TD 3: Connexité
Exercice 1:

Soit $G = (X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, E = \{ab, ac, bc, bd, cd, de, fg\})$ un graphe.

1. Donnez en extension $Cl_G(a), Cl_G(b), Cl_G(f)$ et $Cl_G(h)$.
2. Combien y a-t-il de classes de connexité distinctes dans G ?
3. Combien y a-t-il de composantes connexes de G ?
4. Dessinez les composantes connexes de G .

Exercice 2:

Soit $G = (X, E)$ un graphe avec $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ et $E = \{ac, ag, ah, bi, cg, ch, dk, dl, ej, el, fh, fk, gh, hi, hk, kl\}$.

1. Dessinez une représentation planaire du graphe G (c'est à dire une représentation dans laquelle les arêtes ne se croisent pas).
2. Quels sont les isthmes de ce graphes?
3. Quels sont les points d'articulation de ce graphe?

Exercice 3:

Soit G le graphe ayant deux composantes connexes G_1 et G_2 définies par $G_1 = (\{a, d, e\}, \{ad, ae\})$ et $G_2 = (\{b, c, f, g\}, \{bf, cf, fg\})$.
Dessinez, sans justification, un graphe H_i de taille minimale dont l'ensemble des sommets est $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ayant G_1 et G_2 comme sous-graphes induits et tel que:

1. H_1 est connexe et n'a pas de cycle.
2. H_2 est connexe et a au moins un cycle.
3. H_3 est non connexe et n'a pas de cycle.

Exercice 4:

Soit $G = (X = \{a, b, c, d, e, f, g\}, E = \{ab, bc, bd, be, cd, ef, eg, fg\})$un graphe.

1. Quels sont les isthmes de ce graphe?
2. Donnez la séquence des degrés de G .
3. Dessinez un graphe H ayant la même séquence que G mais n'ayant qu'un seul isthme.
4. Dessinez un graphe K ayant la même séquence que G mais ayant 3 isthmes.
5. Donnez toutes les chaines d'extrémités a et f du graphe initial.

Exercice 5:

Soit G un graphe ayant pour séquence des degrés $S(G) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 6)$.

1. Sans chercher à construire G, démontrez que G admet nécessairement un cycle.
2. Sans chercher à construire G, démontrez que G est nécessairement connexe.
3. Construisez tous les graphes G à un isomorphisme près.

Exercice 6:

Soit G un graphe ayant pour séquence de degrés $S(G) = (3, 3, 3, 3, 4, 4, 4)$.

1. Donnez l'ordre et la taille de G .
2. Démontrez que G est nécessairement connexe.

3. Démontrez que G admet au moins un cycle.
4. Démontrez que G n'a aucun isthme.
5. Donnez une représentation possible d'un tel graphe G .

Exercice 7:

On considère l'ensemble des graphes G ayant pour sommets $X = \{a, b, c, d\}$ et tels que $G[\{a,b,c\}], G[\{b,c,d\}], G[\{a,c,d\}]$ sont connexes mais pas $G[\{a,b,d\}]$.

1. Montrez qu'un graphe G ayant ces propriétés est nécessairement connexe et en déduire que sa taille est supérieure ou égale à 3.
2. Démontrez que sa taille est inférieure ou égale à 4 .
3. Dessinez tous les graphes G de taille 4.
4. Dessinez tous les graphes G de taille 3.

Exercice 8:

1. Dessinez, si un tel graphe existe, un graphe connexe G_1 d'ordre 4, de taille minimale et tel que $\overline{G_1}$ est connexe.
2. Dessinez, si un tel graphe existe, un graphe connexe G_2 d'ordre 4, de taille minimale et tel que $\overline{G_2}$ n'est pas connexe.
3. Dessinez, si un tel graphe existe, un graphe non connexe G_3 d'ordre 4, de taille minimale et tel que $\overline{G_3}$ est connexe.
4. Dessinez, si un tel graphe existe, un graphe non connexe G_4 d'ordre 4, de taille minimale et tel que $\overline{G_4}$ n'est pas connexe.
5. Démontrez que si G n'est pas connexe alors $\overline{G}$ est connexe.

Exercice 9:

Soit le graphe

$$G = (X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, E = \{ab, bc, be, cd, de, ef, fg, fi, gh, hi\})$$

1. Quel est l'ordre de G ?
2. Quelle est la taille de G ?
3. Quelle est la séquence de G ?
4. Quelle est le nombre d'arêtes de $\overline{G}$?
5. Quelle est la séquence de $\overline{G}$?
6. Démontrer que tous les graphes ayant la même séquence que G admettent nécessairement un cycle.
7. Dans un graphe "connexe" G on appelle distance du sommet x au sommet y et on note $d_G(x, y)$, la longueur de la plus courte chaine d'extrémités x et y . Donner les distances suivantes pour le graphe G ci-dessus:
   (a) $d_G(a, a) =$
   (b) $d_G(a, b) =$
   (c) $d_G(a, f) =$
   (d) $d_G(a, h) =$
8. On appelle diamètre d'un graphe G la plus grande distance entre deux sommets de G. Quel est le diamêtre du graphe G ci-dessus?

Exercice 10:

Algorithmes sur la connexité:
Pour écrire les algorithmes de cet exercice, on admettra que l'on sait:

- Déterminer le voisinage d'un sommet x d'un graphe G donné ($V_G(x)$).
- Choisir un élément dans un ensemble donné.
- Faire la réunion, l'intersection et la différence de deux ensembles donnés.
- Déterminer le complémentaire dans E d'une partie A de E .
- Déterminer si un élément appartient à un ensemble.
- Déterminer si deux ensembles sont égaux.
- Déterminer le cardinal d'un ensemble.
- Concaténer deux parcours.

Ecrivez les fonctions suivantes en utilisant lorsque nécessaire le langage de la théorie des graphes et le langage ensembliste (vous avez le droit bien entendu aux outils informatiques usuels: les boucles, les branchements conditionnels, les tableaux,...):

1. La fonction $CDC(G = (X, E), a)$ qui à partir de la donnée d'un graphe G et d'un sommet a de G retourne la classe de connexité de a dans G.
2. La fonction **Connexe**($G = (X, E)$) qui retourne **Vrai** si le graphe G est connexe et **Faux** sinon.
3. La fonction **NbreDeComposantes**($G = (X, E)$) qui retourne le nombre de composantes connexes du graphe G donné.
4. La fonction **Connectés**($G = (X, E), a, b$) qui retourne **Vrai** s'il existe une chaine d'extrémités a et b dans le graphe G et **Faux** sinon.
5. La fonction **Chaine**($G = (X, E), a, b$) qui retourne la liste ordonnée des sommets d'une chaine de G d'extrémités a et b s'il en existe une, la liste vide () sinon.