2.4. Análise combinatória

Nem sempre é fácil determinar o número de pontos amostrais de espaço amostral. Para superar este problema, usa-se a analise combinatória que permite determinar todos os pontos amostrais de um experimento. Este método de análise também é chamado *método sofisticado de contagem*.

2.4.1 Princípio fundamental de contagem. Diagramas de árvores

Se um resultado pode ser descrito como uma sequência de *k* etapas com n_1 resultados possíveis na primeira etapa, n_2 na segunda etapa, e assim por diante, então o número total de resultados experimentais é dado por $n_1 x n_2 x ... x n_k$.

Exemplo 8: considere o exemplo de jogar duas moedas. Definindo o resultado em termos dos padrões de caras e de coroas que aparecem nas faces voltadas para cima das duas moedas, na primeira etapa $n_1=2$ e no segundo arremesso $n_2=2$. A partir da regra de cálculo pode-se ver que há 2x2=4 resultados experimentais distintos, isto é, {*HH, HT, TH, TT*}.

Exemplo 9: se um homem tem duas camisas e quatro gravatas, então ele tem 2x4=8 maneiras de escolher uma camisa e uma gravata.

Um diagrama, chamado de *diagrama em árvore* devido à sua aparência, é muitas vezes usado em conexão com o princípio acima.

$$\begin{cases} Cara & \begin{cases} Cara & (H,H) \\ Coroa & (H,T) \end{cases} \\ Coroa & \begin{cases} Cara & (T,H) \\ Coroa & (T,T) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 & \begin{cases} G_1 & (C_1G_1) \\ G_2 & (C_1G_2) \\ G_3 & (C_1G_3) \\ G_4 & (C_1G_4) \end{cases} \\ C_2 & \begin{cases} G_1 & (C_2G_1) \\ G_2 & (C_2G_2) \\ G_3 & (C_2G_3) \\ G_4 & (C_2G_4) \end{cases} \end{cases}$$

*Exe*mplo 10: A Maria vai sair com as suas amigas e, para escolher a roupa que usará, separou 2 saias e 4 blusas. De quantas maneiras ela pode se arrumar?

Resposta: para se arrumar, a Maria terá que percorrer duas etapas diferentes:

1. A primeira etapa (escolha da saia) que pode ser realizada de 2 maneiras distintas que consistirão de uma das duas saia.
2. A segunda etapa (escolha da blusa) que pode realizar de 4 maneiras distintas escolhendo uma das quatro blusas.

$n_1=2$ e $n_2=4$. Então, a Maria pode-se arrumar de n_1*n_2 maneiras diferentes, isto é, 2*4=8

Exemplo 11: Quantos anagramas podem ser formados com a palavra BLOG.

Resposta:

- Há quatro (4) maneiras para a escolha da primeira letra;
- Para cada escolha da primeira letra, há três (3) possibilidades para a escolha da segunda;
- Para cada escolha do primeiro par de letras, há duas (2) possibilidades para a escolha da terceira;
- E, finalmente, para cada escolha das primeiras três letras, há somente uma (1) possibilidade para a escolha da quarta.
- Portanto, podemos concluir, pelo princípio fundamental da contagem, que o número de anagramas é igual a 4 x 3 x 2 x 1 = 24.

Exemplo12: Determinar o número de placas de carros que podem ser construídas com o uso de três letras e quatro algarismos.

Solução:

Para resolver o problema, primeiro vamos determinar quantas possibilidades existem para combinar as três letras. Como sabemos que o alfabeto possui 26 letras e é permitida a repetição

há 26 maneiras para a escolha da primeira letra, 26 para a segunda e 26 para a terceira. Portanto, existem, pelo princípio fundamental da contagem: 26 x 26 x 26 = 17.576 combinações possíveis.
De forma análoga pode-se afirmar que existem 10.000 combinações possíveis que podem ser estabelecidas com os quatro algarismos. Como a cada escolha de três letras se constroem 10.000 placas, vem que o total de placas é: 10.000 x 17.576 = 175.760.000
Exemplo 13: Quantos números ímpares de quatro algarismos podemos escrever utilizando os algarismos 1, 2, 4, 5 e 7?
Solução:
Note que não é condição do problema que os números sejam distintos, mas somente que sejam ímpares. Desses fatos podemos afirmar que:

- Há três possibilidades de escolha para o algarismo das unidades - algarismos 1, 5 e 7;
- Há cinco possibilidades de escolha para o algarismo das demais casas decimais (milhar, centena e dezena);

para concluir que o total de números ímpares é: 5 x 5 x 5 x 3 = 375
A partir das informações e exemplos pode-se concluir que o princípio fundamental da contagem se constitui em um instrumento básico para a Análise Combinatória. Entretanto, em algumas situações pode se tornar trabalhosa a resolução de problemas com sua aplicação directa. Assim, vamos, a seguir, detalhar as várias maneiras de formarmos agrupamentos e deduzir as fórmulas que permitam a sua contagem.

2.4.2 Arranjos

Chama-se arranjos de n elementos p a p aos agrupamentos distintos que podem formar-se de modo que em cada um dos agrupamentos entrem os p dos n elementos, considerando como distinto os dois agrupamentos que difiram pela **natureza** (espécie) ou pela **ordem** dos seus elementos.

ARRANJOS SEM REPETIÇÃO	**ARRANJOS COM REPETIÇÃO**
Cada elemento entra uma única vez num agrupamento dado	Os elementos podem aparecer repetidos num agrupamento dado:
$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$	$A_p^n = n^p$

Exemplo 14: quantos números de quatro algarismos diferentes são possível formar com os quatro elementos do conjunto {1, 2, 3, 5, 6}?
Solução:
Os agrupamentos que se pretendem obter diferem entre si ou pela natureza dos elementos ou pela ordem desses elementos. Ex: 2315 é diferente de 2135. são portanto, arranjos sem repetição, onde temos o total de elementos igual a 5 (n=5) e os agrupamentos a serem formados por quatro elementos (p=4): $A_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120$
Exemplo 15: Atendendo o exemplo anterior quantos seriam possíveis sendo 6 o algarismo da unidades?
Solução:
Uma vez que o elemento 6 tem uma posição fixa, restam 3 posições a serem preenchidas pelos restantes 4 elementos {1, 2, 3, 4}
_ _ _ 6 $A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$
Exemplo 16: Quantos números distintos com 2 algarismos, podemos formar com os dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Solução:

Uma vez que no enunciado não esta proibida a repetição dum número dentro de um agrupamento concreto, então trata-se de arranjos com repetição. O número possível de arranjos com repetição de 10 elementos (dígitos) tomados 2 a 2 é $10^2 = 100$

Por outro lado os números iniciados por 0 não terão 2 dígitos e sua quantidade corresponde a 10 números: {00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09}. Para dar a resposta final, temos que subtrair ao resultado anterior (100) esses 10 números: $10^2 - 10 = 90$

2.4.3 Permutações

Dá-se o nome de permutações de n elementos aos agrupamentos que podem formar-se com esses n elementos, tomados de cada vez, considerando como distintos dois agrupamentos que difiram somente pela **ordem** dos elementos nos agrupamentos. As permutações são um caso particular dos arranjos.

PERMUTAÇÕES SEM REPETIÇÃO	PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO	PERMUTAÇÕES CIRCULARES
Os n elementos são todos distintos.	α : Elementos são de uma categoria β : Elementos são de uma outra categoria γ : Elementos são de uma terceira categoria e assim sucessivamente	Situação que ocorre quando a disposição dos elementos forma uma circunferência, constituindo, por exemplo, os vértices de um polígono regular inscrito n lados.
O número total de permutações será dado por:	O número total de permutações que podemos formar é dados por:	
$P_n = n!$	$P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$	$P_n = (n-1)!$

*Exe*mplo 17: Com todas as letras da palavra ROMA, quantos arranjos se pode formar?

Solução:

É evidente que dois arranjos sé podem deferir pela ordem das letras, visto que em cada um dos arranjos entram todas as letras, basta mudar a ordem dos elementos ou por outras palavras permutar os elementos. Tendo 4 elementos (letras) na palavra ROMA o número de permutações possíveis é: $P_4 = 4! = 24$

Exemplo 18: com todas as letras da palavra BATATA, quantos arranjos se podem formar?

Solução:

É claro que se as letras fossem distintas, teríamos $P_6 = 6! = 720$, mas ocorre que temos **3** letras A, **2** letras T e **1** letra B. Como entram todas as letras e há letras repetidas, o agrupamento é uma permutação com repetição. Utilizando a formula será: $P_6^{2.3} = \frac{6!}{2!3!} = \frac{6!}{2!3!} = 60$

Exemplo 19: De quantos modos diferentes 4 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa?

Solução: $P_4 = (4-1)! = 3! = 6$

2.4.4 Combinações

Chama-se combinação de n elementos tomados p a p aos agrupamentos distintos que podem formar-se de modo que em cada um desses agrupamentos entrem p dos n elementos, considerando como distintos dos agrupamentos que difiram somente pela **natureza** (espécie) de pelo menos um elemento.

COMBINAÇÕES SEM REPETIÇÃO	**COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO**
Cada elemento entra uma única vez num agrupamento dado	Representam a quantidade de modos de escolher *k* objectos distintos ou não entre *n* objectos distintos dados. O total de combinações com repetição possível é dados por:
$C_p^n = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	$C_p^{n+p-1} = \dfrac{(n+p-1)!}{n!(n-1)!}$

Exemplo 20: Um estudante pretende comprar 4 livros diferentes, mas de igual custo, e só tem dinheiro para comprar três desses livros. De quantos modos diferentes o estudante pode fazer a escolha dos três livros de entre os quatro que deseja?

Solução:
Para uma melhor compreensão, apresentamos os livros pelas letras D, P, A, M, e analisemos o que se deve entender por fazer a escolha de modos diferentes. A escolha que consiste em comprar livros D, P, M é claramente diferente daquela que consiste em comprar os livros D, P, A. Mas a escolha D, P, M não é distinta, neste caso da escolha P, M, D que se refere aos mesmos livros em ordem diferente. Para este problema consideram-se como distintos ou diferentes, dois agrupamentos, unicamente no caso em que um deles contém um elemento, pelo menos, diferente dos elementos do outro. São, portanto, combinações sem repetição porque, para o enunciado do problema, comprar 3 livros iguais são quase absurdas. O número de maneiras diferentes, será igual $C_3^4 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = \dfrac{4\times 3!}{3!1!} = 4$

Exemplo 21: De quantos modos distintos posso comprar dois sorvetes, diferentes ou não, de uma sorveteria que oferece três sabores: morango, coco, limão?

Solução:
Como nesta situação é permitido repetição dos objectos, diremos que temos casos de combinação com repetição de três elementos tomados 2 a 2. utilizando a formula: $C_2^{3+2-1} = \dfrac{(3+2-1)!}{3!(3-1)!} = 6$

Exemplo 22: Numa classe existem 8 alunas da quais uma se chama Maria e 7 alunas, sendo José o nome de um deles. Formam-se comissões constituídas de 5 alunos e 4 alunas. Quantas são as comissões das quais:

a) Maria participa? M __ __ __ __ (alunas) __ __ __ __ (alunos)

1ª decisão: Escolha das restantes quatro alunas que farão parte da comissão C_4^7

2ª decisão: Escolha dos alunos que farão parte da comissão C_4^7

Logo temos: $C_4^7 \text{ x } C_4^7$ comissões

b) Maria participa sem José?

1ª decisão: Escolha das demais quatro alunas que farão parte da comissão C_4^7

2ª decisão: Escolha dos alunos que farão parte da comissão excepto José C_4^6

Logo temos: $C_4^7 \text{ x } C_4^6$ comissões onde Maria participa e José não participam

c) José participa

1ª decisão: Escolha das alunas que farão parte da comissão C_5^8

2ª decisão: Escolha dos demais três alunos que farão parte da comissão C_3^6

d) Maria e José participam simultaneamente

1ª decisão: Escolha das demais quatro alunas que farão parte da comissão C_4^7

2ª decisão: Escolha dos demais três alunos que farão parte da comissão C_3^6

De um modo geral, podemos dizer que:

- Arranjos (com ou sem repetição) – A ordem interessa $ab \neq ba$
- Combinações (com ou sem repetição) – Não interessa a ordem $ab = ba$
- Permutações (com ou sem repetição) – Interessa a ordem $ab \neq ba$