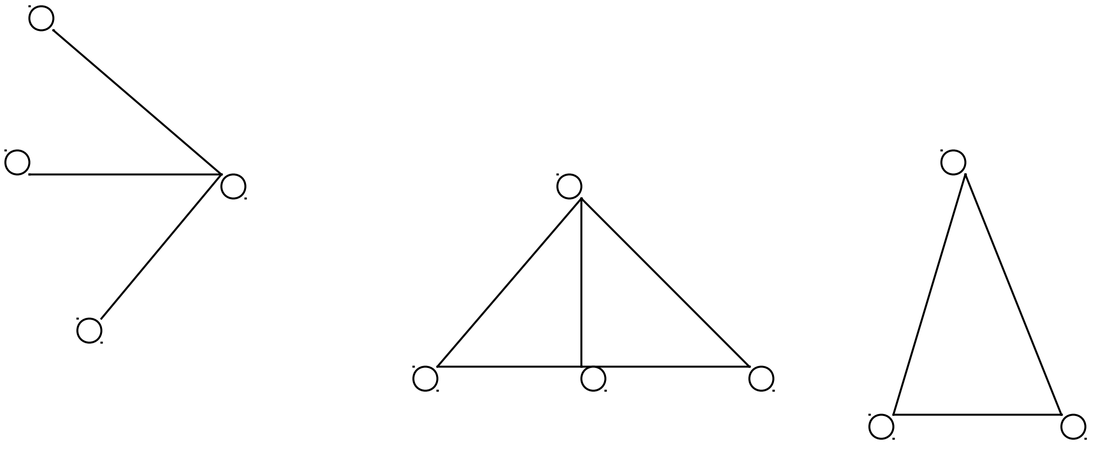
Graphes Eulériens
et
Graphes hamiltoniens

I)Graphes Eulériens

- On appelle parcours eulérien d’un graphe G tout parcours qui contient ***une fois et une seule chaque arête*** du graphe.

- On appelle graphe eulérien un graphe admettant un parcours eulérien ***fermé***.

- Parmi ces trois graphes un seul est Eulérien:



théorème d'Euler

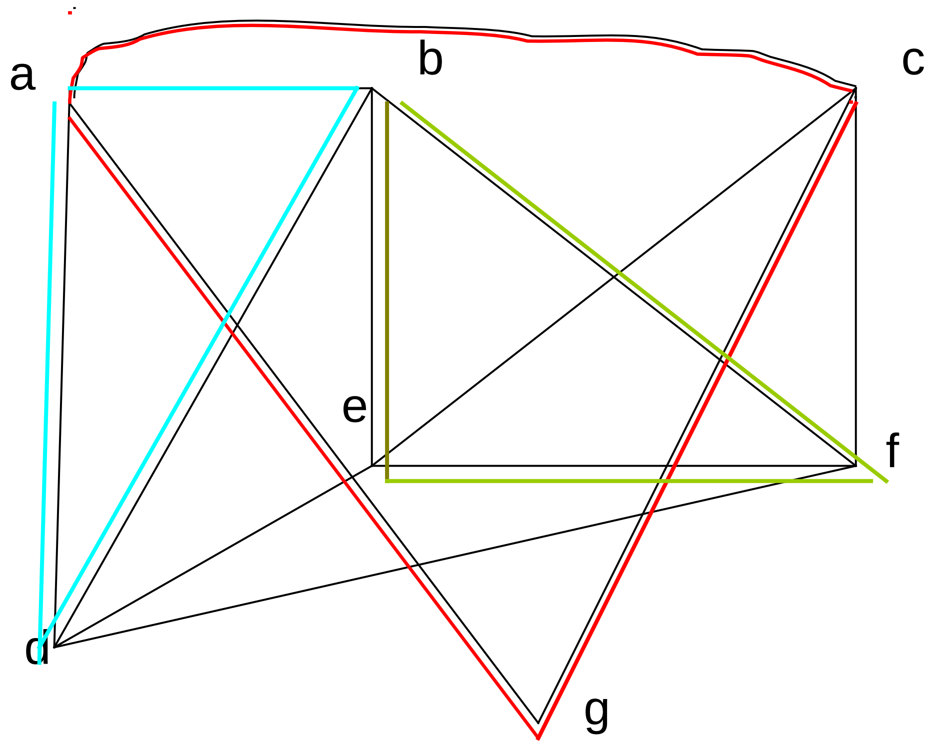
- Soit G =(X,E) un graphe **connexe**.

  G admet un **parcours eulérien fermé (i.e.** un *parcours fermé* qui passe une et une seule fois par chaque arête)

  $\Leftrightarrow$

  $\forall x \in X$, deg(x) est **pair**.

Idée de l’algorithme:



(g,c,a,g)

(g,c,a,b,d,a,g)

(g,c,a,b,f,e,b,d,a,g)

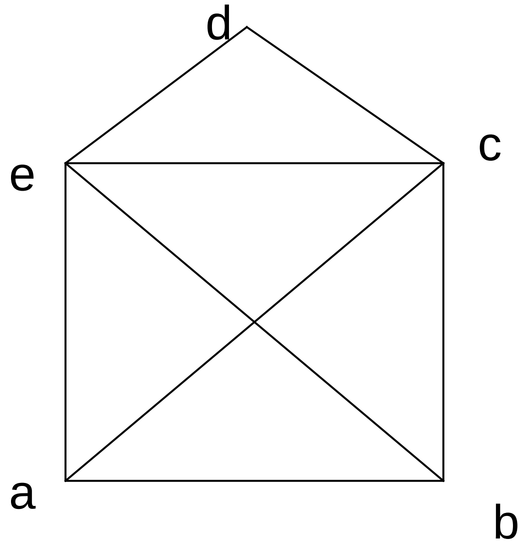
(g,c,a,b,f,e,d,f,c,e,b,d,a,g)

- **Théorème sur les parcours eulériens ouverts** :
- *Une condition nécessaire et suffisante* pour qu’un graphe connexe possède un parcours *eulérien ouvert* est que tous ses sommets, à l’exception de 2 d’entre eux, soient de degré pair.

- Lorsque la condition est satisfaite, tout parcours eulérien ouvert du graphe admet ces deux sommets de degré impair comme extrémités.

II) Graphes hamiltoniens

- **Un parcours hamiltonien** d'un graphe G est un parcours fermé de longueur $\geq$ 3, dans lequel *chaque sommet* du graphe n'a qu'une seule occurrence (sauf l'extrémité du parcours qui n'en a que 2).



Π=(a, b, c, d, e, a)

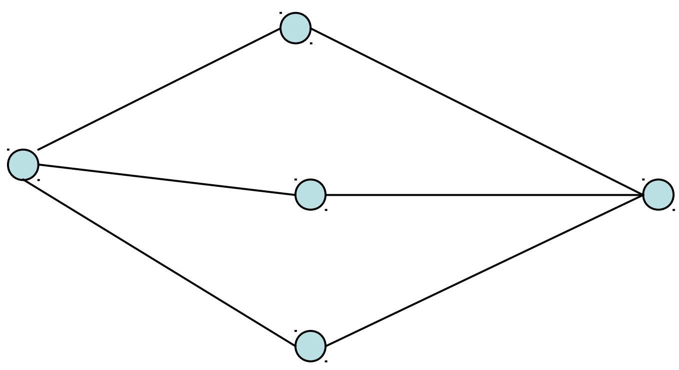
Graphes et cycles hamiltoniens

- Un **cycle hamiltonien** d’un graphe G d’ordre n est un sous-graphe de G qui est un cycle d’ordre n.
- Un **graphe hamiltonien** est un graphe admettant un cycle hamiltonien.(donc aussi un parcours hamiltonien)

Quelques remarques:

- 1) *Si* **G** *hamiltonien* alors $n \geq 3$.
- 2) Tout graphe complet avec $n \geq 3$ est hamiltonien.
- 3) *Si* **G** *est hamiltonien* alors **G** n'a pas de sommets de degré 1.
- 4) *Si* **G** *est hamiltonien* alors **G** est connexe.
- 5) *Si* **G** *est hamiltonien* alors **G** n'a pas de points d'articulation.

Les conditions précédentes ne sont pas suffisantes:

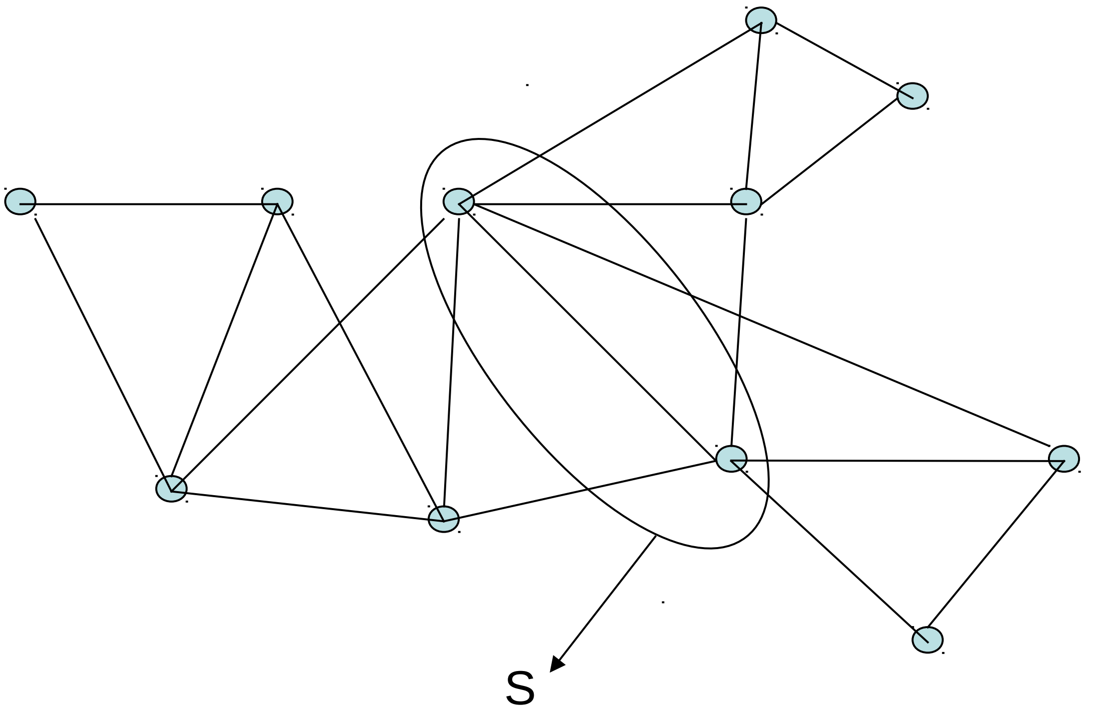


Une autre condition nécessaire mais pas suffisante

- Si un graphe **G** est hamiltonien alors:

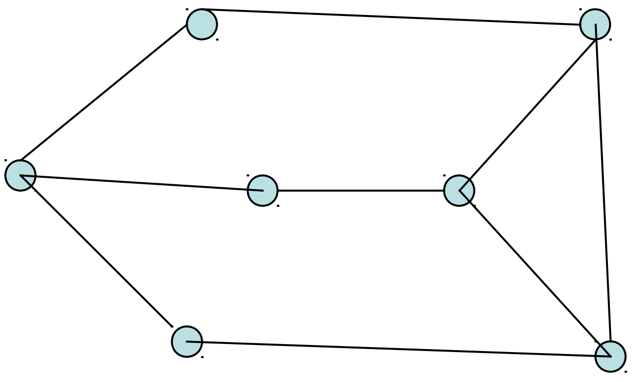
  Pour **tout sous-ensemble S non vide** de ses sommets, le nombre de composantes connexes de **G-S** doit être inférieur ou égal à **|S|**

G est-il hamiltonien?



G-S a 3 composantes connexes alors que **S** n’a que deux sommets.
Donc ce graphe **n’est pas hamiltonien**.

Mais cette condition n’est toujours pas suffisante!



Une condition suffisante mais pas nécessaire:

- Si dans un graphe **G** d'ordre n>2 tous les sommets sont de degré au moins **n/2**, ou si, de façon plus générale, pour *toute paire* **x** et **y** de sommets de **G** on a **deg(x) +deg(y)** $\geq$ **n**, alors le graphe est hamiltonien.