R1.07 **Outils mathématiques fondamentaux** **2021-2022**

TD N°1 - Systèmes linéaires et algorithme de Gauss

Exercice 1

Utiliser l'algorithme de Gauss pour déterminer l'unique solution des systèmes suivants :

$$(a)\begin{cases}4x-3y=1\\2x-6y=-4\end{cases}\qquad(b)\begin{cases}2x+5y=1\\x+5y=3\end{cases}\qquad(c)\begin{cases}2x+5y=1\\3x+5y=3\end{cases}$$

Exercice 2 ($*$)

Utiliser l'algorithme de Gauss pour déterminer l'unique solution des systèmes suivants :

$$(a)\begin{cases}x-z=0\\3x+y=1\\-x+y+z=4\end{cases}\qquad(b)\begin{cases}2x-2y+3z=2\\x+2y-z=3\\3x-y+2z=1\end{cases}\qquad(c)\begin{cases}2x+4y+6z=22\\3x+8y+5z=27\\-x+y+2z=2\end{cases}$$

Exercice 3 ($**$)

Utiliser l'algorithme de Gauss pour déterminer l'unique solution du système suivant :

$$\begin{cases}x-2y+z-t=1\\2x-y-z-t=3\\x+y+2z+2t=0\\x-y+z-2t=2\end{cases}$$

Exercice 4

Utiliser l'algorithme de Gauss pour déterminer le nombre de solutions des systèmes suivants : (on ne demande pas les solutions, lorsqu'il y en a)

$$(a)\begin{cases}2x+2y=5\\x-4y=0\end{cases}\qquad(b)\begin{cases}2x-8y=0\\x-4y=5\end{cases}\qquad(c)\begin{cases}2x-8y=2\\x-4y=1\end{cases}$$

$$(d)\begin{cases}2x+2y=5\\x-4y=0\\3x-2y=5\end{cases}\qquad(e)\begin{cases}x-4y=5\\2x-8y=0\\x-4y=15\end{cases}\qquad(f)\begin{cases}2x-8y=2\\3x-12y=3\\-x+4y=-1\end{cases}$$

Exercice 5 ($*$)

Utiliser l'algorithme de Gauss pour déterminer le nombre de solutions des systèmes suivants : (on ne demande pas les solutions, lorsqu'il y en a)

$$(a)\begin{cases}x-3y+z=1\end{cases}\qquad(b)\begin{cases}x-3y+z=1\\x+y+2z=14\end{cases}\qquad(c)\begin{cases}x-3y+z=1\\x+y+2z=14\\x+9y+4z=1\end{cases}$$

$$(d)\begin{cases}2x-2y+3z=2\\x+2y-z=3\\3x-y+2z=1\\x-y+2z=3\end{cases}\qquad(e)\begin{cases}2x-2y+3z=2\\x+2y-z=3\\3x-y+2z=1\\x-y+2z=2\end{cases}\qquad(f)\begin{cases}2x-2y+3z=2\\x+2y-z=3\\x-10y+9z=-5\\4x+2y+z=8\end{cases}$$

Exercice 6

Déterminer les valeurs du réel a telles que les système suivant possède 0, 1 ou une infinité de solutions :

$$\begin{cases}2x-4y=1\\3x-6y=a\end{cases}$$

Exercice 7
Pour $b_1,\ b_2,\ b_3$ et b_4 quatre réels quelconques, on considère le système :

$$\begin{cases} x - 3\,y = b_1 \\ 3\,x + y = b_2 \\ x + 7\,y = b_3 \\ 2\,x + 4\,y = b_4 \end{cases}$$

Quelles conditions doivent satisfaire les réels b_i pour que ce système admette des solutions ? Dans ce cas, donner 2 jeux de valeurs différents pour lesquels ce système admet une solution et déterminer cette solution.

Exercice 8 $(**)$
Pour six nombres réels donnés, $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ et f, on considère le système :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = e \\ c\,x + d\,y = f \end{cases}$$

Montrer que si $a\,d - b\,c$ est non-nul, alors le système admet une unique solution, indépendamment de la valeur de e et f. Dans le cas contraire, déterminer des conditions sur e et f pour que le système n'admette aucune solution, ou admette une infinité de solutions.

Exercice 9 $(*)$
Déterminer les conditions sur les réels $a,\ b$ et c pour que le graphe de la parabole d'équation $a\,x^2 + b\,x + c$ passe par les points $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10
Pour chacun des systèmes suivants, donner l'ensemble des solutions sous forme paramétrique, en précisant les inconnues libres.

$$(a) \begin{cases} 3\,x + 6\,y = 18 \\ x + 2\,y = 6 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x + z = 4 \\ x - y + 2\,z = 5 \\ 4\,x - y + 5\,z = 17 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x + y + z = -1 \\ y + 3\,z - t = 1 \\ 2\,x + y - z + t = -3 \end{cases}$$

Exercice 11 $(*)$
Pour chacun des systèmes suivants, donner l'ensemble des solutions sous forme paramétrique, en précisant les inconnues libres.

$$(a) \begin{cases} 2\,x + y - z = 1 \\ 4\,x + 2\,y = 3 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} z - t = 1 \\ -x + y + 2\,t = 3 \\ -x + 2\,y + z + 3\,t = 7 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x + 2\,y + 3\,z + t - u = 1 \\ 3\,x - y + z + t + u = 3 \end{cases}$$

Exercice 12 $(*)$
Construire un système linéaire de trois équations à trois inconnues ayant une infinité de solution avec 2 inconnues libres.

Exercice 13
Pour deux réels a et b, on considère le système :

$$\begin{cases} 3\,x + 2\,y - z = a \\ -x + z = 0 \\ x + 2\,y + a\,z = b \end{cases}$$

1. Discuter, selon la valeur des paramètres a et b le nombre de solutions de ce système (on ne demande pas ces solutions).
2. Montrer que pour $a = b = 1$, le système admet une infinité de solutions. Donner alors l'ensemble des solutions sous forme paramétrique.

Exercice 14 ($**$)
On considère deux paramètres réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x + a\,y - z = -1 \\ -x + b\,y + (b+2)\,z = a \\ b\,x + (a+b+a\,b)\,y + (a+b+1)\,z = 1 \end{cases}$$

1. Selon les valeurs de (a, b), donner le nombre de solutions du système (S).
2. Vérifier que si $(a,\, b) = (1,\, 0)$, alors il y a une unique solution au système (S), et la donner.
3. Vérifier que si $(a,\, b) = (1,\, -1)$, alors il y a une infinité de solutions au système (S), et les donner sous forme paramétrique.

Exercice 15 ($**$)
Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. On considère le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + z = u \\ a\,x + y + (a-1)\,z = v \\ x + a\,y + z = w \end{cases}$$

où u, v et w sont trois réels donnés.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a, le système admet–il une unique solution ? Exprimer alors cette solution en fonction de a.
2. Pour $a = 1$, donner l'ensemble des solutions du système linéaire sous forme paramétrique.

Exercice 16 ($**$)
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire

$$\begin{cases} (a-1)\,x + 2\ (1-a)\ y - a\,z = u \\ x + (a-2)\ y + (a-1)\ z = v \\ a\,y + a\,z = w \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles ce système admet une unique solution (qu'on ne demande pas de calculer) indépendamment des valeurs de u, v et w.
2. On suppose maintenant $a = 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u, v et w pour que le système admette une unique solution. Montrer que $u = 2$, $v = -2$ et $w = 0$ vérifie cette condition et calculer la solution correspondante.
3. On suppose maintenant $a = -1$. Calculer la solution unique de ce système en fonction de u, v et w.