1) Sampleo de Gibbs

Queremos samplear $(X_x)_{x\in\Omega}$ con ley π. Donde es fácil samplear $\mathbb{P}(X_x \mid (X_\ell)_{\ell\neq x})$:

le asigna +

$$\mathbb{P}(\sigma_x = 1 \mid (\sigma_\ell)_{\ell\neq x}) \propto \exp(-\beta H(\sigma^+))$$
$$\mathbb{P}(\sigma_x = -1 \mid (\sigma_\ell)_{\ell\neq x}) \propto \exp(-\beta H(\sigma^-))$$

donde $\mathbb{P}(\sigma_x = 1 \mid (\sigma_\ell)_{\ell\neq x}) = \mathbb{P}(\sigma^+ \mid (\sigma_\ell)_{\ell\neq x})$

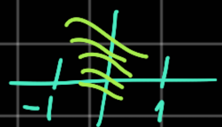
La ley de σ_x condicional a $(\sigma_\ell)_{\ell\neq x}$ es una Bernoulli de parámetro p :

con la que asigno spin -1 ó 1

$$p = \frac{\exp(-\beta H(\sigma^+))}{\exp(-\beta H(\sigma^+)) + \exp(-\beta H(\sigma^-))}$$

$$= \frac{\exp(\beta \sum_{\ell\sim x} \sigma(\ell))}{\exp(\beta\sum_{\ell\sim x}\sigma(\ell)) + \exp(-\beta\sum_{\ell\sim x}\sigma(\ell))}$$

Couplings from the past puede complicar paso de -1 a 1 si eso es grande



$$= \left.\frac{e^{\beta\sum_{\ell\sim x}\sigma(\ell)}}{2\cosh(\beta\sum_{\ell\sim x}\sigma(\ell))}\right\}\text{ facilita el sampleo.}$$

Proposición : entonces π es la medida estacionaria de la siguiente CdM :

1) Escoje $x \in \Omega$

2) Independiente de todo lo anterior samplea
$X_x \sim \mathbb{P}(\cdot \mid (X_\ell)_{\ell\neq x})$ ← para esto comienzo sampleando la marginal y luego □ ...

(*) Dinámica de Glauber ✓ □

dem: Trabalenguas □

2) Simulated Annealing (muy aplicado en realidad)

- de los pocos algoritmos que llegan a mínimos exactos sin hipótesis.
- Queremos minimizar $H(\sigma)$. eso se obtiene de:

$$\boxed{\mathbb{P}_\beta \underset{\beta\to\infty}{\nearrow} \text{medida invariante sobre los minimizantes de } H(\sigma)}$$

Proposición: Tenemos que $\mathbb{P}_\beta \xrightarrow{\beta\to\infty} \lambda$ donde λ es la medida uniforme sobre $\text{Arg} := \{\sigma : H(\sigma) = \min_{\lambda} H(\lambda)\}$.
Más aún:

$$\mathbb{E}_\beta[H(\sigma)] \longrightarrow \min_{\lambda} H(\lambda) \quad \left(\text{ie}: H(\sigma_\beta) \xrightarrow{\text{ley}} \min_{\lambda} H(\lambda)\right)$$

dem: Definamos $\Delta := \min_{\lambda \notin \text{Arg}} H(\lambda) - \min H(\lambda)$. Fijemos un σ que no sea mínimo ($\sigma \notin \text{Arg}$):

$$\mathbb{P}(\sigma = u) = \frac{\exp(-\beta H(u))}{\sum_{\lambda} \exp(-\beta H(\lambda))} \leq \frac{\exp(-\beta H(u))}{\exp(-\beta H(a))} \quad \text{con desin } a \in \text{Arg}$$

$\leq \exp(-\beta\Delta) \xrightarrow{\beta \nearrow \infty} 0$

$\therefore \mathbb{P}(\sigma \notin A_{rg}) \leq \#(A_{rg})^c \cdot \exp(-\beta\Delta) \xrightarrow{\beta \to \infty} 0 \quad \blacksquare$

ahora en espacio contimo ...

si $\mathbb{P}_\beta(d\sigma) \propto \exp(-\beta H(\sigma))\mu(d\sigma)$ con $H(\cdot)$ contimo acotado

Aqui tenemos que :

$$\boxed{H(\sigma_\beta) \xrightarrow{\text{ley}} \inf_{\eta} H(\eta)}$$

realmente es: $\operatorname{ess\,inf}_{\eta} H(\eta) = \|-H\|_\infty$ en $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

esto pues subdem : Para $\Delta > 0$:

Sea $B = \{ \eta : H(\eta) \geq \Delta + \operatorname{ess\,inf}_{\alpha} H(\alpha) \}$

$\Rightarrow \mu(B) \leq 1 - \varepsilon$ // pues :

$$\mathbb{P}_\beta(B) = \frac{\int \exp(-\beta H(\sigma))\mu(d\sigma)}{\int\int \exp(-\beta H(\sigma))\mu(d\sigma)}$$

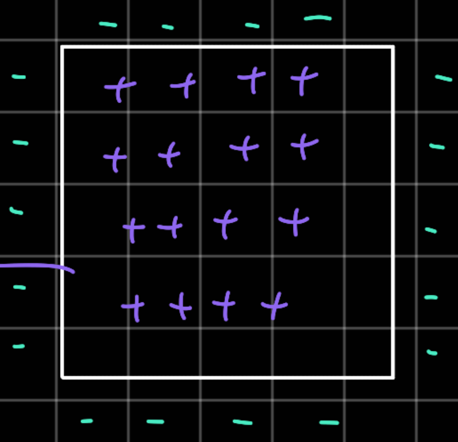
$$\leq \frac{\exp(-\beta(\Delta + \operatorname{ess\,inf})\mu(d\sigma)}{\int_{(B_{\Delta/2})^c} \exp(-\beta H(\sigma))\mu(d\sigma)}$$

$$\leq \mu(B_{\Delta/2}^c) \cdot \exp(-\beta(\Delta/2 + \operatorname{ess\,inf}))$$

$$\leq \exp(-\beta(\Delta/2)) \xrightarrow{\beta \nearrow \infty} 0 \quad \blacksquare$$

(B) Con esto obtengo ínfimos de funciones continuas, pero ¿cómo lo sampleo? $\Rightarrow$ Simulated-Annealing.

ej: Aplicación en metalurgia tq si modifico rápido la T° ($\beta \to \infty$ ó $T^\circ \to 0$ rápido) $\Rightarrow$ dependiendo de la velocidad llego a ciertos mínimos:



si voy muy rápido con el $\beta \to \infty$ podrían no cambiar, por lo que hay que ir con cuidado calentando.

Idea simulated Annealing

1) Escoger condición inicial x_0

2) Escoger $\beta_n \nearrow \infty$

3) Para cada n realizar un paso de (P_{β_n}) cdM con medida estacionaria $\mathbb{P}_{\beta_n}(\sigma_n)$ que ahora no es homogenea

Primera idea:

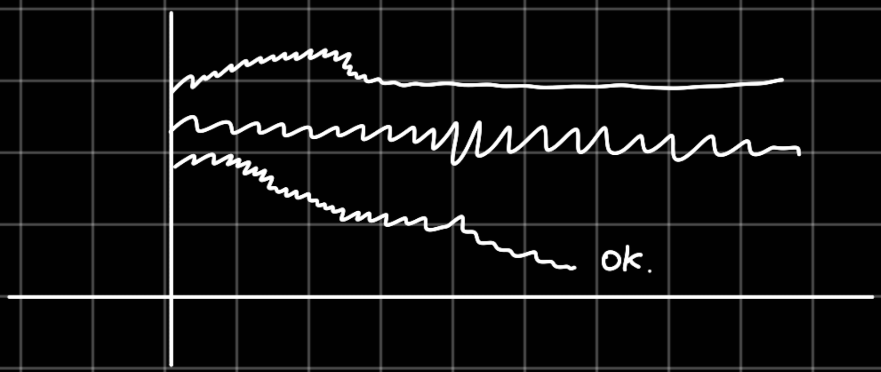
$X_{n,m} \xrightarrow[m \to \infty]{} X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} X \Rightarrow \exists (m_n)$ tq si voy lo suff. lento me voy acercando a la invariante: $X_{n,m_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} X$

$\therefore \exists (\beta_n)_n$ suff. lento: $\sigma_n \xrightarrow{\text{ley}} \text{Unif}(\text{Arg})$

|| Teorema : Basta tomar $\beta_n = C \cdot \log(1+n)$

en la Práctica: Usamos $\beta_n \nearrow \infty$ más rápido y graficamos el valor de $H(\sigma_n)$.

- Muy rápido podría verse mal si voy muy rápido:



- Con esto obtengo métodos para, almenos, hallar candidatos a mínimos