

Master Autonomes Fahren - Mathematik

Zusammenfassung

Marcel Wagner

4. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Symbole	1
1.1	Mengen	1
2	Statistik	1
2.1	Arithmetisches Mittel	1
2.2	Mittlerer Abstand	1
2.3	Varianz	1
2.4	Standartabweichung	1
2.5	Kovarianz	1
2.6	Korrelationskoeffizient	1
2.7	Regressionsgerade	2
2.8	Bestimmtheitsmaß	2
2.9	Bestimmtheitsmaß	2
3	Wahrscheinlichkeitsrechnung	2
3.1	Fakultät	2
3.2	Binomialkoeffizient	2
3.3	Kugeln Ziehen	2
3.4	Menge	2
3.5	Gleichheit	2
3.6	Teilmenge	3
3.7	Potenzmenge	3
3.8	Mächtigkeit	3
3.9	Vereinigung	3
3.10	Schnitt	3
3.11	Differenz	3
3.12	Komplement	3
3.13	Kartesisches Produkt	3
3.14	Zufallsexperiment	3
3.15	Ereignis	4
3.16	Disjunkte Ereignisse	4
3.17	σ -Algebra	4

3.18	Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung	4
3.19	Laplace Experiment	4
3.20	Unabhängige Ereignisse	5
3.21	Bedingte Wahrscheinlichkeit	5
3.22	Multiplikationssatz	5
3.23	Satz der totalen Wahrscheinlichkeit	5
3.24	Satz von Bayes	5
3.25	Zufallsvariablen	6
3.26	Wahrscheinlichkeitsfunktion	6
3.27	Verteilungsfunktion diskreter Zufallsvariablen	6
3.28	Stetige Zufallsvariable	6
4	Zusatz	6
4.1	Integration	6
4.2	Partielle Integration	7
4.3	Differentialgleichungen	7
5	Anhang	A

Abbildungsverzeichnis

Formelverzeichnis

1 Mathematische Symbole

1.1 Mengen

Symbol	Verwendung	Bedeutung
\in	$\omega \in \Omega$	Element (ω ist in Ω enthalten)
\cap	$A \cap B$	Disjunkt (Kein Teil von A ist ein Teil von B)
\cup	$A \cup B$	Kunjunktion (Ein Teil von A ist ein Teil von B)
\subseteq	$A \subseteq B$	Teilmenge (A ist eine Teilmenge von B)
\setminus	$A \setminus B$	Differenz (Differenz der mengen A und B)
c	A^c	Komplement (Differenz des Universums (kann eine größere Menge sein) und der Teilmenge)

2 Statistik

2.1 Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} := \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

2.2 Mittlerer Abstand

Der mittlere Abstand wird nicht sehr häufig verwendet, da das Rechnen mit Beträgen sehr mühsam ist. Die Varianz (durchschnittliche quadratische Abweichung) eignet sich besser.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \quad (2)$$

2.3 Varianz

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3)$$

2.4 Standartabweichung

$$s_x = \sqrt{s_x^2} \quad (4)$$

2.5 Kovarianz

$$y_{xy} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (5)$$

2.6 Korrelationskoeffizient

$$r_{xy} := \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \quad (6)$$

2.7 Regressionsgerade

$$y = a + bx \quad (7)$$

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad (8)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (9)$$

2.8 Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (10)$$

TODO: Beschreibung von y dach und y quer

2.9 Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = r_{xy}^2 \quad (11)$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.1 Fakultät

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad (12)$$

3.2 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (13)$$

3.3 Kugeln Ziehen

	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

3.4 Menge

Unter einer Menge verstehen wir die Zusammenfassung unterscheidbarer Elemente zu einer Gesamtheit.

3.5 Gleichheit

$A = B :\Leftrightarrow A$ und B besitzen die gleichen Elemente.

3.6 Teilmenge

$A \subset B :\Leftrightarrow$ wenn alle Elemente von A auch in B sind, dann ist A eine Teilmenge von B oder auch B die Obermenge von A .

Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.

3.7 Potenzmenge

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist eine Menge welche aus allen Teilmengen von $U \subseteq X$ besteht.

3.8 Mächtigkeit

$|A|$:= Zahl der Elemente von A .

3.9 Vereinigung

$A \cup B$:= Menge aus allen Elementen welche in A oder in B oder in beiden enthalten sind.

3.10 Schnitt

$A \cap B$:= Menge aus allen Elementen welche in A und in B enthalten sind.

3.11 Differenz

$A \setminus B$:= Menge aus allen Elementen welche zu A aber **nicht** zu B gehören.

3.12 Komplement

A^C := Menge aus allen Elementen welche **nicht** zu A gehören.

3.13 Kartesisches Produkt

$$A \times B := (a, b) : a \in A, b \in B \quad (14)$$

3.14 Zufallsexperiment

- Genau festgelegte Bedingungen
- Zufälliger Ausgang
- Beliebig oft wiederholbar
- Ein Versuch bezeichnet einen Vorgang bei dem mehrere Ergebnisse (Elementarereignis) eintreten können
- Menge aller Elementarereignisse wird als Ergebnismenge (Ergebnisraum) Ω bezeichnet

3.15 Ereignis

- Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt Ereignis
- $A = \emptyset$ unmögliches Ereignis
- $A = \Omega$ sicheres Ereignis

3.16 Disjunkte Ereignisse

Zwei ereignisse sind disjunkt (unvereinbar) wenn deren Schnitt gleich der leeren Menge ist $A \cap B = \emptyset$.

3.17 σ -Algebra

Eine Teilmenge einer Potenzmenge (Menge von Teilmengen, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) heißt σ -Algebra wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Teilmenge \mathcal{A} der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ enthält die Grundmenge Ω .
- Das Komplement A^C eines Elements der Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ ist gleich der Differenz aus Grundmenge und Element $A^C := \Omega \setminus A$. Stabilität des Komplements.
- Sind die Mengen in der Teilmenge der Potenzmenge $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$ enthalten, so ist auch die Vereinigung aller Mengen in der Teilmenge der Potenzmenge enthalten $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
- Alle vorangegangenen Mengenoperationen können auf die Teilmengen angewendet werden.

3.18 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Funktion P ordnet jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zu.

- (I) Für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $0 \leq P(A) \leq 1$
- (I') Für das unmögliche Ereignis gilt $P(\emptyset) = 0$
- (II) Für das sichere Ereignis Ω gilt $P(\Omega) = 1$
- (II') Für ein Ereignis $A \subset \Omega$ gilt $P(A^C) = 1 - P(A)$
- (III) Für disjunkte Ereignisse A und B gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- (III') Für zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3.19 Laplace Experiment

Endlich viele Elementarereignisse welche alle gleich wahrscheinlich sind.

Satz von Laplace:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } A}{\text{Anzahl aller möglichen Elementarereignisse}} \quad (15)$$

3.20 Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse heißen **unabhängig** wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (16)$$

Sie heißen **abhängig** wenn sie nicht unabhängig sind.

Für unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{bzw.} \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (17)$$

3.21 Bedingte Wahrscheinlichkeit

"Wahrscheinlichkeit von A gegeben B".

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (18)$$

Sind $A, B \subset \Omega$ **unabhängige** Ereignisse gilt:

$$P(A|B) = P(A) \quad (19)$$

Sind $A, B \subset \Omega$ **abhängige** Ereignisse gilt:

$$P(A|B) \neq P(A) \quad (20)$$

3.22 Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (21)$$

3.23 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Der Ergebnisraum ist gegeben durch $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ mit $P(B_j) > 0$ und alle j sind paarweise

Disjunkt $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot P(B_j) \quad (22)$$

Für den Spezialfall $\Omega = B \cup B^C$ gilt:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(B^C) \cdot P(A|B^C) \quad (23)$$

3.24 Satz von Bayes

Besteht aus dem Multiplikationssatz & der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(A^C) \cdot P(B|A^C)} \quad (24)$$

3.25 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung des Ergebnisraums auf den reellen Zahlenraum $\Omega \mapsto \mathbb{R}$. Die Zufallsvariable ordnet jedem Elementarereignis eine reelle Zahl zu.

Zwei Zufallsvariablen sind **unabhängig** wenn gilt:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad \text{für alle } A, B \subset \mathbb{R} \quad (25)$$

Die Zufallsvariablen heißen **abhängig** wenn sie nicht unabhängig sind.

Die Zufallsvariable wird **diskret** genannt wenn sie nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annimmt. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1 \quad (26)$$

3.26 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Für die diskrete Zufallsvariable X und ihre Ausprägungen lautet die Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$p_X(x) := \begin{cases} P(X = x_i), & \text{für } x = x_i \text{ mit Zählindex } i \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (27)$$

$$\sum_{x_i} p_X(x_i) = 1 = p(\Omega) \quad (28)$$

3.27 Verteilungsfunktion diskreter Zufallsvariablen

Für die diskrete Zufallsvariable X und ihre Ausprägungen lautet die Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i) \quad (29)$$

3.28 Stetige Zufallsvariable

4 Zusatz

4.1 Integration

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (30)$$

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (31)$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (32)$$

4.2 Partielle Integration

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx \quad (33)$$

TODO: Basics Integration

4.3 Differentialgleichungen

TODO: Basics DGL Lösungen

5 Anhang