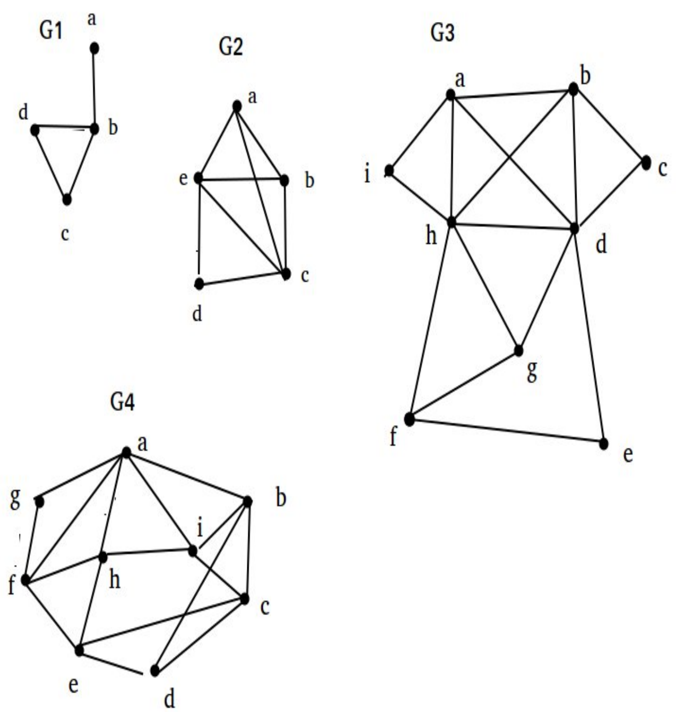
Les graphes eulériens et les graphes hamiltoniens

Exercice 1 :

Pour chacun des graphes suivants, précisez s'il admet un parcours eulérien ou un parcours eulérien fermé ou ni l'un ni l'autre. Déterminez lorsqu'ils existent ces parcours.



Exercice 2 :

Déterminez, à un isomorphisme près, tous les graphes eulériens d'ordre 3, 4 et 5 .

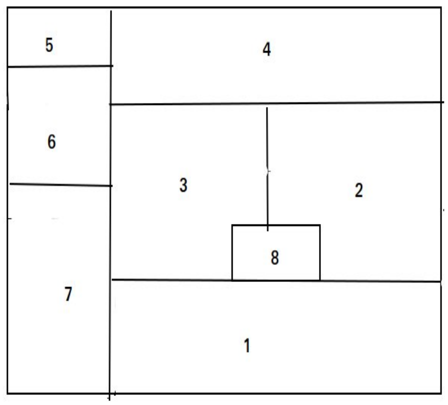
Exercice 3 :

On considère un jeu de dominos utilisant les chiffres 0,1,2,3 et 4, tel que sur chaque domino figurent deux chiffres distincts.

1. On vous propose de résoudre le problème P : "Est-il possible d'aligner tous les dominos de sorte que, lorsque deux pièces se touchent, les chiffres en contact soient identiques".
2. Reprenez le problème P avec des chiffres allant de 0 à 5, puis de 0 à 6.
3. Reprenez le problème P en supposant que les chiffres sur chaque domino ne sont pas forcément distincts.

Exercice 4 :

Huit pays sont représentés ci-dessous avec leurs frontières :



1. Représentez cette situation par un graphe G où les pays sont les sommets du graphe.
2. Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule ?
3. Est-il possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de revenir dans un autre pays ?
4. On veut colorier la carte de façon à ce que deux pays ayant une frontière commune ne soient pas de la même couleur. Combien faut-il de couleurs au minimum ?

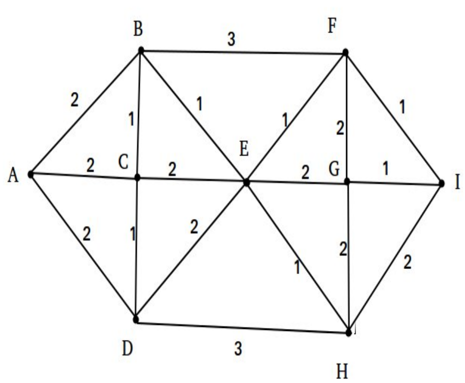
Exercice 5 :

Soit le graphe $G = (X, E)$ avec $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $E = \{ab, af, bc, bf, cd, cg, de, dg, ef, eg\}$.

1. G admet-il un parcours eulérien fermé ? ouvert ?
2. Dessinez un graphe H_1 admettant un parcours eulérien fermé et obtenu à partir de G en rajoutant un nombre minimum d'arêtes.
3. Dessinez un graphe H_2 admettant un parcours eulérien ouvert et obtenu à partir de G en rajoutant un nombre minimum d'arêtes.
4. Les arêtes du graphe G représentent les galeries d'un musée tandis que les sommets sont les points de rencontre de ces galeries. Chacune de ces galeries fait 50 mètres de long. Un gardien de nuit posté en a doit effectuer une ronde toutes les heures. Au cours d'une ronde il doit parcourir entièrement au moins une fois chaque galerie et revenir à son poste. Donnez le parcours d'une ronde de longueur minimale

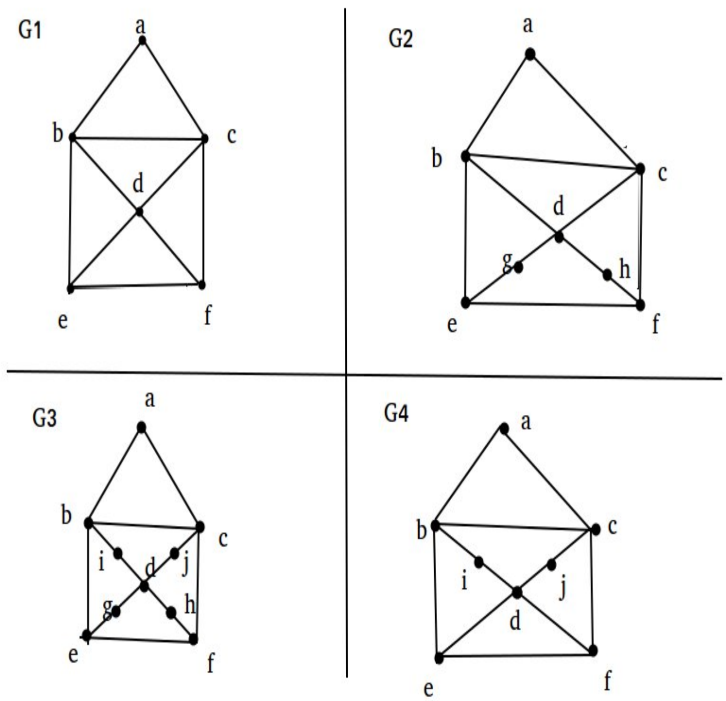
Exercice 6 :

Trouvez un parcours fermé, de longueur minimale et passant au moins une fois par chacune des arêtes.



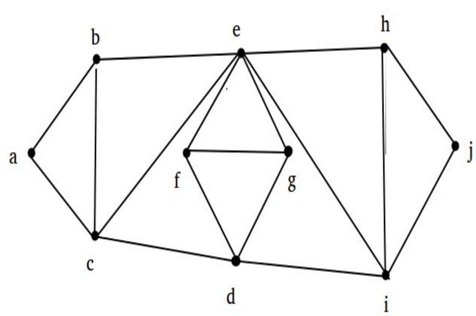
Exercice 7 :

Les graphes suivants sont-ils hamiltoniens ? Justifiez vos réponses.



Exercice 8 :

Démontrez, en utilisant les théorèmes du cours, que le graphe suivant n'est pas hamiltonien :



Exercice 9 :

On considère les séquences de degrés suivantes :

$$S_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$S_2 = (2, 2, 2, 2, 3, 3)$$

$$S_3 = (3, 3, 3, 3, 3)$$

$$S_4 = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$$

1. Parmi ces séquences, une seule ne peut pas être celle d'un graphe simple. Laquelle ? Justifiez votre réponse.
2. Parmi les séquences restantes, une seule ne peut pas être celle d'un graphe connexe. Laquelle ?
3. Parmi ces séquences, une seule est celle d'un graphe nécessairement hamiltonien. Laquelle ? Justifiez votre réponse. Démontrez que pour les autres séquences il existe des graphes non hamiltoniens.

Exercice 10 :

1. Dans un club il y a 5 inscrits. Ils déjeunent régulièrement autour d'une table ronde (chaque membre a donc deux voisins de table). Combien ce club peut-il organiser de déjeuners de façon à ce que tous les inscrits n'aient jamais le même voisin ?
2. Même question avec 6 inscrits ? avec 7 inscrits ?