Corrigé - Dénombrement

Exercice 1

① ⓐ $\emptyset$ ⓑ $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ ⓒ $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ ⓓ $\{1,2,3\}$

② $(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)$

③ $(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)$

④ $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)$

Exercice 2

① $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|} = 2^7$

② ⓐ $\binom{7}{0} = 1$ ⓑ $\binom{7}{1} = 7$ ⓒ $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ ⓓ $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$

ⓔ $\binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7$ ⓕ $\binom{7}{7} = \binom{7}{0} = 1$

③ ⓐ 7^2 ⓑ 7^3 ⓒ 7^7

④ ⓐ $A_7^2 = 7 \times 6 = 42$ ⓑ $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ ⓒ $A_7^7 = 7! =$

Exercice 3

On cherche à déterminer le nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble de cardinal 10.

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times \cancel{9}^{3} \times \cancel{8}^{4}}{\cancel{3} \times \cancel{2}} = 120$$

Exercice 4

$|1|1|1\ 0 \quad\ldots\quad |0|0| \longrightarrow \{1,2,3\}$

$\ \ 1\ \ 2\ \ 3 \qquad\qquad\quad 9\ \ 10$

A un mot de 10 bits ayant 3 "1" correspond une combinaison de 3 éléments d'un ensemble de cardinal 10.
D'où le nombre de mots de 10 bits ayant exactement 3 "1" est égal au nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble de cardinal 10.

$$\binom{10}{3} = \underline{120}$$

Le nombre de mots ayant au moins trois "1" est égal au nombre total de mots possibles – (nombre de mots ayant 0 "1" + nombre de mots ayant 1 "1") + nombre de mots ayant 2 "1") :

$$2^{10} - \left(1 + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}\right) =$$

$$2^{10} - (1 + 10 + 45) = 2^{10} - 56$$

Exercice 5

① Un lot est une combinaison de 3 cartes d'un ensemble de cardinal 5. Le nombre de lots possible est

$$\binom{5}{3} = \frac{5\times4\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times2} = 10$$

② $\binom{2}{1}\binom{3}{2} = 2\times3 = 6$

③ Le nombre de lots avec au moins une carte paire est égal au nombre de lots possibles – nombre de lots avec 0 carte paire : $\binom{5}{3} - \binom{3}{3} = 10 - 1 = 9$.

Exercice 6

① $\binom{32}{5}$

② $\binom{4}{2}\binom{8}{3}$ ③ $\binom{32}{5} - \left(\binom{4}{0}\binom{28}{5} + \binom{4}{1}\binom{28}{4}\right)$

④ $\binom{8}{2}\binom{24}{3}$

⑤ nombre de mains avec l'as de carreau $\binom{1}{1}\binom{3}{1}\binom{7}{1}\binom{21}{2}$

$+$ $\qquad$ $+$

nombre de mains sans l'as de carreau $\binom{1}{0}\binom{3}{2}\binom{7}{2}\binom{21}{1}$

Exercice 7

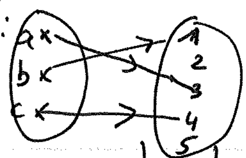
$\binom{10}{2}\binom{20}{3}$

Exercice 8

① $A_{15}^{15} = 15!$ ② $A_{15}^{3} = 15 \times 14 \times 13$

Exercice 9

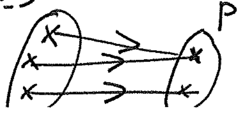
$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

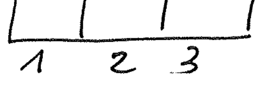
(une disposition correspond à une application injective de $\{a,b,c\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}$. Exemple : )

Exercice 10 Les chaussettes et les tiroirs sont discernables.

① $2^3 = 8$ ② $5^4 =$ ③ p^n

un rangement de n paires dans p tiroirs correspond à une application de E de cardinal n dans F de cardinal p.

Exemple : 

ou 

Exercice 11

1. $\binom{52}{5}$ 2. a) $\binom{4}{4}\binom{48}{1} = 48$ b) $\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{48}{1} = 13 \times 48$

3. a) $\binom{4}{3}\binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24$ b) $13 \times 12 \binom{4}{3}\binom{4}{2}$

4. a) $\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}$ b) $\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}$

5. a) $\binom{4}{1}$ b) $10\binom{4}{1}$

6. a) $\binom{4}{1}^5 = 4^5$ b) 10×4^5

7. $\binom{4}{1}\binom{13}{5}$ 8. a) $\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$ b) $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$

9. $\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3$ 10. $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$ 11. $\binom{52}{5} - \binom{39}{5}$

12. $\binom{52}{5} - \binom{40}{5}$ 13. au moins 1 as $\cup$ au moins 1 H $= \overline{0 \text{ as} \cap 0\text{H}}$

$\binom{52}{5} - \binom{36}{5}$

14. au moins 1 as $\cup$ au moins 1 trèfle $= \overline{0 \text{ as} \cap 0 \text{ trèfle}}$

$\binom{52}{5} - \binom{36}{5}$

15. au moins 1 as $\cap$ au moins 1 honneur $= \overline{0 \text{ as} \cup 0 \text{ honneur}}$

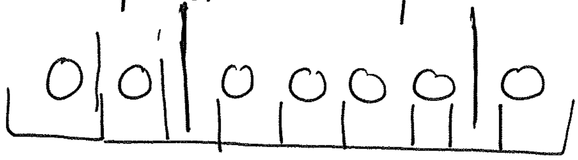
$\binom{52}{5} - \left(\binom{48}{5} + \binom{40}{5}\right)$

16. au moins 1 as $\cap$ au moins 1 trèfle $= \overline{0 \text{ as} \cup 0 \text{ trèfle}}$

$\binom{52}{5} - \left(\binom{48}{5} + \binom{39}{5}\right)$

Exercice 12

① Une répartition possible est :



; $\binom{9}{2}$ est le nombre de répartitions possible.

② $\binom{n+k-1}{k-1}$