Fonctions monotones

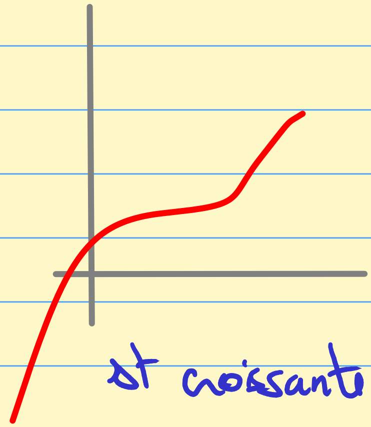
Déf :

$$f \text{ est monotone } \begin{cases} f \text{ est croissante si } \forall (x,y) \in D_f^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \\ f \text{ est strictement croissante si } \forall (x,y) \in D_f^2\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ f \text{ est décroissante si } \forall (x,y) \in D_f^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \\ f \text{ est strictement décroissante si } \forall (x,y) \in D_f^2\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{cases}$$

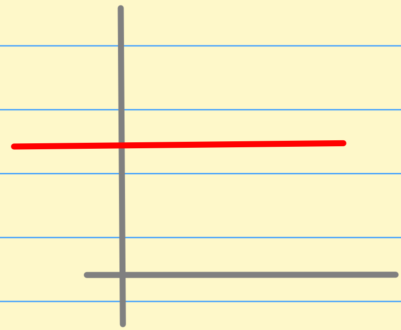
Une fonction croissante range les images dans le même ordre que leurs antécédents

Une fonction décroissante range les images dans l'ordre inverse que leurs antécédents

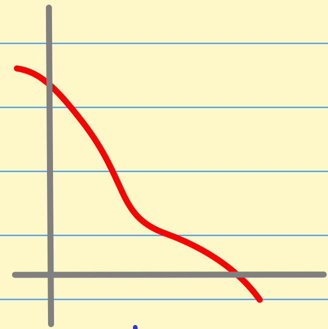
croissante



st croissante



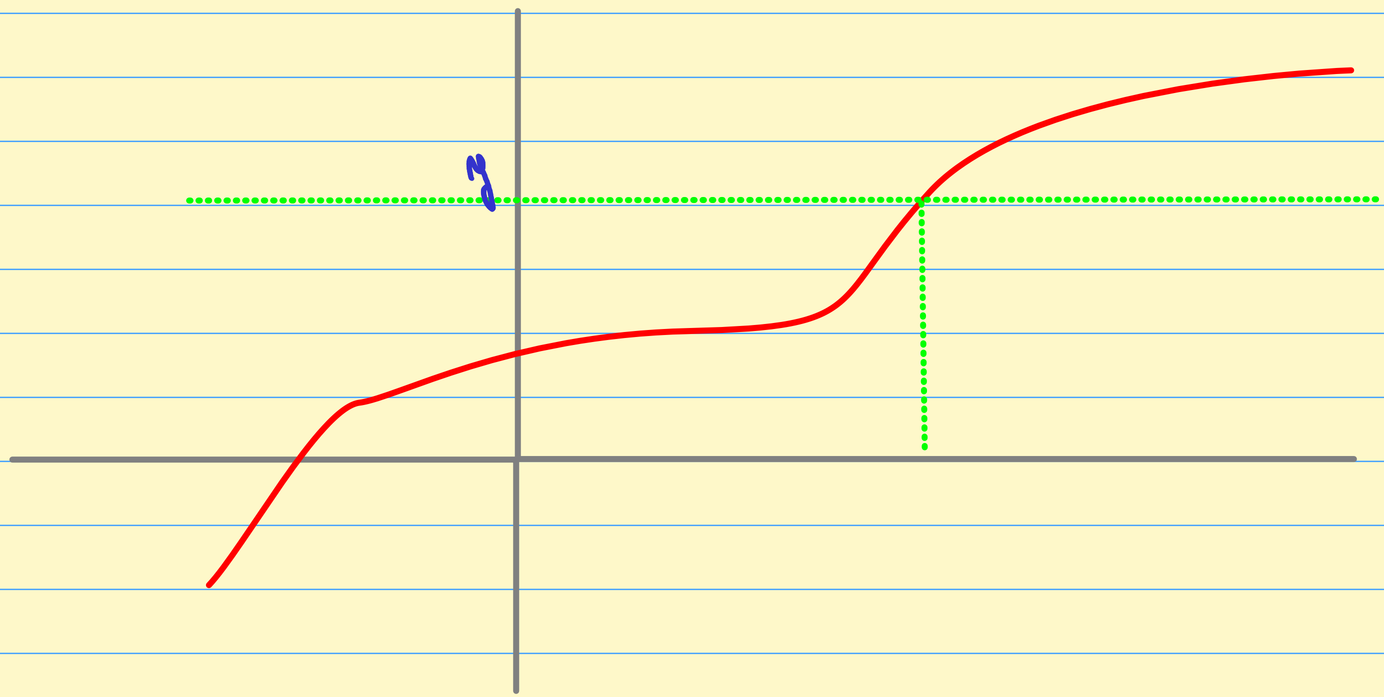
décroissante !



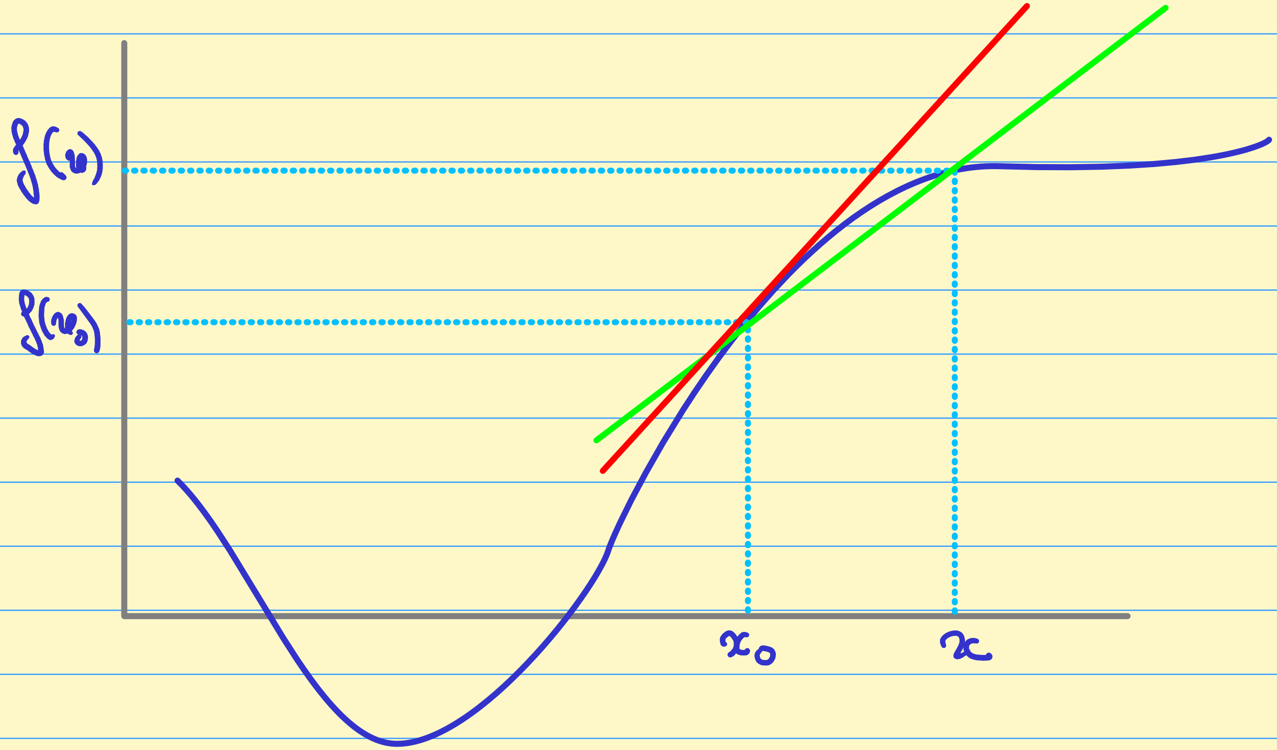
strictement décroissante,

Corollaire du TVI pour les fonctions strictement monotones :

Si f est strictement monotone alors la solution de l'équation $f(x) = y$ est unique



Taux de variation pour les fonctions continues



↳ pente de la droite verte (corde) : $T_{x_0}(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

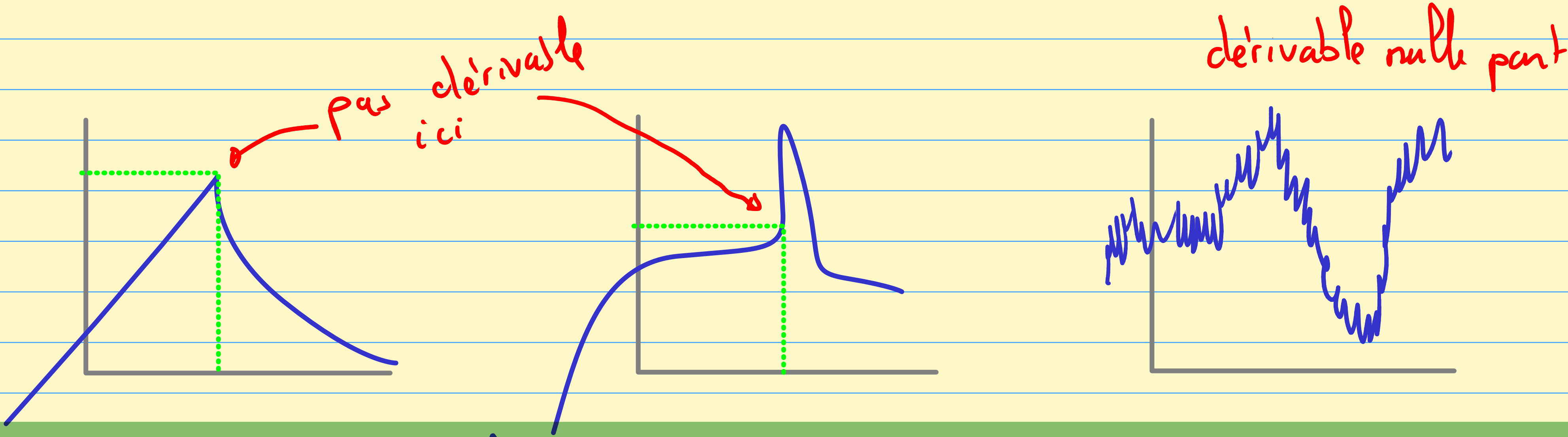
↳ c'est la vitesse moyenne de la variation de f entre x et x_0

↳ Si x s'approche de x_0 alors $T_{x_0}(x)$ s'approche de la pente de la tangente à la courbe en x_0 (droite rouge)

↳ Vitesse instantanée en x_0

Déf (informelle) : f est **dérivable** en x_0 si

- il existe une tangente à la courbe en $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$
- cette tangente est unique et
- elle n'est pas verticale



Déf : f est dérivable sur $[a;b]$ si elle est dérivable en tout point de $[a;b]$

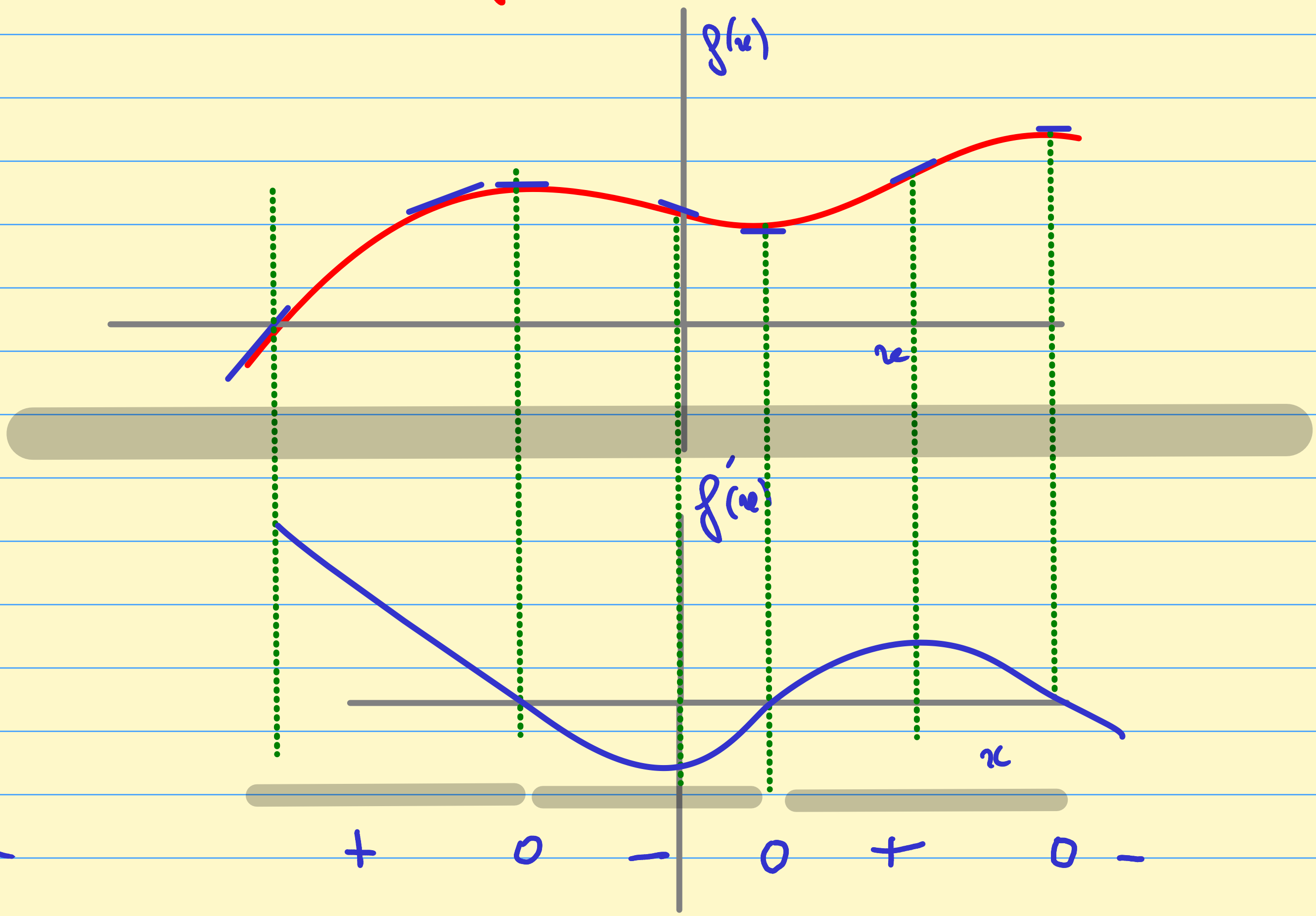
Rem : ↳ Les fonctions dérivables sont celles dont le graphique est **proche d'une droite** au voisinage de tout point

↳ pour étudier sa dérivabilité, une fonction doit **d'abord** être continue. Elle peut être continue mais pas dérivable (cf exemples ci-dessus)

Notation : ↳ Si f est dérivable $x_0 \in [a,b]$ on note $f'(x_0)$ la pente de la tangente au point x_0

↳ $f' : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f'(x)$

est appelée dérivée de f



pente + 0 − 0 + 0 −

Dérivée et monotonie :

Th : Si f est continue sur $[a;b]$
dérivable sur $]a;b[$
alors

$\forall x \in]a;b[,\quad f'(x) \geq 0 \iff f$ croissante sur $[a;b]$

$\forall x \in]a;b[,\quad f'(x) \leq 0 \iff f$ décroissante sur $[a;b]$

$\forall x \in]a;b[,\quad f'(x) > 0 \implies f$ strictement croissante sur $[a;b]$

$\forall x \in]a;b[,\quad f'(x) < 0 \implies f$ strictement décroissante sur $[a;b]$

Tableau de variation

valeurs de x qui annulent la dérivée

x	a		x_1		x_2		x_3		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	y_0	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	y_2	$\nearrow$	y_3	$\searrow$	y_4

← signe de la dérivée

← monotonie de la fonction

valeurs extrêmes des sous-intervalles

Cas d'utilisation : existence et unicité de solution à $\varphi(x)=0$

ex : $\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ continue sur } [a,b] \\ \varphi(a)\cdot\varphi(b) < 0\end{array}\right\}$ par TVI : $\exists$ (au moins une) solution

$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ dérivable sur }]a;b[\\ \varphi' \text{ ne change pas de signe sur }]a;b[\end{array}\right\}$ par corollaire, la solution est unique

Dérivabilité et calcul

Th : → les fonctions usuelles : puissances, racines, logarithme, exponentielle, trigonométriques sont dérivables sur leur ensemble de définition

→ les sommes de fonctions dérivables sont des fonctions dérivables

→ pareil pour les produits, inverses, rapports et composition sur les ensembles où ces opérations existent

→ les règles de calcul des dérivées sont regroupées dans un formulaire

Ex. $\varphi : [0;3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

$\rightarrow$ φ est dérivable sur $]0;3[$ car c'est un polynôme

$\rightarrow$ $\forall x \in \;]0;3[,$ $\quad \varphi'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$= ax^2 + bx + c$

$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times 3 \times 4$

$= 16$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+4}{6} = 2$

φ du signe de a sauf entre les racines

x	0		$2/3$		2		3
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{2}{57}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

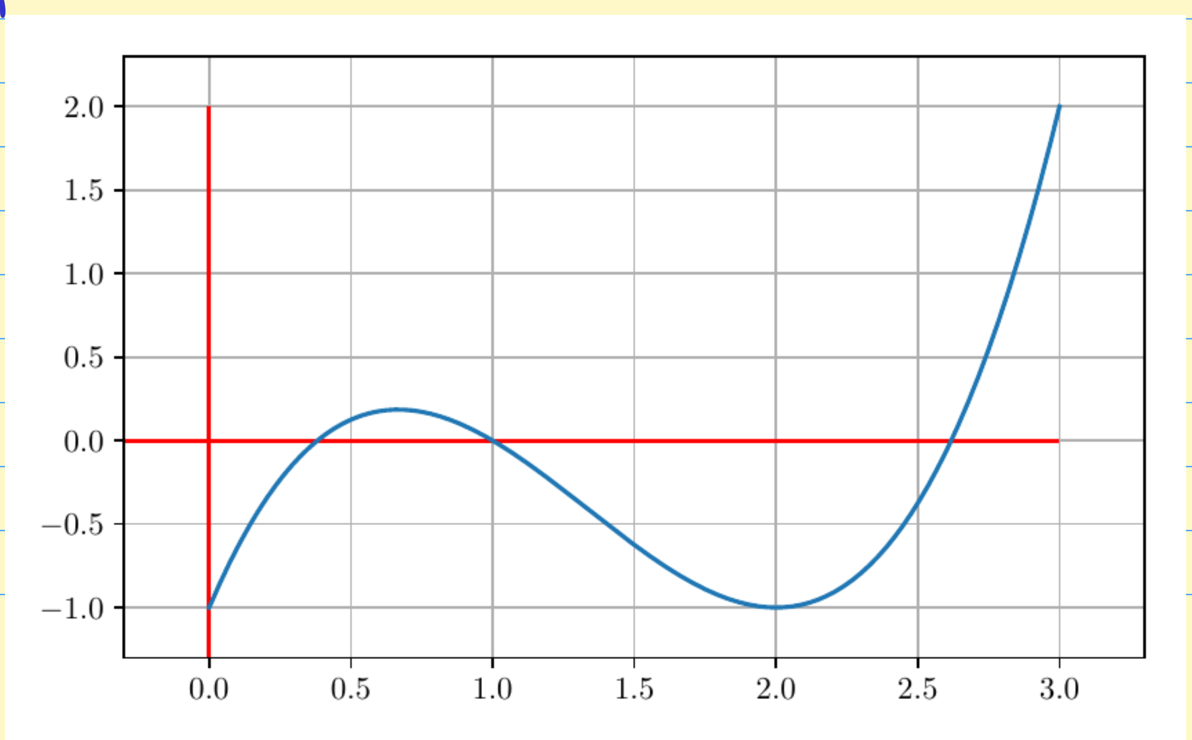
Par lecture du TV : → $\exists!\, \alpha \in \left]0 ; \frac{2}{3}\right[$ tq $\varphi(\alpha) = 0$

$\exists!\, \beta \in \left]\frac{2}{3} ; 2\right[$ tq $\varphi(\beta) = 0$

$\exists!\, \gamma \in \left]2 ; 3\right[$ tq $\varphi(\gamma) = 0$

- L'équation $\varphi(x) = 0$ a exactement 3 solutions dans $[0 ; 3]$

- On a 3 intervalles qui contiennent chacun une unique solution



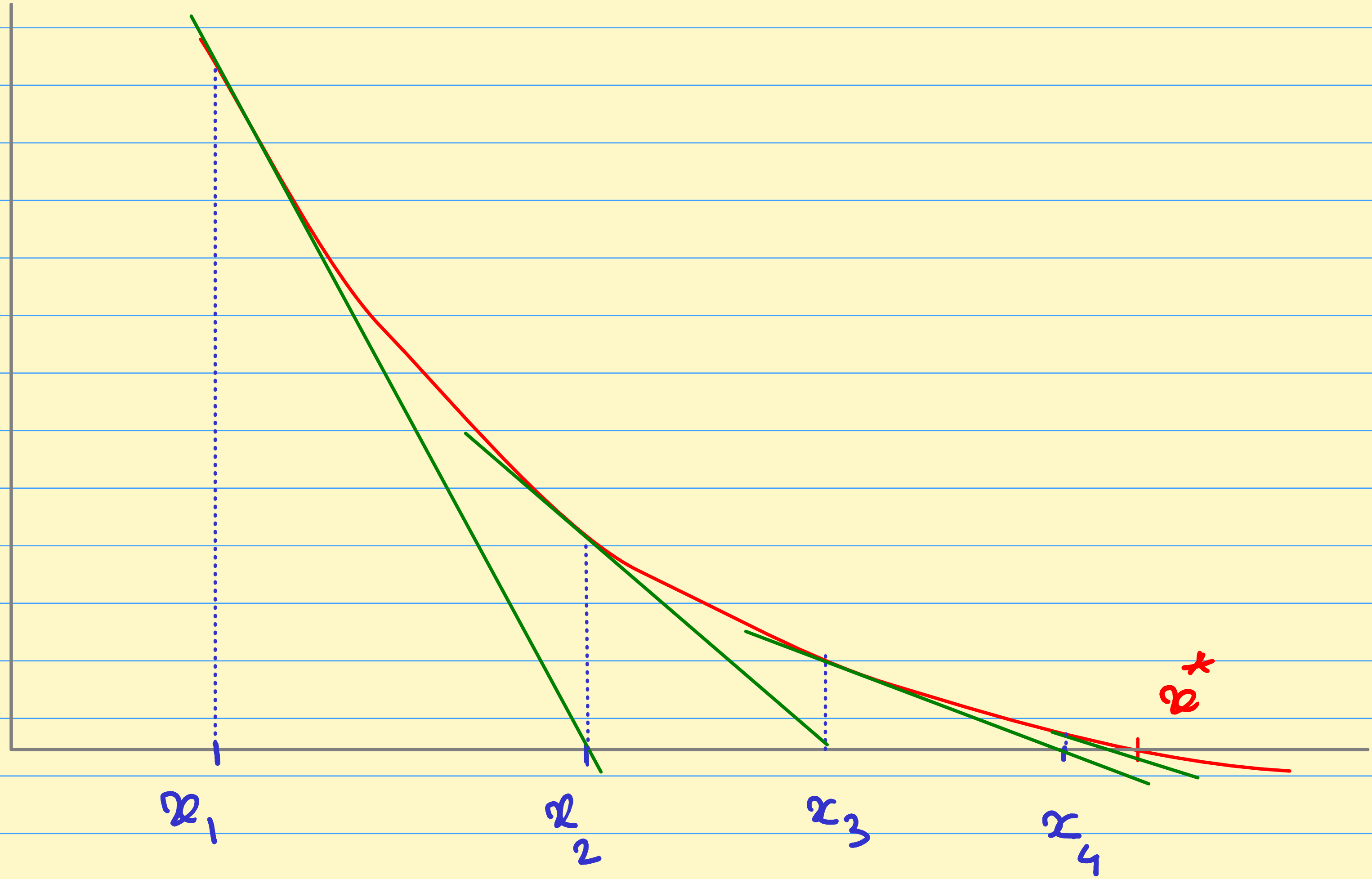
Méthode de Newton

Conditions : $\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ continue sur } [a;b] \\ \varphi(a)\varphi(b) < 0 \\ \varphi \text{ dérivable sur }]a;b[\\ \varphi' \neq 0 \text{ sur }]a;b[\end{array}\right\}$ par TVI + stricte monotonie $\Rightarrow \exists !\, x^* \in]a;b[$ tq $\varphi(x^*) = 0$

Rem : ⚠ ne garantit pas le succès de la méthode mais autorise son utilisation

Idée : $\Big\{$
↳ initialiser avec $x_0 \in [a;b]$
↳ "confondre" la courbe de φ avec sa tangente
↳ résoudre exactement l'équation pour la tangente à la place de φ
↳ poser x_{n+1} = la solution trouvée

graphiquement :



La convergence semble rapide

Rappel (ou pas) : si φ est dérivable en $x_0 \in [a,b]$, la tangente à la courbe de φ au point x_0 a pour équation $y = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0)$

Application à la méthode de Newton :

Soit x_n, l'approximation à l'étape n. On résout

$\varphi(x_n) + \varphi'(x_n)(x - x_n) = 0$ la tangente croise l'axe des abscisses

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(x_n) + \varphi'(x_n)x - \varphi'(x_n)x_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(x_n)x = \varphi'(x_n)x_n - \varphi(x_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\varphi'(x_n)}{\varphi'(x_n)}x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}$$

La méthode s'écrit donc :

$$\begin{cases} x_0 \in [a;b] \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{\varphi(x_{n-1})}{\varphi'(x_{n-1})} \end{cases} \quad \forall n \geq 1$$

Rem : → c'est une suite définie par récurrence

→ son existence est à démontrer : $x_{n-1} \in [a;b] \not\Rightarrow x_n \in [a;b]$

→ sa convergence est à démontrer

ex : $\varphi : [2;3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

On a déjà montré : $\hookrightarrow \exists !\, x^* \in]2;3[$ tq $\varphi(x^*) = 0$

$\hookrightarrow \forall x \in [2;3] \quad \varphi'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

On pose
$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{x_{n-1}^3 - 4x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} - 1}{3x_{n-1}^2 - 8x_{n-1} + 4} \end{cases}$$

$x_0 = 3$

$x_1 = \frac{19}{7} \simeq 2.714286$

$x_2 = \frac{3953}{1505} \simeq 2.626578$

$x_3 = \frac{32879892799}{12558633535} \simeq 2.618111$

$x_4 = \quad \simeq 2.618034$

La convergence semble rapide

Un résultat suffisant (pas nécessaire) de convergence

Th : si

$$\begin{cases} \varphi \text{ continue sur } [a;b] \text{ et } \varphi(a)\varphi(b)<0 \\ \varphi \text{ dérivable sur }]a;b[\\ \varphi' \text{ ne s'annule pas sur }]a;b[\end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi' \text{ dérivable sur }]a;b[\text{ de dérivée } \varphi'' \\ \varphi'' \text{ ne s'annule pas sur }]a;b[\\ \varphi(x_0)\varphi''(x_0) > 0 \end{cases}$$

alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la méthode de Newton converge vers l'unique solution dans $[a;b]$ de $\varphi(x)=0$

Rem : ↳ la méthode peut converger même sans ces conditions

↳ pas (encore) de résultat de vitesse

Ex (suite) on avait : $\forall x \in [2;3]$ $\quad \varphi'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

φ' est dérivable sur $[2;3]$ et $\varphi''(x) = 6x - 8 = 2(3x - 4)$

→ $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \notin [2;3]$ donc φ'' ne s'annule pas

→ de +

x	2		x^*		3
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi''(x)$		$+$		$+$	

Si $x_0 \in]x^*;3]$ alors le th s'applique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*