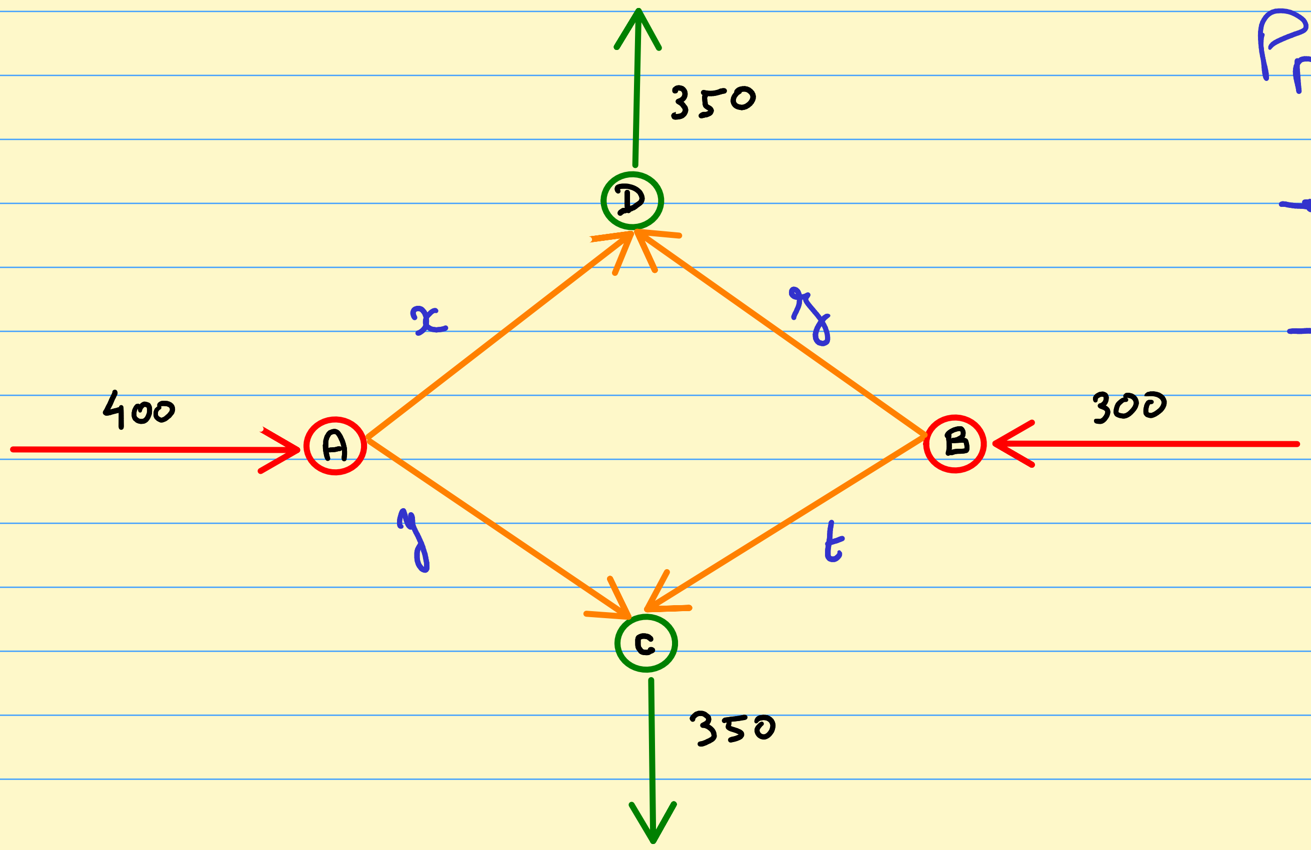
Méthode de Gauss pour les systèmes linéaires

Exemple : calibrage de réseau



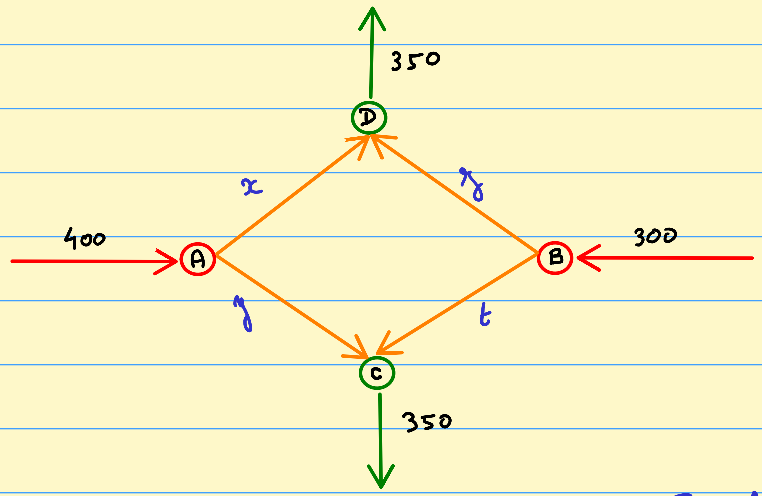
Problèmes :

→ Le réseau peut-il fonctionner ?

→ Si oui

→ plusieurs régimes ?

→ lesquels ?



principe : entrée = sortie

Routeur A : $400 = x + y$

—— B : $300 = z + t$

—— C : $y + t = 350$

D : $x + z = 350$

Système linéaire :
$$\begin{cases} x + y = 400 \\ z + t = 300 \\ y + t = 350 \\ x + z = 350 \end{cases}$$

→ Existence d'un régime x, y, z, t ?

→ Unicité

→ Expliciter le(s) régime(s)

Définition : $\to$ une équation linéaire en les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ est une équation de la forme :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$ où

- b est le second membre
- $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($\in \mathbb{R}$) sont les coefficients des inconnues $x_1, x_2, \dots x_n$
- une solution est un n-uplet de réels pour lequel l'égalité est vraie

Exemples : $\to$ $3x + 2y - 5z = 3$

- inconnues : x, y, z
- $3, 2$ et -5 coeffs
- 3 second membre
- $(1, 1, \frac{2}{5})$ une solution
- $(1, 0, 0)$ aussi

$\to$ $2a + b = 0$

- inconnues a, b ; 0 2d membre, $2, 1$ coeffs
- $(0,0)$; $(1,-2)$ deux solutions

Remarques : → pas de puissances, racines ou autre : $x^2 - 3\sqrt{y} + 5e^3 = 3$ pas linéaire

→ pas de produits entre inconnues : $xy - 2yz = 1$ pas linéaire

→ cas $n=1$ $\qquad ax = b$

si $a \neq 0$: une seule solution $\frac{b}{a}$

si $a = 0 \Rightarrow 0x = b$

si $b \neq 0$: pas de solution

si $b = 0$: tout $x \in \mathbb{R}$ est solution

→ $n > 1$ $\qquad ax + by = c$

si $(a,b) \neq (0,0)$ ∞ de solution

si $(a,b) = (0,0)$

si $c \neq 0$ pas de sol

si $c = 0$ tout (x,y) est solution

Définition : un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, \dots, x_n$ est un ensemble de m équations linéaires de la forme :

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots \ a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

→ $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ est le m-uplet second membre

→ $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $i = 1..m$, $j = 1..n$ sont les coefficients

→ une solution est un n-uplet pour lequel toutes les égalités sont vraies

Exemple :

coeffs $\qquad$ second membre

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = -2 \end{cases}$$

inconnues

$(1, 1)$ est une solution

$(2, \frac{5}{2})$ " autre solution

Remarques : → m et n pas forcément égaux

$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 5x - 2y = 3 \\ -6x - 10y = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 5 + 3z = 8 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

→ pas forcément existence de solution :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = 0 \end{cases}$$ n'a pas de solution

→ pas forcément unicité : (cf systèmes précédents)

→ toutes les égalités doivent être satisfaites :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & (a) \\ y + z = 2 & (b) \\ x + z = 3 & (c) \end{cases}$$

$(1,1,1)$ satisfait (a) et (b) mais pas (c)

→ dès que $m \geq 3$, la substitution vue au lycée est complexe, pas automatisable et (parfois) trompeuse

Cas particulier : les systèmes échelonnés sont résolus directement

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - 2z = -3 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ x & + & + \; z & = 2 \\ & y & - \; 2z & = -3 \\ & & z & = 0 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x + 0 = 2 \\ y - 2 \times 0 = -3 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$(2, -3, 0)$ est la seule solution

Méthode : mettre en oeuvre un algorithme qui transforme un système en un autre système échelonné équivalent (dont les solutions sont les mêmes)

Opérations élémentaires de lignes : On ne change pas les solutions d'un système en

→ multipliant une équation par un nombre $\alpha \neq 0$:

si $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \iff \alpha [a_1 x_1 + \dots + a_n x_n] = \alpha b$

$\iff (\alpha a_1) x_1 + \dots (\alpha a_n) x_n = (\alpha b)$

→ échangeant 2 équations entre elles p et q $\iff$ q et p

→ ajoutant à une équation (i) une autre équation (j) préalablement multipliée par un réel α (nul ou pas).

$$
\begin{array}{l}
(j) \to \\
\\
(i) \to
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\vdots \\
a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n = b_j \\
\vdots \\
a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n = b_i \\
\vdots
\end{array}
\right.
\iff
\begin{array}{l}
(j) \\
(i)
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n = b_j \\
(a_{i1} - \alpha a_{j1}) x_1 + \dots + (a_{in} - \alpha a_{jn}) x_n = b_i - \alpha b_j
\end{array}
\right.
$$

L'algorithme de Gauss est une succession d'opérations élémentaires de lignes

Exemple introductif:

$$\begin{cases} x + z = 2 & L_1 \\ 3x + y + z = 3 & L_2 \\ 2x + y + z = 1 & L_3 \end{cases}$$

$1^{\text{ère}}$ étape : éliminer l'inconnue x de L_2 et L_3 en faisant $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x + z = 2} \\ y - 2z = -3 \\ y - z = -3 \end{cases}$$

$2^{\text{ème}}$ étape : éliminer l'inconnue y de L_3 en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x + z = 2} \\ \cancel{y - 2z = -3} \\ z = 0 \end{cases}$$

- c'est un système échelonné équivalent
- une unique solution $(2, -3, 0)$

Algorithme de Gauss

On généralise l'approche de l'exemple précédent :

$$
\begin{array}{l}
L_1 \\ \\ L_i \\ \\ L_m
\end{array}
\left\{
\begin{array}{lllll}
\boxed{a_{11}} x_1 + & \dots & + a_{1n} x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} x_1 + & \dots & a_{in} x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} x_1 + & & a_{mn} x_n & = & b_m
\end{array}
\right.
$$

Si $a_{11} \neq 0$, on l'appelle le pivot (1er coeff non nul de la ligne)

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$$

$$
L_i \quad
\left\{
\begin{array}{l}
\dots \\
\Big(\underbrace{a_{i1} - \frac{a_{i1}}{\cancel{a_{11}}} \cancel{a_{11}}}_{=0}\Big) x_1 + \dots = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \\
\dots
\end{array}
\right.
$$

x_1 est éliminé de la ligne L_i

On fait la même chose pour les lignes L_2 à L_m et x_1 est éliminé de ces lignes

Mise en œuvre :

→ Mettre en L_1 une ligne telle que $a_{11} \neq 0$ pivot

→ Pour $i = 2$ à n, faire

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$$

→ S'il reste des inconnues, rayer L_1 et recommencer avec le système restant

remarques : → moins de m itérations

→ moins de n itérations

→ la première instruction peut être vide (a_{11} est souvent non nul)

→ le système en sortie est forcément échelonné

→ le système en sortie n'est pas unique (il y a des choix à faire)

→ en option, on peut diviser chaque ligne par son pivot (→ coeff 1)

Lecture des résultats :

→ Il existe une ligne où le pivot (1^{er} coeff non nul de la ligne) est au second membre ⇒ Pas de solution

Exemple :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ y + 3z = 3 \\ 0z = -1 \end{cases}$$

$0 = -1$ n'est jamais vrai

→ Autant de lignes non-nulles que d'inconnues ⇒ une unique solution

Exemple :

$$\begin{cases} \boxed{3}x + 2y - z = 2 \\ \boxed{1}y + 3z = 3 \\ \boxed{2}z = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

3 pivots
3 inconnues } ⇒ ∃! solution

→ plus d'inconnues que de pivots $\Rightarrow$ une infinité de solutions

Exemple :

$$\begin{cases} \boxed{3}x - 2y + 4z + 2t = 1 \\ \boxed{1}y + 3z - t = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

2 pivots
4 inconnues $\Big\} \Rightarrow \infty$ de sol

Les inconnues
- qui n'ont pas de pivot (ici : z et t) sont les inconnues libres
- qui ont un pivot (ici : x et y) sont les inconnues liées

Dans l'exemple : L_4 peut s'écrire $0.t = 0$ tous les $t \in \mathbb{R}$ sont solutions : t est libre

L_3 " " $0z + 0.t = 0$ " $z \in \mathbb{R}$ " " z " "

mais L_2 " " $y = -3z + t$ pour un couple (z,t) donné, y est unique

de même L_1 " " $x = \frac{1}{3}(1 + 2y - 4z - 2t)$ " " x est unique

Description des solutions : écrire les inconnues liées en fonction des inconnues libres

Exemple :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(1 + 2y - 4z - 2t) \\ y = -3z + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} + -\frac{10}{3} z \\ y = -3z + t \end{cases}$$

Ensemble des solutions $S = \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{10}{3} z, -3z + t, z, t \right) / \text{avec } z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$

par exemple : $z = 0, t = 0$ $\left(\frac{1}{3}, 0, 0, 0 \right)$ est une solution

$z = 1, t = 1$ $(-3, -2, 1, 1)$ " "

Calibrage de réseau :

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ z + t = 300 \\ y + t = 350 \\ x + z = 350 \end{cases} \iff \begin{cases} \overset{\text{pivot}}{\boxed{1}} x + y = 400 \\ z + t = 300 \\ y + t = 350 \\ x + z = 350 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

$$\begin{cases} \cancel{x + y = 400} \\ z + t = 300 & L_2 \leftarrow L_3 \\ \text{pivot } \boxed{1} y + t = 350 & L_3 \leftarrow L_2 \\ -y + z = -50 \end{cases} \iff \begin{cases} \cancel{x + y = 400} \\ \boxed{1} y + t = 350 \\ z + t = 300 \\ -y + z = -50 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_2$$

$$\begin{cases} \cancel{x + y = 400} \\ \cancel{y + t = 350} \\ \text{pivot } \boxed{1} z + t = 300 \\ z + t = 300 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \cancel{x + y = 400} \\ \cancel{y + t = 350} \\ \cancel{z + t = 300} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

fini

Lecture des résultats :

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\mathrm{I}}\,\cancel{x} + \cancel{y} = \cancel{400} \\ \boxed{\mathrm{II}}\,\cancel{y} + \cancel{t} = \cancel{350} \\ \boxed{\mathrm{III}}\,\cancel{z} + \cancel{t} = \cancel{300} \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

pivots

- pas de pivot au second membre $\Rightarrow$ solutions existent
- 3 pivots, 4 inconnues } ∞ de solutions
- t inconnue libre (pas de pivot)
- x, y, z liées (pivot)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 400 - y = 400 - 350 + t = t + 50 \\ y = 350 - t \\ z = 300 - t \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

← ok $0=0$; $t \in \mathbb{R}$ est quelconque

On choisit t et on calcule les autres (ex $t = 150$)