Master Autonomes Fahren - Mathematik Zusammenfassung

Marcel Wagner

22. Oktober 2020

1 Statistik

Arithmetisches Mittel	$\bar{x} := \frac{x_1 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Mittlerer Abstand	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x}\rvert$ Der mittlere Abstand wird nichtsehr häufig verwendet, da das Rechnen mit Beträgen sehr mühsam ist. Die Varianz (durchschnittliche quadratische Abweichung) eignet sich besser.
Varianz	$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
Standartabweichung	$s_x = \sqrt{s_x^2}$
Kovarianz	$s_{xy} := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Korrelationskoeffizient	$r_{xy} := \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$ • Wenn $r_{xy} = 0$, dann sind X und Y **unkorreliert** • Wenn X und Y **unabhängig** sind, so gilt $r_{xy} = 0$. Dieser Satz ist nicht umkehrbar! • $r_{xy} = \pm 1$, dann sind X und Y **perfekt korreliert**
Regressionsgerade	$y = ax + b$ $a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$ $b = \bar{y} - a\bar{x}$
Bestimmtheitsmaß	$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = r_{xy}^2$ mit Arithmetischem Mittel $\bar{y}$ und Ausgleichsgerade $\hat{y}_i = y(x_i) = a + bx_i$

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Fakultät	$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
Binominalkoeffizient	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

2.1 Kugeln Ziehen

	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

2.2 Menge

Unter einer Menge verstehen wir die Zusammenfassung unterscheidbarer Elemente zu einer Gesamtheit.

Gleichheit	$A = B :\Leftrightarrow A$ und B besitzen die gleichen Elemente.
Teilmenge	$A \subset B :\Leftrightarrow$ wenn alle Elemente von A auch in B sind, dann ist A eine Teilmenge von B oder auch B die Obermenge von A. Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.
Potenzmenge	Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist eine Menge welche aus allen Teilmengen von $U \subseteq X$ besteht.
Mächtigkeit	$\|A\| :=$ Zahl der Elemente von A.
Vereinigung	$A \cup B :=$ Menge aus allen Elementen welche in A oder in B oder in beiden enthalten sind.
Schnitt	$A \cap B :=$ Menge aus allen Elementen welche in A und in B enthalten sind.
Differenz	$A \setminus B :=$ Menge aus allen Elementen welche zu A aber **nicht** zu B gehören.
Komplement	$A^C :=$ Menge aus allen Elementen welche **nicht** zu A gehören.
Kartesisches Produkt	$A \times B := (a, b) : a \in A, b \in B$

2.2.1 σ-Algebra

Eine Teilmenge einer Potenzmenge (Menge von Teilmengen, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) heißt σ-Algebra wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ enthält die Grundmenge Ω.
- Das Komplement A^{C} eines Elements der Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ ist gleich der Differenz aus Grundmenge und Element $A^{\mathrm{C}} := \Omega \setminus A$. Stabilität des Komplements.
- Sind die Mengen in der Teilmenge der Potenzmenge $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}$ enthalten, so ist auch die Vereinigung aller Mengen in der Teilmenge der Potenzmenge enthalten $\bigcup_{n \epsilon \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

- Alle vorangegangenen Mengenoperationen können auf die Teilmengen angewendet werden.

2.3 Zufallsexperiment

- Genau festgelegte Bedingungen
- Zufälliger Ausgang
- Beliebig oft wiederholbar
- Ein Versuch bezeichnet einen Vorgang bei dem mehrere Ergebnisse (Elementarereignis) eintreten können
- Menge aller Elementarereignisse wird als Ergebnismenge (Ergebnisraum) Ω bezeichnet

2.4 Ereignis

- Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt Ereignis
- $A = \emptyset$ unmögliches Ereignis
- $A = \Omega$ sicheres Ereignis

2.4.1 Disjunkte Ereignisse

Zwei ereignisse sind disjunkt (unvereinbar) wenn deren Schnitt gleich der leeren Menge ist $A \cap B = \emptyset$.

2.4.2 Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse heißen **unabhängig** wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sie heißen **abhängig** wenn sie nicht unabhängig sind.
Für unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{bzw.} \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

2.5 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Funktion P ordnet jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zu.

(I) Für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $0 \leq P(A) \leq 1$

(I') Für das unmögliche Ereignis gilt $P(\emptyset) = 0$

(II) Für das sichere Ereignis Ω gilt $P(\Omega) = 1$

(II') Für ein Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $P(A^C) = 1 - P(A)$

(III) Für disjunkte Ereignisse A und B gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(III') Für zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2.6 Laplace Experiment

Endlich viele Elementarereignisse welche alle gleich wahrscheinlich sind.
Satz von Laplace:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } A}{\text{Anzahl aller möglichen Elementarereignisse}}$$

2.7 Bedingte Wahrscheinlichkeit

"Wahrscheinlichkeit von A gegeben B".

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sind $A, B \subset \Omega$ **unabhängige** Ereignisse gilt:

$$P(A|B) = P(A)$$

Sind $A, B \subset \Omega$ **abhängige** Ereignisse gilt:

$$P(A|B) \neq P(A)$$

Multiplikationssatz	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A) = P(B) \cdot P(A\|B)$
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit	Der Ergebnisraum ist gegeben durch $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ mit $P(B_j) > 0$ und alle j sind paarweise Disjunkt $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$ $P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A\|B_j) \cdot P(B_j)$ Für den Spezialfall $\Omega = B \cup B^C$ gilt: $P(A) = P(B) \cdot P(A\|B) + P(B^C) \cdot P(A\|B^C)$
Satz von Bayes	Besteht aus dem Multiplikationssatz & der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(A\|B) = \frac{P(A) \cdot P(B\|A)}{P(B)}$ $P(A\|B) = \frac{P(A) \cdot P(B\|A)}{P(A) \cdot P(B\|A) + P(A^C) \cdot P(B\|A^C)}$

2.8 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung des Ergebnisraums auf den reellen Zahlenraum $\Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Die Zufallsvariable ordnet jedem Elementarereignis eine reelle Zahl zu.
Zwei Zufallsvariablen sind **unabhängig** wenn gilt:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad \text{für alle} \quad A, B \subset \mathbb{R}$$

Die Zufallsvariablen heißen **abhängig** wenn sie nicht unabhängig sind.

	Diskret	Stetig
Zufallsvariable	Die Zufallsvariable wird **diskret** genannt wenn sie nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annimmt. Es gilt: $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$	Eine Zufallsvariable wird **stetig** genannt, wenn es eine nicht-negative Funktion $f_X \geq 0$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ gibt, so dass für alle $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a \leq b$ gilt:$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$
Wahrsch.-Fkt / Dichte	$p_X(x) := \begin{cases} P(X = x_i) \ , x = x_i \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$ $\sum_{x_i} p_X(x_i) = 1 = p(\Omega)$	$f_X(x)$
Verteilungs-funktion	$F_X(x) := P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$	$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$ $P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$
Symmetrische Zufallsvariable	Eine Zufallsvariable X wird **symmetrisch** genannt, wenn es eine Symmetrieachse $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $d \in \mathbb{R}$ gilt: $P(X = c - d) = P(X = c + d)$	$f_X(c - d) = f_X(c + d)$
Erwartungs-wert	$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_X(x_i)$	$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$
Varianz	Eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = E(X)$ hat die **Varianz**: $\sigma^2(X) := E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$ $\sigma^2(X) = \left(\sum_i x_i^2 \cdot f_X(x)\right) - \mu^2$	$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx - \mu^2$
Standart-abweichung	$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$	

2.8.1 Mehrdimensionale Verteilungsfunktion

Die **Verteilungsfunktion** einer zweidimensionalen Zufallsveriablen $Z = (X_1, ..., X_n)$ wird definiert durch:

$$F_Z(x_1, ..., y) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n).$$

2.8.2 Rand-Verteilungsfunktion

Als Rand-Verteilungsfunktion einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen $Z = (X_1, ..., X_n)$ wird diejenige Funktion bezeichnet welche lediglich eine dimension betrachtet.

$$F_{X_i}(x_i) = F_Z(\infty, ..., \infty, x_i, \infty, ..., \infty)$$

Für die zweidimensionale Rand-Verteilungsfunktion ($Z = (X, Y)$, $F_Z(x, y)$) gilt:

$$F_X(x) = F_Z(x, \infty) \text{ sowie } F_Y(y) = F_Z(\infty, y)$$

2.8.3 Totale Wahrscheinlichkeit

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)dy = \int f_Y(y) \cdot f_X(x|Y = y)dy$$

Mit dieser Formel lässt sich eine Rand-Dichte aus einer gemeinsamen Dichte bestimmen, dies wird als **Marginalisierung** bezeichnet.

2.8.4 Transformationen von Zufallsvariablen

- Linearität:
$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

- Multiplikation:
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

2.8.5 Grenzwertsatz von Zufallsvariablen

Für $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$, $\sigma(X_i) = \sigma$ und $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ gilt:

$$E(\bar{X}) = \mu$$
$$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$
$$\sigma(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2.9 Quantil

Bezeichnet das kleinste x mit $F_X(x) \geq p$.
Spezielle Quantile sind:

- $x_{0.5}$ Median
- $x_{0.25}, x_{0.5}, x_{0.75}$ erstes, zweites und drittes Quantil
- $x_{0.01}, x_{0.02}, x_{0.03}, ...$ erstes, zweites, drittes, ... Perzentil

2.10 Diskrete Verteilungen

2.10.1 Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable wird **Bernoulli-verteilt** genannt, wenn sie nur zwei mögliche Ausprägungen (z.B. 0 & 1) hat. Ihre Wahrscheinlichkeit lautet:

$$p := P(X = 1) \text{ und } q := 1 - p = P(X = 0)$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= p \\ \sigma^2(X) &= p \cdot q = p \cdot (1-p) \\ \sigma(X) &= \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{p \cdot (1-p)} \end{aligned}$$

2.10.2 Binomialverteilung

Eine **Binomialverteilung** X bezeichnet die Anzahl der Erfolge bei n identischen unabhängigen Bernoulli-Experimenten $X \sim B(n;p)$.

$$B(n;p)(k) := p_X(k) = P(X = k) := \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ für } k = 0, 1, ..., n$$
$$B(n;p)(k) := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= n \cdot p \\ \sigma^2(X) &= n \cdot p \cdot (1-p) \\ \sigma(X) &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \end{aligned}$$

Eine Binmialverteilung ist für $p = 0, 0.5, 1$ symmetrisch. Für alle anderen Werte ist sie nicht symmetrisch.
Aufgrund der Symmetrie gilt zudem:

$$B(n;p)(k) = B(n; 1-p)(n-k) \text{ mit } n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$$

Für zwei Binominalverteilungen $X \sim B(n_1, p)$ und $Y \sim B(n_2, p)$ gilt, dass deren Summe wieder Binomialverteilt ist:

$$X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$$

Eine Binomialverteilung X mit seltenen Ereignissen ($p \approx 0, N \gg 0$) wird **Poissonverteilung** genannt $X \sim Po(\lambda)$. Sie wird approximiert durch:

$$p_X(k) = P(X = k) := \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \text{ für } k = 0, 1, 2, 3, ... \text{ und mit } \lambda := E(X)$$

2.11 Stetige Verteilungen

2.11.1 Gleichverteilung

Die **Gleichverteilung** X auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ($X \sim U([a,b])$) besitzt folgende Dichte:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{für} x \in [a,b] = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1 \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$
$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Die Dichte der Addition von 2 Gleichverteilungen $X+Y$ entspricht der Faltung ihrer einzelnen Dichten $f_{X+Y}(x) = f_X(x) \star f_Y(x)$.

2.11.2 Inversionsmethode

Es sei X eine Zufallsvariable und F_X ihre Verteilungsfunktion.
Die Funktion F_X^{-1} ist die inverse Verteilungsfunktion (**Quantil-Funktion**):

$$F_X^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq u\}$$

Bedeutet, die inverse Verteilungsfunktion liefert das kleinste x welches in der Verteilungsfunktion den Funktionswert u überschreitet.
Für eine gleichverteilte Zufallsvariable (das bedeutet alle Zahlen von 0 bis 1 kommen gleich häufig vor) $U \sim U([0,1])$ gilt:

$$X := F_X^{-1}(U) \text{ hat die Verteilungsfunktion } F_X$$

Erklärung: U ist von 0 bis 1 gleichverteilt (alle Zahlen (x-Achse) kommen gleich häufig vor). Nun wird jeder Wert der Zufallsvariable U in die inverse Verteilungsfunktion eingesetzt. Dadurch wird jetzt die Funktion F_X nachgebildet, da immer das kleinste x der Verteilungsfunktion für den Wert von U zurückgegeben wird.

2.12 Normalverteilung

Die **Normalverteilung** X ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$ besitzt folgende Dichte und wird auch **Gaußsche Glockenkurve** genannt:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Die Gaußsche Glockenkurve besitzt an der Stelle μ ein Maximum, sowie zwei Wendepunkte an den Stellen $\mu \pm \sigma$. Zudem Gilt:

$$E(X) = \mu$$
$$\sigma(X) = \sigma$$

Falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ nennt man die normalverteilte Zufallsgröße X auch Standartnormalfunktion Φ. Für diese gilt:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \text{ mit } z \in \mathbb{R}$$

Falls $Y := a \cdot X + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dann gilt:

$$Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$
$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Daher gilt weiter:

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$
$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a < b$$

Für eine Normalverteilung $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$P(\mu - \alpha < X < \mu + \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - 1$$

Wenn nun $p \in [0, 1]$ liegt und $\bar{x}$ mit $\Phi(\bar{x}) = \frac{p+1}{2}$ ist, so gilt mit $\alpha = \sigma \cdot \bar{x}$:

$$P(\mu - \alpha < X\mu + \alpha) = p$$

Daher gilt, dass

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \frac{2}{3}$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9975$

2.13 Zentraler Grenzwertsatz

Für $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ unabhängig und identisch verteile Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ und $\sigma(X_i) = \sigma$ für $i = 1, ..., n$ und $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ gilt:

$$Z_n := \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$$

Für Daten unabhängiger, identischer Zufallsexperimente ist deren Mittelwert annäherned normalverteilt. Deren Erwartungswert und Standartabweichung lässt sich einfach empirisch bestimmen.

2.14 Hypothesentests

- **Nullhypothese** H_0: Annahme über ein erwartetes μ
- **Alternativhypothese** H_1: Gegenereignis zu H_0

Nullhypothese H_0	Alternativhypothese H_1	Art
$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	zweiseitig
$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	einseitig
$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	einseitig

Ground Truth Entscheidung	H_0 ist wahr	H_1 ist wahr
Annahme von H_0	richtig entschieden	Fehler zweiter Art
Ablehnung von H_0	Fehler erster Art	richtig entschieden

- **Ablehung von** H_0: Abweichung zwischen Prüfgröße und Annahme ist signifikant. Somit wird die Nullhypothese H_0 verworfen, bzw. die Alternativhypothese H_1 - mit einer Irrtumswahrscheilichkeit von α angenommen.
- **Annahme von** H_0: Es spricht nichts gegen eine Ablehnung/Verwerfung von H_0 damit wird diese Angenommen.

Vorgehen zum aufstellen eines Hypothesentests:

1. Aufstellen der Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1
2. Festlegen des Signifikanzniveaus α (Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art)
3. Berechnung des Streubereichs zum Signifikanzniveau α
4. Erhebung einer Stichprobe und berechnen der zugehörigen Prüfgröße
5. Entscheidung über die Ablehnung oder Annahme von H_0

2.14.1 Hypothesentests bei Normalverteilungen

H_0	H_1	**Streubreich**
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left[\mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\left[\mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\left(-\infty, \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

$z_{1-\alpha/2}$ ist hierbei derjenige Wert bei welchem $\Phi(z) = 1 - \alpha/2$ wird.
Für eine Stichprobe $x_1, ..., x_n$ von X mit $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ gilt:

$$\begin{aligned} \bar{x} \in & \text{ Streubereich } \Rightarrow H_0 \text{ wird akzeptiert} \\ \bar{x} \notin & \text{ Streubereich } \Rightarrow H_0 \text{ wird abgelehnt} \end{aligned}$$

3 Fourierreihen

3.1 Gleichanteil / Mittelwert

$$m = \frac{\text{Integral über eine Periode}}{\text{Periode}} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

3.2 Trigonometrisches Polynom

Darstellung einer Funktion durch ein Vielfaches aus Sinus und Kosinus mit unterschiedlichen vielfachen an Kreisfrequenzen.

$$p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k cos(k\omega t) + b_k sin(k\omega t)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Man nennt diese Funktion **trigonometrisches Polynom** vom Grad n. $a_0, a_1, ..., a_n$ und $b_1, ..., b_n$ sind beliebige Zahlen, mit $a_n, b_n \neq 0$.
Für jede Funktion $f(t)$ mit Periode $T > 0$ lässt sich als Fourierreihe darstellen.
Die Fourierreihe konvergiert

1. gleichmäßig (gleicher Fehler an allen Stellen) gegen f wenn f stetig (ohne Sprungstellen) und abschnittsweise stetig differenzierbar ist,

2. punktweise gegen $\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)$, das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseiteigem Grenzwert, wenn f aus endlich vielen stetigen Abschnitten besteht (mit Sprungstellen),

3. und somit konvergiert sie in den abgeschlossenen Intervallen in denen f stetig ist - dort sogar gleichmäßig.

3.3 Berechnung der Fourierkoeffizienten

$$a_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cos(k\omega t)dt, \quad k = 1, 2, ... \quad b_k = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sin(k\omega t)dt, \quad k = 1, 2, ...$$

Für periodische **stetige Funktionen Konvergiert** die Fourierreihe schnell, da ihre Koeffizienten a_k, b_k zu $1/k^2$ proportional abklingen. Für Funktionen mit Sprungstellen klingen sie nur zu $1/k$ proportional ab.
Für **gerade Funktionen** (achensymmetrisch zur y-Achse) sind die Koeffizienten $b_k = 0$. Für **ungerade Funktionen** (punktsymmetrisch zum Ursprung) sind die Koeffizeienten $a_k = 0$.

3.4 Eulersche Formel

$$e^{ix} = cos(x) + isin(x)$$

3.5 Gibbs'sches Phänomen

Bei z.B. nachbildung einer Rechteckfunktion mittels der Fourierreihe bleibt ein Überschwinger kurz nach der Flanke von $\sim 9\%$ bestehen (und auch nicht entfernen).

3.6 Komplexe Fourierreihe

Darstellung einer Funktion f mit Periode T als unendliche Summe heißt **komplexe Fourierreihe**

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Der zusammenhang zwischen der **komplexen Fourrierkoeffizienten** zu den reellen Fourierkoeffizienten besteht aus:

$$a_0 = 2\Re(c_0), \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

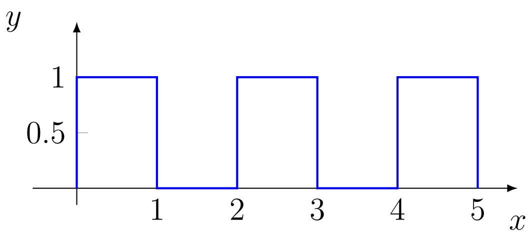
$$a_k = 2\Re(c_k), \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

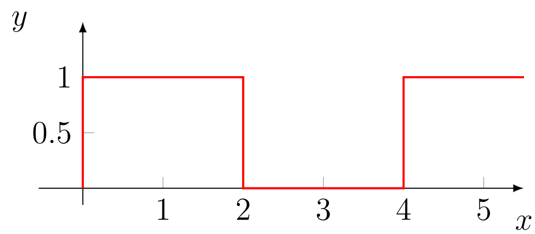
$$b_k = -2\Im(c_k), \quad c_k = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k = -1, -2, -3, ...$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

3.7 Ähnlichkeit, Zeitumkehr und Zeitverschiebung

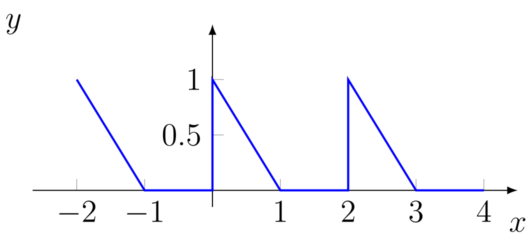
Ähnlichkeit:
Die Funktionen $f(t)$ und $\tilde{f}(t) = f(at)$ haben dieselben Fourierkoeffizienten. Die beiden Fourierreihen haben lediglich unterschiedliche Perioden und Kreisfrequenzen.

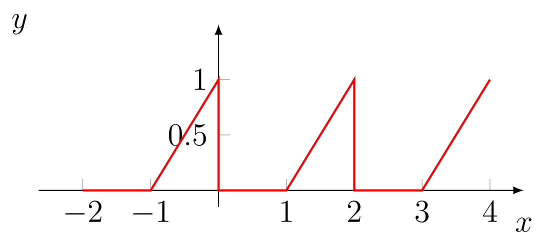




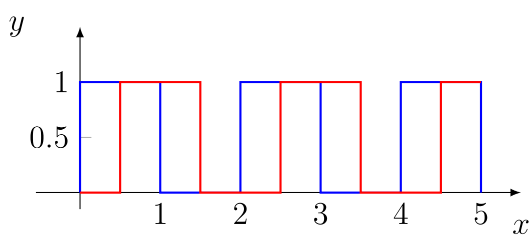
Zeitumkehr:
Die Funktionen $f(t)$ und $\tilde{f}(t) = f(-t)$ haben dieselbe Periode T und Kreisfrequenz ω. Zwischen den Fourierkoeffizienten, Spektrum und Phase besteht der Zusammenhang:

$$\tilde{a_k} = a_k, \tilde{b_k} = -b_k, \tilde{c_k} = \overline{c_k}, \tilde{A_k} = A_k, \tilde{\varphi_k} = \varphi_k,$$





Zeitverschiebung:
Die Funktionen $f(t)$ und $\tilde{f}(t) = f(t - t_0)$ haben dieselben Anplituden $\tilde{A_k} = A_k$ und Phasenwinkel $\tilde{\varphi_k} = -k\omega t_0 + \varphi_k$.



4 Verallgemeinerte Funktionen

4.1 Heavisiede-Funktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ 1 \text{ für } t \geq 1 \end{cases}$$

4.2 Rechteckpuls

$$r(t) = \sigma(t - t_0) - \sigma(t - t_1)$$

Der Rechteckpuls lässt die Funktion f außerhalb des Intervalls $[t_0, t_1]$ ausblenden, was zu einer neuen Funktion $g(t)$ führt:

$$g(t) := f(t)r(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < t_0 \\ f(t) \text{ für } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0 \text{ für } t > t_1 \end{cases}$$

4.3 Dirac-Puls

Die Rechteckfunktion d_ε mit konstantem Flächeninhalt 1:

$$d_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\sigma(t) - \sigma(t - \varepsilon))$$

Wird im Grenzwert zum **Dirac-Puls**/**Dirac-Distribution**:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon(t)$$

Wenn man eine Funktion f mit dem Dirac-Puls $\delta(t - t0)$ multipliziert, so werden alle Funktionswerte außerhalb t_0 ausgeblendet.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$$

Die **varallgemeintere Ableitung** der Heaviside-Funktion ist der Dirac-Puls:

$$\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$$
$$\int \delta(t)dt = \sigma(t) + C$$

4.4 Faltung

$$h(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Rechenregeln (mit Funktionen f, g, h und Konstante C):

- $f \star g = g \star f$
- $C(f \star g) = (Cf) \star g = f \star (Cg)$
- $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$
- $f \star (g + h) = (f \star g) + (f \star h)$

Eine Faltung einer Funktion f mit dem Dirac-Puls δ lässt die Funktion f unverändert.

4.5 Einseitige Faltung

Sind beide Funktionen f und g für negative Argumente null, dann berechnet sich die einseitige Faltung durch:

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

5 Fouriertransformation

Durch die Fouriertransformation wird einer Funktion s im Zeitbereich eine Funktion S im Frequenzbereich zugeordnet.

$$s(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi ift}dt$$

Eigenschaften:

- **Linearität**:
  Eine Addition von Funktionen im Zeitbereich entspricht einer Addition der Fouriertransformierten im Frequenzbereich.
  Eine Multiplikation einer Funktion mit einem konstanten Faktor im Zeitbereich entspricht der Multiplikation mit demselben Faktor im Frequenzbereich.

$$\begin{array}{rcl} s_1(t), s_2(t) & \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet & S_1(f), S_2(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t) & \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet & C_1 S_1(f) + C_2 S_2(f) \end{array}$$

- **Zeitverschiebung**:
  Eine Verschiebung der Funktion s um t_0 im Zeitbereich entspricht der Multiplikation mit $e^{-i2\pi f t_0}$ im Frequenzbereich.

$$\begin{array}{rcl} s(t) & \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet & S(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ s(t-t_0) & \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet & e^{-i2\pi f t_0} S(f) \end{array}$$

- **Frequenzverschiebung**:
  Eine Verschiebung der Funktion S um f_0 im Frequenzbereich entspricht der Multiplikation mit $e^{-2\pi f_0 t}$ im Zeitbereich.

$$\begin{array}{rcl} S(f) & \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ & s(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(f-f_0) & \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ & e^{-i2\pi f_0 t} s(t) \end{array}$$

6 Laplacetransformation

Durch die Laplacetransformation wird einer Funktion f im Zeitbereich eine Funktion F im komplexen Bildbereich zugeordnet.

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C}$$

Die Fouriertransformierte einer Funktion geht aus der Laplacetransformierten durch ersetzen von $s = 2\pi i f$ hervor.
Eigenschaften:

- **Linearität**:
  Eine Addition von Funktionen im Zeitbereich entspricht einer Addition der Laplacetransformierten im Bildbereich.
  Eine Multiplikation einer Funktion mit einem konstanten Faktor im Zeitbereich entspricht der Multiplikation mit demselben Faktor im Bildbereich.

$$\begin{array}{rcl} f_1(t), f_2(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F_1(s), F_2(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) \end{array}$$

- **Ähnlichkeit**:
  Eine Ersetzung von t durch at der Funktion f im Zeitbereich entspricht der Ersetzung von s durch $\frac{s}{a}$im Bildbereich und einer Division der Laplacetransformierten durch a.

$$\begin{array}{rcl} f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(at) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \end{array}$$

- **Verschiebung im Bildbereich/Dämpfungssatz**:
  Eine Verschiebung der Funktion F um s_0 im Bildbereich entspricht der Multiplikation mit $e^{-s_0 t}$ im Zeitbereich.

$$\begin{array}{rcl} F(s) & \bullet\!\!-\!\!\circ & f(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(s-s_0) & \bullet\!\!-\!\!\circ & e^{-s_0 t} f(t) \end{array}$$

6.1 Differenziation und Integration

Differenziation im Zeitbereich	$\begin{array}{ccc} f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f'(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & sF(s) - f(0) \end{array}$
Höhere Ableitungen im Zeitbereich	$\begin{array}{ccl} f'(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & sF(s) - f(0) \\ f''(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \\ \dots & & \\ f^{(n)}(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0) \end{array}$
Integration im Zeitbereich	$\begin{array}{ccc} f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int_0^t f(\tau)d\tau & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{1}{s}F(s) \end{array}$
Integration im Bildbreich	$\begin{array}{ccc} F(s) & \bullet\!\!-\!\!\circ & f(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int_s^\infty F(u)du & \bullet\!\!-\!\!\circ & \frac{1}{t}f(s) \end{array}$
Faltung im Zeitbereich	$\begin{array}{ccc} f_1(t), f_2(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F_1(s), F_2(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_1(t) \star f_2(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F_1(s) \cdot F_2(s) \end{array}$

6.2 Rücktransformation

Die Rücktrnsformation geschieht durch eine Korrespondenztabelle.

6.3 Lösung von gewöhnlichen DGL mit Laplacetransformation

- Transformation der Differenzialgleichung in den Bildbereich.
- Lösung der algebraischen Gleichung im Bildbreich.
- Rücktransformation mittels Korrespondenztabelle.

$$\begin{array}{rcl} \text{Differentialgleichung} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \text{Algebraische Gleichung} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Lösung Zeitbereich} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \text{Lösung Bildbereich} \end{array}$$

7 Zusatz

7.1 Ableitung

	Funktion	Ableitung
Fakorregel	$y = C \cdot f(x)$	$y' = C \cdot f'(x)$
Produktregel	$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$y = \frac{U(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel	$y = F(u(x))$	$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

7.2 Integration

Lösen eines Integrals	$\int\limits_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
Summenregel	$\int\limits_a^b f(x) + g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$
Faktorregel	$\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$
Partielle Integration	$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x)dx + \int u(x) \cdot v'(x)dx$

7.3 Stammfunktionen

$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
x^n	$n \cdot n^{n-1}$	$sin(x)$	$cos(x)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-x^2}$	$cos(x)$	$-sin(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$sin^2(x)$	$2 \cdot cos(x) \cdot sin(x)$
e^x	e^x	$cos^2(x)$	$-2 \cdot cos(x) \cdot sin(x)$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$

7.4 Partialbruchzerlegung

$$\frac{19}{42} = \frac{19}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{7} \overset{\text{Hauptnenner}}{=} \frac{21A + 14B + 6C}{2 \cdot 3 \cdot 7} \overset{A=1, B=-1, C=2}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7}$$

7.5 Gerade/Ungerade Funktionen

Gerade Funktion	**Ungerade Funktion**
Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse	Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung
Summe ist wieder gerade	Summe ist wieder ungerade
Produkt ist wieder gerade	Produkt ist gerade!
Quotient ist wieder gerade	Quotient ist gerade!
Ableitung ist ungerade!	Ableitung ist gerade!
Fourier-Reihe enthält nur Kosinus-Terme	Fourier-Reihe enthält nur Sinus-Terme

7.6 Mitternachtsformel Formel

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

7.7 Korrespondenztabelle

Nr.	Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Nr.	Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$
1	1	$\delta(t)$	17	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
2	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	18	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
3	$\frac{1}{s^2}$	t	19	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
4	$\frac{n!}{s^n}$	t^n	20	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
5	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	21	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt} \sin at$
6	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}	22	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt} \cos at$
7	$\frac{a}{s(s-a)}$	$e^{at} - 1$	23	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt} \sinh at$
8	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$	$e^{at} - e^{bt}$	24	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt} \cosh at$
9	$\frac{a}{1+as}$	$e^{-\frac{t}{a}}$	25	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t \sin at$
10	$\frac{a^2}{(1+as)^2}$	$te^{-\frac{t}{a}}$	26	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
11	$\frac{1}{s(1+as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$	27	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$	$t \sinh at$
12	$\frac{a-b}{(1+as)(1+bs)}$	$e^{-\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{b}}$	28	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t \cosh at$
13	$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$	29	$\frac{2}{(s-a)^3}$	$t^2 e^{at}$
14	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$	$ae^{at} + be^{bt}$	30	$\frac{2s}{(s-a)^3}$	$(at^2 + 2t)e^{at}$
15	$\frac{a^3 s}{(1+as)^2}$	$(a-t)e^{-\frac{t}{a}}$	31	$\frac{2s^2}{(s-a)^3}$	$(a^2t^2 + 4at + 2)e^{at}$
16	$\frac{ab(a-b)s}{(1+as)(1+bs)}$	$ae^{-\frac{t}{b}} - be^{-\frac{t}{a}}$	32	$\frac{a^2}{s^2(s-a)}$	$e^{at} - at - 1$

7.8 Zahlenräume

Symbol	Verwendung	Bedeutung
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen	Positive Ganze Zahlen ohne Null (1,2,3,...)
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen	Ganze Zahlen (...,-2,-1,0,1,2,...)
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen	$z \cdot \frac{1}{x}$ mit $z, x \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	Erweiterung der Rationalen Zahlen durch diejenigen Zahlen welche sich nicht durch Brüche darstellen lassen (z.B.$\sqrt{2}, \pi$)
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen	$a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$

7.9 Standartnormalverteilungstabelle

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

$z_{0.95} = 1.6449,\ z_{0.975} = 1.96$