<u>CHAP 4 :</u> Files d'attente

4.1 Introduction :

4.2 Exemple de phénomènes d'attente :

4.3 Caractéristiques d'un système d'attente :

4.4 Calcule des caractéristiques de performance d'un système d'attente :

4.5 Le système d'attente M/M/1 :

4.6 Modèle M/M/1/L :

4.7 Système d'attente M/M/s:

4.8 Modèle multiserveur a file limitée M/M/s/L (L$\geq S$) :

4.9 Modèle M/M/s/s:

4.10 Le système M/M /∞ :

4.11 Les modèles de base avec une source limitée :

CHAP 4 : Files d'attente

4.1 Introduction :

Un système d'attente peut être défini comme suit :

Des clients arrivent à un certain endroit et réclament un certain service, les instants d'arrivées et les durées de service sont généralement des quantités aléatoires

Si un poste de service est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce poste ou il est servi; sinon il prend sa place dans une file d'attente dans laquelle les clients se rangent suivant leur ordre d'arrivées

Un système d'attente comprend donc un espace de service avec une (Fig1) ou plusieurs stations de services montées en parallèle (Fig2), et un espace d'attente dans lequel se forme une éventuelle file d'attente

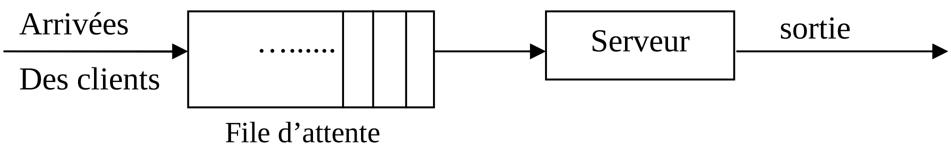


Fig.1 **:Système à un seul serveur**

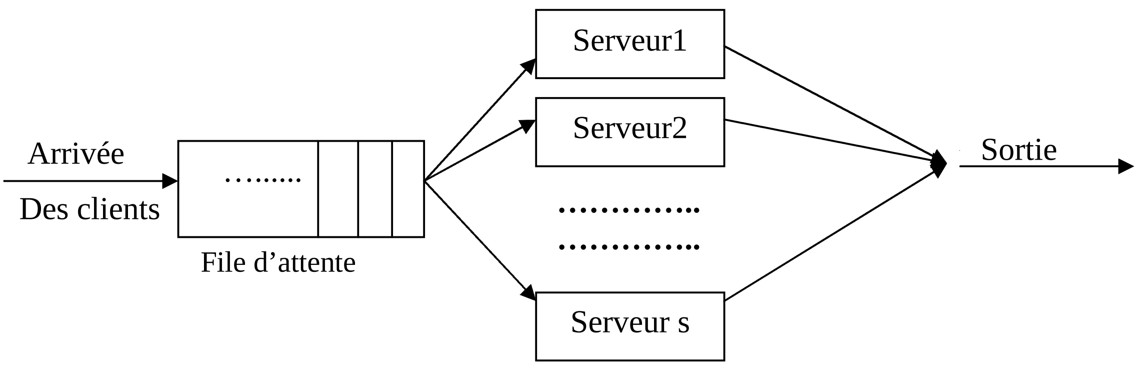


Fig. 2 : Système multiserveurs (s serveurs en parallèles)

4.2 Exemple de phénomènes d'attente :

- Arrives des voitures vers une station de service.
- Fonctionnement d'une centrale téléphonique.

- Ventes des billets auprès des guichets.
- Exécution des taches dans un centre de calcule.
- Atterrissage des avions sur un aéroport

4. 3 Caractéristiques d'un système d'attente :

Le fonctionnement d'un système d'attente est décrit par les éléments suivants :

1. La source des clients.
2. Le flux des arrivées.
3. La discipline de service.
4. Le nombre de serveurs.
5. La durée de service.
6. La capacité du système.

Ces éléments sont les paramètres du système d'attente.

4.3.1 Source des clients :

On appelle source des clients l'ensemble des clients potentiellement intéressés par le service

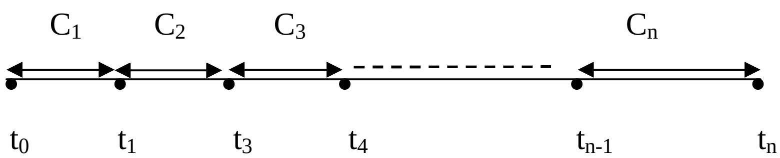
Dans le cas où la source est de taille infinie ou composée des clients se renouvelant sans cesse (exemple : des programmes soumis à un ordinateur), on parle de système *ouvert*

Dans le cas où la source est de taille finie, on parle de système *fermé* (exemple :un réparateur ayant un ensemble bien déterminée de machines à répare)r, ce paramètre sera notée **K**

4.3.2 Le flux des arrivées :

On désigne par :

- $C_n = n - iéme\ client$
- $t_n = date\ d'arrivée\ de\ C_n$



$\xi_n = t_n - t_{n-1}$: Temps d'inter arrivée entre C_n et C_{n-1}

Les systèmes d'attente étudié ultérieurement sont tel que :

Les v. a $\{ \xi_n, n \geq 1\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées et on note :

A(x) = $P[\xi_n \leq x]$, la loi du temps d'inter arrivées.

A(x) = Loi des inters arrivées.

4.3.3 Le nombre des serveurs :

Le nombre de serveurs (ou de guichets) noté **s** chaque guichet aura la mémé loi de service, indépendante des arrivées des clients. De plus tous les guichets sont supposés statiquement indépendants entre eux.

4.3.4 La durée du service :

Posons $\tau_n =$ durée de service de C_n, les v.a $\{\tau_n, n \geq 1\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

B(n)= p $\{\tau_n \leq x\}$: loi de service

4.3.5 La discipline de service :

C’est la façon de choisir le client à servir, lorsqu’un guichet devient libre. En général, ce sera premier arrivée, premier servi (PAPS) ou en américain FIFO (First In –First Out).Mais ce peut être aussi dernier arrivé, premier servi (DAPS) ou en américain Last In-First Out (LIFO).

Pour spécifie le type de la file d’attente qu’on étudiée, on utilise la notation : A/B/s/L/K(D) due à D.G.K ENDALL (1951) ou :

Aussi ce peut être un service aléatoire (SA) ou (Random). Ce paramètre est noté **D**.

4.3.6 La capacité du système :

C’est le nombre de serveurs plus la longueur maximale de la file d’attente permise par le système. Ce paramètre sera noté **L**.

4.3.7 Notations usuelles en systèmes d’attente :

- A = la distribution des temps des inter-arrivées.
- B = la distribution de la durée de service.
- s = le nombre de serveur.
- L = la capacité du système.
- K = la taille du serveur.
- D = la discipline du service.

Les trois dernier symboles seront supprimés si L = +∞, K = +∞ et D = PAPS ou FIFO

Pour spécifier les distributions de A, B on introduit les symboles suivants :

- M = distribution exponentielle (vérifie la propriété de Markov).
- $E_k =$ distribution d’Erlang d’ordre k.
- G = distribution générale.
- D = cas déterministe (non aléatoire).

Exemple :

La notation M/D/1/4 définit donc un système d'attente comprenant une station de service et pour lequel la capacité de la file d'attente vaut 4-1 = 3.

Le processus des arrivées est poissonien et la durée de service est constante.

En plus des notations introduites ci-dessus, on utilisera les grandeurs suivantes :

- $\frac{1}{\lambda} =$ Temps moyen d'interarrivées = E (ξ_n).
- λ = taux d'arrivée des clients.
- $\frac{1}{\mu} =$ Durée moyenne de service = E (τ_n).
- μ = Taux de service.

Dans le cas particulier des distributions exponentielles, les taux λ, μ sont identiques aux paramètres de ces distributions.

4.4 Calcule des caractéristiques de performance d'un système d'attente :

Soit X(t) le nombre de clients se trouvant dans le système à l'instant t (t ≥ 0), on cherche à calculer :

Les probabilités d'états $p_n(t) = P[X(t) = n]$ qui définissent le système transitoire du processus {X(t) ; t ≥ 0}.

Le régime stationnaire du processus stochastique définie par :

$p_n = \lim_{t\to+\infty} p_n\,(t) = P\{X(+\infty) = n\} = P\{X = n\}, n \geq 0.$

A partir du système stationnaire du processus stochastique {*X(t), t ≥ 0*}, on peut obtenir d'autre caractéristiques d'exploitation du système telles que :

- Le nombre moyen de clients dans le système : $\overline{n_s} = E(X)$.
- Le nombre moyen des clients dans la file : $\overline{n_f} = E(X_f)$ Ou X_f est le nombre de clients dans la file.
- La durée d'attente d'un client dans la file : U_f.
- La durée d'attente moyenne d'un client dans la file : $\overline{t_f} = E(U_f)$.
- La durée d'attente d'un client dans le système U qui est composée de la durée d'attente et de la durée de service.
- Le temps de séjour moyen d'un client dans le système $\overline{t_s} = E(U)$.

4.4.1 Formules de Little :

Les quantités $\bar{n}_s$,$\bar{n}_f$, $\bar{t}_s$ et $\bar{t}_f$ etsont liées entre elle par les relations suivantes :

- $\bar{n}_s = \lambda_e \bar{t}_s$
- $\bar{n}_f = \lambda_e \bar{t}_f$
- $\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu}$
- $\bar{n}_s = \bar{n}_f + \frac{\lambda_e}{\mu}$

Où λ_e est le taux d'entrée des clients dans le système.

Si la capacité du système est infinie, on a $\lambda_e = \lambda$ .dans le cas contraire, certains clients quittent le système sans être servis d'où $\lambda_e < \lambda$.

4.5 Le système d'attente M/M/1 :

La f.d.r des durées d'inter arrivées $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, $t \geq 0$

La f.d.r de la durée de service : $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$, $\mu > 0$, $t \geq 0$

Il y a une seule station de service, la capacité du système est illimitée et la discipline de service est PAPS.

Le processus des arrivées est poissonnien de paramètre λ en vertu du théorème (1. 5. 2.6).

La durée de service est exponentielle de paramètre μ.

Grace aux propriétés fondamentales du processus de poisson et de la loi exponentielle, nous avons par un petit intervalle de temps Δt les probabilités suivantes :

P [exactement 1 arrivée pendant Δt] = $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$

P [aucun arrivée pendant Δt] = $1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

P [2 arrivées ou plus pendant Δt] = $o(\Delta t)$

P [exactement 1 départ pendant Δt / x(t) ≥ 1] = $\mu \Delta t + o(\Delta t)$

P [aucun départ pendant Δt] = $1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)$

P [2 départs ou plus pendant Δt] = $o(\Delta t)$

Ces probabilités ne dépendent ni du temps t, ni du nombre de clients dans le système.

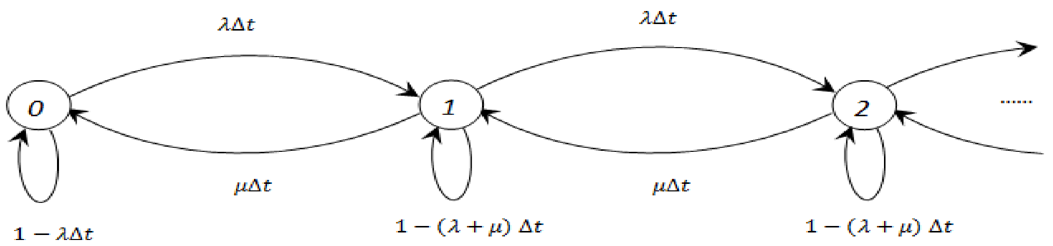
4.5.1 Lien avec le processus de naissance et de mort :

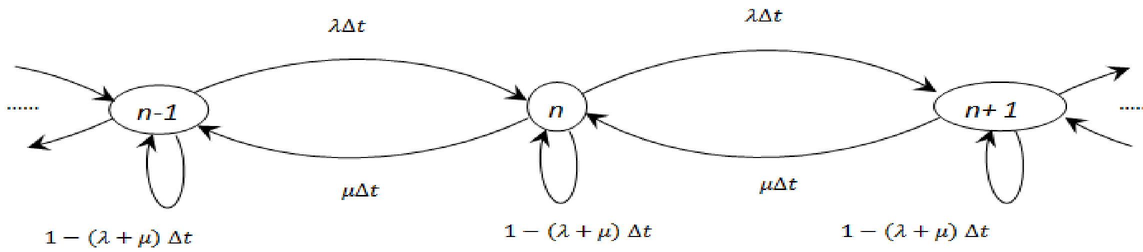
Considérons le processus $\{X(t) ; t \geq 0\}$ ou

X(t) = nombre de clients dans le système à l'instant t

$X(t) \in IN$, $\forall t \geq 0$, E = IN.

Le graphe associé entre les états entre t et t+Δt est :





Donc{X(t) ; t≥0} est un processus de naissance et de mort avec l'espace des états E=IN et ou

- Taux de naissance : $\lambda_i = \lambda, \forall i \geq 0$
- Taux de mort :$\mu_i = \mu, \forall i \geq 1$

Les probabilités d'états $p_n(t) = P\{X(t) = n\}$ sont solutions des équations différentielles de **Kolmogorov.**

$$p_n'(t) = -(\lambda + \mu)\, p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t)$$

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + p_1(t)$$

Avec la donnée de la distribution initiale du processus c -à-d la distribution de $X(0)$.

Pour résoudre ce système d'équations, on fait appel aux fonctions de **Bessel** (hors programme).

4.5.2 Régime stationnaire :

On considère la distribution stationnaire du processus : $p_n = lim_{t\to\infty} p_n(t)$ n = 0, 1,2,…

A la place d'un système d'équations différentielles, on obtient un système d'équations linéaires homogènes :

$$\begin{cases} \mu p_1 = \lambda p_0 \\ \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} = (\lambda+\mu)p_n, (\mathrm{n} = 1,2, \ldots) \end{cases}$$

Avec la condition :$\sum_{n=0}^{\infty} p_n$=1.

Sa résolution donne (voir Chap3 paragraphes 3.2) : $p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ (n=1,2,…) et

$$p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

Si $\lambda < \mu$, le régime stationnaire existe et : $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

Donc : $p_n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$; n ≥ 0

Remarque :

1) La quantité $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ est appelée intensité du trafic (au taux de trafic) correspondant.

La condition $\rho < 1$ est une condition essentielle pour la stabilité du système (le régime stationnaire existe).

2) $\rho = 1 - p_0$ représente également la probabilité d'occupation de la station de service.

3) Si $\lambda \geq \mu$, on a $\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n = 0$ pour n=0, 1, 2,3,... le système est en engorgement, ce qui signifie la longueur de la file d'attente dépasse toute limite.

Exemple

Considérons un système d'attente de type M/M/1, un client arrive en moyenne toutes les 12 minutes et la durée moyenne de service est de 8 minutes.

a. Quelle est la probabilité p que 2 clients au moins attendent d'être servis ?

b. Si le taux d'arrivée augmente de 20%, quelle est alors l'augmentation de p ?

Solution:

a) En prenant l'heure comme unité de temps on a :$\lambda = 5\ ar/h$ et $\mu = 7{,}5\ ser/h$ et

$\rho = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ le régime stationnaire existe

D'ou $p_n = \left(1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$, n ≥ 1,$p_0 = \left(1-\frac{2}{3}\right)$

$p = P[X \geq 3] = \sum_{n=3}^{\infty} p_n = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0{,}296$

b) $\lambda^* = \lambda + 1 = 6\ ar/h$,$\rho^* = \frac{4}{5} < 1$

On obtient:

$p^* = 1 - p_0^* - p_1^* - p_2^* = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0{,}512$

Ce qui correspond 'une augmentation de 73%.

4.5.3 Calcul des caractéristiques de performance du système M/M/1 :

4.5.3.1 Nombre moyen de clients dans le système :

$$\bar{n}_s = E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)\rho^k = (1-\rho)\rho \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

En utilisant la dérivée, on obtient :

$\bar{n}_s = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k = (1-\rho)\,\rho\,\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{1-\rho}\right]$, $\boxed{\bar{n}_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}}$

4.5.3.2 Nombre moyen de clients dans la file :

Soit X_f le nombre de clients retrouvant dans la file d'attente

$$X_f = \begin{cases} 0, & si\ X = 0 \\ X-1 & si\ X \geq 1 \end{cases}$$

Alors $\bar{n}_f = E(X_f) = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\,p_k$

Changement d'indice, pour l = k-1

$\bar{n}_f = \sum_{l=0}^{\infty} l p_{l+1} = (1-\rho)\,\rho^2 \sum_{l=1}^{\infty} l\,\rho^{l-1}$

$$\boxed{\bar{n}_f = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}}$$

Remarque : On retrouve le même résultat avec la formule de Little .

4.5 .3.3 Temps de sejour moyen d'un client dans le systeme :

De la formule de Little , on tire :

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}_s}{\lambda_e}$$

Comme la capacité du systéme est infinie on a :

$\lambda_e = \lambda$ et $\boxed{\bar{t}_s = \frac{1/\mu}{1-\rho} = \frac{1}{\mu-\lambda}}$

4.5.3.4 Temps de séjour moyen d'un client dans la file :

La formule de Little donne :

$$\bar{t}_f = \bar{t}_s - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$\boxed{\bar{t}_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}}$$

ou bien $\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda}$, on a le même resultat.

Exemple :

Calculer $\bar{n}_s$ et $\bar{t}_s$ pour l'exemple du paragraphe (4.5.2)

Si $\lambda = 5$ et $\mu = 7.5$, on trouve : $\overline{n}_s$ = 2 , et $\overline{t}_s$ = 0.4h = 24min

Tandis que $\lambda^* = 6$ et $\mu^* = 7{,}5$

$\overline{n}_s{}^* = 4$ et $\overline{t}s^*$ = 4 min.

Une augmantation de 20% du taux d'arrivée provoque donc une augmentation de 100% du nombre moyen de clients dans le système et de 67% du temps de sejour moyen dans le système.

4.5.3.5 Distribution de la duree d'attente :

Soient τ_n = durée de service de C_n

W_n = durée d'attente de C_n dans la file

U_n = durée de séjour de C_n dans le système

Il est clair que : $U_n = W_n + \tau_n$

Si ce client trouve à son arrivée m clients dans le système,alors U_n est la somme de m+1 variable indépandantes exponentiellement distribuées de paramètre μ: la durée du service de C_n, celle de m-1 qui se trouvent dans la file , et enfin celle du clients en cours (qui est également de loi Exp (μ), en vertu de l'abscence de mémoire)

U_n obeit à une loi d'erlang d'ordre m+1

$P[U_n \leq t/X = m\ ] = \int_0^t \frac{\mu^{m+1}\, x^m\, e^{-\mu x}}{m!}\, dx$

D'après la formule des probabilitées totales :

$P[U_n \leq t] = \sum_{m=0}^{\infty} P[U_n \leq t/X = m\ ].P[X = m]$

$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\mu^{m+1}\, x^m e^{-\mu x}}{m!}\, (1-\rho)\rho^m dx$

$= P[U_n \leq t] = \int_0^t \mu e^{-\mu x}\,(1-\rho) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m\, \lambda^m}{m!} dx$

$= \int_0^t \mu e^{-\mu x}\,(1-\rho)e^{\lambda x} dx$

$= \int_0^t \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)x}\, dx$

$P[U_n \leq t] = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}$ indépandante de n

La durée de séjour obeit donc à une loi exponentielle de paramètre $\mu(1-\rho)$

Notation : on note U la durée de séjour d'un client dans le système,

ona : U~exp($\mu(1-\rho)$) on trouve $\overline{t_s} = E(U) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$

Suit U_f la durée d'attente d'un client dans la file de même, on montre que :

$P[U_f = 0] = p_0 = 1 - \rho$

$P[U_f \leq t] = 1 - \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t}, t > 0$

Donc U_f est aussi une v .a exponentille à laquelle est superposée la probabilité $1-\rho$ concetrée à l'origine.

Preuve : Exercice.

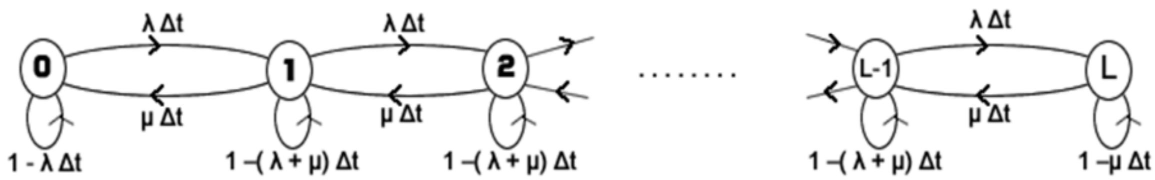
4.6 Modèle M/M/1/L :

C'est un système M/M/1 qui peut contenir au plus L clients (1 en cours de service, L-1 dans La file d'attente).

Le processus de naissance et de mort {X(t) ; t ≥ 0} correspondant est :

Espace des états E = {0, 1,2,…, L}

Le graphe associé :



-Taux de naissance : $\lambda_k = \begin{cases} \lambda & si\ 0 \leq k \leq L-1 \\ 0 & si\ k \geq L \end{cases}$

-Taux de mort : $\mu_k = \begin{cases} \mu & si\ 1 \leq k \leq L \\ 0 & si\ k > L \end{cases}$

Le régime permanent existe toujours car le nombre d'états est fini.

La distribution stationnaire est :

$$p_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda i}{\mu i+1}\, p_0 \right) ;\ \text{pour n = 1,2,…, L}$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \ = u^n p_0 \quad \text{ou } u = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Par ailleurs : $\sum_{n=0}^{L} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{L} u^n = 1$

Donc : $p_0 = [\sum_{n=0}^{L} u^n]^{-1}$

<u>1er cas</u> **:**

Si $u \neq 1$ ($\lambda \neq \mu$) alors : $p_0 = [\frac{1-u^{L+1}}{1-u}]^{-1} = \frac{1-u}{1-u^{L+1}}$

<u>2em cas</u> :

Si $u = 1$ ($\lambda = \mu$) alors : $p_0 = \frac{1}{L+1}$

La distribution stationnaire s'écrit alors : $p_n = \begin{cases} \frac{(1-u)u^n}{1-u^{L+1}} & pour\ \lambda \neq \mu ; n = 0,1,2, \ldots, L \\ \frac{1}{L+1} & pour\ \lambda = \mu ; n = 0,1,2, \ldots, L \end{cases}$

4.6.1 Caractéristiques du système :

4.6.1.1 probabilités de refus :

$$P\,[\text{refus}] = P\,[X = L] = p_L = \begin{cases} \frac{(1-u)u^L}{1-u^{L+1}} & si\ u \neq 1 \\ \frac{1}{L+1} & si\ u = 1 \end{cases}$$

4.6.1.2 Nombre moyen de clients dans le système :

$$\overline{n}_s = E(X) = \sum_{n=0}^{L} n\, p_n$$

Après calcul, on obtient :

$$\overline{n}_s = \begin{cases} \frac{u}{1-u} - \frac{(L+1)u^{L+1}}{1-u^{L+1}} & si\ \lambda \neq \mu \\ \frac{L}{2} & si\ \lambda = \mu \end{cases}$$

Preuve : Exercice

4.6.1.3 Nombre moyen de clients dans la file :

$\overline{n}_f = \overline{n}_s - \frac{\lambda_e}{\mu}$ ou λ_e est le taux d'entrée moyen dans le système :

$\lambda_e = \sum_{n\geq 0} \lambda_n\, p_n$

$\lambda_e = \lambda\,(1 - p_L)$

Donc :

$$\boxed{\overline{n}_f = \overline{n}_s - \frac{\lambda\,(1-p_L)}{\mu} = \overline{n}_s - u\,(1 - p_L)}$$

Exercice **:** Monter que $\overline{n}_f = \overline{n}_s - (1 - p_0)$

4.6.1.4 Temps d'attente moyen dans la file :

$$\bar{t}_f = \frac{\overline{n}_f}{\lambda_e} = \frac{\overline{n}_f}{\lambda\,(1-p_L)}$$

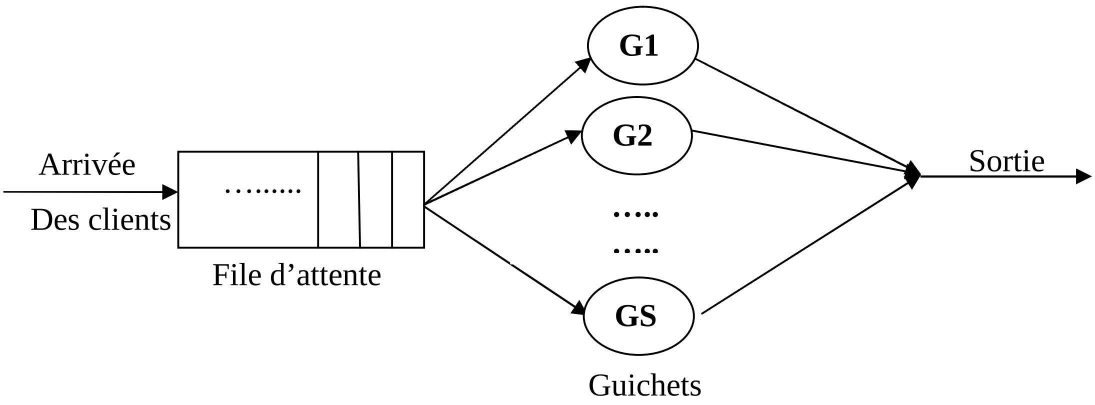
4.6.1.5 Temps de séjour moyen dans le système :

$$\bar{t}_s = \frac{\overline{n}_s}{\lambda_e} = \frac{\overline{n}_s}{\lambda\,(1-p_L)}$$

Ou $\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu}$

4.7 Système d'attente M/M/s:

Il s'agit d'un système comportant une file unique et s stations de service en parallèles

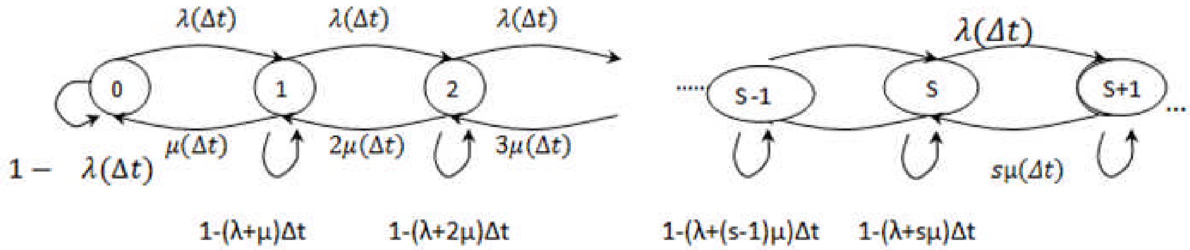


Les durées de service correspondantes sont des v.a exponentielles de paramètre μ. Les Clients rejoignent le système selon un processus de poisson de taux λ.

La capacité du système est illimitée et la discipline de service est PAPS. On caractérise l'état du système par la v.a :

X(t) = nombre de clients dans le système à l'instant t.

Dans ce cas {X(t) ; t≥ 0} est un processus de naissance et de mort avec l'espace des états E = IN et le graphe associé est :



-Taux de naissance : λ_k = λ, k = 0, 1,2,….

-Taux de mort : $\mu_k = \begin{cases} k\mu & si\ 1 \le k \le s \\ s\mu & si\ k \ge s \end{cases}$

On appelle sμ, le taux de service globale du système et ρ = $\frac{\lambda}{s\mu}$ l'intensité du trafic globale.

La distribution stationnaire du système M/M/s s'obtient à partir des formules obtenues précédemment par le processus de la naissance et de mort avec : λ_k = λ pour k ≥ 0 et μ_k = min (k, s)μ pour k ≥ 1. On a alors :

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}\, p_0 & si\ 1 \le k \le s \\ \dfrac{\lambda^k}{s^{k-s}\, s!\,\mu^k}\, p_0 & si\ k \ge s \end{cases}$$

Pour calculer p_0, on utilise la condition : $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Ce qui donne :

$$p_0 \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} + \sum_{k=s}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s^{k-s}\,s!\,\mu^k}\right] = 1$$

Posons u = $\frac{\lambda}{\mu}$ et ρ = $\frac{u}{s}$ alors on a :

$$p_0 \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{u^k}{k!} + \sum_{k=s}^{\infty} \frac{u^k}{s^{k-s}\,s!}\right] = 1$$

Considérons la série :

$$\sum_{k=s}^{\infty} \frac{u^k}{s^{k-s}\,s!} = \frac{u^s}{s!} \sum_{k=s}^{\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^{k-s}$$

$$= \frac{u^s}{s!} \sum_{m=s}^{\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^{m}$$

$$= \frac{u^s}{s!} \frac{1}{1-\frac{u}{s}}$$

A condition que : $\frac{u}{s} = \rho < 1$

Finalement, nous pouvons écrire :

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{u^k}{k!} + \frac{s\,u^s}{s!(s-u)}\right]^{-1} \quad \text{si} \quad \frac{u}{s} = \rho < 1$$

où $p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)\right]^{-1}$

La condition d'existence du régime stationnaire est que $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$

Remarque :

Pour s = 1, on retrouve les résultats du système M/M/1

4.7.1 Calcul des caractéristiques de performance :

4.7.1.1 La probabilité d'attente :

La probabilité qu'un client qui entre dans le système et doive attendre est :

$$P\,[\text{attente}] = P\,[X \geq s] = \sum_{k=s}^{\infty} p_k = \frac{\lambda^s}{s!\,\mu^k} \frac{p_0}{1-\frac{\lambda}{s\mu}} = \frac{p_s}{1-\rho}$$

4.7.1.2 Nombre moyen de clients dans la file :

$\overline{n}_f = E(X_f)$ Ou X_f est le nombre de clients dans la file

$$X_f = \begin{cases} X - s & si\ X \geq s \\ 0 & si\ X < s \end{cases}$$

$$\overline{n}_f = \sum_{k=s}^{\infty} (k-s) p_k = \sum_{j=0}^{\infty} j\, p_{s+j}$$

Posons u = $\frac{\lambda}{\mu}$, ρ = $\frac{u}{s}$ et $p_j = \begin{cases} \frac{u^j}{j!}\, p_0 & si\ j\ \leq s \\ \frac{u^j}{s!\, s^{j-s}}\, p_0 & si\ j\ \geq s \end{cases}$

$$\overline{n}_f = \sum_{j=0}^{\infty} j\ \frac{u^s}{s!}\ \rho^j\ p_0 = p_0 \frac{u^s}{s!} \sum_{j=0}^{\infty} j\ \rho^j = p_0 \frac{u^s}{s!}\ \rho\ \frac{d}{d\rho} \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = p_0 \frac{u^s}{s!}\ \rho\ \frac{d}{d\rho}\ (\frac{1}{1-\rho})$$

$$\boxed{\overline{n}_f = \frac{p_0 u^s \rho}{s!\ (1-\rho)^2} = \frac{\rho\ p_s}{(1-\rho)^2}}$$

4.7.1.3 Nombre moyen de clients dans le système :

A l’aide de la formule de Little, on trouve :

$$\overline{n}_s = \overline{n}_f + \frac{\lambda_e}{\mu} \text{ Et } \lambda_e = \sum_{n \geq 0} \lambda_n p_n \Rightarrow \lambda_e = \lambda$$

$$\boxed{\overline{n}_s = \frac{\rho\ p_s}{(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho\ p_s}{(1-\rho)^2} + s\rho}$$

4.7.1.4 Temps de séjour moyen dans la file et dans le système :

A l’aide des formules de Little, on trouve :

$$\overline{t}_f = \frac{\overline{n}_f}{\lambda}\ \ et\ \ \overline{t}_s = \frac{\overline{n}_s}{\lambda} \text{ Ou } \overline{t}_s = \overline{t}_f + \frac{1}{\mu}$$

4.7.1.5 Distributions de la durée d’attente dans la file :

Pour le cas du système M/M/s, on peut également calculer la distribution du temps d’attente dans la file U_f , on calcule d’abord :

$$P\left[\cup_f = 0\right] = P[X < s] = \sum_{n=10}^{s-1} p_n = 1 - \frac{p_s}{1-\rho}$$

Appelons maintenant $\cup_f^*$ le temps d’attente d’un client qui est obligé d’attendre. C’est le cas si le nombre de personne qu’il y a devant lui a l’instant au il rentre dans le système est au moins égal à s$\left(\cup_f^* = temps\ d\ attente\ en\ periode\ de\ saturation\right)$

En procédant comme dans le paragraphe(4.5.3.5) , on montre que pour : t > 0,

$$P\left[\cup_f^* \leq t\right] = 1 - \frac{p_s}{1-\rho}\, e^{[-s\mu(1-\rho)t]}$$

La durée d’attente obéit (à un constant pré) à une loi exponentielle.

1.7.1.6 Flux des départs :

Théorème de Burke : *Pour le système M/M/s, si* $\lambda < s.\mu$, *le flux des départs est poissonnien de paramètre λ.*

Exemple :

L'arrivée des clients vers une banque obéit approximativement à un flux poissonien avec un taux moyen de 9 clients par heure, la durée de service par client peut être considérée comme une variable aléatoire exponentielle de moyenne 10min

a)quel est le nombre minimal s_0 de guichets nécessaire pour assurer un régime stationnaire ?

b) quel est le temps d'attente moyen dans la file, si $s=s_0$

Solution : M/M/s

1. $\lambda = 9$ clients /h est $\mu = 6/h$

Il faut que : $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$

On trouve : $s > 1{,}5 \quad d'ou\ s_0 = 2$

2. le temps moyen d'attente dans la file

Si s=2 on a $\rho = \frac{3}{4}\ et\ \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{2}$

$$p_0 = \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{12}{12-9}\right)\right]^{-1}$$

$$p_0 = \frac{1}{7}\ et\ p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 . p_0$$

D'ou $p_2 = \frac{9}{56} \approx 0.16\ et\ \bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{p_2}{2\mu(1-\rho)^2} \approx 0.21h = 12.8min$

4.8 Modèle multiserveur a file limitée M/M/s/L (L$\geq S$) :

Il s'agit d'un système dans lequel on a :

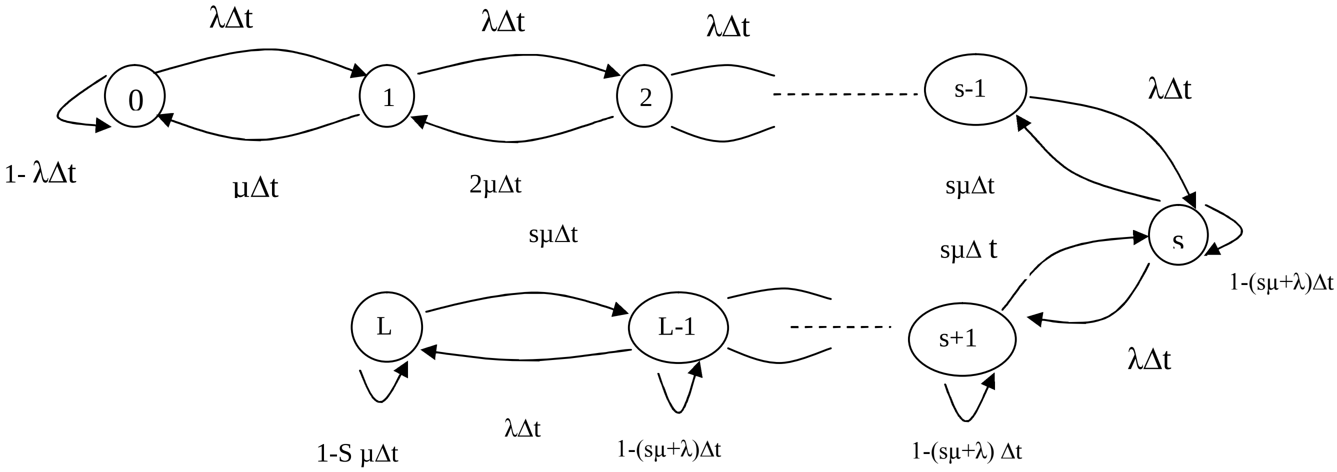
- La loi de la durée d'inter arrivées : $A(t)=1-e^{-\lambda t}\ ; t \geq 0$
- S guichets indépendants, chacun délivrant un service dont la durée suit une loi exponentielle de paramètre μ : $H(t) = 1 - e^{-\mu t}\ ; t \geq 0$
- La longueur de la file d'attente est limitée à L-s clients. Tout client qui arrive et trouve le système complet s'en va.

On caractérise le système par la v.a :

X(t) = nombre de clients dans le système à l' instant t

Dans ce cas $\{X(t); t \geq o\}$ est un processus de naissance et de mort avec l'espace des états $E = \{0,1,2 \ldots\ldots, s, s+1, \ldots\ldots, L\}$

Et le graphe associe est :



-Taux de naissance : $\lambda_k = \begin{cases} \lambda & si\ 0 \leq k \leq L-1 \\ 0 & si\ k \geq L \end{cases}$

-Taux de mort : $\mu_k = \begin{cases} k\,\mu & si\ 1 \leq k \leq s \\ s\mu & si\ \ s \leq k \leq L \end{cases}$

Il est claire que si k> $L, on\ a\ \mu_k = 0$ (Etat impossible pour le système)

Posons $u = \frac{\lambda}{\mu}$, on obtient alors $p_n = \begin{cases} p_0\ \frac{U^n}{n!} & ,\ 1 \leq n \leq s \\ p_0\ \frac{U^n}{s!\,s^{n-s}} & ,\ s \leq n \leq L \end{cases}$

Et : $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{u^i}{i\,!} + \frac{u^s}{s!}\left[1+\frac{u}{s}+\frac{u^2}{s^2}+\cdots+\left(\frac{u}{s}\right)^{L-s}\right]}$

L'expression entre crochets est une expression géométrique de raison $\frac{u}{s}$:

<u>1er cas</u> : si u = s, on aura la somme de L-s+1 termes de valeur 1, d'où :

$p_0 = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{s^i}{i\,!} + \frac{s^s}{s!}(L-s+1)}$

<u>2ème cas</u> : si u ≠ s, on a :

$$1 + \frac{u}{s} + \cdots + \left(\frac{u}{s}\right)^{L-s} = \frac{1-\left(\frac{u}{s}\right)^{L-s+1}}{1-\left(\frac{u}{s}\right)}$$

et : $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{u^i}{i\,!} + \frac{u^s}{s!}\ \frac{1-\left(\frac{u}{s}\right)^{L-s+1}}{1-\left(\frac{u}{s}\right)}}$

4.8.1 Caractéristiques du système :

4.8.1.1 Probabilités de refus :

P[refus] = P[X = L] = $p_L = p_0 \frac{u^L}{s!\, s^{L-s}}$

4.8.1.2 Nombre moyen de clients dans la file :

$\bar{n}_f = E(X_f)$, où $X_f = \begin{cases} 0 & , X < s \\ X - s & , X \geq s \end{cases}$

$\bar{n}_f = \sum_{n=s}^{L} (n-s)p_n = \sum_{n=1}^{L-s} n\, p_{n+s}$

$\bar{n}_f = \sum_{n=1}^{L-s} n \frac{u^{n+s}}{s! s^n} p_0 = p_0 \frac{n^s}{s!} \frac{u}{s} \sum_{n=1}^{L-s} n \left(\frac{u}{s}\right)^{n-1}$

Posons $\rho = \frac{U}{s}$,

$\bar{n}_f = p_0 \frac{(s\rho)^s}{s!} \rho \sum_{n=1}^{L-s} n\, \rho^{n-1}$

<u>1er cas</u> : Si $\rho = 1$ $\left(\frac{u}{s} = 1\right)$

$\bar{n}_f = p_0 \frac{s^s}{s!} [1 + 2 + \cdots + L - s]$

$$\boxed{\bar{n}_f = p_0 \frac{s^s}{s!} \frac{(L-s)(L-s+1)}{2}}$$

<u>2ème cas</u> **:** Si $\rho \neq 1$ $\left(\frac{u}{s} \neq 1\right)$

$\bar{n}_f = p_0 \frac{(s\rho)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{L-s} \rho^n$

$\bar{n}_f = p_0 \frac{(s\rho)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1-\rho^{L-s+1}}{1-\rho}\right]$

$$\boxed{\bar{n}_f = p_0 \frac{(s\rho)^s\ \rho}{s!\ (1-\rho)^2} [1 - \rho^{L-s+1} - (1-\rho)(L-s+1)\rho^{L-s}]}$$

4.8.1.3 Nombre moyen de clients dans le système :

Les formules de Little, donnent :

$\bar{n}_s = \bar{n}_f + \frac{\lambda_e}{\mu}$

λ_e Est le taux d'entrée dans le système $\lambda_e = \lambda(1 - p_L)$

Donc : $\bar{n}_s = \bar{n}_f + \frac{\lambda(1-p_L)}{\mu}$.

4.8.1.4 Temps de séjour moyen dans la file et dans le système :

a) $\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda_e} = \frac{\bar{n}_f}{\lambda(1-p_L)}$

b) $\bar{t}_s = \frac{\bar{n}_s}{\lambda_e} = \frac{\bar{n}_s}{\lambda\,(1-p_L)}$

Ou bien utiliser : $\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu}$

4.9 Modèle M/M/s/s:

C'est un système qui exclue toute possibilité d'attente, un client qui arrive ne peut entrer dans le système si tous les serveurs sont occupés.

Lorsque L = s, nous obtenons en régime permanent

$$p_k = \begin{cases} p_0(\lambda|\mu)^k \dfrac{1}{k!} & k \leq s \\ 0 & k > s \end{cases}$$

Avec $P_0 = \left[\sum_{k=0}^{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}\right]^{-1}$

4.9.1 Caractéristique du système:

a) la probabilité pour que les s serveurs soient occupés : $p_s = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p_0 = \dfrac{\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}}{\left(\sum_{k=0}^{s}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}\right)}$

C'est aussi la probabilité qu'un client qui arrive ne peut entrer dans le système (probabilité de refus)

b) nombre moyen de clients dans la file : $\overline{n_f} = 0$

c) nombre moyen de clients dans le système $\overline{n_s} = \frac{\lambda}{\mu}(1 - p_s)$

d) temps de séjour moyen dans la file $\overline{t_f} = 0$

e)temps de séjour moyen dans le système : $\overline{t_s} = \frac{1}{\mu}$

Exemple :

Le central téléphonique d'une petite entreprise comprend deux lignes d'entrée, les appels arrivent selon un processus de poisson de taux λ. La durée d'un appel est exponentielle de paramètre μ

1) trouver les probabilités limites des états de la station.

2) si $\lambda = \mu$ donner le pourcentage d'appels perdus.

Solution :

Il s'agit d'un système M /M/2 /2

1) $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$; $p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$

et $p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right)^{-1}$

2) Si $\lambda = \mu$ $p_0 = \frac{2}{5}$; $p_1 = \frac{2}{5}$; $p_2 = \frac{1}{5}$ d'où 20% des appels sont perdus.

4.10 Le système M/M /∞ :

C'est un système, comprenant une infinité de stations de service identiques. Dans ce cas il est évident qu'aucune file d'attente ne se forme, Chaque client est servi dès son arrive.

Ce système possède non seulement un intérêt théorique, mais il permet des études approximatives des systèmes de types M/M/s ou M/M/s/s comprenant un grand nombre de stations en parallèles. Pour le processus de naissance et de mort on associe à ce system on a :

-Taux de naissance : $\lambda_k = \lambda$; $k = 0,1,2, \dots$

-Taux de mort : $\mu_k = k\mu$; $k = 1,2, \dots$

La distribution stationnaire de ce système est : $p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k . \frac{1}{k!}$

Avec : $k = 1, 2, 3, \dots \dots$

$$p_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}\right]^{-1}$$

$$p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Donc $p_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$; $k \geq 0$

Le régime stationnaire existe toujours (pourvu que $\frac{\lambda}{\mu} < \infty$)

En régime stationnaire, le nombre de clients X dans le système M/M/∞ suit une loi de poisson de paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$

4.10.1 Caractéristiques de performance :

a) le nombre moyen de clients dans le système $\overline{n_s} = E(X) = \frac{\lambda}{\mu}$

b) Le temps de séjour moyen dans le système $\overline{t_s} = \frac{\overline{n_s}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$

c) il est claire que : $\overline{n_f} = 0$ et $\overline{t_f} = 0$.

4.11 Les modèles de base avec une source limitée :

4.11.1 Modèle M/M/1/∞/N (source fini):

La source peut omettre au plus N clients, donc quand le nombre de clients dans le système d'attente est k, il y a seulement (N-k) clients potentiels qui restent dans la source. L'exemple le plus classique celui du réparateur assurant la maintenance de N machines, si k machines sont dans le système d'attente alors (N-k) sont à l'extérieur (fonctionnent)

Soit T le temps qui sépare jusqu'à l'arrivée d'une machine en panne, T est le minimum du temps écoulé à l'extérieur par chacune des (N-k) machines, alors T suit $\sim e^{[(N-k)\lambda]}$

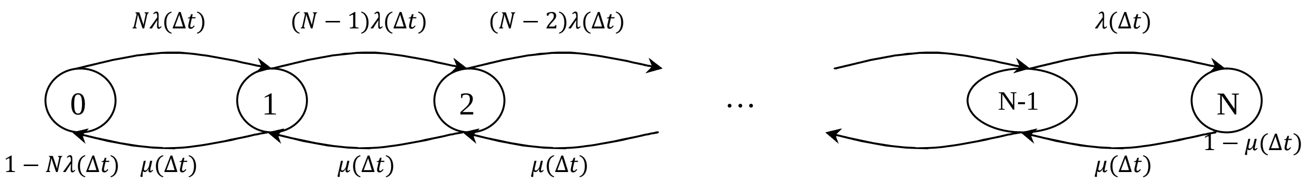
On caractérise le système par:

X(t)=nombre de machines dans le système à l'instant t.

$\{X(t); t \geq 0\}$ Est un processus de naissance et de mort avec :

Espace des états $E = \{0,1, \dots, N\}$

Graphe associé :



- Taux de naissance : $\lambda_k = \begin{cases} (N-k)\lambda, & 0 \leq k \leq N \\ 0, & k \geq N \end{cases}$

- Taux de mort : $\mu_k = \begin{cases} \mu, & 0 \leq k \leq N \\ 0, & k \geq N \end{cases}$

En régime permanent : $p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda(N-i)}{\mu}$; $1 \leq k \leq N$

Alors : $p_k = \begin{cases} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k A_N^k, & 1 \leq k \leq N \\ 0, & k > N \end{cases}$

Et : $p_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k A_N^k\right]^{-1}$

$\overline{n_f} = \sum_{k=1}^{N} (k-1) p_k$

Après calcul, on trouve :

$\overline{n}_f = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - p_0)$;

$\overline{n}_s = \sum_{k=0}^{N} k\, p_k = \overline{n}_f + (1 - p_0)$;

$\overline{n}_s = N - \frac{\mu}{\lambda} (1 - p_0)$

En fin: $\overline{t}_s = \frac{\overline{n}_s}{\lambda_e}$; $\overline{t}_f = \frac{\overline{n}_f}{\lambda_e}$;

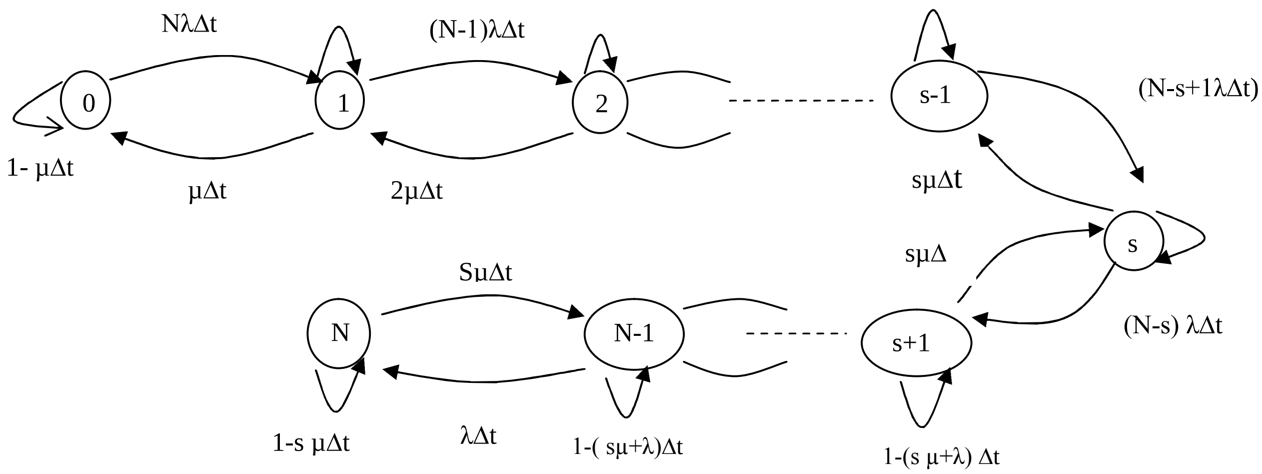
Ou $\lambda_e = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k\, p_k = \sum_{k=0}^{N} (N-k)\lambda p_k$

$\lambda_e = \lambda (N - \overline{n}_s)$

4 .1 1.2 Modèle M /M/s/∞/N:

C'est le problème précédent de la maintenance de N machines par s réparateurs.

Le graph associe :



- Taux de naissance : $\lambda_k = \begin{cases} \lambda\,(N-k) & si\ 0 \le k \le N \\ 0 & si\ k \ge N \end{cases}$

- Taux de mort : $\mu_k = \begin{cases} k\,\mu & si\ k = 1,2,3,\ldots,s \\ s\,\mu & si\ k = s, s+1, \ldots, N \end{cases}$

En régime permanent :

$$p_k = \begin{cases} C_N^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0\ ; & si\ 1 \le k \le s \\ C_N^k \frac{k!}{s!\, s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0; & si\ \ s \le k \le N \end{cases}$$

avec: $p_0 = \left[\sum_{k=0}\left(C_N^k\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \sum_k \left(C_N^k \frac{k!}{s!s^{k-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right)\right]^{-1}$

En fin:

$\overline{n_f} = \sum_{k=s}^{N} (k-s)\, p_k$

$\overline{n_s} = \sum_{k=0}^{s-1} k p_k + n_f + (1 - \sum_{k=0}^{s-1} p_k)$

Pour calculer $\overline{t_s}$ et $\overline{t_f}$ utiliser les mêmes équations que dans le cas d'un seul serveur.