Bose-Einstein-Statistik: Für Bosonen, d.h. Elementarteilchen mit ganzzahligem Spin, zu denen Photonen und Mesonen gehören, kommt man zu Ergebnissen in Übereinstimmung mit physikalischen Beobachtungen, wenn man die Gleichverteilung auf Ω_{IV} annimmt. Man überlegt sich analog wie oben, dass dann

$$P(A(k_1, \ldots, k_d)) = \binom{N+n-1}{n}^{-1} \binom{N_1+k_1-1}{k_1} \cdots \binom{N_d+k_d-1}{k_d}$$

ist. Diese Verteilung ist äußerst bemerkenswert, weil kein plausibler Zufallsmechanismus zu ihr führt. (Das soll nicht heißen, dass es keinen Zufallsmechanismus gibt, der diese Verteilung zur Folge hat.)

Aufgaben

Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches skizziert sind, sind durch (L) gekennzeichnet.

In allen Aufgaben gebe man ein Modell für das beschriebene Experiment an. Die auftretenden Ereignisse sind mathematisch zu beschreiben.

1. Aus einer Urne mit 3 roten und 4 schwarzen Kugeln und aus einer Urne mit 2 roten, 2 weißen und 3 schwarzen Kugeln wird je eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben?

2. Ein Würfel wird 7 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede der Ziffern $1, \ldots, 6$ unter den Wurfergebnissen vorkommt?

3. Unter 32 Karten befinden sich 4 Asse. Die Karten werden gemischt und nacheinander aufgedeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die neunte aufgedeckte Karte das zweite aufgedeckte Ass ist? (L)

4. Die Ecken eines Würfels sind gleichmäßig schräg abgeschliffen worden, so dass der Würfel auch auf jeder dieser Ecken liegen bleiben kann. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit jeder Ecke nur 1/4 so groß wie die jeder Seite. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer Sechs?

5. Für einen gefälschten Würfel ist $P(\{1,3,5\}) = P(\{1,2,3\}) = P(\{2,4,5\})$. Man bestimme $P(2), \ldots, P(6)$ in Abhängigkeit von $P(1)$.

6. Durch Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten nehme man Stellung zum folgenden Argument:
   Beim dreimaligen Würfeln sind die Ereignisse „die Augensumme ist 11“ und „die Augensumme ist 12“ gleichwahrscheinlich, da beide Summen auf sechs Arten dargestellt werden können. ($11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3$;
   $12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3 = 4+4+4$.)

7. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beim viermaligen Werfen eines Würfels
   a) das Maximum der erhaltenen Augenzahlen gleich 4 ist,
   b) das Minimum der erhaltenen Augenzahlen kleiner oder gleich 4 ist.

8. In einer Lotterie wurde eine siebenstellige Gewinnzahl auf die folgende Weise ermittelt: In einer Trommel kommen die Ziffern 0 bis 9 je sieben mal vor. Die sieben Ziffern der Gewinnzahl werden nacheinander ohne Rücklegen gezogen. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der Gewinnzahlen 8888888, 1234567, 4491101?

9. Man beweise induktiv die Formel (1.18).

10. Ein Prüfer hat 18 Standardfragen, von denen er in jeder Prüfung 6 zufällig auswählt. Ein Kandidat kennt die Antworten von 10 Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Prüfung besteht, wenn er dazu mindestens drei Fragen richtig beantworten muss?

11. Eine Gruppe von n Personen, darunter A und B, setzt sich zufällig an einen runden Tisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Personen zwischen A und B sitzen? (L)

12. Wie viel Rosinen muss man in 500 g Teig tun, damit ein 50-g-Brötchen mit Wahrscheinlichkeit 99 % mindestens eine Rosine enthält?

13. Drei Kugeln werden in 6 Schachteln eingeordnet, welche von 1 bis 6 nummeriert seien. Jeder Verteilung wird eine Zahl zugeordnet, indem man die Schachtelnummer mit den Besetzungszahlen multipliziert und die Resultate dann aufaddiert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 9 bzw. 10 ist, wenn die Einordnung a) der Maxwell-Boltzmann, b) der Fermi-Dirac, c) der Bose-Einstein-Statistik folgt.

14. Beim Schachspiel kann ein Turm nur horizontal und vertikal schlagen. Wir nehmen nun den allgemeineren Fall an, dass das Spielbrett aus $n \times n$ Feldern besteht.
(A) - Wie viele Möglichkeiten gibt es, n einander gleiche Türme auf dieses Brett zu stellen, so dass keiner den anderen bedroht?
(B) - Bezeichnet A_n die gesuchte Zahl, so könnte man wie folgt argumentieren: für *einen* Turm hat man n^2 Möglichkeiten, ihn zu platzieren; dieser bedroht dann eine Reihe und eine Spalte. Das Problem reduziert sich daher auf ein $(n-1) \times (n-1)$-Brett mit $n-1$ Türmen, so dass $A_n = n^2 \, A_{n-1}$ ist. Dies bedeutet aber $A_n = n^2 \, (n-1)^2 \, (n-2)^2 \, \ldots \, 2^2 \, 1^2 = (n!)^2$. Warum ist dieses *nicht* die gesuchte Lösung von (A)? (L)

15. Wie viele verschiedene 5-stellige Zahlen kann man durch Nebeneinanderlegen von 5 von 6 Kärtchen bilden, auf denen die Ziffern 1, 1, 2, 2, 2, 3 stehen? (L)

Lösungen der mit (L) gekennzeichneten Aufgaben

§ 1

3. Es gibt $(32)_9$ Anordnungen für die ersten neun aufgenommenen Karten in Reihenfolge, 4 Möglichkeiten für das Ass als neunte Karte, dann 3 für das vorangehende Ass, 8 für den Zeitpunkt, an dem das vorangehende Ass kommt, und $(28)_7$ für die anderen Karten in Reihenfolge. Es ergibt sich $4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot (28)_7/(32)_9 = 253/4495$.

11. Wir können annehmen, dass es n Plätze gibt und dass Person A auf Platz 1 sitzt. Jeder der Plätze $2, \dots, n$ für Person B ist gleich wahrscheinlich. Ist $n = 2m+1$ ungerade und ist $0 \leq k \leq m-1$, so sitzen k Personen zwischen A und B, wenn B auf Platz $2+k$ oder auf Platz $n-k$ sitzt. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit $2/(n-1)$. Ist $n = 2m$ gerade, so gilt das Gleiche für $k < (n/2)-1$. Für $k = (n/2)-1$ ist die Wahrscheinlichkeit nur $1/(n-1)$, denn dann muss B auf Platz $(n/2)+1$ sitzen.

14. Die in (B) angegebene Lösung wäre richtig, wenn die Türme nummeriert wären und gleichartige Stellungen, bei denen nur die Türme untereinander permutiert wären, unterschieden werden sollten. Die richtige Lösung ist $n!$.

15. Durch Fallunterscheidung nach der Ziffer auf der weggelassenen Karte erhält man

$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!\,2!} + \frac{5!}{2!\,3!} = 60\,.$$

§ 2

3. Die mittlere Kinderzahl m einer Familie ist $1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}05 = 1{,}70$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Junge aus einer Familie mit $1, 2, \dots, 5$ Kindern stammt, ist $0{,}2/m$, $0{,}4/m$, $0{,}45/m$, $0{,}4/m$ bzw. $0{,}25/m$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Junge, der einer Familie mit i Kindern angehört, mindestens eine Schwester hat, ist $1-(1/2)^{i-1}$. Nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich so als Antwort

$$\frac{1}{m}\left[0{,}4 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}45 \cdot \frac{3}{4} + 0{,}4 \cdot \frac{7}{8} + 0{,}25 \cdot \frac{15}{16}\right] \approx 0{,}66\,.$$

4. Die Wahrscheinlichkeit mindestens eine Sechs zu werfen ist $1-(5/6)^3 = 91/216$. Die Wahrscheinlichkeit, genau eine Drei und genau eine Sechs zu werfen, ist $(3!) \cdot (1/6)^2 \cdot (4/6) = 4/36$. Die Wahrscheinlichkeit eine Drei und zwei Sechsen oder zwei Dreien und eine Sechs zu werfen ist je $1/72$. Die Wahrscheinlichkeit mindestens eine Drei und mindestens eine Sechs zu werfen ist also $5/36$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $(5/36)/(91/216) = 30/91$.

12. Sei A das Ereignis, dass das zuerst gewählte Gemälde ein Original ist, und B das Ereignis, dass der Experte es für ein Original hält. Nach der bayesschen Formel ergibt sich $P(A \mid B^c) = 5/14$ und $P(A^c \mid B^c) = 9/14$. Hält also der Experte das zuerst gewählte Gemälde für eine Fälschung, so sind mit Wahrscheinlichkeit $5/14$ noch 9 Originale und 2 Fälschungen wählbar, und mit Wahrscheinlichkeit $9/14$ 10 Originale und eine Fälschung. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $(5/14) \cdot (9/11) + (9/14) \cdot (10/11) = 135/154$.

13. In der ersten aus zwei Würfen bestehenden Runde würfelt A zuerst, in jeder folgenden B. Sei $p = 1/6$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine begonnene Runde das Spiel noch nicht beendet, ist $w = (1-p)^2$. Es ist

$$\begin{aligned} w_A &= p + w\,(1-p)\,p + w^2\,(1-p)\,p + \ldots = p - p\,(1-p) + p\,(1-p)\sum_{i=0}^{\infty} w^i \\ &= p^2 + (1-p)/(2-p) = 191/396\,. \end{aligned}$$

(Für kleines p ist B im Vorteil, für großes p A.)