IUT de Montpellier, département d'informatique.
Année scolaire 2021-2022.

Mathématiques discrètes (1ère année Semestre 1)

1. **Calcul booléen.**
2. **Logique des propositions et logique des prédicats.**
3. **Théorie naïve des ensembles.**
4. **Dénombrement**
5. **Relations binaires.**

TD 1: Calcul booléen

Exercice 1:

En utilisant les règles de calcul sur les algèbres de Boole, simplifiez les expressions suivantes (où x, y, z et t sont quatre éléments quelconques d'une algèbre de Boole):

1. $A = (x+y) \times (x+\overline{y})$;
2. $B = xyz + x\,\overline{y}\,z$;
3. $C = (x+y) \times \overline{\overline{x} \times y}$;
4. $D = \overline{xy\overline{z} + \overline{x}y}$;
5. $E = \overline{x\,(y+\overline{z}) + \overline{x}\,y}$;
6. $F = \overline{(x+y+z)\,(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}$;
7. $G = xyzt + x\overline{t} + yz$.
8. $H = xz + \overline{(x+\overline{z})\,(z+t)} + yz\overline{t} + xyzt$

Exercice 2:

Déterminez les tables de vérité, les formes canoniques disjonctives des fonctions booléennes suivantes:

1. $f_1(a,b,c) = ab + \overline{a}c$.
2. $f_2(a,b,c) = a\,(b+\overline{a}) + c$
3. $f_3(a,b,c) = ab + bc + ca$
4. $f_4(a,b,c) = a\,(b+ac)\,\overline{c}$
5. $f_5(a,b,c) = abc + \overline{a}\,\overline{c}$
6. $f_6(a,b,c) = (a+bc)\left(\overline{a} + \overline{b}\,\overline{c}\right)$

Exercice 3:

Déterminez les formes disjonctives minimales dans chacun des cas. Vous pouvez utiliser les diagrammes de Karnaugh:

1. $abcd + \overline{a}b + a\overline{c}d + b\overline{c}\,\overline{d}$
2. $ab\overline{c} + a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}bc + a\overline{b}c$
3. $abcd + a\overline{b} + a\overline{c} + bc + ab\left(\overline{c} + \overline{d}\right)$
4. $a + \overline{a}\left(\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} + c + d\right)$

Exercice 6:

On considère l'expression booléenne $\phi = (x + y\overline{z})\,\overline{yz}$

1. Ecrivez ϕ sous sa forme canonique disjonctive en utilisant uniquement les règles du calcul booléen.
2. Vérifiez le résultat de la question précédente à l'aide d'une table de vérité.
3. Utilisez un diagramme de Karnaugh pour obtenir une forme polynomiale minimale de ϕ .

Exercice 7:

On considère la fonction booléenne à 3 variables f définie par la formule suivante:

$$f(x, y, z) = xy\overline{z} + x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{y}z$$

1. Dressez le diagramme de Karnaugh correspondant à f .
2. Simplifiez la formule de f en utilisant la méthode de Karnaugh.
3. Donnez la forme canonique disjonctive de $\overline{f}$.
4. Donnez la forme polynomiale simplifiée de $\overline{f}$.
5. Combien y a-t-il de fonctions booléennes à 3 variables ?

Exercice 8:

Soit f une fonction booléenne à 3 variables définie par la formule suivante:

$$f(x, y, z) = \overline{(x + yz)} \times (x + \overline{z}) + yz$$

1. En utilisant les règles du calcul booléen, écrivez f sous la forme d'un polynome booléen (pas nécessairement minimal). Vous détaillerez les étapes de calculs.
2. Même question pour $\overline{f}$.
3. Complétez la table de vérité de la fonction f :

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

4. Donnez la forme canonique disjonctive de f .
5. Dressez le diagramme de Karnaugh de f .
6. Simplifiez f en utilisant la méthode de Karnaugh
7. Simplifier $\overline{f}$.

Interrogation de maths discrètes n°1 année 2018
Groupe S2

Exercice 1:

Déterminez les tables de vérité des fonctions booléennes suivantes (a,b et c représentent des variables booléennes dans $B = \{0,1\}$):
$f_1(a,b,c) = ab + \overline{a}c$
$f_2(a,b,c) = a(b + ac)\overline{c}$
$f_3(a,b,c) = \overline{ab + \overline{a}bc} + b\overline{c}$

a	b	c	$f_1(a,b,c)$	$f_2(a,b,c)$	$f_3(a,b,c)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Exercice 2:

Soit la fonction booléenne suivante à 4 variables:

$$f(a,b,c,d) = (ab + cd)(ac + ba)(ad + bc)$$

1. En utilisant uniquement les règles du calcul booléen, démontrez que $f(a,b,c,d) = abd + abc + acd$. Vous détaillerez chacune de vos étapes de calcul en justifiant précisemment.

2. Dressez le diagramme de Karnaugh de la fonction booléenne f :

3. Donnez une forme polynomiale simplifiée de la fonction $\overline{f}$.

Interrogation n°1 groupe S6 année2018

Exercice 1 :

Soit f une fonction booléenne à 3 variables définie par la formule suivante :

$$f\left(x, y, z\right) = \overline{xy + yz} \times (x + \overline{z}) + \overline{y}\,\overline{z}$$

1. En utilisant les règles du calcul booléen écrivez f sous la forme d'un polynome booléen (pas nécessairement minimal). Vous détaillerez les étapes de calculs :

2. Même question pour $\overline{f}$:

3. Complétez la table de vérité de la fonction f :

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

4. Donnez la forme canonique disjonctive de f :

Exercice 2 :

On considère la fonction booléenne g à 3 variables définie par :

$$g(x, y, z) = x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y + \overline{x}\,\overline{y}z$$

1. Dressez le diagramme de Karnaugh de g :

2. Simplifiez g en utilisant la méthode de Karnaugh (vous donnerez toutes les formes polynomiales minimales de g).

TD 2: logique

Exercice 1:

Donnez les valeurs de vérité des propositions suivantes:

1. (2 est pair)$\Rightarrow$ (7 est pair) ;
2. (2 est impair)$\Rightarrow$ (7 est pair) ;
3. (2 est impair)$\Rightarrow$ (7 est impair) ;
4. (2 est pair)$\Rightarrow$ (7 est impair) ;

Exercice 2:

On appelle **réciproque** de la proposition $p \Rightarrow q$ la proposition $q \Rightarrow p$.
On appelle **contraposée** de la proposition $p \Rightarrow q$ la proposition $\neg q \Rightarrow \neg p$.

1. Pour chacune des propositions de l'exercice précédent, écrivez la réciproque puis la contraposée et donnez-en les valeurs de vérité .
2. La formule $(p \Rightarrow q)$ est-elle logiquement équivalente à sa réciproque ?
3. La formule $(p \Rightarrow q)$ est-elle logiquement équivalente à sa contraposée ?

Exercice 3:

Donnez

1. une formule logiquement équivalente à $p \Rightarrow q$ ne contenant pas le symbole $\Rightarrow$.
2. une formule logiquement équivalente à $p \Leftrightarrow q$ ne contenant pas le symbole $\Leftrightarrow$.
3. une formule logiquement équivalente à $\neg (p \Rightarrow q)$ ne contenant pas le symbole $\Rightarrow$.
4. une formule logiquement équivalente à $\neg (p \Leftrightarrow q)$ ne contenant pas le symbole $\Leftrightarrow$.

Exercice 4:

Trois étudiants Albert, Bertrand et Charles sont convoqués devant le professeur de mathématiques pour une affaire de fraude au partiel. Devant le professeur chacun des étudiants suspectés fait un témoignage:

— l'étudiant Albert:"Bertrand est coupable et Charles est innocent."
— l'étudiant Bertrand:"Si Albert est coupable alors Charles aussi".
— l'étudiant Charles:"Je suis innocent et au moins l'un des deux autres est coupable."

On notera A (respectivement B et C) la proposition "Albert est innocent" (respectivement "Bertrand est innocent" et "Charles est innocent").

1. Réécrivez les témoignages en utilisant les symboles logiques classiques.
2. Dressez la table de vérité des formules correspondant aux trois témoignages.
3. Répondez aux questions suivantes :
   (a) Les témoignages sont-ils compatibles ? (c'est à dire existe-t-il une situation où les trois témoignages sont vrais en même temps).
   (b) Lequel des témoignages d'un étudiant est une conséquence logique de celui d'un autre étudiant ? (on dit que le témoignage T' est une conséquence logique du témoignage T si et seulement si pour toutes les valeurs de vérité possibles pour A, B et C, on a T$\Rightarrow$ T' qui est une proposition vraie).
   (c) En supposant que tous sont innocents, qui a fait un témoignage honnête et qui a menti ?
   (d) En supposant que les trois témoignages sont vrais, qui est innocent et qui est coupable ?
   (e) En supposant que les innocents disent la vérité et que les coupables mentent, qui est coupable et qui est innocent ?

Exercice 5 :

Pour chacune des propositions P ci-dessous, écrivez $\neg P$ sous une forme ne contenant pas le symbole $\neg$ puis la contraposée lorque cela a un sens. Déterminez aussi leur valeur de vérité.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \big(x^2 > 0 \Rightarrow x > 0\big)$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \big(x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0\big)$;
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \big(x^2 > 0 \Rightarrow x > 0\big)$;
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \big(x > 0 \Rightarrow x^2 > 0\big)$;
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \big(x^2 + y < 0\big)$;
7. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \big(x^2 + y < 0\big)$;
8. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \big(x^2 + y < 0\big)$.

Interrogation n°2 groupe S2 ; Maths discrètes ; année 2018/2019

Exercice 1 :

On considère la forme propositionnelle $(p \vee q) \Rightarrow p$ (on notera f cette formule).

1. Réécrivez f en utilisant la forme contraposée de l'implication :

2. Réecrivez f sans utiliser le symbole $\Rightarrow$:

3. Complétez la table de vérité suivante (p et q représentent des variables propositionnelles) :

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow p$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

4. Ecrivez une formule logiquement équivalente à $(p \vee q) \Rightarrow p$ et qui n'utilise qu'un seul connecteur :

Exercice 2 :

1. On considère la proposition $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 - y = 0$. Donnez en le justifiant la valeur de vérité de cette proposition.

.

2. On considère la proposition $P_2 : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - y = 0$. Donnez en le justifiant la valeur de vérité de cette proposition.

.

Exercice 3 :

Soit P la proposition suivante :

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \left(x^2 = y^2\right) \Rightarrow (x = y)$$

1. Déterminez la valeur de vérité de P et justifier votre réponse :

2. Réécrivez P en utilisant la contraposée de l'implication :

3. Ecrivez la négation de P :

Interrogation n°2 groupe S1(année 2016)

Exercice 1 :

Pour chacune des expressions mathématiques du tableau ci-dessous, cochez la case correspondante. Dans le cas où il s'agit d'une proposition précisez sa valeur de vérité :

expressions	proposition (V ou F)	prédicat	ni l'un ni l'autre
$x^2+1=0$			
π			
$5 \geq 3+1$			
l'équation $x^2+x+3=0$ admet 0 solution dans $\mathbb{R}$			
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$			
$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$			
$2+2=5 \Leftrightarrow 1+1=3$			

Exercice 2 :

1. Complétez la table de vérité ci-dessous (p et q représentent des variables propositionnnelles) :

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$(q \Rightarrow p) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

2. Donnez une formule très simple logiquement équivalent à $(q \Rightarrow p) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$:

3. Donnez une formule logiquement équivalente à $p \Leftrightarrow q$ qui n'utilise que les connecteurs $\vee, \wedge$ et $\neg$ et les variables propositionnelles p et q .

Exercice 3 :

On considère le prédicat

$$P(x,y) : y + 2x^2 = 1$$

1. Complétez les cases vides du tableau par V ou F :

proposition	valeur de vérité
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x,y)$	
$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, P(x,y)$	
$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, P(x,y)$	
$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x,y)$	

2. Ecrivez la négation de la proposition de la première ligne du tableau :

3. Justifiez les réponses des deux premières lignes du tableau précédent :

TD 3: les ensembles

Exercice 1:

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse:

Proposition	V ou F
$1 \in \{1\}$	
$1 \subseteq \{1\}$	
$0 \in \{1,2\}$	
$1 \in \{\{1\},\{2\}\}$	
$\{1\} \subseteq \{1\}$	
$\{1\} \in \{1\}$	
$\{1,2\} \subseteq \{1\}$	
$\{1\} \in \{1,2\}$	
$\{1\} \subseteq \{1,2\}$	
$\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$	
$\{1\} \in \{1,\{1\}\}$	
$\{1\} \subseteq \{1,\{1\}\}$	
$\{1\} \subseteq \{\{1\},\{2\}\}$	
$\emptyset \in \{1,2\}$	
$\emptyset \subseteq \{1,2\}$	
$\emptyset \in \emptyset$	
$\emptyset \subseteq \emptyset$	

Exercice 2:

Soient $E = \{1,2,3,4,5\}$ et $A, B \in \mathcal{P}(E)$ définis en compréhension par

$$A = \{x \in E, x \text{ est pair}\}$$

$$B = \{x \in E, x \leq 3\}$$

1. Ecrire en extension les ensembles A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A - B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.
2. Soit x un élément de E et la proposition: “Il n’est pas vrai que x est à la fois pair et inférieur ou égal à 3” . Réécrire cette proposition sous les formes suivantes:
   (a) “il est vrai que x est ...”
   (b) $x \in \{\cdots\}$
   (c) $x \in \overline{A \dots B}$
   (d) $x \in \overline{A} \dots \overline{B}$
3. Compléter les lois de De Morgan: $\overline{A \cap B} = \dots\dots\dots, \overline{A \cup B} = \dots\dots\dots$
4. Vérifier les lois de De Morgan à l’aide des diagrammes de Venn (i.e. les diagrammes en “patate”).
5. Démontrer les lois de De Morgan sur les ensembles (vous utiliserez pour cela les lois de De Morgan de la logique des propositions).

Exercice 3 :

Compléter sans justification le tableau suivant par les cardinaux des ensembles :

$\lvert A\rvert$	$\lvert B\rvert$	$\lvert A\cap B\rvert$	$\lvert A\cup B\rvert$	$\lvert A-B\rvert$	$\lvert B-A\rvert$
15	7	3			
		2	20	8	
			13	8	5
a	b	i			
a	b		u		
		x	y		z

Exercice 4 :

1. Exprimer sans justification $|A-B|$ et $|A\cup B|$ en fonction de $|A|,|B|$ et $|A\cap B|$ pour tous ensembles A et B .
2. Exprimer $|A\cup B\cup C|$ en fonction des cardinaux de A, B et C et d'intersections de ces ensembles.

Problème 5:

Un centre de langue propose des cours d'Albanais, de Bantou et de Chinois. On a les informations suivantes sur ce centre:

— Il y a 93 élèves qui pratiquent au moins l'une de ces trois langues.
— 54 étudient l'Albanais.
— 51 étudient le Bantou ou le Chinois ou les deux à la fois.
— 27 le Chinois mais pas le Bantou.
— 3 étudient ni l'Albanais, ni le Chinois mais le Bantou.
— 12 élèves étudient les trois langues à la fois.

On note A l'ensemble des élèves qui étudient l'Albanais, B les élèves qui étudient le Bantou et C les élèves qui étudient le Chinois.

1. Démontrer en utilisant les propriétés du formulaire les égalités suivantes pour toutes parties A et B d'un ensemble E :
   (a) $|A\cup B| = |A| + |B-A|$
   (b) $|A| = |A\cap B| + \left|A\cap \overline{B}\right|$
2. Traduire les 6 propositions de l'énoncé à l'aide des notations ensemblistes usuelles.
3. Combien d'élèves étudient l'Albanais ou le Chinois ou les deux à la fois ? On justifiera la réponse en utilisant les propriétés du formulaire et celles de la question 1.
4. Combien d'élèves étudient le Bantou ? On justifiera la réponse en utilisant les propriétés du formulaire et celles de la question 1.
5. Combien d'élèves étudient uniquement l'Albanais ? On justifiera la réponse en utilisant les propriétés du formulaire et celles de la question 1.
6. Pour la question suivante on ne demande pas de justification: Combien d'éléves étudient à la fois le Bantou et le Chinois?

Exercice 6 :

Soient les ensembles $E=\{a,b\}$ et $F=\{1,2,3\}$.

1. Ecrire en extension $E\times F$, $F\times E$, E^2, $E\times\emptyset$ et $\emptyset\times E$.
2. Donner les cardinaux de ces ensembles.
3. On suppose à présent que E et F sont deux ensembles finis quelconques. Exprimer $|E\times F|$ et $\left|E^2\right|$ en fonction de $|E|$ et $|F|$.
4. Donner une CNS (Condition Nécessaire et Suffisante) sur E et F pour que $E\times F = F\times E$.

TD 4 : Dénombrement

Exercice 1 :

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ un ensemble de cardinal 3.

1. Déterminez tous les sous-ensembles de E ayant
   (a) 0 élément,
   (b) 1 élément,
   (c) 2 éléments
   (d) 3 éléments.
   En dénombrement, un sous-ensemble de k éléments d'un ensemble E est appelé **une combinaison** de k éléments de E.

2. Déterminez tous les couples (a, b) d'éléments de E .
3. Déterminez tous les couples (a, b) d'éléments **distincts** de E (On appelle un tel couple un **arrangement** de 2 éléments de E).
4. Déterminez tous les arrangements de 3 éléments de E (c'est à dire toutes les listes ordonnées (a, b, c) de 3 éléments distincts 2 à 2 de E).

Exercice 2 :

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ un ensemble de cardinal 7.

1. Combien y a-t-il de sous-ensembles (ou de combinaisons) de l'ensemble E ?
2. Combien y a-t-il de combinaisons ayant
   (a) 0 élément,
   (b) 1 élément,
   (c) 2 éléments,
   (d) 5 éléments,
   (e) 6 éléments,
   (f) 7 éléments.
3. Combien y a-t-il n-uplets d'éléments de E avec :
   (a) $n = 2$
   (b) $n = 3$
   (c) $n = 7$.

4. Combien y a-t-il d'arrangements d'éléments de E ayant
   (a) 2 éléments,
   (b) 3 éléments,
   (c) 7 éléments.

Exercice 3 :

Dans une urne, il y a 10 jetons numérotés de 1 à 10. On choisit simultanément 3 jetons. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Exercice 4 :

Combien y a-t-il de mots de 10 bits ayant exactement trois “1” ? ayant au moins trois “1” ?

Exercice 5 :

Je dispose d’un jeu de 5 cartes numérotées de 1 à 5. Je choisis un lot non ordonné de 3 cartes distinctes.

1. Combien y a-t-il de lots possibles ?
2. Combien y a-t-il de lots avec une seule carte paire et deux cartes impaires ?
3. Combien y a-t-il de lots avec au moins une carte paire ?

Exercice 6 :

Dans un jeu classique de 32 cartes, je choisis une main de 5 cartes distinctes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains avec 2 as exactement ?
3. Combien y a-t-il de mains avec au moins 2 as ?
4. Combien y a-t-il de mains avec 2 carreaux ?
5. Combien y a-t-il de mains avec 2 as et deux carreaux ?

Exercice 7 :

Dans une classe il y a 30 élèves dont 10 filles. On veut former un groupe de 5 délégués. Combien peut-on former de groupes avec 2 filles et 3 garçons ?

Exercice 8 :

Des chevaux, numérotés de 1 à 15 font une course.

1. Combien y a-t-il d’arrivées possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums possibles ? (dans un podium on ne s’intéresse qu’au classement des 3 premiers)

Exercice 9 :

De combien de manières peut-on garer 3 voitures dans un parking à 5 emplacements, un emplacement ne pouvant recevoir qu’une seule voiture ?

Exercice 10 :

De combien de manières peut-on ranger ...

1. 3 paires de chaussettes dans 2 tiroirs ?
2. 4 paires de chaussettes dans 5 tiroirs ?
3. n paires de chaussettes dans p tiroirs ?

(on ne dissocie pas les paires et chaque tiroir est assez grand pour contenir jusqu’à n paires).

Exercice 11 :

Un jeu de 52 cartes est constitué de 4 couleurs (coeur, carreau, pique et trêfle) et de 13 figures (as, 2,3,4,...,V,D,R).
Au jeu de poker une main est constituée de 5 cartes distinctes prises dans un jeu de 52 cartes.
Les honneurs sont les cartes de figure Valet, Dame, Roi.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Carré :
   (a) Combien y a-t-il de mains avec un carré d'as ?
   (b) Combien y a-t-il de mains avec un carré ?
3. Full :
   (a) Combien y a-t-il de mains avec trois rois et deux dames ("full") ?
   (b) Combien y a-t-il de mains avec un full ?
4. Double paire :
   (a) Combien y a-t-il de mains avec une paire de rois et une paire de dames ("double paire") ?
   (b) Combien y a-t-il de mains avec une double paire ?
5. Quinte flush (5 cartes qui se suivent de la même couleur) :
   (a) Combien y a-t-il de mains avec une quinte flush "royale" (10,V, D, R, As de la même couleur) ?
   (b) Combien y a-t-il de mains avec une quinte flush ?
6. Suite (5 cartes qui se suivent n'ayant pas toutes la même couleur)
   (a) Combien y a-t-il de mains avec une suite du type (10,V, D, R, As) ?
   (b) Combien y a-t-il de mains avec une suite ?
7. Combien y a-t-il de mains avec une couleur (5 cartes de la même couleur) ?
8. Brelan :
   (a) Combien y a-t-il de mains avec exactement un brelan de rois (trois rois, les deux autres cartes ne formant pas une paire et ne contenant pas de roi) ?
   (b) Combien y a-t-il de mains avec exactement un brelan ?
9. Combien y a-t-il de main avec exactement une paire ?
10. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ?
11. Combien y a-t-il de mains avec au moins un trêfle ?
12. Combien y a-t-il de mains avec au moins un honneur ?
13. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ou au moins un honneur ?
14. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ou au moins un trêfle ?
15. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as et au moins un honneur ?
16. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as et au moins un trêfle ?

Exercice 12 :

1. Trois étudiants découvrent un trésor constitué de 7 pièces d'or identiques. Combien y a-t-il de façons de partager ce trésor de manière équitable ou non ? (on n'exclut pas qu'un ou plusieurs étudiants aient 0 pièce à l'issue du partage).
2. Généralisation : reprendre la question avec k étudiants et n pièces.

Interrogation n°3 de maths discrètes, groupe S2 (année 2018-2019).

Exercice 1 :

Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E définis par $A = \{3, 6, 9\}$ et $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Donnez en extension les ensembles suivants :

1. $\overline{A} = \dots$

2. $A \cap B = \dots$

3. $(A - B) \cup (B - A) = \dots$

4. $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \dots$

Exercice 2 :

Soit E un ensemble tel que $|E| = 20$. Soient A, B et C trois sous-ensembles de E tels que :

— $|A| = 10$
— $|B| = 5$
— $\left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = 4$
— $|C - (A \cup B)| = 1$
— $|(A \cup B) - C| = 15$

1. Faites un diagramme de Venn représentant cette situation (vous ferez apparaître le cardinal des surfaces élémentaires du diagramme)

2. Démontrez rigoureusement pour tout ensemble E et pour tous les sous-ensembles A, B et C l'égalité suivante :

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C - (A \cup B)|$$

(dans cette question, et uniquement dans cette question, on se place dans le cadre général de la théorie des ensembles. Vous ne pouvez donc pas utiliser les hypothèses sur les cardinaux qui vous ont servi pour la question 1)

3. Déduisez-en rigoureusement le cardinal de $A \cup B$

4. Déduisez-en le cardinal de $A \cap B$

Exercice 3 :

Dans un sac il y a 10 jetons numérotés de 1 à 10. On prend 4 jetons distincts sans tenir compte de l'ordre.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2. Combien y a-t-il de tirages avec 3 nombres pairs exactement ?

3. Combien y a-t-il de tirages avec au moins trois nombres pair ?

4. Combien y a-t-il de tirages avec exactement 1 multiple de 3 et 2 nombres pairs (les autres jetons n'étant ni pairs ni multiples de 3)

5. Reprenez les questions 1 et 2 en supposant cette fois que l'on tient compte de l'ordre des tirages (les jetons sont toujours distincts 2 à 2) :

Interrogation n°3; Maths Discrètes; 2015/2016; groupe S5

1. Soient E un ensemble quelconque, A et B deux parties de E, x un élément de A. Complétez sans justification les pointillés afin d'obtenir des propositions vraies:
   (a) $x \ldots A$

   (b) $x \ldots \overline{A}$

   (c) $x \notin B \ldots A$

   (d) $A \ldots A \cup B$

   (e) $A - B = A \cap \ldots$

   (f) $A \cap B = B \ldots B \subseteq A$

   (g) $A \cap B = \emptyset \ldots B - A = \ldots$

2. Soient $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ un ensemble , $A = \{a, b, d\}$ et $B = \{b, c, d, e, f\}$ deux parties de E.
   (a) Ecrire en extension les ensembles suivants:

$$\overline{A} =$$

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

$$A - B$$

$$P(A) \cap P(B) =$$

   (b) Quel est le cardinal de $P(E)$?

   (c) Donnez toutes les partitions de A :

Exercice 3:

On considère 7 cartes numérotées de 1 à 7 et on en tire 4 sans tenir compte de l'ordre.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles?

2. Combien y a-t-il de tirages avec deux nombres pairs exactement?

3. Combien y a-t-il de tirages avec aux moins deux nombres pairs?

4. Combien y a-t-il de tirages avec deux nombres pairs et un multiple de 3 exactement?

Formulaire sur les ensembles:

Dans ce formulaire vous trouverez toutes les formules que vous pouvez utiliser sans démonstration.

E est un ensemble, A , B , C et D sont des parties de E .

1. **Propriétés de** $\cup$:
   (a) $A \cup B = B \cup A$
   (b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   (c) $A \cup E = E$
   (d) $A \cup \emptyset = A$
   (e) $A \cup A = A$
2. **Propriétés de** $\cap$ **:**
   (a) $A \cap B = B \cap A$
   (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   (c) $A \cap \emptyset = \emptyset$
   (d) $A \cap E = A$
   (e) $A \cap A = A$
3. **Distributivités:**
   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. **Propriétés de** $\subseteq$ **:**
   (a) $\emptyset \subseteq A$
   (b) $A \subseteq E$
   (c) $A \subseteq A$
   (d) $A \cap B \subseteq A$
   (e) $A \subseteq A \cup B$
   (f) $[A \subseteq B \wedge B \subseteq C] \Rightarrow A \subseteq C$
   (g) $[A \subseteq C \wedge B \subseteq D] \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$
   (h) $[A \subseteq C \wedge B \subseteq D] \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$
5. **Propriété du complémentaire et de la différence:**
   (a) $A - B = A \cap \overline{B}$
   (b) $A \cup \overline{A} = E$
   (c) $A \cap \overline{A} = \emptyset$
   (d) $\overline{(\overline{A})} = A$
   (e) $\overline{\emptyset} = E$
   (f) $\overline{E} = \emptyset$
   (g) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   (h) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
6. **Propriétés du cardinal: (ici** E **est un ensemble fini)**
   (a) $|A - B| = |A| - |A \cap B|$
   (b) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
   (c) $\left|\overline{A}\right| = |E| - |A|$
   (d) $|A| = |A \cap B| + \left|A \cap \overline{B}\right|$
   (e) $|A \times B| = |A| \,.\, |B|$

TD5: Relations Binaires

Exercice 1 :

Soient $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ deux ensembles.
On considère les relations binaires de E vers F suivantes :

$$R_1 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$$

$$R_2 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$$

$$R_3 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (d, 1)\}$$

$$R_4 = \emptyset$$

1. Représentez chacune de ces relations par son diagramme sagittal.
2. Quelles sont les relations qui sont des fonctions ? Des applications ?
3. Y a-t-il des bijections parmi ces relations ?
4. Un peu de dénombrement :
   (a) Combien y a-t-il de relations binaires de E vers F ?
   (b) Combien y a-t-il d'applications de E vers F ? De fonctions ?
   (c) Généralisation : reprenez les deux questions précédentes avec $|E| = n$ et $|F| = p$, n et p étant deux entiers.

Exercice 2 :

Soient l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et les relations binaires de E dans E suivantes :
— $R_1 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$;
— $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$;
— $R_3 = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$;
— $R_4 = \emptyset$

Dans chacun des cas ci-dessus,

1. Représenter la relation binaire par une matrice puis par un diagramme sagittal unifié.
2. Donner les propriétés de la relation binaire (réflexive, antiréflexive, symétrique, antisymétrique, transitive). Justifier chaque réponse négative par un contre-exemple.

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants, quelles sont les propriétés de la relation binaire R_i de E dans E (réflexive, antiréflexive, symétrique, antisymétrique, transitive) ? Justifier chaque réponse négative par un contre-exemple. Vérifier sur le diagramme sagittal unifié puis sur la matrice les propriétés et les non-propriétés de la relation binaire considérée.

1. $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et R_1 est la relation $=$ dans E (2 éléments de E sont en relations ssi ils sont égaux).
2. $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et R_2 est la relation $\neq$ dans E .
3. $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et R_3 est la relation $>$ dans E .
4. $E = \mathcal{P}(\{1, 2\})$ et R_4 est la relation $\subseteq$ dans E.

5. $E = \mathcal{P}(\{1,2\})$ et $R_5 = \{(X,Y) \in E^2, |X| = |Y|\}$.
6. $E = \mathcal{P}(\{1,2\})$ et $R_6 = \{(X,Y) \in E^2, X \cap Y = \emptyset\}$.

Exercice 4 :

Donner la définition (en langage mathématique) d'une relation non réflexive (respectivement non antiréflexive, non symétrique, non antisymétrique, non transitive) dans un ensemble E.

Exercice 5 :

1. Soit $E = \{1,2,3\}$. Donner le nombre de relations binaires de E dans E, le nombre de relations binaires réflexives puis le nombre de relations binaires antiréflexives, symétriques et enfin antisymétriques.
2. Soit E un ensemble fini de cardinal n . Donner en fonction de n le nombre de relations binaires de E dans E, le nombre de relations binaires réflexives puis le nombre de relations binaires antiréflexives, symétriques et enfin antisymétriques.

Exercice 6 :

Soient E un ensemble et R une relation binaire de E dans E . On dit que R est une relation d'ordre ssi R est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

1. Les relations suivantes sur $E = \{a,b,c,d\}$ sont-elles des relations d'ordre ? (Ne justifier que les réponses négatives)
   (a) $R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$
   (b) $R_2 = R_1 \cup \{(a,b),(b,c),(b,d),(c,d)\}$
   (c) $R_3 = R_1 \cup \{(a,b),(b,a)\}$
   (d) $R_4 = R_1 \cup \{(a,b),(a,d),(c,d),(c,b)\}$.
2. Quelques cas particuliers :
   (a) Représenter, sans justification, le diagramme sagittal unifié de toutes les relations d'ordre sur $E_1 = \{1\}$.
   (b) Même question avec $E_2 = \{1,2\}$.
   (c) Représenter sans justification, le diagramme sagittal unifié de toutes les relations d'ordre sur $E_3 = \{1,2,3\}$ de cardinal 5 (c'est à dire ayant exactement 5 couples).

Exercice 7 :

Soient un ensemble $E = \{a,b,c\}$ et R une relation binaire de E dans E contenant les deux couples (a,a) et (a,b) et éventuellement d'autres couples.

Pour chacune des questions 1 à 5, compléter R si nécessaire et si possible de façon à trouver toutes les relations binaires vérifiant les propriétés proposées (on peut répondre en donnant le diagramme sagittal unifié de chacune des relations trouvées).

1. R est non réflexive, symétrique et transitive.
2. R est réflexive, symétrique et transitive.
3. R est réflexive, symétrique et non transitive.
4. R est réflexive, antisymétrique et transitive.
5. R est non réflexive, non antiréflexive, non symétrique et non antisymétrique, non transitive et R contient (b,a) mais ne contient ni (b,c), ni (c,b) .

6. Combien y a-t-il au total de relations binaires de E dans E contenant au moins les deux couples (a, a) et (a, b) . Justifier la réponse.

Exercice 8 :

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble. On considère les relations binaires de E dans lui-même :

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$

$$R_2 = \{(a, b), (b, c), (a, c), (d, c)\}$$

$$R_3 = R_1 \cup R_2$$

$$R_4 = R_1 \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$$

$$R_5 = R_1 \cup \{(a, b), (d, c), (d, b), (a, c)\}$$

$$R_6 = E \times E$$

$$R_7 = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\}$$

1. Représentez chacune de ces relations par son graphe orienté (i.e. son diagramme sagittal unifié).
2. Parmi ces 7 relations :
   (a) déterminez les relations d'ordre.
   (b) Déterminez les relations d'équivalence et donnez pour chacune l'ensemble quotient correspondant.
   (c) Déterminez celles qui ne sont pas transitives et pour chacune donnez sa fermeture transitive.

Exercice 9 :

Sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels on considère la relation binaire R définie par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, xRy \Leftrightarrow x + y \text{ est pair}$$

1. Démontrez que R est une relation d'équivalence .
2. Quelles sont ses classes d'équivalence ?

Exercice 10 :

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Sur $P(E)$ on considère la relation binaire $\subseteq$ (inclusion).

1. Donnez en extension $P(E)$.
2. Démontrez que $\subseteq$ est une relation d'ordre sur $P(E)$.
3. $P(E)$ est-il totalement ordonné par cette relation ?

Exercice 11 :

Sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ on considère la relation $\leq$.
Démontrez que $\leq$ est une relation d'ordre sur E . Cet ordre est-il total ?

Exercice 12 :

Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Combien y a-t-il de relations d'équivalence sur E ?

Exercice 13 :

Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$ et la relation binaire $R = \{(a, e), (e, d), (d, c), (c, a), (c, b)\}$. Représentez le graphe orienté de chacune des relations binaires suivantes :

1. R
2. $r(R)$
3. $s(R)$
4. $t(R)$
5. $t(r(s(R)))$

Interrogation n°4 de maths discrètes pour le groupe S4

Exercice 1:

Soient $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ deux ensembles et les relations binaires de E vers F suivantes:

$$R_1 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$$

$$R_2 = \{(a, 1), (a, 2), (d, 3)\}$$

$$R_3 = R_1 - R_2$$

1. Parmi ces relations, lesquelles sont des fonctions ?

2. Parmi ces relations lesquelles sont des applications ?

3. Peut-il y avoir des bijections de E vers F ? Pourquoi ?

4. Combien y a-t-il au total de relations binaires de E vers F ?

Exercice 2:

On considère à présent la relation binaire R de E vers E (avec $E = \{a, b, c, d\}$) définie par $R = \{(a, b), (b, c), (c, a), (a, d)\}$

1. Pour les questions suivantes, vous ne justifierez que les réponses négatives:
   (a) R est-elle réflexive ?

   (b) R est-elle antiréflexive ?

   (c) R est-elle symétrique ?

(d) R est-elle antisymétrique ?

(e) R est-elle transitive ?

2. Représentez le graphe orienté de la fermeture transitive de R

Interrogation n°4 de maths discrètes pour le groupe S5

Exercice 1:

Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ deux ensembles et les relations binaires de E vers F suivantes:

$$R_1 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$$

$$R_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 3)\}$$

$$R_3 = R_2 - R_1$$

$$R_4 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$$

1. Parmi les 4 relations binaires précédentes, lesquelles sont des fonctions ?

2. Parmi les 4 relations binaires précédentes, lesquelles sont des applications ?

3. Parmi les 4 relations binaires précédentes, lesquelles sont des bijections ?

4. Combien y a-t-il de fonctions d'un ensemble de cardinal 3 vers un autre ensemble de cardinal 3 ?

Exercice 2:

Soit un ensemble $G = \{a, b, c, d\}$. On considère les 4 relations binaires suivantes:

$$S_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c), (a, c), (a, d), (d, d), (d, c)\}$$

$$S_2 = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (c, c), (c, b), (d, d), (d, a)\}$$

$$S_3 = \{(a, a), (a, d), (b, b), (c, c), (c, b), (d, d), (d, c)\}$$

$$S_4 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a), (c, c), (a, d), (d, d), (d, a)\}$$

1. Pour les questions suivantes vous ne justifierez que les réponses négatives:
   (a) La relation S_1 est-elle ...
      i. une relation d'équivalence ?

ii. une relation d'ordre ?

(b) La relation S_2 est-elle ...

i. une relation d'équivalence ?

ii. une relation d'ordre ?

(c) La relation S_3 est-elle ...

i. une relation d'équivalence ?

ii. une relation d'ordre ?

(d) La relation S_4 est-elle ...

i. une relation d'équivalence ?

ii. une relation d'ordre ?

2. Représentez les graphes orientés des fermetures transitives de S_3 et S_4

Petite interrogation n°4 de maths discrètes pour le groupe S1 (année 2016)

Exercice 1 :

Soient $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$ deux ensembles. On considère les relations binaires de E vers F suivantes :

$$R_1 = \{(a, 4), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$$

$$R_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 3)\}$$

$$R_3 = \{(a, 1)\}$$

$$R_4 = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$$

1. Parmi ces relations lesquelles sont ...
   (a) des fonctions ? ...
   (b) des applications ? ...
   (c) des bijections ? ...
2. Une **application** R de E vers F est une surjection ssi
$$\forall y \in F, \exists x \in E, xRy$$
   (a) Ecrivez la négation de cette définition :
   (b) Parmi les relations précédentes y-a-t-il des surjections ?
   (c) Donnez un exemple d'une surjection qui ne soit pas une bijection (entre 2 ensembles E et F quelconques)

Exercice 2 :

Soient un ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ et une relation binaire de E dans E définie par $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, c),$

1. Cette relation est-elle ...
   (a) réflexive ?

(b) antiréflexive ?

(c) symétrique ?

(d) antisymétrique ?

(e) transitive ?

(Vous ne justifierez que les réponses négatives)

2. Donnez, sans justification, le diagramme sagittal unifié de $t(R)$:

3. Donnez, sans justification, le diagramme sagittal unifié de $t(s(R))$:

Partiel de mathématiques discrètes

Année 2020-2021
durée: 1h

Exercice 1:

On considère l'algèbre de Boole $(B,+,\times)$ avec $B=\{0,1\}$ et la proposition P suivante:

$$\forall\,(a,b,c)\in B^3,[(a+b=a+c)\wedge(ab=ac)]\Rightarrow b=c$$

1. Ecrivez en extension l'ensemble B^3 .
2. Donnez la forme contraposée de P .
3. Donnez la négation de P sans utiliser le symbole $\neg$.
4. Démontrez que P est vraie.

Exercice 2:

Soit f la fonction booléenne définie par

$$f\,(x,y,z)=\overline{(\overline{x}+\overline{y}\,\overline{z})\times\overline{y\overline{z}}\times(y+\overline{z})}$$

1. Donnez, en détaillant les étapes du calcul, une forme polynomiale de f (on ne demande ni la forme polynomiale minimale, ni la forme canonique, mais une forme polynomiale quelconque issue du calcul booléen).
2. Dressez le diagramme de Karnaugh de f .
3. Donnez la (ou les) forme (s) polynomiale (s) minimale (s) de f .

Exercice 3:

On considère l'ensemble $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

1. Combien E possède-t-il de sous-ensembles ?
2. Combien E possède-t-il de sous-ensembles de cardinal 3 ?
3. Combien y a-t-il de triplets (a,b,c) dont les composantes a,b et c sont des éléments de E ?
4. Combien y a-t-il de triplets (a,b,c) dont les composantes a,b et c sont 3 éléments distincts de E ?
5. Combien y a-t-il de sous-ensembles de E ayant exactement 3 nombres pairs et 2 nombres impairs?
6. Combien y a-t-il de quintuplets de E^5 ayant exactement 3 nombres pairs et 2 nombre impairs ?

Exercice 4:

Soient l'ensemble $E=\{a,b,c,d,e\}$ et la relation binaire R de E dans E définie par:

$R=\{(a,a)\,,(a,b)\,,(a,d)\,,(b,a)\,,(b,c)\,,(c,c)\,,(c,e)\}$

1. Donnez les propriétés caractéristiques de la relation R (réflexive, antiréflexive, symétrique, antisymétrique, transitive) . Vous ne justifierez que les réponses négatives.
2. Représentez le graphe orienté de $t\,(R)$ (i.e. la fermeture transitive de la relation R).

Exercice 5:

Démontrez par récurrence la proposition suivante:

$$\forall n\in\mathbb{N},\sum_{i=0}^{n}i\,(i+1)=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$$