1. 下列四个函数，在$x=0$处取得极值的函数是（ ）

①$y=x^3$；②$y=x^2+1$；③$y=|x|$；④$y=2^x$。

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ①③

2. 已知函数$f(x)=x^3-3x+m$只有一个零点,则实数m的取值范围是( )

A. $[-2,2]$

B. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C. $(-2,2)$

D. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

3. 已知直线$y=a$与函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$的图象相切,则实数$a$的值为

A. $-26$或$\frac{8}{3}$

B. $-1$或$3$

C. $8$或$\frac{8}{3}$

D. $-8$或$\frac{8}{3}$

4. 若$x=-2$是函数$f(x)=(x^2+ax-1)\mathrm{e}^{x-1}$的极值点，则$f(x)$的极小值为（ ）。

A: $-1$

B: $-2\mathrm{e}^{-3}$

C: $5\mathrm{e}^{-3}$

D: $1$

5. 例11 (2019·浙江省五校联考)若函数$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$在区间$(\frac{1}{3},4)$上有极值点,则实数$a$的取值范围为________.

6. 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2,a\in\mathbf{R}$.设函数$g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$,讨论$g(x)$的单调性并判断有无极值,有极值时求出极值.

7. 【例 1】设函数$f(x)=\ln(x+1)+a(x^2-x)$,其中$a\in\mathbf{R}$.讨论函数$f(x)$极值点的个数,并说明理由.

8. 7. 设函数$f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$.

(1)若曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与$x$轴平行,求$a$;

(2)若$f(x)$在$x=2$处取得极小值,求$a$的取值范围.

9. 已知函数$f(x)=ax^3+x^2(a\in R)$在$x=-\frac{4}{3}$处取得极值。

(1)确定$a$的值。

(2)若$g(x)=f(x)e^x$,讨论$g(x)$的单调性。

10.

6. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1$，$x_2$，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

11. 若函数$f(x)=x^3-3bx+3b$在区间$(0,1)$内有极小值，则（　）

A. $b>0$

B. $b<1$

C. $b<\frac{1}{2}$

D. $0<b<1$

12. 若函数 $f(x)=x^2lnx(x>0)$ 的极值点为 $\alpha$ ,函数 $g(x)=xlnx^2(x>0)$ 的极值点为 $\beta$ ,则有(　)

A. $\alpha>\beta$

B. $\alpha<\beta$

C. $\alpha=\beta$

D. $\alpha$ 与 $\beta$ 的大小不确定

13. 设函数f(x)=1-xsinx在x=$x_0$处取得极值，则(1+$x_0^2$)(1+cos2$x_0$)-1的值为__.

14. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值或极小值，则称 $x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的极值点. 已知 $a,b$ 是实数，1 和 $-1$ 是函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的两个极值点.

(1)求 $a$ 和 $b$ 的值；

(2)设函数 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)=f(x)+2$，求 $g(x)$ 的极值点.

# 答案解析

1. 答案

B

解析

可以分别画出四个函数的图像，得到在$x=0$处取得极值的函数是$y=x^2+1$和$y=|x|$

故正确答案选B。

2. 答案

B

解:$\because f(x)=x^3-3x+m$,$\therefore f'(x)=3x^2-3$,

由 $f'(x)>0$,得$x>1$或$x<-1$,此时函数单调递增,

由 $f'(x)<0$,得$-1<x<1$,此时函数单调递减.

即当$\mathrm{x}=-1$时,函数$f(x)$取得极大值,

当$\mathrm{x}=1$时,函数$f(x)$取得极小值,

要使函数$f(x)=x^3-3x+m$只有一个零点,则满足极大值小于0或极小值大于0,

即极大值$f(-1)=-1+3+m=m+2<0$,解得$m<-2$.

极小值$f(1)=1-3+m=m-2>0$,解得$m>2$.

综上实数m的取值范围:$m<-2$或$m>2$.

所以B选项是正确的.

解析

利用导数求出函数的极大值和极小值,要使函数$f(x)=x^3-3x+m$只有一个零点,则满足极大值小于0或极小值大于0.

本题主要考查三次函数的图象和性质,利用导数求出函数的极值是解决本题的关键.

3. 答案

**解析▶** $f'(x)=x^2-2x-3$，令 $x^2-2x-3=0$，可得 $x=3$ 或 $x=-1$. 经分析可知，它们是函数 $f(x)$ 的极值点.

由直线 $y=a$ 与函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ 的图象相切，可知它们只有在极值点所对应的点处相切. 由 $x=3$ 或 $x=-1$ 可得函数的极值为 $-8$ 或 $\frac{8}{3}$.

故实数 $a$ 的值为 $-8$ 或 $\frac{8}{3}$.

**答案▶** D

4. 答案

A

正确率: 39%, 易错项: C

解析

本题主要考查函数的极值与最值。

由题意知 $f(x)=(x^2+ax-1)\mathrm{e}^{x-1}$，

所以 $f'(x)=(2x+a)\mathrm{e}^{x-1}+(x^2+ax-1)\mathrm{e}^{x-1}=[x^2+(2+a)x+a-1]\mathrm{e}^{x-1}$，

因为 $x=-2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，

所以 $f'(-2)=[4-2(2+a)+a-1]\cdot\mathrm{e}^{-3}=0$，

即 $\dfrac{-1-a}{\mathrm{e}^3}=0$，

解得 $a=-1$，

所以 $f(x)=(x^2-x-1)\mathrm{e}^{x-1}$，$f'(x)=(x^2+x-2)\mathrm{e}^{x-1}$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x^2+x-2=0$，

解得$x=1$或$x=-2$，

当$x<-2$或$x>1$时，$x^2+x-2>0$，

此时$f'(x)=(x^2+x-2)\mathrm{e}^{x-1}>0$，

当$-2<x<1$时，$x^2+x-2<0$，

此时$f'(x)=(x^2+x-2)\mathrm{e}^{x-1}<0$。

所以函数$f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递增，在$(-2,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以当$x=1$时，函数$f(x)$取极小值$f(1)=(1-1-1)\cdot\mathrm{e}^{1-1}=-1$。

故本题正确答案为A。

5. 答案

**解析▶** 因为函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$ 在区间 $(\frac{1}{3},4)$ 上有极值点，所以 $f'(x)=x^2-ax+1$ 在区间 $(\frac{1}{3},4)$ 上有零点，且在零点左右导数值异号.

**方法一** ①当 $f'(x)=x^2-ax+1$ 在区间 $(\frac{1}{3},4)$ 上只有一个零点时，$f'(\frac{1}{3})f'(4)<0$ 或 $\begin{cases}f'(\frac{1}{3})>0,\\ f'(4)=0,\\ \frac{1}{3}<\frac{a}{2}<4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f'(\frac{1}{3})=0,\\ f'(4)>0,\\ \frac{1}{3}<\frac{a}{2}<4,\end{cases}$ 解得 $\frac{10}{3}\leqslant a<\frac{17}{4}$.

②当 $f'(x)=x^2-ax+1$ 在区间 $(\frac{1}{3},4)$ 上有两个不同的零点时，$\begin{cases}f'(\frac{1}{3})>0,\\ f'(4)>0,\\ f'(\frac{a}{2})<0,\\ \frac{1}{3}<\frac{a}{2}<4,\end{cases}$ 解得 $2<a<\frac{10}{3}$.

综上可得，实数 $a$ 的取值范围为 $(2,\frac{17}{4})$.

**方法二** 令 $f'(x)=x^2-ax+1=0$，则 $a=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(\frac{1}{3},4)$ 上有解.

由函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的性质可知，当 $x\in(\frac{1}{3},4)$ 时，$f(x)\in[2,\frac{17}{4})$，即 $a\in[2,\frac{17}{4})$.

当 $a=2$ 时，$f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant0$，$f(x)$ 单调递增，则 $f(x)$ 无极值，不符合题意，舍去.

综上可知，实数 $a$ 的取值范围为 $(2,\frac{17}{4})$.

**答案▶** $(2,\frac{17}{4})$

6. 答案

**解析▶** 因为 $g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$，

所以 $g'(x)=f'(x)+\cos x-(x-a)\sin x-\cos x$

$=x(x-a)-(x-a)\sin x$

$=(x-a)(x-\sin x)$,

令 $h(x)=x-\sin x$,

则 $h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,

所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $h(0)=0$,

所以当 $x>0$ 时,$h(x)>0$;当 $x<0$ 时,$h(x)<0$.

(i) 当 $a<0$ 时,$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$.

当 $x\in(-\infty,a)$ 时,$x-a<0$,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;

当 $x\in(a,0)$ 时,$x-a>0$,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减;

当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$x-a>0$,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增.

所以当 $x=a$ 时,$g(x)$ 取得极大值,极大值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$;当 $x=0$ 时,$g(x)$ 取得极小值,极小值是 $g(0)=-a$.

(ii) 当 $a=0$ 时,$g'(x)=x(x-\sin x)$.

当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,$g'(x)\geqslant 0$,$g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,$g(x)$ 无极大值也无极小值.

(iii) 当 $a>0$ 时,$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$x-a<0$,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;

当 $x\in(0,a)$ 时,$x-a<0$,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减;

当 $x\in(a,+\infty)$ 时,$x-a>0$,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增.

所以当 $x=0$ 时,$g(x)$ 取到极大值,极大值是 $g(0)=-a$;

当 $x=a$ 时,$g(x)$ 取到极小值,极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$.

综上所述:

当 $a<0$ 时,函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增,在 $(a,0)$ 上单调递减,函数既有极大值,又有极小值,极大值是

$g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$，极小值是 $g(0)=-a$；

当 $a=0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值；

当 $a>0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,a)$ 上单调递减，函数既有极大值，又有极小值，极大值是 $g(0)=-a$，极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$.

7. 答案

**例1 解** $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x+1}+a(2x-1)=\frac{1}{x+1}(2ax^2+ax+1-a)$.

令 $g(x)=2ax^2+ax+1-a(x>-1)$，

当 $a=0$ 时，$g(x)=1$，则 $f'(x)>0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，

则 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，即当 $a=0$ 时，函数无极值点.

当 $a\neq 0$ 时，①由 $\Delta=a(9a-8)\leqslant 0$，得 $0<a\leqslant\frac{8}{9}$，此时 $g(x)\geqslant 0$，则 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，即 $0<a\leqslant\frac{8}{9}$，函数无极值点.

②由 $\Delta>0$，得 $a>\frac{8}{9}$ 或 $a<0$ 两个不同的范围，

设方程 $2ax^2+ax+1-a=0$ 的两根分别为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

$x_1+x_2=-\frac{1}{2}$，当 $a>\frac{8}{9}$ 时，函数 $g(x)$ 的图象如图 1 所示，$x_1,x_2$ 的中点为 $-\frac{1}{4}$，

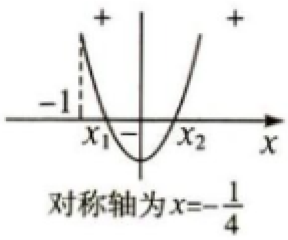



图 1

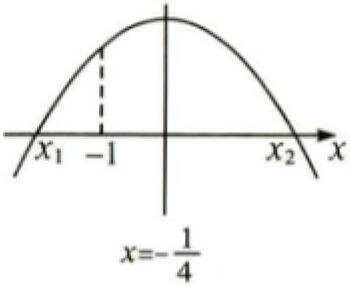
$\therefore x_1<-\frac{1}{4}, x_2>-\frac{1}{4}$，由 $g(-1)=1>0$，可得 $-1<x_1<-\frac{1}{4}$，则当 $x\in(-1,x_1)$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

因此，当 $a>\frac{8}{9}$，函数有两个极值点；

当 $a<0$ 时，函数 $g(x)$ 的图象如图 2 所示，




由 $g(-1)=1>0$，可得 $x_1<-1$，

则当 $x\in(-1,x_2)$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，因此，当 $a<0$ 时，函数有一个极值点.

综上所述，当 $a<0$ 时，函数有一个极值点；当 $0\leqslant a\leqslant\frac{8}{9}$ 时，函数无极值点；当 $a>\frac{8}{9}$ 时，函数有两个极值点.

解析

**解题心得** 利用导数求含参数的原函数的单调区间→极值→最大(小)值问题的具体步骤：

(1)求函数定义域.

(2)求导→通分或因式分解或二次求导.

(3)对参数分类，分类的层次：

①按导函数的类型分大类；

②按导函数是否有零点分小类；

③在小类中再按导函数零点的大小分小类；

④在小类的小类中再按零点是否在定义域中分小类.

8. 答案

7. **解析**：(1)因为 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$，

所以 $f'(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x$.

$f'(1)=(1-a)e$.

由题设知 $f'(1)=0$，即 $(1-a)e=0$，

解得 $a=1$.

此时 $f(1)=3e\neq 0$.

所以 $a$ 的值为 1.

(2)由(1)得 $f'(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x=(ax-1)(x-2)e^x$.

若 $a>\frac{1}{2}$，则当 $x\in\left(\frac{1}{a},2\right)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值.

若 $a\leqslant\frac{1}{2}$，则当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

综上可知，$a$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

9. 答案

**解**：(1)对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=3ax^2+2x$，

因为 $f(x)$ 在 $x=-\frac{4}{3}$ 处取得极值，所以 $f'\left(-\frac{4}{3}\right)=0$，

所以 $3a\cdot\frac{16}{9}+2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{16a}{3}-\frac{8}{3}=0$,

解得 $a=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)得 $g(x)=\left(\frac{1}{2}x^3+x^2\right)e^x$,

故 $g'(x)=\left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)e^x+\left(\frac{1}{2}x^3+x^2\right)e^x$

$=\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2+2x\right)e^x$

$=\frac{1}{2}x(x+1)(x+4)e^x$.

令 $g'(x)=0$,解得 $x=0$,$x=-1$ 或 $x=-4$.

当 $x<-4$ 时,$g'(x)<0$,故 $g(x)$ 为减函数;

当 $-4<x<-1$ 时,$g'(x)>0$,故 $g(x)$ 为增函数;

当 $-1<x<0$ 时,$g'(x)<0$,故 $g(x)$ 为减函数;

当 $x>0$ 时,$g'(x)>0$,故 $g(x)$ 为增函数.

综上知,$g(x)$ 在 $(-\infty,-4)$ 和 $(-1,0)$ 内为减函数,在 $(-4,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 内为增函数.

解析

(1)根据函数极值的性质，代值计算即可。

(2)代入(1)的结果，对$g(x)$求导，计算函数的单调性即可。

10.答案

6.解:(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

①若$a\leqslant 2$,则$f'(x)\leqslant 0$,当且仅当$a=2$,$x=1$时,$f'(x)=0$,

∴$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

②若$a>2$,令$f'(x)=0$,得$x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$或$x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当$x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$时,$f'(x)<0$;

当$x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$时,$f'(x)>0$.

∴$f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$,$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$上单调递减,在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上单调递增.

(2)证明:由(1)知,$f(x)$存在两个极值点时,$a>2$.

∵$f(x)$的两个极值点$x_1,x_2$满足$x^2-ax+1=0$,

∴$x_1x_2=1$,不妨设$x_1<x_2$,则$x_2>1$.

∵$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}$,

∴要证$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$等价于证明$\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.

设函数$g(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$,

由(1)知,$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

又$g(1)=0$,∴当$x\in(1,+\infty)$时,$g(x)<0$.

∴$\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$,即$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

11.答案

D

解析

$f'(x)=3x^2-3b$,若$b\leqslant 0$,则$f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$在区间$(0,1)$内没有极值,故$b>0$.令$f'(x)=0$,解得$x=\sqrt{b}$或$x=-\sqrt{b}$,由于函数$f(x)$在区间$(0,1)$内有极小值,则有$0<\sqrt{b}<1$,故$0<b<1$.

12.答案

A

解:$\because f'(x)=2xlnx+x$,$g'(x)=lnx^2+2$

又 $f(x)=x^2lnx(x>0)$ 的极值点为 $\alpha$ , $g(x)=xlnx^2(x>0)$ 的极值点为 $\beta$ ,

$\therefore 2\alpha ln\alpha+\alpha=0$ , $ln\beta^2+2=0$

$\therefore \alpha=e^{-\frac{1}{2}},\beta=e^{-1}$

$\therefore \alpha>\beta$

所以A选项是正确的.

解析

利用积的导数法则求 $f'(x)$ , $g'(x)$ ;据函数极值点处的导数为零,列出方程解得.

本题考查导数的运算法则和极值点处的导数为零.

13.答案

此题答案为：1.

解：由f(x)=1-xsinx，得f′(x)=-sinx-xcosx.

∵函数f(x)在$x=x_0$处取得极值，

$\therefore f'(x_0)=-sinx_0-x_0cosx_0=0$，

故$x_0cosx_0=-sinx_0$，

则$(1+-x_0^2)(1+cos2x_0)-1=2cos^2x_0+2x_0^2cos^2x_0-1=2cos^2x_0+2(-sinx_0)^2-1=1$.

解析

【考点提示】

本题是一道关于函数导数应用的题目，掌握函数取得极值时导数的取值以及同角三角函数的关系是解题的关键；

【解题方法提示】

f(x)=1-xsinx，根据导数的四则运算法则，得f′(x)=-sinx-xcosx，根据题意有$f'(x_0)=-sinx_0-x_0cosx_0=0$，即$x_0cosx_0=-sinx_0$①；

对$(1+x_0^2)(1+cos2x_0)-1$进行化简，代入①式，利用同角三角函数的关系最终得到答案即可.

14.答案

（1）由$f(x)=x^3+ax^2+bx$，得
$f'(x)=3x^2+2ax+b.$
$\because$ 1和$-1$是函数$f(x)=x^3+ax^2+bx$的两个极值点，
$\therefore f'(1)=3+2a+b=0$，
$f'(-1)=3-2a+b=0$，解得$a=0$，
$b=-3.$
(2) $\because$由（1）得，$f(x)=x^3-3x$，
$\therefore g'(x)=f(x)+2=x^3-3x+2$
$=(x-1)^2(x+2)$
，解得$x_1=x_2=1$，$x_3=-2.$
$\because$当$x<-2$时，$g'(x)<0$；当$-2<x<1$时，$g'(x)>0$，
$\therefore x=-2$是$g(x)$的极值点.
$\because$当$-2<x<1$或$x>1$时，$g'(x)>0$，
$\therefore x=1$不是$g(x)$的极值点.
$\therefore g(x)$的极值点是$-2.$

解析

（1）先求函数的导函数，然后根据1和-1是函数f（x）=$x^3$+a$x^2$+bx的两个极值点，则f'（1）=0，f'（-1）=0，建立方程组，解之即可求出a与b的值；
（2）先求出g'（x）的解析式，求出g'（x）=0的根，判定函数的单调性，从而函数的g（x）的极值点．