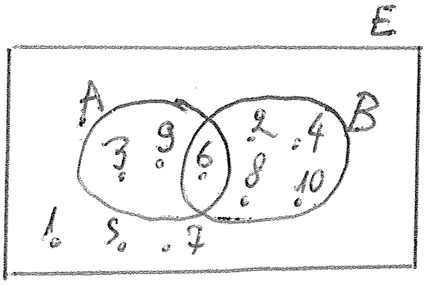
Interrogation n°3 de maths discrètes, groupe S2 (année 2018-2019).

Exercice 1 :

Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E définis par $A = \{3, 6, 9\}$ et $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Donnez en extension les ensembles suivants :



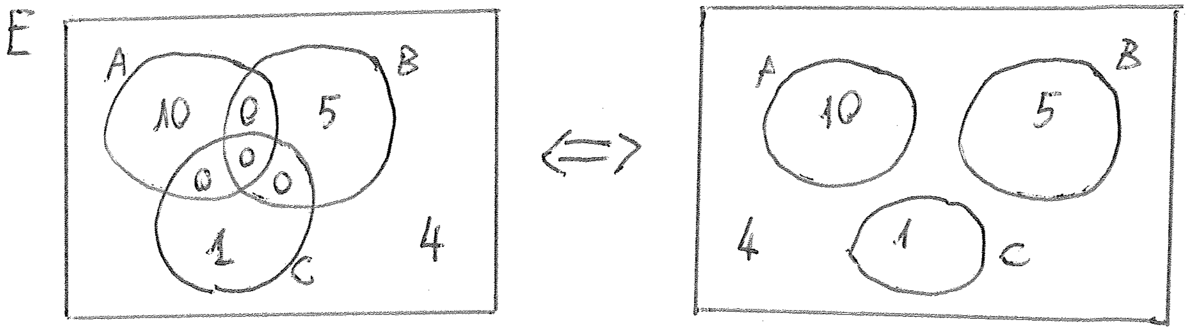
1. $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$
2. $A \cap B = \{6\}$
3. $(A - B) \cup (B - A) = \{3, 9\} \cup \{2, 4, 8, 10\} = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$
4. $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \{3, 9\} \cup \{6\} \cup \{1, 5, 7\}$
   $= \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

Exercice 2 :

Soit E un ensemble tel que $|E| = 20$. Soient A, B et C trois sous-ensembles de E tels que :

— $|A| = 10$
— $|B| = 5$
— $|\overline{A \cup B \cup C}| = 4$
— $|C - (A \cup B)| = 1$
— $|(A \cup B) - C| = 15$

1. Faites un diagramme de Venn représentant cette situation (vous ferez apparaître le cardinal des surfaces élémentaires du diagramme)



2. Démontrez rigoureusement pour tout ensemble E et pour tous les sous-ensembles A, B et C l'égalité suivante :

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C - (A \cup B)|$$

(dans cette question, et uniquement dans cette question, on se place dans le cadre général de la théorie des ensembles. Vous ne pouvez donc pas utiliser les hypothèses sur les cardinaux qui vous ont servi pour la question 1)

$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C|$ (associativité de l'union)

$= |A \cup B| + \underbrace{|C| - |C \cap (A \cup B)|}$ formule 6b page 27

$= |A \cup B| + |C - A \cup B|$ formule 6a page 27 en prenant $A \leftarrow C$, $B \leftarrow A \cup B$

3. Déduisez-en rigoureusement le cardinal de $A \cup B$

$|A \cup B \cup C| = |E| - |\overline{A \cup B \cup C}| = 20 - 4 = 16$ formule 6.c page 27

En utilisant l'égalité de la question précédente on déduit :

$16 = |A \cup B| + 1 \iff |A \cup B| = 15$

4. Déduisez-en le cardinal de $A \cap B$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (cf formule 6 b page 27)

$\iff 15 = 10 + 5 - |A \cap B| \iff |A \cap B| = 0$

Exercice 3 :

Dans un sac il y a 10 jetons numérotés de 1 à 10. On prend 4 jetons distincts sans tenir compte de l'ordre.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Les tirages sont des sous-ensembles de cardinal 4 : $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

2. Combien y a-t-il de tirages avec 3 nombres pairs exactement ?

$\binom{5}{3}\binom{5}{1} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 2 \times 1} \times 5 = 50$

3. Combien y a-t-il de tirages avec au moins trois nombres pair ?

$\binom{5}{3}\binom{5}{1} + \binom{5}{4}\binom{5}{0} = 55$

4. Combien y a-t-il de tirages avec exactement 1 multiple de 3 et 2 nombres pairs (les autres jetons n'étant ni pairs ni multiples de 3)

$\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{2}$

$+ \binom{4}{2}\binom{1}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 48$

{2, 4, 8, 10}	{6}	{3, 9}	{1, 5, 7}
1	1	0	2
2	0	1	1

5. Reprenez les questions 1 et 2 en supposant cette fois que l'on tient compte de l'ordre des tirages (les jetons sont toujours distincts 2 à 2) :

Question 1 : Les tirages sont des arrangements donc : $A_{10}^{4} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

Question 2 : $\binom{4}{3} \times A_5^3 \times A_5^1$

$= 4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 5 = 1200$

A_5^3 : choix des nombres pairs

A_5^1 : choix des impairs

$\binom{4}{3}$: positions des pairs

Interrogation n°3; Maths Discrètes; 2015/2016; groupe S5

1. Soient E un ensemble quelconque, A et B deux parties de E, x un élément de A. Complétez sans justification les pointillés afin d'obtenir des propositions vraies:

   (a) $x \in A$

   (b) $x \notin \overline{A}$

   (c) $x \notin B - A$

   (d) $A \subsetneq A \cup B$

   (e) $A - B = A \cap \overline{B}$

   (f) $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$

   (g) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B - A = B$

2. Soient $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ un ensemble , $A = \{a, b, d\}$ et $B = \{b, c, d, e, f\}$ deux parties de E.

   (a) Ecrire en extension les ensembles suivants:

   $\overline{A} = \{c, e, f, g\}$

   $A \cap B = \{b, d\}$

   $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\} = E - \{g\}$

   $A - B = \{a\}$

   $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}\}$

   (b) Quel est le cardinal de $P(E)$?

   $$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|} = 2^7$$

   (c) Donnez toutes les partitions de A :

   $P_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{d\}\}$ $P_2 = \{\{a\}, \{b, d\}\}$

   $P_3 = \{\{b\}, \{a, d\}\}$ $P_4 = \{\{d\}, \{a, b\}\}$ $P_5 = \{A\}$

Exercice 3:

On considère 7 cartes numérotées de 1 à 7 et on en tire 4 sans tenir compte de l'ordre.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles?

Les tirages sont des combinaisons (sous-ensembles) de 4 cartes:

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 35$$

2. Combien y a-t-il de tirages avec deux nombres pairs exactement?

$\binom{3}{2}\binom{4}{2}$

3. Combien y a-t-il de tirages avec aux moins deux nombres pairs?

$\binom{3}{2}\binom{4}{2}+\binom{3}{3}\binom{4}{1}$

4. Combien y a-t-il de tirages avec deux nombres pairs et un multiple de 3 exactement?

$$\binom{2}{2}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{3}{1}$$

$$+\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{0}\binom{3}{2}$$

$\{2,4\}$	$\{6\}$	$\{3\}$	$\{1,5,7\}$
2	0	1	1
1	1	0	2