Coloration valide des sommets d’un graphe et nombre chromatique

a) définitions

- On appelle **coloration** des sommets d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque sommet. Une coloration utilisant k couleurs est appelée une **k-coloration**.

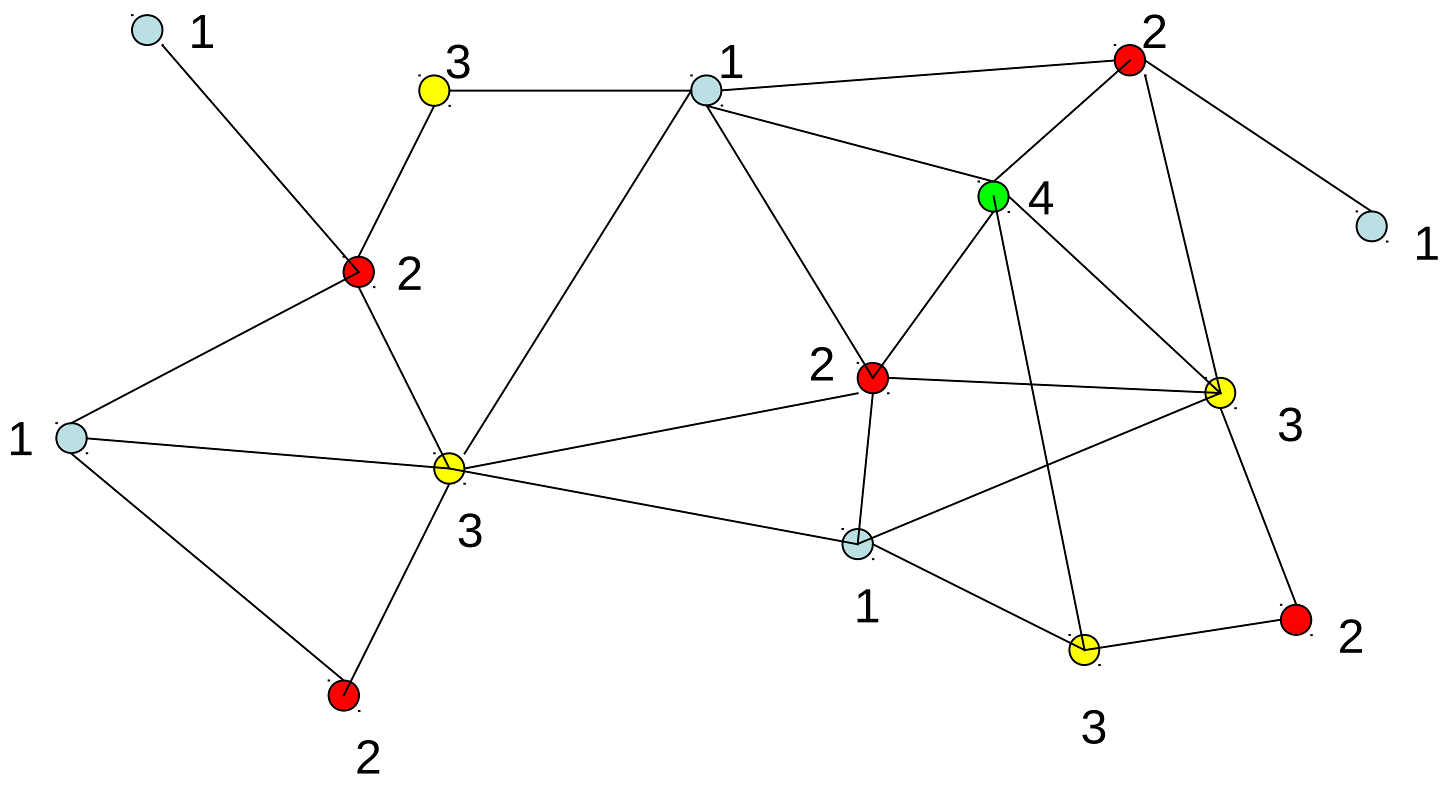
- Une coloration est **valide** lorsque 2 sommets adjacents ont toujours des couleurs différentes.

a) définitions

- Etant donné un graphe G, on appelle **nombre chromatique** de G, le plus petit nombre de couleurs nécessaires à une coloration valide de ses sommets. On note **χ(G)** ce nombre.

- Une coloration valide qui utilise **χ (G)** couleurs est **optimale.**

Cette 4-coloration est-elle optimale?



b) Encadrements du nombre chromatique

- Si **G** est d'ordre **n** on a évidemment **X(G)≤n**
- **<u>Propriété</u>** : Soit G un graphe et Δ(G) le degré maximum d'un de ses sommets.

Alors $\boxed{\chi(G) \leq \Delta(G)+1}$.

b) Encadrements du nombre chromatique

- Pour tout graphe G connexe qui n'est ni un graphe complet, ni un cycle impair, on a :

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

b) Encadrements du nombre chromatique

- **<u>Propriété</u>** :
  - si on note $\boldsymbol{\omega(G)}$ l'ordre maximum d'un sous-graphe complet de G alors

$$\boxed{\boldsymbol{\chi(G) \geq \omega(G)}}$$

c) Coloration gloutonne

Donnée : un graphe **G** et un ordre total sur ses sommets noté (x_1, x_2,…, x_i, …, x_n),
Un ensemble de couleurs {1, 2, 3, …}

Résultat : une coloration **valide** de G.

Pour i allant de 1 à n **faire**
Affecter au sommet x_i la plus petite couleur non déjà affectée à ceux des sommets x_1, x_2, …, x_{i-1}, qui lui sont adjacents.
Fin Pour

Retourner l'ensemble des sommets et les couleurs qui leur sont affectées.

c) Coloration gloutonne

- <u>Remarques</u>:
  - La coloration gloutonne est valide mais pas nécessairement optimale.
  - Etant donné un graphe G il peut exister des colorations qui ne sont pas gloutonnes
  - Aucune coloration gloutonne ne peut utiliser plus de $\Delta(G)+1$ couleurs.
  - Il peut être pratique d’ordonner les sommets par ordre de degrés décroissants.

Exercice:

- Soit le graphe:

G=(X={a, b, c, d, e, f, g, h}, E={ab, ac, af, ag, bg, be, bc, ch, cd, dh, ef})

Déterminez le nombre chromatique de ce graphe.

c) Coloration gloutonne

<u>Proposition</u> : Etant donné un graphe G, il existe toujours au moins un ordre sur les sommets de G tel que la coloration gloutonne calculée à partir de cet ordre soit optimale.

<u>Problème</u> : n ! ordres possibles. Pas de solutions globales satisfaisantes.

d) Coloration des arêtes

- On appelle **coloration valide des arêtes** d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque arête de ce graphe, de sorte que deux arêtes incidentes aient des couleurs différentes.
- Etant donné un graphe G, on appelle **indice chromatique** de G, le plus petit nombre de couleurs nécessaire à une coloration valide de ses arêtes. Ce nombre est noté $\chi'(G)$.

Théorème de Vizing

- Pour tout graphe G on a :

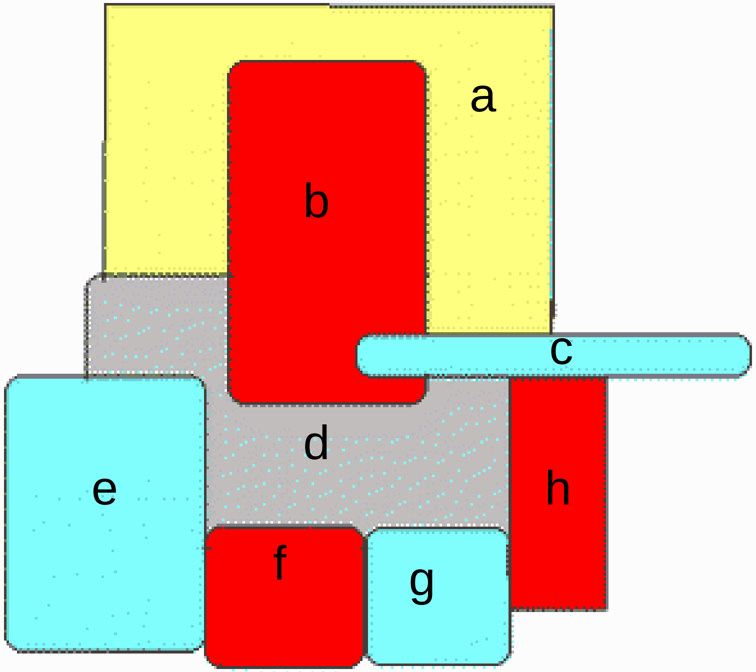
$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$$

- **(il n'y a que 2 valeurs possibles pour l'indice chromatique)**

d) Coloration des arêtes

- (**<u>théorème de Konig 1916</u>** : Pour tout graphe biparti G, l'indice chromatique est égal au plus haut degré d'un sommet.)

e)Le problème des 4 couleurs.



Modélisation par un graphe: