Chaînes, cycles

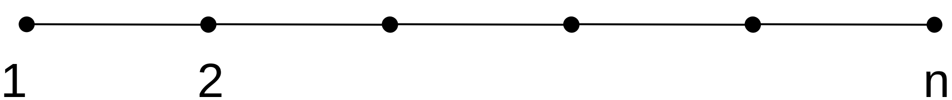
I) Chaînes

- **Définition**:

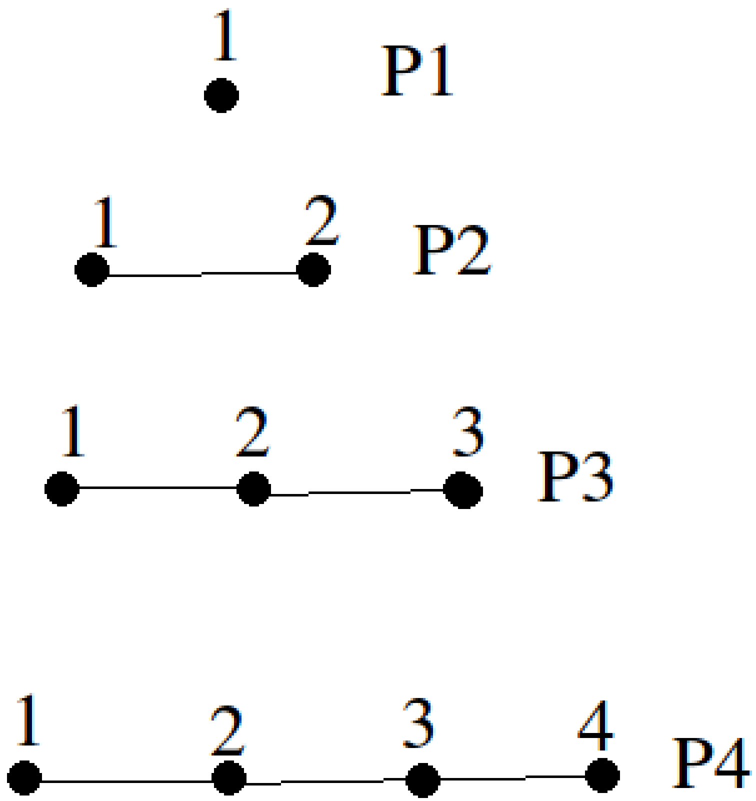
  Une chaîne d'ordre n, pour $n \geq 0$, est ***un graphe*** isomorphe au graphe P_n défini par:

  – Les sommets de P_n sont les éléments de l'ensemble {1, 2, …, n}.

  – Les arêtes de P_n sont les paires {i, (i+1)} pour $1 \leq i < n$.

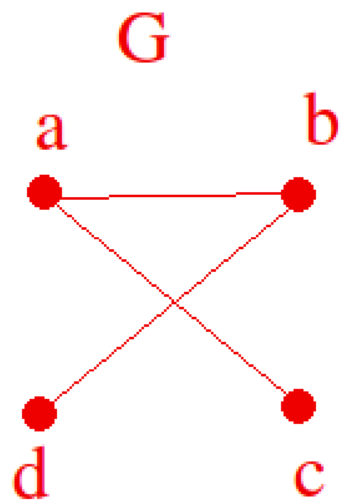


La longueur de la chaîne est n-1.



Le graphe G
est-il une chaîne?

≡



(d,b,a,c)

Le graphe G, donné par la matrice d’incidence suivante,
Est-il une chaîne ?

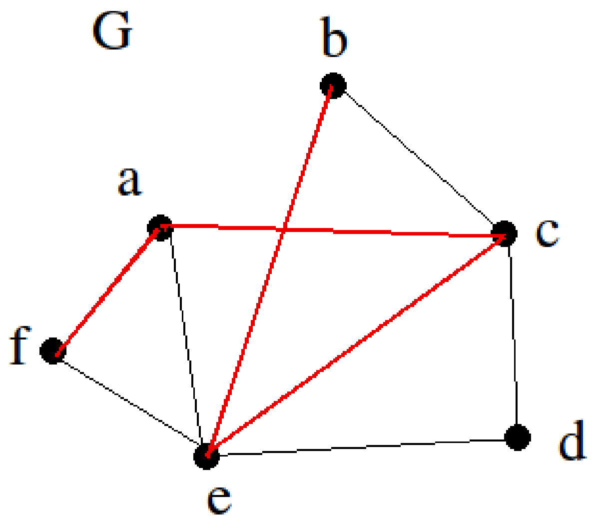
	a	b	c	d	e
a	0	0	1	0	1
b	0	0	0	1	0
c	1	0	0	0	0
d	0	1	0	0	1
e	1	0	0	1	0

L’ordre suivant sur les sommets permet de le « démontrer » :
(b,d,e,a,c)

- Le cas limite des chaînes de *longueur nulle* est admis: chaînes réduites à un sommet.

- *Une chaîne d'un graphe G* est un **sous-graphe** de G qui est lui-même une chaîne.

- 2 sommets d'un graphe G sont dits **reliés dans G par une chaîne** s'il existe une chaîne de G dont ils sont les extrémités.



Dans le graphe G ci-dessus, le sous-graphe délimité par les arêtes rouges est une chaîne de G.

Attention : Les degrés dans G des sommets de cette chaîne ne sont pas nécessairement égaux à 1 ou 2.

Propriété :

Soit G un graphe, x, y et z trois sommets.

S'il existe dans G

une chaîne **P**xy d'extrémités x et y

et une chaîne **P**yz d'extrémités y et z

Alors

Il existe dans G une chaîne **P**xz d'extrémités x et z

(avec de plus $Pxz \subseteq Pxy \cup Pyz$)

II) Cycles

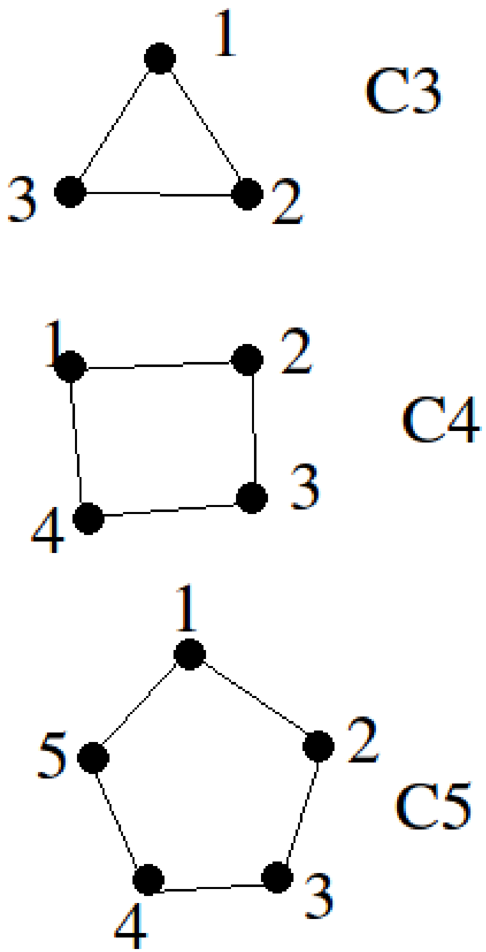
Définition: Un cycle d'ordre n, pour **n≥3**, est un graphe isomorphe au graphe C_n défini par:

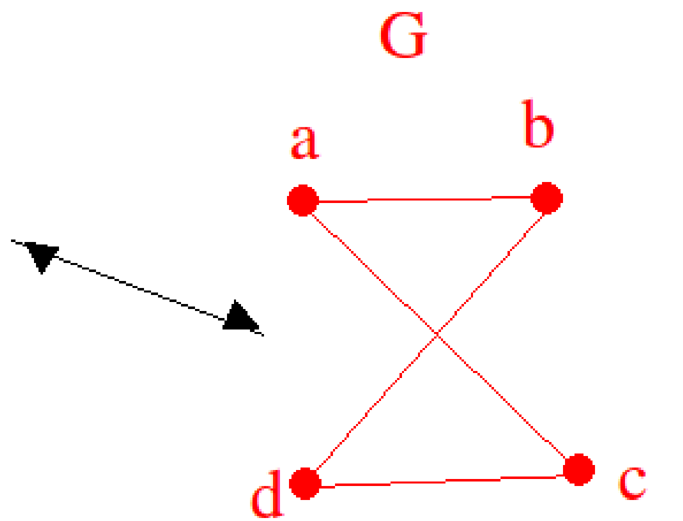
– Les sommets de C_n sont les éléments de l'ensemble {1, 2, …, n}.

Les arêtes de C_n sont les paires {i, (i+1)} pour $1 \leq i \leq n-1$ ainsi que l'arête {1, n}.

La longueur du cycle est n (**avec n≥3**).

G est-il un cycle?





(a,b,d,c,a)

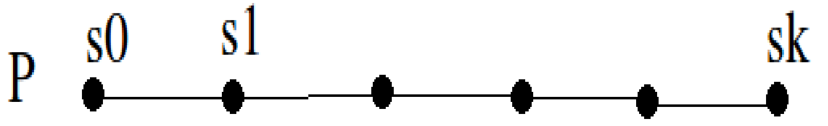
- Un cycle d’un graphe G est **un sous-graphe** qui est lui-même un cycle.

II) 2 conditions nécessaires d’acyclicité

- **Condition nécessaire d’acyclicité sur les sommets de degré 1:**

  Tout graphe ***sans cycle*** ayant *au moins une arête*, possède au moins 2 sommets de degré 1.

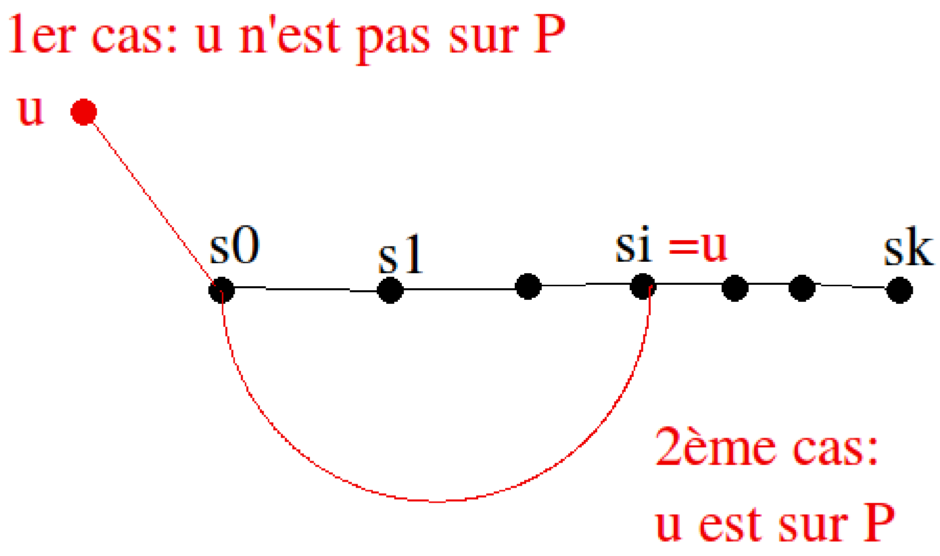
Démonstration de la propriété



On considère une chaîne P de G de longueur maximale.
Puisque G est de taille non nulle le sommet s0
est différent du sommet sk.

On va démontrer par l’absurde que s0 est de degré 1.

On considère par l’absurde un voisin u de s0, différent de s1 :



Dans le premier cas on crée une chaîne plus longue,
Dans le deuxième cas on crée un cycle : absurde

Condition nécéssaire d'acyclicité sur le nombre d'arêtes.

- Pour tout graphe sans cycle d'ordre n et de taille m, on a: $m \leq n-1$.

G sans cycle

=>

$m \leq n-1$

démonstration

Par récurrence sur le nombre de sommet :

P(n) : Tout graphe G d’ordre n sans cycle vérifie $||G|| \leq n-1$

P(1) : Tous les graphes d’ordre 1 sont sans cycles et de taille nulle.

Pn)=>Pn+1) ?

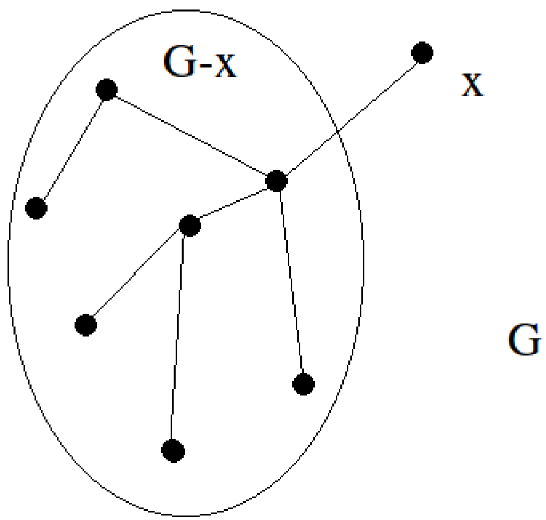
Soit n un entier supérieur à 1 :

On suppose P(n) (c'est l'hypothèse de récurrence) et on démontre la proposition suivante (P(n+1)) :

Tout graphe G d'ordre n+1 sans cycle vérifie $||G|| \leq n$

On part d’un graphe G d’ordre n+1 sans cycle.

Il a au moins un sommet x de degré 1 :



On applique P(n) à G-x

On applique P(n) à G-x (sans cycle et d’ordre n) donc :

$\|G\text{-}x\| \leq n-1$ (hyp de récurrence)

Mais puisque $\|G\text{-}x\|=\|G\|-1$

(car x est de degré1)

$\Rightarrow \|G\|-1 \leq n-1 \Rightarrow \|G\| \leq n$ (CQFD)