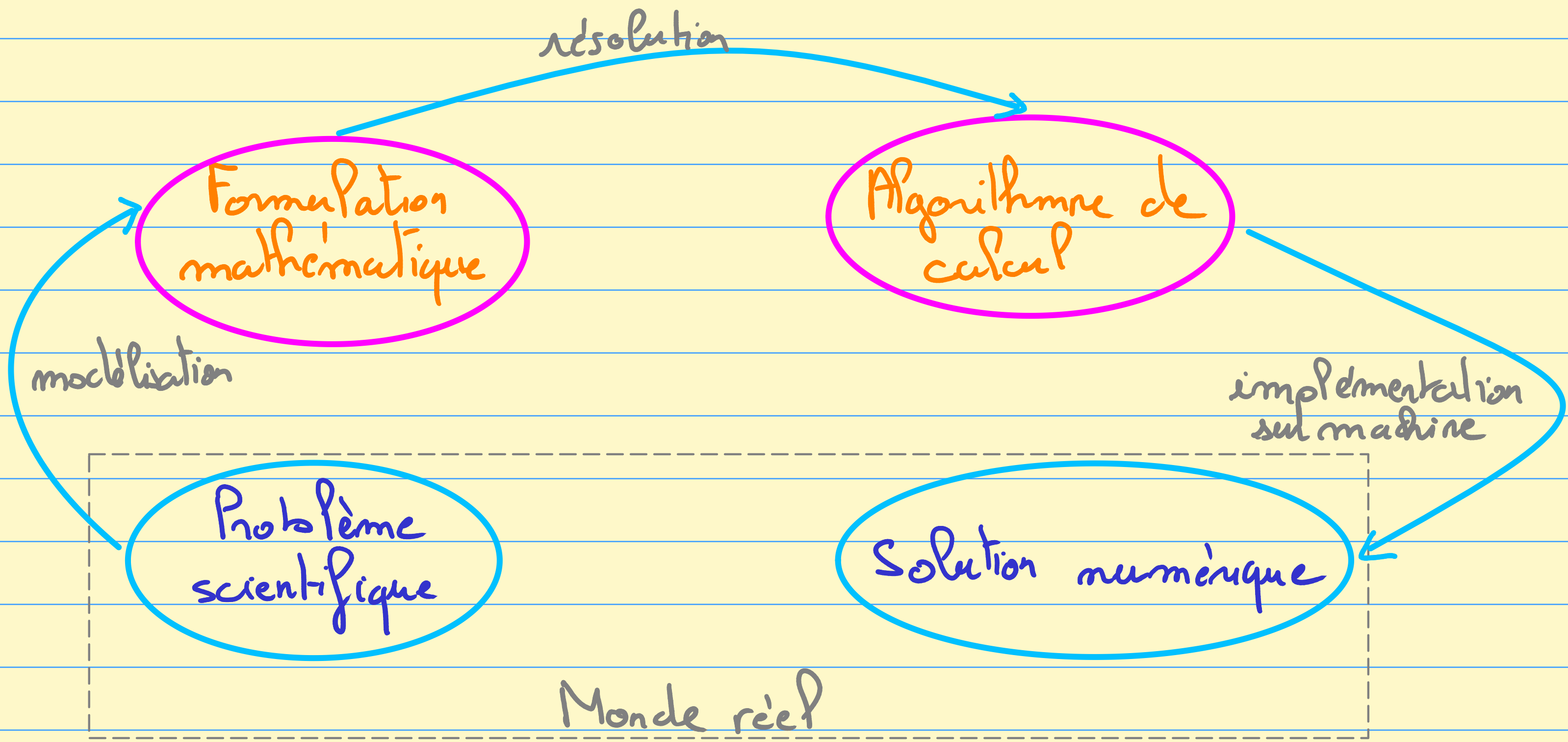
Méthodes numériques

↳ 4 amphis : diapo sur le cours Moodle
↳ 4 séances de 2h de TD (prévoir calculatrice scientifique)
↳ 1 examen unique : QCM en présentiel le 7 mars
↳ SAÉ 2.02 évaluée séparément

↳ Mots clés : Calcul scientifique, suites, récurrence
↳ Prérequis : analyse élémentaire (fonctions, dérivée, fonctions usuelles)
↳ Mise en oeuvre : résolution numériques d'équations
↳ Domaines concernés : ingénierie, électronique, chimie, biologie etc...

↳ Dans toute cette ressource,
"numérique" = "nombres (réels)"

Motivation



nombres maths : $\mathbb{R}$ $\neq$ nombres machine : float, double (IEEE 754)

ex :

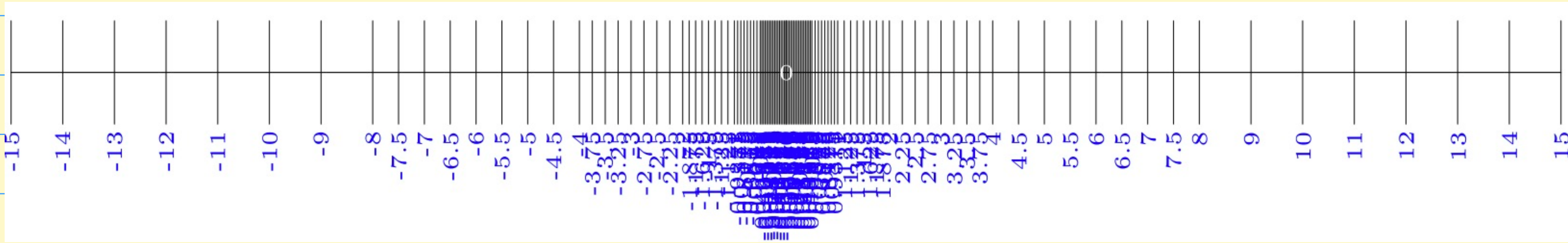
→ $\sqrt{2}$: nombre réel dont le carré est 2 → sqrt(2) : 1.4142135623730951

→ $2 - (\sqrt{2})^2 = 0$ → 2 - sqrt(2)*sqrt(2) : -4.440892098500626e-16

Deux types d'erreur :

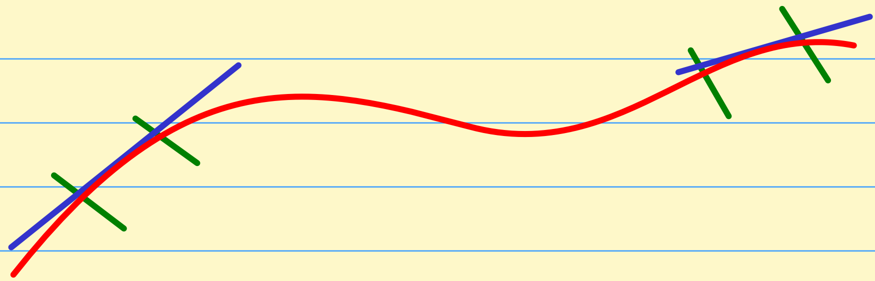
→ erreur d'arrondi : arithmétique IEEE 754 (32 bits, 64 bits)

ex : codage 6 bits



→ erreur d'approximation de l'algorithme

ex : identifier une portion de courbe à une portion de droite



La résolution numérique d'équations

En sciences de l'ingénieur, on est souvent confrontés à des problèmes de la forme :

trouver un nombre $x \in [a,b]$ tel que

$$\varphi(x) = y$$ avec

- x est l'inconnue
- $[a;b]$ est un intervalle donné
- φ est une fonction donnée
- y est un réel donné
- on ne sait pas forcément exprimer la solution explicitement

Rem : pb préalable : existence et unicité d'un tel $x \in [a,b]$

Hypothèse : solution unique existe, notée x^*

Def : Une méthode **numérique** de résolution de l'équation $f(x) = y$ est un algorithme dont la sortie x_n vérifie

$$x_n \text{ suffisamment proche de } x^*$$

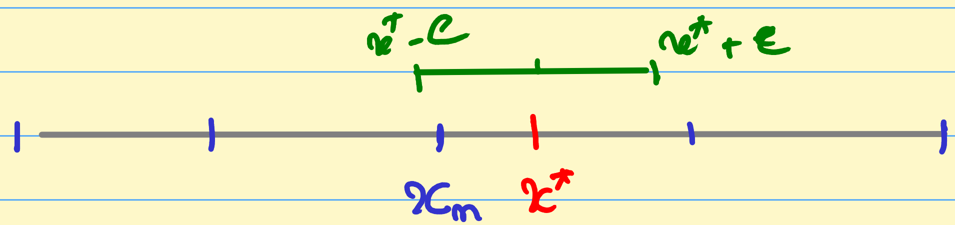
Rem : " suffisamment proche " $\equiv$ pour une précision e donnée

$$|x_n - x^*| < e$$

ou $$x^* - e < x_n < x^* + e$$

ou $$x_n \in \,]x^* - e \,;\, x^* + e[$$

formulations équivalentes



ex de $\sqrt{2}$ cité plus haut avec $e = 4.10^{-16}$

Rem : ↳ indice n car nous verrons des méthodes itératives
↳ $x_1, x_2 \dots x_n$ sont des nombres représentables en machine (double, float)

Prérequis

Fonction : association entre une entrée et une sortie, notée

nom de l'association

ensemble des entrées considérées

ensemble contenant les sorties

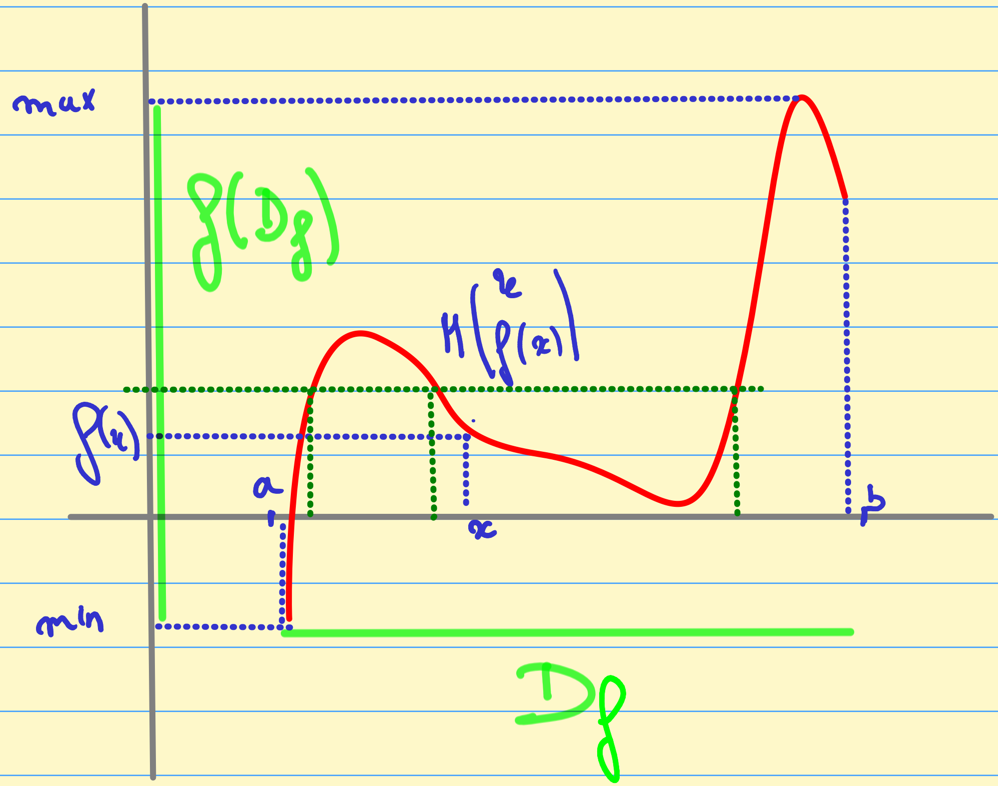
$$\varphi : \begin{array}{ccc} D_\varphi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

nom générique de l'entrée : la variable

expression de la sortie associée à l'entrée x

ex :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 - 2x\sqrt{x-2} - e^x \end{array}$$

Représentation graphique

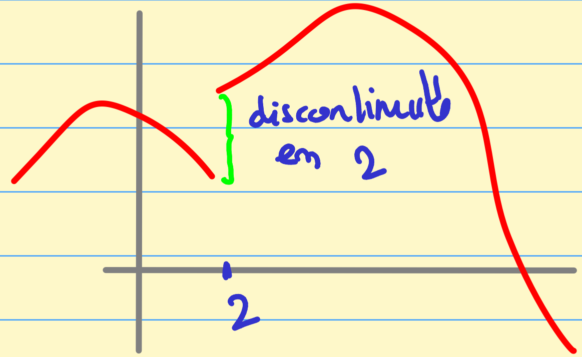


↳ Lecture directe : détermination graphique de l'image (une seule)
↳ Lecture inverse : " " de l'antécédent (0 à plusieurs)
↳ $f([a;b]) = [\min ; \max]$. En général $\neq [f(a) ; f(b)]$

Fonctions continues

Déf (fausse et incomplète) : f est continue s'il n'y a pas de saut dans sa représentation graphique

Ex 1



Ex 2 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Th :
→ les fonctions usuelles : puissances, racines, logarithme, exponentielle, trigonométrique sont continues sur leur ensemble de définition
→ les sommes de fonctions continues sont des fonctions continues
→ pareil pour les produits, inverses, rapports et composition sur les ensembles où ces opérations existent

Ex : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

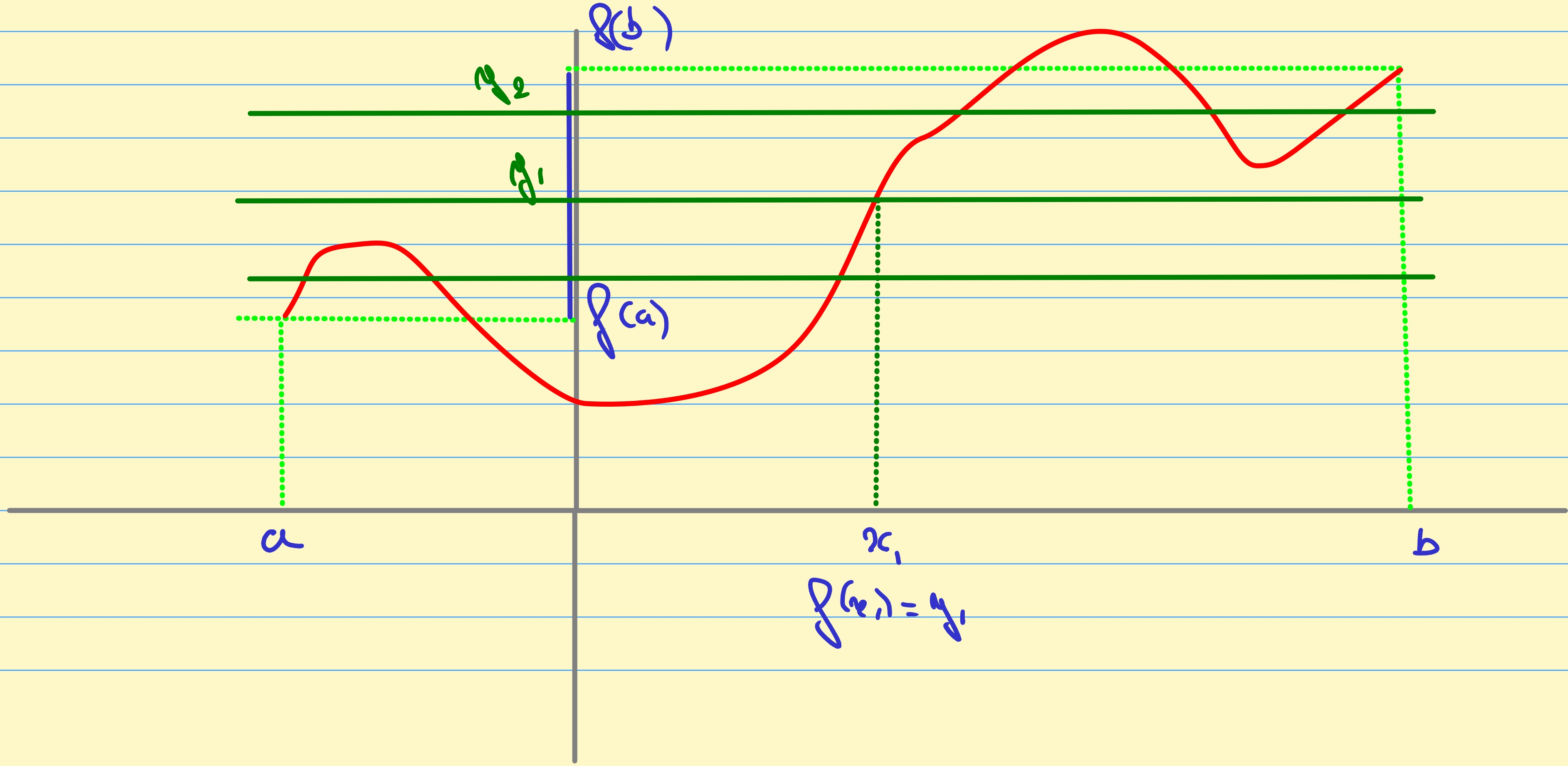
$$x \longmapsto \sqrt[3]{e^{-\frac{\cos(x)}{3x^2+1}}}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f est continue sur $[a;b]$, et si y est un réel entre $f(a)$ et $f(b)$ alors $\exists\ x \in [a;b]$ tel que

$$f(x) = y$$



Rem : → la solution de l'équation $f(x) = y$ n'est pas forcément unique

→ Le théorème ne donne pas la solution mais garantit son existence

→ ce n'est pas une construction de la (des) solution(s)

→ "y entre $f(a)$ et $f(b)$" $\iff$ $\begin{cases} f(a) \leq y \leq f(b) & (\text{si } f(a) \leq f(b)) \\ \text{ou} & \\ f(b) \leq y \leq f(a) & (\text{si } f(b) \leq f(a)) \end{cases}$

→ Sans perte de généralité, on posera $\varphi(x) = f(x) - y$ et on aura la formulation (pour chaque y fixé)

$$\begin{cases} \varphi \text{ continue sur } [a ; b] \\ \varphi(a) \cdot \varphi(b) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, x \in [a ; b] \quad \text{tq}$$

$$\varphi(x) = 0$$

Méthode de dichotomie

Conditions et données : ↳ φ continue sur $[a;b]$
↳ $\varphi(a)\cdot\varphi(b) < 0$
↳ strict ⇒ pas de solution en a ni en b

TVI ⇒ $\exists\, x^*,\ a < x^* < b$ tq $\varphi(x^*) = 0$

Recherche par dichotomie ⟶ construit une suite $x_1, x_2, \ldots x_n$ tq

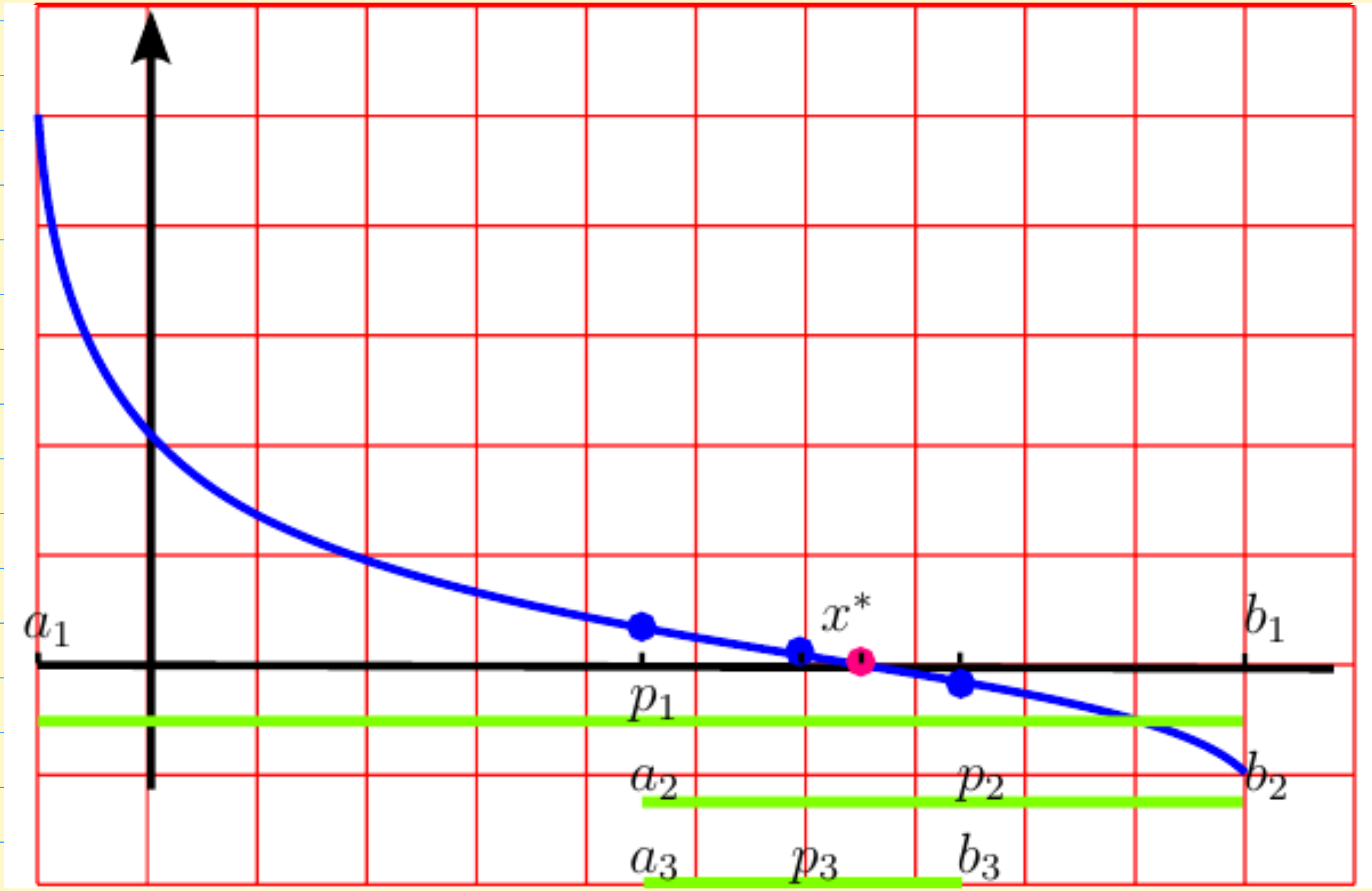
$\forall\, e > 0,\ (\exists n \in \mathbb{N})$ tq $|x_n - x^*| < e$

↳ marge d'erreur fixée par l'utilisateur (10^{-7} ; 10^{-16} etc…)

↳ x_n est proche de x^* à l'erreur e près

Idée : → diviser $[a;b]$ en 2 en coupant au milieu
→ déterminer sur quelle moitié le changement de signe a eu lieu
→ recommencer la recherche sur cette moitié et itérer

Dichotomie : construction graphique



$p_1 ; p_2 ; p_3 ; \dots$ Suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^*$

Algorithme

Requis : $a < b$ deux réels avec $\varphi(a)\varphi(b) < 0$; e tolérance

1: $p \leftarrow \frac{1}{2}(a+b)$ ▷ approximation initiale

2: tant que $(\varphi(p) \neq 0)$ et $(|b-a| > 2e)$ faire

3: si $\varphi(a)\cdot\varphi(p) < 0$ alors ▷ $x^* \in [a ; p]$

4: $b \leftarrow p$

5: sinon ▷ $x^* \in [p ; b]$

6: $a \leftarrow p$

7: fin si

8: $p \leftarrow \frac{1}{2}(a+b)$ ▷ mise à jour

9: fin tant que

10: renvoie a, p, b

↳ n : nombre d'évaluations de la condition ligne 2

↳ valeurs retournées a_n, p_n, b_n

Vitesse de convergence

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ construite par l'algorithme. Alors

$$(\forall n \geq 1) \quad |p_n - x^*| \leq \frac{1}{2^n} |b-a|$$

↳ Cela garantit que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'une des solutions, appelée x^*

↳ pour une tolérance/précision e souhaitée, il suffit que

$$\frac{1}{2^n} |b-a| < e$$

↳ conséquence : n peut être calculé à l'avance

(boucle Tant que) → (boucle Pour i=1 à n) ex :

$$\varphi : [0\,;3] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

$$\begin{cases} \varphi \text{ continue sur } [0;3] \text{ car c'est un polynôme} \\ \varphi(0)\cdot\varphi(3) = (-1)\cdot 2 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le TVI s'applique ; la dichotomie peut s'appliquer

Précision souhaitée : $e = 10^{-2}$. Il suffit que

$$\frac{1}{2^n}|3-0| < 10^{-2} \iff 2^n > 3\cdot 10^2$$
$$\iff n\ln(2) > \ln(3) + 2\ln(10)$$
$$\iff n > \frac{\ln(3) + 2\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 8{,}23$$

n doit être entier ; on choisit $n = 9$

Trace de l'algorithme

n	a_n	p_n	b_n	$f(a_n)$	$f(p_n)$	$f(b_n)$
1	0	$3/2$	3	$-$	$-$	$+$
2	$3/2$	$9/4$	3	$-$	$-$	$+$
3	$9/4$	$21/8$	3	$-$	$+$	$+$
4	$9/4$	$39/16$	$21/8$	$-$	$-$	$+$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	$669/256$	$1341/512$	$21/8$			

$p_9 = \frac{1341}{512} \simeq 2{,}619$ est une approximation de l'une des solutions x^* à 10^{-2} près