TD 1: Calcul booléen

Exercice 1:

En utilisant les règles de calcul sur les algèbres de Boole, simplifiez les expressions suivantes (où x, y, z et t sont quatre éléments quelconques d'une algèbre de Boole):

1. $A = (x + y) \times (x + \overline{y})$;
   $A = x + y\,\overline{y} = x + 0 = x$

2. $B = xyz + x\,\overline{y}\,z$;
   $B = xz(y + \overline{y}) = xz \times 1 = xz$

3. $C = (x + y) \times \overline{\overline{x} \times y}$;
   $C = (x + y)\,(x + \overline{y}) = x$

4. $D = \overline{xy\overline{z} + \overline{x}y}$;
   $D = \overline{y\,(x\overline{z} + \overline{x})} = \overline{y\,(\overline{z} + \overline{x})} = \overline{y} + \overline{\overline{z} + \overline{x}} = \overline{y} + xz$

5. $E = \overline{x\,(y + \overline{z}) + \overline{x}\,y}$;
   $E = \overline{xy + x\overline{z} + \overline{x}y} = \overline{y + x\overline{z}} = \overline{y} \times (\overline{x} + z) = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{y}z$

6. $F = \overline{(x + y + z)\,(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})}$;
   $F = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xyz$

7. $G = xyzt + x\overline{t} + yz$.
   $G = yz + x\overline{t}$

8. $H = xz + \overline{(x + \overline{z})\,(z + t)} + yz\overline{t} + xyzt$

   $H = xz + \overline{x + \overline{z}} + \overline{z + t} + yz\overline{t}$
   $= xz + \overline{x}z + \overline{z}\,\overline{t} + yz\overline{t}$
   $= z + \overline{z}\,\overline{t} + yz\overline{t}$
   $= z + \overline{t}$

Exercice 2:

Déterminez les tables de vérité, les formes canoniques disjonctives des fonctions booléennes suivantes:

1. $f_1(a,b,c) = ab + \overline{a}c$.

a	b	c	a b	$\overline{a}c$	f_1
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

forme canonique disjonctive: $f_1 = \overline{a}\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,bc + ab\overline{c} + abc$

2. $f_2(a,b,c) = a(b+\overline{a}) + c$

a	b	c	$b+\overline{a}$	$a(b+\overline{a})$	f_2
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

forme canonique disjonctive: $f_2 = \overline{a}\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$

3. $f_3(a,b,c) = ab + bc + ca$

a	b	c	f_3
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

forme canonique disjonctive: $f_3 = \overline{a}\,bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc$

4. $f_4(a,b,c) = a(b+ac)\,\overline{c}$

a	b	c	$b+ac$	$a(b+ac)$	f_4
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

forme canonique disjonctive: $f_4 = ab\overline{c}$
On peut retrouver ce dernier résultat par le calcul.

5. $f_5(a,b,c) = abc + \overline{a}\,\overline{c}$

a	b	c	abc	$\overline{a}\,\overline{c}$	f_5
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

forme canonique disjonctive: $f_5 = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,b\overline{c} + abc$

6. $f_6(a,b,c) = (a+bc)\left(\overline{a} + \overline{b}\,\overline{c}\right)$

a	b	c	a+bc	$\overline{a} + \overline{b}\,\overline{c}$	f_6
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

forme canonique disjonctive: $f_6 = \overline{a}\,bc + a\overline{b}\,\overline{c}$

Exercice 3:

Soit f une fonction booléenne à n variables. On note f^* la fonction booléenne à n variables définie par

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$$

Donnez une forme polynomiale et la table de vérité des fonctions f_1^*, f_2^* et f_3^*(les fonctions f_1, f_2 et f_3 ont été définies dans l'exercice précédent).

$f_1^*(a,b,c) = \overline{f_1\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)} = \overline{\overline{a}\,\overline{b} + a\overline{c}} = (a+b)(\overline{a}+c) = ac + \overline{a}b + bc$
On obtient la table de vérité de f_1^* à partir de celle de f_1 en remplaçant dans toutes les cases (y compris celles des 3 premières colonnes) les 0 par des 1 et les 1 par des 0.

$f_2^*(a,b,c) = ac + bc$
$f_3^*(a,b,c) = f_3(a,b,c)$

Exercice 4:

1. Combien y a-t-il de fonctions booléennes à 2 variables?
Il y a $2^4 = 16$ fonctions booléennes à 2 variables. Plus généralement il y a $2^{(2^n)}$fonctions booléennes à n variables.

2. Déterminez toutes les fonctions booléennes à deux variables qui sont symétriques (c'est à dire les fonctions booléennes f telles que pour tout couple $(a,b) \in B_2^2$ on a $f(a,b) = f(b,a)$). Vous donnerez pour chacune d'entre elles la table de vérité et la forme disjonctive canonique.

Le tableau ci-dessous représente toutes les fonctions booléennes à 2 variables:

a	b	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

les fonctions symétriques sont f_0,f_1,f_6,f_7, f_8 ,f_9,f_{14} et f_{15}.

Exercice 5:

Déterminez les formes disjonctives minimales dans chacun des cas. Vous pouvez utiliser les diagrammes de Karnaugh:

1. $abcd+\overline{a}b+a\overline{c}d+b\overline{c}\,\overline{d}$

	a	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	
c			1		$\overline{d}$
c		1	1		d
$\overline{c}$	1	1	1		d
$\overline{c}$		1	1		$\overline{d}$
	$\overline{b}$	b	b	$\overline{b}$	

$f_1=\overline{a}b+bd+b\overline{c}+a\overline{c}d$

2. $ab\overline{c}+a\overline{b}\,\overline{c}+\overline{a}bc+a\overline{b}c$

	a	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$
c	1		1	
$\overline{c}$	1	1		
	$\overline{b}$	b	b	$\overline{b}$

$f_2=a\overline{b}+a\overline{c}+\overline{a}bc$

3. $abcd+a\overline{b}+a\overline{c}+bc+ab\left(\overline{c}+\overline{d}\right)$

	a	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	
c	1	1	1		$\overline{d}$
c	1	1	1		d
$\overline{c}$	1	1			d
$\overline{c}$	1	1			$\overline{d}$
	$\overline{b}$	b	b	$\overline{b}$	

$f_3=a+bc$

4. $a+\overline{a}\left(\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}+c+d\right)$

	a	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	
c	1	1	1	1	$\overline{d}$
c	1	1	1	1	d
$\overline{c}$	1	1	1	1	d
$\overline{c}$	1	1		1	$\overline{d}$
	$\overline{b}$	b	b	$\overline{b}$	

$f_4=a+\overline{b}+c+d$

Exercice 6:

On considère l'expression booléenne $\phi=(x+y\overline{z})\,\overline{yz}$

1. Ecrivez ϕ sous sa forme canonique disjonctive en utilisant uniquement les règles du calcul booléen.
$\phi=(x+y\overline{z})\,\overline{yz}=(x+y\overline{z})\,(\overline{y}+\overline{z})=x\overline{y}+x\overline{z}+y\overline{z}$
$\phi=x\overline{y}\,(z+\overline{z})+x\,(y+\overline{y})\,\overline{z}+(x+\overline{x})\,y\overline{z}=x\overline{y}z+x\overline{y}\,\overline{z}+xy\overline{z}+\overline{x}y\overline{z}$

2. Vérifiez le résultat de la question précédente à l'aide d'une table de vérité.

x	y	z	$(x+y\overline{z})$	$\overline{yz}$	$(x+y\overline{z})\,\overline{yz}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Les monomes complets (i.e. "mintermes") trouvés par le calcul à la question 1 correspondent bien aux 1 de la table de vérité.

3. Utilisez un diagramme de Karnaugh pour obtenir une forme polynomiale minimale de ϕ .
Pour remplir le diagramme de Karnaugh on utilise la forme polynomiale de la question 1:

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$
z	1			
$\overline{z}$	1	1	1	
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$

La forme minimale: $\phi = x\overline{y} + y\overline{z}$

Exercice 7:

On considère la fonction booléenne à 3 variables f définie par la formule suivante:

$$f(x,y,z) = xy\overline{z} + x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{y}z$$

1. Dressez le diagramme de Karnaugh correspondant à f :

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$
z	1			1
$\overline{z}$	1	1	1	
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$

2. Simplifiez la formule de f en utilisant la méthode de Karnaugh.
En appliquant la méthode de Karnaugh on obtient 2 formes minimales:

$$f = x\overline{z} + y\overline{z} + \overline{y}z$$

$$f = x\overline{y} + y\overline{z} + \overline{y}z$$

3. Donnez la forme canonique disjonctive de $\overline{f}$.
$\overline{f} = xyz + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ (en s'inspirant du diagramme de Karnaugh de f)

4. Donnez la forme polynomiale simplifiée de $\overline{f}$.
$\overline{f} = yz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

5. Combien y a-t-il de fonctions booléennes à 3 variables ?
$2^{(2^3)} = 2^8 = 256$

Exercice 8:

Soit f une fonction booléenne à 3 variables définie par la formule suivante:

$$f\,(x,y,z) = \overline{(x+yz)} \times (x+\overline{z}) + yz$$

1. En utilisant les règles du calcul booléen, écrivez f sous la forme d'un polynome booléen (pas nécessairement minimal). Vous détaillerez les étapes de calculs.
   $f = \overline{x}\,(\overline{y}+\overline{z})\,(x+\overline{z}) + yz = \overline{x}\,\overline{z}\,(\overline{y}+\overline{z}) + yz = \overline{x}\,\overline{z} + yz$

2. Même question pour $\overline{f}$.
   $\overline{f} = x\overline{y} + x\overline{z} + \overline{y}z$

3. Complétez la table de vérité de la fonction f :

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

4. Donnez la forme canonique disjonctive de f .
   $f = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + xyz$

5. Dressez le diagramme de Karnaugh de f .1:

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$
z		1	1	
$\overline{z}$			1	1
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$

6. Simplifiez f en utilisant la méthode de Karnaugh:
   $f = \overline{x}\,\overline{z} + yz$

7. Simplifier $\overline{f}$.
   $\overline{f} = x\overline{z} + \overline{y}z$
   (avec Karnaugh)

Interrogation de maths discrètes n°1 année 2018
Groupe S2

Exercice 1:

Déterminez les tables de vérité des fonctions booléennes suivantes (a,b et c représentent des variables booléennes dans $B = \{0, 1\}$):
$f_1(a, b, c) = ab + \overline{a}c$
$f_2(a, b, c) = a(b + ac)\overline{c}$
$f_3(a, b, c) = \overline{ab + \overline{a}bc} + b\overline{c}$

a	b	c	$f_1(a,b,c)$	$f_2(a,b,c)$	$f_3(a,b,c)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Exercice 2:

Soit la fonction booléenne suivante à 4 variables:

$$f(a, b, c, d) = (ab + cd)(ac + ba)(ad + bc)$$

1. En utilisant uniquement les règles du calcul booléen, démontrez que $f(a, b, c, d) = abd + abc + acd$. Vous détaillerez chacune de vos étapes de calcul en justifiant précisemment.

2. Dressez le diagramme de Karnaugh de la fonction booléenne f :

3. Donnez une forme polynomiale simplifiée de la fonction $\overline{f}$.

Interrogation n°1 groupe S6 année2018

Exercice 1 :

Soit f une fonction booléenne à 3 variables définie par la formule suivante :

$$f(x, y, z) = \overline{xy + yz} \times (x + \overline{z}) + \overline{y}\,\overline{z}$$

1. En utilisant les règles du calcul booléen écrivez f sous la forme d'un polynome booléen (pas nécessairement minimal). Vous détaillerez les étapes de calculs :

2. Même question pour $\overline{f}$:

3. Complétez la table de vérité de la fonction f :

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

4. Donnez la forme canonique disjonctive de f :

Exercice 2 :

On considère la fonction booléenne g à 3 variables définie par :

$$g\left(x,y,z\right)=x\overline{y}\,\overline{z}+xy\overline{z}+\overline{x}y+\overline{x}\,\overline{y}z$$

1. Dressez le diagramme de Karnaugh de g :

2. Simplifiez g en utilisant la méthode de Karnaugh (vous donnerez toutes les formes polynomiales minimales de g).