Lecture des résultats :

→ Il existe une ligne où le pivot (1^{er} coeff non nul de la ligne) est au second membre ⇒ Pas de solution

Exemple :

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ y + 3z = 3 \\ 0z = -1 \end{cases}$$

$0 = -1$ n'est jamais vrai

→ Autant de lignes non-nulles que d'inconnues ⇒ une unique solution

Exemple :

$$\begin{cases} \boxed{3}x + 2y - z = 2 \\ \boxed{1}y + 3z = 3 \\ \boxed{2}z = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ pivots} \\ 3 \text{ inconnues} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!$ solution

→ plus d'inconnues que de pivots $\Rightarrow$ une infinité de solutions

Exemple :

$$\begin{cases} \boxed{3}x - 2y + 4z + 2t = 1 \\ \boxed{1}y + 3z - t = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

2 pivots
4 inconnues $\Big\} \Rightarrow \infty$ de sol

Les inconnues
- qui n'ont pas de pivot (ici : z et t) sont les inconnues libres
- qui ont un pivot (ici : x et y) sont les inconnues liées

Dans l'exemple : L_4 peut s'écrire $0.t = 0$ tous les $t \in \mathbb{R}$ sont solutions : t est libre

L_3 " " $0z + 0t = 0$ " $z \in \mathbb{R}$ " " z " "

mais L_2 " " $y = -3z + t$ pour un couple (z,t) donné, y est unique

de même L_1 " " $x = \frac{1}{3}(1 + 2y - 4z - 2t)$ " " x est unique

Description des solutions : écrire les inconnues liées en fonction des inconnues libres

Exemple :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(1 + 2y - 4z - 2t) \\ y = -3z + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} + -\frac{10}{3} z \\ y = -3z + t \end{cases}$$

Ensemble des solutions $S = \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{10}{3} z, -3z + t, z, t\right) / \text{ avec } z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$

par exemple : $z = 0, t = 0$ $\left(\frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$ est une solution

$z = 1, t = 1$ $(-3, -2, 1, 1)$ " "

Calibrage de réseau :

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 400 \\ z + t = 300 \\ y + t = 350 \\ x + z = 350 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} \boxed{1}x + y = 400 & & \\ z + t = 300 & & \\ y + t = 350 & & \\ x + z = 350 & & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right.$$

pivot

$$\left\{\begin{array}{ll} \cancel{x + y = 400} & \\ z + t = 300 & L_2 \leftarrow L_3 \\ \boxed{1}y + t = 350 & L_3 \leftarrow L_2 \\ -y + z = -50 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \cancel{x + y = 400} & \\ \boxed{1}y + t = 350 & \\ z + t = 300 & \\ -y + z = -50 & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}\right.$$

pivot

$$\left\{\begin{array}{ll} \cancel{x + y = 400} & \\ \cancel{y + t = 350} & \\ \boxed{1}z + t = 300 & \\ z + t = 300 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \cancel{x + y = 400} \\ \cancel{y + t = 350} \\ \cancel{z + t = 300} \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

pivot

fini

Lecture des résultats :

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\mathrm{I}}\ x + y = 400 \\ \boxed{\mathrm{II}}\ y + t = 350 \\ \boxed{\mathrm{III}}\ z + t = 300 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

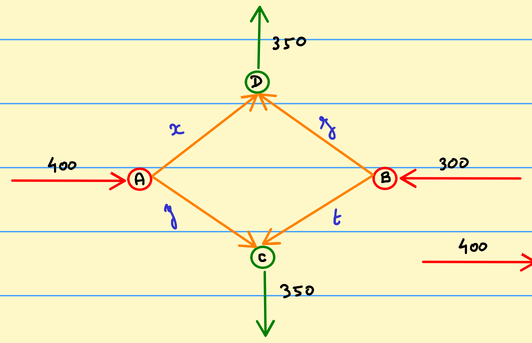
pivots

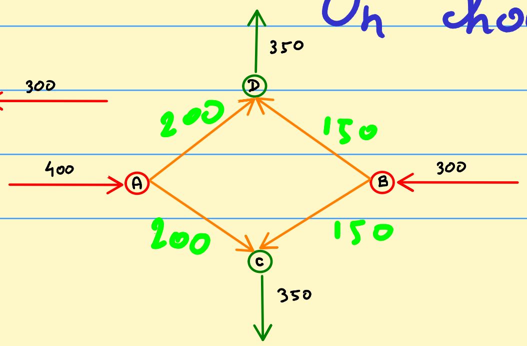
- pas de pivot au second membre $\Rightarrow$ solutions existent
- $\left.\begin{array}{l} \text{3 pivots} \\ \text{4 inconnues} \end{array}\right\}$ ∞ de solutions
- t inconnue libre (pas de pivot)
- x, y, z liées (pivot)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 400 - y = 400 - 350 + t = t + 50 \\ y = 350 - t \\ z = 300 - t \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

← ok $= 0$; $t \in \mathbb{R}$ est quelconque

On choisit t et on calcule les autres (ex $t = 150$)





Présentation tableau

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ z + t = 300 \\ y + t = 350 \\ x + z = 350 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \text{second membre} \\ \end{array}$$

pivot

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 350 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 350 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

pas de pivot ici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 350 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -50 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}$$

pivots

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -50 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_2$$

pivot

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 350 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 300 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 350 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lecture du résultat

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 350 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

→ pas de pivot au second membre : il y a des solutions
→ 3 pivots pour 4 inconnues : ∞ té de solutions
→ pas de pivot en colonne t : inconnue libre
pivots pour x, y et z : inconnues liées

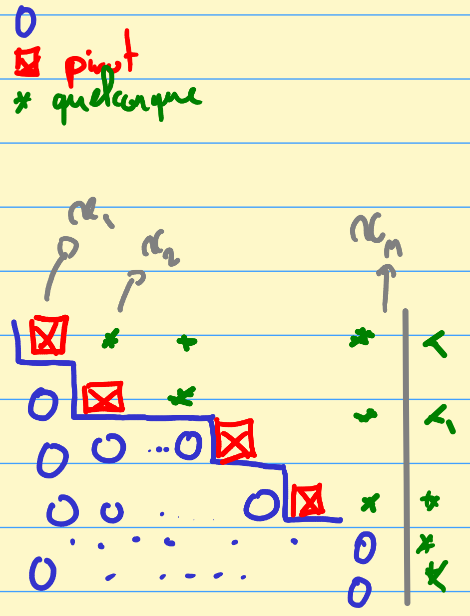
expression des solutions : à partir du système échelonné équivalent

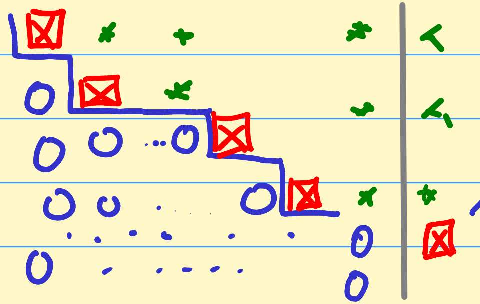
$$\begin{cases} x + y + 0z + 0t = 400 \\ 0x + y + 0z + t = 350 \\ 0x + 0y + z + t = 300 \\ 0x + 0y + 0z + 0t = 0 \end{cases}$$

On écrit $\overbrace{x, y \text{ et } z}^{\text{liées}}$ en fonction de $\overbrace{t}^{\text{libre}}$
(cf diapo 5)

$$\begin{cases} x = t + 50 \\ y = -t + 350 \\ z = -t + 300 \\ t \text{ est quelconque dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

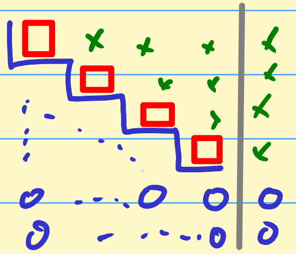
Schéma de lecture





pivot au second membre :

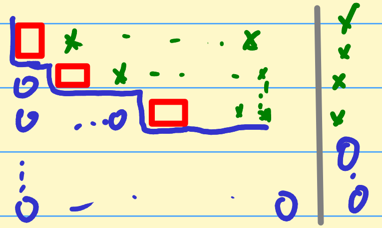
pas de solution



autant de pivots que d'inconnues :

1 unique solution

qui se calcule de bas en haut



moins de pivots que d'inconnues :

∞té de solutions

→ les inconnues sans pivot sont libres

→ ——— avec pivot sont liées

Matrices

Définition : Soit m et n deux entiers non nuls. On appelle **matrice** de **taille** $m \times n$ un tableau de réels à m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}$$

← ligne i

coefficient d'indice ij

colonne j

Notation : $\mathcal{M}_{m \times n}$: ensemble des matrices à m lignes et n colonnes

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\pi^2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}$$

- dimension de A : 3×5
- $a_{32} = \sqrt{2}$, $a_{25} = -1$
- colonne 3 : $\boldsymbol{C}_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\pi^2 \end{pmatrix}$
- ligne 2 : $\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Matrices particulières :

→ Matrice nulle : $\mathbf{0}_{m\times n}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

→ Matrice carrée : $A \in \mathcal{M}_{\underline{n\times n}}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 3 \\ \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & \sqrt{\pi} \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice identité de $\mathcal{M}_{n \times n}$ notée $\mathbb{1}_n$: $\begin{cases} 1 \text{ sur la diagonale} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\mathbb{1}_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{1}_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{1}_n : \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Addition : on peut ajouter 2 matrices de tailles égales en ajoutant les coefficients de mêmes indices

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Règles de calcul formellement identiques à celles de l'addition des réels :

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}$

$\rightarrow \quad (A+B)+C = A + (B+C)$ associativité

$\rightarrow \quad A + 0 = 0 + A = A$ $\quad 0_{m\times n}$ est élément neutre

$\rightarrow \quad A + B = B + A$ commutativité

$\rightarrow$ La matrice notée $-A$ a les coefficients opposés à A

On écrit $B - A$ pour $B + (-A)$

⚠ matrices de mêmes tailles

Multiplication par un nombre réel : λA a les coefficients de A multipliés par le même réel λ

Produit de matrices

nb colonnes de A
= nb lignes de B

$$B = \begin{array}{c|c} & 1 \,..\, q \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c|c} & 1 \,..\, p \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 1 \,..\, q & \\ \hline \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ m \end{matrix} \end{array} = AB$$

$$\underset{\mathcal{M}_{m\times p}}{A} \quad \underset{\mathcal{M}_{p\times q}}{B} = \underset{\mathcal{M}_{m\times q}}{C}$$

$\forall i = 1 \,..\, m$
$\forall j = 1 \,..\, q$

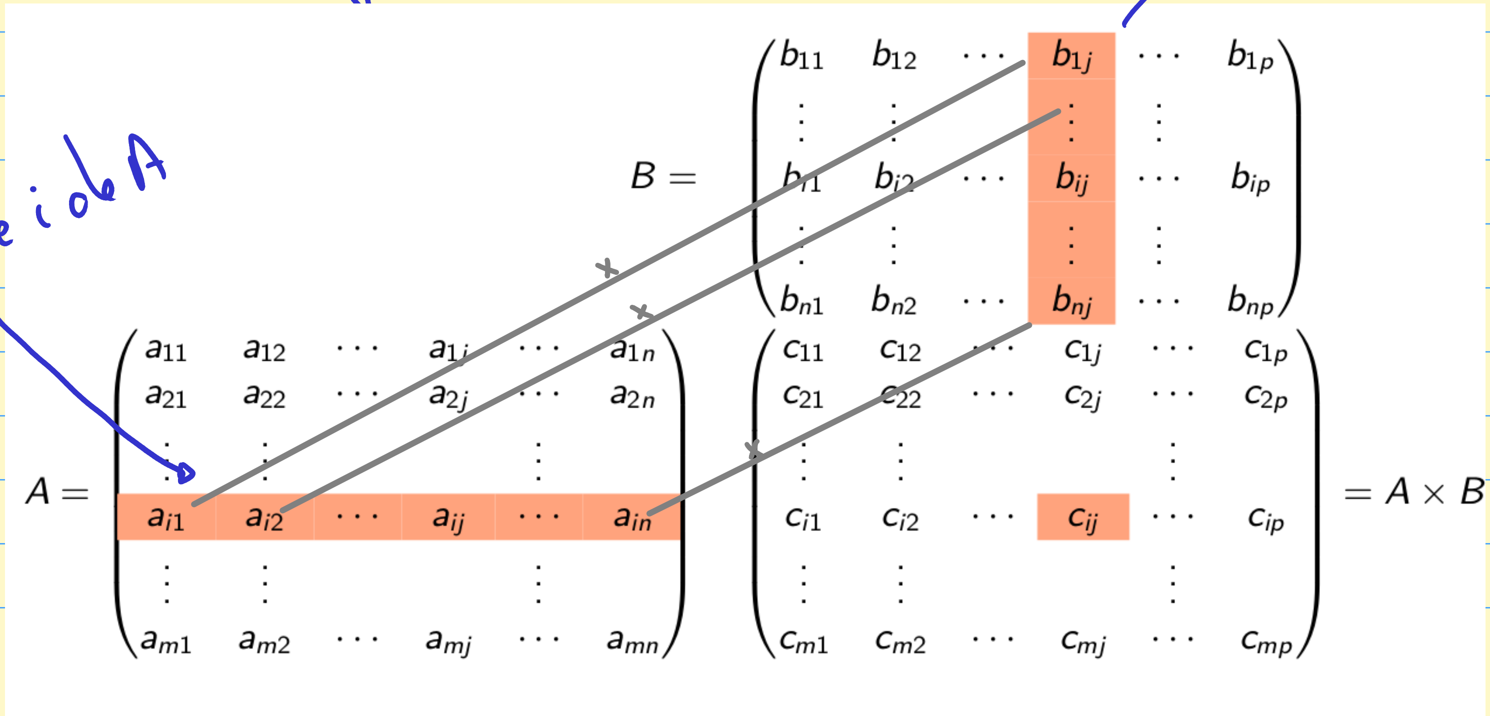
Formule de calcul : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} = c_{ij}$

En pratique, pour calculer c_{ij} :

- → choisir ligne i de A
- → choisir colonne j de B
- → faire le produit terme à terme des 2
- → ajouter tous les résultats.

colonne j de B

ligne i de A



exemple :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A \times B$$

c_{11} : $(1 \times 1) + (1 \times 1) + (-2 \times (-1)) = 4$

c_{12} $(1 \times -1) + (1 \times 2) + (-2 \times 1) = -1$

c_{21} $(0 \times 1) + (1 \times 1) + 1 \times (-1) = 0$

c_{22} $(0 \times (-1)) + (1 \times 2) + (1 \times 1) = 3$

$AB = C$

$\mathcal{M}_{23} \quad \mathcal{M}_{32} \quad \mathcal{M}_{22}$