Master Autonomes Fahren - Mathematik Zusammenfassung

Marcel Wagner

5. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Formelverzeichnis

1 Mathematische Symbole

1.1 Mengen

Symbol	Verwendung	Bedeutung
$\in$	$\omega \in \Omega$	Element (ω ist in Ω enthalten)
$\cap$	$A \cap B$	Disjunkt (Kein Teil von A ist ein Teil von B)
$\cup$	$A \cup B$	Kunjunktion (Ein Teil von A ist ein Teil von B)
$\subseteq$	$A \subseteq B$	Teilmenge (A ist eine Teilmenge von B)
$\setminus$	$A \setminus B$	Differenz (Differenz der mengen A und B)
$^{\mathrm{C}}$	A^{C}	Komplement (Differenz des Universums (kann eine größere Menge sein) und der Teilmenge)

2 Statistik

2.1 Arithmetisches Mittel

$$\overline{x} := \frac{x_1 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

2.2 Mittlerer Abstand

Der mittlere Abstand wird nicht sehr häufig verwendet, da das Rechnen mit Beträgen sehr mühsam ist. Die Varianz (durchschnittliche quadratische Abweichung) eignet sich besser.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| \tag{2}$$

2.3 Varianz

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \tag{3}$$

2.4 Standartabweichung

$$s_x = \sqrt{s_x^2} \tag{4}$$

2.5 Kovarianz

$$y_{xy} := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \tag{5}$$

2.6 Korrelationskoeffizient

$$r_{xy} := \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \tag{6}$$

2.7 Regressionsgerade

$$y = a + bx \tag{7}$$

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \tag{8}$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x} \tag{9}$$

2.8 Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2} \tag{10}$$

TODO: Beschreibung von y dach und y quer

2.9 Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = r_{xy}^2 \tag{11}$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.1 Fakultät

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \tag{12}$$

3.2 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{13}$$

3.3 Kugeln Ziehen

	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

3.4 Menge

Unter einer Menge verstehen wir die Zusammenfassung unterscheidbarer Elemente zu einer Gesamtheit.

3.5 Gleichheit

$A = B :\Leftrightarrow A$ und B besitzen die gleichen Elemente.

3.6 Teilmenge

$A \subset B :\Leftrightarrow$ wenn alle Elemente von A auch in B sind, dann ist A eine Teilmenge von B oder auch B die Obermenge von A.
Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.

3.7 Potenzmenge

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist eine Menge welche aus allen Teilmengen von $U \subseteq X$ besteht.

3.8 Mächtigkeit

$|A| :=$ Zahl der Elemente von A.

3.9 Vereinigung

$A \cup B :=$ Menge aus allen Elementen welche in A oder in B oder in beiden enthalten sind.

3.10 Schnitt

$A \cap B :=$ Menge aus allen Elementen welche in A und in B enthalten sind.

3.11 Differenz

$A \setminus B :=$ Menge aus allen Elementen welche zu A aber **nicht** zu B gehören.

3.12 Komplement

$A^C :=$ Menge aus allen Elementen welche **nicht** zu A gehören.

3.13 Kartesisches Produkt

$$A \times B := (a, b) : a \in A, b \in B \tag{14}$$

3.14 Zufallsexperiment

- Genau festgelegte Bedingungen
- Zufälliger Ausgang
- Beliebig oft wiederholbar
- Ein Versuch bezeichnet einen Vorgang bei dem mehrere Ergebnisse (Elementarereignis) eintreten können
- Menge aller Elementarereignisse wird als Ergebnismenge (Ergebnisraum) Ω bezeichnet

3.15 Ereignis

- Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt Ereignis
- $A = \emptyset$ unmögliches Ereignis
- $A = \Omega$ sicheres Ereignis

3.16 Disjunkte Ereignisse

Zwei ereignisse sind disjunkt (unvereinbar) wenn deren Schnitt gleich der leeren Menge ist $A \cap B = \emptyset$.

3.17 σ-Algebra

Eine Teilmenge einer Potenzmenge (Menge von Teilmengen, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) heißt σ-Algebra wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ enthält die Grundmenge Ω.
- Das Komplement A^{C} eines Elements der Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ ist gleich der Differenz aus Grundmenge und Element $A^{\mathrm{C}} := \Omega \setminus A$. Stabilität des Komplements.
- Sind die Mengen in der Teilmenge der Potenzmenge $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}$ enthalten, so ist auch die Vereinigung aller Mengen in der Teilmenge der Potenzmenge enthalten $\bigcup\limits_{n \epsilon \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
- Alle vorangegangenen Mengenoperationen können auf die Teilmengen angewendet werden.

3.18 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Funktion P ordnet jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zu.

(I) Für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $0 \leq P(A) \leq 1$

(I') Für das unmögliche Ereignis gilt $P(\emptyset) = 0$

(II) Für das sichere Ereignis Ω gilt $P(\Omega) = 1$

(II') Für ein Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $P(A^C) = 1 - P(A)$

(III) Für disjunkte Ereignisse A und B gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(III') Für zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3.19 Laplace Experiment

Endlich viele Elementarereignisse welche alle gleich wahrscheinlich sind.
Satz von Laplace:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } A}{\text{Anzahl aller möglichen Elementarereignisse}} \tag{15}$$

3.20 Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse heißen **unabhängig** wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{16}$$

Sie heißen **abhängig** wenn sie nicht unabhängig sind.
Für unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{bzw.} \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{17}$$

3.21 Bedingte Wahrscheinlichkeit

"Wahrscheinlichkeit von A gegeben B".

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{18}$$

Sind $A, B \subset \Omega$ **unabhängige** Ereignisse gilt:

$$P(A|B) = P(A) \tag{19}$$

Sind $A, B \subset \Omega$ **abhängige** Ereignisse gilt:

$$P(A|B) \neq P(A) \tag{20}$$

3.22 Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \tag{21}$$

3.23 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Der Ergebnisraum ist gegeben durch $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ mit $P(B_j) > 0$ und alle j sind paarweise Disjunkt $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot P(B_j) \tag{22}$$

Für den Spezialfall $\Omega = B \cup B^C$ gilt:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(B^C) \cdot P(A|B^C) \tag{23}$$

3.24 Satz von Bayes

Besteht aus dem Multiplikationssatz & der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(A^C) \cdot P(B|A^C)} \tag{24}$$

3.25 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung des Ergebnisraums auf den reellen Zahlenraum $\Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Die Zufallsvariable ordnet jedem Elementarereignis eine reelle Zahl zu.
Zwei Zufallsvariablen sind **unabhängig** wenn gilt:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad \text{für alle} \quad A, B \subset \mathbb{R} \tag{25}$$

Die Zufallsvariablen heißen **abhängig** wenn sie nicht unabhängig sind.
Die Zufallsvariable wird **diskret** genannt wenn sie nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annimmt. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1 \tag{26}$$

3.26 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Für die diskrete Zufallsvariable X und ihre Ausprägungen lautet die Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p_X(x) := \begin{cases} P(X = x_i), \text{ für } x = x_i \text{ mit Zählindex } i \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \tag{27}$$

$$\sum_{x_i} p_X(x_i) = 1 = p(\Omega) \tag{28}$$

3.27 Verteilungsfunktion diskreter Zufallsvariablen

Für die diskrete Zufallsvariable X und ihre Ausprägungen lautet die Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i) \tag{29}$$

3.28 Stetige Zufallsvariable

Eine zuvallsvariable wird **stetig** genannt, wenn es eine nicht-negative Funktion $f_X \geq 0$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \tag{30}$$

gibt, so dass für alle $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a \leq b$ gilt:

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx \tag{31}$$

f_X wird als **Dichtefunktion** (Wahrscheinlichkeitsdichte) der Zufallsvariable X bezeichnet.
Ihre Verteilungsfunktion F_X lautet:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \tag{32}$$

Außerdem gilt:

$$f_X = F'_X \tag{33}$$

Daraus folgt:

$$P(X \in [a,b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a) \tag{34}$$

3.29 Quantil

Bezeichnet das kleinste x mit $F_X(x) \geq p$.
Spezielle Quantile sind:

- $x_{0.5}$ Median
- $x_{0.25}, x_{0.5}, x_{0.75}$ erstes, zweites und drittes Quantil
- $x_{0.01}, x_{0.02}, x_{0.03}, ...$ erstes, zweites, drittes, ... Perzentil

3.30 Symmetrische Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X wird **symmetrisch** genannt, wenn es eine Symmetrieachse $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $d \in \mathbb{R}$ gilt:

- für diskrete Zufallsvariablen

$$P(X = c - d) = P(X = c + d) \tag{35}$$

- für stetige Zufallsvariablen

$$f_X(c - d) = f_X(c + d) \tag{36}$$

3.31 Mehrdimensionale Verteilungsfunktion

Die **Verteilungsfunktion** einer zweidimensionalen Zufallsveriablen $Z = (X_1, ..., X_n)$ wird definiert durch:

$$F_Z(x_1, ..., y) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n). \tag{37}$$

3.32 Rand-Verteilungsfunktion

Als Rand-Verteilungsfunktion einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen $Z = (X_1, ..., X_n)$ wird diejenige Funktion bezeichnet welche lediglich eine dimension betrachtet.

$$F_{X_i}(x_i) = F_Z(\infty, ..., \infty, x_i, \infty, ..., \infty) \tag{38}$$

Für die zweidimensionale Rand-Verteilungsfunktion ($Z = (X, Y)$, $F_Z(x, y)$) gilt:

$$F_X(x) = F_Z(x, \infty) \text{ sowie } F_Y(y) = F_Z(\infty, y) \tag{39}$$

3.33 Totale Wahrscheinlichkeit

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)dy = \int f_Y(y) \cdot f_X(x|Y=y)dy \tag{40}$$

Mit dieser Formel lässt sich eine Rand-Dichte aus einer gemeinsamen Dichte bestimmen, dies wird als **Marginalisierung** bezeichnet.

3.34 Erwartungswert einer Zufallsvariable

Für eine diskrete Zufallsvariable mit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Ausprägungen und Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X lautet der **Erwartungswert**:

$$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_X(x_i) \tag{41}$$

Für eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X lautet der Erwartungswert:

$$E(X) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx \tag{42}$$

3.35 Transformationen von Zufallsvariablen

- Linearität:

$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y) \tag{43}$$

- Multiplikation:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \tag{44}$$

3.36 Varianz einer Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = E(X)$ hat die **Varianz**:

$$\sigma^2(X) := E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 \tag{45}$$

Die Standartabweichung lautet:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} \tag{46}$$

4 Zusatz

4.1 Integration

$$\int\limits_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{47}$$

$$\int\limits_a^b f(x) + g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx \tag{48}$$

$$\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx \tag{49}$$

4.2 Partielle Integration

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx \tag{50}$$

TODO: Basics Integration

4.3 Differentialgleichungen

TODO: Basics DGL Lösungen

5 Anhang