Graphes et langages formels

Département d'informatique

IUT de Montpellier-Sète
Université de

Montpellier
2019-2020

Table des matières

1 Introduction aux graphes

Exercice 0.1

Cinq étudiants sont inscrits chacun à deux options de langues. Les données sont représentées dans le tableau ci-dessous.

	anglais	russe	espagnol	italien	grec
André	X		X		
Béatrice		X			X
Catherine	X			X	
Denis		X	X		
Etienne	X	X			

1. Représenter ces données au moyen d'un graphe.
2. Donner une représentation en termes de graphe pour chacun des problèmes suivants
   (a) On veut savoir qui a la possibilité d'être en binôme avec qui dans une option linguistique.
   (b) On veut savoir quelle est la taille maximum d'un groupe d'étudiants dont aucun ne peut en rencontrer un autre dans une option linguistique.
   (c) On veut savoir dans quelles options linguistiques il est nécessaire de faire une annonce aux étudiants pour être certain qu'elle puisse ensuite être diffusée par les étudiants à toutes les options.
   (d) On veut savoir quels cours de langues peuvent avoir lieu aux mêmes heures.

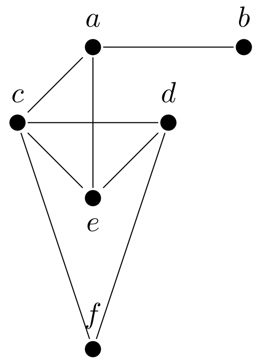
Exercice 0.2

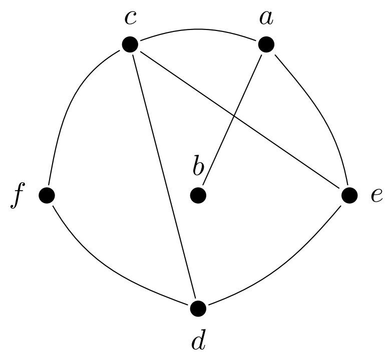
Sept étudiants vont en vacances. Chacun va envoyer une carte postale à exactement trois des autres étudiants.

1. Est-ce possible que pour chaque étudiant x, les étudiants qui écrivent à x soient exactement ceux à qui x a écrit ?
2. On remplace "trois" par "deux" dans l'énoncé. Reprendre la question 1.

Exercice 0.3

Les schémas ci-dessous sont deux représentations de graphes. S'agit-il du même graphe ?





Exercice 0.4

Soit $G = (X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, E = \{ab, ac, bc, ce, cd, de, ef, eg, hi\})$ un graphe.

1. Quel est l'ordre de ce graphe ? Sa séquence de degrés ?
2. Représenter $G[\{a, b, d, g\}]$.
3. Combien y a-t-il de sous-graphes couvrants de G ?
4. Combien y a-t-il de sous-graphes induits de G ?
5. Combien y a-t-il de sous-graphes induits et couvrants de G ?
6. Combien d'arêtes possède le graphe complémentaire de G ?

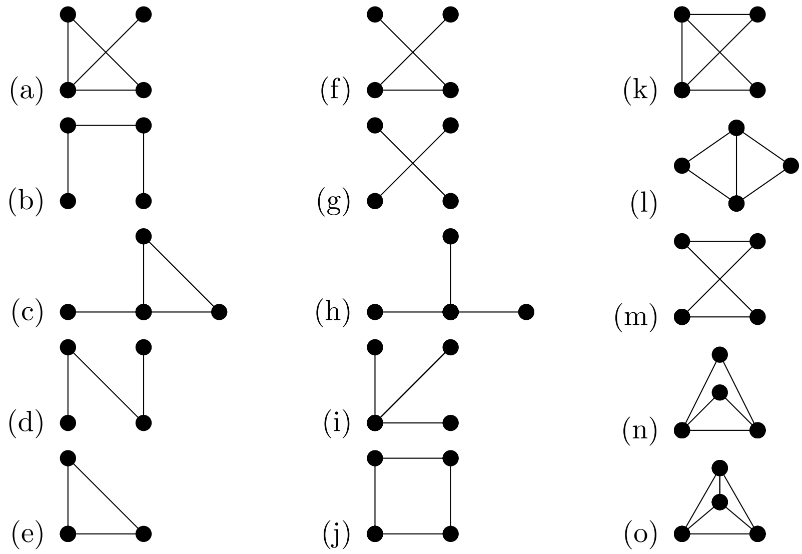
Exercice 0.5

Soient les deux graphes

$$G = (X = \{a, b, c, d, e\}, E = \{ab, bc, cd, de, ea, ad\}),$$

$$G' = (X' = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E' = \{\{1, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 2\}\}).$$

1. Représenter G et G'.
2. Combien y a-t-il de bijections de X vers X' ?
3. Démontrer que G et G' sont isomorphes.
4. Combien y a-t-il d'isomorphismes de G vers G' ?
5. Trouver deux graphes d'ordre 5, ayant la même séquence de degrés, mais non isomorphes entre eux.
6. Combien y a-t-il de graphes, à un isomorphisme près, d'ordre 3 ?
7. Parmi les graphes suivants, lesquels sont identiques à un isomorphisme près ?



Exercice 0.6

Pour chacune des séquences suivantes, existe-t-il un graphe dont ce soit la séquence de degrés ? Si oui en tracer un, sinon démontrer qu'il n'en existe pas.

1. $(1, 2, 3, 4, 5)$
2. $(0, 1, 2, 3, 4)$
3. $(0, 1, 2, 2, 3, 4)$
4. $(0, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5)$
5. $(0, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5)$
6. $(1, 1, 2, 4, 4)$
7. $(1, 1, 2, 3, 4, 5)$

Exercice 0.7

Soit $S = (2, 2, 2, 3, 3)$.

1. Si G est un graphe dont la séquence de degrés est S, quels sont l'ordre et la taille de G ? Quels sont l'ordre, la taille et la séquence de degrés du complémentaire $\overline{G}$ de G ?
2. Dessiner tous les graphes, différents à un isomorphisme près, ayant pour séquence de degrés S, ainsi que leurs complémentaires.
3. Soit G un graphe d'ordre n, de taille m, de séquence de degrés $(d_1, \ldots, d_n)$. Quels sont l'ordre, la taille et la séquence de degrés du complémentaire $\overline{G}$?

Exercice 0.8

Dessiner tous les graphes (différents à un isomorphisme près) d'ordre au plus 7 qui sont isomorphes à leur complémentaire. (Indication : déterminer tout d'abord le nombre d'arête d'un tel graphe, puis les séquence de degrés possibles, en se servant de l'exercice précédent)

Exercice 0.9

Dans une assemblée, on suppose que si une personne A connaît une personne B, alors la personne B connaît la personne A.

1. Montrer qu'il existe une assemblée de 5 personnes où on ne peut pas trouver 3 personnes qui ne se connaissent pas (au sens où aucune ne connaît aucune des deux autres), ni 3 personnes qui se connaissent (au sens où chacune connaît les deux autres).
2. Montrer que dans toute assemblée d'au moins 6 personnes, on peut toujours trouver 3 personnes qui ne se connaissent pas, ou bien 3 personnes qui se connaissent.

Exercice 0.10

On considère la suite de graphes $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie récursivement de la manière suivante :

— $G_0 = (\{a\}, \emptyset)$.

— Si $G_n = (X_n = \{x_1, \ldots, x_k\}, E_n)$, alors $G_{n+1} = (X_{n+1}, E_{n+1})$ est défini par :

  — $X_{n+1} = X_n \cup X'_n$, avec $X'_n = \{x'_1 \ldots, x'_k\}$

  — $E_{n+1} = E_n \cup E'_n \cup \{\{x_i, x'_i\}, i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$, où

$$E'_n = \{\{x'_i, x'_j\},\ \text{pour tout } \{i,j\} \text{ tel que } \{x_i, x_j\} \in E_n\}.$$

1. Sans chercher à nommer les sommets, représenter G_0, G_1, G_2, G_3 et éventuellement G_4.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n| = 2^n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous les sommets de G_n sont de degré n.
4. Déduisez des deux questions précédentes le nombre d'arêtes de G_n.
5. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, le graphe G_n est hamiltonien (un graphe est hamiltonien s'il a un sous-graphe couvrant qui est un cycle).

2 Chaînes, cycles et conditions nécessaires d'acyclicité

Exercice 0.11

1. Soit $G = (X = \{a, b, c, d, e, f\}, E = \{bc, de, ef, fd\})$ un graphe. Donner toutes les chaînes de G, puis tous les cycles de G.
2. Soit $G' = (X' = \{a, b, c, d, e, f\}, E' = \{ab, ae, bc, bd, cd, ce, ef\})$ un graphe.
   (a) Représenter les graphes G', $G \cup G'$ et $G \cap G'$.
   (b) Donner tous les cycles de G'.
   (c) Donner tous les sous-graphes induits de G' qui sont des cycles.
   (d) Donner tous les sous-graphes couvrants de G' qui sont des chaînes.
   (e) Donner $G'[a, b, c, d]$.
   (f) Donner toutes les chaînes de G' d'extrémités a et b.

Exercice 0.12

Pour chacune des séquences ci-dessous, donner lorsque c'est possible deux graphes ayant cette séquence de degrés : l'un ayant au moins un cycle et l'autre sans cycle.

1. $S_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3)$
2. $S_2 = (2, 2, 2, 2, 3, 3)$
3. $S_3 = (0, 0, 2, 2, 2, 2)$
4. $S_4 = (1, 1, 3, 3, 4, 4)$
5. $S_5 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$
6. $S_6 = (1, 1, 2, 2)$

Exercice 0.13

Soit G un graphe d'ordre n et de taille m. L'objectif de cet exercice est d'explorer tous les cas d'utilisation de la propriété suivante.

G **sans cycle** $\Rightarrow m \leq n - 1$

1. Donner la contraposée de cette propriété.
2. Soit G un graphe sans cycle d'ordre 8. Que peut-on dire de sa taille ?
3. Soit G un graphe d'ordre 8 possédant 8 arêtes. Que peut-on dire de ce graphe ?

4. Soit G un graphe d'ordre 8 possédant 6 arêtes. Que peut-on dire de ce graphe ?
5. Soit G un graphe n'ayant qu'un seul cycle. Démontrer que $m \leq n$.
6. Soit $S = (1, 1, 1, 1, 2, 3, 3)$ la séquence de degrés d'un graphe G. Le graphe G est-il nécessairement sans cycle ? Déterminer tous les graphes ayant cette séquence de degrés, à un isomorphisme près.

Exercice 0.14

1. Soient le graphe

$$G = (\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, \{ab, bc, cd, de, ef, ag, gh, hb, ci, ij, je\})$$

et les deux sous-graphes de G

$$P = (X = \{a, b, c, d, e, f\}, E = \{ab, bc, cd, de, ef\})$$

et $P' = (X' = \{a, b, c, e, f, g, h, i, j\}, E' = \{bc, ef, ci, ij, je, ag, gh, hb\})$.

(a) Démontrer que P et P' sont des chaînes (par exemple, en donnant un ordre adéquat à leurs sommets).

(b) Représenter le sous-graphe $H = (X \cup X', (E \cup E') - (E \cap E'))$ et donner sa séquence de degrés.

2. Soit G un graphe quelconque, et soient $P = (X, E)$ et $P' = (X', E')$ deux chaînes **distinctes** de G ayant les mêmes extrémités x et y.

(a) Peut-on avoir $X \subseteq X' \wedge X \neq X'$? Si oui, donner un exemple.

(b) Peut-on avoir $E = E'$? Si oui, donner un exemple.

(c) Considérons le sous-graphe H de G défini par $H = (X \cup X', (E \cup E') - (E \cap E'))$.

i. Démontrer que H admet au moins une arête.

ii. Démontrer que H n'a pas de sommet de degré 1.

iii. Que peut-on en conclure sur le graphe G ?

(d) Dans cette question, on suppose qu'il existe une arête $e = uv$ de P qui n'est pas dans P' (avec u et v deux sommets de P).

i. En utilisant la transitivité de la relation "il existe une chaîne d'extrémités x et y", démontrer qu'il existe une chaîne Q d'extrémités u et v qui ne passe pas par e.

ii. Que peut-on dire du graphe $Q + e$ (c'est-à-dire le graphe obtenu à partir de Q en ajoutant l'arête e) ?

iii. Que peut-on en conclure sur le graphe G ?

Exercice 0.15

Etude d'un algorithme :
Algorithme Detectcycle
Donnée $G = (X, E)$ un graphe
Résultat Vrai si G possède un cycle, faux sinon
$E' \leftarrow E$
$X' \leftarrow X$
$G' \leftarrow (X', E')$
Tant que il reste des sommets de degré 1 dans G' faire
Choisir x un sommet de degré 1 dans G', dont l'arête incidente est notée e
$X' \leftarrow X' - \{x\}$
$E' \leftarrow E' - \{e\}$
$G' \leftarrow (X', E')$
Fin tant que
Retourner $(E' \neq \emptyset)$

1. Soit $G = (X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, E = \{ab, bc, cd, de, cf, cg, gf, hi\})$. Faire une trace de l'algorithme avec G pour donnée initiale. On notera X'_n, E'_n les ensembles X', E' à l'issue du $n^{\text{ème}}$ passage dans la boucle "tant que", et $G'_n = (X'_n, E'_n)$ le graphe correspondant. On notera aussi $X'_0 = X$ et $E'_0 = E$. De même, pour $n \geq 1$ on notera x_n et e_n les valeurs respectives de x et e à l'issue du $n^{\text{ème}}$ passage dans la boucle "tant que".
2. Soit G un graphe quelconque. Pourquoi la boucle "tant que" converge-t-elle ? On note N_G le nombre total de passages dans la boucle pour un graphe G.
3. Supposons, dans cette question seulement, que G est sans cycle. Démontrer par récurrence la proposition suivante : $\forall n \in 0, 1, \ldots, N_G, G'_n$ est sans cycle.
4. Supposons, dans cette question seulement, que G a au moins un cycle. Démontrer par récurrence la proposition suivante : $\forall n \in 0, 1, \ldots, N_G, G'_n$ a au moins un cycle.
5. Démontrer que l'algorithme est correct.

3 Chaînes et connexité

Exercice 0.16

Soit $G = (X, E)$ un graphe, avec $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $E = \{ac, af, bd, cf\}$.

1. Donner la classe de connexité de chaque sommet de G.
2. En déduire le nombre de classes de connexité de G.
3. Dessiner les composantes connexes de G.

Exercice 0.17

On considère l'ensemble des graphes G dont l'ensemble des sommets est $\{a, b, c, d\}$, et tels que $G[\{a, b, c\}]$, $G[\{b, c, d\}]$ et $G[\{a, c, d\}]$ sont connexes mais pas $G[\{a, b, d\}]$. Notons m le nombre d'arêtes de G.

1. Démontrer qu'un tel graphe G ayant ces propriétés est nécessairement connexe, et en déduire que $m \geq 3$.
2. Démontrer que $m \leq 4$.
3. Déterminer tous les graphes G ayant 3 arêtes.
4. Déterminer tous les graphes G ayant 4 arêtes.

Exercice 0.18

1. Dessiner, si possible, un graphe connexe G_1 d'ordre 4 et ayant le plus petit nombre possible d'arêtes, tel que $\overline{G_1}$ soit connexe.
2. Dessiner, si possible, un graphe connexe G_2 d'ordre 4 et ayant le plus petit nombre possible d'arêtes, tel que $\overline{G_2}$ soit non connexe.
3. Dessiner, si possible, un graphe non connexe G_3 d'ordre 4 et ayant le plus petit nombre possible d'arêtes, tel que $\overline{G_3}$ soit connexe.
4. Dessiner, si possible, un graphe non connexe G_4 d'ordre 4 et ayant le plus petit nombre possible d'arêtes, tel que $\overline{G_4}$ soit non connexe.
5. Démontrer que si G est non connexe, alors $\overline{G}$ est connexe.

Exercice 0.19
Algorithmes sur la connexité

Pour écrire les algorithmes de cet exercice, on admettra que l'on sait :

— Déterminer le voisinage d'un sommet d'un graphe G
— Choisir un élément dans un ensemble
— Faire la réunion, la différence de deux ensembles
— Déterminer le complémentaire dans E d'une partie A de E

— Déterminer si un élément appartient à un ensemble

Ecrire les algorithmes suivants.

1. **fonction** ClasseDeConnexité(G=(X,E) : graphe ; a : sommet)
   Prérequis : a est un sommet du graphe G
   Résultat : retourne la classe de connexité de a dans G
2. **fonction** Connexe(G=(X,E) : graphe)
   Résultat : retourne vrai si G est connexe, faux sinon
3. **fonction** Connectés(G=(X,E) : graphe ; a,b : sommet)
   Prérequis : a et b sont des sommets du graphe G
   Résultat : retourne vrai s'il existe une chaîne dans G d'extrémités a et b, faux sinon
4. **fonction** Chaîne(G=(X,E) : graphe ; a,b : sommet)
   Prérequis : a et b sont des sommets du graphe G
   Résultat : retourne la liste ordonnée des sommets d'une chaîne dans G d'extrémités a et b s'il en existe une, la suite vide () sinon

Exercice 0.20

Soit $G = (X, E)$ un graphe, avec $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ et

$$E = \{ac, ag, ah, bi, cg, dk, dl, ej, el, fh, fk, gh, hi, hk, kl\}.$$

Donner tous les isthmes de G.

4 Arbres

Exercice 0.21

Pour tous les entiers k possibles, trouver tous les arbres $A = (X, E)$, à un isomorphisme près, tels que $|X| \leq 6$ et de degré maximum k.

Exercice 0.22

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$, de taille $n-1$ et possédant 2 composantes connexes. Démontrer que G possède un cycle.

Exercice 0.23

Un alcane est une molécule chimique constituée d'atomes de carbone (C) et d'atomes d'hydrogène (H). On peut modéliser cette molécule par un graphe connexe et sans cycle, avec pour sommets n_C carbones de degré 4 et n_H hydrogènes de degré 1.

1. Représenter tous les alcanes tels que $n_C \leq 5$.
2. Soit G un graphe représentant un alcane. Déterminer son ordre et sa taille en fonction de n_C et n_H.
3. Démontrer que $n_H = 2n_C + 2$.

Exercice 0.24

On considère l'ensemble T de graphes défini de la manière suivante :

— Tous les graphes isomorphes à $(\{1\}, \emptyset)$ appartiennent à T.

— Tout graphe G de T d'ordre $n \geq 2$ est obtenu à partir de deux graphes de T, $G_1 = (X_1, E_1)$ et $G_2 = (X_2, E_2)$, d'ordres strictement inférieurs à n, en ajoutant une seule arête x_1x_2, où $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$. Donc $G = (X_1 \cup X_2, E_1 \cup E_2 \cup \{x_1x_2\})$.

1. Dessiner tous les graphes de T d'ordre inférieur ou égal à 5, à un isomorphisme près.
2. Démontrer, à l'aide d'une récurrence de seconde forme, que les éléments de T sont connexes.
3. Démontrer, à l'aide d'une récurrence de seconde forme, que les éléments de T sont sans cycles.
4. Que peut-on dire sur l'ensemble T ?

Exercice 0.25

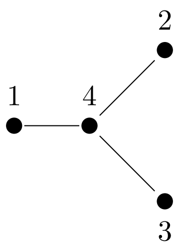
Soit G un graphe dont la séquence de degrés est $(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$.

1. Quels sont l'ordre et la taille de G ?
2. Quelle est la séquence de degrés de $\overline{G}$?
3. Combien y a-t-il, à un isomorphisme près, de graphes ayant pour séquence de degrés $(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$?
4. Pour chacun des graphes G de la question précédente, donner à un isomorphisme près la représentation graphique de tous les sous-graphes d'ordre 5 qui sont des arbres.

Exercice 0.26

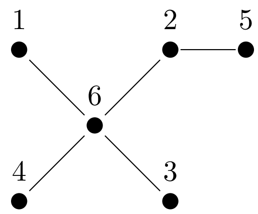
Pour tout arbre $T = (X, E)$ d'ordre $n \geq 2$, on dit qu'un ordre sur les sommets $(x_1, \ldots, x_n)$ est un ordre de construction lorsque pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, x_i a un voisin et un seul dans $\{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\}$ (autrement dit, chaque sommet a un voisin et un seul parmi les sommets qui le précèdent dans la liste $(x_1, \ldots, x_n)$).

Par exemple, pour l'arbre T ci-dessous, $(1, 4, 2, 3)$ est un ordre de construction, mais $(3, 2, 4, 1)$ n'en est pas un (car 2 n'a pas de voisin dans $\{3\}$, et de plus 4 a deux voisins dans $\{3, 2\}$).

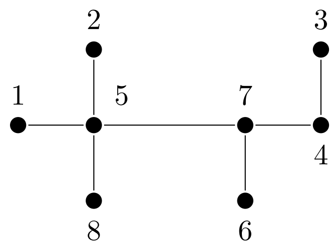


1. Donner, pour chacun des arbres suivants, un ordre de construction :

T_1



T_2



2. Soit $P_5 = (X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E = \{12, 23, 34, 45\})$ une chaîne d'ordre 5. Donner un ordre de construction de la forme (a, b, c, d, e) tel que l'ordre inverse (e, d, c, b, a) ne soit pas un ordre de construction.

3. Soient un arbre $T = (X, E)$ et un ordre de construction $(x_1, \ldots, x_n)$ pour T. Que vaut $\deg_T(x_n)$?
4. Pour tout $n \geq 2$, on note P_n la chaîne d'ordre n définie par :

$$P_n = (X_n = \{1, 2, \ldots, n\}, E_n = \{12, 23, \ldots, \{n-1, n\}\}).$$

   (a) Donner tous les ordres de construction de P_2.

   (b) Donner tous les ordres de construction de P_3.

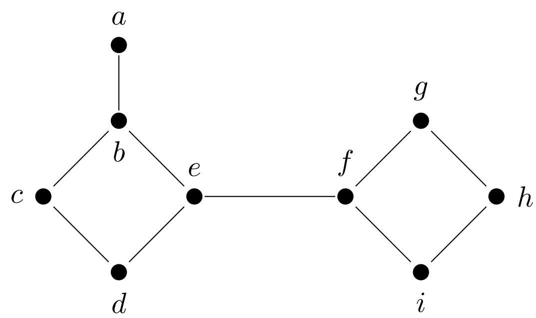
   (c) Démontrer par récurrence sur $n \geq 2$ que P_n admet 2^{n-1} ordres de construction.
5. Démontrer par récurrence sur $n \geq 2$ que tout arbre $T = (X, E)$ d'ordre n admet un ordre de construction.
6. Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$, et G un graphe dont le plus petit degré est supérieur ou égal à $n - 1$. On veut démontrer que G a un sous-graphe isomorphe à T. Pour cela, on considère un ordre de construction $(x_1, \ldots, x_n)$ sur les sommets de T.

   Démontrer par récurrence sur $i \in \{1, \ldots, n\}$ que G a un sous-graphe isomorphe à $T[\{x_1, \ldots, x_i\}]$.

5 Exercices supplémentaires sur les graphes

Exercice 0.27

Soit un graphe $G = (X, E)$ dont une représentation est donnée ci-dessous :



1. Combien G a-t-il de chaînes couvrantes ?
2. Quelle est la séquence de degrés de G ?
3. Quelle est la taille de $\overline{G}$?
4. Démontrer que tout graphe ayant la même séquence de degrés que G admet nécessairement un cycle.
5. Dans un graphe connexe G, on appelle distance du sommet x au sommet y, notée $d_G(x, y)$, la longueur de la plus courte chaîne d'extrémités x et y. Donner les distances suivantes, pour le graphe G ci-dessus :
   (a) $d_G(a, a) =$
   (b) $d_G(a, b) =$
   (c) $d_G(a, f) =$
   (d) $d_G(a, h) =$
6. On appelle diamètre d'un graphe la plus grande distance entre deux de ses sommets. Quel est le diamètre du graphe G ci-dessus ?

Exercice 0.28

Un graphe est appelé k-régulier si tous ses sommets sont de degré k.

1. Quel est l'ordre minimal, pour un graphe 3-régulier ?
2. Quel est le nombre d'arêtes d'un graphe 3-régulier, en fonction de son ordre n ?
3. Que peut-on dire du complémentaire d'un graphe 3-régulier d'ordre n ?

4. Construire des graphes 3-réguliers d'ordre $n = 4$, puis $n = 5$, 6 et 7 si possible.
5. Donner, à un isomorphisme près, tous les graphes 3-réguliers d'ordre 6 puis tous les graphes 5-réguliers d'ordre 8.
6. Démontrer que tout graphe 3-régulier a au moins un cycle.

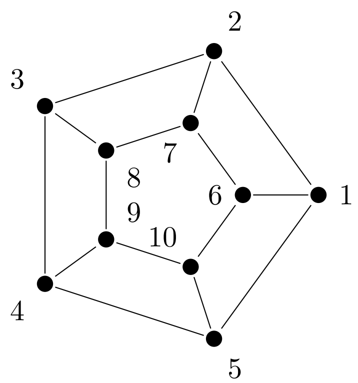
Exercice 0.29

Soit G un graphe de séquence de degrés $(2, 2, 3, 3, 3, 3, 6)$.

1. Combien G a-t-il d'arêtes ?
2. Le graphe G a-t-il nécessairement un cycle ? Justifier la réponse.
3. On note g le sommet de degré 6. Notons $G - g$ le graphe obtenu à partir du graphe G, en enlevant le sommet g ainsi que toutes les arêtes incidentes à g. Quelle est la séquence de degrés de $G - g$?
4. Donner, à un isomorphisme près, tous les graphes G possibles.

Exercice 0.30

On considère le graphe G suivant :

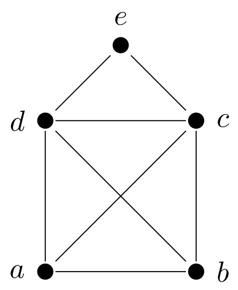


1. Combien G a-t-il de sous-graphes induits qui sont des cycles ?
2. Dénombrer toutes les chaînes de G d'extrémités 1 et 4 de longueur maximale.
3. Est-il possible de colorier les sommets de G avec 2 couleurs de sorte que des sommets voisins soient de couleurs différentes ? Avec 3 couleurs ?

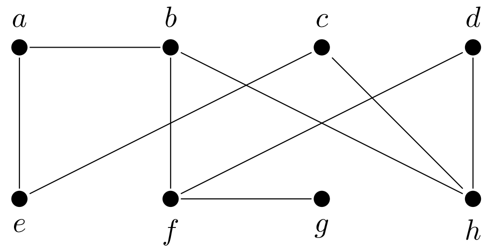
Exercice 0.31

Un graphe est appelé hamiltonien s'il possède un sous-graphe couvrant qui est un cycle. Les graphes suivants sont-ils hamiltoniens ?

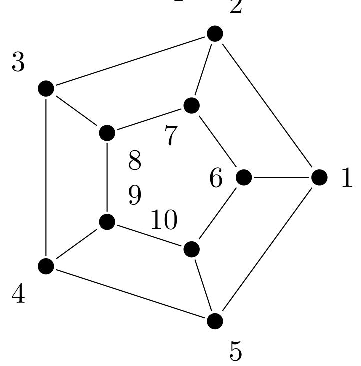
G_1



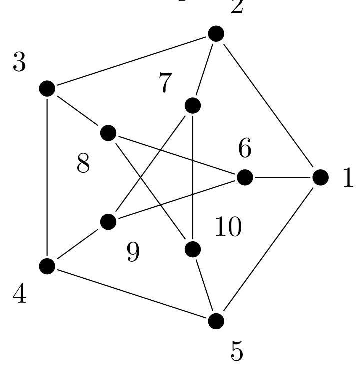
G_3



G_2



G_4



Exercice 0.32

Pour tout $n \geq 2$, considérons le graphe $G_n = (X_n, E_n)$ défini par :
— $X_n = \{0,1\}^n$ (les sommets sont les mots binaires de longueur n)
— Deux sommets sont voisins s'ils diffèrent de 2 bits exactement.

1. Représenter G_2 et G_3.
2. Déterminer, en fonction de n, l'ordre de G_n.
3. Déterminer, en fonction de n, la taille de G_n.

Exercice 0.33

Soit G un graphe dont tous les sommets dont de degré pair, sauf deux sommets qui sont de degré impair (on notera x et y ces deux sommets).

1. Déterminer, à un isomorphisme près, tous les graphes G possibles d'ordre 4.
2. Démontrer que x et y sont nécessairement dans la même composante connexe.

3. En déduire qu'un graphe dont tous les sommets sont de degré pair n'a pas d'isthme.
4. Montrer que la réciproque est fausse ("Si un graphe n'a pas d'isthme, alors tous les sommets sont de degré pair").

Exercice 0.34

On considère les séquences de degrés S_i, avec $i \in \mathbb{N}$, définies récursivement de la manière suivante :

$S_0 = (0, 0)$.

On obtient S_{n+1} à partir de S_n en ajoutant 1 à tous les degrés de S_n, puis en ajoutant un sommet de degré $n + 2$ (par exemple, $S_1 = (1, 1, 2)$).

1. Déterminer S_2, S_3 et S_4.
2. Déterminer, pour chacune des séquences S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4, des graphes G_0, G_1, G_2, G_3 et G_4 ayant cette séquence de degrés.
3. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, si G est un graphe qui vérifie S_n, alors G est connexe.
4. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, si G est un graphe qui vérifie S_n, alors G possède un cycle.
5. Démontrer par récurrence chacune des propositions suivantes :
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout graphe ayant pour séquence de degrés S_n possède $n + 2$ sommets.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout graphe ayant pour séquence de degrés S_n possède $\frac{n(n+3)}{2}$ arêtes.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un graphe ayant pour séquence de degrés S_n.

6 Langages formels

Exercice 0.35

Soit $X = \{a, b, c\}$ un alphabet et $m = abca$ un mot sur X. Donner tous les préfixes, les suffixes, les facteurs et les sous-mots de m.

Exercice 0.36

Soit $m = aba$. Combien y a-t-il de factorisations de m :

1. en deux facteurs différents de ε ?
2. en deux facteurs quelconques ?
3. en trois facteurs différents de ε ?
4. en trois facteurs quelconques ?

Exercice 0.37

Soit $X = \{a, b\}$ un alphabet et C le sous-ensemble des mots de X^* ayant aba comme facteur et b^3 comme sous-mot.

1. Quelle est la longueur minimale, notée k, des mots de C ?
2. Combien y a-t-il de mots de C de longueur k ?
3. Soit $n \geq 0$ un entier. Quel est, en fonction de n, le nombre de mots de C de longueur inférieure ou égale à n et n'ayant pas a^3 comme sous-mot ?

Exercice 0.38

Soit $X = \{a, b\}$ un alphabet, muni de la relation d'ordre $\leq$ telle que $a \leq b$. On énumère les mots de X^* selon l'ordre hiérarchique : le numéro 1 est le plus petit (donc ε), le numéro 2 est le suivant, ...

1. Donner les 10 premiers mots.
2. Soit k un entier strictement positif. Donner, en fonction de k, le nombre de mots de longueur strictement inférieure à k. En déduire le numéro de a^k.
3. Quel est le numéro de $m = abaabbbab$?
4. Quel est le mot de X^* dont le numéro est 300 ?

Exercice 0.39

Soit $X = \{a, b\}$ un alphabet. Si A et B sont deux langages sur X, on note $A \bullet B$ le langage défini par

$$A \bullet B = \{u \bullet v, u \in A \wedge v \in B\}.$$

Dans chacun des cas suivants, calculer $A \bullet B$.

1. $A = \{a, ab, bb\}$ et $B = \{\varepsilon, b, aa\}$.
2. $A = \emptyset$ et $B = \{a, ba, bb\}$.
3. $A = \{\varepsilon\}$ et $B = \{b, aba\}$.
4. $A = \{aa, ab, ba\}$ et $B = X^*$.

Exercice 0.40

Soient $X = \{a, b\}$ un alphabet et L un langage sur X^*. On définit

$$Pref(L) = \{u \in X^*, \exists v \in L, u \text{ est un préfixe de } v\}.$$

Déterminer $Pref(L)$ dans chacun des cas suivants :

1. $L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$.
2. $L_2 = \{a^n b^m, 0 \leq n \leq m\}$.
3. $L_3 = \{a^n b^m, 0 \leq m \leq n\}$.
4. $L_4 = \{u \in X^*, |u|_a = |u|_b\}$.

7 Automates finis

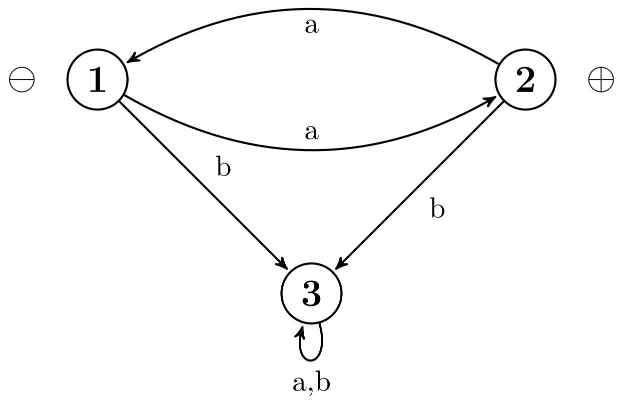
Exercice 0.41

Soit $A = (X, E, e_0, F, \sigma)$ l'automate défini par : $X = \{a, b\}$, $E = \{1, 2, 3\}$, $e_0 = 1$, $F = \{3\}$, $\sigma(1, a) = 2$, $\sigma(1, b) = 1$, $\sigma(2, a) = 2$, $\sigma(2, b) = 3$, $\sigma(3, a) = 3$ et $\sigma(3, b) = 3$.

1. Donner la table et le graphe de transition de A.
2. Les mots *bbabb*, *aabaa*, *bbaaa* appartiennent-ils au langage $L(A)$?
3. Donner tous les mots de $L(A)$ de longueur inférieure ou égale à 3.
4. Déterminer $L(A)$ (avec preuve).

Exercice 0.42

Soit A l'automate sur $X = \{a, b\}$ dont le graphe de transition est :

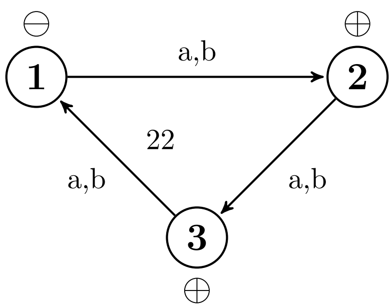


1. Déterminer X, E, e_0, F, σ tels que $A = (X, E, e_0, F, \sigma)$.
2. Donner tous les mots de $L(A)$ de longueur inférieure ou égale à 5.
3. Déterminer $L(A)$ (et en donner la preuve).

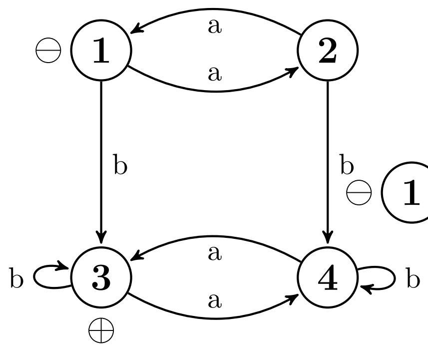
Exercice 0.43

Soient A_1, A_2, A_3 les automates de graphes de transition représentés ci-dessous :

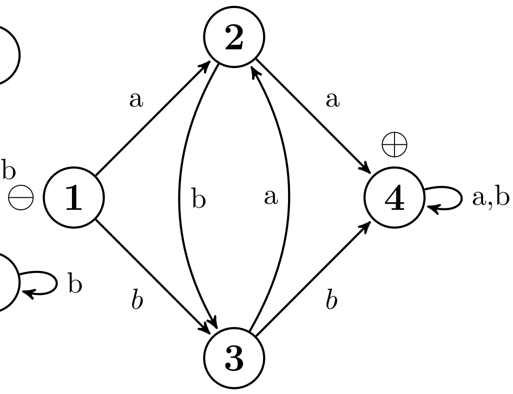
A_1



A_2



A_3



Pour i de 1 à 3 :

1. Donner les 7 premiers mots de $L(A_i)$ dans l'ordre hiérarchique.
2. Donner, si c'est possible, les 7 premiers mots de $L(A_i)$ dans l'ordre lexicographique.
3. Déterminer $L(A_i)$.

Exercice 0.44

Soit $X = \{a, b\}$. Pour i de 1 à 11, dessiner le graphe de transition d'un automate A_i reconnaissant le langage L_i.

1. L_1 : ensemble des mots de X^* ayant aa comme sous-mot,
2. L_2 : ensemble des mots de X^* ayant aa comme facteur,
3. L_3 : ensemble des mots de X^* ayant aa comme préfixe,
4. L_4 : ensemble des mots de X^* ayant aa comme suffixe,
5. $L_5 = \{ab\}$,
6. $L_6 = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$,
7. $L_7 = \{m \in X^* \mid |m|_b \mod 3 = 1\}$ (L_7 est l'ensemble des mots de X^* dont le nombre de b modulo 3 est égal à 1),
8. $L_8 = \{m \in X^* \mid |m|_b \mod 3 \neq 1\}$,
9. $L_9 = \{m \in X^* \mid |m|_a \text{ est pair}\}$,
10. $L_{10} = L_7 \cap L_9$,
11. $L_{11} = L_7 \cup L_9$.

Exercice 0.45

Les langages suivants sont-ils rationnels ? Si oui, dessiner le graphe de transition d'un automate reconnaissant ce langage.

1. $L_1 = \{a^n b^p, n \geq 1, p \geq 1\}$,
2. $L_2 = \{a^n b^p, n \geq 0, p \geq 0\}$,
3. $L_3 = \{a^n b^n, n \geq 0\}$,
4. $L_4 = \{a^n b^p, n > p \geq 0\}$,
5. $L_5 = \{(ab)^n, n \geq 1\}$.

Exercice 0.46

On considère $A = (X, E, e_0, F, \sigma)$ l'automate défini par : $X = \{a, b\}$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $e_0 = 1$, $F = \{4\}$, $\sigma(1, a) = 2$, $\sigma(1, b) = 1$, $\sigma(2, a) = 3$, $\sigma(2, b) = 1$, $\sigma(3, a) = 4$, $\sigma(3, b) = 1$, $\sigma(4, a) = 4$, $\sigma(4, b) = 4$.

1. (a) Donner sans justification le graphe de transition de l'automate A.
   (b) Les mots a^2b^2a et ba^3b^2 appartiennent-ils au langage $L(A)$?
   (c) Donner sans justification les 6 premiers mots de $L(A)$ dans l'ordre hiérarchique, puis dans l'ordre lexicographique si possible.
   (d) Donner sans justification le graphe de transition d'un automate reconnaissant $L(A) \cup \{\varepsilon\}$.
2. Soit $L = \{m \in X^* \mid \exists u, v \in X^*, m = u \cdot a^3 \cdot v\}$. Montrer que $L(A) = L$.
3. Pour tout langage U sur X, on note U^* le langage sur X contenant les mots pouvant se factoriser en un nombre (éventuellement nul) de facteurs appartenant à U, c'est-à-dire

   $$U^* = \{\varepsilon\} \cup \{m \in X^* \mid \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists m_1, \ldots, m_k \in U, m = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k\}.$$

   Soit $L_1 = \{a^3, b\}$.

   (a) Donner sans justification les 6 premiers mots de L_1^* dans l'ordre hiérarchique, puis dans l'ordre lexicographique si possible.
   (b) Donner sans justification le graphe de transition d'un automate reconnaissant L_1.
   (c) Donner sans justification le graphe de transition d'un automate reconnaissant L_1^*.
   (d) Donner sans justification le graphe de transition d'un automate reconnaissant $L_1^* \cap L$.

Exercice 0.47

On considère $A = (X, E, e_0, F, \sigma)$ l'automate défini par : $X = \{a, b\}$, $E = \{1, 2, 3\}$, $e_0 = 1$, $F = \{3\}$, $\sigma(1, a) = 2$, $\sigma(1, b) = 3$, $\sigma(2, a) = 2$, $\sigma(2, b) = 3$, $\sigma(3, a) = 3$, $\sigma(3, b) = 3$.

1. Donner sans justification le graphe de transition de l'automate A.
2. Les mots a^2b^2a et a^4 appartiennent-ils au langage $L(A)$?
3. Donner sans justification les 5 premiers mots de $L(A)$ dans l'ordre hiérarchique, puis dans l'ordre lexicographique si possible.
4. Démontrer que le langage $L = L(A)$ est l'ensemble de tous les mots de X^* contenant au moins un b.
5. Donner sans justification le graphe de transition d'un automate A_1 ayant moins d'états que A et tel que $L(A_1) = L$.
6. Donner sans justification le graphe de transition d'un automate reconnaissant le langage :
   (a) $L_1 = L \cup \{\varepsilon\}$,
   (b) $L_2 = L \cup \{a\}$,
   (c) $L_3 = \{m \in X^* \mid |m| \text{ est pair}\}$,
   (d) $L_4 = L \cap L_3$.

8 Grammaires algébriques

Exercice 0.48

Soit la grammaire $G = (X, Y, \mathcal{P})$, avec $X = \{a, b\}$, $Y = \{S, T\}$ et $\mathcal{P} = \{S \to aS \mid bbT, T \to bT \mid \varepsilon\}$.

1. Donner tous les mots m de $(X \cup Y)^*$ tels que $S \vdash m$.
2. Donner tous les mots m de $(X \cup Y)^*$ tels que $S \vdash^2 m$.
3. Donner tous les mots m de X^* tels que $T \vdash^* m$ et $|m| \leq 4$.
4. Donner tous les mots m de X^* tels que $S \vdash^* m$ et $|m| \leq 4$.
5. Donner tous les mots m de X^* tels que $TS \vdash^* m$ et $|m| \leq 4$.
6. Les mots $aabb$, $aaab$, $abbbb$, $abbba$ appartiennent-ils à $L(G, S)$? Si oui, donner une suite de dérivations immédiates.
7. (a) Déterminer $L(G, T)$, en donnant la preuve.
   (b) Démontrer que
   $$m \in L(G, S) \iff \big(\exists u \in L(G, T), \exists n \in \mathbb{N}, m = a^n \cdot b^2 \cdot u\big)\,.$$
   (c) En déduire $L(G, S)$.
   (d) Donner les graphes de transition d'automates A_1 et A_2 tels que $L(A_1) = L(G, T)$ et $L(A_2) = L(G, S)$.

Exercice 0.49

Soit la grammaire $G = (X, Y, \mathcal{P})$, avec $X = \{a, b\}$, $Y = \{S\}$ et $\mathcal{P} = \{S \to aaS \mid bS \mid aa \mid b\}$.

1. Montrer que $bbbaa \in L(G, S)$ par une suite de dérivations immédiates.
2. Donner tous les mots de longueur inférieure ou égale à 4 du langage $L(G, S)$.
3. Déterminer $L(G, S)$, en donnant la preuve.
4. Donner le graphe de transition d'un automate reconnaissant le langage $L(G, S)$.

Exercice 0.50

Soit la grammaire $G = (X, Y, \mathcal{P})$, avec $X = \{a, b\}$, $Y = \{S, T\}$ et $\mathcal{P} = \{S \to aS \mid aT \mid \varepsilon, T \to aS \mid bT\}$.

1. Les mots $abba$ et $ababa$ sont-ils des mots du langage $L(G, S)$?

2. Trouver tous les mots de longueur inférieure ou égale à 6 du langage $L(G, S)$ qui contiennent exactement 2 lettres b.
3. Donner sans justification $L(G, S)$.
4. Donner le graphe de transition d'un automate reconnaissant le langage $L(G, S)$.

Exercice 0.51

Soit $X = \{a, b\}$. Pour chaque langage L des exercices 0.44 et 0.45, donner une grammaire $G = (X, Y, \mathcal{P})$ telle que $L = L(G, S)$. En donner la preuve pour les langages L_2 et L_6 de l'exercice 0.44.

Exercice 0.52

On considère $A = (X, E, e_0, F, \sigma)$ l'automate défini par : $X = \{a, b\}$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $e_0 = 1$, $F = \{4\}$, $\sigma(1, a) = 2$, $\sigma(1, b) = 1$, $\sigma(2, a) = 3$, $\sigma(2, b) = 1$, $\sigma(3, a) = 4$, $\sigma(3, b) = 1$, $\sigma(4, a) = 4$, $\sigma(4, b) = 4$. Construire sans justification, à partir de l'automate A, une grammaire algébrique $G = (X, Y, \mathcal{P})$ telle que $L(G, S) = L(A)$ (avec $S \in Y$).

Exercice 0.53

Soit $X = \{a, b\}$. Pour tout $m \in X^*$, on définit son inverse, noté m^r, par :

$$\text{si } m = x_1 x_2 \dots x_p \text{ alors } m^r = x_p x_{p-1} \dots x_1.$$

Par exemple, si $m = babba$, alors $m^r = abbab$. Pour tout langage L sur X, on note L^r le langage sur X contenant les mots dont les inverses appartiennent à L, autrement dit

$$L^r = \{m \in X^* \mid m^r \in L\}.$$

1. Pour chacun des langages L_i suivants, donner sans justification le graphe de transition d'un automate A_i tel que $L_i = L(A_i)$. De plus, déterminer le langage L_i^r et donner le graphe de transition d'un automate A_i^r tel que $L_i^r = L(A_i^r)$:
   (a) $L_1 = \{ab\}$,
   (b) $L_2 = \{m \in X^* \mid ab \text{ est un préfixe de } m\}$,
   (c) $L_3 = \{m \in X^* \mid aba \text{ est un facteur de } m\}$.
2. Démontrer que $L_2^r = L(A_2^r)$.
3. Soit une grammaire $G = (X, Y, \mathcal{P})$ définie par $Y = \{S\}$ et $\mathcal{P} = \{S \to aS \mid b\}$.

(a) Déterminer $L(G, S)$.
(b) Donner sans justification $L(G, S)^r$.
(c) Donner sans justification une grammaire G^r telle que $L(G, S)^r = L(G^r, S)$, avec $S \in Y$.

4. Soit une grammaire $G = (X, Y, \mathcal{P})$. Donner sans justification une grammaire G^r telle que $L(G, S)^r = L(G^r, S)$, avec $S \in Y$.
5. La propriété suivante est-elle vraie : "Si L est algébrique, alors L^r l'est aussi" ?

Exercice 0.54

Si L est un langage, on note $Pref(L) = \{m \in X^* \mid m$ est un préfixe d'un mot de $L\}$. Soit la grammaire $G = (X, Y, \mathcal{P})$, avec $X = \{a, b\}$, $Y = \{S\}$ et $\mathcal{P} = \{S \to aSb \mid Sb \mid \varepsilon\}$.

1. Donner sans justification les 5 premiers mots de $L(G, S)$ dans l'ordre hiérarchique, puis dans l'ordre lexicographique si possible.
2. Donner sans justification $L(G, S)$.
3. Donner $Pref(L(G, S))$, en justifiant.
4. Donner sans justification une grammaire G' telle que $L(G', S) = Pref(L(G, S))$.

Exercice 0.55

Pour tout langage U sur X, on note U^* le langage sur X contenant les mots pouvant se factoriser en un nombre (éventuellement nul) de facteurs appartenant à U, c'est-à-dire

$$U^* = \{\varepsilon\} \cup \{m \in X^* \mid \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists m_1, \dots, m_k \in U, m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k\}.$$

Soit la grammaire $G = (X, Y, \mathcal{P})$ définie par $X = \{a, b\}$, $Y = \{S\}$ et $\mathcal{P} = \{S \to aS \mid bS \mid Sa \mid Sb \mid a^3\}$, $L_1 = \{a^3, b\}$ et $L_2 = \{m \in X^* \mid \exists u, v \in X^*, m = u \cdot a^3 \cdot v\}$.

1. Montrer en exhibant des suites de dérivations immédiates, que a^2ba^3b et a^3b^3 sont des éléments de $L(G, S)$.
2. Déterminer $L(G, S)$.
3. Donner sans justification une grammaire algébrique $G_2 = (X, Y_2, \mathcal{P}_2)$ avec au plus deux lettres auxiliaires, telle que $L(G_2, S) = L_2 \cup \{\varepsilon\}$ (avec $S \in Y_2$).
4. Donner sans justification une grammaire algébrique $G_3 = (X, \{S\}, \mathcal{P}_3)$ telle que $L(G_3, S) = L_1^*$.
5. Donner sans justification une grammaire algébrique $G_3 = (X, \{S\}, \mathcal{P}_)$ telle que $L(G_3, S) = L_1^* \cap L_2$.

9 Exercices supplémentaires sur les langages

Exercice 0.56

Soit $X = \{a, b\}$. Pour tout mot $w \in X^*$, on note $Pref(w)$ l'ensemble des préfixes de w. Pour tout langage L sur X, on note $Pref(L)$ la réunion des ensembles $Pref(w)$, pour w dans L.

1. Ecrire en extension $Pref(\varepsilon)$, $Pref(a^2)$ et $Pref(ab^2)$.
2. Ecrire en extension $Pref(\{\varepsilon, a^2\})$ et $Pref(\{a^2, ab^2\})$.
3. Classer les 10 premiers mots de $Pref(\{a^n b^p, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\})$ suivant l'ordre hiérarchique.
4. Classer les 10 premiers mots de $Pref(\{a^n b^p, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\})$ suivant l'ordre lexicographique, si possible.
5. Démontrer que, pour tous langages L et M, on a $Pref(L \cup M) = Pref(L) \cup Pref(M)$.
6. Démontrer que $Pref(L \cap M) \subseteq Pref(L) \cap Pref(M)$, et montrer avec un contre-exemple qu'il n'y a pas toujours égalité.
7. Construire un automate A_1 reconnaissant le langage $L_1 = \{bu, u \in X^*\}$, puis construire un automate A'_1 reconnaissant $Pref(L_1)$.
8. Construire un automate A_2 reconnaissant le langage $L_2 = \{bu, u \in X^* \text{ et } |u|_a \text{ est pair}\}$.
9. Construire un automate A'_2 reconnaissant le langage $Pref(L_2)$ et n'ayant que 3 états.
10. Soit $L_3 = \{a^n b^n, n \in \mathbb{N}\}$. Construire une grammaire G_3 engendrant L_3 et une grammaire G'_3 engendrant $Pref(L_3)$.

Exercice 0.57

On considère l'automate $A = (X, E, e_0, F, \sigma)$ défini par : $X = \{a, b\}$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $e_0 = 1$, $F = \{3, 4\}$, $\sigma(1, a) = 1$, $\sigma(1, b) = 2$, $\sigma(2, a) = 3$, $\sigma(2, b) = 4$, $\sigma(3, a) = 1$, $\sigma(3, b) = 2$, $\sigma(4, a) = 3$, $\sigma(4, b) = 4$.

1. Tracer le graphe de transition de l'automate A.
2. Les mots a^2b^2, a^2b, a^2ba appartiennent-ils à $L(A)$?
3. Donner si c'est possible :
   (a) Les 7 premiers mots de $L(A)$ dans l'ordre lexicographique.
   (b) Les 7 premiers mots de $L(A)$ dans l'ordre hiérarchique.
4. L'objectif des 3 questions suivantes est de déterminer $L(A)$ rigoureusement :

(a) Démontrer que $\{m \in X^*, 1 \times m = 4\} = \{m \in X^*, \exists u \in X^*, m = u \cdot bb\}$.

(b) Démontrer que $\{m \in X^*, 1 \times m = 3\} = \{m \in X^*, \exists u \in X^*, m = u \cdot ba\}$.

(c) En déduire $L(A)$.

5. Déterminer sans démonstration un automate reconnaissant $L(A) \cup \{\varepsilon\}$.
6. On considère la grammaire $G = (X, Y = \{S\}, \mathcal{P} = \{S \mapsto aS \mid bS \mid bb \mid ba\})$. Démontrer que $L(G, S) = L(A)$.
7. Donner sans démonstration une grammaire engendrant $L(A) \cup \{\varepsilon\}$.
8. Donner sans démonstration un automate reconnaissant les mots ayant bb comme suffixe et comme préfixe.
9. Donner sans démonstration une grammaire engendrant le même langage.

Exercice 0.58

On considère la grammaire algébrique

$$G = (X = \{a, b\}, Y = \{S\}, \mathcal{P} = \{S \mapsto aSS \mid SaS \mid SSa \mid b\}).$$

1. Montrer, par une suite de dérivations immédiates, que $baabb \in L(G, S)$.
2. Donner tous les mots de X^* de longueur inférieure ou égale à 4 engendrés par S.
3. Donner, sans démonstration, le langage $L(G, S)$.
4. Déterminer sans démonstration une grammaire engendrant $L_0 = \{m \in X^*, |m|_a = |m|_b\}$.
5. Existe-t-il un automate reconnaissant L_0 ?

Exercice 0.59

Soit la grammaire algébrique $G = (X = \{a, b\}, Y = \{S\}, \mathcal{P} = \{S \mapsto SaS \mid b\})$. Démontrer que $L(G, S) = \{(ba)^n b, n \in \mathbb{N}\}$.

10 Interrogations et partiel

Interrogation n°1 groupe S1

Exercice 1 :

Soit G un graphe ayant pour séquence $S(G) = (2, 2, 3, 3, 3, 3, 6)$.

1. Quel est l'ordre de ce graphe ?

2. Quelle est la taille (i.e. nombre d'arêtes) de ce graphe ? Justifier la réponse.

3. Combien y a-t-il de sous-graphes couvrants de G ?

4. Combien y a-t-il de sous-graphes induits de G ?

5. Quelle est la taille du graphe complémentaire ? Justifier la réponse.

6. Soit g le sommet de plus haut degré du graphe G . Quelle est la séquence du graphe $G - g$, c'est à dire le graphe G auquel on a retiré le sommet g (ainsi que les arêtes incidentes à ce sommet) ?

7. Donner tous les graphes G possibles, à un isomorphisme près :

Exercice 2 :

Soit la séquence $(1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$. Donner la représentation de deux graphes non isomorphes ayant cette séquence. Expliquer pourquoi ces deux graphes ne sont pas isomorphes.

Exercice 3 :

Soit G un graphe d'ordre 7. Montrez que si G n'a pas de cycles alors $\overline{G}$ possède au moins un cycle.

Interrogation n°1 sur les graphes ; gr C3 année :

exercice 1 :

Soit la séquence de degré d'un graphe G :

$$S = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$$

1. Quel est l'ordre de ce graphe ?

2. Quelle est la taille de ce graphe ? (i.e. son nombre d'arête).

3. Quelle est la taille du graphe complémentaire ? Justifiez votre réponse.

4. On rappelle qu'un graphe H est complet lorsque son graphe complémentaire est de taille 0.
   (a) Donnez la représentation, à un isomorphisme près, de tous les graphes complets d'ordre 2 :

   (b) Donnez la représentation, à un isomorphisme près, de tous les graphes complets d'ordre 3 :

   (c) Donnez la représentation, à un isomorphisme près, de tous les graphes complets d'ordre 4 :

   (d) Donnez une représentation d'un graphe G ayant la séquence S, et possédant un sous-graphe complet d'ordre 4 .

5. Donnez une représentation d'un graphe G ayant la séquence S et possédant comme sous-graphe une chaîne de longueur 9 :

Exercice 2 :

Soient n un entier naturel non nul et $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un ensemble de sommets.

1. Combien y a-t-il de graphes ayant X pour ensemble de sommets ?

2. Combien y a-t-il de chaînes ayant X pour ensemble de sommets ?

3. Pour $n = 3$,représentez tous les graphes possibles .

Exercice 3 :

Soit G un graphe dont tous les sommets sont de degré pair sauf 2, x et y qui sont de degré impair. Démontrez que dans G il existe une chaîne d'extrémités x et y .

Interrogation n°2 sur les graphes, groupe C1

Pour cette interrogation vous avez droit au formulaire.

Le but de cet exercice est de caractériser certains éléments de l'ensemble Γ des graphes dont tous les sommets sont de degré 3 (propriété Q1) et qui ne possèdent aucun cycle d'ordre 3 (propriété Q2). On admettra pour le moment que Γ est non vide.

Première partie :
Soit la séquence de degré $S = (2, 2, 2, 3, 3)$ et G un graphe vérifiant cette séquence.

1. Quel est l'ordre de G ? Sa taille ?

2. Sans chercher à déterminer G, montrez que G admet nécessairement un cycle.

3. Déterminez, à un isomorphisme près, tous les graphes G ayant pour séquence S.

4. Parmi les graphes de la question précédente, montrez qu'il n'y en a qu'un qui peut être le sous-graphe d'un élément de Γ .

Deuxième partie : 1 propriété caractéristique des graphes de Γ.

1. Démontrez que tous les graphes de Γ sont d'ordre pair.(on notera Q3 cette propriété)

Troisième partie : Détermination des éléments d'ordre minimum.

On note n_{min} l'ordre minimum des graphes de Γ, c'est à dire le plus petit entier pour lequel il existe un graphe de Γ ayant cet ordre.

1. Montrez que $n_{min} \geq 4$.

2. Soit G_{min} un graphe de Γ d'ordre n_{min} . Pourquoi G_{min} est-il connexe ?(on ne cherchera pas à déterminer G_{min} pour répondre à cette question)

3. Démontrez que $n_{min} \neq 4$.

4. Déduisez-en que $n_{min} \geq 6$.

5. En vous aidant de la question 4 de la première partie, déterminez s'ils existent, à un isomorphisme près, tous les graphes de Γ d'ordre 6.

Interrogation n°2 sur les graphes (groupe S3)

Pour cette interrogation vous avez le droit au formulaire.

1. On considère les graphes suivants :

$$G_1 = (X_1 = \{a, b, c, d, e\}, E_1 = \{ab, bc, cd, bd, de\})$$

$$G_2 = (X_2 = \{a, b, c, d, e, f\}, E_2 = \{ab, bc, be, ed, cd, ef\})$$

$$G_3 = (X_3 = \{a, b, c, d, e\}, E_3 = \{ab, bc, cd, be\})$$

   (a) Démontrez que G_3 n'est pas un sous graphe de G_1.

   (b) Donnez sans justification un sous-graphe de G_1 isomorphe à G_3 .

   (c) Donnez sans justification un sous-graphe induit de G_2 isomorphe à G_3 (vous donnerez uniquement le sous-ensemble A de sommets tel que $G_2[A]$ est isomorphe à G_3)

   (d) Donnez la représentation du graphe $G_1 \cap G_2$. Que peut-on dire de ce graphe ?

2. Dans cette question on considère un graphe G n'ayant **qu'un seul cycle**. On note n son ordre et m sa taille.

(a) Donner, à un isomorphisme près, tous les graphes G possibles d'ordre 4 :

(b) A présent l'ordre est quelconque :

i. Pourquoi doit-on avoir $n \geq 3$?

ii. Démontrez rigoureusement que $3 \leq m \leq n$:

iii. Donnez la représentation d'un graphe G d'ordre 5 tel que le complémentaire soit aussi un graphe avec un seul cycle :

iv. Soit $\overline{G}$ le graphe complémentaire de G et m' son ordre. Exprimez m' en fonction de n et m :

v. Démontrez que si G est d'ordre supérieur ou égal à 6 alors son complémentaire ne peut pas avoir qu'un seul cycle.

Interrogation n°3 groupe S1

Exercice 1 :

Soit $G = (X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, E = \{ab, bc, be, cd, de, df, ef, gh, he\})$ un graphe.

1. Dans les questions qui suivent on ne cherchera pas à représenter $\overline{G}$. Justifier chacune des réponses :
   (a) Donner en extension le voisinage du sommet a dans le graphe $\overline{G}$ (on note $V_{\overline{G}}(a)$ cet ensemble) :

   (b) Donner une chaîne de $\overline{G}$ d'extrémités a et b .

   (c) $\overline{G}$ est-il connexe ?

(d) Donner la représentation d'un arbre recouvrant de $\overline{G}$:

2. Dans un graphe connexe G la distance entre deux sommets x et y est la longueur de la plus courte chaîne d'extrémités ces deux sommets. On note $d_G(x, y)$ cette distance. Le diamètre d'un graphe G est la plus grande des distances entre deux sommets du graphe. On note $\text{diam}(G)$ ce diamètre. Dans les questions qui suivent le grahe G considéré est celui du début de l'exercice :

   (a) $d_G(a, a) =$

   (b) $d_G(a, b) =$

   (c) $d_G(a, e) =$

   (d) $d_G(a, g) =$

   (e) $\text{diam}(G) =$

Exercice 2 :

Soit G un graphe connexe ayant un isthme $e = xy$. Démontrer que tous les arbres recouvrants de G contiennent l'arête e .

Exercice 3 :

Soit $X = \{a, b\}$ un alphabet.

Pour tout mot w de X^* , on note Pref(w) l'ensemble des préfixes de w et pour tout langage L on note Pref(L) la réunion des ensembles Pref(w) pour w dans L.

1. Ecrire en extension $\text{Pref}(\varepsilon)$, $\text{Pref}\big(a^2\big)$ et $\text{Pref}\big(ab^2\big)$:
   (a) $\text{Pref}(\varepsilon) =$

   (b) $\text{Pref}\big(a^2\big) =$

   (c) $\text{Pref}\big(ab^2\big) =$

2. Ecrire en extension $\text{Pref}\big(\{\varepsilon, a^2\}\big)$ et $\text{Pref}\big(\{a^2, ab^2\}\big)$:
   (a) $\text{Pref}\big(\{\varepsilon, a^2\}\big) =$

   (b) $\text{Pref}\big(\{a^2, ab^2\}\big) =$

3. Classer les 10 premiers mots de $\text{Pref}(\{a^n b^p, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\})$suivant l'ordre lexicographique :

4. Classer les 10 premiers mots de Pref($\{a^n b^p, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\}$) suivant l'ordre hiérarchique.

Interrogation n°3 groupe S3

Exercice 1 :

On considère les séquences de degrés suivantes :

$$S_1 = (1, 2, 2, 3, 3)$$

$$S_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 3)$$

$$S_3 = (1, 2, 2, 3, 3, 3, 6)$$

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on notera Γ_i l'ensemble (éventuellement vide) des graphes ayant pour séquence des degrés S_i .

1. Démontrer que $\Gamma_1 = \emptyset$.

2. Dans les questions suivantes commençant par "démontrer", ne pas chercher à déterminer en extension l'ensemble Γ_i considéré :

   (a) Démontrer que les éléments de Γ_2 ne sont pas connexes.

   (b) Démontrer que les éléments de Γ_2 sont sans cycles.

   (c) Dessiner, tous les éléments de Γ_2 à un isomorphisme près.

(d) Démontrer que les éléments de Γ_3 contiennent nécessairement au moins un cycle.

(e) Démontrer que les éléments de Γ_3 sont nécessairement connexes.

(f) Déssiner tous les éléments de Γ_3 à un isomorphisme près.

Exercice 2 :

Démontrer que tout graphe connexe admet un arbre couvrant :

Exercice 3 :
Soit $X = \{a, b\}$ un alphabet et le langage sur X défini par

$$L = \{m \in X^*, 2\,|m|_a + |m|_b \text{ est un multiple de } 3\}$$

(On rappelle que $|m|_a$ désigne le nombre de a dans le mot m)

1. Donnez, si c'est possible, les 6 premiers mots de L suivant...
   (a) ...l'ordre lexicographique.

   (b) ...l'ordre hiérarchique.

Interrogation n°4 groupe C4.Graphes et Langages, année 2015

Exercice 1 :

Soit $X = \{a, b\}$ un alphabet, on note X^* l'ensemble de tous les mots sur X , y compris le mot vide.

Pour chacun des langages suivants donner sans justification le graphe de transition d'un automate reconnaissant ce langage puis les règles de réécriture d'une grammaire engendrant le même langage. Pour les grammaires algèbriques on limitera le nombre de lettres auxiliaires à 2 au maximum.

1. $L_1 = \{m \in X^*, aa \,\text{facteur}\, de\, m\}$;
2. $L_2 = \{m \in X^*, aa \,\text{préfixe}\, de\, m\}$;
3. $L_3 = \{m \in X^*, aba \,\text{suffixe}\, de\, m\}$;
4. $L_4 = \overline{L_2}$;
5. $L_6 = \{m \in X^*, m\,[|m| - 1] = a\}$ (L_6 est l'ensemble de tous les mots sur X dont l'avant-dernière lettre est un a).
6. Démontrez que pour l'automate A_1 de la question 1 on a $L(A_1) = L_1$

Exercice 2 :

On considère la grammaire algébrique $G = (X = \{a, b\}, Y = \{S, U\}, P)$ où l'ensemble des règles de réécriture est défini par

$$P = \{S \to aU \mid U;\ U \to b \mid bS\}$$

1. Montrez, en exhibant une suite de dérivations immédiates que le mot $(ab)^2\, b^2$ est un élément de $L(G, S)$.
2. Démontrez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que : $\forall n \in \mathbb{N}, (ab)^n\, b \in L(G, S)$
3. Déterminez sans justification $L(G, S)$

Interrogation n°4 du groupe C1 ; Graphes et Langages, année 2015.

Exercice 1 :

Soit l'automate déterministe défini par

$$A = (X = \{a, b\}, E = \{1, 2, 3, 4\}, e_0 = 1, F = \{4\}, \sigma)$$

avec σ une fonction de transition définie par la table de transition suivante :

σ	a	b
1	2	3
2	2	4
3	2	4
4	4	4

1. Représentez le graphe de transition de l'automate A .
2. Calculez $1 \times a^2ba$, $1 \times \varepsilon$ et $1 \times ba^3b$.
3. Classez si possible les 7 premiers mots de $L(A)$ suivant l'ordre lexicographique.
4. Classez les 7 premiers mots de $L(A)$ suivant l'ordre hiérarchique.
5. Démontrez la proposition suivante : $\forall u \in X^*, \forall v \in X^*, 1 \times u \bullet ab \bullet v = 4$.
6. Montrez, par une analyse "rétrograde" que pour tout mot $m \in X^*$, si $1 \times m = 4$ alors ab ou bb est un facteur de m .
7. Quel est le langage reconnu par l'automate A ?
8. Donnez, sans démonstration, une grammaire algébrique engendrant $L(A)$ et n'ayant qu'une seule lettre auxiliaire.

Exercice 2 :

Soit la grammaire suivante :

$$G = (X = \{a, b\}; Y = \{S\}; P = \{S \to aSS \mid SaS \mid SSa \mid b\})$$

1. Montrez, en exhibant une suite de dérivations immédiates, que $babba \in L(G, S)$.
2. Démontrez l'inclusion $L(G, S) \subseteq \{m \in X^*, |m|_b = |m|_a + 1\}$

Partiel “graphes et langages” année 2019

durée :1h30
Vous avez droit au formulaire.
Sauf mention du contraire, il faut justifier toutes vos réponses.

Problème 1 :

Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des graphes d'ordre n connexes et sans isthmes.

1. Donnez, à un isomorphisme près, les graphes de $\mathcal{F}_1$,$\mathcal{F}_2$,$\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$. 1 point
2. Soient un entier n fixé (avec $n \geq 2$) et G un graphe de $\mathcal{F}_n$.
   (a) Démontrez que G admet nécessairement au moins un cycle. 0,5
   (b) Démontrez que $\|G\| \geq n$ .0,5
   (c) Démontrez que si $\|G\| = n$ alors G est un cycle.0,5
3. On considère 3 graphes G_1, G_2 et G_3 d'ordre 6 (pas nécessairement des éléments de $\mathcal{F}_6$) dont on donne les séquences :

$$S(G_1) = (1, 1, 2, 2, 3, 3)$$

$$S(G_2) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

$$S(G_3) = (2, 2, 4, 4, 4, 4)$$

   (a) On étudie G_1 :
      i. Calculez $\|G_1\|$.0,25
      ii. Calculez $\|\overline{G_1}\|$.0,5
      iii. Admet-il nécessairement au moins un cycle ? 1
      iv. Est-il nécessairement connexe ? 0,5
      v. Est-il nécessairement un élément de $\mathcal{F}_6$? 0,25
   (b) On étudie G_2 : Est-il nécessairement un élément de $\mathcal{F}_6$?0,5
   (c) On étudie G_3 :
      i. Démontrez que G_3 est nécessairement un élément de $\mathcal{F}_6$ .1

ii. Déterminez sans justification $S\left(\overline{G_3}\right)$.0,5

iii. Donnez, sans justification, à un isomorphisme près, tous les graphes G_3 possibles.0,5

4. Pour $n \geq 3$ on considère un graphe $G \in \mathcal{F}_n$ qui ne contient qu'un seul cycle (i.e. un seul sous-graphe qui est un cycle). Démontrez que G est un cycle.1

5. On considère la suite de graphes $(H_n)_{n\geq 3}$ définie récursivement de la manière suivante :
$H_3 = (X_3 = \{1,2,3\}, E_3 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\}\})$
$H_{n+1} = (X_{n+1} = X_n \cup \{n+1\}, E_{n+1} = E_n \cup \{\{n-1,n+1\},\{n,n+1\}\})$.

   (a) Représentez H_3, H_4 et H_5 .0,5

   (b) Démontrez par récurrence la proposition suivante : $\forall n \geq 3, \|H_n\| = 2n-3$ .1

   (c) Démontrez par récurrence la proposition suivante : $\forall n \geq 3, H_n \in \mathcal{F}_n$ .1

6. On suppose qu'on dispose d'une fonction $CDC(G,x)$ qui renvoie la classe de connexité du sommet x dans le graphe G (i.e. $Cl_G^C(x)$). Donnez la description détaillée d'un algorithme admettant pour donnée d'entrée un graphe G quelconque et qui renvoie "vrai" si $G \in \mathcal{F}_n$ (n étant l'ordre de G) et faux sinon. Vous pouvez utiliser la fonction CDC , le langage "des crayons de couleur" ("marquer un sommet en rouge", "marquer une arète en vert",...) et toutes les opérations ensemblistes (choisir un élément, vérifier qu'un ensemble est vide ou non vide, égalité de deux ensembles, union, intersection, différence, complémentaire). Pour un sommet quelconque du graphe on suppose que l'on sait déterminer son voisinage($V_G(x)$).1,5

Problème 2 :

Soit $X = \{a, b\}$ un alphabet. On note X^* l'ensemble de tous les mots sur l'alphabet X .

1. Une question préliminaire : donnez le graphe de transition d'un automate A_0 reconnaissant les mots de X^* ayant la lettre a pour suffixe (on note L_0 ce langage). Vous ferez ensuite la démonstration rigoureuse de cet automate (vous démontrerez que cet automate reconnaît bien le langage L_0).1,5
2. On note L le langage sur X défini par :

$$L = \{m \in X^*, |m| \geq 2 \wedge m[1] = m[|m|]\}$$

(c'est à dire l'ensemble de tous les mots de X^* ayant au moins 2 lettres et dont la première lettre est identique à la dernière).

   (a) Donnez, si c'est possible, les 7 premiers mots de L dans l'ordre lexicographique.0,5

   (b) Donnez, si c'est possible, les 7 premiers mots de L dans l'ordre hiérarchique.0,5

   (c) On considère l'automate $A = (X = \{a, b\}, E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, e_0 = 1, F = \{3, 5\}, \sigma)$ où σ est une fonction de transition définie par le tableau suivant :

σ	a	b
1	2	4
2	3	2
3	3	2
4	4	5
5	4	5

   i. Représentez le graphe de transition de cet automate.0,5

   ii. Calculez dans A les expressions $1 \times a^5$, $1 \times b^6a^6$ .0,5

   iii. Démontrez que $L(A) = L$.1

3. Donnez sans justification le graphe de transition d'un automate A' reconnaissant $\overline{L}$ ($\overline{L}$ est l'ensemble des mots de X^* qui ne sont pas dans L).0,5
4. Donnez sans justification une grammaire G engendrant L (i.e. $L(G, S) = L$) avec au plus 2 lettres auxiliaires.0,5
5. Donnez sans justification une grammaire G'engendrant $\overline{L}$ .0,5

6. Donnez sans justification un automate A'' reconnaissant $L'' = L \cap \{m \in X^*, |m|_b \geq 1\}$ (c'est à dire les mots de L ayant au moins un b)1
7. Donnez sans justification une grammaire A'' engendrant L'' avec au plus 2 lettres auxiliaires.1