MODUL PELUANG

PENDAHULUAN

Tanpa kita sadari kehidupan kita sehari-hari selalu berhubungan dengan matematika, khususnya peluang. Misalnya dalam pemilihan umum terdapat 5 orang calon presiden, yaitu A, B, C, D dan E. Berapa peluang A untuk menang? Kita dapat menentukan peluang A untuk menang dengan menggunakan teori probabilitas (peluang). Teori peluang pertama kali diuraikan oleh ahli matematika Prancis, yaitu Blaise Pascal dan Pierre de Fermat, dan kemudian dikembangkan oleh ahli matematika Italia, Gerolarmo Cordano. Teori peluang dikembangkan pada abad ke-17 ketika para ahli matematika mencoba mengetahui kemungkinan gagal atau berhasil dalam permainan kartu dan dadu. Selain digunakan dalam analisis matematika, teori probabilitas (peluang) juga banyak digunakan dalam berbagai bidang, seperti genetika, mekanika kuantum dan asuransi.

Standar Kompetensi

1. Menggunakan aturan statistika, kaidah pencacahan, dan sifat-sifat peluang dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar :

1.4. Menggunakan aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi dalam pemecahan masalah.

1.5. Menentukan ruang sampel suatu percobaan.

1.6. Menentukan peluang suatu kejadian dan penafsirannya

Indikator :

- Menyusun aturan perkalian, permutasi dan kombinasi
- Menentukan faktorial suatu bilangan asli
- Menggunakan aturan perkalian, permutasi dan kombinasi
- Menentukan banyak kemungkinan kejadian dari berbagai situasi
- Menuliskan himpunan kejadian dari suatu percobaan
- Menentukan ruang sampel suatu percobaan
- Menentukan peluang kejadian melalui percobaan
- Menentukan peluang suatu kejadian secara teoritis
- Menjelaskan arti nilai peluang suatu kejadian
- Menentukan peluang komplemen suatu kejadian
- Mengaplikasikan aturan penjumlahan dan perkalian dalam peluang majemuk

Tujuan dari mempelajari modul ini, kalian diharapkan :

1. Mampu menyusun aturan perkalian, permutasi dan kombinasi.
2. Mampu menentukan faktorial suatu bilangan asli
3. Mampu menggunakan aturan perkalian, permutasi dan kombinasi.
4. Mampu Menentukan banyak kemungkinan kejadian dari berbagai situasi

5. Mampu Menuliskan himpunan kejadian dari suatu percobaan
6. Mampu Menentukan ruang sampel suatu percobaan
7. Mampu Menentukan peluang kejadian melalui percobaan
8. Mampu Menentukan peluang suatu kejadian secara teoritis
9. Mampu Menjelaskan arti nilai peluang suatu kejadian
10. Mampu Menentukan peluang komplemen suatu kejadian
11. Mampu Mengaplikasikan aturan penjumlahan dan perkalian dalam peluang majemuk

Untuk mencapai tujuan tersebut, sajian modul ini dibagi dalam 2 kegiatan.

KEGIATAN 1

A. Kaidah Pencacahan (Counting Rules)

1. Aturan Pengisian Tempat

Jika terdapat dua unsur yang akan dibentuk menjadi suatu susunan dengan *m* dan *n* cara yang berlanan dapat disusun menjadi *m x n* cara.

Contoh Soal:

a. Seseorang akan melakukan perjalanan dari kota A ke C. Jika dari kota A ke kota B dapat dipilih 3 jalan yang berbeda dan dari kota B ke Kota C dapat dipilih 4 jalan yang berbeda maka berapa jalan yang dapat dipilih jika kejadian dari kota A ke kota C melalui kota B?

Jawab:

Misal jalur di kota A : p, q, r dan jalur di kota B : s, t , u, v

Untuk melakukan perjalanan dari kota A ke kota C melalui kota B dapat melalui ps, pt, pu, pv, qs, qt, qu, qv, rs, rt, ru, rv, yaitu ada 12 cara atau 3 x 4 = 12 cara.

b. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk dari angka-angka 1, 3, 5, 7, 9 dengan syarat masing-masing angka hanya boleh dipakai satu kali untuk setiap bilangan dan bilangan itu terdiri atas tiga angka.

Jawab:

R	P	S
5	4	3

(R : Ratusan; P: Puluhan; S: Satuan)

Kotak ratusan dapat diisi dengan 5 cara (1,3,5,7,9). Kotak puluhan dapat diisi dengan 4 cara (satu angka sudah mengisi kotak ratusan), kotak satuan dapat diisi dengan 3 cara (satu angka sudah mengisi kotak ratusan dan satu angka lagi sudah mengisi kotak puluhan). Jadi banyaknya bilangan yang dapat dibuat adalah 5 x 4 x 3 = 60 bilangan.

2. Pengertian dan Notasi Faktorial

Perkalian suatu bilangan bulat positif yang dimulai 1 sampai *n* dinotasikan *n!*, dibaca *n* faktorial.

n! = 1 x 2 x 3 x ...x (n – 2) x (n – 1) x n atau ***n! = n x (n – 1) x (n – 2) x ... x 3 x 2 x 1***

1! = 1, n >0

Contoh soal:

Hitunglah nilai dari faktorial berikut :

a. 5!

b. 4! – 3!

c. 3! X 5!

d. $\frac{(7+2)!}{7!}$

e. $\frac{4!}{3!}$

Jawab:

a. 5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

b. 4! – 3! = 4 x 3 x 2 x 1 – 3 x 2 x 1 = 24 – 6 = 18

c. 3! X 5! = 3 x 2 x 1 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 6 x 120 = 720

d. $\frac{(7+2)!}{7!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9.8.7!}{7!} = 9.8 = 72$

e. $\frac{4!}{3!} = \frac{4.3.2.1}{3.2.1} = 4$

Tugas

Tunjukkan bahwa :

a. 1! = 1

b. 0! = 1

3. Pengertian Permutasi

Suatu permutasi dari beberapa unsur adalah banyaknya cara menyusun sebagian atau seluruh unsur-unsur tersebut **dengan memperhatikan urutan dan tanpa ada pengulangan unsur.** Banyak permutasi *n* unsur dengan setiap pengambilan *r* unsur $(r \leq n)$ dinotasikan

$$P_r^n \textit{ atau } P_{(n,r)} \textit{ dengan } P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh soal :

a. Tentukan nilai dari permutasi berikut

1. P_3^5

2. P_4^4

Jawab:

1. $P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = 60$

2. $P_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4.3.2.1}{1} = 24$

b. Dari 6 bilangan yaitu 2, 4, 5, 7, 8 dan 9 akan dibentuk bilangan-bilangan yang terdiri dari 3 bilangan, berapa banyak susunan bilangan yang terjadi?

Jawab :

$$P_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1} = 120$$

4. Permutasi beberapa Elemen yang Sama

Banyaknya permutasi *n* unsur yang memuat *k, l, dan m* unsur yang sama dapat ditentukan dengan rumus $P = \frac{n!}{k!l!m!}$

Contoh Soal :

Berapa banyak susunan huruf yang dapat disusun dari setiap huruf pada kata berikut:

a. ADALAH b. MATEMATIKA

Jawab:

a. $P = \frac{6!}{3!} = 6.5.4 = 120$

b. $P = \frac{10!}{2!2!3!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{2.1.2.1.3.2.1} = 10.9.8.7.6.5 = 151200$

5. Permutasi Siklis

Jika tersedia n unsur yang berbeda maka banyaknya permutasi siklis dari n unsur tersebut adalah $P = (n-1)!$

Contoh Soal:

Dalam diskusi yang terdiri dari 6 siswa mengelilingi sebuah meja bundar. Berapa cara mereka duduk dengan mengelilingi meja bundar?

Jawab:

banyak cara duduk mengelilingi meja sebagi berikut

$P = (6-1)!$

$P = 5!$

$P = 5.4.3.2.1$

$P = 120\ cara$

Tugas:

1. Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan berikut:

   a. $P_2^n = 20$

   b. $P_1^{n+1} = 9$

2. Tentukan banyaknya susunan huruf berbeda yang dapat dibentuk dari huruf-huruf penyusun kata “YOGYAKARTA”
3. Tentukan banyaknya cara membuat gelang yang terdiri atas 8 manik-manik yang berbeda?

6. Pengertian Kombinasi

Kombinasi dari sekelompok unsur adalah banyaknya cara menyusun sebagian atau seluruh unsur-unsur tersebut **tanpa memperhatikan urutan.** Kombinasi dinotasikan $C_r^n \text{ atau } C_{(n,r)} \text{ dengan } C_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

Contoh Soal:

a. Tentukan nilai dari kombinasi berikut

1. C_2^8
2. $C_4^6 + C_4^5$

Jawab:

1. $C_2^8 = \dfrac{8!}{(8-2)!2!} = \dfrac{8!}{6!2!} = \dfrac{8.7.6!}{6!2.1} = \dfrac{8.7}{2} = 28$
2. $C_4^6 + C_4^5 = \dfrac{6!}{(6-4)!4!} + \dfrac{5!}{(5-4)!4!} = \dfrac{6!}{2!4!} + \dfrac{5!}{1!4!} = 15 + 5 = 20$

Tugas:

1. Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan berikut
   a. $C_2^n = 21$
   b. $C_1^{n+1} = 10$
2. Tentukan banyak cara menyusun team bola voli yang dapat dibentuk dari 10 orang pemain.
3. tentukan banyaknya cara untuk memilih regu bulutangkis yang terdiri dari 3 pemain putri dan 5 pemain putra dari keseluruhan 5 pemain putri dan 8 pemain putra.

7. Ekspansi Binomial Newton

Ekspansi binomial Newton adalah pemangkatan dua suku dengan bilangan asli, sacara umum ditulis $(a+b)^n$ *dengan* $n \in$ *bilangan asli dan* $n \geq 1$. Hasil pemangkatan $(a+b)^n$ berbentuk polinom/suku banyak. Ekspansi binomial $(a+b)^n$ menghasilkan $(n+1)$ suku dengan:

1. Koefisien suku ke-m adalah C_{m-1}^n
2. Pangkat *a* pada suku pertama dimulai dari n, kemudian pada suku berikutnya pangkat *a* berkurang 1, sampai dengan suku terakhir koefisien pangkat *a* adalah nol. Pangkat *a* pada suku ke-*m* adalah $(m-k+1)$.
3. Pangkat *b* pada suku pertama dimulai dari 0, kemudian pada suku berikutnya pangkat *b* bertambah 1, sampai dengan suku terakhir koefisien pangkat *b* adalah *n*. Pangkat *b* pada suku ke-m adalah *m – 1.*
4. Jumlah pangkat pada setiap suku sama dengan *n.*

Perhatikan tabel berikut

Perpangkatan	Segitiga Pascal	Rumus Kombinasi
$(a+b)^0$	1	C_0^0
$(a+b)^1$	1 1	$C_0^1\ C_1^1$
$(a+b)^2$	1 2 1	$C_0^2\ C_1^2\ C_2^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$C_0^3\ C_1^3\ C_2^3\ C_3^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$C_0^4\ C_1^4\ C_2^4\ C_3^4\ C_4^4$

Berdasarkan tabel di atas diperoleh rumus berikut:

$$(a+b)^2 = C_0^2 a^2 + C_1^2 a^1 b^1 + C_2^2 b^2$$

$$(a+b)^3 = C_0^3 a^3 + C_1^3 a^2 b^1 + C_2^3 a^1 b^2 + C_3^3 b^3$$

Dan seterusnya.

Sehingga $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$

Contoh soal:

Jabarkan tiap binomial berikut:

1. $(x+y)^2$
2. $(2x+y)^3$

Jawab:

1.
$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= \sum_{r=0}^{2} C_r^2 x^{2-r} y^r \\ &= C_0^2 x^{2-0} y^0 + C_1^2 x^{2-1} y^1 + C_2^2 x^{2-2} y^2 \\ &= 1.x^2.1 + 2xy + 1x^0 y^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(2x+y)^3 &= \sum_{r=0}^{3} C_r^3 (2x)^{3-r} y^r \\ &= C_0^3 (2x)^{3-0} y^0 + C_1^3 (2x)^{3-1} y^1 + C_2^3 (2x)^{3-2} y^2 + C_3^3 (2x)^{3-3} y^3 \\ &= 1.8x^3.1 + 3.4x^2 y + 3.2xy^2 + 1.1.y^3 \\ &= 8x^3 + 12x^2 y + 6xy^2 + y^3\end{aligned}$$

Tugas :

1. Jabarkan binomial newton berikut $(2x-3y)^4$

Latihan

1. Dari angka-angka 5, 6, 7, 8 dan 9 akan disusun bilangan ratusan. Tentukan banyaknya bilangan ratusan yang dapat dibuat,jika:
   a. Setiap angka boleh berulang.
   b. Setiap angka tidak boleh berulang
2. Tentukan banyaknya bilangan antara 3.000 dan 5.000 yang dapat dibentuk dengan menggunakan tujuh angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Apabila setiap angka tidak boleh diulangi dalam setiap bilangan.
3. Dari kota A ke B dilayani oelh 4 bus dan dari kota B ke C oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota A ke C melalui B kemudian kembali lagi ke A juga melalui B. Jika pada saat kembali dari C ke A, ia tidak mau menggunakan bus yang sama,maka tentukan banyaknya cara perjalanan orang tersebut.
4. Tentukan hasil faktorial berikut
   a. $7!$
   b. $6! + 5!$
   c. $4! - 2!$
   d. $7!3!$
   e. $\frac{8!}{5!3!}$
5. Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan berikut:
   a. $\frac{n!}{(n-1)!} = 8$
   b. $\frac{n!}{(n-2)!} = 42$
6. Pada pemilihan pengurus OSIS yang terdiri dari ketua, sekretaris dan bendahara terdapat 5 orang calon yang berkemampuan hampir sama. Berapa banyak susunan yang dapat dibentuk?
7. Banyak susunan yang dapat dibentuk dari kata "TRANSPARAN" adalah?
8. Tentukan banyaknya susunan berbeda dari 7 orang yang duduk mengelilingi suatu meja berbentuk bundar.
9. Seorang saudagar akan membeli 3 ekor kambing dan 4 ekor kerbau dari seorang yang memiliki 5 ekor kambing dan 5 ekor kerbau. Berapa cara saudagar itu dapat memilih kambing dan kerbau?
10. Dalam pelatnas bulutangis terdapat 8 orang pemain putra dan 6 pemain putri. Berapa pasangan ganda yang dapat dipilih untuk :
    a. Ganda putra
    b. Ganda putri
    c. Ganda campuran

11. Dalam suatu ulangan seorang siswa harus menjawab 6 soal dari 8 soal yang diberikan dimana 3 soal diantaranya wajib dikerjakan. Banyaknya cara memilih soal-soal tersebut adalah?
12. Hasil seleksi terhadap semua siswa kelas XI dalam bidang matematika dan kimia didapatkan 5 siswa cukup baik di bidang matematika dan 4 siswa di bidang kimia. Sekolah akan mengirim mereka untuk suatu kompetisi yang pesertanya terdiri dari 3 siswa matematika dan 2 siswa kimia. Berapakah susunan utusan yang mungkin dapat dibentuk?
13. Uraikanlah binomial newton berikut:
    a. $(x+2)^5$
    b. $(3x+y)^6$
14. Tentukan koefisien x^2y^2 dari $(5x+2y)^4$
15. Dari bentuk perpangkatan $(2x+3)^5$. Tentukan perbandingan koefisien x^3 dan x^5

KEGIATAN 2

Ruang Sampel dan Kejadian

Ketrampilan menentukan banyak anggota ruang sampel dan menentukan banyak anggota kejadian akan sangat diperlukan dalam menentukan peluang kejadian.

Ruang Sampel

Definisi:

Percobaan adalah kegiatan atau peristiwa yang memberikan sejumlah kemungkinan hasil. Semua kemungkinan hasil dapat digambarkan dengan diagram pohon atau tabel silang.

Ruang sampel dinotasikan dengan S, adalah himpunan semua kemungkinan hasil. Banyak anggota ruang sampel dinotasikan dengan $n(S)$.

Contoh:

Pada percobaan melempar sebuah dadu sebanyak satu kali.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$
$n(S) = 6$

Angka-angka 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 disebut titik sampel.

Kejadian

Definisi:

Kejadian dinotasikan dengan K, adalah himpunan salah satu kemungkinan hasil. Kejadian merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Banyak anggota kejadian dinotasikan dengan $n(K)$.

Menentukan anggota suatu kejadian dapat dilakukan dengan cara mendaftar semua titik sampel, kemudian dipilihlah kejadian yang diharapkan muncul.

Contoh:

Dilakukan percobaan melempar dua dadu secara bersama-sama sebanyak satu kali, tentukan:

a. Kejadian muncul mata dadu pertama dan dadu kedua masing-masing adalah bilangan genap.
b. Banyak anggota kejadian tersebut.

Jawab:

Misalkan K adalah kejadian muncul mata dadu pertama dan dadu kedua masing-masing adalah bilangan genap.

a. K dapat digambarkan dengan tabel silang

Dadu 1 / Dadu 2	2	4	6
2	(2, 2)	(4, 2)	(6, 2)
4	(2, 4)	(4, 4)	(6, 4)
6	(2, 6)	(4, 6)	(6, 6)

$K = \{(2,2),(4,2),(6,2),(2,4),(4,4),(6,4),(2,6),(4,6),(6,6)\}$

b. Banyak anggota K adalah $n(K) = 9$

Dalam menentukan banyaknya anggota kejadian, kadangkala kita tidak selalu dapat mendaftar semua titik sampel dalam percobaan tersebut. Untuk percobaan yang demikian kita dapat memanfaatkan aturan perkalian atau rumus kombinasi.

Peluang Kejadian

Menentukan peluang suatu kejadian sama halnya dengan menentukan besar kemungkinan munculnya kejadian tersebut. Peluang kejadian K, dinotasikan dengan $P(K)$ adalah banyak anggota kejadian K dibanding dengan banyak anggiota ruang sampel.

$$P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} \, dengan \, 0 \leq P(K) \leq 1$$

Jika $P(K)$= 0 berarti K adalah kejadian mustahil terjadi

Jika $P(K)$= 1 berarti K adalah kejadian pasti terjadi.

Contoh:

Pada percobaan melempar dadu sebanyak satu kali, berapakah peluang munculnya mata dadu ganjil?

Jawab:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$n(S) = 6$$
$$K = kejadian\ muncul\ mata\ dadu\ ganjil$$
$$K = \{1,3,5\}$$
$$n(K) = 3$$
$$P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Jadi peluang kejadian muncul mata dadu ganjil adalah $\frac{1}{2}$

Contoh:

Dari seperangkat kartu bridge diambil tiga kartu sekaligus secara acak. Tentukan peluang mendapatkan 3 kartu berwarna hitam.

Jawab.

Misalkan K adalah kejadian mendapat 3 kartu warna hitam.

a. Menentukan $n(K)$

Banyak kartu hitam yang diambil = 3

Banyak kartu yang tersedia = 26

Banyak anggota kejadian K adalah kombinasi 3 dari 26 obyek yang tersedia.

$$n(K) = C_3^{26}$$
$$= \frac{26!}{(26-3)!.3!} = \frac{26!}{23!.3!} = \frac{26.25.24.23!}{23!.3.2.1} = 2600$$

b. Menentukan $n(S)$

Banyak kartu yang diambil = 3

Banyak kartu yang tersedia = 52

Banyak anggita ruang sampel adalah kombinasi 3 objek dari 52 objek yang tersedia.

$$n(S) = C_3^{52}$$
$$= \frac{52!}{(52-3)!.3!} = \frac{52!}{49!.3!} = \frac{52.51.50.49!}{49!.3.2.1} = 22100$$

c. Menentukan $P(K)$

$$P(K) = \frac{n(K)}{n(S)}$$
$$= \frac{C_3^{26}}{C_3^{52}}$$
$$= \frac{2600}{22100}$$
$$= \frac{2}{17}$$

Jadi, peluang mendapat 3 kartu berwarna hitam adalah $\frac{2}{17}$

Frekuensi Harapan

Jika percobaan dilakukan secara terus menerus secara berulang-ulang maka frekuensi harapan muncul suatu kejadian akan semakin besar. Frekuensi harapan kejadian K dinotasikan dengan $F_h(K)$.

Misalkan pada suatu percobaan yang diulang sebanyak m kali dan peluang kejadian K adalah $P(K)$, frekuensi harapan kejadian K adalah $F_h(K) = m.P(K)$

Peluang Kejadian Saling Lepas

Misalkan pada percobaan melempar sebuah dadu sebanyak satu kali. K_1 adalah kejadian muncul mata dadu prima dan K_2 adalah kejadian muncul mata dadu kelipatan 3. Menentukan peluang munculnya K_1 atau K_2 dilakukan dengan menggunakan rumus peluang kejadian majemuk.

Kejadian majemuk terdiri dari kejadian tidak saling lepas, kejadian saling lepas, kejadian bebas stokastik dan kejadian bersyarat.

Kejadian Tidak Saling Lepas.

Dua kejadian yang dapat terjadi secara bersamaan disebut kejadian tidak saling lepas. Misalkan pada percobaan melempar dadu sebanyak satu kali. K_1 adalah kejadian munculnya mata dadu prima dan K_2 adalah kejadian muncul mata dadu kelipatan 3. Kejadian K_1 dengan K_2 bila ditulis dalam bentuk himpunan adalah $K_1 = \{2,3,5\}$ dan $K_2 = \{3,6\}$.

Perhatikan bahwa $K_1 \cap K_2 = 3$. Jadi $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$. Berarti kejadian K_1 dan K_2 dapat terjadi secara bersamaan.

Jadi dua kejadian K_1 dengan K_2 dikatakan tidak saling lepas jika $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$. Peluang kejadian K_1 atau K_2 dinotasikan dengan $P(K_1 \cup K_2)$

$$P(K_1 \cup K_2) = P(K_1) + P(K_2) - P(K_1 \cap K_2)$$
$$= \frac{n(K_1)}{n(S)} + \frac{n(K_2)}{n(S)} - \frac{n(K_1 \cap K_2)}{n(S)}$$

Contoh:

Pada percobaan melempar sebuah dadu, K_1 adalah kejadian muncul mata dadu prima dan K_2 adalah kejadian munculnya mata dadu kelipatan 3. Tentukan:

a. Peluang munculnya K_1 atau K_2 jika percobaan dilakukan sebanyak satu kali.

b. Frekuensi harapan munculnya K_1 atau K_2 jika percobaan diulang sebanyak 90 kali

Jawab.

a. Peluang munculnya K_1 atau K_2 jika percobaan dilakukan sebanyak satu kali.

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$n(S) = 6$$
$$K_1 = \{2,3,5\}$$
$$n(K_1) = 3$$
$$K_2 = \{3,6\}$$
$$n(K_2) = 2$$
$$K_1 \cap K_2 = \{3\}$$
$$n(K_1 \cap K_2) = 1$$

$$P(K_1 \cup K_2) = P(K_1) + P(K_2) - P(K_1 \cap K_2)$$
$$= \frac{n(K_1)}{n(S)} + \frac{n(K_2)}{n(S)} - \frac{n(K_1 \cap K_2)}{n(S)}$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{4}{6}$$
$$= \frac{2}{3}$$

b. Frekuensi harapan munculnya K_1 atau K_2 jika percobaan diulang sebanyak 90 kali.

$$F_h(K_1 \cup K_2) = m.P(K_1 \cup K_2)$$
$$= 90\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= 60$$

Kejadian Saling Lepas

Dua kejadian yang tidak dapat terjadi secara bersamaan disebut kejadian saling lepas. Misalkan pada percobaan melempar dadu satu kali. K_1 adalah kejadian muncul mata dadu genap dan K_2 adalah kejadian muncul mata dadu 5. Kejadian K_1 dan K_2 bila ditulis dalam bentuk himpunan adalah $K_1 = \{2,4,6\}$ dan $K_2 = \{5\}$.

Perhatikan bahwa tidak ada mata dadu genap sekaligus mata dadu 5. Jadi $K_1 \cap K_2 = \varnothing$.

Kejadian K_1 dengan K_2 tidak dapat terjadi secara bersamaan.

Jadi dua kejadian K_1 dengan K_2 dikatakan saling lepas jika $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Peluang kejadian K_1 dengan K_2 dinotasikan dengan $P(K_1 \cup K_2)$.

$$P(K_1 \cup K_2) = P(K_1) + P(K_2)$$
$$= \frac{n(K_1)}{n(S)} + \frac{n(K_2)}{n(S)}$$

Contoh:

Dari seperangkat kartu bridge akan diambil satu kartu secara acak. Tentukan:

a. Peluang terambilnya kartu bergambar atau kartu As jika percobaan dilakukan satu kali.
b. Frekuensi terambilnya kartu berhambar atau kartu As jika percobaan dilakukan sebanyak 65 kali.

Jawab:

a. Peluang terambilnya kartu bergambar atau kartu As.

$$n(S) = C_1^{52}$$
$$= 52$$

Misalkan

K_1 adalah kejadian terambilnya kartu bergambar.

$$n(K) = C_1^{12}$$
$$= 12$$

K_2 adalah kejadian terambilnya kartu As.

$$n(K_2) = C_1^{4}$$
$$= 4$$

Perhatikan bahwa tidak ada kartu bergambar sekaligus kartu As, maka $K_1 \cap K_2 = \varnothing$

Peluang muncul K_1 atau K_2 adalah

$$P(K_1 \cup K_2) = P(K_1) + P(K_2)$$
$$= \frac{n(K_1)}{n(S)} + \frac{n(K_2)}{n(S)}$$
$$= \frac{12}{52} + \frac{4}{52}$$
$$= \frac{16}{52}$$
$$= \frac{4}{13}$$

b. Frekuensi terambilnya kartu bergambar atau kartu As jika percobaan dilakukan sebanyak 65 kali.

$$F_h(K_1 \cup K_2) = m.P(K_1 \cup K_2)$$
$$= 65\left(\frac{4}{13}\right)$$
$$= 20$$

Peluang Kejadian Bebas Stokastik

Dua kejadian yang tidak saling bergantung/mempengaruhi disebut kejadian bebas stokastik. Misalkan pada percobaan pelemparan sekeping mata uang logam dan sebuah dadu secara bersamaan sebanyak satu kali. K_1 adalah kejadian muncul sisi gambar pada uang logam dan K_2 adalah kejadian muncul mat dadu genap. Perhatikan bahwa munculnya sisi gambar pada uang logam tidak mempengaruhi munculnya mata dadu genap, sehingga K_1 dengan K_2 disebut kejadian bebas stokastik. Misalkan K_1 dengan K_2 adalah kejadian bebas stokastik, peluang K_1 dan K_2 dinotasikan dengan $P(K_1 \cap K_2)$

$$P(K_1 \cap K_2) = P(K_1) \,.\, P(K_2)$$
$$= \frac{n(K_1)}{n(S)} \cdot \frac{n(K_2)}{n(S)}$$

Contoh:

Dalam sebuah kotak yang berisi 5 bola merah dan 4 bola putih, akan diambil 2 bola satu demi satu secara acak dengan pengembalian. Tentukan:

a. Peluang pengambilan bola pertama berwarna merah dan bola kedua biru,
b. Peluang terambil bola pertama biru dan bola kedua merah.
c. Peluang terambilnya masing-masing bola berlainan warna.

Jawab.

a. Peluang terambilnya bola pertama merah dan bola kedua biru.

   Misalkan K_1 adalah kejadian mendapat bola merah.

$n(K_1) = C_1^5$
$= 5$
$n(S_1) = C_1^9$
$= 9$
$P(K_1) = \frac{5}{9}$

Misalkan K_2 adalah kejadian mendapat bola biru

$n(K_2) = C_1^4$
$= 5$
$n(S_2) = C_1^9$
$= 9$
$P(K_2) = \frac{4}{9}$

Peluang pertama muncul K_1 dan kedua K_2 adalah

$P(K_1 \cap K_2) = P(K_1) \,.\, P(K_2)$
$= \frac{n(K_1)}{n(S)} \cdot \frac{n(K_2)}{n(S)}$
$= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9}$
$= \frac{20}{81}$

b. Peluang terambil bola pertama biru dan bola kedua merah.

Misalkan K_3 adalah kejadian mendapat bola biru

$n(K_3) = C_1^4$
$= 5$
$n(S_3) = C_1^9$
$= 9$
$P(K_3) = \frac{4}{9}$

Misalkan K_4 adalah kejadian mendapat bola merah.

$n(K_4) = C_1^5$
$= 5$
$n(S_4) = C_1^9$
$= 9$
$P(K_4) = \frac{5}{9}$

Peluang pertama muncul K_3 dan kedua K_4 adalah

$$P(K_3 \cap K_4) = P(K_3) \,.\, P(K_4)$$
$$= \frac{n(K_3)}{n(S)} \cdot \frac{n(K_4)}{n(S)}$$
$$= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9}$$
$$= \frac{20}{81}$$

c. Peluang terambilnya msing-masing bola berlainan warna.

Peluang pertama muncul K_1 dan kedua K_2 adalah

$$P(K_1 \cap K_2) + P(K_3 \cap K_4) = P(K_1) \,.\, P(K_2) + P(K_3) . P(K_4)$$
$$= \frac{20}{81} + \frac{20}{81}$$
$$= \frac{40}{81}$$

Peluang Komplemen Kejadian

Misalkan K adalah suatu kejadian. Peluang kejadian bukan K, dinotasikan dengan $P(K^c)$ atau $P(K^{'})$ adalah banyaknya anggota kejadian bukan K dibagi dengan banyaknya anggota ruang sampel. Peluang kejadian bukan K disebut juga peluang komplemen kejadian.

$$P(K^c) = \frac{n(K^c)}{n(S)}$$

Selain dengan menggunakan banyknya anggota kejadian bukan K, peluang komplemen K dapat juga ditentukan dengan menggunakan banyaknya anggota kejadian K.

$$P(K^c) = 1 - P(K)$$

Peluang koplemen kejadian K lebih mudah ditentukan dengan rumus $P(K^c) = 1 - P(K)$.

Peluang Kejadian Bersyarat

Kejadian bersyarat adalah dua kejadian pada suatu percobaan, kejadian yang satu terjadi dengan syarat kejadian yang lainnya telah terjadi.

Peluang kejadian A dengan syarat kejadian B telah terjadi adalah

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

LATIHAN

1. Dari sebuah kotak yang berisi 5 bola hitam dan 6 bola putih, diambil 2 bola sekaligus secara acak. Tentukan banyaknya anggota kejadian K, jika:
   a. K adalah kejadian mendapat 2 bola hitam
   b. K adalah kejadian mendapat 2 bola putih.
   c. K adalah kejadian mendapat 1 bola hitam dan 1 bola putih.
2. Dari suatu kotak yang berisi 5 bola merah dan 7 bola putih, dan 4 bola biru, diambil 3 bola sekaligus. Tentukan peluang terambilnya tiga bola yang berbeda warna.

3. Dalam sebuah keranjang terdapat 10 buah apel, 2 diantaranya busuk. Tentukan peluang terambilnya empat buah apel yang baik.
4. Panitia pertunjukan panggung terbuka mengundang 10 orang penyanyi yang terdiri dari 7 wanita dan 3 pria. Berhubung keterbatasan waktu, hanya ditampilkan 5 orang penyanyi dan masing-masing penyanyi mempunyai hak yang sama untuk tampil. Berapa peluang terambilnya 5 penyanyi itu jika disyaratkan bahwa:
   a. Sekurang-kurangnya 2 penyanyi wanita.
   b. Sekurang-kurangnya 2 penyanyi pria.
5. Dari seperangkat kartu bridge akan diambil 3 kartu sekaligus dengan pengembalian. Jika pengambilan dilakukan sebanyak 340 kali, maka tentukan frekuensi harapan termbilnya 3 kartu berwarna hitam.
6. Kejadian A dan kejadian B masing-masing mempunyai peluang $P(A) = \frac{3}{5}$ dan $P(B) = \frac{1}{4}$.

   Diketahui pula bahwa $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$.
   a. Tunjukkan bahwa kejadian A dan kejadian B merupakan kejadian yang tidak saling lepas dan tidak juga bebas.
   b. Hitunglah peluang $P(A/B)$
7. Pada sebuah kantong berisi 10 bola mrah dan 5 bola putih. Jika dua bola diambil satu demi satu dengan pengembalian maka tentukan peluang terambil bola pertama merah dan bola kedua putih.
8. Kejadian A dan kejadian B masing-masing mempunyai peluang $P(A) = \frac{1}{3}$ dan $P(B) = \frac{2}{5}$.

   Diketahui pula bahwa $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$. Tunjukkan bahwa kejadian A dan kejadian B merupakan kejadian saling bebas.
9. Diketahui dua kejadian A dan B dengan $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ dan $P(A \cup B) = 0{,}1$. Tentukan peluang kejadian bukan A atau bukan B
10. Kejadian A dan kejadian B masing-masing mempunyai peluang $P(A) = \frac{1}{6}$ dan $P(B) = \frac{3}{5}$.

    Diketahui pula bahwa $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Tentukan peluang kejadian bukan A atau bukan B.

RANGKUMAN

Kaidah Pencacahan (Counting Rules)

1. **Aturan Pengisian Tempat**

   Jika terdapat dua unsur yang akan dibentuk menjadi suatu susunan dengan *m* dan *n* cara yang berlanan dapat disusun menjadi *m x n* cara.

2. **Pengertian dan Notasi Faktorial**

   Perkalian suatu bilangan bulat positif yang dimulai 1 sampai *n* dinotasikan *n!*, dibaca *n* faktorial.

   n! = 1 x 2 x 3 x ...x (n – 2) x (n – 1) x n atau ***n! = n x (n – 1) x (n – 2) x ... x 3 x 2 x 1***

   1! = 1, n >0

3. **Pengertian Permutasi**

   Suatu permutasi dari beberapa unsur adalah banyaknya cara menyusun sebagian atau seluruh unsur-unsur tersebut **dengan memperhatikan urutan dan tanpa ada pengulangan unsur.** Banyak permutasi *n* unsur dengan setiap pengambilan *r* unsur $(r \leq n)$ dinotasikan

   $$P_r^n \text{ atau } P_{(n,r)} \text{ dengan } P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

4. **Permutasi beberapa Elemen yang Sama**

   Banyaknya permutasi *n* unsur yang memuat *k, l, dan m* unsur yang sama dapat ditentukan dengan rumus $P = \frac{n!}{k!l!m!}$

5. **Permutasi Siklis**

   Jika tersedia n unsur yang berbeda maka banyaknya permutasi siklis dari n unsur tersebut adalah $P = (n-1)!$

6. **Pengertian Kombinasi**

   Kombinasi dari sekelompok unsur adalah banyaknya cara menyusun sebagian atau seluruh unsur-unsur tersebut **tanpa memperhatikan urutan.** Kombinasi dinotasikan

   $$C_r^n \text{ atau } C_{(n,r)} \text{ dengan } C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

7. **Ekspansi Binomial Newton**

   Ekspansi binomial Newton adalah pemangkatan dua suku dengan bilangan asli, sacara umum ditulis $(a+b)^n$ *dengan* $n \in$ *bilangan asli dan* $n \geq 1$. Hasil pemangkatan $(a+b)^n$ berbentuk polinom/suku banyak. Ekspansi binomial $(a+b)^n$ menghasilkan $(n+1)$ suku dengan:

   1. Koefisien suku ke-m adalah C_{m-1}^n

2. Pangkat *a* pada suku pertama dimulai dari n, kemudian pada suku berikutnya pangkat *a* berkurang 1, sampai dengan suku terakhir koefisien pangkat *a* adalah nol. Pangkat *a* pada suku ke-*m* adalah $(m-k+1)$.
3. Pangkat *b* pada suku pertama dimulai dari 0, kemudian pada suku berikutnya pangkat *b* bertambah 1, sampai dengan suku terakhir koefisien pangkat *b* adalah *n*. Pangkat *b* pada suku ke-m adalah *m – 1.*
4. Jumlah pangkat pada setiap suku sama dengan *n.*

Perhatikan tabel berikut

Perpangkatan	Segitiga Pascal	Rumus Kombinasi
$(a+b)^0$	1	C_0^0
$(a+b)^1$	1 1	$C_0^1\ C_1^1$
$(a+b)^2$	1 2 1	$C_0^2\ C_1^2\ C_2^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$C_0^3\ C_1^3\ C_2^3\ C_3^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$C_0^4\ C_1^4\ C_2^4\ C_3^4\ C_4^4$

Berdasarkan tabel di atas diperoleh rumus berikut:

$$(a+b)^2 = C_0^2 a^2 + C_1^2 a^1 b^1 + C_2^2 b^2$$

$$(a+b)^3 = C_0^3 a^3 + C_1^3 a^2 b^1 + C_2^3 a^1 b^2 + C_3^3 b^3$$

Dan seterusnya.

Sehingga $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$

Ruang Sampel dan Kejadian

Ruang Sampel

Definisi:

Percobaan adalah kegiatan atau peristiwa yang memberikan sejumlah kemungkinan hasil. Semua kemungkinan hasil dapat digambarkan dengan diagram pohon atau tabel silang.

Ruang sampel dinotasikan dengan S, adalah himpunan semua kemungkinan hasil. Banyak anggota ruang sampel dinotasikan dengan $n(S)$.

Kejadian

Definisi:

Kejadian dinotasikan dengan K, adalah himpunan salah satu kemungkinan hasil. Kejadian merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Banyak anggota kejadian dinotasikan dengan $n(K)$.

Menentukan anggota suatu kejadian dapat dilakukan dengan cara mendaftar semua titik sampel, kemudian dipilihlah kejadian yang diharapkan muncul.

Peluang Kejadian

Menentukan peluang suatu kejadian sama halnya dengan menentukan besar kemungkinan munculnya kejadian tersebut. Peluang kejadian K, dinotasikan dengan $P(K)$ adalah banyak anggota kejadian K dibanding dengan banyak anggiota ruang sampel.

$$P(K)=\frac{n(K)}{n(S)} dengan\, 0 \leq P(K) \leq 1$$

Jika $P(K)$= 0 berarti K adalah kejadian mustahil terjadi

Jika $P(K)$= 1 berarti K adalah kejadian pasti terjadi.

Frekuensi Harapan

Jika percobaan dilakukan secara terus menerus secara berulang-ulang maka frekuensi harapan muncul suatu kejadian akan semakin besar. Frekuensi harapan kejadian K dinotasikan dengan $F_h(K)$.

Misalkan pada suatu percobaan yang diulang sebanyak m kali dan peluang kejadian K adalah $P(K)$, frekuensi harapan kejadian K adalah $F_h(K)=m.P(K)$

Kejadian Tidak Saling Lepas.

Dua kejadian yang dapat terjadi secara bersamaan disebut kejadian tidak saling lepas.

Jadi dua kejadian K_1 dengan K_2 dikatakan tidak saling lepas jika $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$. Peluang kejadian K_1 atau K_2 dinotasikan dengan $P(K_1 \cup K_2)$

$$P(K_1 \cup K_2)=P(K_1)+P(K_2)-P(K_1 \cap K_2)$$
$$=\frac{n(K_1)}{n(S)}+\frac{n(K_2)}{n(S)}-\frac{n(K_1 \cap K_2)}{n(S)}$$

Kejadian Saling Lepas

Dua kejadian yang tidak dapat terjadi secara bersamaan disebut kejadian saling lepas.

Jadi dua kejadian K_1 dengan K_2 dikatakan saling lepas jika $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Peluang kejadian K_1 dengan K_2 dinotasikan dengan $P(K_1 \cup K_2)$.

$$P(K_1 \cup K_2)=P(K_1)+P(K_2)$$
$$=\frac{n(K_1)}{n(S)}+\frac{n(K_2)}{n(S)}$$

Peluang Kejadian Bebas Stokastik

Dua kejadian yang tidak saling bergantung/mempengaruhi disebut kejadian bebas stokastik. Misalkan K_1 dengan K_2 adalah kejadian bebas stokastik, peluang K_1 dan K_2 dinotasikan dengan $P(K_1 \cap K_2)$

$$P(K_1 \cap K_2)=P(K_1).\,P(K_2)$$
$$=\frac{n(K_1)}{n(S)}\cdot\frac{n(K_2)}{n(S)}$$

Peluang Komplemen Kejadian

Misalkan K adalah suatu kejadian. Peluang kejadian bukan K, dinotasikan dengan $P(K^c)$ atau $P(K')$ adalah banyaknya anggota kejadian bukan K dibagi dengan banyaknya anggota ruang sampel. Peluang kejadian bukan K disebut juga peluang komplemen kejadian.

$$P(K^c) = \frac{n(K^c)}{n(S)}$$

Selain dengan menggunakan banyknya anggota kejadian bukan K, peluang komplemen K dapat juga ditentukan dengan menggunakan banyaknya anggota kejadian K.

$$P(K^c) = 1 - P(K)$$

Peluang koplemen kejadian K lebih mudah ditentukan dengan rumus $P(K^c) = 1 - P(K)$.

Peluang Kejadian Bersyarat

Kejadian bersyarat adalah dua kejadian pada suatu percobaan, kejadian yang satu terjadi dengan syarat kejadian yang lainnya telah terjadi.

Peluang kejadian A dengan syarat kejadian B telah terjadi adalah

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

EVALUASI BAB PELUANG

1. Diketahui angka-angka 1, 2, 3, 4, 5 dan 7 akan disusun bilangan yang terdiri atas 4 angka yang nilainya kurang dari 2000. Berapa banyak cara untuk menyusun bilangan-bilangan itu tidak boleh berulang.
2. Tiga keping mata uang logam dilemparkan secara bersamaan. Hasil yang mungkin muncul pada percobaan itu dapat dituliskan dalam bentuk pasangan berurutan.
   a. Berapa banyak titik sampel pada percobaan itu? Tuliskan ruang sampelnya.
   b. Tuliskan kejadian-kejadian berikut ini dengan menggunakan notasi himpunan.
   i. Kejadian munculnya dua sisi gambar.
   ii. Kejadian munculnya dua sisi angka.
   iii. Kejadian munculnya tiga sisi gambar.
   iv. Kejadian munculnya tiga sisi angka
   v. Kejadian munculnya ketiga sisi sama
   vi. Kejadian munculnya paling tidak satu sisi gambar.
   vii. Kejadian munculnya sekurang-kurangnya satu sisi angka.
   viii. Kejadian munculnya paling banyak dua sisi angka.
3. Empat bola diambil dari kantong yang berisi 8 bola merah dan 6 bola putih. Hitunglah peluang yang terambil adalah:
   a. Keempatnya bola putih.
   b. Keempatnya bukan bola putih.
   c. Paling banyak tiga bola putih.
   d. Sekurang-kurangnya satu bola merah.
4. Tiga keping mata uang logam dilemparkan secara bersamaan sebanyak 160 kali. Hitunglah frekuensi harapan untuk kejadian-kejadian berikut:
   a. Kejadian munculnya tiga sisi gambar.
   b. Kejadian munculnya tiga sisi angka.
   c. Kejadian munculnya satu sisi gambar dan dua sisi angka.
   d. Kejadian munculnya dua sisi gambar dan satu sisi angka
5. Peluang kejadian A adalah $P(A)=\frac{2}{3}$, peluang kejadian bersyarat $P(A/B)=\frac{3}{8}$ dan peluang kejadian bersyarat $P(B/A)=\frac{1}{2}$. Hitunglah:
   a. Peluang kejadian $P(A\cap B)$
   b. Peluang kejadian $P(A'\cap B')$