

Fortgeschrittenenpraktikum -

Versuch 16: $\gamma - \gamma$ -Winkelkorrelationen und
Koinzidenztechnik

Gruppennummer: 2b

Versuchsassistent: Matthias Kleiner

Teilnehmer 1: Laura Gans-Bartl

Teilnehmer 2: Woo-Seok Yim

Durchgeführt am: 9. Dezember 2024

Abgabedatum: 30. Dezember 2024
24. Januar 2025

Versuchsprotokoll - 16: Gammaquanten-Koinzidenzspektroskopie

Laura Gans-Bartl, Woo-Seok Yim

Abstract

Mithilfe der Gammaquantenspektroskopie können koinzidente Gammaquanten aus Kernzerfällen selektiert werden. In diesem Versuch werden Kernzerfälle von $^{22}\text{Natrium}$ und $^{60}\text{Cobalt}$ untersucht. Als Detektoren werden Szintillationsdetektoren verwendet, bestehend aus Natriumiodid (NaI)-Kristallen mit Thallium (Tl)-Dotierung. Durch die Betrachtung der Winkelabhängigkeit der ausgesendeten Gammaquanten lassen sich Aussagen über die Art der Kernzerfälle treffen.

Die Durchführung ist unterteilt in zwei Abschnitten: die Kalibration und die Koinzidenzspektroskopie von Natrium und Cobalt. Für die Kalibration werden die vollen Energiespektren der Quellen sowie die Zeitspektren bei zwei Verzögerungseinstellungen des Timing Single Channel Analysers (TSCA), 0ns und 96ns , erfasst. Zu den Spektren werden passende Verteilungsfunktionen gefittet; in diesem Versuch verwenden wir zum numerischen Fit die Pythonbibliotheken `emcee` für multimodale Verteilungen und `scipy.optimize` für die unimodale Gaußverteilung.

Ziel der Koinzidenzspektroskopie ist es, die Kernzerfälle sowie die Winkelkorrelationen, die aus der Theorie bekannt sind, experimentell zu bestätigen. Aus diesem Versuch lernen wir auch über die Wichtigkeit der Zeitauflösung der gemessenen Signale am Gerät.

Contents

I. Einführung	4
II. Theoretischer Hintergrund	4
A. Kernzerfälle	4
B. Winkelkorrelation	6
C. Interaktionen und Detektion des Gammaquants	7
D. Koinzidenzspektroskopie	9
III. Signalverarbeitung	11
IV. Durchführung	12
A. Energiegesamtspektren; Kalibration Kanallage-Energie	12
B. Time-delay Spektren, Kalibration Kanallage-Zeit	19
C. Koinzidenzmessungen	22
V. Diskussion	26
VI. Fazit	27
VII. Quellen	28
VIII. Anhang	28

I Einführung

Kaskadenzerfälle – das sind Zerfälle $A \rightarrow BC \rightarrow BXY$ mit einem temporären, metastabilen Zwischenzustand – gehören zu den physikalischen Forschungsthemen mit weitreichenden Implikationen (Boyanovsky & Lello [1]). Die von Boyanovsky & Lello genannten Beispiele beschränken sich auf teilchenphysikalische Untersuchungen wie z.B. von B-Mesonzerfällen, die von der Large Hadron Collider beauty (LHCb) Collaboration durchgeführt wird [2]. Es wird vermutet, dass Kaskadenzerfälle ein grundlegender Mechanismus hinter Paritätsverletzungen sein könnten, was wiederum Implikationen für das Standardmodell der Physik hat.

Ein Beispiel aus der Kernphysik ist die Detektion von Radionuklidzerfällen mittels Koinzidenzmessung von Sundèn et al. [3]. Die Detektion wird für das Kontrollieren von Atomwaffentests verwendet und trägt somit eine besondere geopolitische Bedeutung.

Beide Beispiele haben die Gemeinsamkeit, dass präzise Messungen gewährleistet werden müssen: Im Falle von LHCb erfolgt die Detektion von Teilchen mit einem einarmigen Spektrometer und einem high-precision tracking system [4], während bei Koinzidenzmessungen eine hohe Zeitauflösung und das Minimieren von Hintergrundaktivitäten von höchster Priorität sind.

Das Ziel dieses Versuchs ist es, von der Theorie erwartete Koinzidenzen von Gammaquanten aus Kernzerfällen nachzuweisen und die Genauigkeit der Messmethode zu untersuchen.

II Theoretischer Hintergrund

A. Kernzerfälle

Atome bestehen aus Nukleonen (Protonen und Neutronen) und Elektronen. Die Atomsorten ^{22}Na und ^{60}Co , die wir betrachten, werden auch als radioaktive Nuklide bezeichnet, und geben an, dass ihre Zusammensetzung instabil ist und sie zu kleineren Teilchen zerfallen. Dabei ist die Summe der Nukleonenzahl A (auch Massezahl genannt) der entstandenen Teilchen gleich der des zerfallenen Teilchens.

Es gibt verschiedene Zerfallsarten; α , β^+ , β^- und γ -Zerfall. Bei einem α -Zerfall sendet das Atom ein α -Teilchen aus, was einem ^4He -Teilchen entspricht, und seine Massezahl verringert sich auf $A-4$. Bei den β -Zerfällen wird entweder ein Neutron durch Aussenden eines Elektrons (β^-) und Antineutrinos ($\bar{\nu}$) in ein Proton umgewandelt, oder ein Proton in ein Neutron durch Aussenden eines Positrons (β^+) und Neutrinos (ν). Bei den β -Zerfällen ändert sich die Massezahl nicht.

Wenn das entstandene Teilchen sich in einem angeregten Zustand befindet, geht es zum Grundzustand durch Emission von Photonen (γ).

Radionuklide unterscheiden sich in der Art und Reihenfolge dieser Zerfälle. Ihre Zerfälle kann man mit einem Zerfallsschema darstellen. Die Zerfallsschemata in Abbildung 1 und Abbildung 2 sind folgendermaßen zu verstehen: rot mit Prozent angegeben sind die Wahrscheinlichkeiten der Zerfallsart; blau angegeben sind die γ -Zerfälle mit jeweils Energie in keV und Intensität/Wahrscheinlichkeit in

Prozent, und in schwarz sind die Energieniveaus in keV.

Natrium Zerfallsschema

Das Zerfallsschema von Natrium ist in Abbildung 1 zu sehen. ^{22}Na zerfällt zunächst durch β^+ -Zerfall zu einem angeregten Neonatom, was wiederum durch das Aussenden eines 1274,5keV γ -Quants zum stabilen Neon zerfällt. Das besondere bei diesem Zerfall ist, dass das ausgesendete Positron mit einem Elektron annihilieren kann. Bei dieser Annihilation werden zwei entgegengesetzte γ -Quanten mit jeweils 511keV ausgesendet, welche zusammen der Ruheenergie des Elektron-Positron Pairs entsprechen. Da diese Annihilation überwiegend aus einem ruhenden System hervorgeht [5], müssen die Ausrichtungen der beiden Gammaquanten gemäß der Impulserhaltung entgegengesetzt sein.

Das Zerfallsschema in Abbildung 1 zeigt zudem, dass zu 0.056% die Möglichkeit besteht, dass das Natriumatom direkt durch einen einzigen β^+ -Zerfall zu stabiles Neon zerfallen kann. Aufgrund der niedrigen Wahrscheinlichkeit ist dieser Zerfall im Versuch nicht zu erwarten.

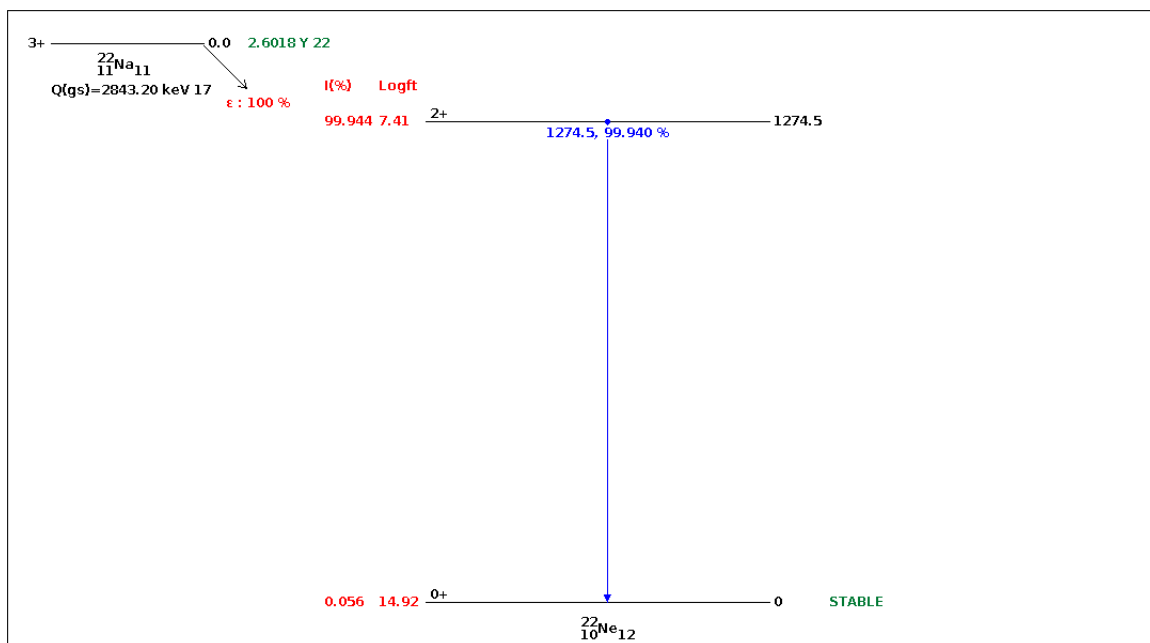


Figure 1: Zerfallsschema ^{22}Na , aus <https://www.nndc.bnl.gov/nudat3>[6]

Cobalt Zerfallsschema

Das Zerfallsschema von Cobalt wird in Abbildung 2 dargestellt. Cobalt zerfällt zunächst durch einen β^- -Zerfall zu einem angeregten Nickelatom. Dieses angeregte Nickelatom geht eine Reihe an γ -Zerfällen durch, was auch als Kaskadenzerfall bezeichnet wird. Wir beschränken uns hier ebenfalls auf die Zerfälle mit höchster Wahrscheinlichkeit; wie Abbildung 2 zeigt, sind die Wahrscheinlichkeiten anderer Zerfälle vernachlässigbar klein. Die zu betrachtende Gammazerfallskaskade besteht aus einem 1173.2keV-Gammazerfall und einem 1332.5keV-Gammazerfall.

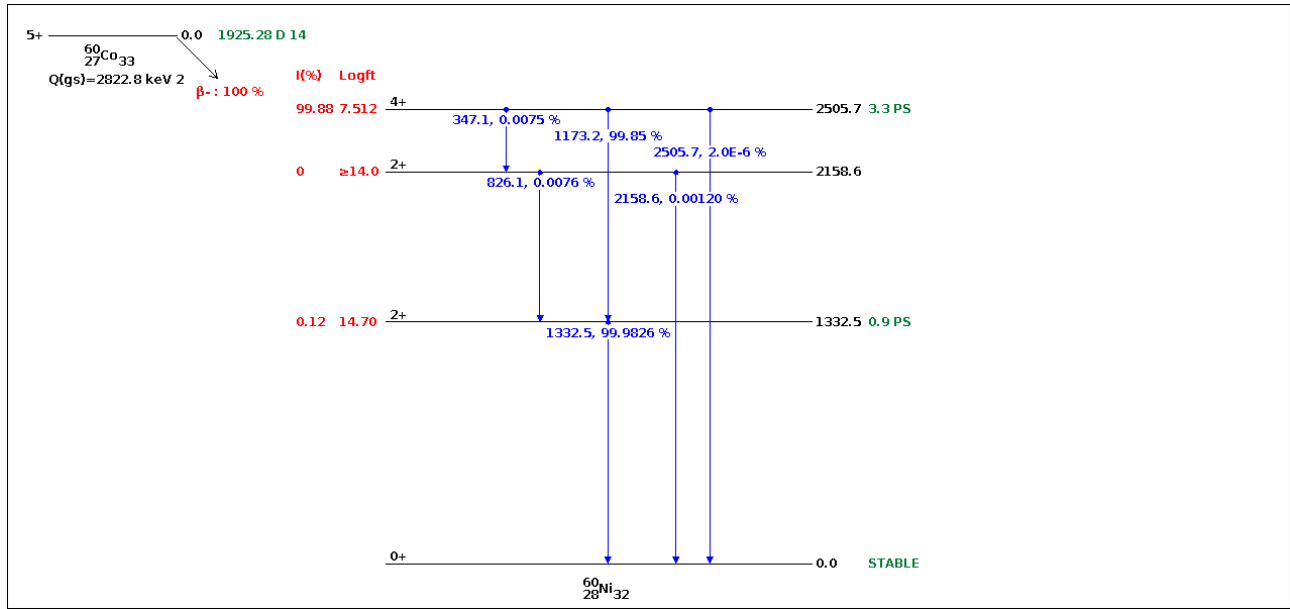


Figure 2: Zerfallsschema ^{60}Co , aus <https://www.nndc.bnl.gov/nudat3>[7]

B. Winkelkorrelation

Während die Winkelabhängigkeit der Gammaquanten bei der Annihilationsstrahlung eindeutig ist (180°), besteht für die Winkelabhängigkeit der Gammaquanten des Kaskadenzerfalls eine winkelabhängige Intensitätsverteilung $W(\vartheta)$ [5]:

$$W(\vartheta) = 1 + A_2 P_2(\cos(\vartheta)) + A_4 P_4(\cos(\vartheta)) \quad (\text{II.1})$$

$$P_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2(\vartheta) - 1)$$

$$P_4 = \frac{1}{8} (35 \cos^4(\vartheta) - 30 \cos^2(\vartheta) + 3)$$

welche aus der Multipolentwicklung der elektromagnetischen Strahlung hervorgeht. Hier stellen P_k die Legendrepolynome k -ter Ordnung dar, während die Koeffizienten A_k von den Spins der Energieniveaus und dem Mischungsverhältnis des Multipols abhängen. In unserem Fall der 4-2-0 Kaskade nehmen wir an, dass es keine Mischterme gibt, und die Koeffizienten direkt von der Tabelle der Winkelkorrelationskoeffizienten F_k (Tabelle I) übernommen werden.

Für die Berechnung der Winkelverteilungsfunktion des 4-2-0 Kaskadenzerfalls folgt dann [5]:

$$W(\vartheta) = 1 + F_2(2, 4, 2, 2) F_2(2, 0, 2, 2) P_2(\vartheta) + F_4(2, 4, 2, 2) F_4(2, 0, 2, 2) P_4(\vartheta) \quad (\text{II.2})$$

$$W(\vartheta) = 1 + 0.1020 P_2(\vartheta) + 0.009087 P_4(\vartheta).$$

Die Winkelkorrelationen verschiedener Kaskadenzerfälle können dann gegen den Winkel aufgetragen werden, wie in Abbildung 3 dargestellt. Wir erkennen hierbei, dass es für den 4-2-0 Kaskadenzerfall einen "sweet-spot" Winkel gibt, bei der $W(\vartheta) = 1$ beträgt. Dieser Winkel liegt ungefähr bei 55° ,

		$F_2(I, I', L = 1, L' = 1)$	$F_2(1, 2)$	$F_2(2, 2)$	$F_4(2, 2)$	$F_4(2, 3)$	$F_4(2, 4)$
I	I'						
1	0	0.7017					
	1	-0.3536	-1.0607	-0.3536			
	2	0.0707	0.4743	0.3536			
2	0			-0.5976	-1.0690		
	1	-0.3354	-0.9354	-0.2988	0.7127	0.9960	0.0891
	2	-0.4183	-0.6124	0.1281	-0.3054	-0.7986	-0.1336
	3	0.1195	0.6547	0.3415	0.0764	0.3260	0.0891
	4			-0.1707	-0.0085	-0.0627	-0.0297
4	2			-0.4477	-0.3044	0.9004	-0.0484
	3	0.3134	-0.9402	-0.0448	0.6088	-0.3035	-0.1013
	4	-0.4387	-0.3354	0.2646	-0.4981	-0.6139	0.0132

Table I: Koeffizienten der Winkelverteilungsfunktion. Aus [5]

genau berechnet liegt er bei 53.28° . Dieser "sweet-spot" Winkel wird später für die Berechnung der Zählrate und der Quellstärke wichtig sein. Näheres dazu siehe II D.

C. Interaktionen und Detektion des Gammaquants

In der Gammaspektroskopie betrachten wir die ausgesendeten Gammaquanten aus der Annihilationsstrahlung und aus dem γ -Zerfall von ^{22}Na , sowie die Gammaquanten aus der Zerfallskaskade von ^{60}Co . Im Allgemeinen interagieren diese Photonen sowohl als Teilchen (Bsp. Photoeffekt, Comptonstreuung) als auch als Welle (Bsp. Interferenz) mit der Natur; Für diesen Versuch ist der Gammaquant als interagierendes Teilchen relevant. Im Folgenden wird betrachtet, wie ein solcher Gammaquant mit einem Detektor auf atomarer Ebene interagiert. Wie im Abstract beschrieben, wird ein Szintillationsdetektor aus NaI-Kristallen mit Tl-Dotierung verwendet.

Photoeffekt und Tl-Dotierung

Der Photoeffekt beschreibt, wie ein Elektron die Energie des Gammaquants absorbiert und in einem angeregten Zustand geht. Die Elektronen stammen von den NaI-Kristallen des Szintillationsdetektors. Dieses angeregte Elektron besetzt ein höheres Energieniveau und verlässt es wieder, entweder durch die Verteilung der Gammastrahlenergie über die umgebenen Elektronen, oder durch das Besetzen des leeren Energieniveaus durch ein anderes, höherenergetisches Sekundärelektron. Im letzteren Fall wird Röntgenstrahlung freigesetzt, was von der Energie her schwächer als die Gammastrahlung ist, trotzdem genug stark ist, um weitere Elektronen anzuregen. Somit entsteht ein Kreislauf, bis die letzten resultierenden Photonen nicht genug Energie für weitere Anregungen besitzen. Dies bedeutet, dass nur diese letzten Photonen den Detektor durchqueren, an der Photokathode ankommen und mit dem Photomultiplier (PMT) als Signal erkannt werden, während jegliche Photonen, die während des Kreislaufs ausgesendet werden, nur zum Kreislauf beitragen und nicht als Signal eingehen. Um die

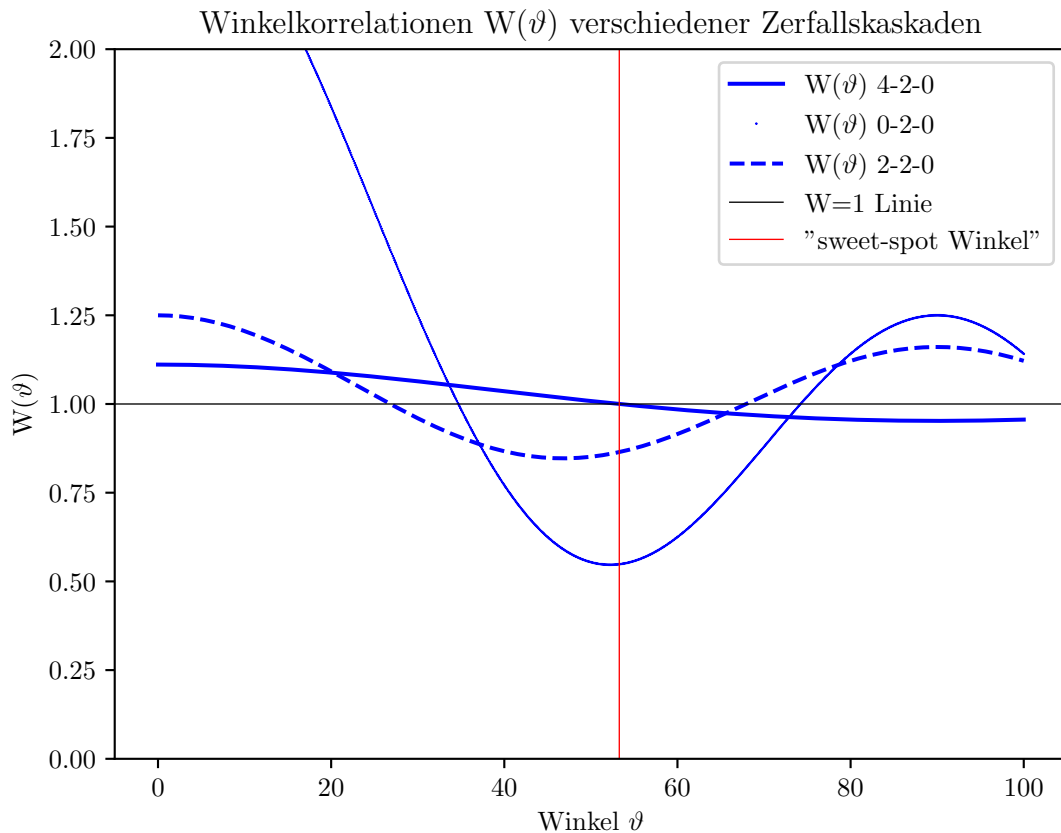


Figure 3: Winkelkorrelationsfunktion für verschiedene Zerfallskaskaden. Hergestellt mit matplotlib

Zahl der signalgebenden Photonen und somit die Signalstärke zu erhöhen, werden die NaI-Kristalle mit Tl dotiert, was zu einer Einführung mehrerer zwischenliegender Energieniveaus führt. Die Elektronen, die sich zwischen diesen Niveaus bewegen, senden Photonen aus, die bereits zu wenig Energie für weitere Anregungen besitzen, und somit ohne den Durchgang des Kreislaufs direkt zur Photokathode ankommen.

Compton-Effekt

Der Compton-Effekt beschreibt den Impulsstoß zwischen Photon und Elektron. Beim Stoß absorbiert das Elektron einen Teil der Photonenergie, wobei die Menge der Energie vom Winkel zwischen eingehenden Photon und Elektron abhängt:

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m \cdot c} (1 - \cos(\vartheta)),$$

wobei λ die Wellenlänge des eingehenden Photons und λ' die Energie des reflektierten Photons angibt. Die Reflexion ist somit bei 180° maximal, bei 0° minimal. Photonen, die durch die Comptonstreuung

vom Detektor reflektiert werden, können bei günstig liegendem Winkel den gegenüberliegenden Detektor erreichen und dort als Signal absorbiert werden. Wie wir bei den Energiespektren sehen werden, ist dieser Compton-Effekt für kleinere Peaks bei mittleren Energien verantwortlich.

Signalgebung

Wie beim Photoeffekt besprochen, kommen die niederenergetischen Photonen an der Photokathode an. Diese passieren einen Sekundärelektronenvervielfacher und lösen freie Elektronen heraus. Die freien Elektronen werden durch eine Elektrode fokussiert und auf eine Dynode beschleunigt [5]. Die beschleunigten Elektronen stoßen auf weitere Elektronen und lösen sie wiederum heraus, bis all diese Elektronen an der Anode ankommen und ein elektrisches Signal erzeugen. [5]

D. Koinzidenzspektroskopie

Verteilungsspektren der Signale

Eine dezidierte Betrachtung der statistischen Natur der Zählrate ist in [8] Kapitel 5, *Statistics of Counting* zu finden, an der wir uns für die grobe Überlegung orientieren. Die für die Praxis wichtigen Formeln der Zählrate, Quellstärke und Winkelkorrelation sind von der Versuchsanleitung [5] übernommen. Zweck der statistischen Betrachtung ist es, kurz zu beschreiben, welche Funktionen wir für die Parametrisierung der Energiespektren verwendet haben und warum. Auch könnte die statistische Betrachtung für das Parametrisieren der "Hintergrundsstrahlung" nützlich sein, die in diesem Versuch nicht auf theoretisch fester Basis durchgeführt wurde (Es wurde eine exponentielle oder lognormale Verteilung angenommen).

Die Anzahl an Signalen, die vom Detektor weiterverarbeitet werden, hängt von der Zahl der Photonen ab, die Zahl der Photonen wiederum von der Zerfallsrate Q des Atoms:

$$Q = \frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad (\text{II.3})$$

mit der Anzahl an Atomen N und der Zerfallskonstante λ . Das Auftreten eines Zerfalls ist diskret, vom anderen Zerfall unabhängig und frei von quantenmechanischen Interaktionen, weshalb wir gemäß Gilmore *et al.* annehmen können, dass die Zerfallswahrscheinlichkeit binomial verteilt ist:

$$P_b(n) = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n}, \quad (\text{II.4})$$

welche die bekannte Formel der Binomialverteilung für N Tupel (Gesamtzahl), n Ereignissen (Zerfälle) und den Einzelfallwahrscheinlichkeiten p ist.

Eine Näherung der Binomialverteilung für unbekannte N ist die Poissonverteilung:

$$P_p(n) = \frac{\mu^n(n)}{n!} e^{-\mu} \quad (\text{II.5})$$

mit $\mu(n)$ dem Erwartungswert. Diese Verteilung geht für eine große Zahl an Ereignissen zur Normalverteilung über:

$$P_N(x) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{II.6})$$

mit μ dem Erwartungswert und σ der Standardabweichung.

Für Verteilungen von positiven Zahlen kann statt der Normalverteilung die lognormale Verteilung verwendet werden:

$$P_{\log n}(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (\text{II.7})$$

Zählrate, Quellstärke

Die Zählrate eines Detektors setzt sich aus der Quellstärke/Zerfallsrate Q , dem Raumwinkel w und der Ansprechempfindlichkeit ϵ des Detektors zusammen:

$$\begin{aligned} Z &= \epsilon w Q \\ w &= \frac{f}{4\pi r^2}, \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

wobei f die Detektorstirnfläche und r der Abstand zwischen Detektor und Quelle ist.

Eine Koinzidenz besteht, wenn die Signale zweier Detektoren innerhalb eines Zeitfensters sind. Beim Beispiel der Vernichtungsstrahlung sollte der zeitliche Abstand der beiden Gammaquanten (bei gleichem Abstand zu ihrem jeweiligen Detektor) minimal sein und (theoretisch) stets kleiner als das Zeitfenster sein. Die Koinzidenzrate ist die Multiplikation der Zählrate eines Detektors mit der Auftrittswahrscheinlichkeit eines Signals beim zweiten Detektor. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt bei einem zweiten Detektor $2 \epsilon_2 w_2 W(\vartheta)$, wobei $W(\vartheta)$ die in II B eingeführte Winkelkorrelationsfunktion ist. Insgesamt ergibt sich für die Koinzidenzrate Z :

$$Z_{Ke} = Z_1 \cdot \epsilon_2 w_2 W(\vartheta) = \epsilon_1 w_1 Q \epsilon_2 w_2 W(\vartheta). \quad (\text{II.9})$$

Hierbei handelt es sich um die "echte" Koinzidenzrate Z_{Ke} . Es besteht auch die Möglichkeit, dass sich zwei physikalisch unkorrelierte Signale per Zufall im selben Zeitfenster befinden und als Koinzidenz wahrgenommen werden. Diese "zufällige" Koinzidenzrate wird vor allem durch die endliche Koinzidenzauflösungszeit τ_K des signalverarbeitenden Geräts vergrößert. Die zufällige Koinzidenzrate besagt, wie oft ein Zweitsignal innerhalb der Pulslänge τ des ersten Signals auftritt. Wenn das Erstsinal mit einer Wahrscheinlichkeit von $Z_1 \tau$ auftritt, dann ergibt sich für die zufällige Koinzidenzrate K_{Kz} :

$$Z_{Kz} = \tau Z_1 Z_2. \quad (\text{II.10})$$

Das Verhältnis von echter und zufälliger Koinzidenzrate kann verwendet werden, um die Zerfallsrate

und Winkelkorrelationsfunktion darzustellen:

$$\frac{Z_{Ke}}{Z_{Kz}} = \frac{W(\vartheta)}{\tau Q} \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{Z_{Ke}}{Z_1 Z_2} = \frac{W(\vartheta)}{Q}. \quad (\text{II.12})$$

Hier spielt auch der in II B erwähnte "sweet-spot" Winkel die besondere Rolle, bei gemessenen Z_{Ke} , Z_1 und Z_2 die Berechnung der Zerfallsrate zu ermöglichen, wenn man beim Winkel 55° die Koinzidenzen misst.

III Signalverarbeitung



Figure 4: Versuchsaufbau. Zu erkennen sind die zwei Detektoren und die signalverarbeitende Apparatur

In Abbildung reffig:setting zeigt, wie die Szintillationsdetektoren mit dem signalverarbeitendem Gerät verbunden sind. Die Apparatur besteht aus

- dem *Digital Data Link Amplifier* (DDL Amp)
- dem *Timing Single Channel Analyser* (TSCA), das das vom PMT angekommene Signal in ein starkes positives Rechtecksignal von 5V und ein schwaches negatives Rechtecksignal von -0.5V umwandelt
- dem *Time to Pulse Height Converter* (TPHC)
- dem *Analog to Digital Converter* (ADC), dessen *Gate* die Funktion eines input gates spielt, d.h. ein einkommendes Signal anzunehmen oder zu verweigern,
- und dem *Multi Channel Analyser*, der die Signalstärken bei den verschiedenen Kanälen darstellt.

IV Durchführung

A. Energiegesamtspektra; Kalibration Kanallage-Energie

Um die Kanallagen als Energiewerte in keV zu interpretieren, muss eine zugehörige Kalibration durchgeführt werden. Wir beruhen uns auf der Tatsache, dass die Kanallagen des TSCA linear proportional zur Energie sind [9]:

$$E_\gamma = a + b \cdot K, \quad (\text{IV.1})$$

mit den zu bestimmenden Parametern a, b und der Kanallage K .

Wenn in einem Spektrum zwei Werte auf bestimmten Kanallagen sitzen und deren Energiewerte bekannt sind (wie z.B. die gaußschen Peaks der Gammaquantenenergien), kann man die Parameter a und b bestimmen:

$$\Delta E_\gamma = b \Delta K, \quad (\text{IV.2})$$

$$b = \frac{\Delta E_\gamma}{\Delta K}, \quad (\text{IV.3})$$

Die Peaks der Gammaquantenenergien können neben dem visuellen Ablesen durch numerische Fits genauer bestimmt werden. Für die multimodale Verteilung der Gesamtenergiespektren verwenden wir die Pythonumgebung `emcee` [10], die den numerischen Fit mittels Markov-Chain-Monte-Carlo Sampling durchführt. Der Algorithmus ist dabei die sogenannte autocorrelation time Methode [10]. Die vertikalen Linien in Abbildung 5 sind visuell abgelesene Schätzungen, die für das Angeben der Priors hilfreich sind.

Zur Veranschaulichung werden die Plots von einem Beispiel (Natrium Detektor 1) dargestellt. Die restlichen Plots sind im Anhang zu finden.

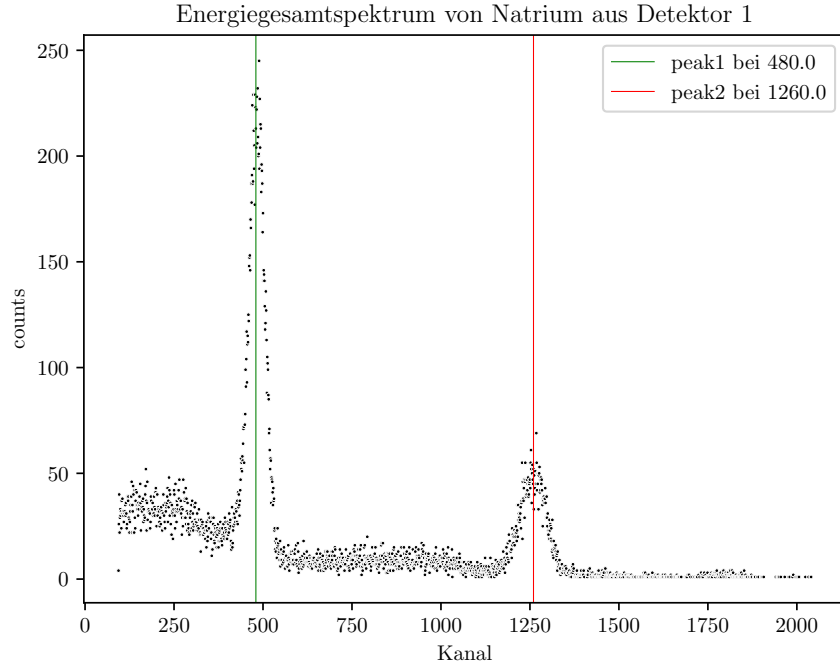


Figure 5: Gesamtenergiespektrum von Natrium, Detektor 1. Die zwei Peaks sind zunächst abgeschätzt.

Für den numerischen Fit mittels `emcee` müssen wir einen Prior angeben; eine Modellfunktion, an der sich der numerische Fit zu richten hat. Wir konstruieren die Modellfunktion als Summe dreier Verteilungsfunktionen: eine Funktion für die Hintergrundstrahlung (lognormal bzw. exponentielle Verteilung) und zwei Normalverteilungsfunktionen für die Peaks der Gammaquantenenergien:

$$M(\vec{\theta}, x) = a_1 \cdot P_{ln}((\mu_1, \sigma_1), x) + a_2 \cdot P_N((\mu_2, \sigma_2), x) + a_3 \cdot P_N((\mu_3, \sigma_3), x) \quad (\text{IV.4})$$

$$P_{ln}((\mu, \sigma), x) = \frac{1}{x \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.5})$$

$$P_{gauss}((\mu, \sigma), x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.6})$$

$$\vec{\theta} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, a_1, a_2, a_3)^T \quad (\text{IV.7})$$

mit dem Hyperparametervektor $\vec{\theta}$, dessen Werte der numerische Fit bestimmt. Die Werte des Hyperparameters sind im Anhang bei den Cornerplots zu entnehmen.

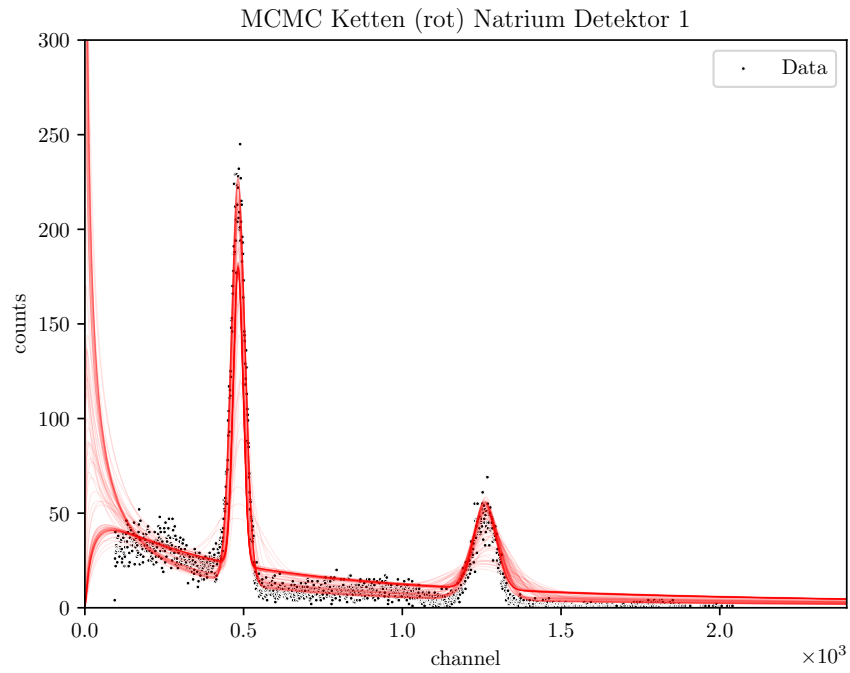


Figure 6: MCMC Durchlauf Natrium, Detektor 1. Rot dargestellt sind die Markov-Ketten: Modellfunktionen mit variierendem Hyperparameter.

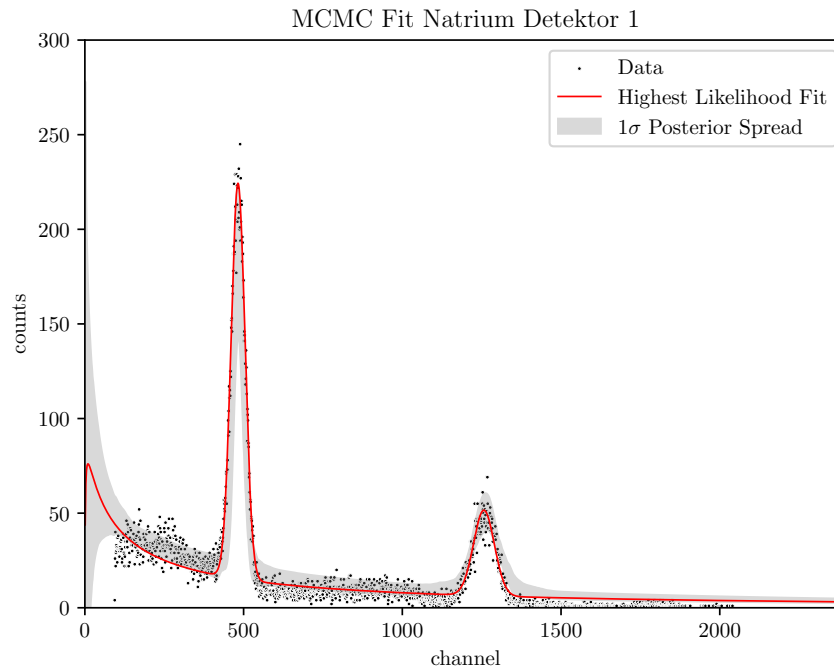


Figure 7: MCMC highest likelihood Natrium, Detektor 1. Das Modell mit der höchsten Likelihood. Grau markiert ist der 1σ -Bereich.

Für die Unsicherheit der gaußschen Mittelwerte verwenden wir entsprechend die gaußschen Standardabweichungen:

		Kanallage Natrium K, Na		Kanallage Cobalt K, Co	
	Peak		$\sigma_{K,Na}$		$\sigma_{K,Co}$
Theoretischer Wert E	p1	511.0000	0.0000	1173.2000	0.0000
	p2	1275.0000	0.0000	1332.5000	0.0000
Detektor 1	p1	482.4166	21.9667	1144.5461	43.5131
	p2	1257.0498	32.8904	1304.0668	34.7581
Detektor 2	p1	201.3974	28.6677	702.3187	50.9998
	p2	783.2746	49.9971	828.7921	46.7660

Table II: Erwartungswerte und Ungenauigkeiten der gaußschen Fits, entnommen von den Hyperparameters der MCMC-Fits.

Die Kalibrationsparameter a und b haben eine Unsicherheit, die durch die gaußsche Fehlerfortpflanzung bestimmt werden können:

$$b = \frac{\Delta E_\gamma}{\Delta K} \quad (\text{IV.8})$$

$$\Delta b = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial(\Delta K)} \Delta(\Delta K)\right)^2} \quad (\text{IV.9})$$

$$= \frac{\Delta E_\gamma}{(\Delta K)^2} \Delta(\Delta K) \quad (\text{IV.10})$$

$$\Delta(\Delta K) = \sqrt{\left(\frac{\partial(\Delta K)}{\partial K_1} \sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta K)}{\partial K_2} \sigma_2\right)^2} \quad (\text{IV.11})$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (\text{IV.12})$$

$$a = E_\gamma - b \cdot K \quad (\text{IV.13})$$

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial K} \sigma\right)^2} \quad (\text{IV.14})$$

$$= \sqrt{(K \cdot \Delta b)^2 + (b \cdot \sigma)^2} \quad (\text{IV.15})$$

Die Fehlerberechnung von a entspricht dem formellen Prozess der gaußschen Fehlerfortpflanzung, weist jedoch hohe Werte auf, da sie - vor allem bei Cobalt - mit hohen Kanallagewerten K skaliert, siehe dazu die Fehlerwerte in Tabelle III. Um qualitativ die Genauigkeit des Parameters a zu untersuchen, führen wir eine weitere Kalibration mit Cobalt durch, siehe Abbildung 8. Wir erkennen dabei, dass Detektor 1 bei beiden Quellen eine beinahe gleiche Kalibration entsteht, während wir bei Detektor 2 eine ebenfalls guten Überlapp zwischen rot und blau, wenn auch mit einer stärkeren Diskrepanz sehen. Dieser visuelle Vergleich schließt die hohe Ungenauigkeit von a nicht aus, regt jedoch dazu an, andere Alternativen zur gaußschen Fehlerfortpflanzung in Erwägung zu ziehen, denn der visuelle Abgleich bei Detektor 1 deutet darauf hin, dass der Parameter a zu hoher Wahrscheinlichkeit den richtigen Wert annimmt.

Gemäß der Fehlerrechnung ergibt sich bei beiden Detektoren jeweils ein Energiewert von

$$E_{\gamma,D1}[\text{in keV}] = (0.9862 \pm 0.0504) \cdot K + (35.2054 \pm 23.5506)[\text{in keV}] \quad (\text{IV.16})$$

$$E_{\gamma,D2}[\text{in keV}] = (1.3130 \pm 0.0915) \cdot K + (246.5669 \pm 41.9077)[\text{in keV}]. \quad (\text{IV.17})$$

Für die Bestimmung der Fehlerbalken für die Natriumeichung, die blau in Abbildung 8 eingezeichnet sind, wird die gaußsche Fehlerfortpflanzung für die konkret berechneten Energien bei den Kanallagenpeaks durchgeführt:

$$\Delta E_{\gamma,i} = \sqrt{(b_i \cdot \sigma_{K,Na,i})^2 + (K_{Na,i} \cdot \Delta b_i)^2 + (\Delta a_i)^2}, \quad (\text{IV.18})$$

wobei der Index $i = 1, 2$ den Detektor angibt.

Detektor Kalibrationsparameter k		Natrium Unsicherheit Δ_k		Cobalt Unsicherheit Δ_k	
D1	a	35.2054	32.5506	30.2370	401.3858
	b	0.9863	0.0504	0.9986	0.3486
D2	a	246.5669	41.9077	288.5921	488.2277
	b	1.3130	0.0915	1.2596	0.6891

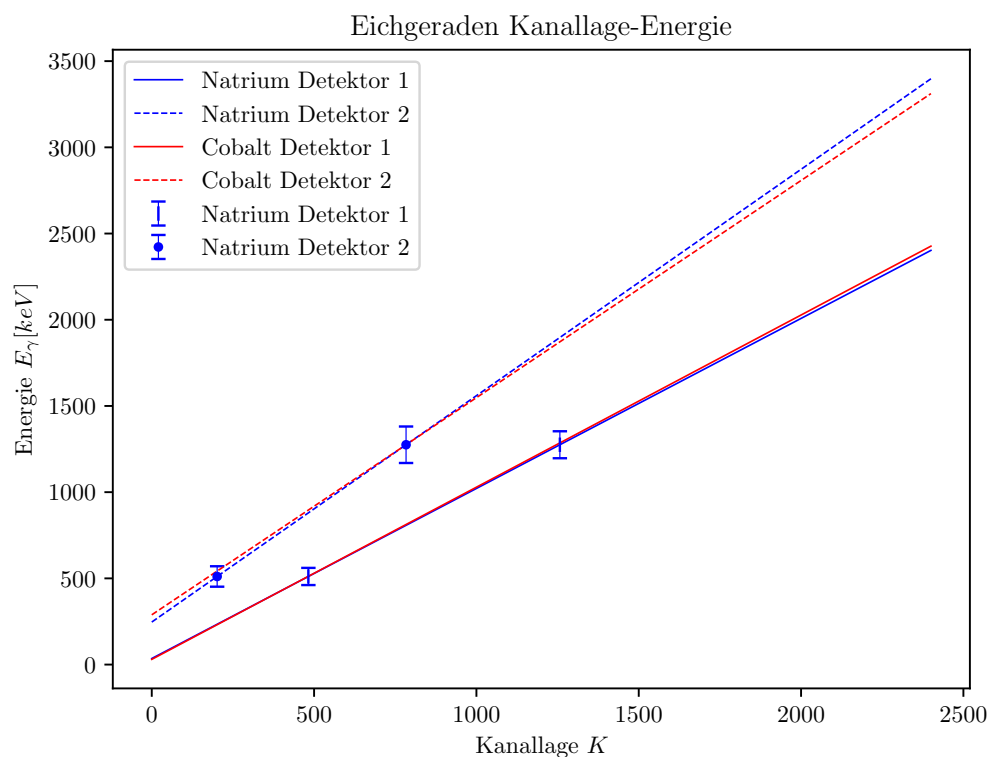
Table III: Parameter der Kalibration


Figure 8: Eichgerade. Es wurde sowohl eine Natrium, als auch eine Cobalt Eichung durchgeführt. Zweck ist der qualitative Vergleich der Detektoren und der Kalibrationsungenauigkeit.

Wir verwenden die Natriumeichung, um die Energie für eine gegebene Kanallage gemäß IV.1 zu bestimmen. Ein kalibriertes Gesamtspektrum ist in Abbildung 9 zu sehen, für die restlichen Spektren siehe Anhang 22 bis 24.

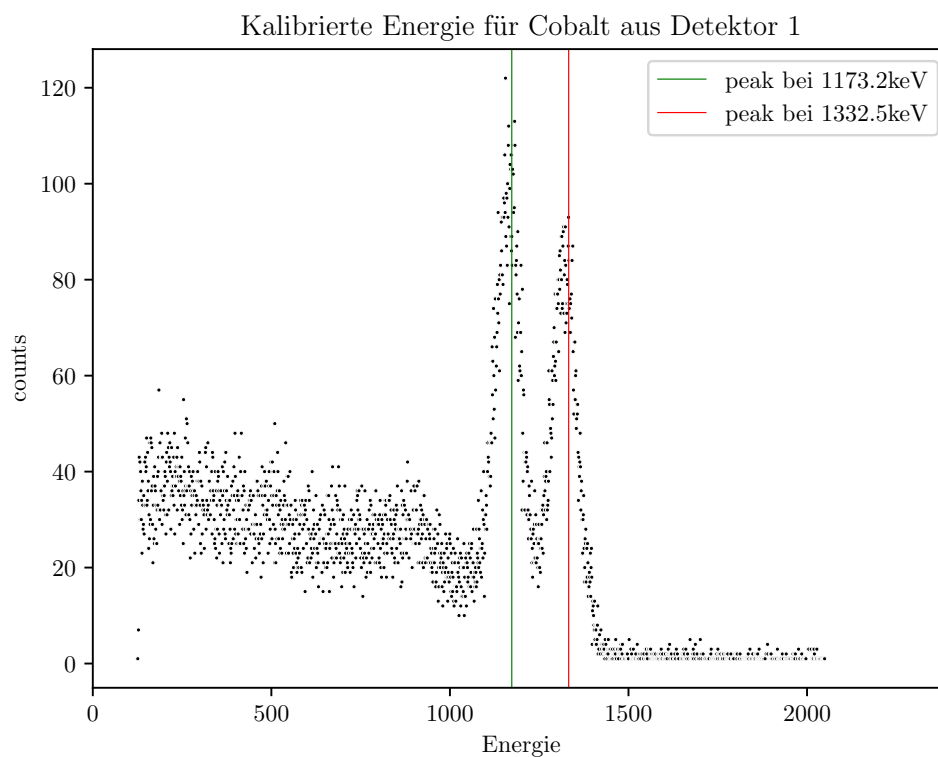
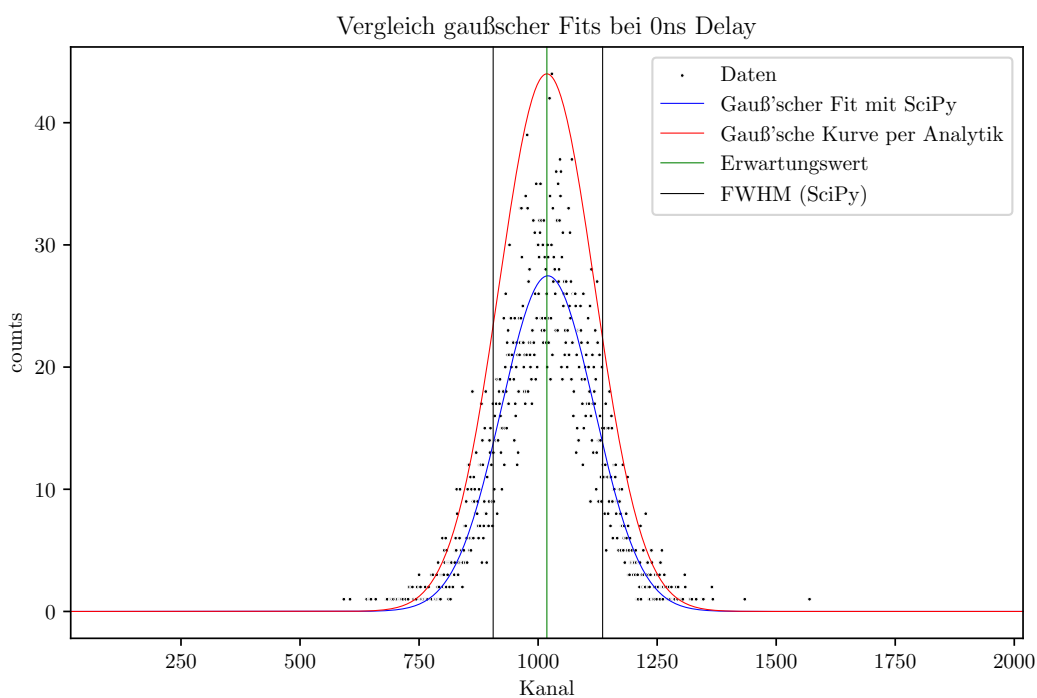


Figure 9: Kalibriertes Energiegesamtspektrum von Cobalt aus Detektor 1. Bei allen vier Plots wird die Natriumeichung verwendet.

B. Time-delay Spektra, Kalibration Kanallage-Zeit

Wir führen eine zum vorherigen Abschnitt analoge Kalibration durch. Bei dieser Messung folgen die Daten einer unimodalen Verteilung, weshalb wir für den numerischen Fit die Umgebung `scipy.optimize` verwenden. Der Vorteil hierbei ist, dass der Fitprozess signifikant schneller durchgeführt werden kann. Als Vergleich wird noch eine "per Hand" berechnete, analytische Gaußfunktion zum Verleich dargestellt. Die parametrisierten Fits sind in der Abbildung 10 und Abbildung 11 zu sehen.

**Figure 10:** Numerischer Fit für 0ns

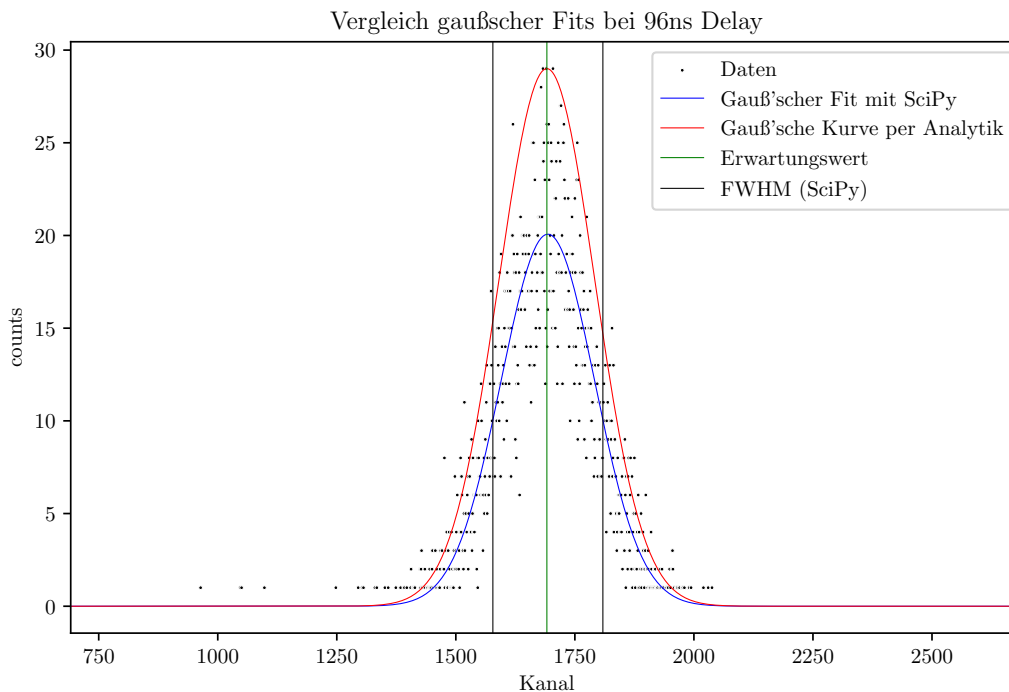


Figure 11: Numerischer Fit für 96ns

Zum Abgleich der Kalibration verwenden wir hier die Zeitdifferenz von 96ns und 0ns und die Differenz in den Peaks der Kanallagen:

$$\Delta t = 96ns = b \cdot \Delta K. \quad (\text{IV.19})$$

Für die Fehlerfortpflanzung verwenden wir die vom numerischen Fit gegebenen Standardabweichungen $\sigma_0 = 100.3792$ und $\sigma_{96} = 100.7407$:

$$\Delta b = \frac{\Delta t}{(\Delta K)^2} \Delta(\Delta K) \quad (\text{IV.20})$$

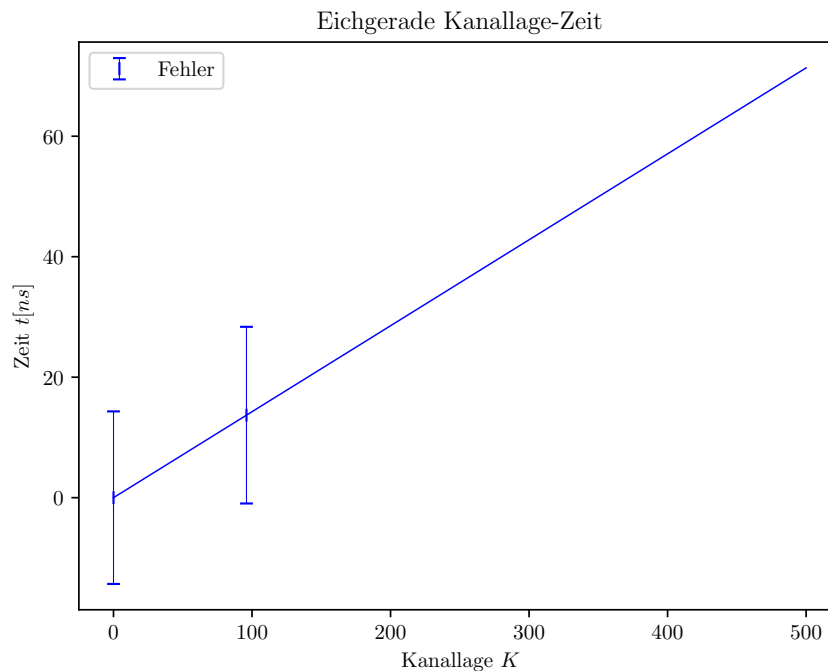
$$\Delta(\Delta K) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad (\text{IV.21})$$

Die Eichgerade ist in Abbildung 12 zu sehen. Wir kommen auf eine Kalibration von

$$t(\text{in } ns) = (0.1428 \pm 0.0302) \cdot K \quad (\text{IV.22})$$

$$\Delta t_i = \sqrt{(K_i \Delta b)^2 + (b \sigma_i)^2} \quad (\text{IV.23})$$

mit $i = 0ns, 96ns$.


Figure 12: Eichgerade Kanallage-Zeit

Mit der Zeiteichung können wir die Zeitauflösung bestimmen. Sie ergibt sich aus der Bestimmung der Breite der Gauß-Verteilungen bei halber Höhe (FWHM: Full Width at Half Maximum). Dazu kann entweder der x-Wert bei halber Höhe bestimmt werden (für diese Methode verwenden wir die Bezeichnung FWHM_1), oder die Standardabweichung verwendet werden, um die Breite direkt zu bestimmen: $\text{FWHM}_2 = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma$ [citation, try](#). Ersteres kann numerisch mit `numpy.interp` durchgeführt werden, in dessen Dokumentation keine Ungenauigkeitsbestimmung gegeben ist. Die Ungenauigkeit bestimmen wir daher nur im Bezug auf die Ungenauigkeit des Kalibrationsparameters:

$$\Delta \text{FWHM} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \Delta^2 b}. \quad (\text{IV.24})$$

Als Endwerte bekommen wir

Zeitdelay	FWHM	Ungenauigkeit
0 ns	32.80362 ns	6.93402 ns
96 ns	32.96602 ns	6.96835 ns

Table IV: FWHM Werte mit Ungenauigkeiten

C. Koinzidenzmessungen

e^+e^- Annihilation (511keV - 511keV)

Es wird die Vernichtungsstrahlung von den Positronen aus der Natriumquelle bei verschiedenen kleinen Winkelauslenkungen betrachtet:

Auslenkung	Gesamtzahl Z	Gesamtmesszeit T	Zählraten Q
0cm	24	123.136s	$0.1949064449064449 \text{ s}^{-1}$
-1cm	59	123.155s	$0.47907108927773945 \text{ s}^{-1}$
-2cm	84	129.882s	$0.6467408878828474 \text{ s}^{-1}$
-3cm	48	122.609s	$0.3914883899224364 \text{ s}^{-1}$

Table V: Zählraten bei verschiedenen Auslenkungen für die Vernichtungsstrahlung

Eine grafische Darstellung ist in Abbildung 13 zu sehen. Für die Messungenauigkeit in der Auslenkung werden 0.2cm angenommen, während die Ungenauigkeit der Gesamtzahl sich in die Ungenauigkeit der Zählrate fortpflanzt. Die Gesamtzahl ist eine diskrete, poissonverteilte Größe, deren Standardabweichung die Wurzel des Erwartungswertes $\Delta Z = \sqrt{Z}$ ist. So gilt dann für die Ungenauigkeit der Zählrate Q :

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{1}{T}\sqrt{Z}\right)^2} \quad (\text{IV.25})$$

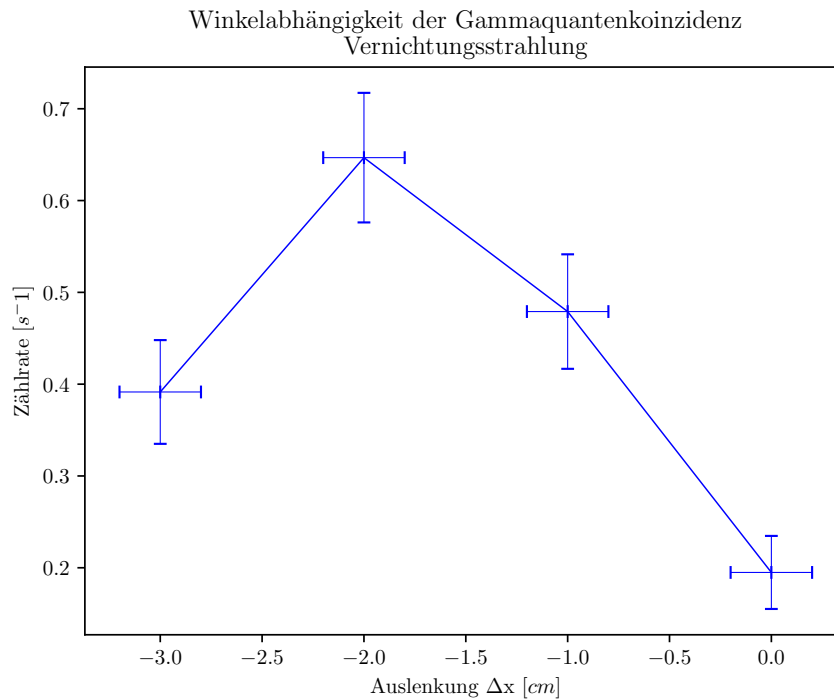


Figure 13: grafische Darstellung der $\gamma - \gamma$ -Koinzidenz für die Vernichtungsstrahlung

Wir erkennen, dass - anders als von der Theorie erwartet - die maximale Signalstärke nicht bei 180° -Auslenkung der beiden Detektoren liegt, sondern etwas verschoben. Aus der Theorie erwarten wir, dass das Positron bei der Annihilation thermische/nichtrelativistische Geschwindigkeiten besitzt, und daher die Impulserhaltung mit null Anfangsimpuls gilt. Ein Grund für die von der Theorie abweichenden Impulsrichtungen ist der ungenaue Versuchsaufbau, der zu systematischen Fehlern führen kann.

e^+e^- Annihilation und γ -Zerfall (511keV - 1275keV)

Es wird erwartet, dass die gemessenen Zählraten kleiner werden als beim vorherigen Versuch. Dies konnte in unserem Fall nicht bestätigt werden. Eine grafische Darstellung ist in Abbildung 14 zu sehen. Wir erwarten aus der Theorie keine Koinzidenz zwischen den Gammaquanten der Vernichtung und des Gammazerfalls, da die zwei Prozesse unabhängig voneinander ablaufen. Wir erwarten also keine Zeitgleichheit aus einem kausalen Zusammenhang. Aufgrund der endlichen Auflösung ist jedoch zu erwarten, dass das Zeitfenster zwischen erstem und zweiten Gammaquant sehr kurz ist, und zu zufälligen Koinzidenzen führen kann.

Würde eine Koinzidenz existieren, würden wir in der Abbildung eine Winkelabhängigkeit gemäß der Winkelkorrelationsfunktion erkennen.

Für die Messungenauigkeit im Auslenkwinkel werden 2° angenommen, während wir wiederum eine poissonverteilte Ungenauigkeit \sqrt{Z} für die Gesamtzahl Z annehmen.

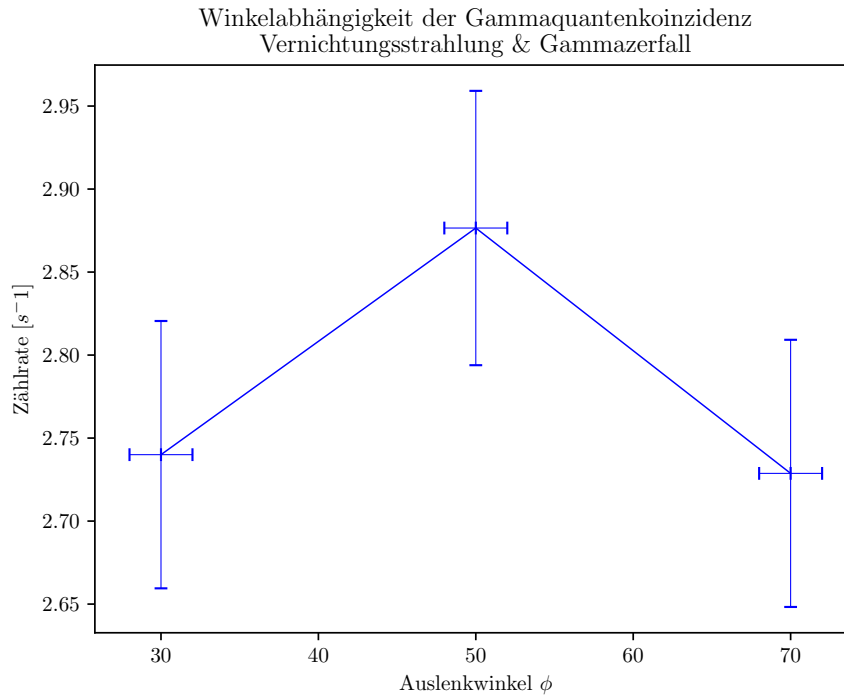


Figure 14: grafische Darstellung der $\gamma - \gamma$ -Koinzidenzmessung für die Vernichtungsstrahlung und den Gammazerfall

Kaskadenzerfall Cobalt

Wir bestimmen die Quellstärke/Zerfallsrate Q für $W(55) \approx 1$ gemäß Gl. II.12. Es ist hierbei wichtig anzumerken, dass hier die Größen Z nicht die Gesamtzahl, sondern Zählraten sind, sodass die folgende Ungenauigkeit für Q gilt:

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{Z_2}{2 \cdot Z_{Co}} \frac{\sqrt{Z_1 \cdot T_1}}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{Z_1}{2 \cdot Z_{Co}} \frac{\sqrt{Z_2 \cdot T_2}}{T_2}\right)^2 + \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2}{2 \cdot Z_{Co}^2} \frac{\sqrt{Z_{Co} \cdot T_{Co}}}{T_{Co}}\right)^2}, \quad (IV.26)$$

bei der die Wurzelterme die Ungenauigkeit der Gesamtzahl darstellen sollen und daher die Werte Z mit ihrer jeweiligen Messzeit multipliziert werden. Wir erhalten für die Zerfallsrate

$$Q = (23107.6514 \pm 807.2960) \text{Bq}. \quad (IV.27)$$

Für die Bestimmung des Winkelkorrelationsparameters $W(\vartheta)$ für die Winkel 10° , 40° und 80° stellen wir die Gl. II.12 entsprechend um. Für die Fehlerrechnung gilt:

$$\Delta W = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot Z_K}{Z_1 \cdot Z_2} \Delta Q\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot Q}{Z_1 \cdot Z_2} \Delta Z_K\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot Z_K \cdot Q}{Z_1^2 \cdot Z_2} \Delta Z_1\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot Z_K \cdot Q}{Z_1 \cdot Z_2^2} \Delta Z_2\right)^2} \quad (IV.28)$$

Tabelle VI enthält die Werte der Messparameter Z_1 , Z_2 , Z_K , Q und $W(\vartheta)$ mitsamt ihrer jeweiligen

Ungenauigkeiten. Eine graphische Darstellung der Winkelkorrelation im Vergleich zu ihrem theoretischen Wert ist in Abbildung 15 zu finden.

Winkel	$Z_1[s^{-1}]$	$\Delta_{Z_1}[s^{-1}]$	$Z_2[s^{-1}]$	$\Delta_{Z_2}[s^{-1}]$	$Z_K[s^{-1}]$	$\Delta_{Z_K}[s^{-1}]$	$W(\vartheta)$	Δ_W
10	304.9289	0.8505	293.4173	0.8343	2.2582	0.0732	1.1664	0.0558
40	310.8005	0.8541	293.2085	0.8296	2.0467	0.0693	1.0380	0.0507
55	309.4117	0.8564	293.8306	0.8345	1.9672	0.0683	1.0000	0.0494
80	311.8168	0.8570	291.7363	0.8290	1.9833	0.0683	1.0076	0.0496

Table VI: Messparameter des Kaskadenzerfalls

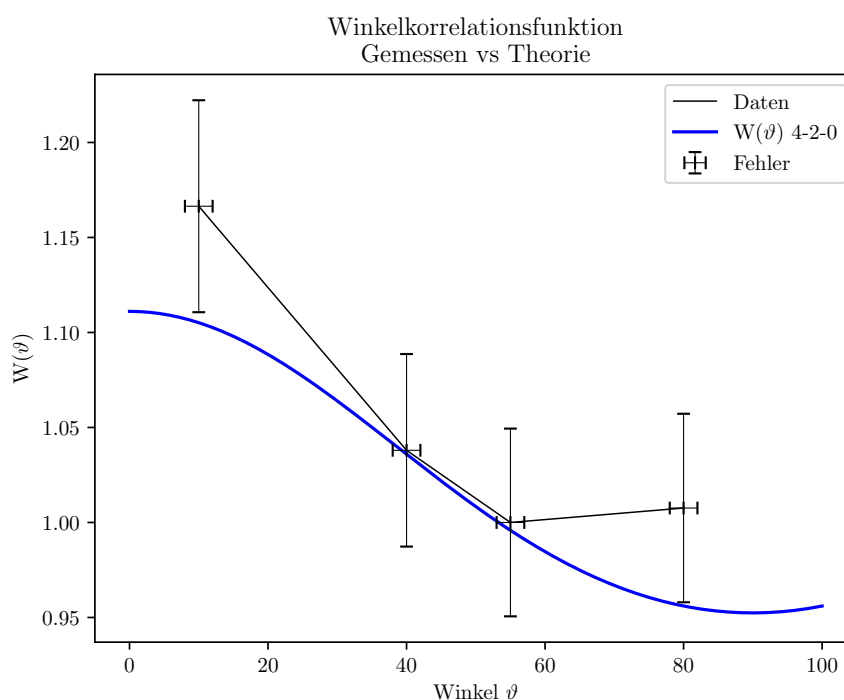


Figure 15: Vergleich der Winkelkorrelationsfunktion von gemessenen Daten und von der Theorie

Abgesehen von den Fehlern sehen wir, dass die Daten der theoretischen Kurve nur auf sehr grober Weise folgen. Hinzu kommt, dass die Ungenauigkeit der Werte bei 10° und 80° die theoretischen Werte nicht enthält. Eine Koinzidenz der Gammaquanten aus dem Kaskadenzerfall ist zwar aufgrund ihres kausalen Zusammenhangs zu erwarten, kann aber von unserem Versuch nicht mit passenden Daten bekräftigt werden.

V Diskussion

Zu den kalibrierten Energiespektren

Mit der Natriumeichung erreichen die Maxima der Cobaltspektren die theoretischen Werte von 1173.2keV und 1332.5keV . Aus dem Vergleich der Natriumeichung mit der Cobalteichung sehen wir, dass sich die Kalibrationen, abgesehen von der leichten Diskrepanz bei Detektor 2, gut überlappen. Wir bestätigen somit die Qualität der Kalibration, die in Eichlabors wie die Physikalisch-Technische Bundesanstalt Braunschweig angewendet wird [5].

Technische Einzelheiten, Datenanalyse

Eine Kategorie des Fehlers wurde in unserer Durchführung vernachlässigt, und zwar sind es die Fehler vom numerischen Fit mittels MCMC, die im Cornerplot 18 zu erkennen sind. Wir haben uns dazu entschieden, diese Fehler zunächst auszulassen, da der numerische Fit bereits bei jeder Programmausführung schwankt und der Fehler wenig aussagekräftig ist. Es muss also zunächst sichergestellt werden, dass der numerische Fit reproduzierbare Werte liefert, was durch ein Erhöhen der Iteration (im Moment 500) erreicht werden kann, jedoch würde dies die Ausführungszeit deutlich erhöhen; ein MCMC-Durchlauf dauert bei einem Prozessor mit 6 Kernen mit jeweils 2 Threads etwa eine Minute, bei 2 Kernen mit jeweils 2 Threads bereits fünf Minuten. Eine Lösung dazu wäre es, den Vorgang zu parallelisieren (`number of parallel jobs` = Anzahl an Kernen). Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Wertebereich von gut bekannten Parametern so klein wie möglich zu halten, was bedeutet, dass Parameterwerte über dem gegebenen Toleranzbereich hinaus gar nicht erst von den MCMC-Ketten akzeptiert werden. Im Programm wird dies durch die `lnprior`-Funktion ermöglicht. Dazu ist aber entweder ein gutes Vorwissen über die Parameterwerte oder viel Herumprobieren mit dem numerischen Fit erforderlich.

Ziel des numerischen Fits ist die Bestimmung der Maxima und dessen gaußscher Standardabweichung gewesen. Wir haben uns darauf beschränkt, den Highest-Likelihood Fit visuell zu kontrollieren, ob er mit den Datenpunkten übereinstimmt. Auch dies ist vor allem bei Daten mit mehreren Hintergründen nicht gewährleistet; Für die beiden Natriumspektren hat die Modellierung mit drei Funktionen (lognormaler Hintergrund, gaußscher Peak 511keV , gaußscher Peak 1275keV) gut funktioniert. Für Cobalt jedoch sehen wir (vor allem bei Detektor 1, siehe Abbildung 20), dass drei Modellfunktionen nicht ausreichen. Wir vermuten, dass es mehrere Mechanismen für den Hintergrund gegeben hat: Neben der Compton-Rückstreuung können beispielsweise Photonen im Röntgenbereich aus der photoelektrischen Absorption von einem Detektor zum anderen gestreut worden sein. Weitere, jedoch unwahrscheinliche Möglichkeiten sind Aktivitäten von anderen zerfallenden Quellen. Eine weitere, bisher ununtersuchte jedoch vielversprechende Methode des numerischen Fits für multimodale Verteilungen ist die *KDE*, die kernel density estimate.

Zur Zeitauflösung

Gemäß Gilmore et.al gilt für den FWHM von Germaniumdetektoren der Wertebereich 3-10ns ([8] S. 52), eine deutlich bessere Zeitauflösung. Entsprechend dieser Literatur wäre ein Abgleich mit Herstellerangaben nützlich, um den von uns berechneten Wert bezüglich der Durchführungsqualität

und der Detektoqualität zu interpretieren. Eine Angabe zu unserem Equipment ist in [11] zu finden, jedoch haben wir bisher keine Angaben zur Zeitauflösung gefunden.

Zur Koinzidenzmessung

Es besteht die Möglichkeit, die Quellstärke Q von Cobalt-60 nachzukontrollieren, wenn die Masse der im Versuch verwendeten Probe bekannt ist.

Wie in der Durchführung besprochen, sind die Daten der Winkelkorrelation schlecht als Theoriebestätigung zu akzeptieren. Es liegt die Vermutung nahe, dass noch ein Schritt in der Durchführung fehlt, und zwar von den Zählraten den Hintergrundanteil aus den lognormalen Fits abzuziehen; dies würde die Zerfallsrate erniedrigen und möglicherweise die Theorie besser bestätigen. Die Gültigkeit dieses Ansatzes muss jedoch zunächst bestätigt werden, denn bisher sind noch keine theoretischen Modelle für die Hintergrundmechanismen gut bekannt außer der Comptonstreuung. Zu den Mechanismen zählen die Photonen aus der photoelektrischen Absorption und Hintergrundaktivitäten von unbekannten, unerwünschten Quellen. Gelingt es uns, gute theoretische Modelle für die Hintergrundmechanismen zu finden, wäre dann der Ansatz die lognormale Funktion bei den kalibrierten Maxima auszuwerten und den Wert als Hintergrundprozess von den Zählraten der jeweiligen Detektoren abzuziehen.

VI Fazit

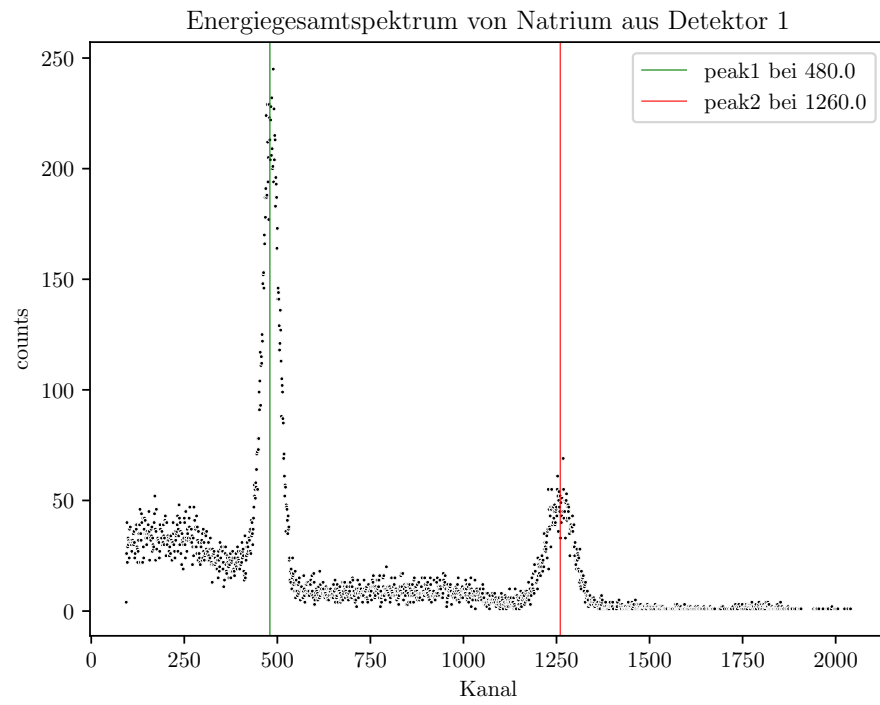
Mit diesem Versuch bestätigen wir die Genauigkeit der Natriumeichung. Für das Modellieren multimodaler Verteilungen untersuchen wir die Markov-Chain-Monte-Carlo Methode für das numerische Fit an Daten und finden, dass bei guter Modellierung präzise Fits für den Gesamtspektrum der Daten erstellt werden können.

Wir lernen, dass es wichtig ist, die Zeitauflösung gut zu verstehen, da die Qualität der Koinzidenzmessung von dieser Größe zu hohem Maß abhängt. Für genauere Auswertungen schlagen wir vor, dass über die Modellierung der Hintergrundaktivität nachgedacht werden soll.

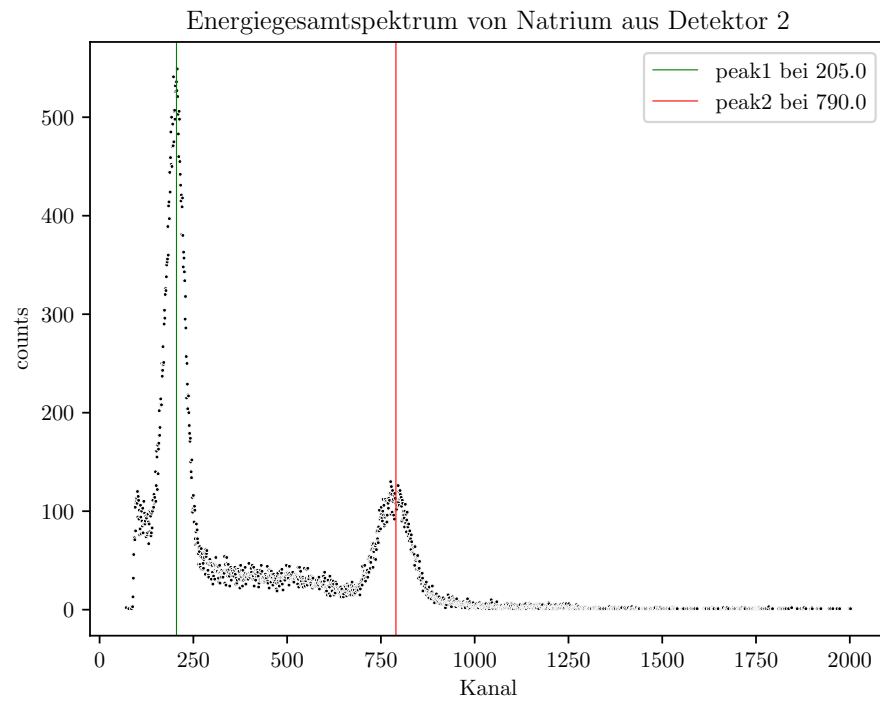
VII Quellen

- [1] D. Boyanovsky and L. Lello, Time evolution of cascade decay, [New Journal of Physics](#) **16**, 063050 (2014).
- [2] Traczyk, [Largest matter-antimatter asymmetry observed](#) (2022-03-18), accessed: 2025-01-24.
- [3] E. Andersson Sunden, C. Gustavsson, A. Göök, E. Ivarsson Biebel, P. Jansson, S. Jarl Holm, C. Söderström, R. Wallentin, and P. Andersson, [Geco : A gamma-ray spectroscopy system for evaluation of coincidence methods in radionuclide monitoring](#) (2024).
- [4] R. Aaij et al. (The LHCb Collaboration), Measurements of the branching fractions for $B_{(s)} \rightarrow D_{(s)}\pi\pi\pi$ and $\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_c^+\pi\pi\pi$, [Phys. Rev. D](#) **84**, 092001 (2011).
- [5] M. K. K. Stelzer, *Versuch 16: $\gamma - \gamma$ -Winkelkorrelationen und Koinzidenztechnik* (2024).
- [6] M. S. Basunia, Nuclear data sheets for a = 22, [Nuclear Data Sheets](#) **127**, 69 (2015).
- [7] E. Browne and J. Tuli, Nuclear data sheets for a = 60, [Nuclear Data Sheets](#) **114**, 1849 (2013).
- [8] G. Gilmore, [Practical Gamma-ray Spectrometry](#) (Wiley, 2008).
- [9] K. Stelzer, *Grundlagen der Gamma-Spektroskopie* (1993).
- [10] D. Foreman-Mackey, D. W. Hogg, D. Lang, and J. Goodman, emcee: The mcmc hammer, [Publications of the Astronomical Society of the Pacific](#) **125**, 306–312 (2013).
- [11] n.d., [Ortec experiment 13](#) (n.d.), accessed: 2025-01-24.

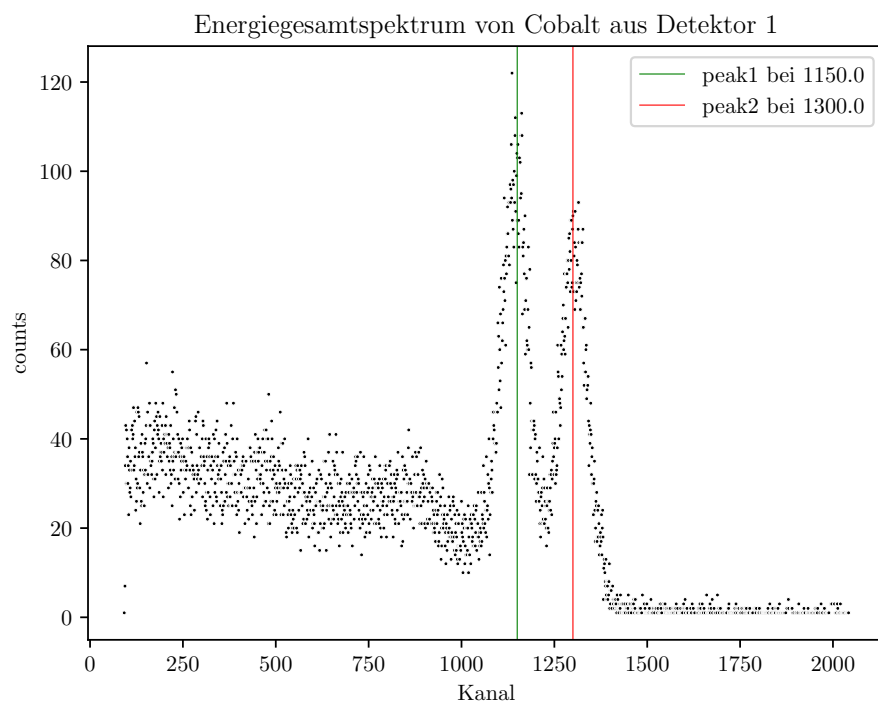
VIII Anhang



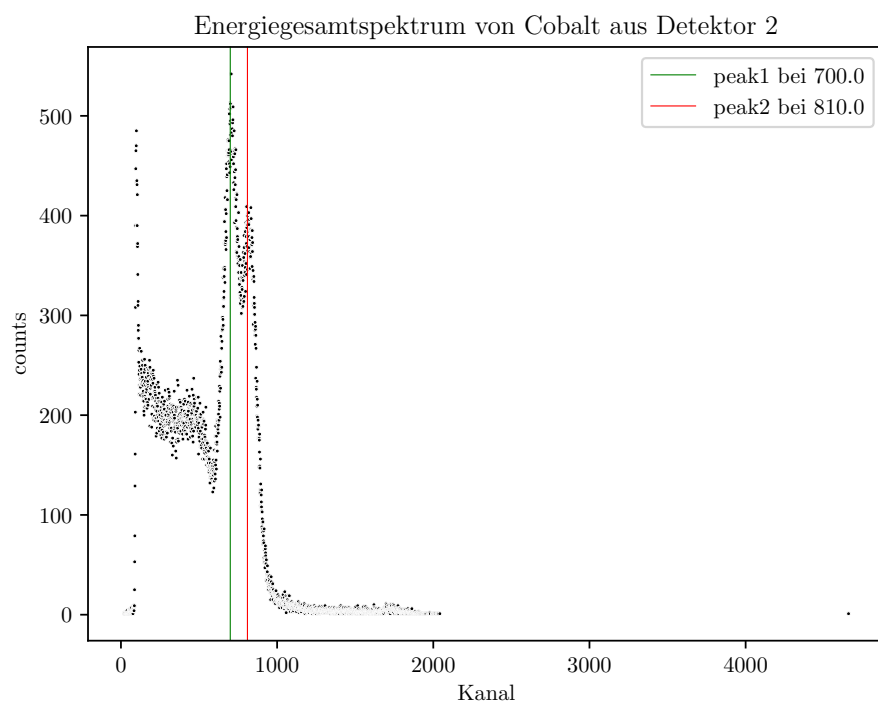
(a) Natrium, Detektor 1



(b) Natrium, Detektor 2



(a) Cobalt, Detektor 1



(b) Cobalt, Detektor 2

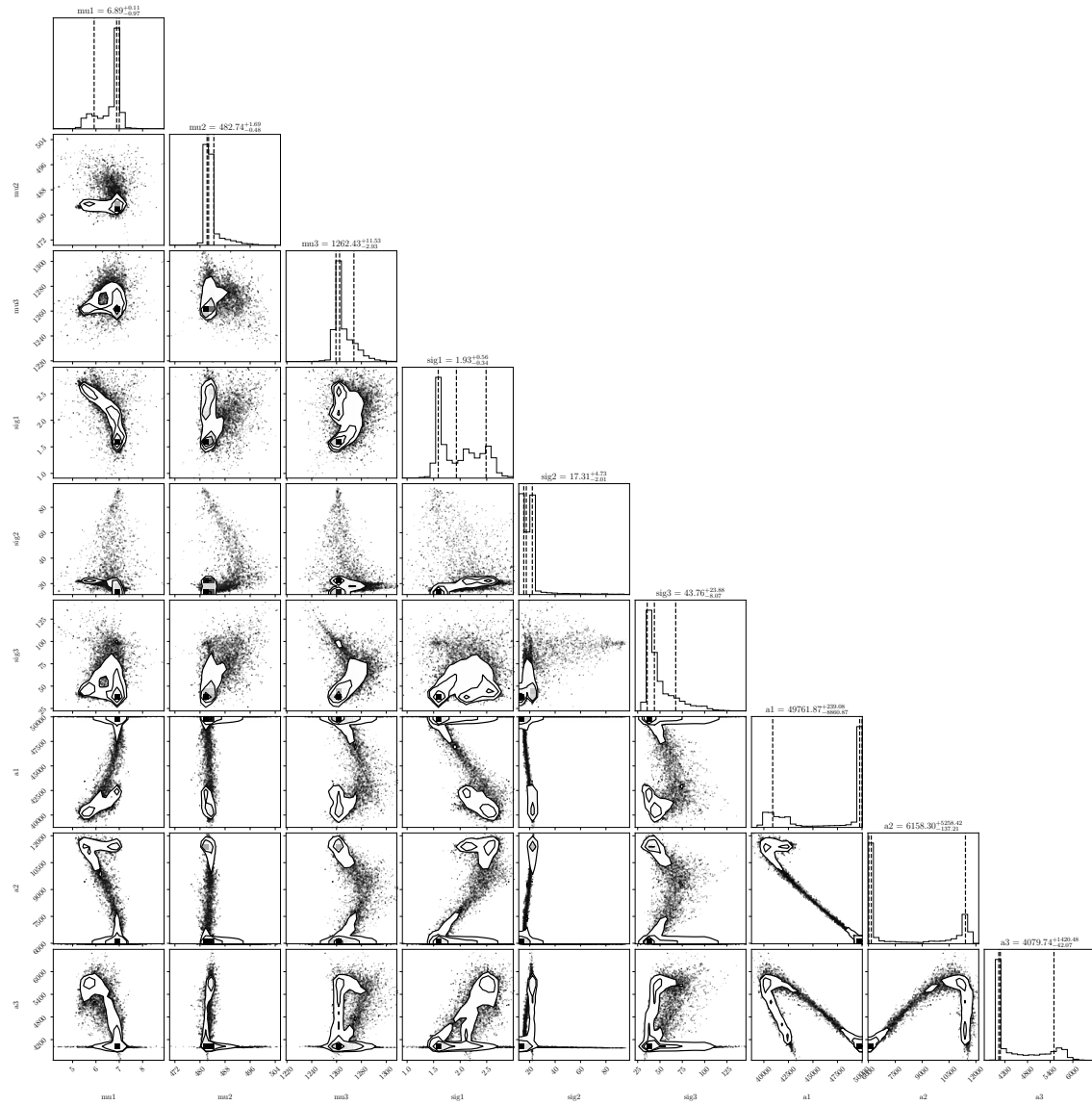


Figure 18: MCMC Hyperparameter corner plot, Natrium, Detektor 1.

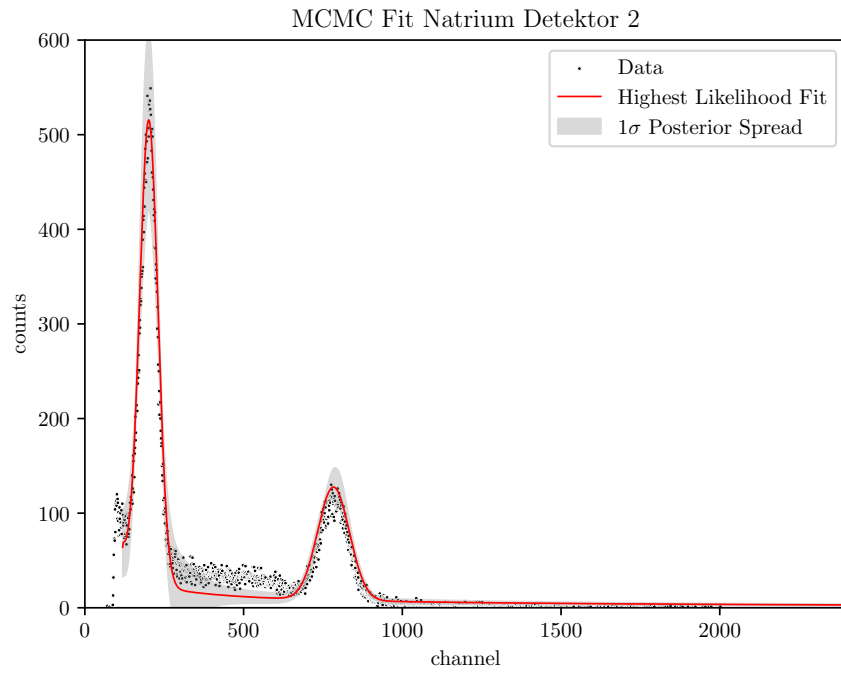


Figure 19: Highest Likelihood Fit Natrium, Detektor 2

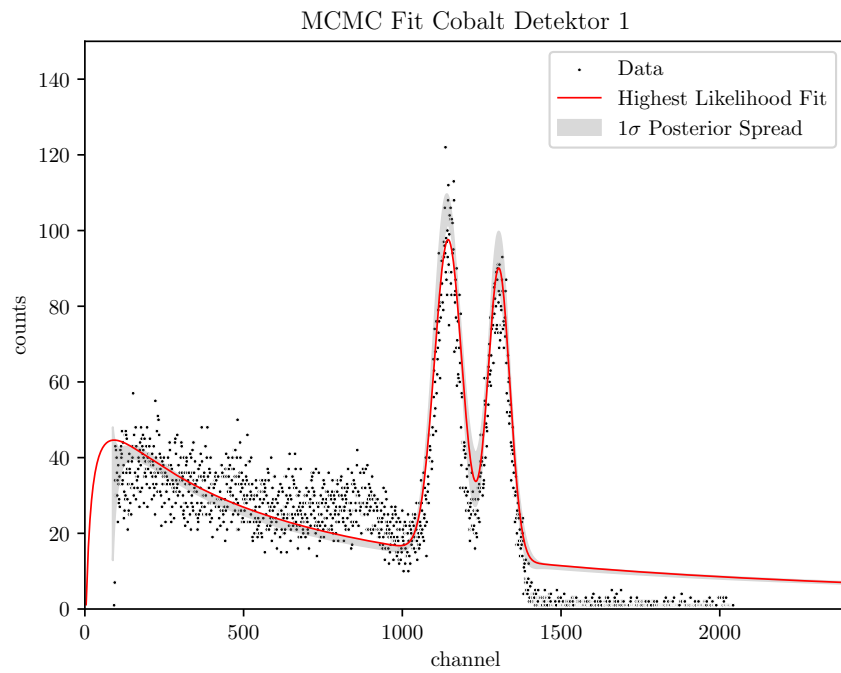


Figure 20: Highest Likelihood Fit Cobalt, Detektor 1

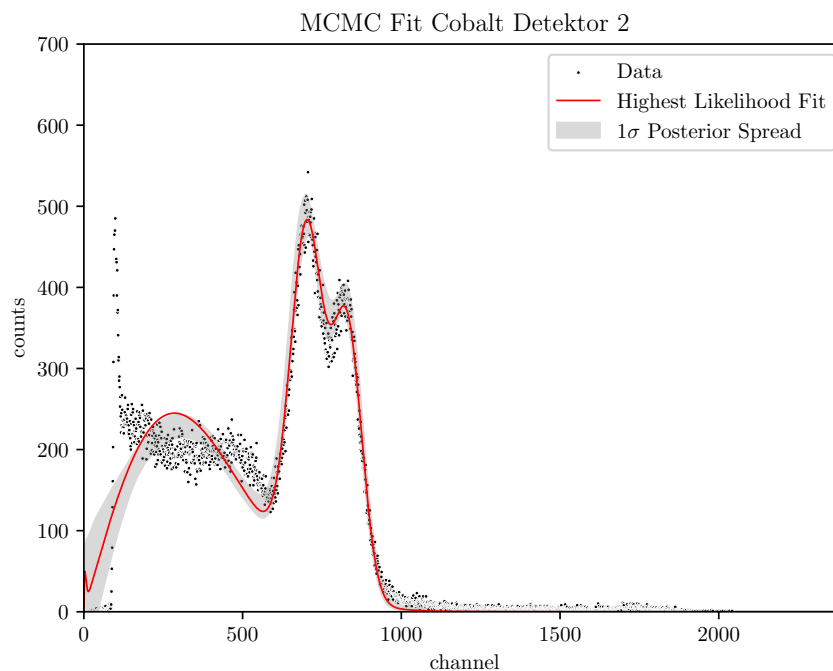


Figure 21: Highest Likelihood Fit Cobalt, Detektor 2

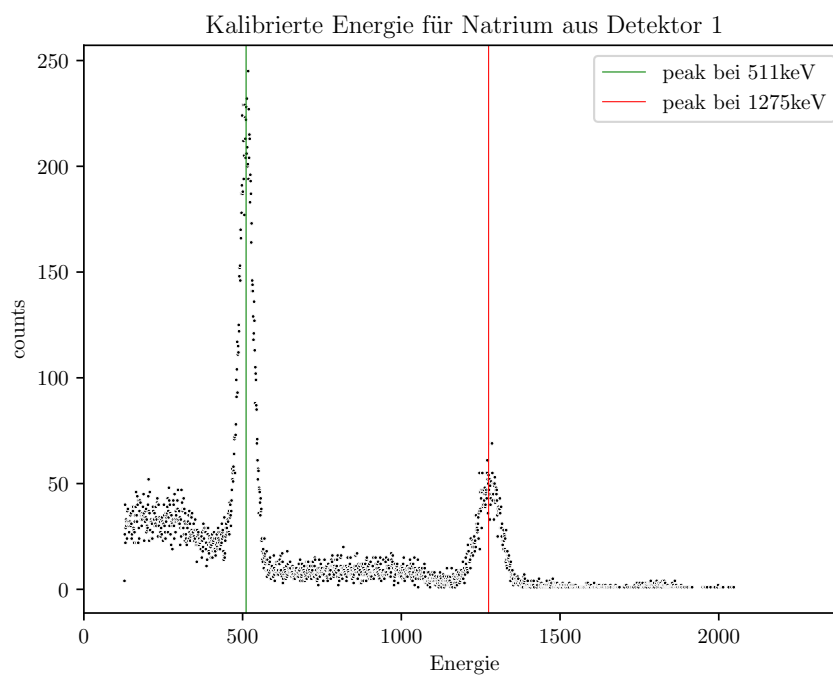


Figure 22: kalibriertes Spektrum Natrium, Detektor 1.

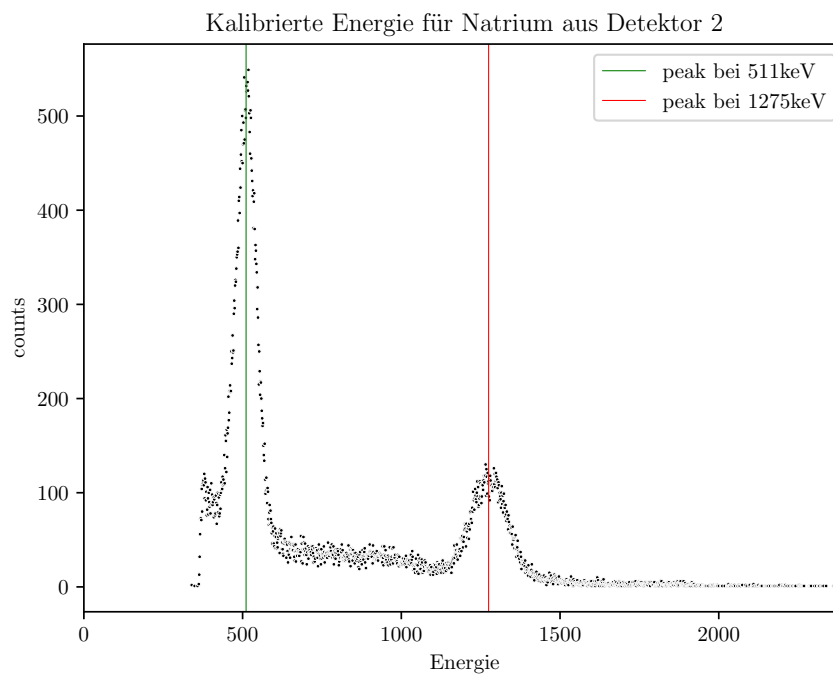


Figure 23: kalibriertes Spektrum Natrium, Detektor 2.

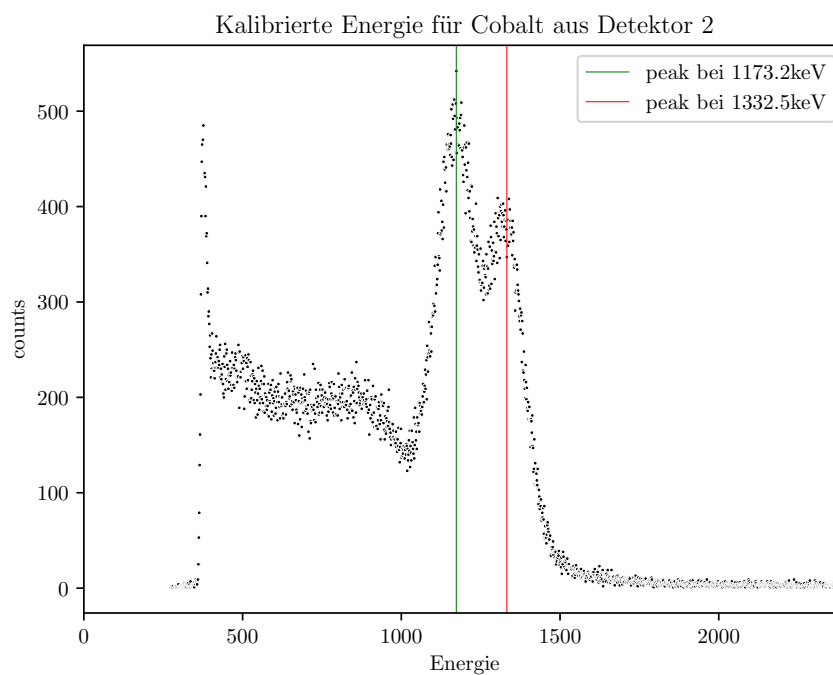


Figure 24: kalibriertes Spektrum Cobalt, Detektor 2.