Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Computação - IC
Projeto e Análise de Algoritmos - PAA
Lista de Exercícios Teórica - AB2

1. A menor quantidade de multiplicações é 3400 multiplicações para o caso dado. A associação é $A.((B.C).D)$. A construção da matriz de memorização está no GitHub: https://github.com/WaddFranklin/Lista2PAA

2. As respostas dos itens (a) e (b) estão no GitHub em formato odp: https://github.com/WaddFranklin/Lista2PAA

3. Para provar que o problema da partição é NP-Completo, devemos mostrar que ele é NP e NP-Difícil. Se o problema estiver na interseção de NP e NP-Difícil, está provado que ele é NP-Completo.

   (a) Para mostrar que é NP, devemos verificar se uma solução para esse problema pode ser verificada em tempo polinomial. Dados os subconjuntos S_1 e S_2, basta somarmos os elementos de cada conjunto e verificar se a soma é igual. Este algoritmo pode ser executado em O(N). A solução é construída por um algoritmo não-determinístico. Como vamos percorrer todo o conjunto S, basta decidir se o elemento de S vai para S_1 ou para S_2.

   (b) Para mostrar que o problema é NP-Difícil, basta reduzir um problema NP-Completo ou NP-Difícil para o problema da partição.

   Prova: Tentaremos reduzir o problema **Subset Sum** para o nosso da **Partição**. Seja $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e α o número que queremos obter. Fazendo $\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $a_{n+1} = \sigma + \alpha$ e $a_{n+2} = 2\sigma - \alpha$.

   Usando **Partição**, se tentarmos separar de tal modo que tenhamos $S|\{a_{n+1}, a_{n+2}\}$, teremos que $\sigma|3\sigma$, o que não é válido pois as partições devem ter o valor da sua soma iguais. Logo, por Partição, devemos ter:

$$
\begin{aligned}
S^{''} \cup \{a_{n+1}\} &= (S^{'} - S^{''}) \cup \{a_{n+2}\} \\
\sum S^{'} + \sigma + \alpha &= \sum (S^{'} - S^{''}) + 2\sigma - \alpha \\
x + \sigma + \alpha &= (\sigma - x) + 2\sigma - \alpha \\
x + \sigma + \alpha &= 3\sigma - x - \alpha \\
2\sigma &= 2x + 2\alpha \\
x &= \sigma - \alpha
\end{aligned}
$$

   Assim, de

$$S^{''} \cup \{a_{n+1}\} = (S^{'} - S^{''}) \cup \{a_{n+2}\}$$

vem que,

$$\sigma - \alpha + \sigma + \alpha = (\sigma - (\sigma - \alpha)) + 2\sigma - \alpha \Rightarrow \boxed{2\sigma = 2\sigma}$$

Por fim, como $S^{'} - S^{''} = \alpha$, satisfazendo a condição do **Subset Sum**, utilizando **Partição**. Ou seja, mostramos que **Partição** é NP e NP-Difícil, que significa que ele é NP-Completo.

4.
- P é o conjunto de problemas são resolvidos em tempo polinomial.
- NP é o conjunto de problemas que são resolvidos em tempo polinomial por um algoritmo não determinístico.
- Exp é o conjunto de problemas que são resolvidos em tempo exponencial.
- R é o conjunto de problemas que são resolvidos em tempo finito.
- NP-Difícil é o conjunto de problemas que não são resolvidos em tempo finito ou que podem ser resolvidos com um algoritmo não determinístico.
- NP-Completo é a intersecção dos problemas NP com os NP-Difícil.