Introduction aux graphes simples

I) Définitions et vocabulaire

- Définition:

  Un graphe **G** est un couple **G=(X, E)** constitué d'un ensemble **X** *non vide et fini*, et d'un ensemble E de *paires* d'éléments de **X**.

Exemple:

G=(X={a, b, c}, E={ {b, c},{b, a} })

On notera plutôt: G=(X={a, b, c}, E={bc, ba})

(Remarque: avec ces notations on a ba = ab)

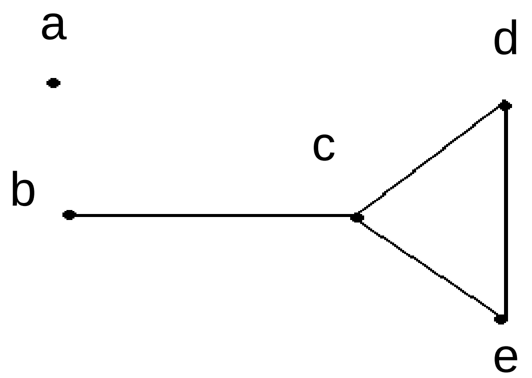
Soit G=(X,E) un graphe:

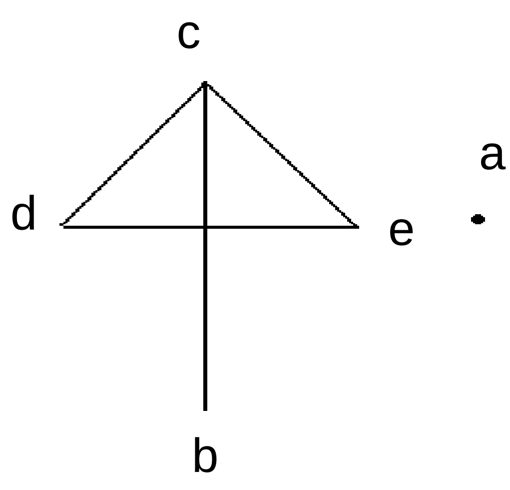
- Les éléments de X sont **les sommets** de G
- Les éléments de E sont **les arêtes** de G.

- **L'ordre** du graphe est le nombre de ses sommets (on note |G|).

Représentations d'un graphe:

- G=(X={a, b, c, d, e}, E={ bc, ce, ed, dc })





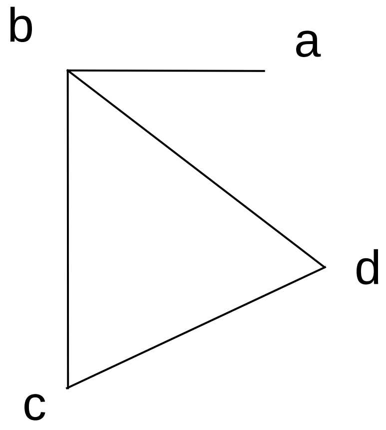
Matrices d’adjacence d’un graphe:

- G=(X={a, b, c, d, e}, E={ bc, ce, ed, dc })

  (A chaque ordre sur les sommets correspond une matrice).

	a	b	c	d	e
a	0	0	0	0	0
b	0	0	1	0	0
c	0	1	0	1	1
d	0	0	1	0	1
e	0	0	1	1	0

- Si **e={x, y}** est une arête de **G**, on dit que x et y sont **les extrémités** de **e** ou que x et y sont **adjacents ou voisins** dans **G** et que l'arête **e** est **incidente** aux sommets x et y.

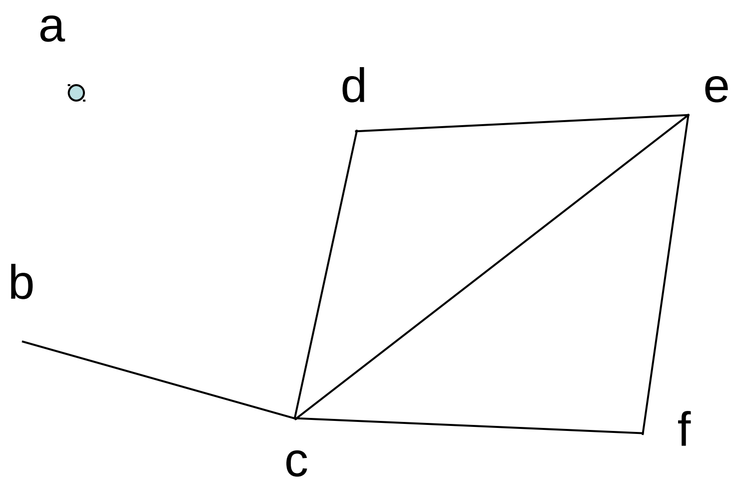


a et b sont voisins;
a et d ne sont pas adjacents.
L'arête cd est incidente à d

- **Le voisinage** d’un sommet x dans un graphe G est l’ensemble de ses voisins. On le note $V_G(x)$.

- On appelle **degré d’un sommet** x le nombre de ses voisins. On le note $deg_G(x)$.

- Un sommet de degré 0 est un **sommet isolé**.



- On a $V_G(a)=\emptyset$ et $V_G(d)=\{c, e\}$.
- $deg_G(a)=0$ (a est donc isolé)
- $deg_G(c)=4$; $deg_G(b)=1$

Sous-Graphes:

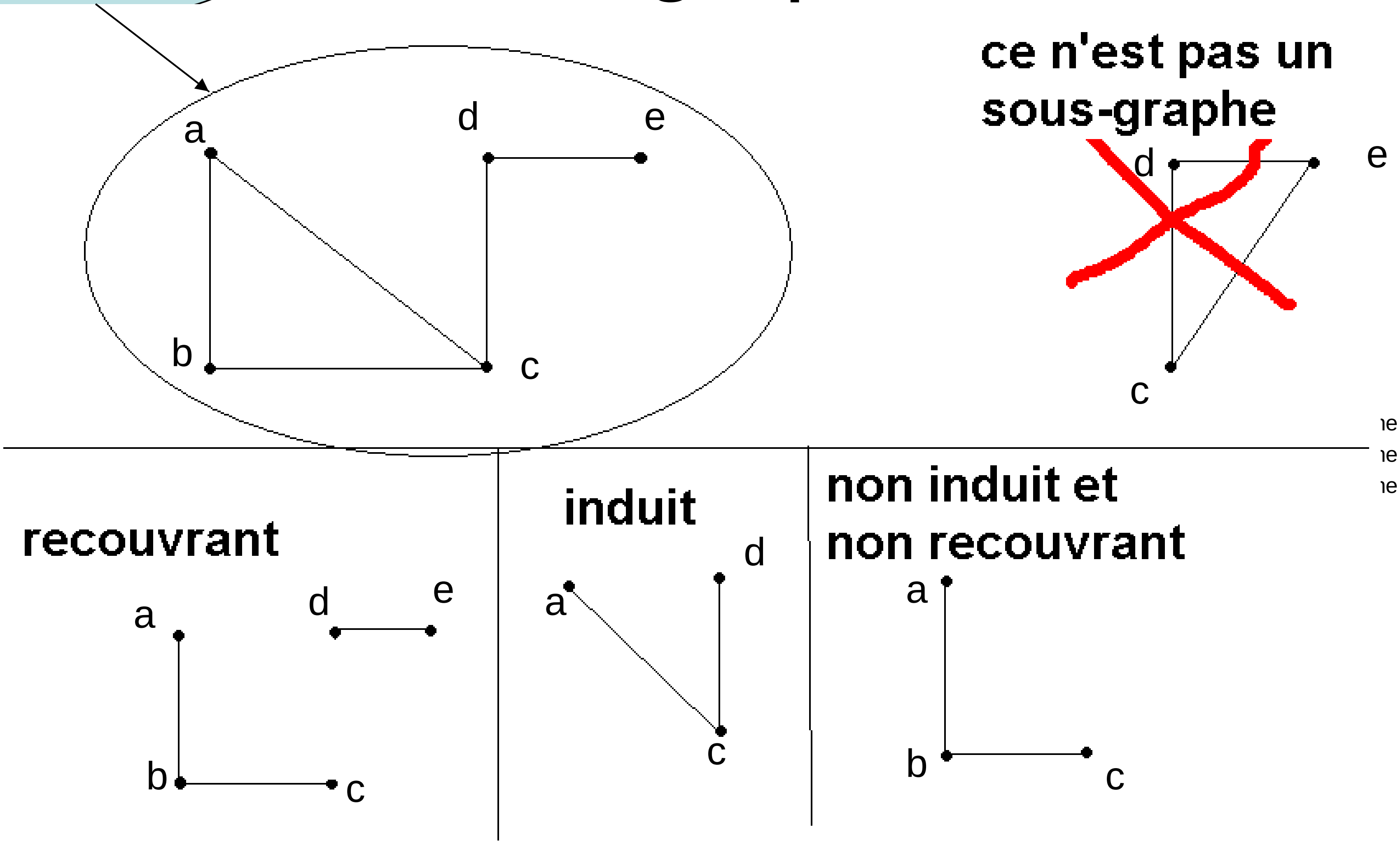
- G'=(X',E') est un sous-graphe de G=(X,E) lorsque X' est inclus dans X et

E' inclus dans E.

- 2 cas extrêmes:
  - **Sous-graphe recouvrant**: X' = X
  - **Sous-graphe de G induit par X'** (**G[X']**): c'est le sous-graphe de G dont sont arêtes ***toutes*** celles de G dont les 2 extrémités sont dans X'.

Sous-graphes:

Le graphe G



II) Isomorphismes de graphes

- Proposition: Soit X un ensemble de cardinal n≥1.

  Il y a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ graphes ayant X comme ensemble de sommets.

7 sommets => $2x10^{6}$

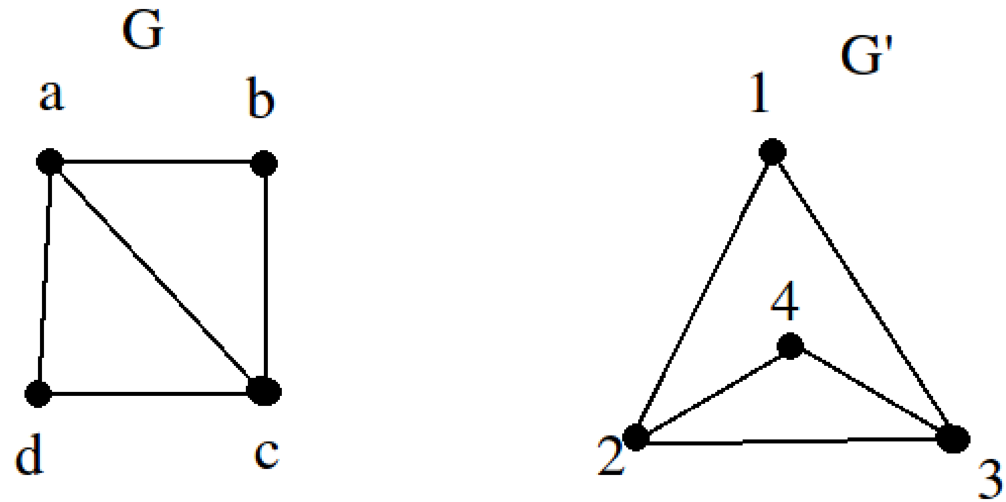
12 sommets => environ 70 milliards de milliards

27 sommets => $4x10^{105}$ (plus que d'atomes dans l'univers)

définition:

2 graphes G=(X, E) et G’=(X’,E’) sont **isomorphes** lorsqu’on peut passer de G à G’ en renommant les sommets de G.

Graphes isomorphes



f(a)=2 f(b)=4 f(c)=3 f(d)=1

f(E)=f({ab,ac,ad,bc,cd})={12,13,23,24,34}=E'

- Lorsque 2 graphes sont isomorphes, on dit volontiers qu'ils sont le même graphe *à un isomorphisme près.*

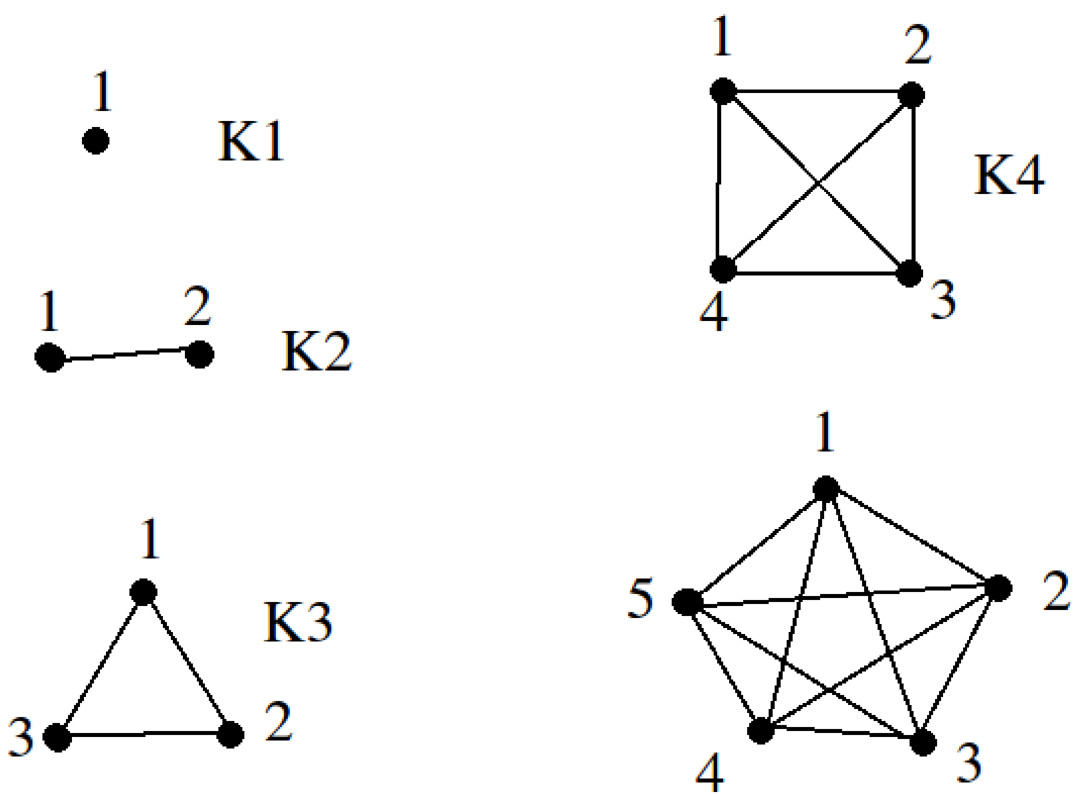
- Un isomorphisme d'un graphe G sur lui-même est **un automorphisme**.

- Remarque:

  G et G’ isomorphes **ssi**

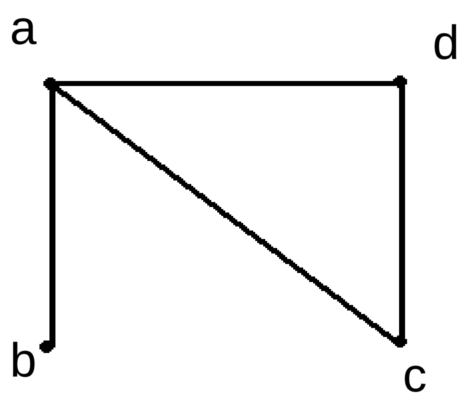
  il existe un ordre sur les sommets de G et un ordre sur les sommets de G’ pour lesquels les matrices d’adjacence sont identiques.

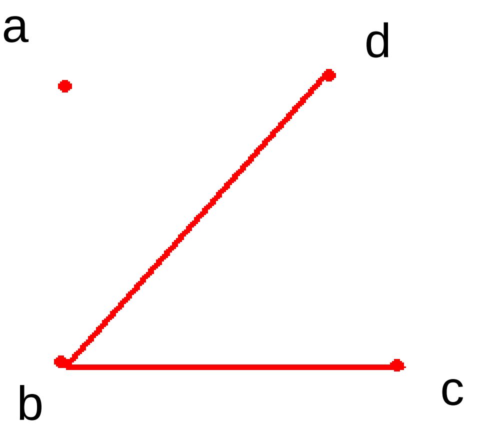
Graphes complets



- Soit le graphe G=(X, E) :
- Le graphe **complémentaire de G , est le graphe ayant les mêmes sommets que G mais toutes les arêtes que G n’a pas.**

Graphes complémentaires:





III) Degrés

- Propriété 1:

Pour tout graphe:

La somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

- Définition:

La séquence des degrés d’un graphe est la suite des degrés de ses sommets, ordonnés par ordre croissant.