Elaborato di
Calcolo Numerico
Anno Accademico 2016/2017

Gabriele Puliti - 5300140 - *gabriele.puliti@stud.unifi.it*
Luca Passaretta - -

August 29, 2017

Capitoli

1 Capitolo 1

1.1 esercizio 1

Sapendo che il metodo iterativo è convergente a x^* allora per definizione si ha:

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^*$$

inoltre per definizione di Φ si calcola il limite:

$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = x^*$$

infine ipotizzando che la funzione Φ sia uniformemente continua è possibile calcolare il limite:

$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\lim_{k\to+\infty} x_k) = \Phi(x^*)$$

dai due limiti si ha la tesi:

$$\Phi(x^*) = x^*$$

1.2 esercizio 2

Dal momento che le variabili intere di 2 byte in Fortran vengono gestite in Modulo e Segno, la variabile `numero`, inizializzata con

```
integer*2 numero
```

varia tra $-32768 \leq \texttt{numero} \leq 32767$ $(-2^{15} \leq \texttt{numero} \leq 2^{15}-1)$. Durante la terza iterazione del primo ciclo for si arriva al valore massimo rappresentabile tramite gli interi a 2 byte, alla quarta iterazione si avrà quindi la somma del `numero` in modulo e segno:

$$(32767)_{10} + (1)_{10} = (0111111111111111)_{2,MS} + (0000000000000001)_{2,MS} =$$

$$= (1000000000000000)_{2,MS} = (-32768)_{10}$$

Nel secondo ciclo for durante la quinta iterazione, al `numero` viene sottratto 1:

$$(-32768)_{10} - (1)_{10} = (1000000000000000)_{2,MS} - (0000000000000001)_{2,MS} =$$

$$= (0111111111111111)_{2,MS} = (32767)_{10}$$

Da cui si spiega l'output del codice.

1.3 esercizio 3

Per definizione si ha che la precisione di macchina u per arrotondamento e' data da:

$$u = \frac{1}{2} b^{1-m}$$

Se $b = 8, m = 5$ si ha:

$$u = \frac{1}{2} \cdot 8^{1-5} = \frac{1}{2} \cdot 8^{-4} = 1,2 \cdot 10^{-4}$$

1.4 esercizio 4

Il codice seguente:

```
format long e;

h=zeros(12,1);
f=zeros(12,1);

for i=1:12
    h(i)= power(10,-i);
end

for j=1:12
    f(j)=lim(0,v(j));
end

f

function p=lim(x,y)
    p=(exp(x+y) - exp(x))/y;
end
```

restituisce questo risultato (assumendo che $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$):

h	$\Psi_h(0)$
10^{-1}	1.051709180756477e+00
10^{-2}	1.005016708416795e+00
10^{-3}	1.000500166708385e+00
10^{-4}	1.000050001667141e+00
10^{-5}	1.000005000006965e+00
10^{-6}	1.000000499962184e+00
10^{-7}	1.000000049433680e+00
10^{-8}	9.999999939225290e-01
10^{-9}	1.000000082740371e+00
10^{-10}	1.000000082740371e+00
10^{-11}	1.000000082740371e+00
10^{-12}	1.000088900582341e+00

si può notare che al diminuire del valore h, la funzione $\Psi_h(0)$ approssima sempre meglio il valore $f'(0)$, come si può vedere dal plot 1.

1.5 esercizio 5

Per dimostrare le due uguaglianze è necessario sviluppare in serie di taylor $f(x)$ fino al secondo ordine:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2 f''(x_0)}{2} + O((x - x_0)^2)$$

Da cui possiamo sostituire con i valori di $x = x + h$ e $x = x - h$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2 f''(x_0)}{2} + O(h^2)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2 f''(x_0)}{2} + O(h^2)$$

Andando a sostituire questi valori si ottiene, nel primo caso:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + h)}{2h} =$$

$$= \frac{(f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2 f''(x_0)}{2} + O(h^2)) - (f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2 f''(x_0)}{2} + O(h^2))}{2h} =$$

$$= \frac{2hf'(x_0) + O(h^2)}{2h} = f'(x_0) + O(h^2)$$

nel secondo caso:

$$\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)-f(x_0+h)}{h^2}=$$

$$=\frac{f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2f''(x_0)}{2}+O(h^2)-2f(x_0)+f(x_0)-hf'(x_0)+\frac{h^2f''(x_0)}{2}+O(h^2)}{h^2}=$$

$$=\frac{h^2f''(x_0)+O(h^2)}{h^2}=f''(x_0)+O(h^2)$$

Abbiamo quindi dimostrato che:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0+h)}{2h}=f'(x_0)+O(h^2)$$

$$\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)-f(x_0+h)}{h^2}=f''(x_0)+O(h^2)$$

1.6 esercizio 6

2 Grafici

2.1 esercizio 4

Figure 1: Esercizio 1.4