R1.07 **Outils mathématiques fondamentaux** **2021-2022**

TD N°2 - Calcul matriciel

Exercice 1
On note A la matrice de $\mathcal{M}_{3\times 4}$ définie par $a_{ij} = \max(i,j)$. Écrire explicitement la matrice A, puis calculer $\sum_{i=1}^{3} a_{i,2}$, $\prod_{j=2}^{4} a_{3,j}$ et $\sum_{i=1}^{3} a_{i,i+1}$.

Exercice 2
On note A la matrice de $\mathcal{M}_{3\times 4}$ définie par $a_{ij} = |i-j|$. Écrire explicitement la matrice A, puis calculer $\sum_{i=1}^{3} a_{i,2}$, $\sum_{j=2}^{4} a_{3,j}$ et $\prod_{i=1}^{3} a_{i,i+1}$.

Exercice 3
On note A la matrice de $\mathcal{M}_{3\times 4}$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i < j \\ (-1)^j \text{ si } i = j \\ i + j \text{ sinon.} \end{cases} .$$

Écrire explicitement la matrice A, puis calculer $\sum_{i=1}^{3} a_{i,3}$, $\sum_{j=2}^{4} a_{2,j}$ et $\sum_{j=2}^{4} a_{j-1,j}$.

Exercice 4 ($*$)
On note $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ la matrice carrée telle que

$$(\forall\, i = 1, \ldots,\, n),\ (\forall\, j = 1, \ldots,\, n), \quad m_{i,j} = 1 + (-1)^i + (-1)^j\ .$$

Écrire explicitement M pour $n = 4$, puis calculer pour n quelconque les quantités

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_{n+1-i,i}$$

Exercice 5 ($**$)
On note $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ la matrice carrée telle que

$$(\forall\, i = 1, \ldots, n),\ (\forall\, j = 1, \ldots, n), \quad a_{i,j} = n\,(i-1) + j\ .$$

Expliciter A pour $n = 4$ et $n = 5$, puis calculer pour n quelconque, les quantités :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,3}, \quad \prod_{i=1}^{n} a_{i,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}\ .$$

Exercice 6
On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour les produits suivants, préciser s'ils sont bien définis (c'est–à–dire s'ils existent) ou pas. Pour ceux qui sont bien définis, préciser la dimension de la matrice produit.

$$A\,B, \qquad B\,A, \qquad A\,C, \qquad D\,C, \qquad C^2, \qquad (D\,C)^2, \qquad (B\,C)^2\ .$$

Exercice 7
On donne les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la somme $A + B$, puis les produits matriciels $D\,A$, $D\,B$ et $D\,C$.

Exercice 8 ($*$)
On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits $(A\,B)$ et $(A\,C)$ et en déduire sans calcul supplémentaire que le produit $A\,(B - C)$ est égal à la matrice nulle $\mathbf{0}_{3\times 3}$

Exercice 9 ($**$)
On considère les deux matrices carrées de taille $n \times n$ notées U et L telles que :

$$u_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad l_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer le produit $U\,L$ en fonction de n.

Exercice 10
On considère les 4 matrices de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ suivantes :

$$\mathbf{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Compléter les tableau suivant avec les produits :

$\nearrow$	$\mathbf{Id}_2$	S_x	S_y	S_O
$\mathbf{Id}_2$	$\mathbf{Id}_2$	S_x	S_y	S_O
S_x	S_x			
S_y	S_y			
S_O	S_O			

2. Déduire de ce tableau les inverses des quatre matrices (on ne fera pas de calcul supplémentaire).

Exercice 11 ($*$)
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2, A^3, A^4 et en déduire A^5, A^6, A^7, A^8.
2. Les matrices précédentes sont elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

Exercice 12 ($*$)
On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2},$$

où $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les valeurs de $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ pour que

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. En déduire l'inverse de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 13
On note M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2 et montrer que $M^2 = 2\,M + \mathbf{1}_2$.
2. Déduire de la question précédente que M est inversible et donner son inverse.

Exercice 14
Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $M(a)$ la matrice dépendant de a

$$M(a) = \begin{pmatrix} -2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Calculer $B(a) = [M(a) - \mathbf{1}_2]\,[M(a) + 2\,\mathbf{1}_2]$ en développant le produit.
2. Montrer que $B(a) = M(a)^2 + M(a) - 2\,\mathbf{1}_2$ et en déduire l'inverse de $M(a)$.

Exercice 15 $(*)$
On considère la matrice de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} .$$

On pose aussi $R = \frac{1}{2}\,Q$.

1. Calculer Q^2 et Q^3. En déduire R^2 et R^3.
2. En déduire sans calcul que R et R^2 sont inversibles et donner leurs inverses.

Exercice 16 $(*)$
On considère la matrice suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}) .$$

1. Calculer N^2, N^3 et N^4.
2. Calculer $(\mathbf{Id}_3 + N)\,(\mathbf{Id}_3 - N + N^2)$. En déduire que $\mathbf{Id}_3 + N$ est inversible, et donner son inverse.

Exercice 17 $(*)$
On note A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Calculer A^2 et A^3 et établir une relation entre A et A^3.

2. À l'aide de la question précédente, déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_{3\times3}$ distincte de la matrice nulle, telle que $B\,A = \mathbf{0}_{3\times3}$.

Exercice 18 ($**$)
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $M(x)$ la matrice

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & \frac{-x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Écrire $M(0)$, puis $M(-x_0)$ pour un réel x_0 donné.
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $M(x)\,M(y)$.
3. Déduire des calculs précédents que $M(x)$ est inversible et calculer son inverse.
4. Déduire des calculs précédents la forme générale de $M^n(x)$ pour $n \geq 1$, et la démontrer par récurrence.

Exercice 19
Utiliser l'algorithme de Gauss pour calculer l'inverse, si elle existe de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 20 ($*$)
Utiliser l'algorithme de Gauss pour calculer l'inverse, si elle existe de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 ($*$)
Utiliser l'algorithme de Gauss pour calculer l'inverse, si elle existe de la matrice $A \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 22 ($**$)
On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est inversible et calculer son inverse par l'algorithme de Gauss.

Exercice 23 ($**$)
On veut étudier la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$\begin{cases} \qquad u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, \qquad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} . \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes de la suite, jusqu'à u_8.
2. Pour tout $n \geq 0$, on note U_n le vecteur

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times1} .$$

Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_{2\times2}$ (dont les coefficients ne dépendent pas de n) telle que

$$\forall n \geq 0, \qquad A\,U_n = U_{n+1} .$$

3. Pour tout $n \geq 0$, montrer que $A^n\, U_0 = U_n$.
4. Montrer que le système d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}$$

   a exactement deux solutions, notées $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
5. Montrer que les matrices

$$B = \begin{pmatrix} \Phi & \Phi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & -\Phi' \\ -1 & \Phi \end{pmatrix}$$

   sont inverses l'une de l'autre.
6. Pour tout $n \geq 0$, montrer que

$$A^n = B \begin{pmatrix} \Phi^n & 0 \\ 0 & \Phi'^n \end{pmatrix} C\ .$$

7. En déduire que

$$\forall n \geq 0, \qquad u_n = \Phi^n(1 - \Phi') + \Phi'^n(\Phi - 1)\ .$$