ex 6 logique :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$: P_1

$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$: $\neg P_1$

$v(P_1) = F$: contre-exemple $x = 0$

---

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 > 0 \Rightarrow x > 0)$: P_2

$v(P_2) = F$ contre-exemple : $x = -3$

$\forall x \in \mathbb{R}\ (x \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 0)$: P_2' (contraposée)

$v(P_2') = v(P_2) = F$

$\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 0) \wedge (x \leq 0)$: $\neg P_2$

$v(\neg P_2) = V$

---

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0)$: P_3

$\forall x \in \mathbb{R}\ (x = 0 \Rightarrow x^2 \leq 0)$: P_3' (contraposée)

$v(P_3') = V$ (car pour $x = 0$ on a $x^2 \leq 0$)

donc $v(P_3) = v(P_3') = V$

$\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 0 \wedge x = 0)$: $\neg P_3$

$v(\neg P_3) = F$

exo 6 logique (suite)

4) $\exists x \in \mathbb{R}, (x^2 > 0 \Rightarrow x > 0) \quad : P_4$

$v(P_4) = V$ exemple : $x = 3$

(mais $x = 0$ marche aussi)

$\exists x \in \mathbb{R} \ (x \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 0) \ : \ P'_4$

$v(P'_4) = v(P_4) = V$

$\forall x \in \mathbb{R} \ (x^2 > 0) \wedge (x \leq 0) \ : \ \neg P_4$

$v(\neg P_4) = F$

5) $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0 \Rightarrow x^2 > 0); \ : P_5$

$v(P_5) = V$

dém : soit x un réel :

$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0^2 \Rightarrow x^2 > 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \ (x^2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 0) \ : P'_5$

dém : le prédicat $x^2 \leq 0$ n'est vrai que pour $x = 0$

$\exists x \in \mathbb{R} \ (x > 0 \wedge x^2 \leq 0) \ : \ \neg P_5$

$v(\neg P_5) = F$

ex 6 (suite)

6] $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 + y < 0)$ P_6

$v(P_6) = V$

démonstration :

Soit x un réel quelconque

cherchons y en fonction de x

tel que $x^2 + y < 0$

c'est à dire $y < -x^2$

En prenant $y = -x^2 - 1$ la proposition est vraie.

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y \geq 0$: $\neg P_6$

7] $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + y < 0)$: P_7

$v(P_7) = F$

démonstration

On cherche y_0 fixé (ne dépendant pas de x)

tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on ait

$x^2 + y_0 < 0$

$\Leftrightarrow x^2 < -y_0$

La fonction x^2 ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$ on peut toujours trouver x tel que $x^2 \geq -y_0$. Donc $v(P_7) = F$

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + y \geq 0$: $\neg P_7$

8) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, (x^2 + y < 0) : P_8$

$v(P_8) = F$

contre-exemple : pour $y = +3$ on ne peut pas trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 3 < 0$

$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + y \geq 0) : \neg P_8$

$v(\neg P_8) = V$