Méthodes de point fixe

↳ Rappel sur Newton pour $\varphi(x) = 0$ sur $[a ; b]$

$$\begin{cases} x_0 \in [a;b] \\ x_n = f(x_{n-1}) \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad \text{avec } f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$$

Rem : $f(x) = x \implies x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = x \implies -\dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = 0$

$\implies \varphi(x) = 0$

x est un point fixe de f

x est un zéro de φ

Déf : $x \in [a;b]$ est un point fixe de $f \iff f(x) = x$

$x \in [a;b]$ est un zéro de $\varphi \iff \varphi(x) = 0$

Pour Newton, les points fixes de f sont les zéros de φ

Th : soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} x_0 \in [a;b] \\ x_n = f(x_{n-1}) & n\geq 1 \end{cases}$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $\ell = f(\ell)$

Rem : ↳ traduction : si f est continue, la limite est forcément un point fixe de f

↳ On ne dit pas que la suite converge (ni même qu'elle existe)

↳ prouve que si Newton converge, alors la limite est un zéro de φ

Idée des méthodes de point fixe : → trouver f dont les points fixes sont les zéros de φ

→ former $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle converge

Ex : ↳ $\varphi : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^3 + 2x^2 - 1$

↳ $\begin{cases} \varphi(0) = -1 \; ; \; \varphi(1) = 2 \Rightarrow \varphi(0)\varphi(1) < 0 . \\ \varphi \text{ continue car polynôme} \end{cases}$

$\Rightarrow \exists$ une solution à $\varphi(x) = 0$ dans $[0;1]$ (au moins une)

↳ $x^3 + 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 - x^3 \Rightarrow x^2 = \frac{1 - x^3}{2}$

or $\forall x \in [0;1]$; $1 - x^3 > 0$, donc $x = \sqrt{\frac{1-x^3}{2}}$

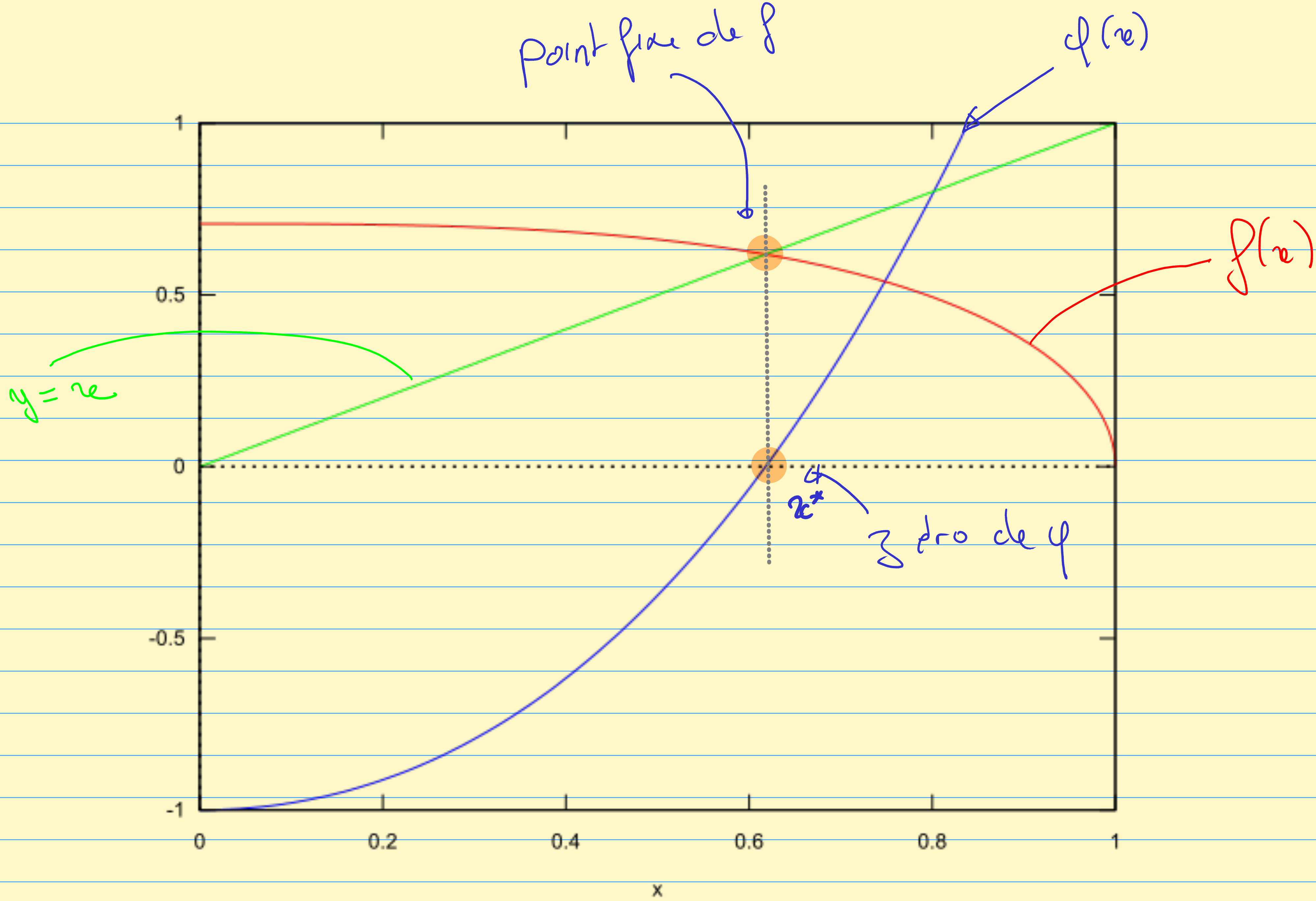
↳ On pose $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{\frac{1-x^3}{2}}$

et on a $f(x) = x \Rightarrow \varphi(x) = 0$

ie les points fixes de f sont les zéros de φ

↳ On pourrait aussi poser $f(x) = \underbrace{x^3 + 2x^2 - 1}_{\varphi(x)} + x$


point fixe de f
φ(x)
f(x)
y = x
x*
zéro de φ
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

On forme la suite

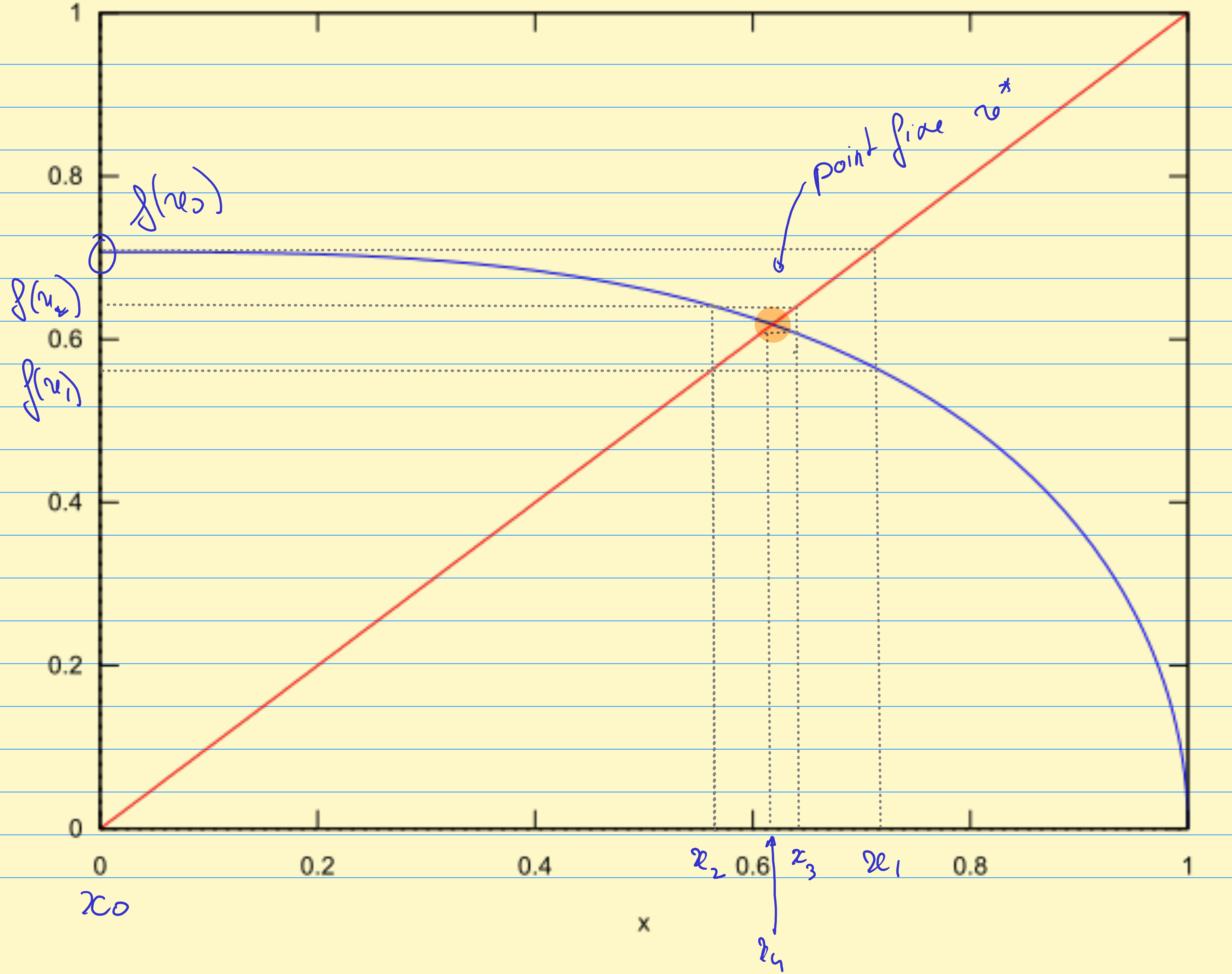
```
x ← 0 ; n ← 0
tant que vrai faire
    n ← n+1
    x ← sqrt((1 - x**3)/2)
    affiche n, x
fin tantque
```

Sortie :

0	0,0.7071
1	0.56853
2	0.63884
3	0.60798
4	0.62260
5	0.61510
6	0.61902
7	0.61758
8	0.61825
9	0.61794
10	0.61808

↳ La suite semble converger

↳ mais pas très vite



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x
point fixe x^*
$f(x_0)$
$f(x_2)$
$f(x_1)$
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4

Rem ↳

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_n = \sqrt{\dfrac{1 - x_{n-1}^3}{2}} & n \geq 1 \end{cases}$$

L'existence de la suite n'est pas garantie

$$x_{n-1} \in [0;1] \overset{?}{\Longrightarrow} x_n \in [0;1]$$

↳ Le programme peut planter à une certaine itération

↳ Il faut de la stabilité

Déf: Soit $f : \begin{array}{l} D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ et $[a;b] \subset D_f$

On dit que $[a;b]$ est stable par f $\Leftrightarrow f([a;b]) \subseteq [a;b]$

Rem : ↳ Si $x \in [a;b]$ stable par f, alors $f(x) \in [a;b]$

↳ Récurrence immédiate :

Si $x_{n-1} \in [a;b]$ stable, alors $x_n = f(x_{n-1}) \in [a,b]$

ie $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_n \in [a;b] \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe

↳ On commencera par rechercher les intervalles stables par f

Exemple : $f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x^3}{2}}$

à titre d'illustration mais pas nécessaire
0 suffirait

↳ f est continue sur $[-1;1]$ } car polynôme
dérivable sur $[-1;1[$ }

pas dérivable en 1

↳ $\forall x \in [-1;1[$, $f'(x) = -\dfrac{3x^2}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x^3}}$

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

↳ Par lecture du TV :

↳ $f([-1;1]) = [0;1] \subseteq [-1;1]$ $\quad$ $[-1;1]$ stable par f

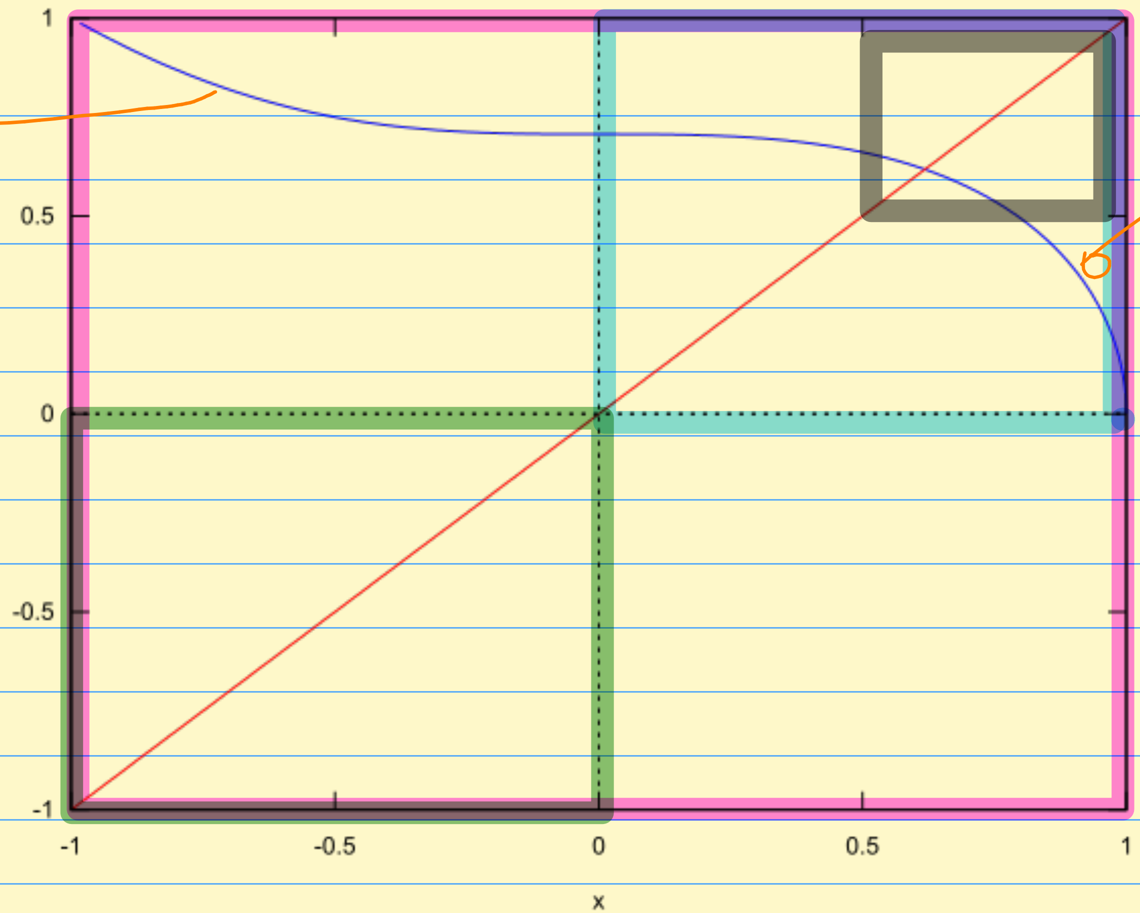
↳ $f([-1;0]) = [\frac{1}{\sqrt{2}};1] \not\subseteq [-1;0]$ $\quad$ $[-1;0]$ pas stable par f

↳ $f([0;1]) = [0;\frac{1}{\sqrt{2}}] \subseteq [0;1]$ $\quad$ $[0;1]$ stable par f

↳ Par lecture graphique : le graphe de f doit être contenu dans le carré $\underset{x}{[a;b]} \times \underset{y}{[a;b]}$

hors du cache vert

hors du cache gris



$[-1;1]$ est stable

$[0;1]$ est stable

$[-1;0]$ n'est pas stable

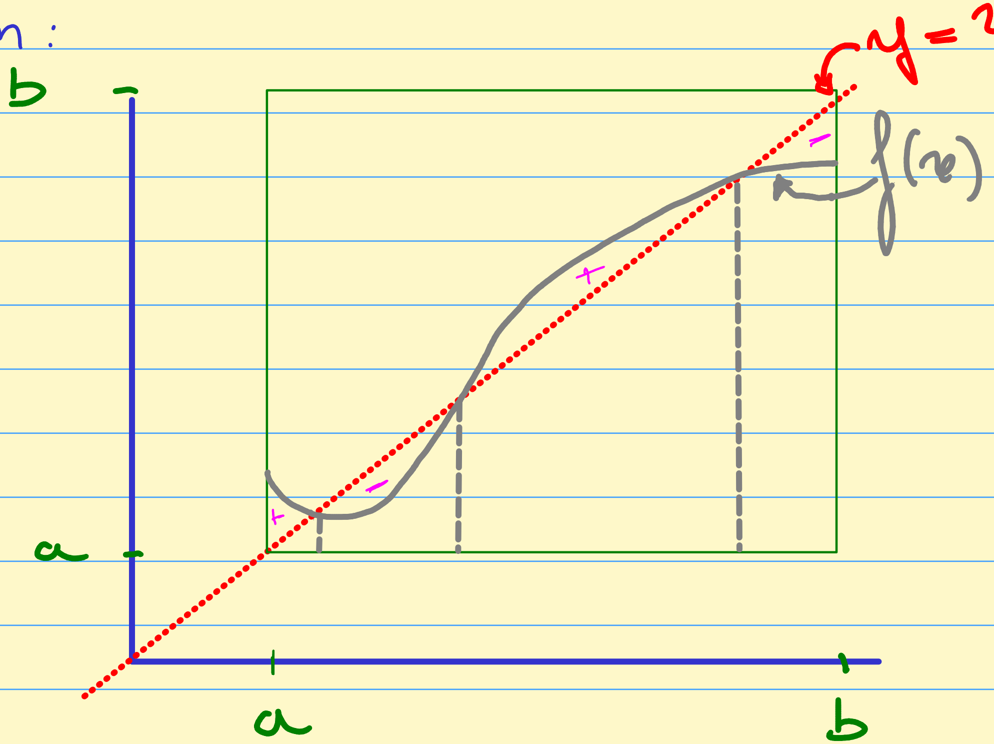
$[\frac{1}{2};1]$ n'est pas stable

Prop : si . f est continue sur $[a;b]$
. $[a;b]$ stable par f

alors, il existe (au moins) un point fixe de f dans $[a;b]$

ie : toute fonction continue sur un intervalle stable admet un point fixe dans cet intervalle

Dem :



$x \in [a;b]$ stable $\Rightarrow a \leq f(x) \leq b$

On pose $g(x) = f(x) - x$

$$\begin{cases} g(a) \geq 0 & \text{car } f(a) \geq a \\ g(b) \leq 0 & \text{car } f(b) \leq b \\ g \text{ est continue sur } [a;b] & (\text{somme}) \end{cases}$$

TVI $\Rightarrow \exists\, x^* \in [a;b]$ tq $g(x) = 0$

Un théorème de convergence avec vitesse géométrique

Soit → f continue sur l'intervalle $[a;b]$

→ $[a;b]$ stable par f

→ f dérivable sur $]a;b[$

→ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $\begin{cases} x_0 \in [a;b] \\ x_n = f(x_{n-1}) & n \geq 1 \end{cases}$

Théorème : Si $\forall x \in]a;b[\ |f'(x)| \leq k$ avec $k < 1$

alors

↳ f admet un unique point fixe x^* (unicité)

↳ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^* (convergence)

↳ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - x^*| \leq k^n |b-a|$ (vitesse)

Rem

↳ existence déjà connue. On rajoute l'unicité grâce à l'hypothèse $|f'(x)| < 1$

↳ la 3ème conclusion implique la deuxième

↳ l'erreur d'approximation $|x_n - x^*|$ est majorée par la suite géométrique
→ de raison k
→ de premier terme $|b-a|$

↳ La condition n'est que suffisante (pas nécessaire)

Schéma d'étude : ↳ trouver f dont les points fixes sont les zéros de φ
↳ déterminer un intervalle stable
↳ majorer la |dérivée| par un nombre < 1
↳ déterminer n pour avoir la précision souhaitée
↳ calculer $x_1, x_2, \dots, x_n$