TD4 sur les arbres

Exercice 1:

On considère les séquences d'entiers suivante:

$$S_1 = (1,1,1,1)$$

$$S_2 = (1,1,2,2,3,3)$$

$$S_3 = (2,2,2,2,3,3)$$

$$S_4 = (1,1,1,1,2,2)$$

$$S_5 = (2,3,4,4)$$

$$S_6 = (1,1,1,1,1,2,3,4)$$

1. Parmi les séquences précédentes, lesquelles ne peuvent pas être celles de graphes connexes? Justifiez votre réponse.
2. On ne considère à présent que les séquences qui peuvent être celles de graphes connexes. Donnez toutes les séquences qui peuvent être celles d'un arbre. Justifiez votre réponse.

Exercice 2:

1. Soit $G = (X = \{a, b, c, d, e, f, g\}, E = \{ab, ac, bc, cd, be, ef, eg\})$ un graphe. Dessinez tous les arbres recouvrants de G .
2. Quel est le nombre d'arbres recouvrants d'une chaîne d'ordre n ? d'un cycle d'ordre n ?
3. Soit G un graphe connexe n'ayant qu'un unique cycle C . Montrez que pour toute arête e de C le graphe $G - e$ est un arbre recouvrant de G .

Exercice 3:

On considère l'ensemble T des arbres dont tous les noeuds sont de degré 3 (un noeud est un sommet d'un arbre qui n'est pas une feuille).

1. Déterminez, à un isomorphisme près, tous les arbres de T dont le nombre de noeuds est inférieur ou égal à 6 .
2. Soit f le nombre de feuilles d'un arbre de T et n son ordre. Quelle relation a-t-on entre n et f ?

Exercice 4: Graphes et chimie:

Un alcane acyclique est une molécule chimique constituée d'atomes de carbones (C) et d'atomes d'hydrogène (H). On peut modéliser cette molécule par un graphe connexe et sans cycle, avec pour sommets n_C carbones de degré 4 et n_H hydrogènes de degré 1.

1. Représentez tous les alcanes tels que $n_C \leq 5$.
2. Soit G un graphe représentant un alcane. Déterminez son ordre et son nombre d'arêtes en fonction de n_C et n_H
3. Démontrez que $n_H = 2n_C + 2$.

Exercice 5:

Soit un graphe d'ordre $n \geq 4$ ayant $n - 1$ arêtes et possédant 2 composantes connexes. Démontrez rigoureusement que G possède un cycle.

Exercice 6:
Récurrence seconde forme

On considère l'ensemble $\Im$ de graphes défini de la manière suivante:

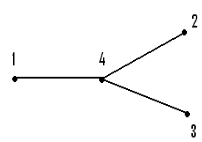
- Tous les graphes isomorphes à $P_1 = (\{1\}, \emptyset)$ sont dans $\Im$.
- Tout graphe G de $\Im$ d'ordre $n \geq 2$ est obtenu à partir de deux graphes de $\Im$, $G_1 = (X_1, E_1)$ et $G_2 = (X_2, E_2)$, d'ordre $< n$, en rajoutant une seule arête x_1x_2 avec $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$. Donc $G = (X_1 \cup X_2, E_1 \cup E_2 \cup \{x_1x_2\})$.

1. Dessinez tous les graphes de $\Im$ d'ordre inférieur ou égal à 5, à un isomorphisme près.
2. Démontrez, à l'aide d'une récurrence seconde forme, que les éléments de $\Im$ sont connexes.
3. Démontrez à l'aide d'une récurrence seconde forme, que les éléments de $\Im$ sont sans cycles.
4. Que peut-on dire de l'ensemble $\Im$?

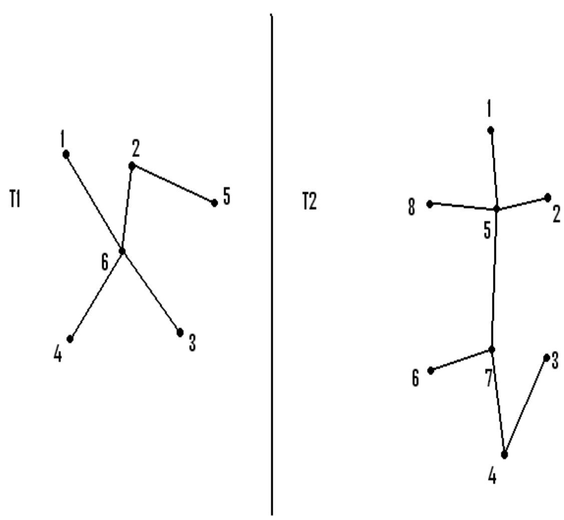
Exercice 7:

Pour tout arbre $T = (X, E)$ d'ordre $n \geq 2$ on dira qu'un ordre sur les sommets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un ordre de construction lorsque pour tout $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, x_i a un voisin et un seul dans $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$ (autrement dit, un sommet a un voisin et un seul parmi les sommets qui le précèdent dans la "liste" $(x_1, x_2, \dots, x_n)$).

Par exemple pour l'arbre T ci-dessous $(1, 4, 2, 3)$ est un ordre de construction mais $(3, 2, 4, 1)$ n'en est pas un (car 2 n'a pas de voisin dans $\{3\}$ et de plus 4 a deux voisins dans $\{3, 2\}$) .



1. Donnez, pour chacun des arbres suivants, un ordre de construction:



2. Soit $P_5 = (X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E = \{12, 23, 34, 45\})$ une chaine d'ordre 5 . Donnez un ordre de construction de la forme (a, b, c, d, e) tel que l'ordre inverse (e, d, c, b, a) ne soit pas un ordre de construction.(sans justification)
3. Soient un arbre $T = (X, E)$ d'ordre $n \geq 2$ et un ordre de construction $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour cet arbre. Que vaut $deg_T(x_n)$? (justifiez votre réponse)
4. Démontrez par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que tout arbre $T = (X, E)$ d'ordre n admet un ordre de construction.