Interrogation n°2 groupe S2 ;Maths discrètes ; année 2018/2019

Exercice 1 :

On considère la forme propositionnelle $(p \vee q) \Rightarrow p$ (on notera f cette formule).

1. Réécrivez f en utilisant la forme contraposée de l'implication :

$$\boxed{\neg p \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)}$$

2. Réecrivez f sans utiliser le symbole $\Rightarrow$:

$(p \vee q) \Rightarrow p \equiv \neg(p \vee q) \vee p$ car $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$

3. Complétez la table de vérité suivante (p et q représentent des variables propositionnelles) :

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

4. Ecrivez une formule logiquement équivalente à $(p \vee q) \Rightarrow p$ et qui n'utilise qu'un seul connecteur :

$$\boxed{q \Rightarrow p}$$

Exercice 2 :

1. On considère la proposition $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 - y = 0$. Donnez en le justifiant la valeur de vérité de cette proposition.

Soit x un réel quelconque. Peut-on trouver y en fonction de x tel que $x^2 - y = 0$? Réponse : oui $y = x^2$

donc $v(P_1) = V$

2. On considère la proposition $P_2 : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - y = 0$. Donnez en le justifiant la valeur de vérité de cette proposition.

On cherche un réel y_0 tel que pour tout x réel on ait $x^2 - y_0 = 0$

c'est à dire $x^2 = y_0$.

Or la fonction x^2 n'est pas constante

donc $v(P_2) = F$

Exercice 3 :

Soit P la proposition suivante :

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, (x^2 = y^2) \Rightarrow (x = y)$$

1. Déterminez la valeur de vérité de P et justifier votre réponse :

Pour $x = 0$ la proposition " $\forall y \in \mathbb{Z}, \; y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ " est vraie

donc $v(P) = V$

2. Réécrivez P en utilisant la contraposée de l'implication :

$P' : \exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \; x \neq y \Rightarrow x^2 \neq y^2$

3. Ecrivez la négation de P :

$\neg P : \forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \; (x^2 = y^2) \wedge (x \neq y)$

Exercice 4 :

Démontrez par récurrence la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}}_{P(n)}$$

$P(0)$: A-t-on $0^2 = \dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$?

évident $v(P(0)) = V$

Soit n fixé démontrons $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

c'est à dire $\boxed{0^2+1^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ ← HR

$$\boxed{\Rightarrow 0^2+1^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$$

dém : $0^2+1^2+\dots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

$$\Rightarrow 0^2+1^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

CQFD