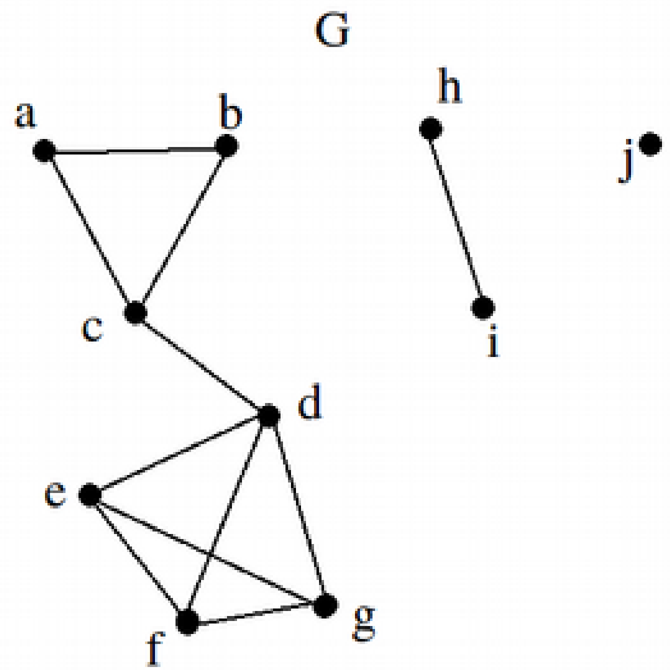
ARBRES

rappels



Ordre= ?
Taille= ?
deg(c)=?
Voisinage de d= ?
Est-il connexe ?
Nombre de composantes= ?
Cl(a)= ?
Isthmes?
Combien de cycles?
G[{e,d,f,g}] ?

rappels

- la somme des degrés = ...
- G sans cycle de taille non nulle => ...
- ||G||>=|G| => ...
- La taille d’un graphe complet d’ordre n est égale à ...
- Un isthme est une arête qui …
- G connexe <=>...

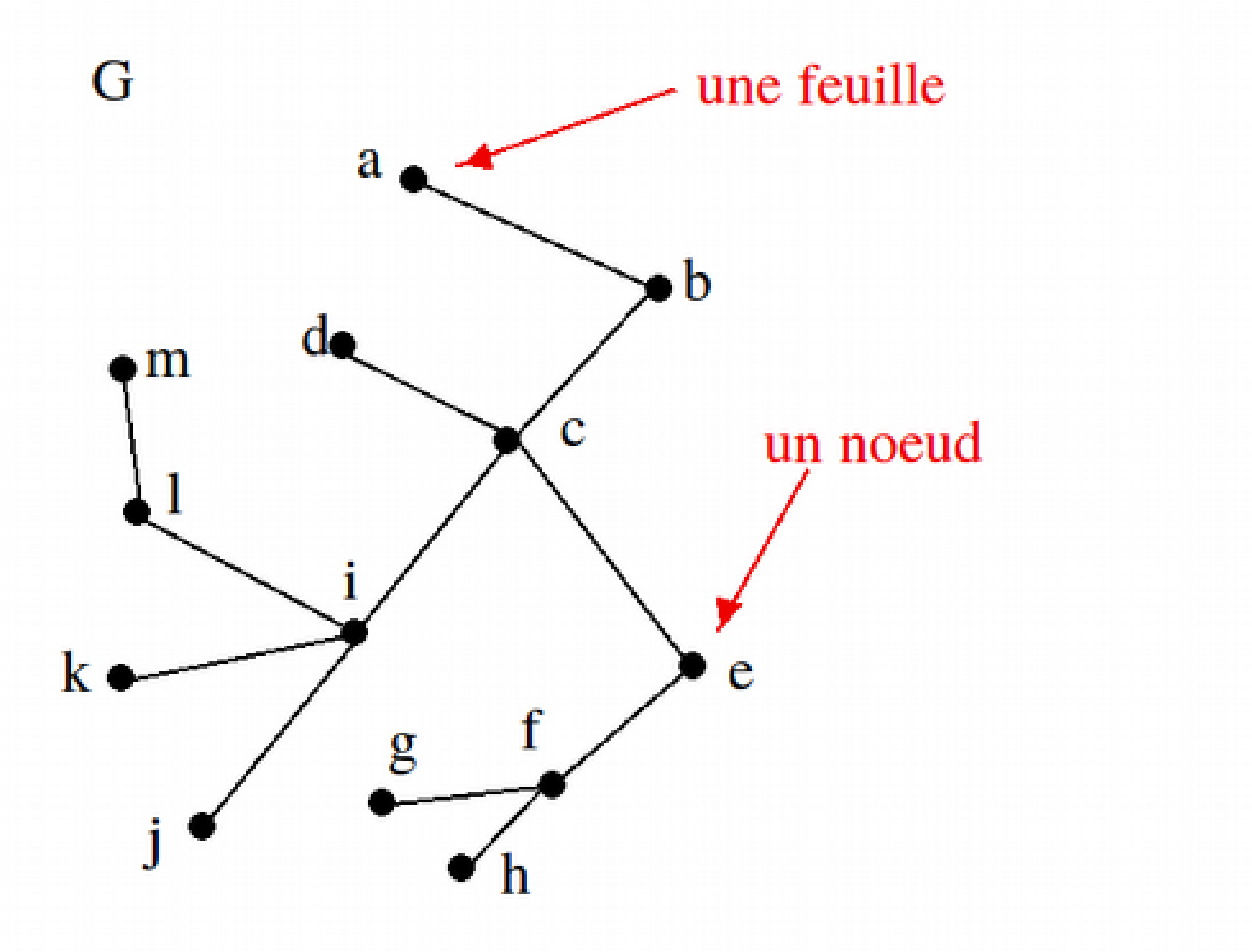
- la somme des degrés = $2||G||$
- G sans cycle de taille non nulle => G a au moins 2 sommets de degré 1
- $||G||>=|G|$ => G a au moins un cycle
- La taille d'un graphe complet d'ordre n est égale à $n(n-1)/2$
- Un isthme est une arête qui n'appartient pas à un cycle
- G connexe <=>
  - 1) G n'a qu'une composante connexe.
  - 2)Pour tous sommets x et y il existe une chaîne d'extrémités x et y.

I)Définition et caractérisation:

- Définition:

  Un arbre est un graphe connexe et sans cycle

Exemple d’arbre :



Propriété de construction des arbres:

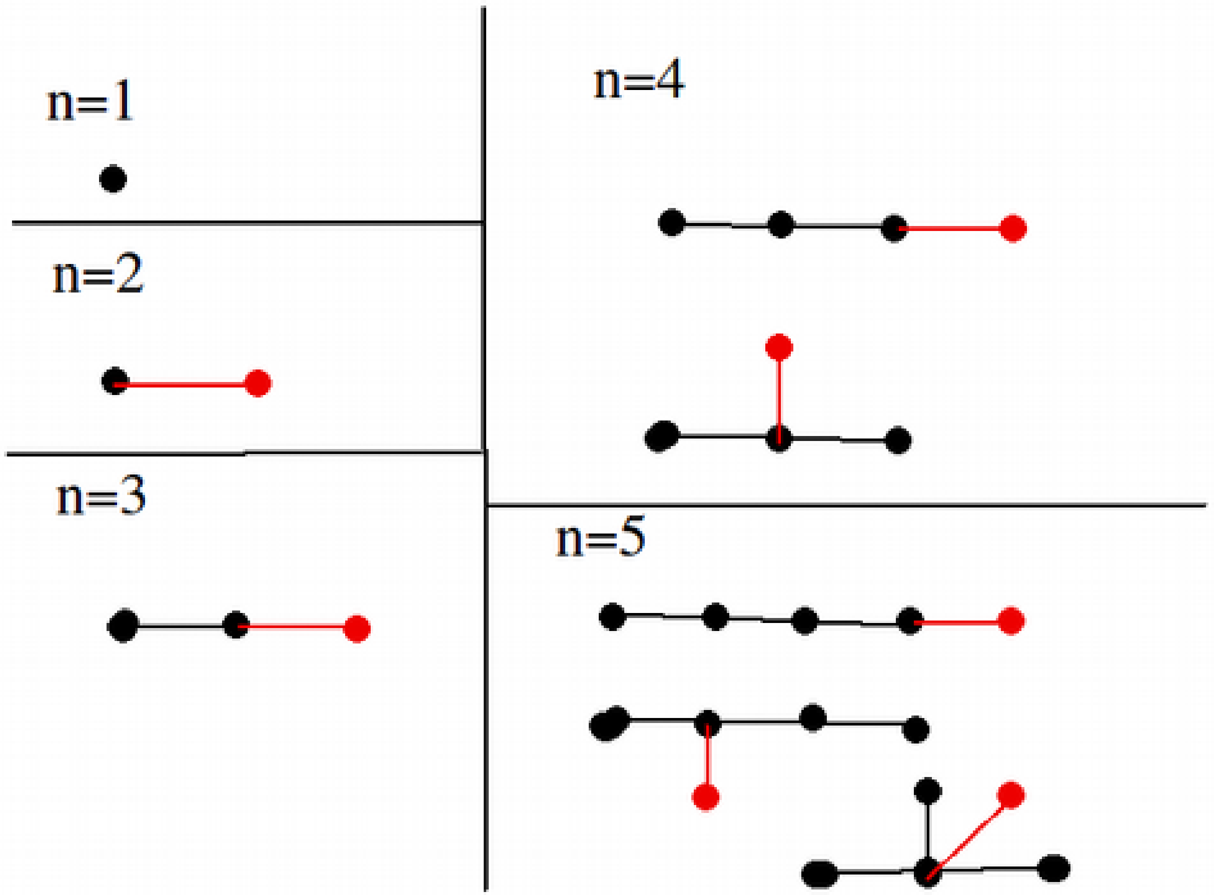
- **Lemme**: Tout arbre d'ordre au moins 2 possède au moins 2 sommets de degré 1.

- **Propriété**:
  - 1) Le graphe A' obtenu à partir d'un arbre A en lui ajoutant un sommet x de degré 1 est un arbre.
  - 2) Tout arbre A d'ordre au moins 2 peut être obtenu à partir d'un arbre A'' en lui ajoutant un sommet x de degré 1.

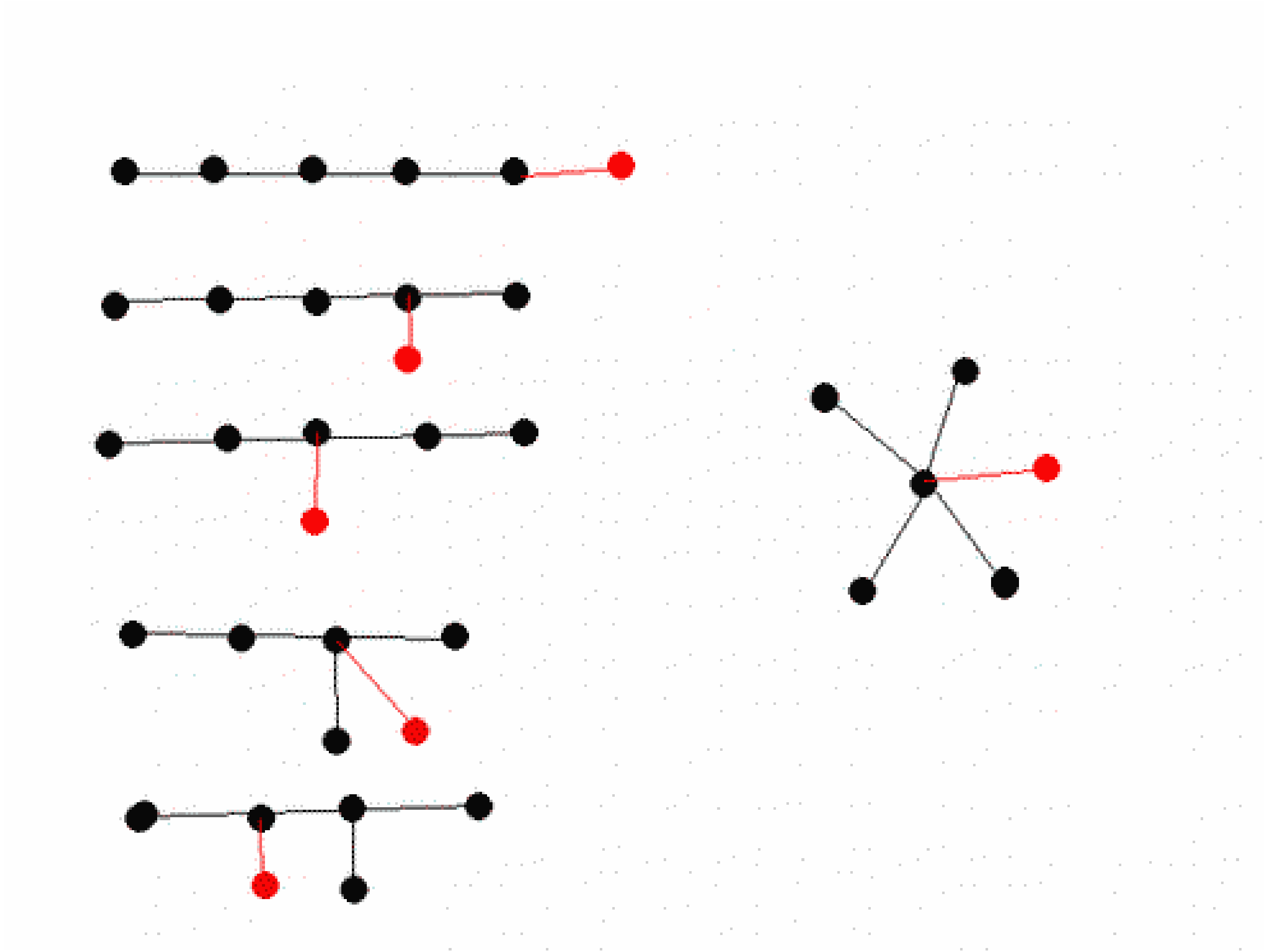
Exercice :

- En utilisant la propriété précédente, construire tous les arbres d'ordre inférieur ou égal à 6, à un isomorphisme près.

Construction des arbres



Arbres d'ordre 6



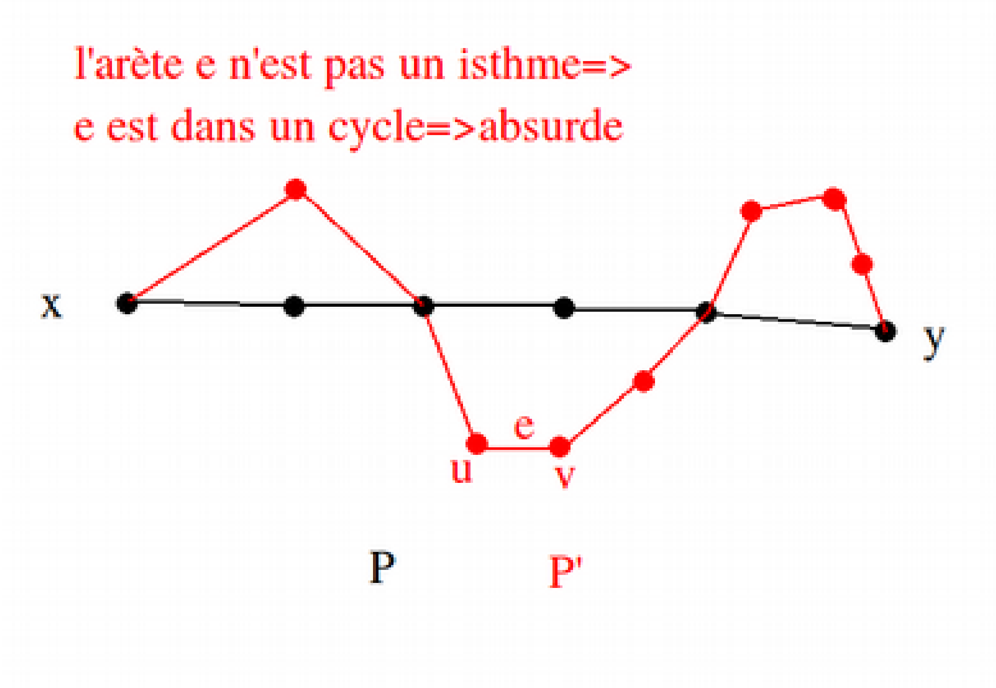
<u>Théorème</u> de caractérisation des arbres.

- Pour tout graphe G=(X, E) d'ordre n les conditions suivantes sont **équivalentes**:

  - 1) G est un arbre.
  - 2) $\forall$x, y$\in$X, il existe une chaîne **et une seule** d'extrémités x et y.
  - 3) G est connexe ***minimum*** au sens des arêtes.
  - 4) G est sans cycle et **maximum** au sens des arêtes pour cette propriété.
  - 5) G est connexe et possède n-1 arêtes.
  - 6) G est sans cycle et possède n-1 arêtes.

1)G arbre=> 2)∀x, y∊X, il existe une chaîne **et une seule** d'extrémités x et y.

- Si G est un arbre=> G est connexe=> il existe une chaîne **P** d'extrémités x et y.
- Unicité de la chaîne P :
  - Supposons une autre chaine P' ≠P :



2)il existe une chaîne **et une seule** d'extrémités x et y=>
3)G est connexe et toutes ses arêtes sont des isthmes

- Pour toute paire x et y de sommets il existe une chaîne d'extrémités x et y => G est connexe.
- Soit e=xy une arête de G :
  – Par hypothèse ({x,y},{e}) est la **seule** chaîne d'extrémités x et y => e est un isthme de G

3) G connexe et toutes les arêtes sont des isthmes=>
4) G est sans cycle et l’ajout d’une arête crée un cycle

- Si G avait un cycle chaque arête de ce cycle ne serait pas un isthme=>absurde.
- Soit e une arête supplémentaire :
  - **G+e** est connexe ainsi que **G** (hypothèse)
  - Donc e est n’est pas un isthme de G+e
  - Donc e est dans un cycle de G+e

4) G est sans cycle et l’ajout d’une arête crée un cycle
=> 5) G est connexe et de taille n-1

- Si G n’était pas connexe alors en rajoutant une arête entre 2 composantes on ne créerait pas de cycle => absurde.
- A) Puisque G est connexe il a au moins n-1 arêtes.
- B) Puisque G est sans cycle il a au plus n-1 arêtes.
- A) et B) => G a exactement n-1 arêtes.

5) G est connexe et de taille n-1 =>
6) G est sans cycle et possède n-1 arêtes.

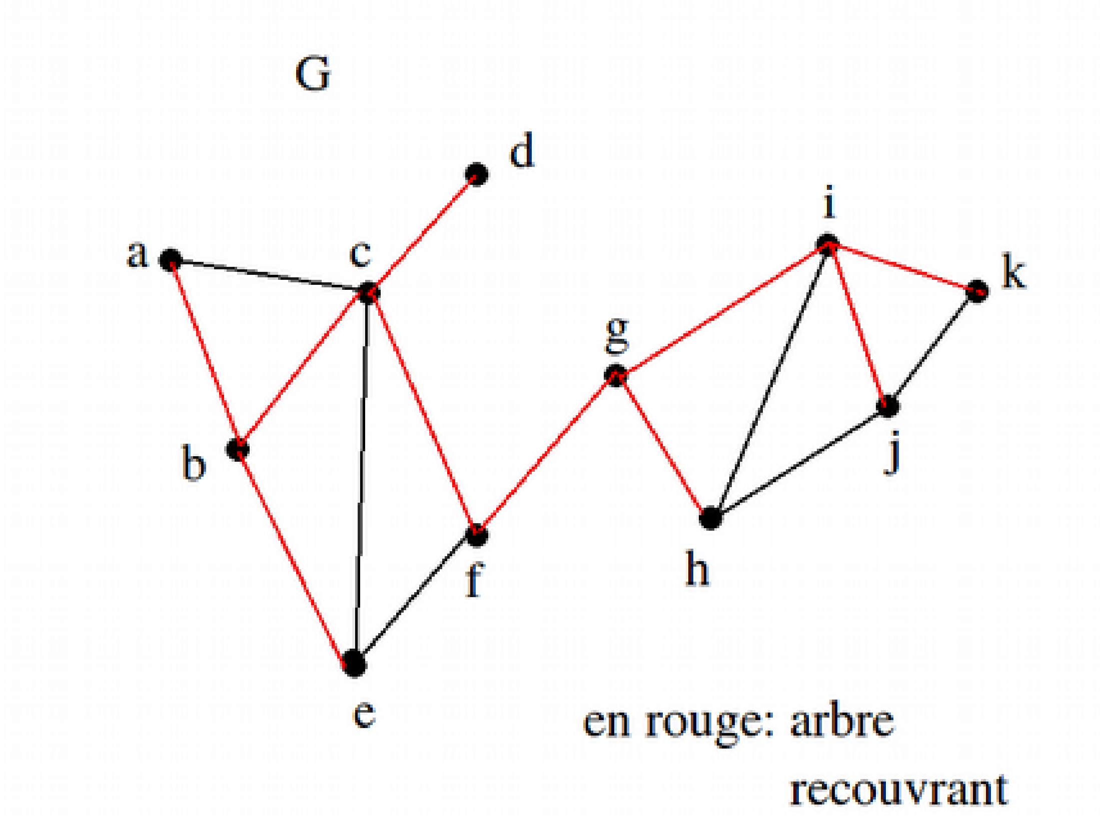
- Si G avait un cycle :
  - En enlevant une arête e de ce cycle on obtiendrait un graphe connexe de taille n-2 => absurde.

6) G est sans cycle et possède n-1 arêtes =>
G est un arbre (connexe et sans cycle)

- Si G n’était pas connexe :
  - En rajoutant une arête e entre 2 composantes on obtiendrait un graphe sans cycle de taille n => absurde.
  -
  -
  - FIN de la démonstration.

II) Arbres recouvrants:

- *Un arbre recouvrant* d'un graphe G est un sous-graphe recouvrant de G qui est un arbre.



II) Arbres recouvrants:

- **Propriété** caractéristique de connexité par arbres recouvrants:

> Un graphe est connexe **ssi** il possède un arbre recouvrant.

Démonstration :

- Soit A un sous-graphe connexe et couvrant de G de taille minimale (un tel graphe existe : pourquoi?)
- Dès qu’on enlève une arête à A on le déconnecte : pourquoi ?
- Donc A est un arbre recouvrant de G : pourquoi ?

questions

- 1) A est un arbre d’ordre 10. Quelle est sa taille ?
- 2) Un graphe G d’ordre 8 n’a que des isthmes. Quelle est la taille maximale pour un tel graphe ?
- 3) Un arbre n’a que des sommets de degré 3 et de degré 1. Il possède 9 feuilles. Quel est son ordre ?

Réponses :

- 1) A est un arbre d'ordre 10. Quelle est sa taille ?

  n-1=9

- 2) Un graphe G d'ordre 8 n'a que des isthmes. Quelle est la taille maximale pour un tel graphe ?

  Un graphe sans cycle de taille maximale serait un arbre donc de taille n-1=7

Réponses :

- 3) Un arbre n’a que des sommets de degré 3 et de degré 1. Il possède 9 feuilles. Quel est son ordre ?

  Notons n l’ordre et a le nombre de nœuds. On a donc :

  $a+9=n$ et $3a+9=2(n-1)$

  Somme des degrés

  <=> $n-a=9$ et $2n-3a=11$

  <=> $n=16$

Exercice 22 (poly)

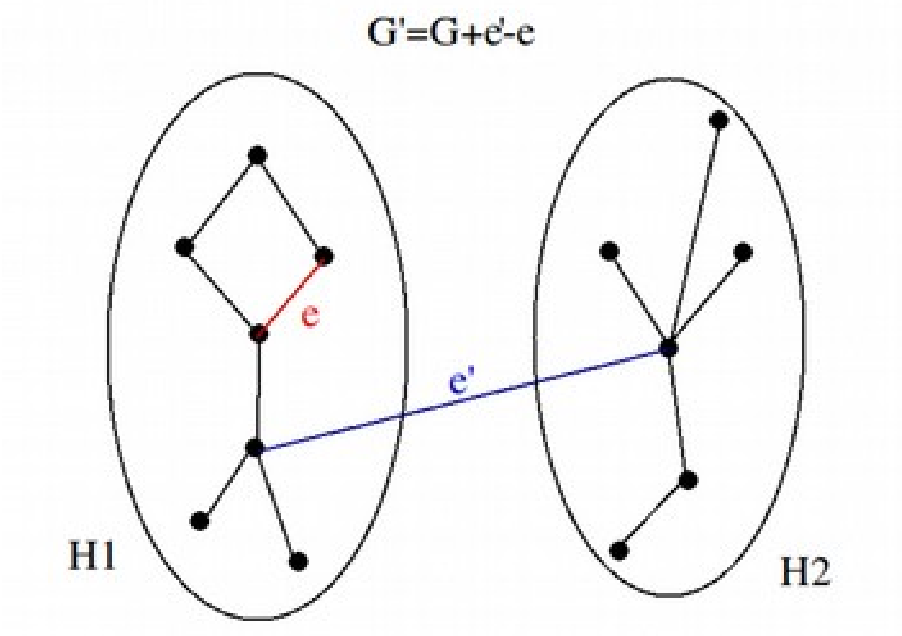
- Soit G un graphe d’ordre n>=4 de taille n-1 et possédant deux composantes connexes.
- Démontrez que G possède un seul et unique cycle.

Correction exercice 22

- Si G n’avait pas de cycles alors (puisque G est de taille n-1) G serait un arbre donc connexe => Absurde.

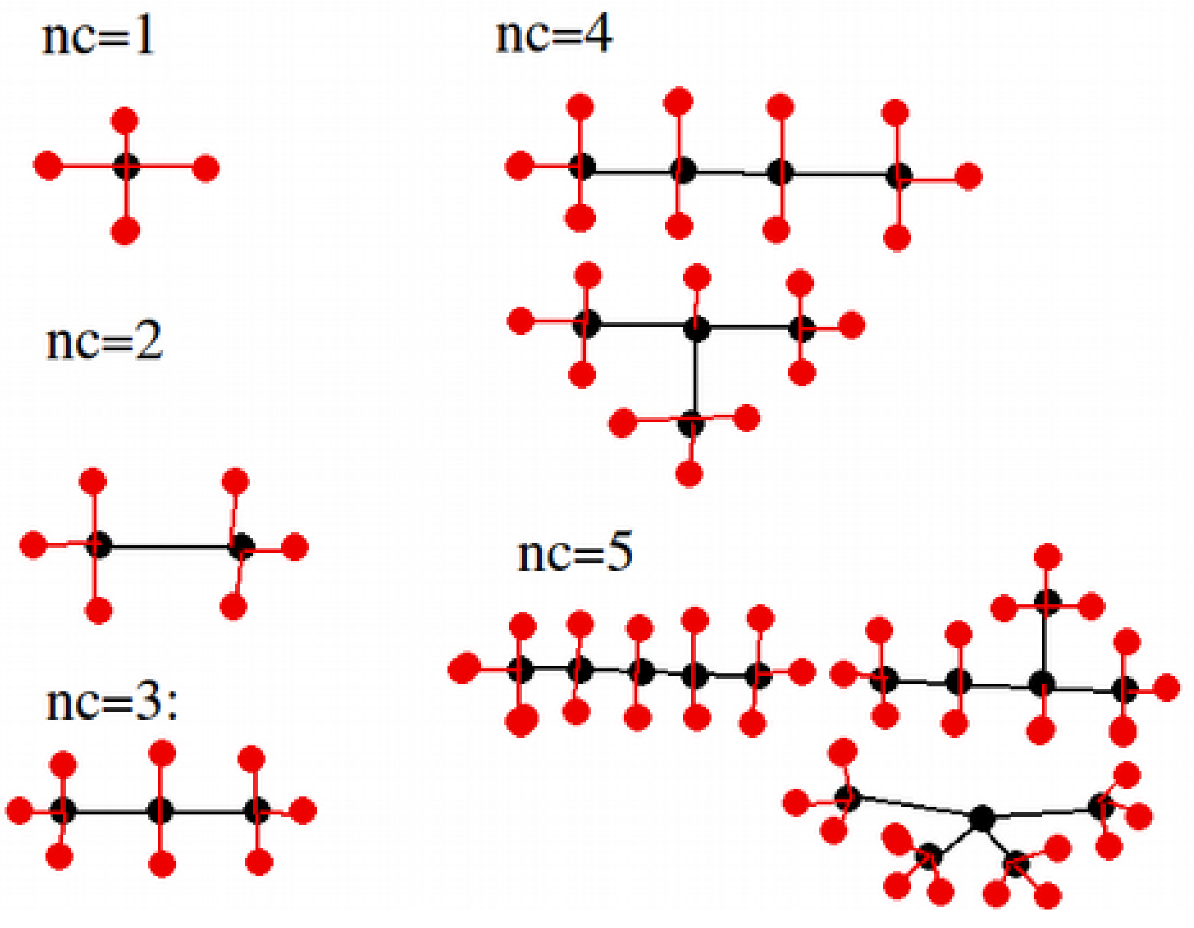
  Donc G possède au moins un cycle.

- Il reste à démontrer que ce cycle est unique :



- Montrons que ce cycle est unique :
  - Soit e une arête d’un cycle de G.
  - G’ construit à partir de G en enlevant e et en rajoutant une arête e’ entre les deux composantes est un graphe connexe et de taille n-1 => G’ est un arbre=> G’ sans cycle => G n’a qu’un seul cycle.

Exercice 23



Ex23 (suite)

- Ordre : $n=n_c+n_h$
- Taille : $n-1=(4n_c+n_h)/2$
- On en déduit :

$$n_c+n_h-1=(4n_c+n_h)/2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2n_c+2n_h-2=4n_c+n_h$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{n_h=2n_c+2}$$

On multiplie par 2