Master Autonomes Fahren - Mathematik Zusammenfassung

Marcel Wagner

11. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Symbole

1.1 Mengen

Symbol	Verwendung	Bedeutung
$\in$	$\omega \in \Omega$	Element (ω ist in Ω enthalten)
$\cap$	$A \cap B$	Disjunkt (Kein Teil von A ist ein Teil von B)
$\cup$	$A \cup B$	Kunjunktion (Ein Teil von A ist ein Teil von B)
$\subseteq$	$A \subseteq B$	Teilmenge (A ist eine Teilmenge von B)
$\backslash$	$A \backslash B$	Differenz (Differenz der mengen A und B)
$^{\mathrm{C}}$	A^{C}	Komplement (Differenz des Universums (kann eine größere Menge sein) und der Teilmenge)
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	Positive Ganze Zahlen ohne Null (1,2,3,...)
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	Ganze Zahlen (...,-2,-1,0,1,2,...)
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	$z \cdot \frac{1}{x}$ mit $z, x \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	Erweiterung der Rationalen Zahlen durch diejenigen Zahlen welche sich nicht durch Brüche darstellen lassen (z.B.$\sqrt{2}, \pi$)
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen	$a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$

2 Statistik

2.1 Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} := \frac{x_1 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.2 Mittlerer Abstand

Der mittlere Abstand wird nicht sehr häufig verwendet, da das Rechnen mit Beträgen sehr mühsam ist. Die Varianz (durchschnittliche quadratische Abweichung) eignet sich besser.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

2.3 Varianz

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

2.4 Standartabweichung

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

2.5 Kovarianz

$$y_{xy} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

2.6 Korrelationskoeffizient

$$r_{xy} := \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

2.7 Regressionsgerade

$$y = a + bx$$

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

2.8 Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

mit Arithmetischem Mittel $\bar{y}$ und Ausgleichsgerade $\hat{y}_i = y(x_i) = a + bx_i$.

$$R^2 = r_{xy}^2$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.1 Fakultät

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

3.2 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

3.3 Kugeln Ziehen

	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

3.4 Menge

Unter einer Menge verstehen wir die Zusammenfassung unterscheidbarer Elemente zu einer Gesamtheit.

3.4.1 Gleichheit

$A = B :\Leftrightarrow A$ und B besitzen die gleichen Elemente.

3.4.2 Teilmenge

$A \subset B :\Leftrightarrow$ wenn alle Elemente von A auch in B sind, dann ist A eine Teilmenge von B oder auch B die Obermenge von A.
Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.

3.4.3 Potenzmenge

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist eine Menge welche aus allen Teilmengen von $U \subseteq X$ besteht.

3.4.4 Mächtigkeit

$|A| :=$ Zahl der Elemente von A.

3.4.5 Vereinigung

$A \cup B :=$ Menge aus allen Elementen welche in A oder in B oder in beiden enthalten sind.

3.4.6 Schnitt

$A \cap B :=$ Menge aus allen Elementen welche in A und in B enthalten sind.

3.4.7 Differenz

$A \setminus B :=$ Menge aus allen Elementen welche zu A aber **nicht** zu B gehören.

3.4.8 Komplement

$A^C :=$ Menge aus allen Elementen welche **nicht** zu A gehören.

3.4.9 Kartesisches Produkt

$$A \times B := (a, b) : a \in A, b \in B$$

3.4.10 σ-Algebra

Eine Teilmenge einer Potenzmenge (Menge von Teilmengen, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) heißt σ-Algebra wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ enthält die Grundmenge Ω.
- Das Komplement A^{C} eines Elements der Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ ist gleich der Differenz aus Grundmenge und Element $A^{\mathrm{C}} := \Omega \setminus A$. Stabilität des Komplements.
- Sind die Mengen in der Teilmenge der Potenzmenge $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}$ enthalten, so ist auch die Vereinigung aller Mengen in der Teilmenge der Potenzmenge enthalten $\bigcup\limits_{n \epsilon \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
- Alle vorangegangenen Mengenoperationen können auf die Teilmengen angewendet werden.

3.5 Zufallsexperiment

- Genau festgelegte Bedingungen
- Zufälliger Ausgang
- Beliebig oft wiederholbar
- Ein Versuch bezeichnet einen Vorgang bei dem mehrere Ergebnisse (Elementarereignis) eintreten können
- Menge aller Elementarereignisse wird als Ergebnismenge (Ergebnisraum) Ω bezeichnet

3.6 Ereignis

- Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt Ereignis
- $A = \emptyset$ unmögliches Ereignis
- $A = \Omega$ sicheres Ereignis

3.6.1 Disjunkte Ereignisse

Zwei ereignisse sind disjunkt (unvereinbar) wenn deren Schnitt gleich der leeren Menge ist $A \cap B = \emptyset$.

3.6.2 Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse heißen **unabhängig** wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sie heißen **abhängig** wenn sie nicht unabhängig sind.
Für unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{bzw.} \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

3.7 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Funktion P ordnet jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zu.

(I) Für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $0 \leq P(A) \leq 1$

(I') Für das unmögliche Ereignis gilt $P(\emptyset) = 0$

(II) Für das sichere Ereignis Ω gilt $P(\Omega) = 1$

(II') Für ein Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $P(A^C) = 1 - P(A)$

(III) Für disjunkte Ereignisse A und B gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(III') Für zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3.8 Laplace Experiment

Endlich viele Elementarereignisse welche alle gleich wahrscheinlich sind.
Satz von Laplace:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } A}{\text{Anzahl aller möglichen Elementarereignisse}}$$

3.9 Bedingte Wahrscheinlichkeit

"Wahrscheinlichkeit von A gegeben B".

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sind $A, B \subset \Omega$ **unabhängige** Ereignisse gilt:

$$P(A|B) = P(A)$$

Sind $A, B \subset \Omega$ **abhängige** Ereignisse gilt:

$$P(A|B) \neq P(A)$$

3.9.1 Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

3.9.2 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Der Ergebnisraum ist gegeben durch $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ mit $P(B_j) > 0$ und alle j sind paarweise Disjunkt $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot P(B_j)$$

Für den Spezialfall $\Omega = B \cup B^C$ gilt:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(B^C) \cdot P(A|B^C)$$

3.9.3 Satz von Bayes

Besteht aus dem Multiplikationssatz & der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(A^C) \cdot P(B|A^C)}$$

3.10 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung des Ergebnisraums auf den reellen Zahlenraum $\Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Die Zufallsvariable ordnet jedem Elementarereignis eine reelle Zahl zu.
Zwei Zufallsvariablen sind **unabhängig** wenn gilt:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad \text{für alle} \quad A, B \subset \mathbb{R}$$

Die Zufallsvariablen heißen **abhängig** wenn sie nicht unabhängig sind.

3.10.1 Diskrete Zufallsvariable

Die Zufallsvariable wird **diskret** genannt wenn sie nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annimmt. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$$

3.10.2 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Für die diskrete Zufallsvariable X und ihre Ausprägungen lautet die Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p_X(x) := \begin{cases} P(X = x_i), \text{ für } x = x_i \text{ mit Zählindex } i \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\sum_{x_i} p_X(x_i) = 1 = p(\Omega)$$

3.10.3 Verteilungsfunktion diskreter Zufallsvariablen

Für die diskrete Zufallsvariable X und ihre Ausprägungen lautet die Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

3.10.4 Stetige Zufallsvariable

Eine zuvallsvariable wird **stetig** genannt, wenn es eine nicht-negative Funktion $f_X \geq 0$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

gibt, so dass für alle $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a \leq b$ gilt:

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

f_X wird als **Dichtefunktion** (Wahrscheinlichkeitsdichte) der Zufallsvariable X bezeichnet. Ihre Verteilungsfunktion F_X lautet:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

Außerdem gilt:

$$f_X = F'_X$$

Daraus folgt:

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$

3.10.5 Symmetrische Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X wird **symmetrisch** genannt, wenn es eine Symmetrieachse $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $d \in \mathbb{R}$ gilt:

- für diskrete Zufallsvariablen
$$P(X = c - d) = P(X = c + d)$$

- für stetige Zufallsvariablen
$$f_X(c - d) = f_X(c + d)$$

3.10.6 Mehrdimensionale Verteilungsfunktion

Die **Verteilungsfunktion** einer zweidimensionalen Zufallsveriablen $Z = (X_1, ..., X_n)$ wird definiert durch:
$$F_Z(x_1, ..., y) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n).$$

3.10.7 Rand-Verteilungsfunktion

Als Rand-Verteilungsfunktion einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen $Z = (X_1, ..., X_n)$ wird diejenige Funktion bezeichnet welche lediglich eine dimension betrachtet.

$$F_{X_i}(x_i) = F_Z(\infty, ..., \infty, x_i, \infty, ..., \infty)$$

Für die zweidimensionale Rand-Verteilungsfunktion ($Z = (X, Y)$, $F_Z(x, y)$) gilt:

$$F_X(x) = F_Z(x, \infty) \text{ sowie } F_Y(y) = F_Z(\infty, y)$$

3.10.8 Totale Wahrscheinlichkeit

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)dy = \int f_Y(y) \cdot f_X(x|Y = y)dy$$

Mit dieser Formel lässt sich eine Rand-Dichte aus einer gemeinsamen Dichte bestimmen, dies wird als **Marginalisierung** bezeichnet.

3.10.9 Erwartungswert einer Zufallsvariable

Für eine diskrete Zufallsvariable mit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Ausprägungen und Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X lautet der **Erwartungswert**:

$$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_X(x_i)$$

Für eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X lautet der Erwartungswert:

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

3.10.10 Transformationen von Zufallsvariablen

- Linearität:
$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$
- Multiplikation:
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

3.10.11 Varianz einer Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = E(X)$ hat die **Varianz**:

$$\sigma^2(X) := E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$$

Die Standartabweichung lautet:
$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

3.10.12 Grenzwertsatz von Zufallsvariablen

Für $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$, $\sigma(X_i) = \sigma$ und $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ gilt:

$$E(\bar{X}) = \mu$$
$$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$
$$\sigma(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3.11 Quantil

Bezeichnet das kleinste x mit $F_X(x) \geq p$.
Spezielle Quantile sind:

- $x_{0.5}$ Median
- $x_{0.25}, x_{0.5}, x_{0.75}$ erstes, zweites und drittes Quantil
- $x_{0.01}, x_{0.02}, x_{0.03}, ...$ erstes, zweites, drittes, ... Perzentil

3.12 Diskrete Verteilungen

3.12.1 Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable wird **Bernoulli-verteilt** genannt, wenn sie nur zwei mögliche Ausprägungen (z.B. 0 & 1) hat. Ihre Wahrscheinlichkeit lautet:

$$p := P(X = 1) \text{ und } q := 1 - p = P(X = 0)$$

Außerdem gilt:

$$E(X) = p$$
$$\sigma^2(X) = p \cdot q = p \cdot (1 - p)$$
$$\sigma(X) = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{p \cdot (1 - p)}$$

3.12.2 Binomialverteilung

Eine **Binomialverteilung** X bezeichnet die Anzahl der Erfolge bei n identischen unabhängigen Bernoulli-Experimenten $X \sim B(n;p)$.

$$B(n;p)(k) := p_X(k) = P(X=k) := \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ für } k = 0,1,...,n$$
$$B(n;p)(k) := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Weiter gilt:

$$E(X) = n \cdot p$$
$$\sigma^2(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$
$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Eine Binmialverteilung ist für $p = 0, 0.5, 1$ symmetrisch. Für alle anderen Werte ist sie nicht symmetrisch.
Aufgrund der Symmetrie gilt zudem:

$$B(n;p)(k) = B(n;1-p)(n-k) \text{ mit } n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$$

Für zwei Binominalverteilungen $X \sim B(n_1, p)$ und $Y \sim B(n_2, p)$ gilt, dass deren Summe wieder Binomialverteilt ist:

$$X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$$

Eine Binomialverteilung X mit seltenen Ereignissen ($p \approx 0, N \gg 0$) wird **Poissonverteilung** genannt $X \sim Po(\lambda)$. Sie wird approximiert durch:

$$p_X(k) = P(X=k) := \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \text{ für } k = 0,1,2,3,... \text{ und mit } \lambda := E(X)$$

3.13 Stetige Verteilungen

3.13.1 Gleichverteilung

Die **Gleichverteilung** X auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ($X \sim U([a,b])$) besitzt folgende Dichte:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{für} x \in [a,b] = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Es gilt:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$
$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

3.13.2 Inversionsmethode

Es sei X eine Zufallsvariable und F_X ihre Verteilungsfunktion.
Die Funktion F_X^{-1} ist die inverse Verteilungsfunktion (**Quantil-Funktion**):

$$F_X^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq u\}$$

Bedeutet, die inverse Verteilungsfunktion liefert das kleinste x welches in der Verteilungsfunktion den Funktionswert u überschreitet.
Für eine gleichverteilte Zufallsvariable (das bedeutet alle Zahlen von 0 bis 1 kommen gleich häufig vor) $U \sim U([0,1])$ gilt:

$$X := F_X^{-1}(U) \text{ hat die Verteilungsfunktion } F_X$$

Erklärung: U ist von 0 bis 1 gleichverteilt (alle Zahlen (x-Achse) kommen gleich häufig vor). Nun wird jeder Wert der Zufallsvariable U in die inverse Verteilungsfunktion eingesetzt. Dadurch wird jetzt die Funktion F_X nachgebildet, da immer das kleinste x der Verteilungsfunktion für den Wert von U zurückgegeben wird.

3.14 Normalverteilung

Die **Normalverteilung** X ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$ besitzt folgende Dichte und wird auch **Gaußsche Glockenkurve** genannt:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Die Gaußsche Glockenkurve besitzt an der Stelle μ ein Maximum, sowie zwei Wendepunkte an den Stellen $\mu \pm \sigma$. Zudem Gilt:

$$E(X) = \mu$$
$$\sigma(X) = \sigma$$

Falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ nennt man die normalverteilte Zufallsgröße X auch Standartnormalfunktion Φ. Für diese gilt:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \text{ mit } z \in \mathbb{R}$$

Falls $Y := a \cdot X + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dann gilt:

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$
$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Daher gilt weiter:

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$
$$P(X \in [a,b]) = P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a < b$$

Für eine Normalverteilung $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$P(\mu - \alpha < X < \mu + \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - 1$$

Wenn nun $p \in [0, 1]$ liegt und $\bar{x}$ mit $\Phi(\bar{x}) = \frac{p+1}{2}$ ist, so gilt mit $\alpha = \sigma \cdot \bar{x}$:

$$P(\mu - \alpha < X\mu + \alpha) = p$$

Daher gilt, dass

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \frac{2}{3}$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9975$

3.15 Zentraler Grenzwertsatz

Für $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ unabhängig und identisch verteile Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ und $\sigma(X_i) = \sigma$ für $i = 1, ..., n$ und $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ gilt:

$$Z_n := \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to N(0, 1)$$
$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$$

Für Daten unabhängiger, identischer Zufallsexperimente ist deren Mittelwert annähernd normalverteilt. Deren Erwartungswert und Standartabweichung lässt sich einfach empirisch bestimmen.

3.16 Hypothesentests

- **Nullhypothese** H_0: Annahme über ein erwartetes μ
- **Alternativhypothese** H_1: Gegenereignis zu H_0
- Möglichkeiten der Hypothesen (Test eines Parameters θ):

Nullhypothese H_0	Alternativhypothese H_1	Art
$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	zweiseitig
$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	einseitig
$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	einseitig

- Fehlerarten:

Ground Truth / Entscheidung	H_0 ist wahr	H_1 ist wahr
Annahme von H_0	richtig entschieden	Fehler zweiter Art
Ablehnung von H_0	Fehler erster Art	richtig entschieden

- Annahme oder ablehnung von H_0:

- **Ablehung von** H_0: Abweichung zwischen Prüfgröße und Annahme ist signifikant. Somit wird die Nullhypothese H_0 verworfen, bzw. die Alternativhypothese H_1 - mit einer Irrtumswahrscheilichkeit von α angenommen.
- **Annahme von** H_0: Es spricht nichts gegen eine Ablehnung/Verwerfung von H_0 damit wird diese Angenommen.

Vorgehen zum aufstellen eines Hypothesentests:

1. Aufstellen der Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1
2. Festlegen des Signifikanzniveaus α (Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art)
3. Berechnung des Streubereichs zum Signifikanzniveau α
4. Erhebung einer Stichbrube und berechnen der zugehörigen Prüfgröße
5. Entscheidung über die Ablehnung oder Annahme von H_0

3.16.1 Hypothesentests bei Normalverteilungen

Streubereiche für Normalverteilungen:

H_0	H_1	**Streubreich**
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left[\mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\left[\mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\left(-\infty, \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Für eine Stichprobe $x_1, ..., x_n$ von X mit $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ gilt:

$$\bar{x} \in \text{ Streubereich } \Rightarrow H_0 \text{ wird akzeptiert}$$
$$\bar{x} \notin \text{ Streubereich } \Rightarrow H_0 \text{ wird abgelehnt}$$

4 Zusatz

4.1 Integration

$$\int\limits_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int\limits_a^b f(x) + g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

$$\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$$

4.2 Partielle Integration

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x)dx + \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

TODO: Integrations regeln

4.3 Differentialgleichungen

TODO: Basics DGL Lösungen

[redacted]	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
[redacted]	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
[redacted]	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
[redacted]	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
[redacted]	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
[redacted]	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
[redacted]	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
[redacted]	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
[redacted]	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
[redacted]	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
[redacted]	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
[redacted]	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
[redacted]	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
[redacted]	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
[redacted]	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
[redacted]	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
[redacted]	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
[redacted]	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
[redacted]	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
[redacted]	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
[redacted]	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

5 Anhang