

Centrale Physique MP 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Aurélien Fraisse (Université de Princeton) ; il a été relu par Stanislas Antczak (Professeur agrégé) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce problème se compose de quatre parties, pour l'essentiel indépendantes, recouvrant l'ensemble du programme d'électromagnétisme de deuxième année, ainsi que la conduction thermique dans les métaux et quelques méthodes d'électrocinétique.

- La première partie se propose d'étudier le champ électromagnétique pouvant régner dans un guide d'onde ou une cavité, ainsi que les différentes propriétés de la propagation de ces ondes dans de tels milieux. Assez progressives dans la difficulté, les questions sont très proches d'applications directes du cours et donc tout à fait abordables.
 - Dans la deuxième partie, on étudie un analogue électrocinétique du problème précédent, puis les applications pratiques que peuvent avoir les dispositifs à guide d'onde. Cette partie, plus qualitative, est assez difficile d'accès. Les questions ne fournissent que peu d'indications alors que les raisonnements rigoureux ne sont pas aisés.
 - La troisième partie propose l'étude thermodynamique d'un dispositif de chauffage par micro-ondes, ce qui se ramène à un problème de diffusion thermique avec sources. Certaines questions initiales sont assez délicates du fait d'imprécisions de l'énoncé, et on ne peut malheureusement pas continuer sans y avoir répondu. Les candidats étant parvenus à surmonter ces difficultés ont ensuite accès à une introduction à l'étude perturbative de la réponse d'un système soumis à une excitation périodique. La recherche d'analogies thermo-électriques conclut cette partie qui est, pour l'essentiel, calculatoire.
 - Enfin, la dernière partie du problème revient sur le guide d'onde étudié au début, en considérant désormais ses parois comme des métaux non parfaits. Après avoir fait retrouver des résultats classiques de cours, le sujet se poursuit
-

Ce problème se compose de quatre parties, pour l'essentiel indépendantes, recouvrant l'ensemble du programme d'électromagnétisme de deuxième année, ainsi que la conduction thermique dans les métaux et quelques méthodes d'électrocinétique.

- La première partie se propose d'étudier le champ électromagnétique pouvant régner dans un guide d'onde ou une cavité, ainsi que les différentes propriétés de la propagation de ces ondes dans de tels milieux. Assez progressives dans

INDICATIONS

- I.A.1 Supposer l'existence d'un champ possédant les caractéristiques demandées, et étudier l'implication des conditions aux limites du problème sur celui-ci.
- I.A.2.a Afin d'obtenir une condition sur $\sin \alpha$, penser que les conditions aux limites sont vérifiées uniquement par la somme du champ incident et du champ réfléchi.
- I.A.2.b Pour établir que \vec{E} est solution des équations de Maxwell, se souvenir que celles-ci sont linéaires.
- I.B.3.b Utiliser l'équation de Maxwell-Faraday pour déterminer \vec{B} .
- I.B.3.c Afin d'établir l'analogie recherchée, remarquer que l'énergie est stockée sous deux formes dans le guide d'onde et trouver quels composants électriques peuvent permettre de faire de même.
- II.A.1 Bien que l'énoncé oublie de le préciser, le dipôle AB est constitué d'une infinité de cellules, et rajouter une cellule ne change donc pas l'impédance. Pour déterminer les signes, remarquer qu'une association de composants passifs ne peut être que de résistance positive, et étudier le cas $\omega \rightarrow 0$.
- II.A.2 Dans l'un des deux cas étudiés à la question précédente, mettre en évidence la nécessité qu'une partie de l'énergie « s'échappe » à l'infini.
- II.B.1.b Considérer les plans suffisamment fins et nombreux pour pouvoir assimiler l'objet étudié à une lentille plan-convexe d'indice n . On rappelle également que les lois de Descartes sur la réfraction sont équivalentes au théorème de Malus, mais le principe attendu par l'énoncé est hors-programme (principe de Fermat).
- II.B.2.b Contrairement à ce qu'indique l'énoncé, considérer que l'onde se propageant ici est celle trouvée à la question I.A.2.b et non à la question I.B.3.a, et admettre que les trous sont identiques.
- II.B.2.c La réponse attendue à cette question est visiblement erronée.
- III.C.1 Pour déterminer les constantes d'intégration, utiliser les résultats de la question III.A.3.
- III.E.1.b Pour établir l'analogie demandée, chercher quelles similitudes de comportement peuvent présenter les objets électriques proposés par l'énoncé avec la situation thermique étudiée.
- IV.A.1.a Utiliser l'équation de Maxwell-Gauss afin d'étudier ρ .
- IV.A.1.c Montrer que k^2 peut être négligé devant un autre terme.
- IV.A.2.c Calculer les deux termes de l'expression et montrer qu'ils sont égaux.
- IV.B.3 Intégrer le résultat de la question IV.A.2.c sur tout un contour d'une section du guide, en y associant le résultat de la question IV.B.1.
- IV.B.5.b Dans cette question, on considère que la perturbation induite par les pertes par effet Joule est suffisamment faible pour pouvoir considérer que les résultats établis dans toutes les questions précédentes de cette partie restent valables. En utilisant cette approximation et en effectuant un bilan de puissance sur une tranche dx de matériau en tenant compte de l'effet Joule, établir alors le résultat demandé.

I.B.2 La relation de dispersion vue à la question I.A.3.b donne

$$k_g^2 = k_0^2 \left(1 - \left(\frac{p \lambda_0}{2b} \right)^2 \right)$$

En remplaçant k_g par l'expression obtenue à la question précédente, k_0 par ω/c , et λ_0 par $2\pi c/\omega$, on obtient

$$\left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{p\pi c}{b\omega} \right)^2 \right)$$

d'où

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b} \right)^2$$

soit

$$\boxed{\omega = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{p}{b} \right)^2} \quad \text{avec} \quad (m, p) \in \mathbb{N}^{*2}}$$

I.B.3.a Au cours de la question I.B.1, on a établi

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_0 = -2i E_0(y) e^{i\omega t} \sin(k_g x) \vec{e}_z$$

En introduisant la quantification de k_g obtenue à cette même question et l'expression de $E_0(y)$ trouvée à la question I.A.2.b, il vient

$$\vec{E} = (-2i)^2 E_0 \sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

d'où $\vec{E} = E_c \sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) e^{i\omega t} \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad E_c = -4 E_0 \in \mathbb{R}$

Avec $m = p = 1$, le champ devient

$$\vec{E} = E_c \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

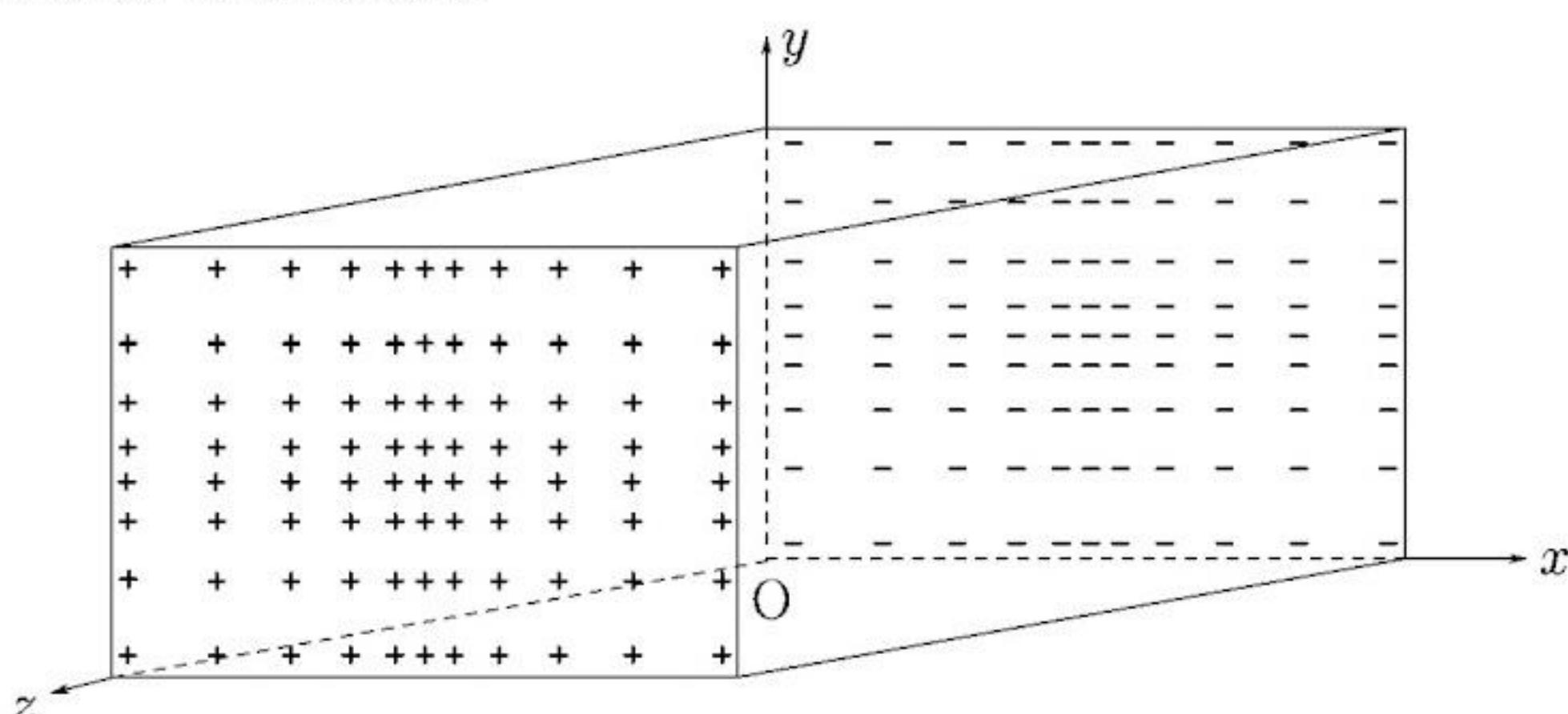
Comme on l'a vu à la question I.A.4, seuls les plans dont les vecteurs normaux ont une composante colinéaire à \vec{E} sont susceptibles de se charger en surface. Le champ est ici polarisé suivant \vec{e}_z , et parmi les plans délimitant la cavité, seuls ceux situés en $z = 0$ et $z = a$ ont des vecteurs normaux dont la projection sur \vec{e}_z est non nulle : **seuls les plans situés en $z = 0$ et $z = a$ sont susceptibles de se charger.**

On a également établi à la question I.A.4 que la charge surfacique apparaissant sur les plans situés en $z = 0$ et $z = a$ s'écrit

$$\sigma = -\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$$

où \vec{n} est normal au plan considéré, unitaire, et dirigé vers l'extérieur de la cavité. Ainsi, lorsque l'un des deux plans est chargé positivement, l'autre l'est négativement puisque \vec{E} a le même sens en $z = 0$ et en $z = a$. De plus, le signe des charges portées par les deux armatures change au cours du temps puisque \vec{E} change de sens périodiquement. Enfin, la densité de charges suivant x suit les variations d'un sinus, maximal au centre et nul sur les bords de l'armature. Il en va de même suivant y .

Finalement, on peut donc schématiquement représenter la répartition des charges sur les armatures comme suit.



On a ici choisi de représenter la face située en $z = a$ chargée positivement, tandis que celle en $z = 0$ est chargée négativement. Représenter la situation contraire aurait été tout aussi juste : il s'agirait simplement de la même situation prise quelques instants plus tôt ou plus tard.

I.B.3.b L'équation de Maxwell-Faraday dans le vide donne

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

Ainsi, $-\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$

où \underline{E}_i ($i = x, y, z$) désigne la composante du champ $\underline{\vec{E}}$ sur le vecteur \vec{e}_i . En utilisant l'expression du champ $\underline{\vec{E}}$ établie à la question I.B.3.a avec $m = p = 1$, on obtient

$$-\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = E_c e^{i\omega t} \left(\frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \vec{e}_x - \frac{\pi}{\ell} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \vec{e}_y \right)$$

Soit, en intégrant par rapport au temps,

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 - \frac{E_c e^{i\omega t}}{i\omega} \left(\frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \vec{e}_x - \frac{\pi}{\ell} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \vec{e}_y \right)$$

où $\underline{\vec{B}}_0$ est un champ constant. Comme on ne s'intéresse qu'à la composante non statique du champ, on peut choisir ce champ constant comme étant un champ nul :

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{E_c e^{i(\omega t + \pi/2)}}{\omega} \left(\frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \vec{e}_x - \frac{\pi}{\ell} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \vec{e}_y \right)}$$

Attention, la relation

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

n'est valable que pour une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique et dans le vide, et ne peut donc pas être utilisée ici.

Soit une surface de vecteur normal \vec{n} orienté de l'intérieur vers l'extérieur de la cavité. Le courant \vec{j}_s à sa surface obéit à la relation

$$\vec{B}_{t,t} - \vec{B}_{i,t} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$

où $\vec{B}_{i,t}$ et $\vec{B}_{t,t}$ sont respectivement composante du champ incident tangente à la face intérieure de la cavité, et composante du champ transmis tangente à ce plan. Comme on considère des plans métalliques parfaits, le champ transmis est nul, d'où

$$-\vec{B}_{i,t} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$

La composante tangentielle de \vec{B} sur chaque face étant non identiquement nulle, des **courants surfaciques apparaissent à la surface de chaque face de la cavité**.

I.B.3.c Les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique s'écrivent :

$$w_e(t) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \text{et} \quad w_m(t) = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

où E et B sont respectivement les normes des champs électrique et magnétique réels. Les énergies électrique et magnétique instantanées dans la cavité sont donc

$$W_e(t) = \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV \quad \text{et} \quad W_m(t) = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$

où V désigne le volume de la cavité. Ainsi,

$$W_e(t) = \frac{\varepsilon_0 E_c^2}{2} \cos^2(\omega t) \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy \int_0^a dz$$

et

$$W_m(t) = \frac{E_c^2}{2\mu_0 \omega^2} \cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \left(\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx \int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy \int_0^a dz \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \int_0^\ell \cos^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy \int_0^a dz \right)$$

À ce stade du calcul, il est utile de rappeler comment s'intègrent les fonctions \sin^2 et \cos^2 sur un intervalle $[0; s]$:

$$\int_0^s \sin^2(\beta x) dx = \int_0^s \frac{1 - \cos(2\beta x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2\beta x)}{4\beta} \right]_0^s = \frac{s}{2} - \frac{\sin(2\beta s)}{4\beta}$$

$$\text{et } \int_0^s \cos^2(\beta x) dx = \int_0^s \frac{1 + \cos(2\beta x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2\beta x)}{4\beta} \right]_0^s = \frac{s}{2} + \frac{\sin(2\beta s)}{4\beta}$$

En utilisant ces résultats, les expressions des énergies deviennent

$$W_e(t) = \frac{\varepsilon_0 V E_c^2}{8} \cos^2(\omega t)$$

$$\text{et } W_m(t) = \frac{E_c^2}{8\mu_0 \omega^2} \cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \left(\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \frac{\ell}{2} \frac{b}{2} a + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \frac{\ell}{2} \frac{b}{2} a \right)$$

$$\text{soit } W_m(t) = \frac{E_c^2 \pi^2 V}{8\mu_0 \omega^2} \sin^2(\omega t) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{\ell^2} \right)$$

En remplaçant alors ω^2 par son expression trouvée à la question I.B.2 et en utilisant la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on obtient

$$W_m(t) = \frac{E_c^2 \pi^2 V}{8 \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \pi^2 c^2 \left(\frac{1}{\ell^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin^2(\omega t) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{\ell^2} \right)$$

d'où

$$W_m(t) = \frac{E_c^2 \varepsilon_0 V}{8} \sin^2(\omega t)$$

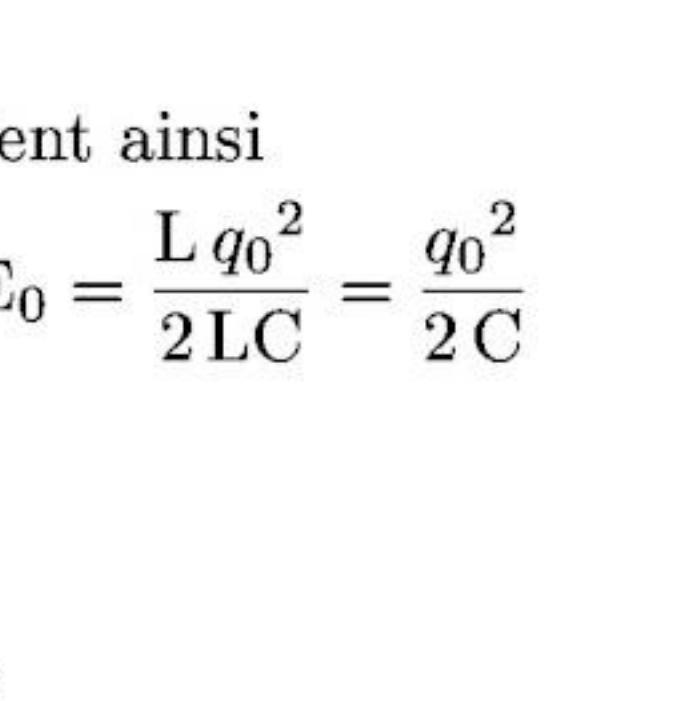
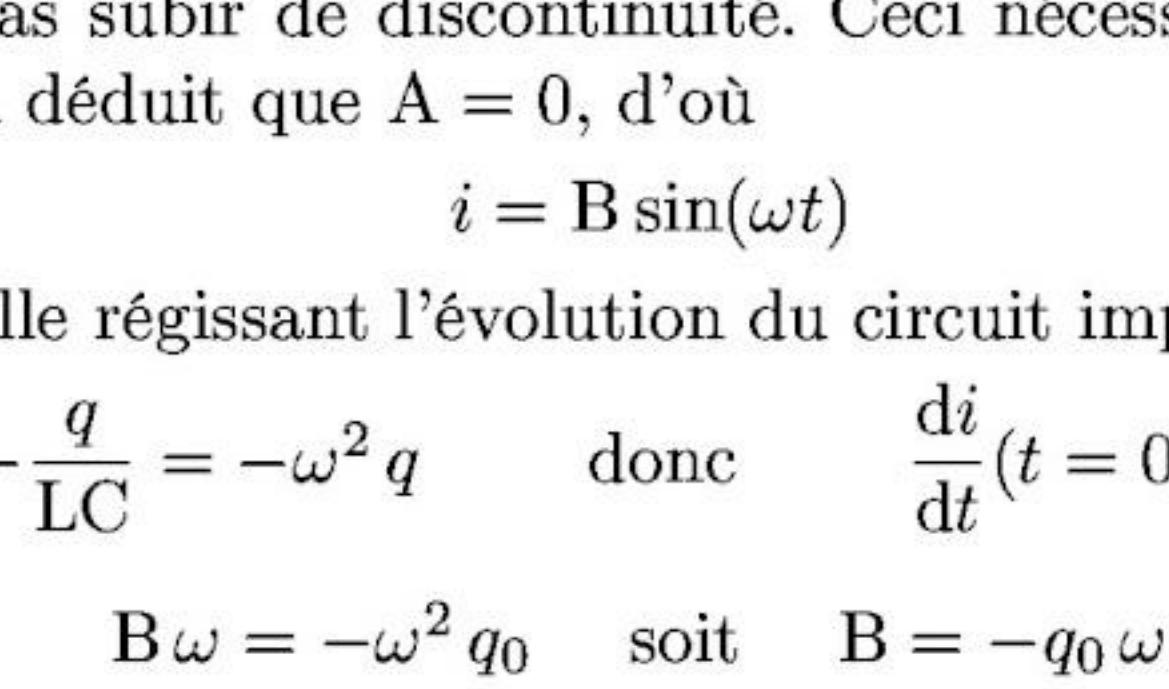
Ainsi,

$$W_e(t) = W_0 \cos^2(\omega t) \quad \text{et} \quad W_m(t) = W_0 \sin^2(\omega t)$$

On en déduit

$$W(t) = W_e(t) + W_m(t) = W_0 = C^{\text{te}}$$

Au sein d'une cavité électromagnétique délimitée par des plans métalliques considérés comme parfaits, l'énergie électromagnétique totale est conservée au cours du temps.



Cherchons maintenant une analogie avec un circuit électrique simple, pouvant stocker à la fois de l'énergie sous forme électrique et sous forme magnétique. Le circuit le plus simple respectant ce critère est un circuit constitué seulement d'une capacité C et d'une inductance L . Si l'on veut que ce circuit puisse stocker de l'énergie, il est nécessaire qu'il en possède au départ. Choisissons donc simplement une capacité possédant initialement une charge non nulle q_0 . On obtient le circuit suivant :

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

énergie qui ne doit pas subir de discontinuité. Ceci nécessite donc la nullité de i à l'instant $t = 0$. On en déduit que $A = 0$, d'où

$$i = B \sin(\omega t)$$

L'équation différentielle régissant l'évolution du circuit impose

$$\frac{di}{dt} = -\frac{q}{LC} = -\omega^2 q \quad \text{donc} \quad \frac{di}{dt}(t=0) = -\omega^2 q_0$$

ce qui donne

$$B \omega = -\omega^2 q_0 \quad \text{soit} \quad B = -q_0 \omega$$

Finalement,

$$i = -q_0 \omega \sin(\omega t)$$

L'énergie stockée sous forme magnétique dans la bobine devient ainsi

$$E_L = \frac{1}{2} L q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) = E_0 \sin^2(\omega t) \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{L q_0^2}{2LC} = \frac{q_0^2}{2C}$$

De plus,

$$\frac{dq}{dt} = i$$

d'où

$$q = q_0 \omega \frac{\cos(\omega t)}{\omega} + D = q_0 \cos(\omega t) + D$$

où D est une nouvelle constante. Comme $q = q_0$ à $t = 0$, $D = 0$ et donc

$$q = q_0 \cos(\omega t)$$

L'énergie stockée sous forme électrique dans le circuit s'écrit alors

$$E_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t) = E_0 \cos^2(\omega t)$$

Ainsi, ce circuit stocke de l'énergie sous forme électrique et magnétique telles que

$$\begin{cases} E_e(t) = E_0 \cos^2(\omega t) \\ E_L(t) = E_0 \sin^2(\omega t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{q_0^2}{2C}$$

et

$$E(t) = E_e(t) + E_L(t) = E_0 = C^{\text{te}}$$

Le circuit proposé est donc bien l'analogie énergétique de la cavité

$$W_e(t) = \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV \quad \text{et} \quad W_m(t) = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$

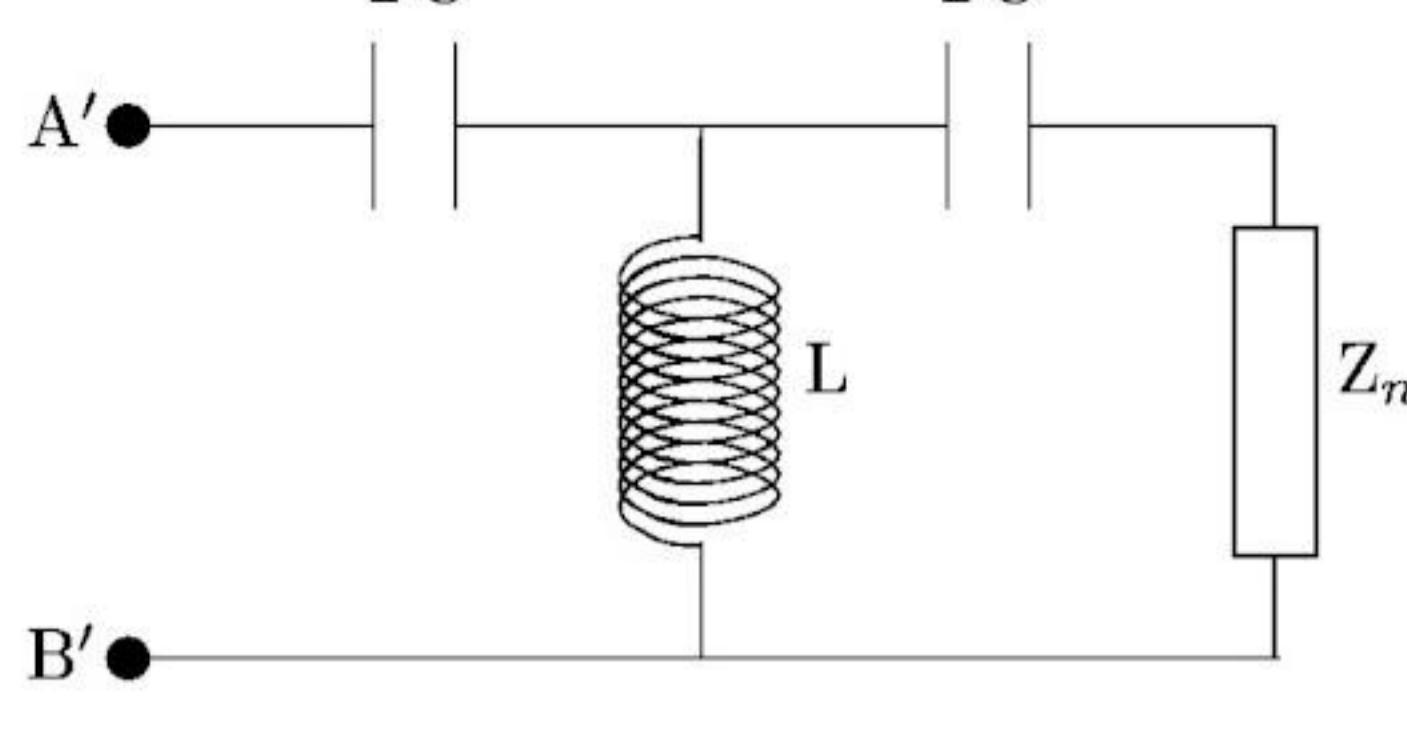
où V désigne le volume de la cavité. Ainsi,

$$W_e(t) = \frac{\varepsilon_0 E_c^2}{2} \cos^2(\omega t) \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy \int_0^a dz$$

et

$$W_m(t) = \frac{E_c^2}{2\mu_0 \omega^2} \cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \left(\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx \int_0^b \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy \int_0^a dz \right)$$

II.A.1 L'énoncé étant vague sur ce point, précisons que l'on cherche ici à calculer l'impédance d'un dipôle constitué d'une infinité de cellules ($2C, L, 2C$). Considérons donc un dipôle $A'B'$ constitué de $n + 1$ cellules et appelons Z_n l'impédance d'un dipôle constitué de n cellules.



En associant les différents composants du dipôle $A'B'$, on obtient

$$Z_{n+1} = \frac{1}{2iC\omega} + \frac{\left(\frac{1}{2iC\omega} + Z_n\right)iL\omega}{\frac{1}{2iC\omega} + Z_n + iL\omega}$$

Le dipôle AB étant constitué d'une infinité de cellules, il est strictement équivalent au dipôle $A'B'$ avec $Z_n = Z$, où Z désigne l'impédance du dipôle AB . Ainsi,

$$Z = \frac{1}{2iC\omega} + \frac{\left(\frac{1}{2iC\omega} + Z\right)iL\omega}{\frac{1}{2iC\omega} + Z + iL\omega}$$

soit, en réduisant au même dénominateur,

$$-2ZLC\omega^2 + 2iZ^2C\omega + Z = 2iC\omega \left(Z + \frac{1}{2iC\omega} \right) iL\omega + iL\omega + Z + \frac{1}{2iC\omega}$$

qui se simplifie pour donner

$$2iZ^2C\omega = 2iL\omega + \frac{1}{2iC\omega} \quad \text{donc} \quad Z^2 = \frac{L}{C} - \frac{1}{4C^2\omega^2}$$

On est alors amené à distinguer deux cas :

– Si $\frac{L}{C} - \frac{1}{4C^2\omega^2} < 0$ donc si $\omega < \omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$,

$$Z = \pm i \sqrt{\frac{1}{4C^2\omega^2} - \frac{L}{C}} \quad \text{donc} \quad Z \underset{\omega \rightarrow 0^+}{\sim} \pm \frac{i}{2C\omega}$$

Or, si ω tend vers 0, la première inductance se comporte comme un fil, puisque son impédance est $iL\omega$, et court-circuite le reste du circuit. L'ensemble du dipôle AB est donc équivalent à une simple capacité $2C$, ce qui se traduit par :

$$Z \underset{\omega \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{i}{2C\omega}$$

On en conclut que

$$\text{Si } \omega < \frac{1}{2\sqrt{LC}}, \quad Z = -i \sqrt{\frac{1}{4C^2\omega^2} - \frac{L}{C}}$$

– Si $\omega > \omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$, $Z = \pm \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4C^2\omega^2}}$

Or, la partie réelle d'une impédance de composants passifs est toujours positive. En effet, c'est cette partie qui est responsable de la dissipation d'énergie. Avoir une partie réelle négative entraînerait une création d'énergie, ce qui est impossible dans le cas de composants passifs. Dès lors,

$$\text{Si } \omega > \frac{1}{2\sqrt{LC}}, \quad Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4C^2\omega^2}}$$

Remarquons qu'il est toutefois possible d'avoir une impédance négative avec des composants actifs utilisant, par exemple, des amplificateurs opérationnels. L'énergie qui semble alors « apparaître » est en fait fournie par les alimentations des composants actifs.

La pulsation critique ainsi mise en évidence est $\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$.

II.A.2 On a vu à la question précédente que le dipôle AB dissipe de l'énergie dans le cas où $\omega > \omega_c$ alors qu'il n'en dissipe pas lorsque $\omega < \omega_c$.

Le cas $\omega < \omega_c$ n'est pas étonnant. En effet, on associe des composants non dissipatifs et obtient une impédance n'entraînant aucune dissipation d'énergie, ce qui est donc cohérent. Toutefois, le cas $\omega > \omega_c$ met en évidence une particularité intéressante du circuit électrique étudié.

L'impédance obtenue dans ce dernier cas montre que le système dissipe de l'énergie. Or, cette énergie ne peut être dissipée par effet Joule puisqu'il n'y a aucun composant dissipatif dans le circuit. La seule possibilité expliquant cette perte d'énergie dans le système est donc que l'énergie « s'échappe » du circuit à l'infini.

Ainsi, on a ici un dipôle auquel on fournit de l'énergie entre A et B, énergie qui doit alors circuler de la gauche vers la droite pour pouvoir s'échapper à l'infini. On réalise alors un circuit permettant de conduire l'énergie d'un endroit à un autre sans la dissiper en cours de route par effet Joule pour une fréquence supérieure à une valeur donnée (fréquence de coupure). Autrement dit, **le circuit étudié est analogue à un guide d'onde**.

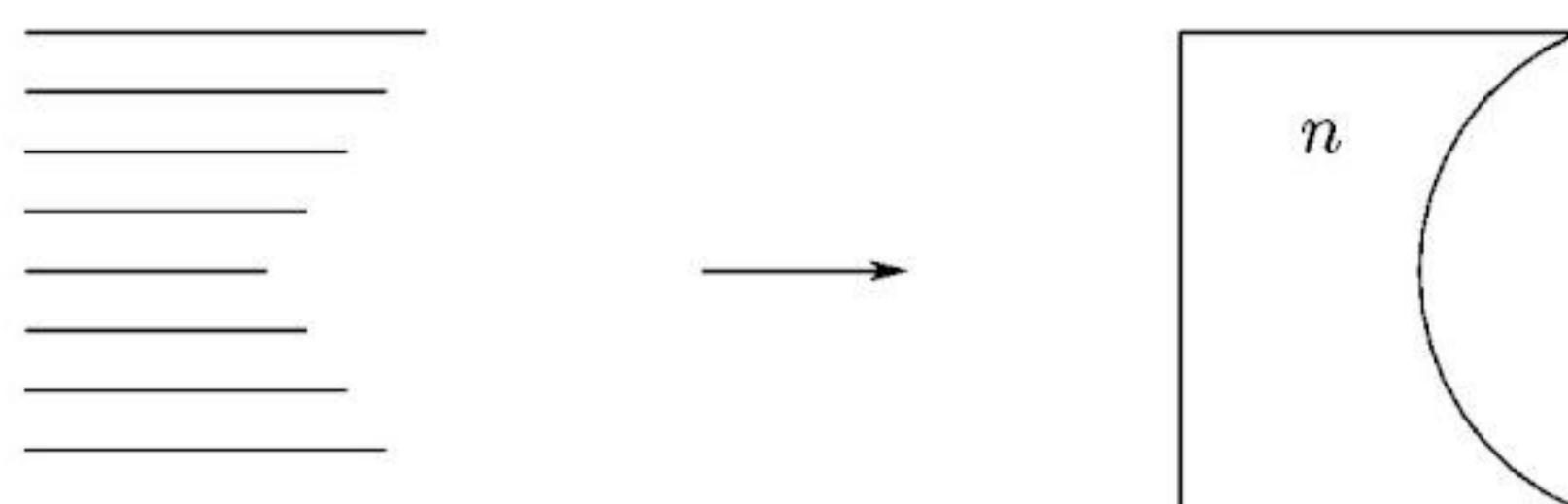
B. Étude qualitative de deux dispositifs à guide d'onde

II.B.1.a L'expression de v_ϕ établie à la question I.A.3.c donne directement

$$n = \frac{c}{v_\phi} = \sqrt{1 - \left(p \frac{f_c}{f}\right)^2} < 1$$

On trouve ici un indice de réfraction inférieur à l'unité. Toutefois, ceci ne pose pas de problème physique. En effet, la vitesse utilisée dans le calcul de n est la vitesse de phase, qui n'est pas la vitesse à laquelle l'information est transportée par l'onde électromagnétique. Dès lors, cette vitesse peut dépasser c et n peut être inférieur à 1.

II.B.1.b On considère que les plans sont suffisamment fins et rapprochés pour pouvoir assimiler la zone délimitée d'une part par les plans situés en haut et en bas de l'édifice, et d'autre part par les extrémités de chaque plan, à une lentille plan-convexe d'indice n , comme indiqué sur le schéma suivant :



On sait qu'une lentille plan-convexe constituée d'un matériau d'indice de réfraction n supérieur à celui de l'air est divergente. En effet, le premier dioptre (plan) ne dévie pas l'onde qui arrive sous incidence normale. L'onde arrive donc sur le second dioptre (convexe) avec un angle d'incidence i_1 non nul, sauf au centre de la lentille. La loi de Descartes donne alors :

$$n \sin i_1 = \sin i_2$$

Comme n est dans ce cas supérieur à 1, on retrouve bien le comportement divergent annoncé. Ici, $n < 1$. La relation de Descartes rappelée ci-dessus indique donc que, cette fois-ci, les rayons lumineux se rapprochent de la normale au second dioptre lorsqu'ils sortent de la lentille. **On a ainsi réalisé une lentille convergente.**

D'après le théorème de Malus, on sait que les rayons lumineux se propagent perpendiculairement aux surfaces d'onde, qui sont également les surfaces équiphases. Ainsi, lors du passage d'un milieu d'indice n à un milieu d'indice de réfraction différent, le changement de direction subi par un rayon lumineux est dû à un changement de surface équiphase, qui sous-entend donc une modification de la vitesse de phase. Or, les lois de Descartes sur la réfraction, dont on peut montrer qu'elles sont strictement équivalentes au théorème de Malus, enseignent que la réfraction est due à une variation de l'indice de réfraction du milieu. Ceci suffit à affirmer que l'indice de réfraction d'un milieu est lié à la vitesse de phase des ondes électromagnétiques qui s'y propagent. **L'utilisation de la vitesse de phase dans la définition de l'indice de réfraction du milieu est donc en accord avec les principes de base de l'optique ondulatoire.**

Cette démonstration, n'utilisant que des résultats au programme de MP, ne répond toutefois pas exactement à la question. En effet, on ne justifie pas l'utilisation de v_ϕ , on montre seulement qu'elle présente une certaine cohérence avec les principes d'optique. Pour répondre à la question, il faut en fait utiliser un résultat hors programme : le principe de Fermat. Ce dernier énonce que le chemin optique faisant intervenir $n = c/v_\phi$ est stationnaire sur le chemin suivi par les rayons, ce qui justifie l'utilisation de la vitesse de phase dans la définition de n .

II.B.2.a Les dimensions du trou A sont petites devant la longueur d'onde de l'onde qui se propage dans le guide inférieur. Ainsi, on assiste à la diffraction de cette onde par le trou A qui donne naissance à une onde dans le guide supérieur. De plus, le principe de Huygens-Fresnel indique que A se comporte comme une source secondaire émettant des ondelettes sphériques. Autrement dit, A émet de la même manière vers les x croissants que vers les x décroissants. Ceci permet de conclure qu'**il existe une onde dans le guide supérieur qui se propage dans les deux sens possibles.** Qui plus est, si on note $\underline{s}_A^+ = s_0 e^{i(\omega t - kx)}$, on a alors

$$\underline{s}_A^- = s_0 e^{i(\omega t + kx)}$$

I. ÉTUDE D'UN GUIDE D'ONDE ET D'UNE CAVITÉ

A. Propagation d'une onde guidée

I.A.1 Le champ électrique complexe $\vec{\underline{E}}$ associé à l'onde décrite par l'énoncé s'écrit

$$\vec{\underline{E}} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - k_x x)} \vec{e}_z$$

où \underline{E}_0 est a priori complexe, et k_x est la projection sur (Ox) du vecteur d'onde associé à la propagation suivant cet axe.

Les deux plans en $y = 0$ et $y = b$ sont considérés comme des métaux parfaits : les champs électriques tangentiels à leurs surfaces doivent donc être nuls. Or, le champ électrique qu'on vient de définir est tangent à ces plans métalliques, d'où

$$\vec{\underline{E}}(y=0) = \vec{\underline{E}}(y=b) = \vec{0}$$

Ces deux conditions aux limites donnent le même résultat :

$$\underline{E}_0 e^{i(\omega t - k_x x)} \vec{e}_z = \vec{0}$$

Cette équation devant être vérifiée pour toute valeur de x , t et z , elle ne peut donc l'être que pour $\underline{E}_0 = 0$ et ainsi

$$\vec{\underline{E}} = \vec{0}$$

Il est par conséquent **impossible de faire se propager l'onde décrite par l'énoncé dans le milieu étudié**.

II.B.2.c Pour obtenir le résultat attendu par l'énoncé, il faut supposer que l'onde se propageant dans le guide supérieur s'écrit

$$\underline{s} = \underline{s}_A^+ + \underline{s}_A^- + \underline{s}_B^+ + \underline{s}_B^-$$

soit

$$\underline{s} = e^{i\omega t} [e^{ikx} (s_0 + s_0 e^{i\pi}) + e^{-ikx} (s_0 + s_0)]$$

ce qui donne

$$\underline{s} = 2s_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

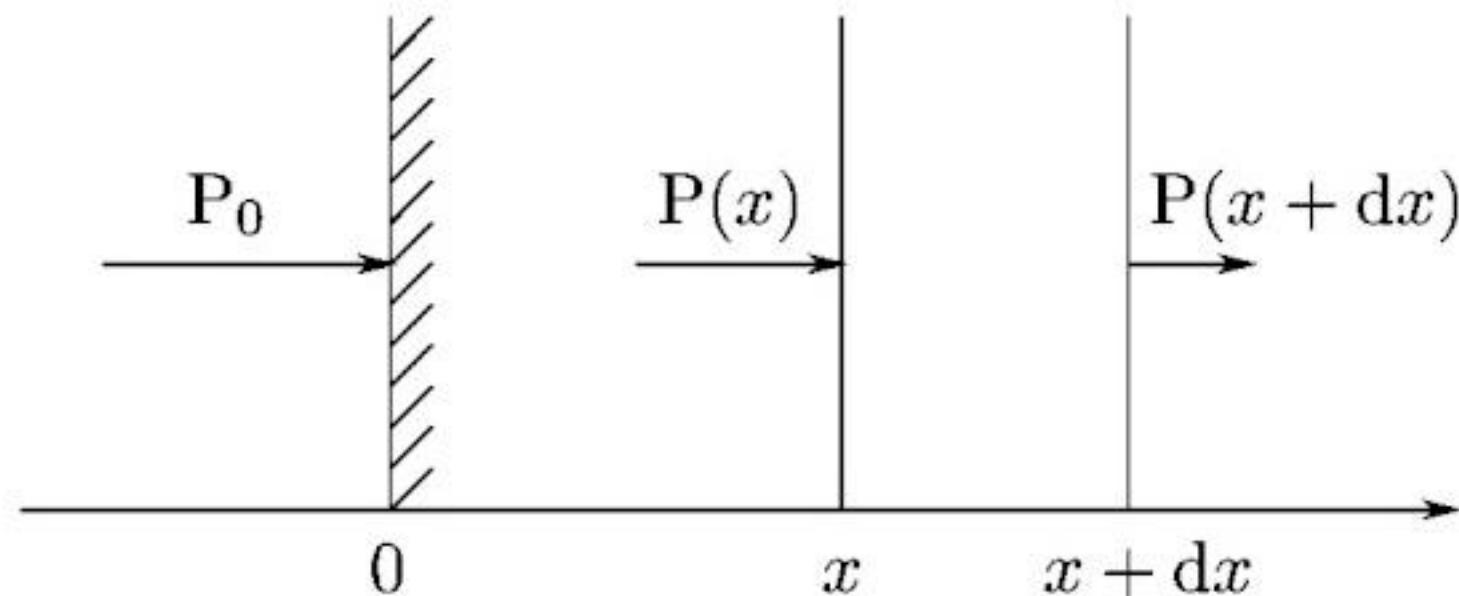
On a alors **une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants, et d'amplitude $2s_0$.**

Néanmoins, ce résultat est faux. En effet, le principe de causalité interdit qu'il existe un quelconque endroit dans le guide supérieur où se superpose les quatre amplitudes utilisées ici. On ne pouvait donc parvenir au résultat demandé à moins de commettre l'erreur exposée ci-dessus.

III. ÉTUDE THERMODYNAMIQUE D'UN DISPOSITIF DE CHAUFFAGE

A. Absorption des micro-ondes par le matériau

III.A.1 Effectuons un bilan d'énergie sur une tranche dx du matériau.



En appelant S la section du matériau considéré, on a

$$P(x+dx)S = P(x)S - \alpha P(x)S dx$$

soit

$$P(x+dx) - P(x) = -\alpha P(x) dx$$

Ainsi,

$$\frac{dP(x)}{dx} = -\alpha P(x) \quad \text{soit} \quad \frac{dP(x)}{P(x)} = -\alpha dx$$

En intégrant cette expression entre 0 et x , on obtient

$$\ln\left(\frac{P(x)}{P_0}\right) = -\alpha x \quad \text{soit} \quad P(x) = P_0 e^{-\alpha x}$$

III.A.3 Aux extrémités du barreau, la loi de conducto-convection de Newton donne

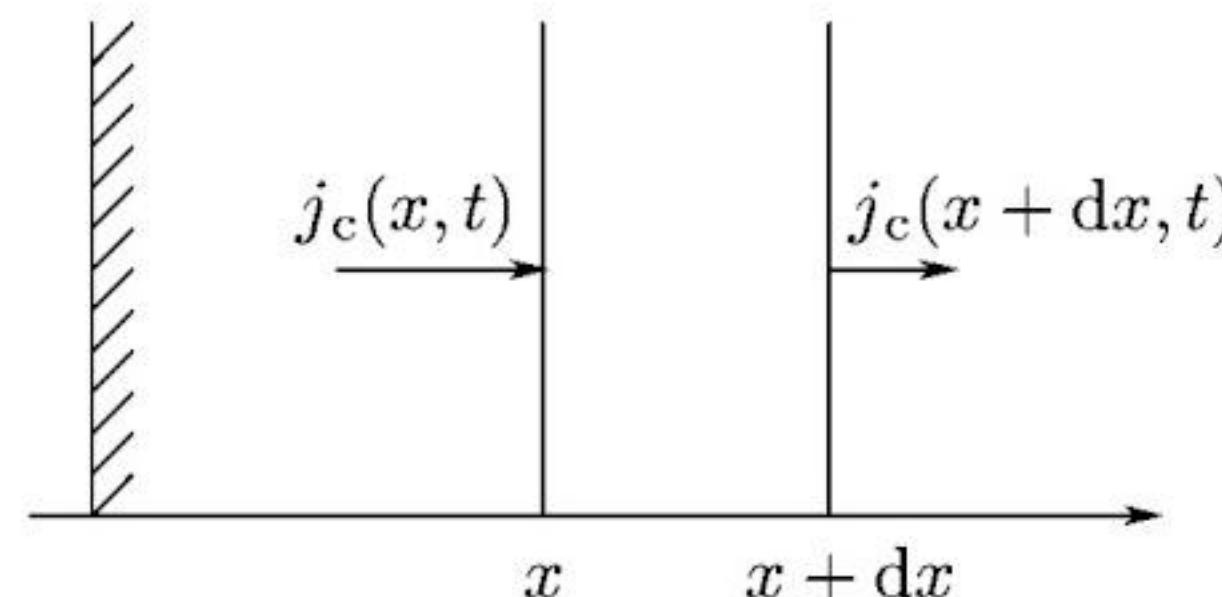
$$\vec{j}_c(\ell, t) = h (T(\ell, t) - T_a) \vec{e}_x$$

et

$$\vec{j}_c(-\ell, t) = -h (T(-\ell, t) - T_a) \vec{e}_x$$

La symétrie du problème par rapport à $x = 0$ assure que **le courant de conduction thermique est nul en $x = 0$** et que l'on peut se contenter d'étudier le problème sur l'intervalle $[0; \ell]$.

III.B Exprimons l'énergie d'une tranche dx de section S de matériau à un instant $t + dt$, en fonction de l'énergie qu'elle possédait à une date t antérieure :



$$E(x, t + dt) = E(x, t) + \sigma S dx dt + j_c(x, t) S dt - j_c(x + dx, t) S dt$$

Or, la loi de Fourier donne

$$j_c(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

et, comme la pression est constante, on a en outre

$$E(x, t) = S dx \rho c_p T(x, t)$$

On obtient donc la relation

$$S dx \rho c_p (T(x, t + dt) - T(x, t)) = \sigma S dx dt - \lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} S dt + \lambda \frac{\partial T(x + dx, t)}{\partial x} S dt$$

soit

$$S dx \rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dt = \sigma S dx dt + \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} S dx dt$$

Finalement,

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = u + D \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

avec $D = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ et $u = \frac{\sigma}{\rho c_p}$

Application numérique :

$$D = 6,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

C. Régime permanent

III.C.1 En régime permanent, T ne dépend plus du temps. L'équation obtenue à la question III.B devient donc

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = -\frac{u}{D} \quad \text{d'où} \quad T(x) = -\frac{u}{D} \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

où A et B sont des constantes à déterminer. Le problème étant symétrique en x comme on l'a établi à la question III.A.2, il ne peut y avoir de terme d'ordre impair en x . A est donc nulle. De plus, d'après la question III.A.3, on a

$$\vec{j}_c(\ell) = h(T(\ell) - T_a) \vec{e}_x = h \left(-\frac{u}{D} \frac{\ell^2}{2} + B - T_a \right) \vec{e}_x$$

qui, d'après la loi de Fourier, vaut également

$$\vec{j}_c(\ell) = -\lambda \left(\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right)_\ell \vec{e}_x = -\lambda \left(-\frac{u\ell}{D} \right) \vec{e}_x$$

En identifiant ces deux expressions, on obtient donc

$$B = \frac{u\ell^2}{2D} + T_a + \frac{\lambda u\ell}{Dh}$$

soit

$$T(x) = T_a + \frac{u}{D} \frac{\ell^2 - x^2}{2} + \frac{\lambda u\ell}{Dh}$$

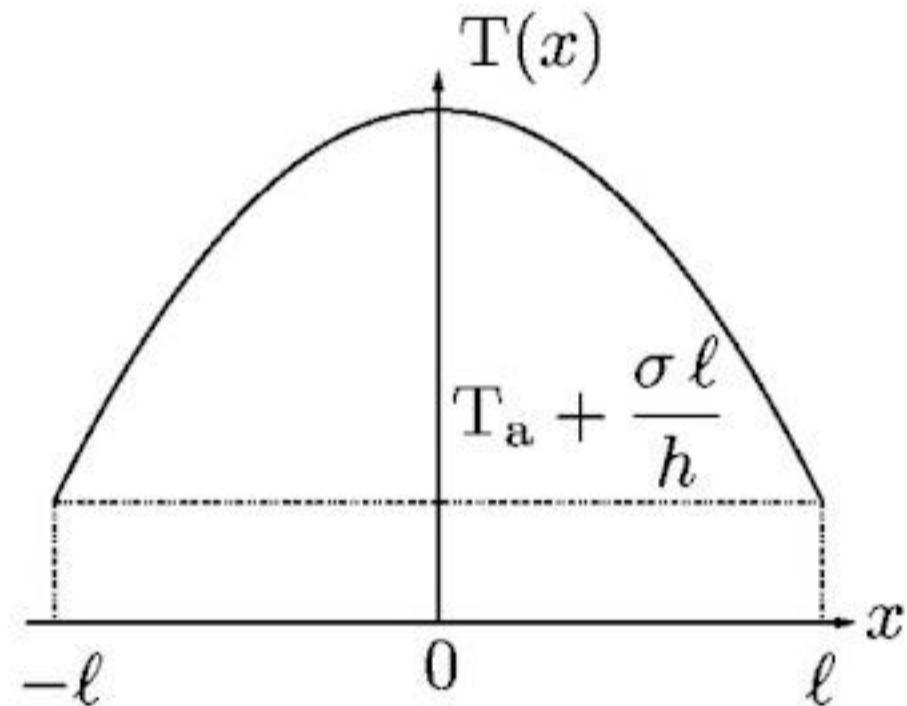
Finalement,

$$T(x) = T_a + \frac{u}{D} \frac{\ell^2 - x^2}{2} + \frac{\sigma\ell}{h}$$

L'expression de $T(x)$ comporte bien trois termes dont le deuxième fait intervenir l'influence de la conduction par l'intermédiaire du coefficient de diffusion D , et le troisième celle des échanges conducto-convectifs avec l'air par l'intermédiaire de h .

L'étude des cas limites donne alors

$T(x) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} T_a + \frac{\sigma\ell}{h}$
$T(x) \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} T_a + \frac{u}{D} \frac{\ell^2 - x^2}{2}$



Ces résultats sont conformes à ce que l'on attend physiquement. En effet, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, la conduction thermique se fait infiniment rapidement. Autrement dit, il n'y a pas d'accumulation de chaleur à l'intérieur du barreau : la température y est homogène. Comme on se trouve de plus en régime permanent, elle est donc constante dans l'ensemble du barreau, fixée seulement par les sources et puits de chaleur qui interviennent, dans l'équation obtenue, par l'intermédiaire de σ et h .

Dans le cas où $h \rightarrow +\infty$, ce sont cette fois les échanges conducto-convectifs avec l'air ambiant qui se font instantanément. Ceci entraîne qu'à chaque instant, les extrémités du barreau sont à la température ambiante T_a , ce que l'on obtient ici.

Enfin, si on associe ces deux effets, c'est-à-dire pour $\lambda \rightarrow +\infty$ et $h \rightarrow +\infty$, on doit obtenir un barreau dont la température est uniforme et égale à la température ambiante, ce qui est bien le cas ici.

Finalement, on constate que h joue un rôle de **régulateur de chauffage**. En effet, lorsque h augmente, le terme de chauffage qui contient explicitement σ dans l'expression de $T(x)$ diminue, alors qu'il augmente si la valeur de h décroît. Encore une fois, ceci est conforme à ce que l'on attend physiquement : si on augmente l'efficacité des échanges conducto-convectifs aux extrémités, l'énergie apportée par chauffage micro-ondes est dissipée plus rapidement, et le chauffage en est d'autant moins efficace.

III.C.2 D'après l'étude de la question précédente, la température dans le matériau est minimale en $x = \ell$ et maximale en $x = 0$. L'écart ΔT de température au sein du matériau s'obtient ainsi directement et s'écrit

$$\Delta T = \frac{u}{D} \frac{\ell^2}{2} = \frac{\sigma \ell^2}{2 \lambda} = 0,8 \text{ K}$$

En pratique, il est nécessaire d'avoir un écart de température le plus faible possible au sein du matériau. En effet, si on crée un différentiel de température trop important dans le matériau, cela crée des zones dans lesquelles les ponts entre molécules peuvent se faire convenablement alors que ce n'est pas le cas dans d'autres zones trop ou pas assez chauffées. On obtiendrait un matériau non homogène, ce qui présente un risque important pour sa solidité et sa capacité à répondre convenablement aux contraintes physiques qui lui sont imposées.

III.D.1.a Le terme provenant des sources internes dans l'équation de la température obtenue à la question III.B est u dont l'expression est

$$u = \frac{\sigma}{\rho c_p} = \frac{2 \alpha P_0}{\rho c_p}$$

d'après l'expression de σ obtenue à la question III.A.2. Ici, P_0 devient $P(t)$ et u s'écrit

$$u = \frac{2 \alpha P_0}{\rho c_p} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\omega t) \right) \quad \text{soit} \quad u = \frac{\alpha P_0}{\rho c_p} + \frac{4 \alpha P_0}{\pi \rho c_p} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

En passant en notation complexe, on obtient alors

$$\underline{u} = \frac{\alpha P_0}{\rho c_p} + \frac{4 \alpha P_0}{\pi \rho c_p} e^{i(\omega t - \pi/2)} = \frac{\alpha P_0}{\rho c_p} - i \frac{4 \alpha P_0}{\pi \rho c_p} e^{i \omega t}$$

Ainsi, en posant $\underline{u} = u_0 + \Delta u e^{i \omega t}$, il vient, par identification,

$u_0 = \frac{\alpha P_0}{\rho c_p}$	et	$\Delta u = -i \frac{4 \alpha P_0}{\pi \rho c_p}$
-------------------------------------	----	---

III.D.1.b \underline{T}_1 est la réponse en température à la partie stationnaire des sources internes. Autrement dit, \underline{T}_1 ne dépend pas du temps et vérifie l'équation établie à la question III.B, de laquelle on a enlevé le terme non stationnaire de u . Ainsi :

$$D \frac{\partial^2 \underline{T}_1}{\partial x^2} + u_0 = 0$$

De même, \underline{T}_2 est la réponse en température à la partie non stationnaire des sources internes. \underline{T}_2 vérifie donc l'équation établie à la question III.B, de laquelle on a supprimé le terme stationnaire de u . On obtient :

$$\frac{\partial \underline{T}_2}{\partial t} = \underline{\Delta u} e^{i\omega t} + D \frac{\partial^2 \underline{T}_2}{\partial x^2}$$

Remarquons que si l'on somme les deux équations ainsi obtenues, on retrouve bien l'équation établie à la question III.B. Cette décomposition revient donc simplement à scinder l'équation faisant intervenir à la fois des termes stationnaires et non stationnaires en deux équations, chacune ne faisant apparaître que l'un de ces deux types de termes, ce qui rend la résolution plus aisée.

I.A.2.a Les lois de Descartes sur la réflexion des ondes électromagnétiques indiquent que l'onde réfléchie admet pour vecteur d'onde le vecteur \vec{k}_2 défini par

$$k_{2x} = k_{1x} \quad \text{et} \quad k_{2y} = -k_{1y}$$

où k_{ix} et k_{iy} désignent les projections du vecteur \vec{k}_i ($i = 1, 2$) sur (Ox) et (Oy).

Le vecteur $\vec{\underline{E}}_2$ est donc, avec \underline{E}'_0 une constante complexe, de la forme

$$\vec{\underline{E}}_2 = \underline{E}'_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM})} \vec{e}_z = \underline{E}'_0 e^{i(\omega t - k_{2x}x - k_{2y}y)} \vec{e}_z$$

$$\vec{\underline{E}}_2 = \underline{E}'_0 e^{i(\omega t - k_{1x}x + k_{1y}y)} \vec{e}_z$$

car $\vec{\underline{E}}_2$ garde la polarisation de l'onde incidente par réflexion sur le plan métallique. De plus, $k_{1x} = k_0 \cos \alpha$ et $k_{1y} = k_0 \sin \alpha$, où k_0 est la norme du vecteur \vec{k}_1 (on choisit cette notation, qui peut prêter à confusion au premier abord, pour se conformer aux notations de l'énoncé des questions suivantes). Ainsi,

$$\vec{\underline{E}}_2 = \underline{E}'_0 e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha + k_0 y \sin \alpha)} \vec{e}_z$$

Pour déterminer \underline{E}'_0 , intéressons-nous aux conditions aux limites. Comme on l'a vu à la question précédente, la composante du champ électrique total parallèle à la surface des plans métalliques parfaits doit être nulle à la surface de ces plans. Dès lors,

$$(\vec{\underline{E}}_1 + \vec{\underline{E}}_2)(y=0) = (\vec{\underline{E}}_1 + \vec{\underline{E}}_2)(y=b) = \vec{0}$$

$$\text{Or, } \vec{\underline{E}}_1 + \vec{\underline{E}}_2 = E_0 e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha - k_0 y \sin \alpha)} \vec{e}_z + \underline{E}'_0 e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha + k_0 y \sin \alpha)} \vec{e}_z$$

Par conséquent, la condition aux limites en $y = 0$ donne

$$(E_0 + \underline{E}'_0) e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha)} = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de t et x , on obtient $E_0 + \underline{E}'_0 = 0$, ou encore, $\underline{E}'_0 = -E_0$. Finalement,

$$\boxed{\vec{\underline{E}}_2 = -E_0 e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha + k_0 y \sin \alpha)} \vec{e}_z}$$

Le champ total s'écrit alors

$$\vec{\underline{E}}_1 + \vec{\underline{E}}_2 = E_0 e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha - k_0 y \sin \alpha)} \vec{e}_z - E_0 e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha + k_0 y \sin \alpha)} \vec{e}_z$$

$$\vec{\underline{E}}_1 + \vec{\underline{E}}_2 = E_0 e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha)} (e^{-i k_0 y \sin \alpha} - e^{i k_0 y \sin \alpha}) \vec{e}_z$$

soit

$$\boxed{\vec{\underline{E}}_1 + \vec{\underline{E}}_2 = -2i E_0 \sin(k_0 y \sin \alpha) e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha)} \vec{e}_z} \quad (1)$$

La condition aux limites en $y = b$, qui doit être vérifiée pour toute valeur de x et de t , impose donc $\sin(k_0 b \sin \alpha) = 0$, ou encore $k_0 b \sin \alpha = p\pi$, avec $p \in \mathbb{Z}$. En utilisant $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, on obtient

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{p \lambda_0}{2b} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{N}^*} \quad (2)$$

En effet, $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$ ne convient pas puisque $\alpha \in]0; \pi/2[$ et donc $\sin \alpha > 0$.

III.D.2.b En considérant le barreau comme infini, la seule condition à respecter est que **f ne diverge pas lorsque x tend vers $\pm\infty$** , ce qui impose donc $A = B = 0$. L'expression de f établie à la question précédente se réduit alors à

$$f = \frac{\underline{\Delta u}}{i\omega}$$

et donc

$$\underline{T}_2 = \frac{\underline{\Delta u}}{i\omega} e^{i\omega t}$$

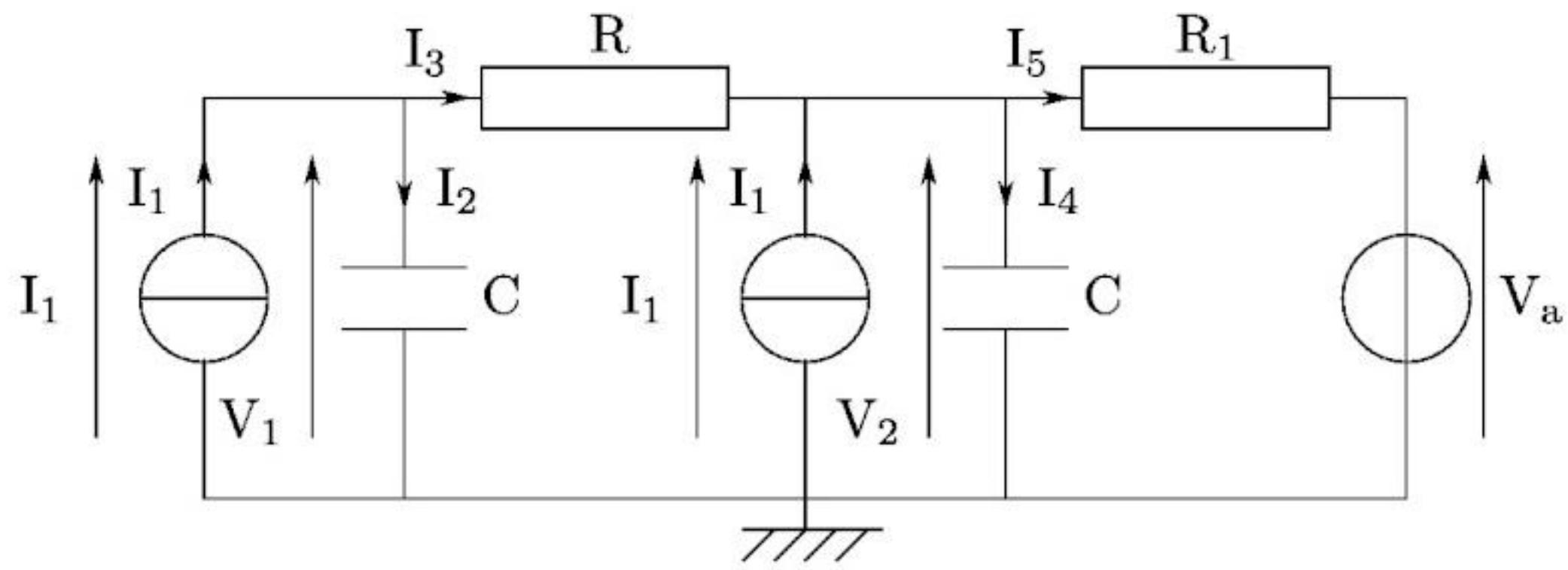
\underline{T}_2 est donc formellement la primitive de $\underline{\Delta u} e^{i\omega t}$. L'amplitude des oscillations temporelles de température est par conséquent

$$\mathcal{A} = \left| \frac{\underline{\Delta u}}{i\omega} \right| = 0,01 \text{ K}$$

III.E.1.b Intuitivement, comme chaque couche stocke de l'énergie, on peut penser à les modéliser par des condensateurs. Le chauffage étant uniforme, il apporte la même quantité d'énergie à chaque couche. Dans l'analogie, il est donc nécessaire de brancher une source de courant en parallèle de chaque condensateur, les deux sources devant être identiques.

Les échanges entre la couche 2 et l'atmosphère correspondent à des pertes d'énergie par le barreau que l'on peut modéliser par une simple résistance. On doit également retrouver une résistance entre les couches 1 et 2 pour modéliser la perte d'énergie entre ces deux couches due à l'absorption d'une partie de l'énergie par une couche avant que le reste soit transmis par conduction à l'autre. Enfin, l'atmosphère, qui joue le rôle de thermostat, doit aussi pouvoir fournir de l'énergie au système. Il est ainsi nécessaire d'ajouter une source électrique, que l'on peut représenter par une source de tension en série avec la résistance déjà choisie pour modéliser les pertes vers l'extérieur.

Finalement, on peut représenter la situation de la question III.E.1.b par le schéma électrique suivant :



Établissons les équations différentielles vérifiées par V_1 et V_2 . La tension V_1 aux bornes du condensateur s'écrit

$$V_1 = \frac{q_1}{C} \quad \text{donc} \quad \frac{dV_1}{dt} = \frac{I_2}{C}$$

où q_1 est la charge du condensateur considéré. Or,

$$I_2 = I_1 - I_3 = I_1 - \frac{V_1 - V_2}{R}$$

Ainsi,

$$C \frac{dV_1}{dt} = I_1 - \frac{V_1 - V_2}{R}$$

De même,

$$I_4 = I_1 + I_3 - I_5 = I_1 + \frac{V_1 - V_2}{R} + \frac{V_a - V_2}{R_1}$$

On peut modéliser par une simple résistance. On doit également retrouver une résistance entre les couches 1 et 2 pour modéliser la perte d'énergie entre ces deux couches due à l'absorption d'une partie de l'énergie par une couche avant que le reste soit transmis par conduction à l'autre. Enfin, l'atmosphère, qui joue le rôle de thermostat, doit aussi pouvoir fournir de l'énergie au système. Il est ainsi nécessaire d'ajouter une source électrique, que l'on peut représenter par une source de tension en série avec la résistance déjà choisie pour modéliser les pertes vers l'extérieur.

Finalement, on peut représenter la situation de la question III.E.1.b par le schéma électrique suivant :

III.E.2 Reprenons l'équation de la chaleur établie à la question III.B en éliminant le terme ne faisant pas intervenir la diffusion :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

Ici, x a été discrétisé. Ainsi, cette équation devient

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{D T(x,t)}{(\Delta\ell)^2}$$

qui fait apparaître le temps caractéristique

$$\tau = \frac{(\Delta\ell)^2}{D} = \frac{\ell^2}{N^2 D}$$

Pour pouvoir étudier l'excitation, il faut que $T_0 > \tau$. Dans le cas contraire, la perturbation est peu visible. Ceci impose donc

$$N > \sqrt{\frac{\ell^2}{D T_0}} \simeq 4$$

IV. GUIDE EN MÉTAL NON PARFAIT

A. Champ électrique dans le métal et aspect énergétique

IV.A.1.c Établissons l'équation de diffusion du champ \vec{E} dans le milieu étudié. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ainsi,

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t}$$

Or, d'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_v + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On a montré à la question IV.A.1.b que le dernier terme de cette équation est négligeable par rapport au précédent. On obtient donc

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}_v}{\partial t} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

De plus, l'analyse vectorielle donne

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E}$$

et on a montré à la question IV.A.1.a que $\text{div} \vec{E} = 0$. Ainsi, en égalant les deux expressions obtenues ci-dessus pour $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E})$, on trouve

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

En remplaçant \vec{E} par son expression dans cette dernière équation on a

$$\frac{d^2 \underline{E}(y)}{dy^2} - k^2 \underline{E}(y) - i \mu_0 \gamma \omega \underline{E}(y) = 0$$

soit

$$\frac{d^2 \underline{E}(y)}{dy^2} = \left(k^2 + \frac{2i}{\delta^2} \right) \underline{E}(y)$$

Comparons les deux termes du membre de droite de cette équation :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{\delta^2} = \mu_0 \gamma \omega$$

d'où

$$\frac{k^2}{2/\delta^2} = \frac{\omega}{\mu_0 c^2 \gamma} = \frac{\omega \epsilon_0}{\gamma} \ll 1$$

d'après la question IV.A.1.b. On peut donc négliger le terme en k^2 dans l'équation obtenue précédemment pour $\underline{E}(y)$ ce qui donne

$\frac{d^2 \underline{E}(y)}{dy^2} = \frac{2i}{\delta^2} \underline{E}(y)$	avec	$\delta = 1,3 \text{ } \mu\text{m}$
--	------	-------------------------------------

IV.A.1.d La loi d'Ohm donne \vec{j}_v en fonction de \vec{E} . Il faut donc commencer par résoudre l'équation différentielle obtenue à la question IV.A.1.c. On a

$$\frac{2i}{\delta^2} = \frac{2}{\delta^2} e^{i\pi/2} = \left(\sqrt{\frac{2}{\delta^2}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{1+i}{\delta} \right)^2$$

Ainsi, la solution de l'équation de propagation du champ électrique est

$$\underline{E}(y) = A e^{(1+i)y/\delta} + B e^{-(1+i)y/\delta}$$

où A et B sont des constantes. La solution ne pouvant diverger en $+\infty$, cela entraîne la nullité de A, d'où

$$\underline{E}(y) = B e^{-(1+i)y/\delta}$$

et

$$\vec{E} = B e^{-y/\delta} \exp \left[-i \left(\frac{y}{\delta} + \omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) \right]$$

Les grandeurs intervenant dans les courants demandés sont des grandeurs réelles. On a alors

$$\vec{j}_v = \gamma \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \left[\operatorname{Re}(B) \cos \left(\frac{y}{\delta} + \omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) - \operatorname{Im}(B) \sin \left(\frac{y}{\delta} + \omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) \right] \vec{e}_x$$

Posons $\underline{j}_0 = \gamma B \vec{e}_x$. On obtient

$$\vec{j}_v = \exp \left(-\frac{y}{\delta} \right) \left[\operatorname{Re}(\underline{j}_0) \cos \left(\frac{y}{\delta} + \omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) - \operatorname{Im}(\underline{j}_0) \sin \left(\frac{y}{\delta} + \omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) \right]$$

IV.A.2.a L'intensité traversant une section de plan S parallèle au plan (yOz) s'écrit

$$I = \int_S \vec{j}_v \cdot d\vec{S}$$

en faisant intervenir la distribution volumique de courant, mais peut aussi être écrite

$$I = \int_z \vec{j}_S \cdot \vec{e}_x dz$$

en faisant intervenir la distribution surfacique de courant. En identifiant ces deux expressions, on obtient

$$\vec{j}_S = \int_0^{+\infty} \vec{j}_v dy$$

IV.A.2.b La puissance instantanée dissipée par effet Joule dans un volume V de matériau s'écrit

$$P_J = \int_V \vec{j}_v \cdot \vec{E} dV = \int_S \int_{y=0}^{+\infty} \vec{j}_v \cdot \vec{E} dy dS$$

Ainsi,

$$\frac{dP_J}{dS} = \int_{y=0}^{+\infty} \vec{j}_v \cdot \vec{E} dy$$

En utilisant alors la loi d'Ohm pour exprimer \vec{E} , on obtient

$$\frac{dP_J}{dS} = \int_{y=0}^{+\infty} \frac{\vec{j}_v^2}{\gamma} dy$$

soit

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{1}{\gamma} \int_{y=0}^{+\infty} \langle \vec{j}_v^2 \rangle dy$$

I.A.2.b En reportant le résultat (??) dans l'équation (??), on trouve

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_1} + \underline{\vec{E}_2} = -2i E_0 \sin\left(k_0 \frac{p \lambda_0}{2b} y\right) e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha)} \vec{e}_z$$

soit

$$\underline{\vec{E}} = -2i E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{p \lambda_0}{2b} y\right) e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha)} \vec{e}_z$$

ce qui donne

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = -2i E_0 \sin\left(\frac{p \pi y}{b}\right) e^{i(\omega t - k_0 x \cos \alpha)} \vec{e}_z}$$

La propagation se fait donc suivant la direction (Ox). De plus, α est choisi dans l'intervalle $]0 ; \pi/2[$, ce qui impose $k_0 \cos \alpha > 0$. **La propagation de l'onde se fait ainsi suivant \vec{e}_x .**

Le champ $\underline{\vec{E}_1}$ donné par l'énoncé ainsi que le champ $\underline{\vec{E}_2}$ que l'on a trouvé à la question I.A.2.a correspondent à des ondes planes, progressives et monochromatiques qui sont des solutions des équations de Maxwell. Ces dernières étant linéaires, toute combinaison linéaire des vecteurs $\underline{\vec{E}_1}$ et $\underline{\vec{E}_2}$, et en particulier $\underline{\vec{E}}$, **est solution des équations de Maxwell**.

L'équation du champ $\underline{\vec{E}}$ donne quant à elle directement l'expression du vecteur d'onde dans le guide :

$$\boxed{k_g = k_0 \cos \alpha}$$

IV.A.2.c D'après la question IV.A.2.a, on a

$$\vec{j}_s = \int_0^{+\infty} \vec{j}_v \, dy$$

Il est donc nécessaire d'intégrer l'expression de \vec{j}_v établie à la question IV.A.1.d. Il est toutefois plus simple de prendre la forme complexe de \vec{j}_v établie au cours du calcul que l'expression finale, difficile à intégrer directement. On a

$$\underline{\vec{j}_v} = \vec{j}_0 e^{-y/\delta} \exp \left[-i \left(\frac{y}{\delta} + \omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) \right]$$

d'où $\vec{j}_s = \vec{j}_0 \int_0^{+\infty} \exp \left(-\frac{(1+i)y}{\delta} \right) \exp \left(-i\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) \, dy$

soit $\vec{j}_s = \vec{j}_0 \exp \left(-i\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) \int_0^{+\infty} \exp \left(-\frac{(1+i)y}{\delta} \right) \, dy$

En intégrant l'expression obtenue, on a

$$\vec{j}_s = \vec{j}_0 \exp \left(-i\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) \frac{\delta}{1+i} = \delta \vec{j}_0 \exp \left(-i\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) \frac{1-i}{2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{j}_s = \delta \frac{\operatorname{Re}(\vec{j}_0)}{2} \left[\cos \left(\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) + \sin \left(\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) \right] + \delta \frac{\operatorname{Im}(\vec{j}_0)}{2} \left[\cos \left(\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) - \sin \left(\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right) \right]}$$

Pour calculer la valeur moyenne de \vec{j}_s^2 , il est utile de se rappeler que, pour tous réels x et y ne dépendant pas explicitement du temps :

$$\langle \cos(x + \omega t) \rangle = \langle \sin(x + \omega t) \rangle = \langle \cos(y + \omega t) \sin(x + \omega t) \rangle = 0$$

et

$$\langle \cos^2(x + \omega t) \rangle = \langle \sin^2(x + \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

On obtient alors $\langle \vec{j}_s^2 \rangle = \frac{(\delta j_0)^2}{4}$ et $\boxed{\frac{1}{\gamma \delta} \langle \vec{j}_s^2 \rangle = \frac{\delta j_0^2}{4 \gamma}}$

De même, en utilisant l'expression trouvée à la question IV.A.1.d pour \vec{j}_v , on trouve

$$\langle \vec{j}_v^2 \rangle = \exp \left(-\frac{2y}{\delta} \right) \frac{\operatorname{Re}^2(\vec{j}_0) + \operatorname{Im}^2(\vec{j}_0)}{2} = \exp \left(-\frac{2y}{\delta} \right) \frac{j_0^2}{2}$$

D'après le résultat de la question IV.A.2.b, on a donc

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{1}{\gamma} \int_{y=0}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2y}{\delta} \right) \frac{j_0^2}{2} \, dy$$

soit

$$\boxed{\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{\delta j_0^2}{4 \gamma}}$$

On déduit ainsi des deux derniers résultats que

$$\boxed{\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{1}{\gamma \delta} \langle \vec{j}_s^2 \rangle}$$

IV.A.2.d On a établi à la question IV.A.2.a que

$$\vec{j}_s = \int_0^{+\infty} \vec{j}_v \, dy$$

Considérons que la densité volumique de courant est une distribution uniforme sur une épaisseur δ_{eff} et égale à j_0 en module. On obtient

$$\vec{j}_s = \vec{j}_v \int_0^{\delta_{\text{eff}}} dy = \vec{j}_v \delta_{\text{eff}}$$

ce qui donne

$$\langle \vec{j}_s^2 \rangle = \langle \vec{j}_v^2 \rangle \delta_{\text{eff}}^2 = j_0^2 \delta_{\text{eff}}^2$$

Or, du point de vue énergétique, on doit avoir

$$\frac{1}{\gamma \delta} \langle \vec{j}_s^2 \rangle = \frac{\delta j_0^2}{4 \gamma}$$

comme on l'a établi à la question précédente. Ainsi, on peut considérer la répartition surfacique de courant comme l'**équivalent d'une densité de courant volumique uniforme j_0** sur une épaisseur

$$\boxed{\delta_{\text{eff}} = \frac{\delta}{2}}$$

IV.B.1 Comme on l'a rappelé à la question I.B.3.b, pour des plans métalliques parfaits,

$$-\vec{B}_t = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$

où \vec{n} est le vecteur normal à la surface de séparation dirigé vers l'extérieur de la cavité, c'est-à-dire ici \vec{e}_x , et \vec{B}_t la composante du champ magnétique tangentielle au plan métallique. Or, le champ magnétique total est tangentiel au plan métallique, puisque la composante normale du champ est continue à la traversée de la surface et doit être nulle dans le métal. De plus \vec{j}_s et \vec{n} sont orthogonaux au voisinage de cette surface. Ainsi, en élevant la relation précédente au carré, on obtient

$$B^2 = \mu_0^2 j_s^2 \quad \text{soit}$$

$$j_s^2 = \frac{B^2}{\mu_0^2}$$

IV.B.2 L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

d'où

$$-\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = E_0 e^{i(\omega t - k_g x)} \left(\frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_x - i k_g \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_y \right)$$

Ainsi,

$$\underline{\vec{B}} = -E_0 e^{i(\omega t - k_g x)} \left(\frac{\pi}{b i \omega} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_x - \frac{k_g}{\omega} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_y \right)$$

On ne s'intéresse en effet qu'à la partie non statique des champs, et on peut donc choisir la constante d'intégration nulle. Le champ réel est donc

$$\vec{B} = -E_0 \left(\frac{\pi}{b \omega} \sin(\omega t - k_g x) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_x - \frac{k_g}{\omega} \cos(\omega t - k_g x) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_y \right)$$

Ainsi,

$$\underline{\vec{B}} = -E_0 e^{i(\omega t - k_g x)} \left(\frac{\pi}{b i \omega} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_x - \frac{k_g}{\omega} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_y \right)$$

On ne s'intéresse en effet qu'à la partie non statique des champs, et on peut donc choisir la constante d'intégration nulle. Le champ réel est donc

$$\vec{B} = -E_0 \left(\frac{\pi}{b \omega} \sin(\omega t - k_g x) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_x - \frac{k_g}{\omega} \cos(\omega t - k_g x) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_y \right)$$

IV.B.3 À la question IV.A.2.c, on a montré que

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{1}{\gamma \delta} \langle \vec{j}_s^2 \rangle$$

D'après le résultat établi à la question IV.B.1, cette dernière égalité devient

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{1}{\mu_0^2 \gamma \delta} \langle B^2 \rangle$$

qu'il faut intégrer sur tout le contour d'une section du guide afin d'obtenir les pertes par unité de longueur. En effet, il faut tenir compte de toutes les pertes possibles, c'est-à-dire des pertes induites par chaque plan. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle &= \int_{y=0}^b \left\langle \frac{dP_J}{dS} (z=0) \right\rangle dy + \int_{y=0}^b \left\langle \frac{dP_J}{dS} (z=a) \right\rangle dy \\ &\quad + \int_{z=0}^a \left\langle \frac{dP_J}{dS} (y=b) \right\rangle dy + \int_{z=0}^a \left\langle \frac{dP_J}{dS} (y=0) \right\rangle dy \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs des intégrales de sinus carré et cosinus carré que l'on a établies à la question I.B.3.c, on obtient

$$\left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle = \frac{b}{\mu_0^2 \gamma \delta} \frac{E_0^2}{2 \omega^2} \left[\left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + k_g^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{2a}{b} \right]$$

soit

$$\left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle = \frac{E_0^2 b}{2 \mu_0^2 \omega^2 \gamma \delta} \left[\left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{2b} \right)^2 \right) + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{2a}{b} \right]$$

en utilisant l'expression de k_g obtenue en question I.A.3.a. Ainsi,

$$\left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle = - \frac{E_0^2 b \lambda_0^2}{\mu_0^2 \gamma \delta} \left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{\left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{2b} \right)^2 \right) + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{2a}{b}}{\mu_0^2 \gamma \delta} \langle B^2 \rangle$$

qu'il faut intégrer sur tout le contour d'une section du guide afin d'obtenir les pertes par unité de longueur. En effet, il faut tenir compte de toutes les pertes possibles, c'est-à-dire des pertes induites par chaque plan. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle &= \int_{y=0}^b \left\langle \frac{dP_J}{dS} (z=0) \right\rangle dy + \int_{y=0}^b \left\langle \frac{dP_J}{dS} (z=a) \right\rangle dy \\ &\quad + \int_{z=0}^a \left\langle \frac{dP_J}{dS} (y=b) \right\rangle dy + \int_{z=0}^a \left\langle \frac{dP_J}{dS} (y=0) \right\rangle dy \end{aligned}$$

IV.B.4 L'expression de la puissance moyenne dissipée par unité de longueur dans le guide fournie à la question IV.B.3 donne

$$\left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle = p_0 \left(\frac{a \lambda_0}{2 b^2} + \frac{b}{\lambda_0} \right)$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial b} \left(\left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle \right) = p_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{2 a \lambda_0}{2 b^3} \right)$$

qui s'annule pour

$$b_0 = (a \lambda_0^2)^{1/3}$$

De plus,

$$\frac{\partial^2}{\partial b^2} \left(\left\langle \frac{dP_J}{dx} \right\rangle \right) = p_0 \frac{6 a \lambda_0}{2 b^4}$$

donc, en b_0 , cette dérivée est positive. Ainsi, b_0 représente bien un minimum de la puissance moyenne dissipée par unité de longueur. La valeur optimale de b qui minimise les pertes est donc

$$b_0 = (a \lambda_0^2)^{1/3} = 6,6 \text{ cm}$$

IV.B.5.a Par définition, le vecteur de Poynting s'écrit

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}$$

où $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ représentent les champs réels. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}} = & -\frac{{\mathbf{E}_0}^2 k_g}{\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos^2(\omega t - k_g x) \vec{e}_x \\ & -\frac{{\mathbf{E}_0}^2 \pi}{4 \mu_0 b \omega} \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin(2(\omega t - k_g x)) \vec{e}_y \end{aligned}$$

En procédant de même qu'à la question IV.A.2.c pour le calcul de la valeur moyenne, il vient

$$\langle \vec{\mathcal{P}} \rangle = -\frac{{\mathbf{E}_0}^2 k_g}{2 \mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_x$$

La puissance moyenne temporelle traversant une section du guide est alors

$$P_m = \int_S \langle \vec{\mathcal{P}} \rangle \cdot d\vec{S}$$

où $d\vec{S}$ est la surface élémentaire dirigée ici suivant $-\vec{e}_x$. En utilisant une nouvelle fois l'expression de l'intégrale d'un sinus carré établie à la question I.B.3.c, on obtient

$$P_m = \frac{{\mathbf{E}_0}^2 k_g}{2 \mu_0 \omega} \frac{ab}{2}$$

d'où

$$P_m = \frac{{\mathbf{E}_0}^2 k_g ab}{4 \mu_0 \omega}$$

I.A.3.a À la question précédente, on a établi que $k_g = k_0 \cos \alpha$. Néanmoins, d'après la question I.A.2.a,

$$\sin \alpha = \frac{p \lambda_0}{2b} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$k_g = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{p \lambda_0}{2b}\right)^2}$$

k_g devant être réel, puisqu'il s'agit du produit de deux grandeurs réelles, ceci impose

$$1 - \left(\frac{p \lambda_0}{2b}\right)^2 \geq 0 \quad \text{soit} \quad \lambda_0^2 \leq \left(\frac{2b}{p}\right)^2$$

Or, $\lambda_0 = c/f$, ce qui donne

$$\left(\frac{c}{f}\right)^2 \leq \left(\frac{2b}{p}\right)^2 \quad \text{et} \quad f \geq \frac{cp}{2b}$$

Comme $p \in \mathbb{N}^*$, on en déduit

$$f \geq \frac{c}{2b} = f_c$$

ce qui implique

$$b \geq \frac{c}{2f_c}$$

et $f_c = 2,5$ GHz impose donc

$$b \geq 6 \text{ cm}$$

I.A.3.b On a déjà établi à la question précédente que

$$k_g = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{p \lambda_0}{2b} \right)^2}$$

Cette relation est la **relation de dispersion** de l'onde dans le guide d'onde.

La relation de dispersion est usuellement définie comme le lien entre ω et k_g , vecteur d'onde dans le milieu étudié. Mais k_0 n'est rien d'autre que le rapport de ω à c .

I.A.3.c

La relation de dispersion donne

$$k_g^2 = k_0^2 \left(1 - \left(\frac{p \lambda_0}{2b} \right)^2 \right) = k_0^2 - \left(\frac{p\pi}{b} \right)^2$$

En différentiant cette expression, on obtient :

$$2k_g dk_g = 2k_0 dk_0 \quad \text{soit} \quad k_g dk_g = \frac{\omega}{c} \frac{d\omega}{c}$$

Ainsi,

$$c^2 \frac{k_g}{\omega} = \frac{d\omega}{dk_g}$$

Or,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} \quad \text{et} \quad v_\phi = \frac{\omega}{k_g}$$

d'où

$$v_g = \frac{c^2}{v_\phi}$$

Attention, cette relation n'est pas générale. Il est nécessaire de bien vérifier qu'on peut l'utiliser en la redémontant à chaque fois.

Utilisons la relation de dispersion de la question I.A.3.b et $k_0 = \frac{\omega}{c}$:

$$k_g = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{p \lambda_0}{2b} \right)^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{p \lambda_0}{2b} \right)^2}}$$

d'où

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{p \lambda_0}{2b} \right)^2}} \quad \text{et} \quad v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{p \lambda_0}{2b} \right)^2}$$

Or, on a vu à la question I.A.3.a que $2b = \frac{c}{f_c}$. Par conséquent,

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{p \lambda_0 f_c}{c} \right)^2}} \quad \text{et} \quad v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{p \lambda_0 f_c}{c} \right)^2}$$

En utilisant $\lambda_0 = \frac{c}{f}$, on obtient finalement

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - p^2 \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}} \quad \text{et} \quad v_g = c \sqrt{1 - p^2 \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}$$

On remarque que $v_\phi > c$. Ceci n'est pas gênant puisque la vitesse de phase ne correspond pas à une vitesse de propagation d'une information, seule contrainte à se déplacer à une vitesse inférieure à celle de la lumière. En revanche, v_g doit quant à elle être inférieure à c puisqu'il s'agit de la vitesse de propagation d'une énergie, ce que l'on retrouve bien dans le résultat.

La vitesse de groupe est d'autant plus grande que le rapport positif $p f_c / f$ est faible. Or,

$$2k_g dk_g = p \frac{f_c}{k_0} \frac{dk_0}{d\omega} = p \frac{c}{\omega} \frac{d\omega}{dk_g} \text{ soit } \frac{p \lambda_0}{k_g dk_g} = \frac{\sin \alpha}{c} = \frac{c}{c} \frac{c}{c}$$

Ainsi,

$$c^2 \frac{k_g}{\omega} = \frac{d\omega}{dk_g}$$

Or,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} \quad \text{et} \quad v_\phi = \frac{\omega}{k_g}$$

d'où

$$v_g = \frac{c^2}{v_\phi}$$

I.A.4 Le fait d'ajouter deux plans métalliques parfaits, d'équation $z = 0$ pour l'un et $z = a$ pour l'autre, ne fait qu'imposer deux conditions aux limites supplémentaires au problème: la composante du champ régnant au sein du guide d'onde parallèle aux plans métalliques doit être nulle à la surface de ces plans. Le champ considéré ici est polarisé suivant (Oz): il ne possède donc pas de composante parallèle aux plans métalliques. Ainsi, ajouter deux plans n'ajoute pas de contrainte sur le champ considéré jusqu'à présent, et **le champ envisagé jusqu'ici reste donc solution du problème.**

La charge surfacique apparaissant sur un plan séparant deux milieux s'écrit :

$$\sigma = \epsilon_0 (\vec{E}_t - \vec{E}_i) \cdot \vec{n}$$

où \vec{E}_i est le champ électrique incident sur le plan, \vec{E}_t le champ transmis et \vec{n} le vecteur unitaire normal au plan étudié, dirigé dans le sens de la transmission.

Dans le cas présent, le champ électrique transmis est rigoureusement nul et le champ électrique incident est \vec{E} . Par suite,

$$\sigma = -\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$$

Or, \vec{E} est colinéaire à \vec{e}_z et les vecteurs normaux aux plans situés en $z = 0$ et $z = a$ d'une part, et en $y = 0$ et $y = b$ d'autre part, sont respectivement colinéaires à \vec{e}_z et à \vec{e}_y . Par conséquent, **des charges surfaciques apparaissent seulement sur les plans situés en $z = 0$ et $z = a$.**

B. Du guide d'onde à la cavité

I.B.1 Le champ \vec{E}_i considéré est polarisé rectilignement suivant (Oz). À la surface des deux plans situés en $x = 0$ et $x = \ell$, le champ électrique doit être nul, puisqu'ils sont considérés comme des conducteurs parfaits. Toutefois, \vec{E}_i est colinéaire à ces plans et n'est pas nul à leur surface, sauf à considérer qu'il est identiquement nul dans tout l'espace, ce qui n'est pas intéressant. Pour vérifier les conditions aux limites, **il doit donc exister un champ électrique réfléchi.**

Ce résultat peut également être donné par deux autres explications qualitatives : le champ incident excite les charges en surface du conducteur métallique parfait, charges qui rayonnent donc un champ réfléchi (première explication). Par ailleurs, la puissance incidente n'est pas transmise puisque le champ transmis est nul : la conservation de l'énergie implique donc que cette puissance doit être réfléchie (deuxième explication).

On a montré à la question I.A.2.b, que \vec{E}_i , appelé ici \vec{E}_i , est solution des équations de Maxwell. Le même raisonnement permet d'affirmer que \vec{E}_0 est également solution. Les équations de Maxwell étant linéaires, toute combinaison linéaire de \vec{E}_i et \vec{E}_0 , et donc en particulier $\vec{E}_i + \vec{E}_0$, **est solution de ces équations.**

Considérons les conditions aux limites imposées par les deux nouveaux plans métalliques. Le champ électrique devant être nul à la surface de ces deux plans, on a

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_0)(x=0) = (\vec{E}_i + \vec{E}_0)(x=\ell) = 0$$

Or, $\vec{E}_i + \vec{E}_0 = E_0(y) e^{i\omega t} (e^{-ik_g x} + K e^{ik_g x}) \vec{e}_z$

La condition en $x = 0$ donne alors la relation

$$E_0(y) e^{i\omega t} (1 + K) = 0$$

qui doit être vérifiée pour toute valeur de t , et de y , ce qui impose

$$1 + K = 0 \quad \text{soit} \quad K = -1$$

d'où $\vec{E}_i + \vec{E}_0 = E_0(y) e^{i\omega t} (e^{-ik_g x} - e^{ik_g x}) \vec{e}_z = -2i E_0(y) e^{i\omega t} \sin(k_g x) \vec{e}_z$.

Ce résultat peut également être donné par deux autres explications qualitatives : le champ incident excite les charges en surface du conducteur métallique parfait, charges qui rayonnent donc un champ réfléchi (première explication). Par ailleurs, la puissance incidente n'est pas transmise puisque le champ transmis est nul : la conservation de l'énergie implique donc que cette puissance doit être réfléchie (deuxième explication).

On a montré à la question I.A.2.b que \vec{E}_i , appelé ici \vec{E}_i , est solution des équations