Introduction à la logique des propositions et des prédicats

I) Les propositions:

- **Proposition**: tout énoncé dont on peut décider s'il est vrai ou faux.

- **Exemples:**
  – **« 2+2=4 »** est une proposition vraie
  – **« 2+2=5 »** est une proposition fausse.
  – **« la terre est ronde »:** proposition vraie
  – **« 5+3 »** ***n'est pas*** une proposition.

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont des propositions ?

1) « $3+x > 5$ »

2) « cette phrase est un mensonge »

3) « Il a plu sur Sète le 16 juillet 1637 »

4) « $4 \leq 3$ »

Valeur de vérité

A chaque proposition **P** on peut associer sa **valeur de vérité**, notée **v(P)** :

v(« 2+2=4 »)=V

v(« 2+2=5 »)=F

II) Les connexions:

- Les **connexions** permettent de construire d'autres propositions à partir de propositions données.

- Les 5 principaux connecteurs sont:

  - $\neg$: la négation
  - $\wedge$: la conjonction (« et »)
  - $\vee$: la disjonction (« ou non exclusif »)
  - $\Rightarrow$: l'implication
  - $\Leftrightarrow$: l'équivalence.

- On associe à chaque connecteur **une table de vérité.**

La négation

P	**¬P**
V	F
F	V

On lit:

Quand P est vrai alors ¬P est faux

Quand P est faux alors ¬P est vrai

la conjonction

P	**Q**	**$P \wedge Q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

la disjonction

P	**Q**	**P VQ**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Attention : la disjonction « mathématique » est non exclusive

(contrairement au « ou » de la langue française, comme dans l'expression « boire ou conduire »)

l’implication

P	**Q**	**P ⇒ Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

l'équivalence

P	**Q**	**$P \Leftrightarrow Q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

III) Formules logiquement équivalentes:

- Une forme propositionnelle (ou une **formule**) est une expression formée de *variables* p, q, r … pouvant prendre les valeurs V ou F , de connecteurs et de parenthèses.
- A chaque formule on peut associer **une table de vérité**.

<u>Exemple</u>: $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$

Table de vérité de la formule $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$\neg r$	$(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V

- On dit que deux « formules » sont **logiquement** équivalentes **ssi** elles ont la même table de vérité.

- Exemples:

  $(p \Rightarrow q)$,$(\neg p \vee q)$ et $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ sont 3 formules logiquement équivalentes.

Formules logiquement équivalentes usuelles

<u>commutativité</u> : $p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee p$

<u>associativité</u> : $\begin{cases} (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \end{cases}$

<u>distributivité</u> $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

$$\boxed{(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \equiv \neg p \vee q}$$

$$\boxed{\neg(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)}$$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

<u>De Morgan</u> :

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Tautologie : formule toujours vraie

ex : $p \vee (\neg p)$

Quelques tautologies utiles :

① $p \Rightarrow p \vee q$

ex : $x \in A \underset{\text{logique}}{\Longrightarrow} x \in A \vee x \in B \underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} x \in A \cup B$

② $(p \wedge q) \Rightarrow p$

ex : $x \in A \cap B \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} x \in A \wedge x \in B \overset{\text{logique}}{\Longrightarrow} x \in A$

③ $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

(en général on écrit $p \Rightarrow q \Rightarrow r$)

④ $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$

⚠ ça ne marche pas avec $\vee$

(5) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow Q$ $\boxed{\text{Modus ponens}}$

(6) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$

ex :

Rougeole => température
Rougeole => boutons

connaissances de l'expert

A) On sait que le patient a la rougeole : on en déduit qu'il a de la température et des boutons (5)

B) On observe que le patient n'a pas de boutons. On en déduit que ce n'est pas la rougeole (6)

IV) Prédicats

- **<u>Un prédicat</u>** est un énoncé contenant *une ou plusieurs variables* et dont la valeur de vérité dépend de ces variables. On le représente par un symbole (P, Q, R …) suivi de la liste de ses variables entre parenthèses.

- **<u>Exemple</u>**:

  P(n): « **n** est un nombre pair » est un **prédicat**,

  P(3) est une **proposition** fausse.

  P(2) est une **proposition** vraie.

<u>Quantificateurs</u>:

- A partir d'un **prédicat** P(x) et d'un **ensemble** E on peut définir 2 **propositions** à l'aide des quantificateurs $\forall, \exists$:

- **($\forall x \in E$, P(x)):** cette ***proposition*** est vraie **ssi** P(x) est vraie pour **tous** les x dans E.

- **$\exists x \in E$, P(x)): :** cette ***proposition*** est vraie **ssi** il existe au moins un élément x de E pour lequel P(x) est vrai.

$\neg$ ($\forall x \in E$, $P(x)$) et $\exists x \in E$, $\neg P(x)$ ont la même valeur de vérité.

$\neg(\exists x \in E$ $P(x))$ et $\forall x \in E$, $\neg P(x)$ ont la même valeur de vérité.

Exemples:

- **P**: $\forall x \in IR,\ x^2 \geq x$.

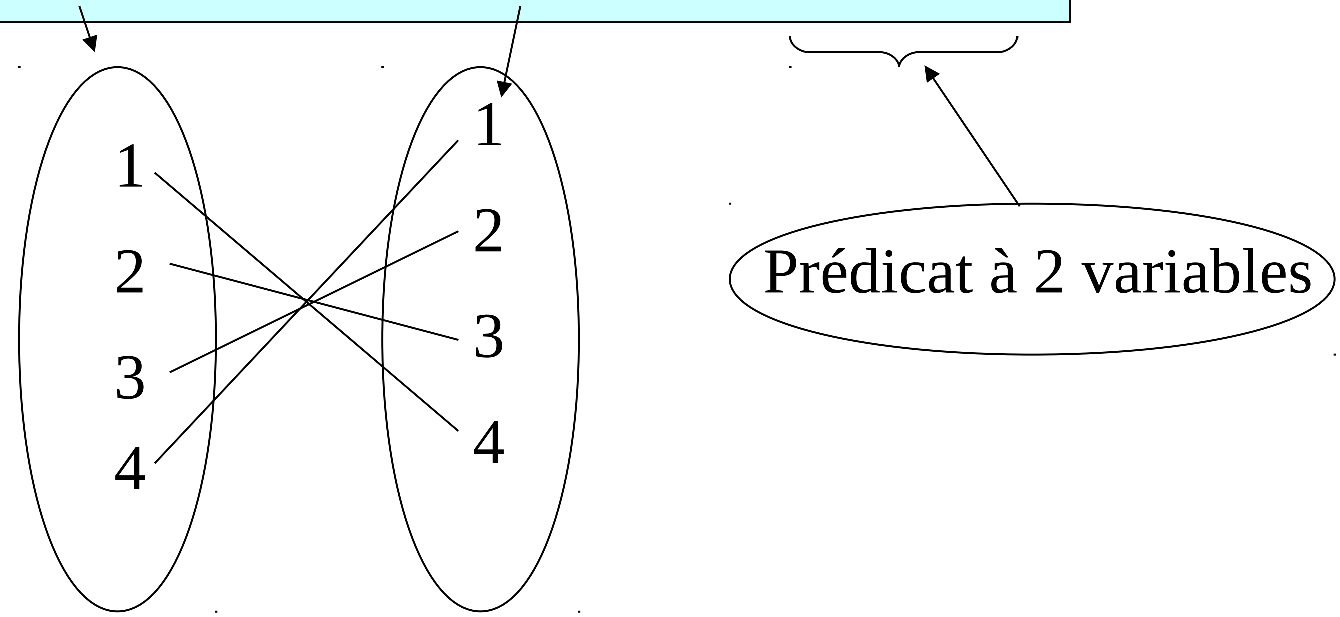
- Cette proposition est **fausse.** Il suffit de prendre **le contre-exemple** x= 0,5.

- **La négation** de P peut s'écrire:
  - $\neg$**P**: $\exists x \in IR,\ x^2 < x$. (proposition vraie)

Exemples

- Soit E l'ensemble E={1, 2, 3, 4}, et la **proposition**:

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \exists y \in E, \quad x+y=5}$$



Cette proposition est donc vraie.

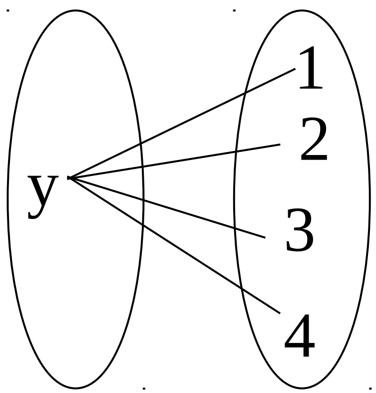
Sa négation s'écrit:

$\exists x \in$ E, $\forall y \in$ E , $\mathbf{x + y \neq 5}$. (proposition fausse).

Exemple:

- En inversant les quantificateurs de la proposition précédente on obtient une proposition **fausse**:

$$\exists y \in E,\ \forall x \in E\ ,\ x+y=5$$



Exercice:

- Soit E={0,1,2,3,4} un ensemble. Donner les valeurs de vérité des propositions suivantes:
  - 1) $\forall x \in E, \quad \exists y \in E, \quad x \times y = 0$
  - 2) $\exists y \in E, \quad \forall x \in E \quad x \times y = 0$

V) Quelques méthodes pour le raisonnement:

- A) <u>Avec les propositions</u>:
  - 1) Le « **modus-ponens** »:
    - Si on sait que **P est vraie** et que **(P⇒Q) est vraie** on peut en déduire que **Q est vraie.**
  - 2) Disjonction de cas
    - Si on sait que **(P⇒Q) est vraie** et que **(¬ P⇒Q) est vraie** on peut en déduire que **Q est vraie.**

- 3) **La contraposée**:
  - **$(p \Rightarrow q)$** est logiquement équivalent à **$(\neg q \Rightarrow \neg p)$**

- 4) **Transitivité de l'implication**:
  - Si **$(P \Rightarrow Q)$** est vraie et **$(Q \Rightarrow R)$ est vraie alors** **$(Q \Rightarrow R)$** est vraie.

B) Propositions de la forme $\forall x \in E, P(x)$

- 1)Si $E=\{x_1,x_2,\ldots, x_n\}$ est un ensemble fini:
  - on montre que $\mathbf{P(x_1)^P(x_2)\ ^\wedge\ \ldots\ ^\wedge\ P(x_n)}$ est vraie.

- 2) Si E est infini:
  - on fait un **raisonnement littéral.**

- 3) Par disjonction de cas:
  - Si $E = A \cup B$ on montre que $(\boldsymbol{\forall x \in A, P(x)) \wedge (\forall x \in B, P(x)})$ est vraie.

- 4) Par l'absurde:
  - On montre que supposer la négation vraie (i.e. $\boldsymbol{\exists x \in E, \neg P(x)}$) conduit à une absurdité.

- 5) La récurrence: sera vue en TD.

- Remarque:
  - Pour démontrer que $\forall x \in E, P(x)$ est fausse il suffit d’un seul **contre-exemple.**

C) Démontrer une proposition de la forme $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}, \mathbf{P(x) \Rightarrow Q(x)}$

- 1) principe:
  - Il suffit de vérifier que pour les $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ tels que P(x) est vraie alors Q(x) est vraie. Les autres cas sont inutiles.

- 2) Transitivité:
  - si $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}, \mathbf{P(x) \Rightarrow R(x)}$ et $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}, \mathbf{R(x) \Rightarrow Q(x)}$ sont vraies alors $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}, \mathbf{P(x) \Rightarrow Q(x)}$ est vraie.

Exemples:

- 1) $\forall x \in IR, (3x^2-3x-1>0) \Rightarrow (x^2+1>0)$.

- 2) $\forall x \in IR, (3x^2-3x-1>0) \Rightarrow (x \neq 0)$

- 3) $\forall x \in IR, (3x-1=0) \Rightarrow ((x= 1/3) \vee (x=0))$