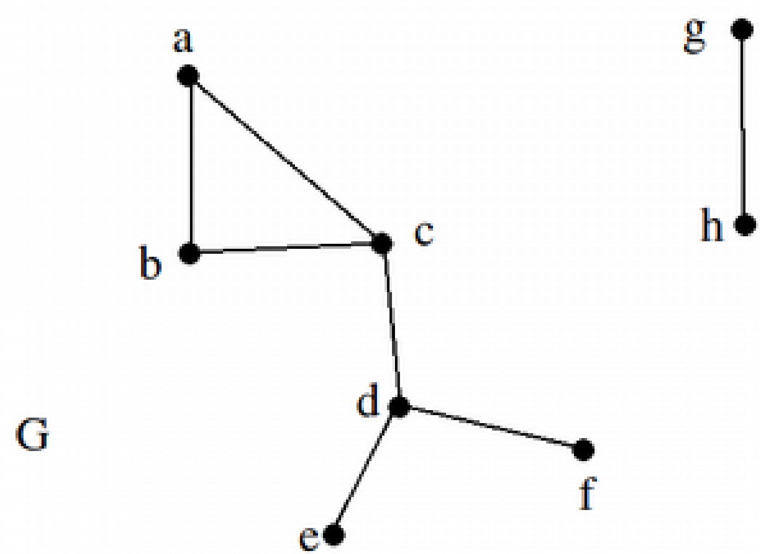
Connexité

I) Classes de connexité et composantes connexes:

- Définition: Soit G=(X, E) un graphe. Pour tout sommet x de G, on appelle classe de connexité de x dans G *l'ensemble* $Cl_G^c(x)$ définie par:

$$Cl_G^c(x) = \{ y \in X / \text{ il existe dans G une chaine d'extrémité x et y} \}$$

Remarque: x ∈ $Cl_G^c(x)$



cl(a)={a,b,c,d,e,f}

Propriété des classes de connexités:

- Propriété: Soit G=(X, E) un graphe.

$$y \in Cl_G^c(x) \iff Cl_G^c(x) = Cl_G^c(y)$$

Calcul des classes de connexité:

Algorithme: ***ClasseDeConnexitéParVoisinages***

Données: un graphe G et un sommet a de G

Résultat: la classe de connexité de a dans G

marquer a en bleu

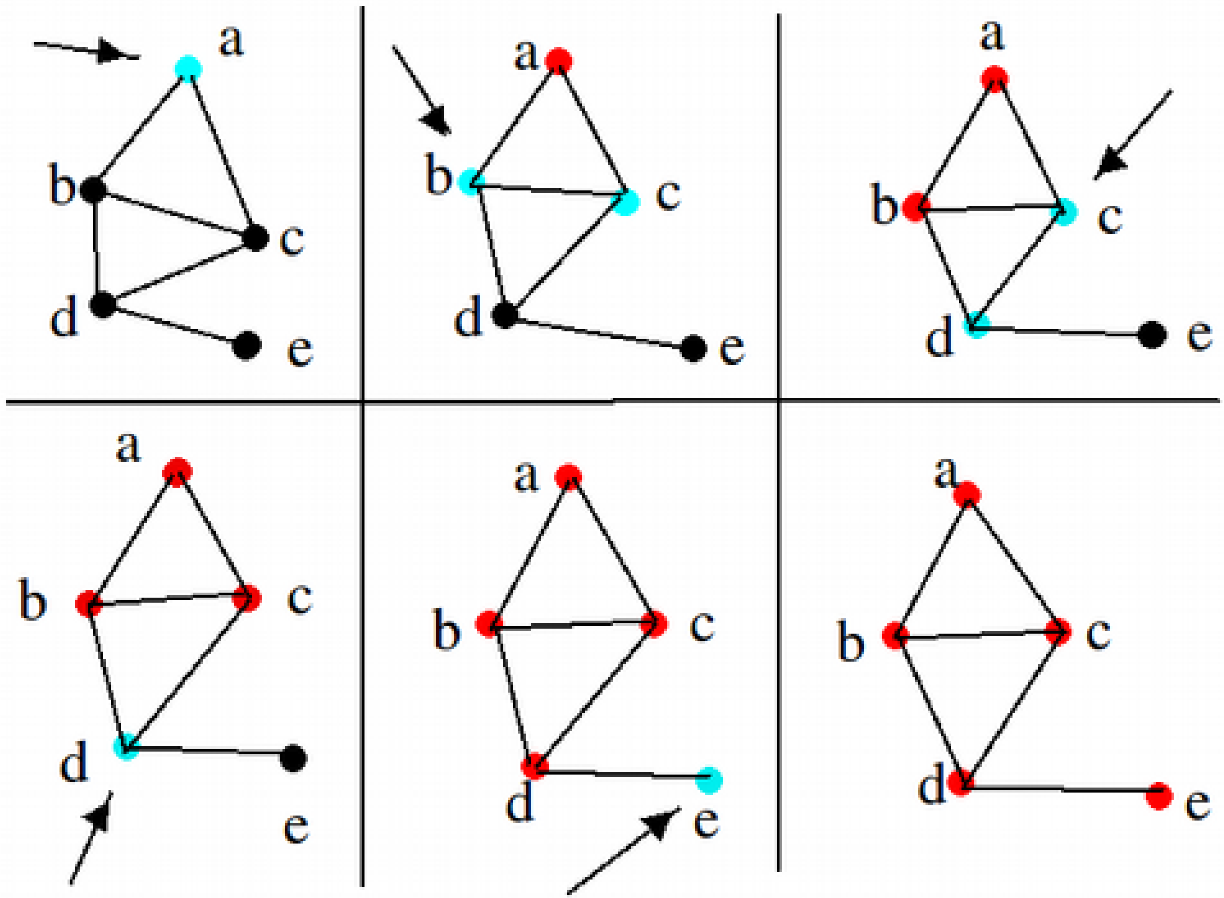
tant que il reste des sommets marqués en bleu **faire**

choisir un sommet y marqué en bleu

marquer en bleu tous les voisins non marqués de y

marquer y en rouge

retourner l'ensemble des sommets marqués


a
b
c
d
e
a
b
c
d
e
a
b
c
d
e
a
b
c
d
e
a
b
c
d
e
a
b
c
d
e

Propriété de l’algorithme ClasseDeConnexitéParVoisinages

- Etant donné un graphe **G** et **a** un de ses sommets, l’algorithme ***ClasseDeConnexitéParVoisinages*** calcule la classe de connexité de a dans G

<u>Étapes de la démonstration</u>:

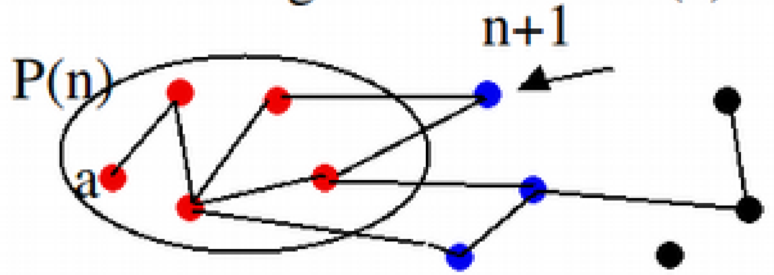
1) La répétitive converge
2) A chaque itération, tout sommet marqué appartient à la classe de connexité de a.
3) Tout sommet de la classe de a est marqué après exécution de l’algorithme.

Démonstration de l’algo :

1) A chaque itération=>1 sommet rouge définitif

Les sommets rouges sont dans cl(a) ?

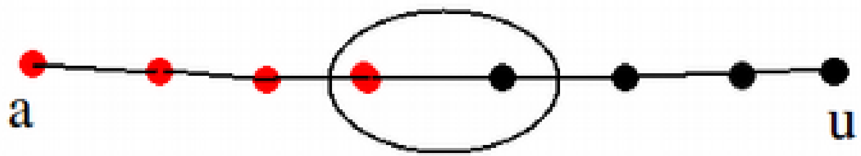
2)



Tous les sommets de cl(a) en rouge ?

Par l'absurde: u dans cl(a) non rouge

3)



Composantes connexes:

- **Définition**:

Soit un graphe G=(X, E), et notons X_1, X_2, …X_k les classes de connexité des sommets de G.

Les **sous-graphes** G_1, G_2,…, G_k induits respectivement par X_1, X_2, …X_k sont appelés **les composantes connexes** de G.

II) Graphes connexes:

- <u>Définition</u>:

  Un graphe G est connexe lorsque pour toute paire de sommets {x, y}, il existe dans G une chaîne reliant x et y.

Propriétés immédiates:

$G = (X, E)$ connexe

<=>

$\forall (x,y) \in X^2$, il existe une **chaîne** d'extrémités x et y

<=>

G n'a **qu'une seule composante** connexe

<=>

G n'a **qu'une seule classe de connexité**

Une condition *nécessaire* sur le nombre d'arêtes: $m \geq n-1$

- Propriété:

  Soit G un graphe ayant n sommets et m arêtes:

  G connexe => $m \geq n-1$

Remarque: cette condition n'est évidement pas suffisante.

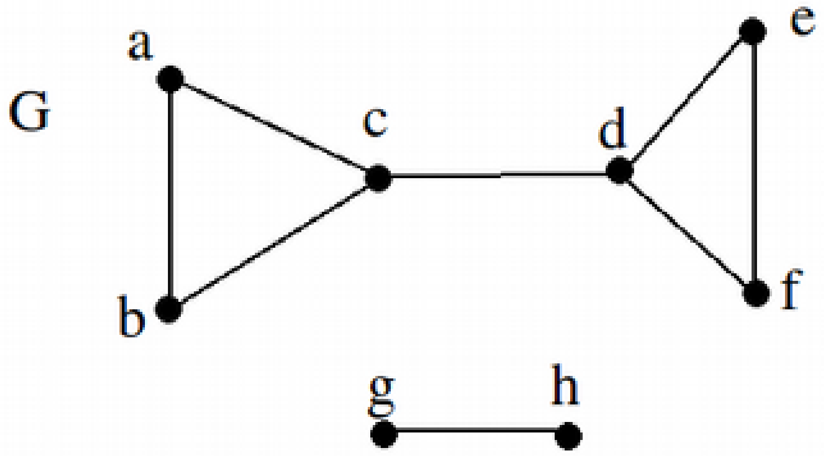
Isthmes:

- **<u>Définitions</u>**:

  Un **isthme d’un graphe connexe** est une arête dont la suppression déconnecte le graphe.

  Un **isthme d’un graphe** est un isthme d’une de ses composantes connexes.

Isthmes



Isthmes={cd,gh}

Lemme de l'isthme:

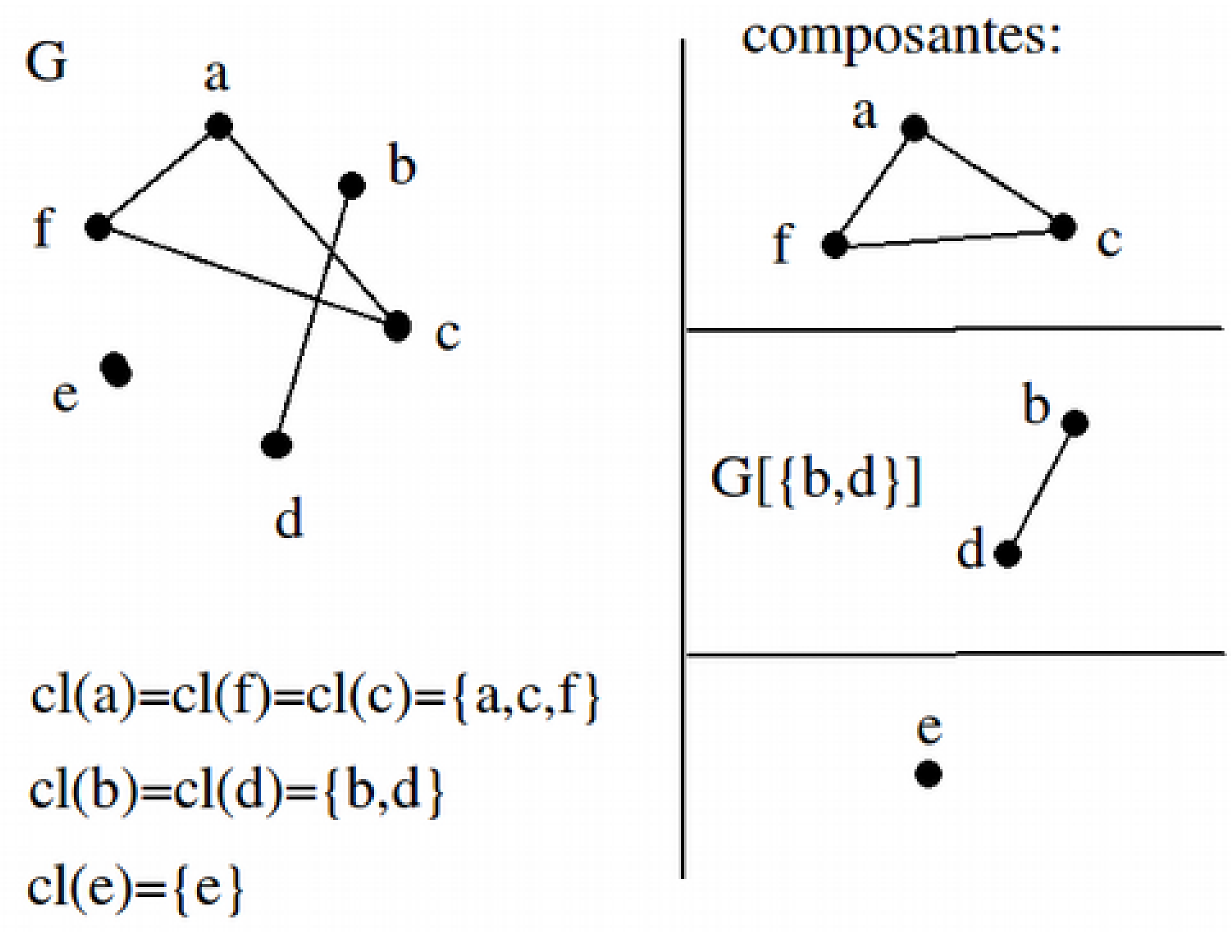
- Soit **e** = xy une arête d'un graphe G. Les 3 conditions suivantes sont ***équivalentes***:

  - 1) **e** est un isthme de G
  - 2) P=({x, y},{xy}) est la seule chaine de G reliant x et y.
  - 3) **e** n'appartient à aucun cycle de G.

<u>Remarque</u>:

Le graphe G' obtenu en supprimant l'isthme e de G contient un composante connexe de plus que G.

Ex 16


G
a
b
f
c
e
d
cl(a)=cl(f)=cl(c)={a,c,f}
cl(b)=cl(d)={b,d}
cl(e)={e}
composantes:
a
f
c
b
G[{b,d}]
d
e

ex17

- 1) Cl(a)={a,b,c,d}=X donc G connexe

Car G[{a,b,c}] connexe

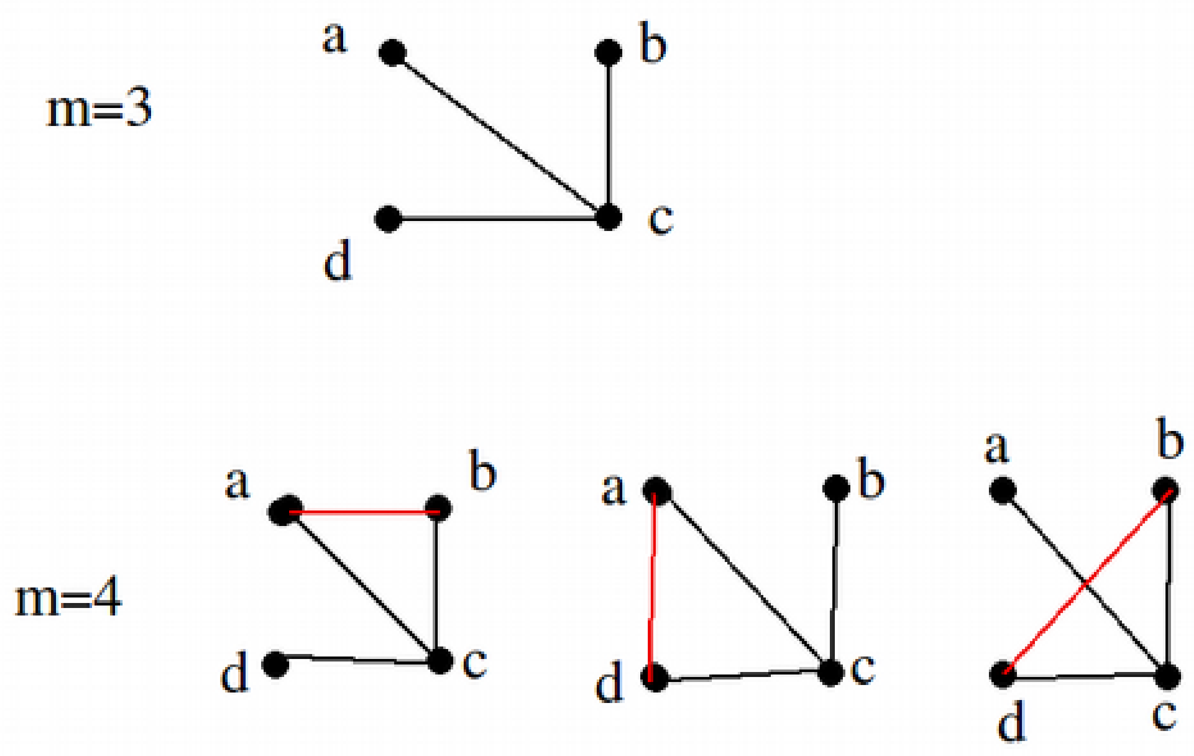
Car G[{a,c,d}] connexe

G connexe => m>=n-1 => m>=3

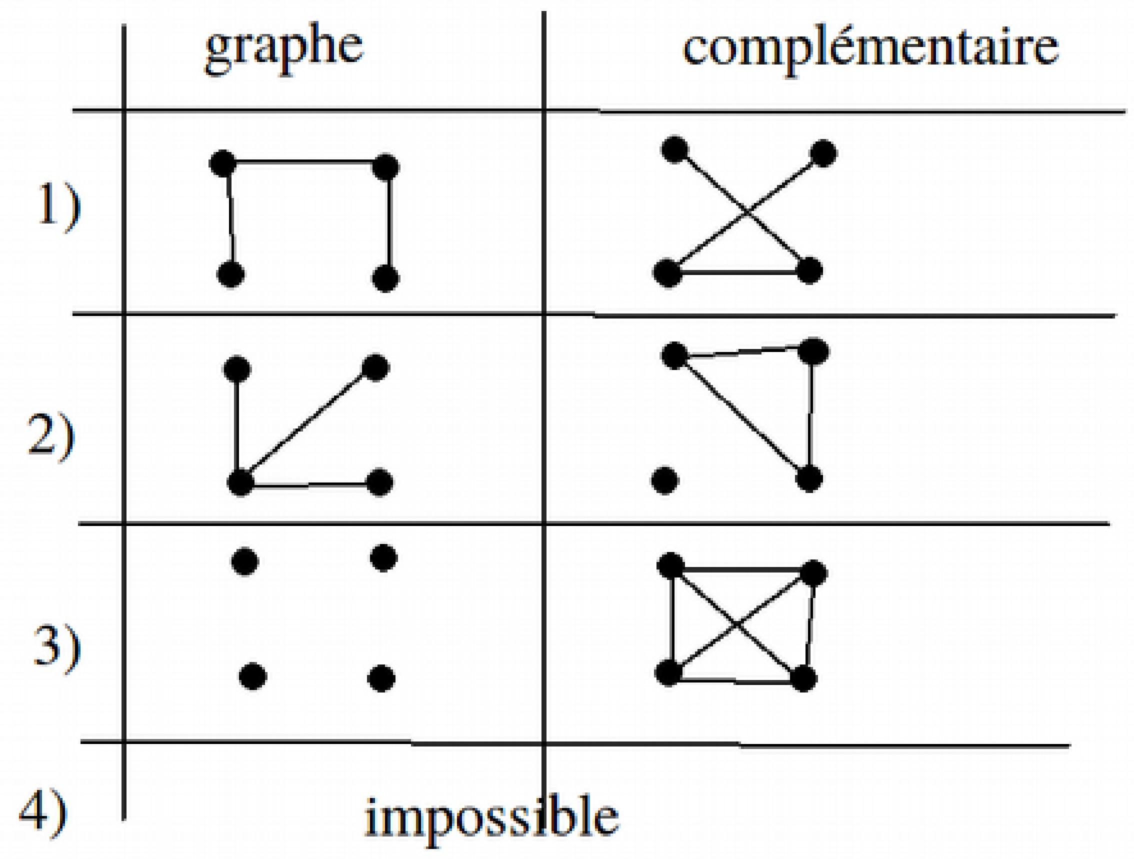
Ex17 (suite)

- 2) Un graphe d'ordre 4 est de taille max 6
- G[{a,b,d}] non connexe => 2 arêtes parmi ab,ad,bd ne sont pas dans G
- Donc la taille de G<=4

Ex 17 suite



Ex 18



Ex18 suite