Corrigé – Les ensembles

Exercice 1

$1 \in \{1\}$ V ; $1 \subseteq \{1\}$ F ; $0 \in \{1,2\}$ F ; $1 \in \{\{1\},\{2\}\}$ F ;
$\{1\} \subseteq \{1\}$ V ; $\{1\} \in \{1\}$ F ; $\{1,2\} \subseteq \{1\}$ F ; $\{1\} \in \{1,2\}$ F ;
$\{1\} \subseteq \{1,2\}$ V ; $\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$ V ; $\{1\} \in \{1,\{1\}\}$ V ;
$\{1\} \subseteq \{1,\{1\}\}$ V ; $\{1\} \subseteq \{\{1\},\{2\}\}$ F ; $\emptyset \in \{1,2\}$ F ;
$\emptyset \subseteq \{1,2\}$ V ; $\emptyset \in \emptyset$ F ; $\emptyset \subseteq \emptyset$ V

Exercice 2

(1) $A = \{2,4\}$, $B = \{1,2,3\}$, $\overline{A} = \{1,3,5\}$, $\overline{B} = \{4,5\}$
$A - B = \{4\}$, $\overline{A \cap B} = \overline{\{2\}} = \{1,3,4,5\}$, $\overline{A \cup B} = \overline{\{1,2,3,4\}} = \{5\}$
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{5\}$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,3,4,5\}$

(2) (a) il est vrai que x est impair ou supérieur à 3.
(b) $x \in \{1,3,4,5\}$
(c) $x \in \overline{A \cap B}$
(d) $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

(3) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(5) Montrons que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
Soit $x \in E$ $\quad x \in \overline{A \cup B} \iff \neg(x \in A \cup B)$ (définition du complémentaire)
$\iff \neg(x \in A \vee x \in B)$ (déf. de $\cup$)
$\iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$ (Morgan logique)
$\iff x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}$ (déf complémentaire)
$\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ (déf $\cap$)

Montrons que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
Soit $x \in E$ $\quad x \in \overline{A \cap B} \iff \neg(x \in A \cap B)$
$\iff \neg(x \in A \wedge x \in B)$
$\iff \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$
$\iff x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$
$\iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

Exercice 3

$\lvert A\rvert$	$\lvert B\rvert$	$\lvert A\cap B\rvert$	$\lvert A\cup B\rvert$	$\lvert A-B\rvert$	$\lvert B-A\rvert$
15	7	3	19	12	4
10	12	2	20	8	10
8	5	0	13	8	5
a	b	i	$a+b-i$	$a-i$	$b-i$
a	b	$a+b-u$	u	$u-b$	$u-a$
$y-z$	$z+x$	x	y	$y-x-z$	z

Exercice 4

① $|A-B| = |A| - |A\cap B|$

$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

② $|(A\cup B)\cup C| = |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C|$

$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)|$

$= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - \left(|A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|\right)$

$= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

Problème 5

① ⓐ $|A\cup B| \overset{(6b)}{=} |A| + \left(|B| - |A\cap B|\right)$

$\overset{(6a)}{=} |A| + |B-A|$

ⓑ $|A| \overset{(6d)}{=} |A\cap B| + |A\cap \overline{B}|$

② $|A\cup B\cup C| = 93$

$|A| = 54$

$|B\cup C| = 51$

$|C-B| = 27$

$|B-(A\cup C)| = 3$

$|A\cap B\cap C| = 12$

③ $|A\cup C| = ?$

$$|A\cup B\cup C| = |(A\cup C)\cup B|$$
$$\overset{(1a)}{=} |A\cup C| + |B-(A\cup C)|$$

d'où $|A\cup C| = |A\cup B\cup C| - |B-(A\cup C)|$
$= 93-3$ d'où $\boxed{|A\cup C| = 90}$

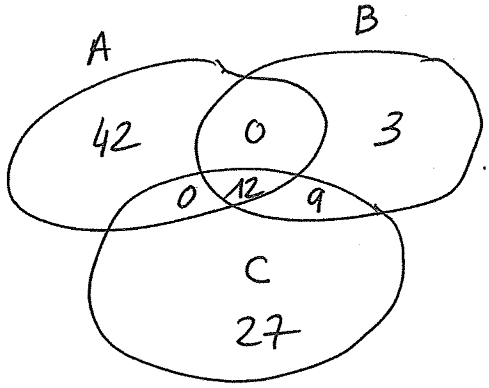
④ $|B| = ?$

$|B\cup C| \overset{(1a)}{=} |B| + |C-B|$ d'où $|B| = |B\cup C| - |C-B|$
$= 51 - 27$ d'où $\boxed{|B| = 24}$

⑤ $|A-(B\cup C)| = ?$

$|A\cup B\cup C| = |(B\cup C)\cup A| = |B\cup C| + |A-(B\cup C)|$
d'où $|A-(B\cup C)| = |A\cup B\cup C| - |B\cup C| = 93-51$
d'où $\boxed{|A-(B\cup C)| = 42}$

⑥



$|C-(A\cup B)| = 27$

Exercice 6

① $E\times F = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$
$F\times E = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$
$E^2 = E\times E = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$
$E\times\emptyset = \emptyset\times E = \emptyset$

②
$|E\times F| = 6$
$|F\times E| = 6$
$|E^2| = 4$
$|E\times\emptyset| = |\emptyset\times E| = 0$

③ $|E\times F| = |E|\,|F| \qquad |E^2| = |E|^2$

④ $E\times F = F\times E \iff (E=\emptyset \vee F=\emptyset \vee E=F)$

$\Leftarrow]$ 1er cas $E=\emptyset$

$E\times F = \emptyset \times F = \emptyset = F\times\emptyset = F\times E$

2e cas $F=\emptyset$ idem

3e cas $E=F$: $E\times F \overset{(F=E)}{=} E^2 = E\times E \overset{(F=E)}{=} F\times E$

$\Rightarrow]$ Supposons $E\times F = F\times E$.

1er cas : $E=\emptyset \vee F=\emptyset$ alors $E=\emptyset \vee F=\emptyset \vee E=F$

2e cas : $E\neq\emptyset \wedge F\neq\emptyset$.

Montrons que $E=F$.

Montrons d'abord que $E\subseteq F$.

Soit $x\in E$.

Comme $F\neq\emptyset$, $\exists y\in F$.

$x\in E \wedge y\in F \Rightarrow (x,y)\in E\times F$

$\Rightarrow (x,y)\in F\times E$ (par hypothèse)

$\Rightarrow x\in F (\wedge\, y\in E)$ (déf. produit cartésien)

d'où $x\in E \Rightarrow x\in F$. Donc $E\subseteq F$

De façon similaire, on montre que $F\subseteq E$.

$(E\subseteq F \wedge F\subseteq E) \Rightarrow E=F$