Solução de equações em uma variável

Crescimento populacional

Uma população cresce continuamente no tempo a uma taxa proporcional à população em cada instante.

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

Solução: $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$, onde N_0 é a população inicial.

E se houver imigração a uma taxa constante v ?

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + v$$

Solução: $N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + v$$

Solução: $$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

Suponha que N(0) = 1.000.000 e que 435.000 indivíduos imigrem por ano no primeiro ano, e que 1.564.000 indivíduos existam no fim do primeiro ano. Determine N(t).

Precisamos achar λ :

$$1{,}564{,}000 = 1{,}000{,}000 e^{\lambda} + \frac{435{,}000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

Nota 10 nas 2 médias para quem resolver esta equação.

Alternativa: métodos numéricos.

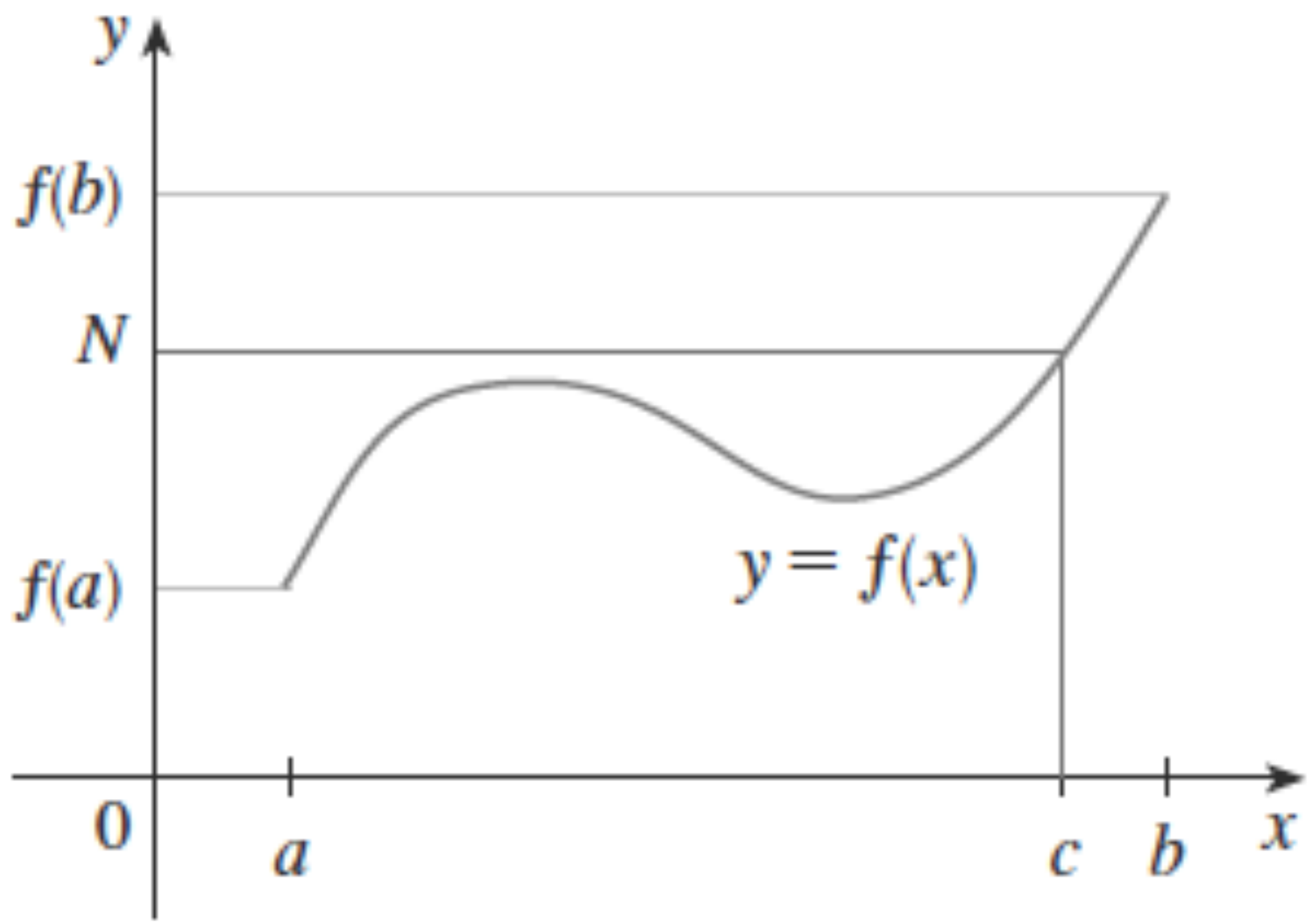
Método da bisseção

Como achar a raiz de uma equação?

$$f(x) = 0$$

Método baseado no Teorema do Valor Intermediário:

Seja f contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, e N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$.



Ps

Idéia ge
repetidan ... z p.

1 - Faça

2 - $p_1 =$

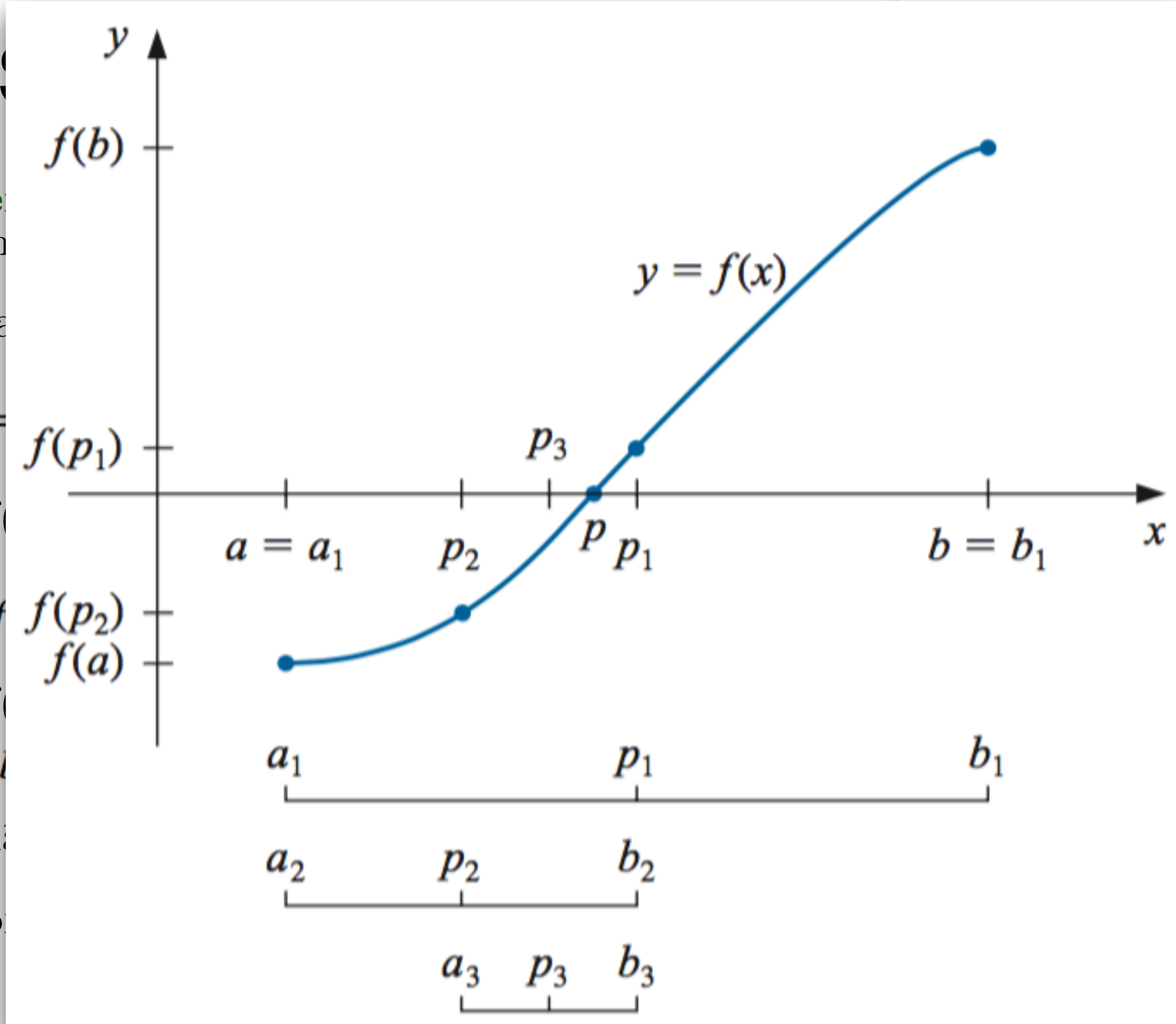
3 - Se f(

4 - Se f

5 - Se f(
$p \in (p_1,$

Sen

6 - Rep



Algoritmo

INPUT endpoints a, b; tolerance TOL; maximum number of iterations N_0.

OUTPUT approximate solution p or message of failure.

Step 1 Set $i = 1$;
$FA = f(a)$.

Step 2 While $i \leq N_0$ do Steps 3–6.

Step 3 Set $p = a + (b - a)/2$; (*Compute p_i.*)
$FP = f(p)$.

Step 4 If $FP = 0$ or $(b - a)/2 < TOL$ then
OUTPUT (p); (*Procedure completed successfully.*)
STOP.

Step 5 Set $i = i + 1$.

Step 6 If $FA \cdot FP > 0$ then set $a = p$; (*Compute a_i, b_i.*)
$FA = FP$
else set $b = p$. (*FA is unchanged.*)

Step 7 OUTPUT ('Method failed after N_0 iterations, $N_0 =$', N_0);
(*The procedure was unsuccessful.*)
STOP.

Outras condições de parada

Step 4 If $FP = 0$ or $(b - a)/2 < TOL$ then
OUTPUT (p); (*Procedure completed successfully.*)
STOP.

Gere $p_1, \ldots, p_N$ até que:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon,$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0,$$

Melhor opção.

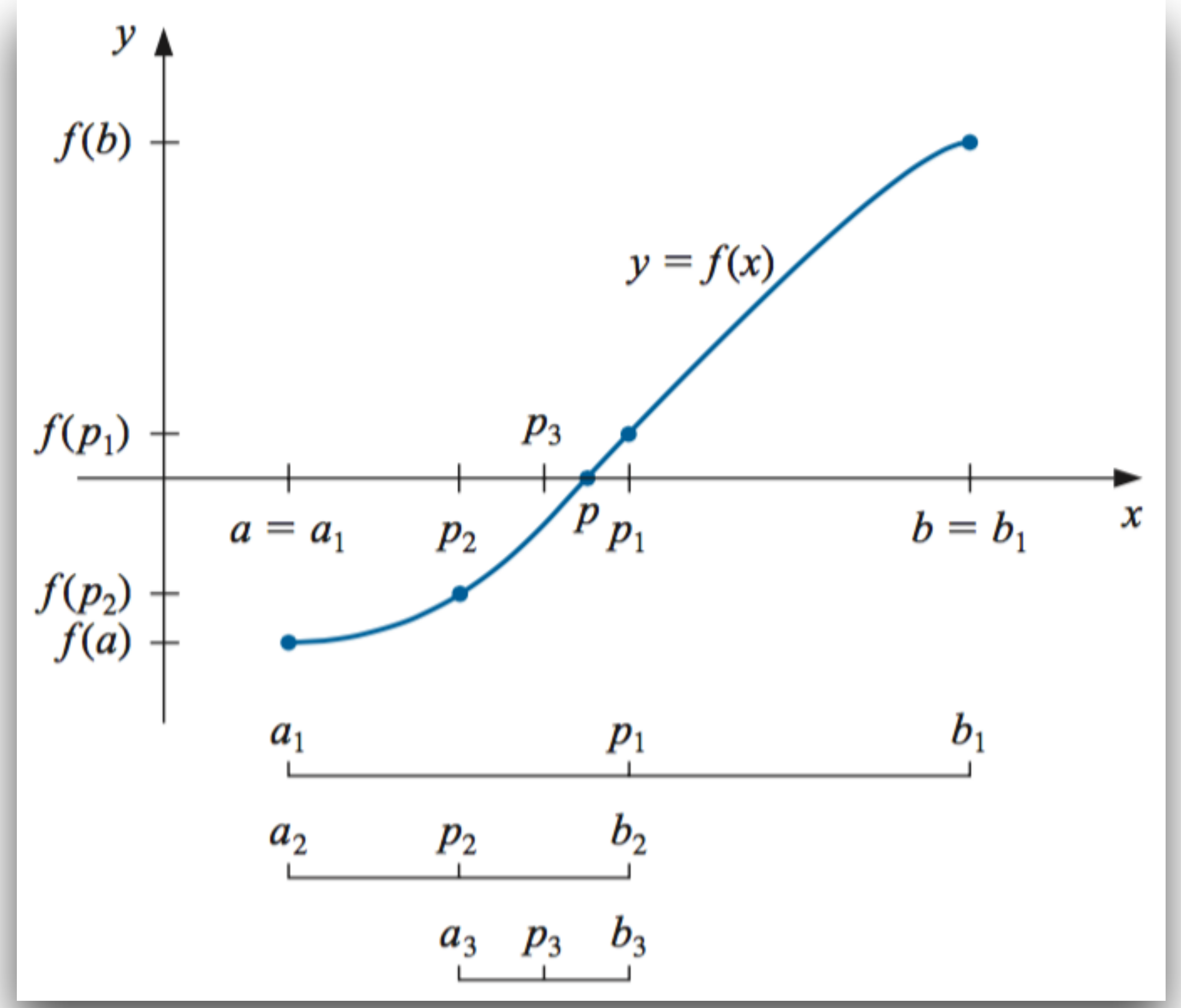
$$|f(p_N)| < \varepsilon.$$

Problemas:

1 - Pode ser que $p_n - p_{n-1}$ convirja, mas p_n não.

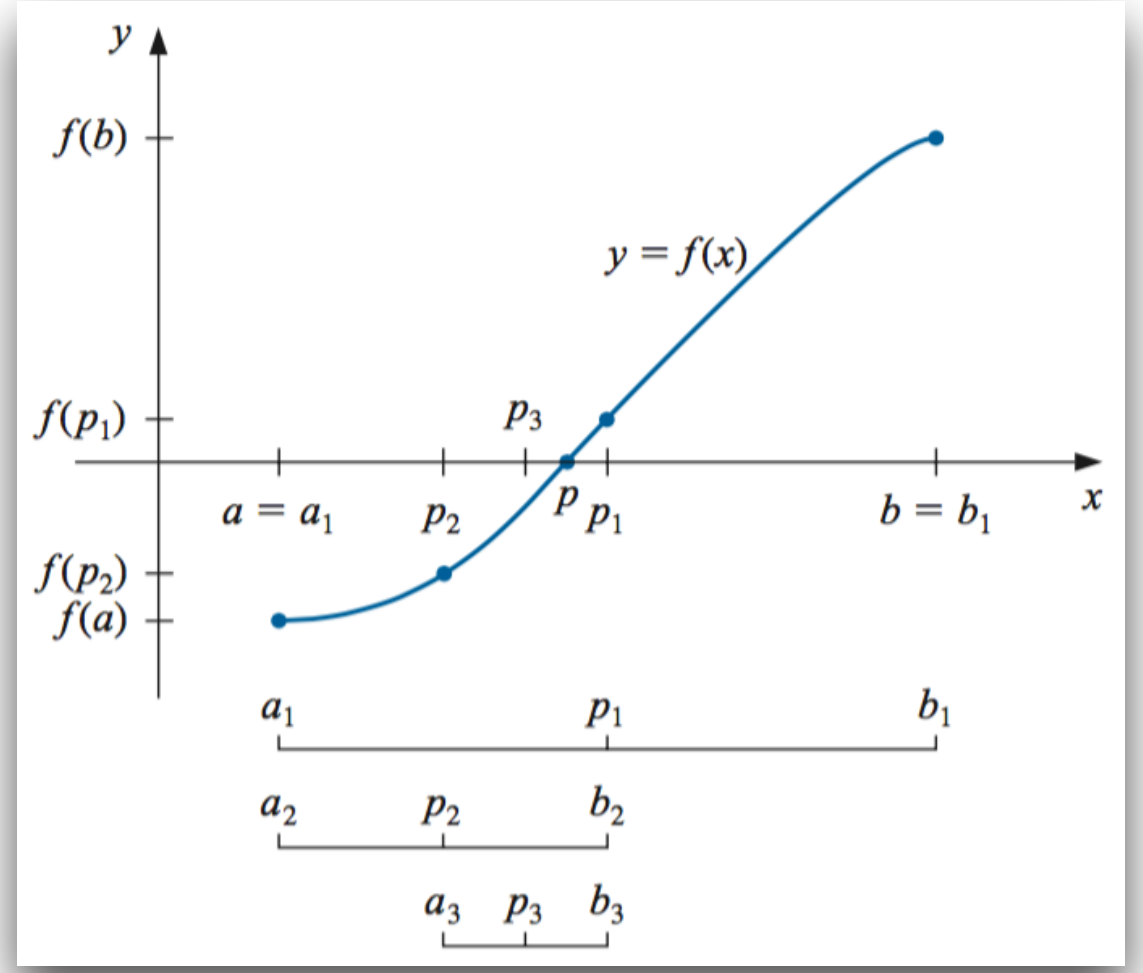
2 - $f(p_n)$ pode ser pequeno mas p_n ser bem diferente de p.

3 - Loop infinito.



Como escolher [a,b] ?

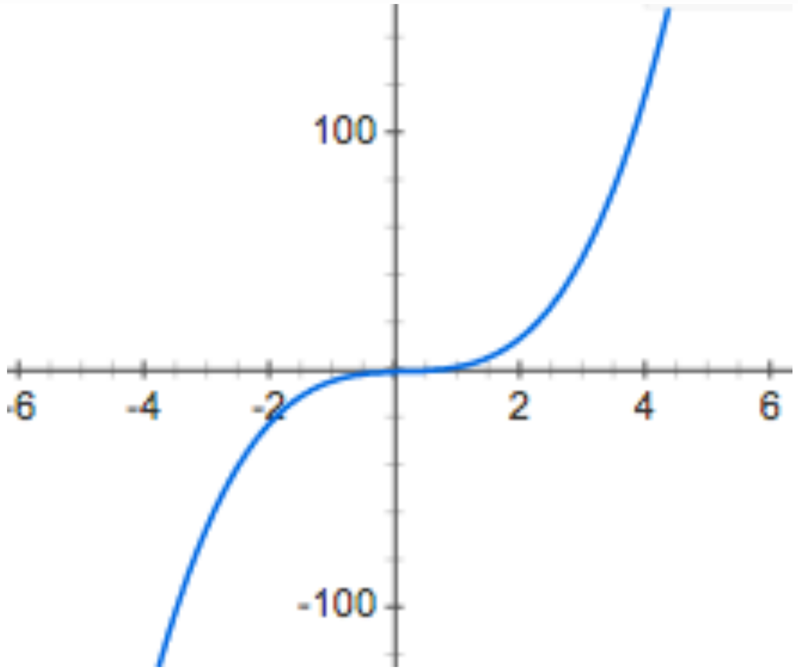
Quanto menor [a,b], menor o número de iterações.



Exemplo:

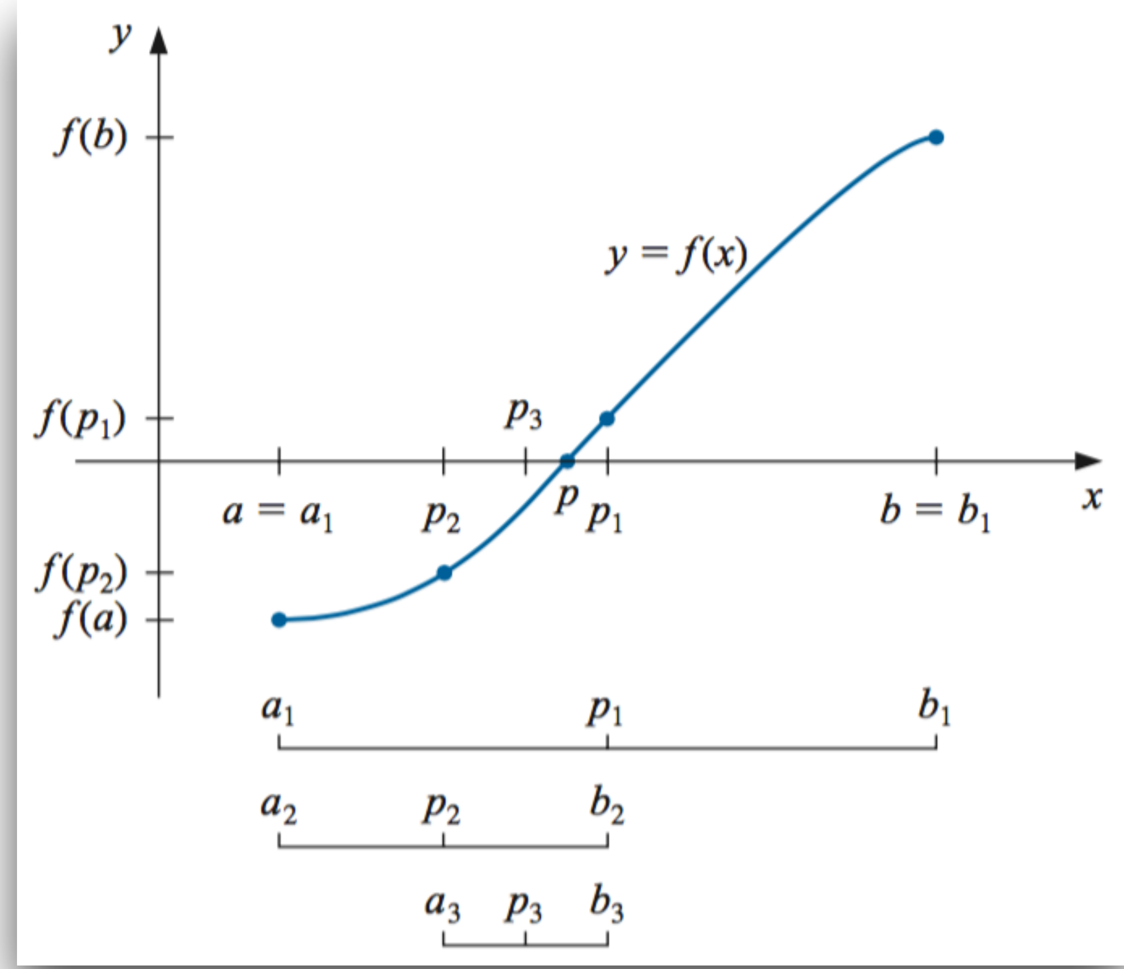
$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$$

$f(-4) \cdot f(4) < 0$ e $f(0) \cdot f(1) < 0$,



Iniciando em [0,1], teremos 3 iterações a menos.

Mostre que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tem uma raiz em $[1, 2]$ e use o método da bisseção para determinar uma aproximação para a raiz com precisão (relativa) de pelo menos 10^{-4}.



1 - Aplicar TVI.

$$f(1) = -5$$
$$f(2) = 14$$

f contínua.

Pelo TVI, f tem raiz real em $(1,2)$.

2 - Como medir a precisão?

Primeiro vamos mostrar que:

$$|p - p_n| < b_{n+1} - a_{n+1}$$

2 - Como medir a precisão?

Primeiro vamos mostrar que:

$$|p - p_n| < b_{n+1} - a_{n+1}$$

Prova:

Sabemos que $a_n \leq p \leq b_n$, pois a raiz exata está no intervalo $[a_n, b_n]$.

Por outro lado, $p_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ por definição.

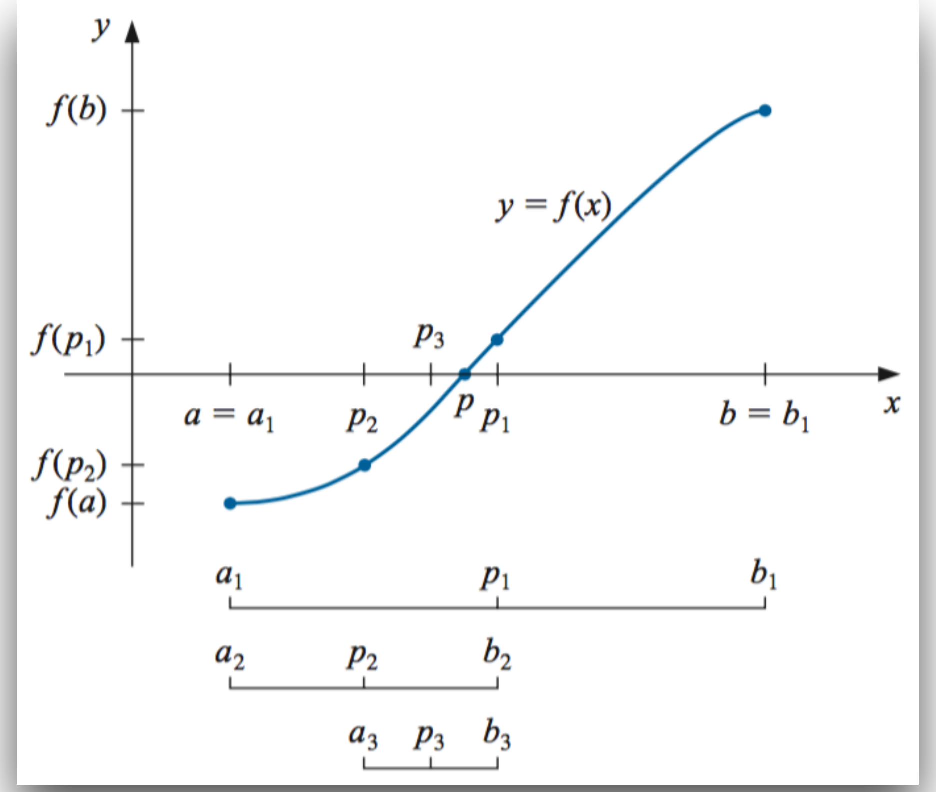
Vamos subtrair p_n da primeira inequação e usar sua definição:

$$a_n - p_n \leq p - p_n \leq b_n - p_n$$

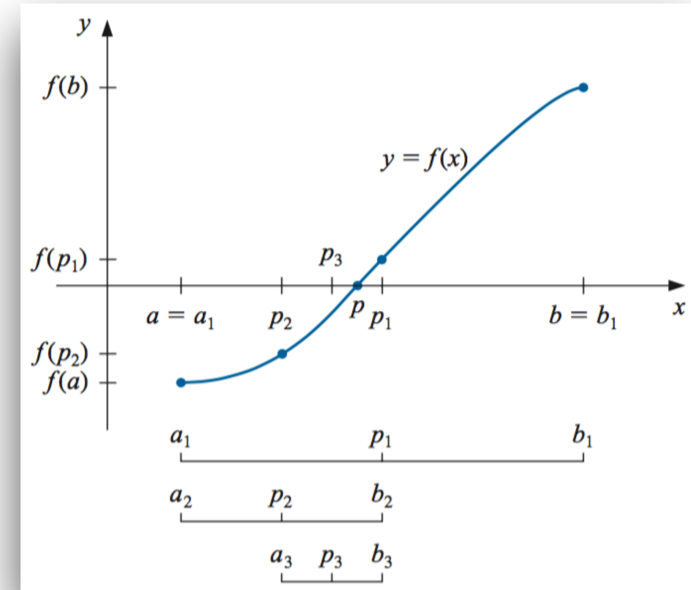
$$\frac{a_n - b_n}{2} \leq p - p_n \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

$$-\left(\frac{b_n - a_n}{2}\right) \leq p - p_n \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

$$|p - p_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = b_{n+1} - a_{n+1}$$



Teorema: Seja $f \in C[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. O método da Bisseção gera uma sequência $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que se aproxima de uma raiz p, onde



$$|p_n - p| \le \frac{b-a}{2^n}, \quad \text{para } n \ge 1$$

Prova:

Para cada $n \ge 1$, $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}(b-a)$ e $p \in (a_n, b_n)$.

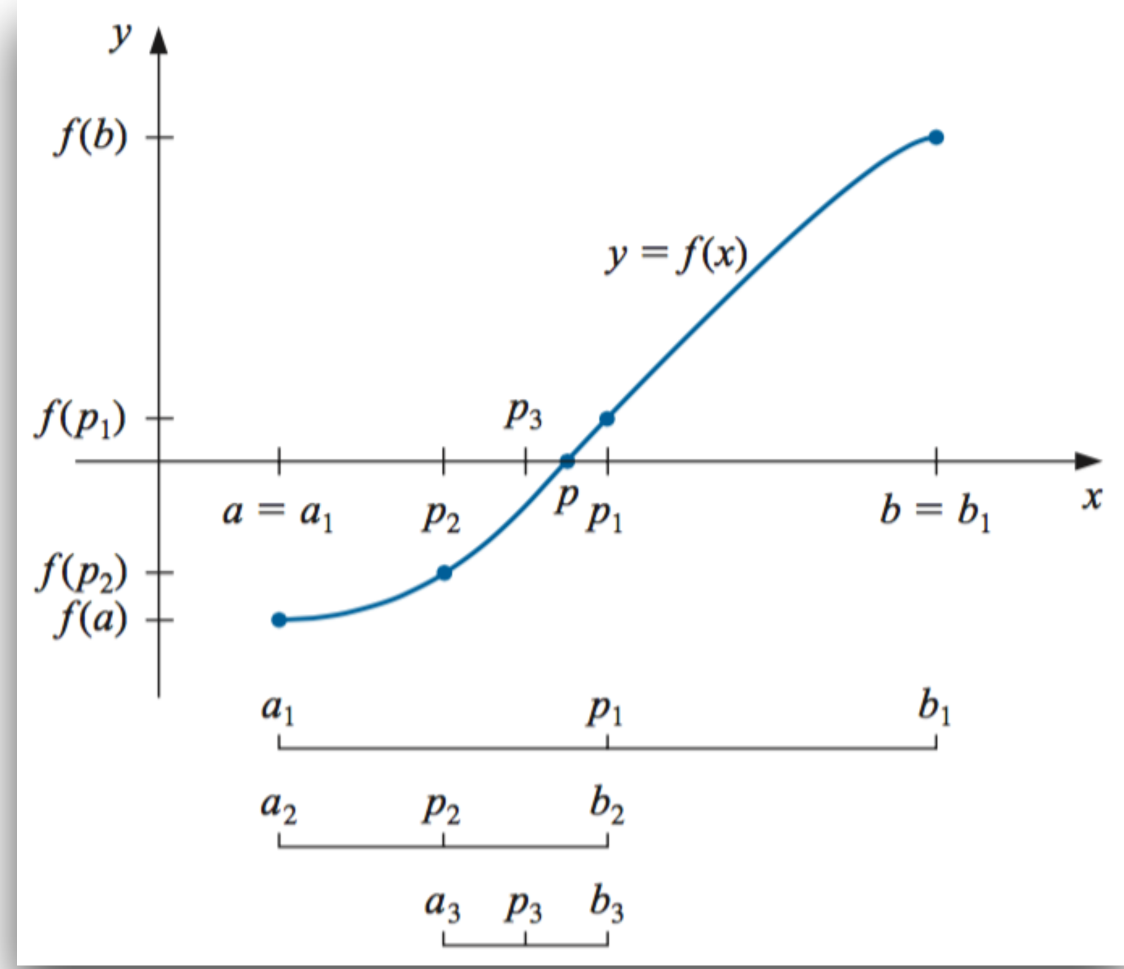
Mas $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ para todo $n \ge 1$. Então:

$$|p_n - p| < \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}.$$

$$\boxed{|p - p_n| \le \frac{b_n - a_n}{2} = b_{n+1} - a_{n+1}}$$

Como $|p_n - p| < (b-a)\dfrac{1}{2^n}$, a sequência $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para p com taxa de convergência $O\left(\frac{1}{2^n}\right)$, ou seja, $p_n = p + O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Mostre que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tem uma raiz em $[1, 2]$ e use o método da bisseção para determinar uma aproximação para a raiz com precisão (relativa) de pelo menos 10^{-4}.



1 - Aplicar TVI.

$$f(1) = -5$$
$$f(2) = 14$$

f contínua.

Pelo TVI, f tem raiz real em $(1,2)$.

2 - Como medir a precisão?

Como $|p - p_n| < b_{n+1} - a_{n+1}$:

$$\frac{|p - p_n|}{|p|} < \frac{|b_{n+1} - a_{n+1}|}{|p|} < \frac{|b_{n+1} - a_{n+1}|}{|a_{n+1}|} < 10^{-4}$$

Mostre que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tem uma raiz em [1, 2] e use o método da bisseção para determinar uma aproximação para a raiz com precisão (relativa) de pelo menos 10^{-4}.

2 - Como medir a precisão?

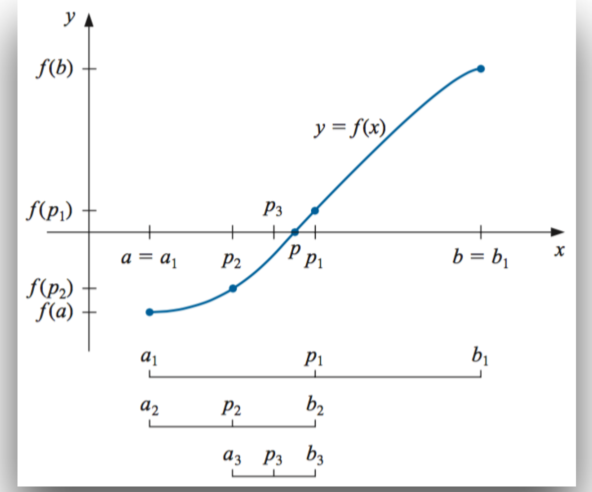
Como $|p - p_n| < b_{n+1} - a_{n+1}$:

$$\frac{|p - p_n|}{|p|} < \frac{|b_{n+1} - a_{n+1}|}{|p|} < \frac{|b_{n+1} - a_{n+1}|}{|a_{n+1}|} < 10^{-4}$$

Obs.: note que $p > 0$ porque $p \in [1, 2]$.

Como $p \in (a_{n+1}, b_{n+1})$, então $|p - a_{n+1}| < |b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{1}{2^n}(b - a)$

Daí $|p - a_{n+1}| \to 0$ quando $n \to \infty$, logo $a_{n+1} > 0$ para n suficientemente grande. Portanto, $|p| > |a_{n+1}|$.



Mostre que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tem uma raiz em [1, 2] e use o método da bisseção para determinar uma aproximação para a raiz com precisão de pelo menos 10^{-4}.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	−1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	−0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	−0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	−0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	−0.03215
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	−0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	−0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	−0.00396
13	1.364990235	1.365234375	1.365112305	−0.00194

Observação interessante: $|f(p_9)| < |f(p_{13})|$.

Discussão:

O método da bisseção sempre converge para a solução, mas pode ser lento (N pode ser alto).

Determine o número de iterações necessário para resolver

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

com precisão (absoluta) 10^{-3} usando $a_1 = 1$ e $b_1 = 2$.

Precisamos encontrar o menor inteiro N que satisfaz

$$|p_N - p| \le 2^{-N}(b - a) = 2^{-N} < 10^{-3}.$$

$$\log_{10} 2^{-N} < \log_{10} 10^{-3} = -3$$

$$-N \log_{10} 2 < -3$$

$$N > \frac{3}{\log_{10} 2} \approx 9.96.$$

Portanto, precisamos de 10 iterações para garantir esta precisão.