, que

$$\forall\, x \in [-1\,;\,2] \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{5}$$

et que l'intervalle $[0\,;\,3]$ est stable par f. On construit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par la formule

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = f(x_{n-1}), \qquad \text{pour } n \geq 1 \text{ ,} \end{cases}$$

et on admet que cette suite converge vers une limite notée x^*. Parmi les affirmations suivantes, laquelle suffit-elle à garantir que l'erreur d'approximation $|x_n - x^*|$ soit inférieure à 10^{-4} ?

1. $n < \dfrac{-4\,\ln(10) - \ln(3)}{\ln(\frac{1}{5})}$
2. $n > \dfrac{-4\,\ln(10) - \ln(3)}{\ln(\frac{1}{5})}$
3. $n > \dfrac{-4\,\ln(10)}{\ln(\frac{1}{5})}$
4. $n < \dfrac{-4\,\ln(10)}{\ln(\frac{1}{5})}$

Exercice 28 ($**$)
On cherche à résoudre numériquement l'équation :

$$\frac{x^3 - 2\,x^2}{x+1} + \frac{1}{4} = 0 \qquad \text{où } x \geq 0\,. \tag{1}$$

On pose

$$\begin{aligned} g : [1\,;\,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \frac{x^3 - 2\,x^2}{x+1} + \frac{1}{4}\,, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \phi : [1\,;\,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = 4\,x^3 - 8\,x^2 + x + 1\,. \end{aligned}$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction ϕ sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

2. Montrer que $\phi(x) = 4\,(x+1)\,g(x)$. En déduire que les solutions sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ de l'équation (1) et de l'équation

$$\phi(x) = 0 \tag{2}$$

sont les mêmes.

3. À l'aide du tableau de variation de ϕ, montrer qu'il existe une unique solution notée α à l'équation (2) dans l'intervalle $[1\,;\,2]$.
4. Calculer $\phi(\frac{3}{2})$ et en déduire que $\alpha \in [\frac{3}{2}\,;\,2]$.
5. On pose :

$$\begin{aligned} f : [1\,;\,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{8\,x^2 - x - 1}{4\,x^2}\,. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que les points fixes de f sont les solutions de (2) sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

   (b) Montrer que l'intervalle $[1\,;\,2]$ est stable par f.

   (c) Montrer que

$$\forall\, x \in [-1\,;\,2] \quad |f'(x)| \leqslant k$$

   où $k < 1$ est une constante que l'on déterminera.

   (d) Déduire des questions précédentes la limite de la suite

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = f(x_{n-1}) \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

   en justifiant clairement toute l'argumentation.

   (e) Calculer les premiers termes de la suite et comparer avec les exercices 4, 8 et 18.

1 Kit de survie de calcul général

1.1 Inégalités

Si	$a \leqslant b$	et	$b \leqslant c$	alors	$a \leqslant c$
Si	$a \leqslant b$			alors	$a + c \leqslant b + c$
Si	$a \leqslant b$	et	$c \geqslant 0$	alors	$c\,a \leqslant c\,b$
Si	$a \leqslant b$	et	$c \leqslant 0$	alors	$c\,a \geqslant c\,b$
Si	$0 \leqslant a \leqslant b$	et	$0 \leqslant c \leqslant d$	alors	$a\,c \leqslant b\,d$
Si	$0 \leqslant a \leqslant b$			alors	$a^2 \leqslant b^2$
Si	$a \leqslant b \leqslant 0$			alors	$b^2 \leqslant a^2$
Si	$0 < a \leqslant b$			alors	$\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$
Si	$a \leqslant b < 0$			alors	$\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$

1.2 Valeur absolue

Pour $a > 0$,

$$|x| = h \iff x = h \quad \text{ou} \quad x = -h$$
$$|x| \leqslant h \iff -h \leqslant x \leqslant h$$
$$|x| \geqslant h \iff x \leqslant -h \quad \text{ou} \quad x \geqslant h$$

1.3 Identités remarquables, factorisations

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3a\,b^2 - b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\,(a^2 - a\,b + b^2) \qquad a^3 - b^3 = (a-b)\,(a^2 + a\,b + b^2)$$

1.4 Puissances et racines

$$x^m\,x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad (x^m)^n = x^{m\,n}$$
$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (x\,y)^n = x^n\,y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$
$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \qquad \sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$
$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[(m\,n)]{x}$$

1.5 Logarithme et exponentielle

Pour a et b réels quelconques et $c > 0$ et $d > 0$

$$\mathrm{e}^0 = 1 \qquad \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad (\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{a\,b}$$
$$\ln e = 1 \qquad \ln 1 = 0 \qquad \ln(c\,d) = \ln c + \ln d \qquad \ln c^d = d\,\ln c$$
$$\ln\frac{1}{c} = -\ln c \qquad \ln\frac{c}{d} = \ln c - \ln d$$

1.6 Signe des polynômes du second degré

$$a \neq 0 \qquad \Delta = b^2 - 4\,a\,c$$

Si $\Delta > 0$, deux racines :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a} \qquad \text{avec } x_1 < x_2$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a\,x^2 + b\,x + c$		signe(a)	0	$-$signe(a)	0	signe(a)	

Si $\Delta = 0$

$$x_0 = \frac{-b}{2\,a}$$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$a\,x^2 + b\,x + c$		signe(a)	0	signe(a)	

Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$a\,x^2 + b\,x + c$		signe(a)	

Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Valide sur
$x \mapsto a$, où $a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]0\,;\,+\infty[$

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur le même intervalle I,

	Fonction	Dérivée
Produit par c	$c\,u(x)$	$c\,u'(x)$
Somme	$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
Produit	$u(x)\,v(x)$	$u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$
Puissance	$[u(x)]^n$	$n\,u'(x)\,[u(x)]^{n-1}$
Racine	$\sqrt{u(x)}$ où $u(x)>0$ sur I	$\dfrac{u'(x)}{2\,\sqrt{u(x)}}$
Inverse	$\dfrac{1}{v(x)}$, où v ne s'annule pas sur I	$-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$
Quotient	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$, où v ne s'annule pas sur I	$\dfrac{u'(x)\,v(x)-u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$