

# 近海海浪的建模与仿真研究

周蕊, 黎英, 朱龙

ZHOU Rui, LI Ying, ZHU Long

昆明理工大学 信息工程与自动化学院, 昆明 650500

Faculty of Information Engineering and Automation, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China

**ZHOU Rui, LI Ying, ZHU Long. Research on offshore wave modeling and simulation. Computer Engineering and Applications, 2016, 52(13): 243-247.**

**Abstract:** With the problem of normal JONSWAP spectrum unsuitable for offshore wave simulation, an improved JONSWAP spectrum is proposed, which added a depth factor based on study of the relationship between waveform parameters and water depth. Through analyzing the traditional wave fractal algorithm, it is found that large span of information transfer between adjacent interpolation points is the key reason of wave creases and spikes phenomenon. Therefore, a new threshold peak filtering algorithm using square-square fractal is proposed. The results of simulation experiment with OpenGL show that the improved JONSWAP spectrum is suitable for offshore wave simulation, which can generate realistic, smooth, soft shallow waves. The new fractal algorithm can effectively reduce the wave creases and spikes phenomenon. It has a good sense of reality and real-time, and can reach the purpose of shallow offshore simulation in real-time.

**Key words:** offshore simulation; improved JONSWAP spectrum; square-square segment method; threshold peak filtering algorithm

**摘 要:** 针对经典 JONSWAP 谱不适合模拟浅水海浪的问题, 在研究水深与波形参数关系的基础上, 提出了一种加入深度因子的改进 JONSWAP 谱。通过分析传统海浪分形算法, 得出相邻插值点之间信息传递跨度过大是产生波浪折痕、尖峰现象的主要原因。为此提出了一种新的方形-方形细分阈值滤尖峰算法。OpenGL 仿真结果表明, 改进的 JONSWAP 谱适合于模拟近海, 可以生成的逼真、平滑、柔和的浅水海浪。新的分形算法能有效地减少生成波浪的折痕、尖峰现象, 具有较好的真实感和实时性, 达到了近海浅水实时仿真的目的。

**关键词:** 近海模拟; 改进 JONSWAP 谱; 方形-方形细分法; 阈值滤尖峰算法

**文献标志码:** A **中图分类号:** TP391 **doi:** 10.3778/j.issn.1002-8331.1408-0190

## 1 引言

经过人们多年的研究, 已经建立了多种海浪模型, 实现了海浪的模拟。但当波浪传播到近海时, 受水深、地形、海底摩擦、海流作用及折射、破碎等的影响, 其波动性质发生了改变。近海浅水谱大部分是混合型的单峰海浪谱, 从谱的整个形状来看, 谱峰较高且窄, 谱形中有一个主峰, 而且在高频处至少有一个次峰。目前近海海浪仿真研究的方法主要有: 基于粒子系统造型法<sup>[1]</sup>、基于 Perlin 噪声法<sup>[2]</sup>和文氏方向谱法<sup>[3]</sup>。粒子系统造型法主要用于模拟近海破碎波浪。基于 Perlin 噪声模拟近海

海浪的方法是通过获取水面高度运动变化的噪声来构造海面, 虽然可以十分真实地模拟近海海面, 但因其计算复杂度较高, 只适用于生成近海小面积平静的海面。而文氏谱的特点是谱能量分布随着风浪状况和频率变化而变化, 能够仿真多变和近海海浪, 但因其计算复杂度较高, 没有得到广泛应用。

JONSWAP 谱从谱形来看, 只有一个主峰, 没有次峰, 谱能量主要集中于主峰处, 该谱中的谱峰提升因子  $\gamma$  用于修正主峰的形状, 使主峰变得更瘦高, 故该谱能逼真地模拟波浪随风区的细小变化。另外, 从谱的表达式

**作者简介:** 周蕊 (1988—), 女, 硕士研究生, 主要研究领域为海浪仿真建模及算法研究; 黎英 (1963—), 男, 博士, 教授, 主要研究领域为实景仿真建模与嵌入式并行研究, E-mail: li\_ying\_km@163.com; 朱龙 (1987—), 男, 硕士研究生, 主要研究领域为通信信号处理。

**收稿日期:** 2014-09-05 **修回日期:** 2014-11-27 **文章编号:** 1002-8331(2016)13-0243-05

**CNKI 网络优先出版:** 2015-04-02, <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2127.TP.20150402.0959.001.html>

来看,波幅的计算只与波形参数波长、频率、波数、波速、周期、风速、风向、风区长度有关,不能反映近海水深变化对谱形的影响。因此,JONSWAP谱显然不能模拟受水深变化而产生次峰较多的浅水谱形。本文第一步是在分析水深与波形参数——波长、频率、波数、周期之间的关系基础上,通过增加一个深度因子来克服JONSWAP谱能量过于集中于主峰的缺陷,使谱形产生次峰,可用于近海浅水波浪模拟。

为了表现海浪的细节,随机中点位移法<sup>[4]</sup>通过插值来细分网格,简化了计算复杂度,成为一种能实时模拟海浪的算法。常用的分形方法是菱形-方形细分法和三角细分法,它们都是通过取周围点的平均值来求新插值点,会导致相邻点之间信息传递跨度过大,而产生浅水波浪折痕、尖峰等问题。本文的第二步就是提出一种方形-方形细分的阈值滤尖峰算法来克服传统分形算法生成海浪的折痕、尖峰等问题。

## 2 改进的JONSWAP模型

### 2.1 JONSWAP模型

JONSWAP模型<sup>[5]</sup>可以表示为:

$$E_{\text{JONSWAP}}(f) = \frac{ag^2}{(2\pi)^4 f^5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right] \gamma^e \frac{f f_p^{-1}}{2\sigma^2} \quad (1)$$

其中,  $a=0.0081$ ,  $g=9.81 \text{ m/s}^2$ ;  $\gamma$  为谱峰提升因子,一般取 3.3,  $\sigma$  为峰形参数,其值为:  $\sigma = \begin{cases} 0.07, f \leq f_p \\ 0.09, f > f_p \end{cases}$ , 峰值频率  $f_p$ , 风区长度  $f$ , 峰值频率与风区长度的关系如下:

$$f_p = 3.5 \left( \frac{g^2 F}{U_{10}^2} \right)^{-0.33}$$

波浪传播方向的角度分布  $D(f, \delta)$ :  $D(f, \delta) = N_p^{-1} \cos^{2p}(\frac{\delta}{2})$ , 其中  $p = 9.77 \left(\frac{f}{f_p}\right)^\mu$ ,  $N_p = \frac{2^{1-2p} \pi \Gamma(2p+1)}{\Gamma^2(p+1)}$ ,  $\mu = \begin{cases} 4.06, f < f_p \\ -2.34, f \geq f_p \end{cases}$ 。

经过傅里叶逆变换即得波幅的计算公式为:

$$A(f) = \sqrt{\frac{E_{\text{JONSWAP}}(f) \times D(f, \delta) \times g}{kf}} \times \frac{\pi^2}{\Omega} \quad (2)$$

### 2.2 JONSWAP算法改进

通过分析上述模型下生成的频谱,只有一个主峰,没有次峰,其能量集中分布在很窄的频率范围,其能量从低频带到峰值迅速增大,从峰值到高频区平缓衰减,随着风速、风区的增大,峰值频率逐渐变小,即谱峰向低频方向移动。据海洋长期的观测结果<sup>[6-7]</sup>,在浅水区时,谱形中有一个主峰,而且在高频处至少有一个次峰,因此JONSWAP谱显然不能模拟这种次峰较多的浅水谱形。

波浪在从深水传播到浅水的过程中,随着深度的变化,会受到不同的地形、海底摩擦、海流作用的影响,由此使谱形产生较多的次峰,在JONSWAP谱的基础上,为了使谱峰产生次峰,需要研究水深与波形参数波长、频率、波数、周期之间的关系。

波浪根据水深的不同,可以分为深水、有限水深和浅水。设水深为  $h$ , 波长为  $\lambda$ ,  $\frac{h}{\lambda}$  为波浪的相对深度。波浪在传播时,是否受到地形、海底摩擦、海流作用及折射、破碎等的影响,取决于波浪的相对深度。根据水深为  $h$  的波数和频率满足的关系为:

$$\omega^2 = kg \tanh(kh) \quad (3)$$

而  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $c = \frac{\lambda}{T}$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  得:

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c} = \frac{2\pi}{kc}, \text{ 即 } \omega = kc \quad (4)$$

将式(4)带入式(3)得:

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) \quad (5)$$

根据水文资料<sup>[6-7]</sup>表明当水深与波长满足  $\frac{h}{\lambda} \geq \frac{1}{2}$  关系时,为深水,则  $kh = \frac{2\pi h}{\lambda} \geq \pi$ , 而查表可得  $\tanh \pi = 0.9965 \approx 1$ , 于是式(5)可化简为:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (6)$$

表明深水时,波浪传播的速度与深度  $h$  无关。

同理当  $\frac{h}{\lambda} \leq \frac{1}{20} \approx 0.05$  时,为浅水,不能满足深水时的近似关系,则波速与水深、波数的为:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \quad (7)$$

说明浅水时,波浪传播的速度随着水深的变化而变化。对比上式(6)、(7),可得在深水条件和浅水条件下波数  $k$  之间的关系为:

$$k_{\text{深}} = \frac{k_{\text{浅}}}{\tanh(k_{\text{浅}} h)} \quad (8)$$

而上述JONSWAP模型是在假定深水下建立的模型,故上式(2)需要将  $k$  的值加以修正,修正为:

$$A(f) = \sqrt{\frac{E_{\text{JONSWAP}}(f) \times D(f, \delta) \times g}{f \times (k / \tanh(kh))}} \times \frac{\pi^2}{\Omega} \quad (9)$$

由波数  $k$  与频率的关系:

$$k = \frac{4\pi^2 f^2}{g} \quad (10)$$

将式(10)带入式(9)得:

$$A(f) = \sqrt{\frac{E_{\text{JONSWAP}}(f) \times D(f, \delta) \times g^2 \times \tanh\left(\frac{4\pi^2 f^2 h}{g}\right)}{4f^3 \Omega}} \quad (11)$$

修正后的模型说明,波幅  $A$  会随着频率  $f$ 、水深  $h$ 、方向角的变化而变化,更适合浅水波谱的特性。

### 2.3 改进的JONSWAP算法验证

使用 VC++ 和 OpenGL<sup>[8-9]</sup> 及 MATLAB 在的 PC 机上实现了三维海浪运动的模拟,图 1 为风速 5 m/s,风向 180°,截取长度 20 km,水深 50 m 模拟近海海面的比较。

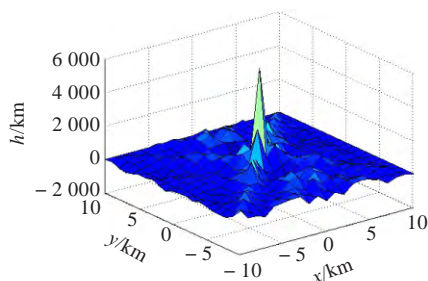


图 1(a)  $E_{\text{JONSWAP}}(f)$  下风速 5 m/s 海浪表面

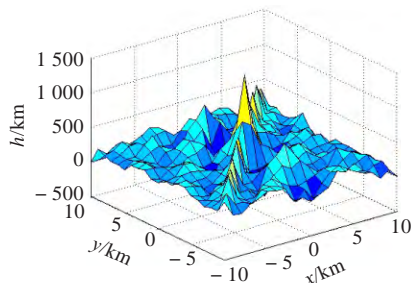


图 1(b) 改进算法下风速 5 m/s 海浪表面

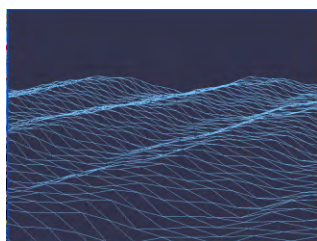


图 1(c)  $E_{\text{JONSWAP}}(f)$  下风速 5 m/s 海浪网格

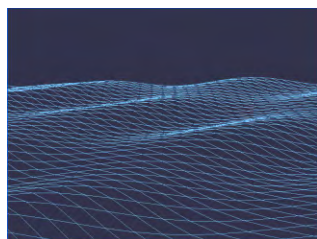


图 1(d) 改进算法下风速 5 m/s 海浪网格

从图 1(a)、(b)可以看出,在选取截取长度为 10 km×10 km 大小的海域范围内,JONSWAP 模型下的主峰达到 3 m 以上,而改进的算法模型下,主峰明显降低到 0.5 m,并且在主峰的周围产生较多的次峰。

同样从图 1(c)、(d)可以看出,JONSWAP 模型模拟的浅水波浪明显失真,画面粗糙不光滑,有尖锐的突兀现象;而改进的算法因为考虑到水深与波形要素之间的关系,使谱形增加了次峰,因而生成的浅水海浪网格波形更加逼真,画面更加平滑、柔和,说明改进算法更适合模拟近海海浪。

### 3 方形-方形细分的阈值滤尖峰法的近海海浪仿真

分形算法中随机中点位移法是通过两点之间插值再加上一定的随机量,经过多次迭代生成海浪网格,其以算法复杂度低,能增加海面的细节,易于控制调节海浪状况而广泛应用。随机中点位移网格细分的常用方法是:菱形-方形细分法和三角形细分法<sup>[10-12]</sup>。菱形-方形细分法是先计算正方形 4 个端点的平均值得到正方形的中点,然后取原正方形 4 条边的中点,这样就得到 4 个新正方形,依次类推,第一次分形得到 4 个新正方形,生成 9 个点,第二次细分产生 25 个点,经过多次迭代,将生成的点连接起来就可以生成一个与真实海浪形状很接近的曲面。三角形细分法也与此法类似,但是这两种细分方法都是通过取周围点的平均值来求新插值点,即周围点对新插值的点贡献是均等的,这样就会导致相邻点之间信息传递跨度过大,故生成的浅水波浪折痕、尖峰问题较为明显。

针对以上海浪网格中的折痕、尖峰问题,本文提出一种方形-方形细分的阈值滤尖峰算法,其基本思想与分形地形模拟算法方法中的分形算法类似,首先在改进的 JONSWAP 谱基础上,提出方形-方形细分法生成静态海面,即细分过程中,插值点的确定是根据周围点距离远近按不同权值叠加,从而保证周围四点对插值点的贡献大小是不相等的,克服了菱形-方形细分法中相邻点之间的信息传递跨度过大的缺陷,解决了生成海浪网格模型中的折痕问题。同时提出了一种阈值判断的尖峰滤除处理方法,来消除细分中随机参数的不可预见性和不可控性而导致的海浪网格尖峰现象。可以通过控制阈值  $f$  的大小,对不同波浪尖峰进行滤除。当阈值  $f$  的大小适中时,不仅能滤除网格中的尖峰,提高仿真逼真性,还能一定程度上提高仿真的实时性,构成方形-方形阈值尖峰滤除的近海海浪仿真模型。

其具体步骤如下:

**步骤 1** 在水平面  $OXY$  上取正方形  $ABCD$  为基平面,设空间任一点  $S(x, y, z)$  的水平投影在  $ABCD$  平面内,则其高度坐标  $Z$  可用以下方法求得,如图 2 所示设正方形基平面  $ABCD$  的 4 个角点的高度已知,其值分别为  $Z_A, Z_B, Z_C, Z_D$ 。则该正方形中插值点的高度值  $Z_M$  由其周围四点按 9:3:3:1 的权值再加上一个随机扰动得到,即

$$Z_M = \frac{9}{16}Z_A + \frac{3}{16}Z_B + \frac{3}{16}Z_C + \frac{1}{16}Z_D + D_0 \quad (12)$$

其中  $D_0$  是随机高斯变量。

如图 2 所示,插值点  $E$  的值由其距离周围  $A, B, C, D$  这 4 点的距离按 9:3:3:1 的权值得到,即距离  $E$  点最近的  $A$  点的权值最大为 9/16,距离  $E$  点最远的点  $D$  的权值最小为 1/16,剩下的两点  $B, D$  与  $E$  的距离相同,权



值都为3/16。这样经过一定次数的迭代,当三维点数量达到一定要求时,就可以生成一个与真实海浪形状很接近的曲面。

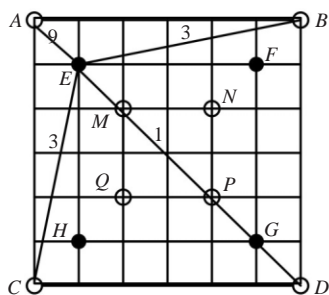


图2 方形-方形细分算法

步骤2 对于迭代网格中的某点  $O$  点,与其在同一网格线上的4点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  (如图3),将它们高度值与  $O$  点值分别相减,再求和,即

$$M = (Z_A - Z_O) + (Z_B - Z_O) + (Z_C - Z_O) + (Z_D - Z_O) \quad (13)$$

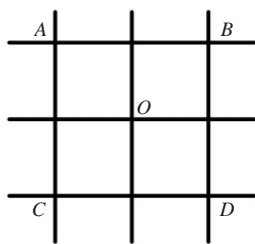


图3 阈值尖峰滤除算法

步骤3 根据曲面上尖峰周围点的大小,确定阈值  $f$ 。阈值  $f$  的取值范围为0~1,阈值  $f$  与尖峰平滑处理的关系为:

$$Z_1 = f \times Z_M \quad (14)$$

当  $f \rightarrow 1$  时,  $Z_1$  趋近于  $Z_M$ ,表示不对曲面上的尖峰进行平滑处理,当  $f \rightarrow 0$  时,  $Z_1$  趋近于很小的数值,表示将曲面上所有的尖峰都进行平滑处理,但其数据处理量较大,严重影响仿真的实时性。根据本文的实验结果,当  $f$  控制在0.629附近变化时,生成的波浪尖峰现象显著减小,且不影响仿真的实时性,故本文选取的阈值  $f \approx 0.629 \approx \frac{17}{27}$ ,将  $f$  的值和式(12)带入式(14),即:

$$Z_1 = f \times Z_M = \frac{17}{27} \left( \frac{9}{16} Z_A + \frac{3}{16} Z_B + \frac{3}{16} Z_C + \frac{1}{16} Z_D + D_0 \right)$$

化简得:

$$Z_1 = \frac{1}{6} (Z_A + Z_B + Z_C + Z_D + 2Z_0) + D_0 \quad (15)$$

步骤4 判断某一点的  $M$  值与阈值  $f$  的关系。如果  $M > f$ ,即对该点进行尖峰滤除平滑处理。若检测到  $O$  点需要进行尖峰滤除处理,则  $Z_1$  的值如式(15)所示,用  $Z_1$  的值替换  $Z_M$  的值,即对尖峰处进行均值平滑处理,然后继续访问,直到访问和处理完曲面内所有的尖峰。

步骤5 将生成的网格点施加正弦函数,实现动态的海面效果:

$$y(x, z, t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(k_i x - \omega_i t + \varphi_i) \cdot \cos(k_i z - \omega_i t + \varphi_i) \quad (16)$$

步骤6 通过纹理映射渲染海面<sup>[13-14]</sup>。

## 4 仿真与分析

菱形-方形细分法<sup>[10]</sup>与本文算法仿真效果的比较:

用帧速测试工具 Fraps 进行测试(测试条件: CUP 2.26 GHz,内存 2.26 GB,显卡 NVIDIA GeForce 9200MG),在满足每秒32帧的实时性条件下,两种方法生成的海浪如图4所示。

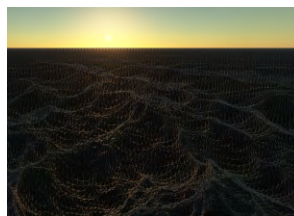


图4(a) 菱形-方形细分法的海浪网格

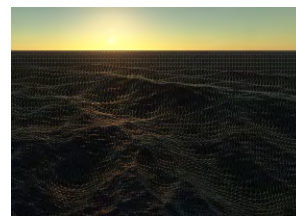


图4(b) 方形-方形尖峰滤除法的海浪网格

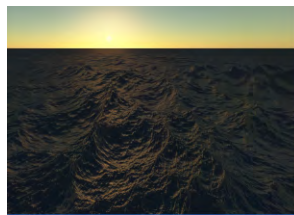


图4(c) 菱形-方形细分法渲染后的海浪

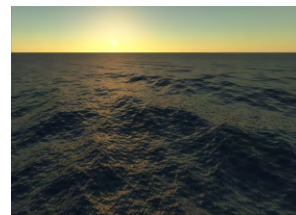


图4(d) 方形-方形尖峰滤除法渲染后的海浪

从图4(a)~图4(d)可以明显看出:菱形-方形生成的海浪折痕、尖峰效果明显,使得生成的实际海浪画面不流畅,真实感不强,而方形-方形尖峰滤除法得到的海浪画面很流畅,真实感更强,能有效地减少尖峰现象。

表1为菱形-方形细分法和方形-方形阈值滤尖峰算法生成海浪的实时性比较结果。由于此算法中可以根据周围点距离远近按不同权值动态地添加插值点,通过控制阈值  $f$  的大小,对不同的波浪尖峰进行滤除,使模拟波浪效果更加柔和,从而在一定程度上减少了乘法运算的复杂度,这样不仅能够有效地减少由于插值点间信息跨度大造成绘制波浪的折痕现象,还可以通过阈值滤波来减少随机参数不可预见性和不可控性而导致的尖峰现象。同时通过比较可以看出,在相同风力和迭代次

表1 实时性比较

风力级	迭代次数	菱形-方形细分算法/(帧·s <sup>-1</sup> )	方形-方形阈值滤尖峰算法/(帧·s <sup>-1</sup> )
1	6	33	31
3	7	27	26
6	8	24	24

数的条件下,本文所提出算法与方形-菱形细分法相比,并未牺牲算法的实时性。

## 5 结论

针对 JONSWAP 谱模型不能模拟谱形为次峰较多的浅水谱的缺陷,本文提出一种适合于浅海环境下的改进 JONSWAP 谱,通过增加深度因子,使 JONSWAP 谱能产生次峰。仿真结果表明,改进算法因为考虑到水深与波形要素的关系,生成的浅水海浪网格波形更加逼真、平滑,画面更加柔和,更适合模拟近海海浪。

为表现海浪细节,还提出了一种方形-方形细分的阈值滤尖峰算法来克服传统分形算法生成海浪的折痕、尖峰等问题。通过方形-方形细分法计算海浪曲面的插值点,同时控制阈值的大小,对曲面的不同尖峰进行滤除,完成海面网格点的绘制;再将生成的网格点施加以正弦函数,最后通过纹理渲染海面,实现动态近海海浪的绘制。仿真结果表明,该算法不仅可以减少近海海面模拟的折痕、尖峰问题,具有较高的逼真度,而且不增加计算复杂度,且实时性高。

## 参考文献:

- [1] Akinci N, Cornelis J, Akinci G, et al. Coupling elastic solids with smoothed particle hydrodynamics fluids[J]. Computer Animation and Virtual Worlds, 2013, 24 (3/4): 195-203.
- [2] Lagage A, Lefebvre S, Cook R, et al. A survey of procedural noise functions[J]. Computer Graphics Forum, 2010, 29(8): 2579-2600.
- [3] Ji Qiaoling, Dong Sheng, Zhao Xizeng, et al. Numerical simulation of multi-directional random wave transformation in a yacht port[J]. Journal of Ocean University of China, 2012, 11(3): 315-322.
- [4] Jilesen J, Kuo J, Lien F S. Three-dimensional midpoint displacement algorithm for the generation of fractal porous media[J]. Computers and Geosciences, 2012, 46: 164-173.
- [5] Annenkov S Y, Shrira V I. Evaluation of skewness and kurtosis of wind waves parameterized by JONSWAP spectra[J]. Journal of Physical Oceanography, 2014, 44(6): 1582-1594.
- [6] Eldeberky Y. Nonlinear effects in gravity waves propagating in shallow water[J]. Coastal Engineering Journal, 2012, 54(4): 28-42.
- [7] 夏震寰. 现代水力学(四)波浪力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992: 89-91.
- [8] 庄建东, 曾勇进. 三维海浪造型的研究[J]. 计算机系统应用, 2013, 22(10): 143-146.
- [9] Wright R S, Lipchak Jr B. OpenGL 超级宝典[M]. 5版. 北京: 人民邮电出版社, 2012.
- [10] Laizet S, Vassilicos J C. Fractal space-scale unfolding mechanism for energy-efficient turbulent mixing[J]. Physical Review E, 2012, 86(4/2): 483.
- [11] Anderson W, Meneveau C. Dynamic roughness model for large-eddy simulation of turbulent flow over multi-scale, fractal-like rough surfaces[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2011, 679: 288-314.
- [12] 张润花, 刘树群, 赵付青. 地形生成的细分随机移位方法[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 2012, 46(5): 533-536.
- [13] Romolo A, Arena F, Laface V. A generalized approach to the mechanics of three-dimensional nonlinear ocean waves[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2014, 35: 96-107.
- [14] Yu Qizhi, Neyret F, Steed A. Feature-based vector simulation of water waves[J]. Journal of Computer Animation and Virtual Words, 2011, 22(2/3): 91-98.
- [5] 赖亮光, 郑明贵, 袁怀雨. 基于可持续发展的金属矿山地下开采扩建生产规模研究[J]. 中国矿业, 2009, 18(10): 67-73.
- [7] 罗周全, 徐海, 谭浪浪, 等. 矿山产能灰色局势决策优化[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2013, 44(1): 289-293.
- [8] 王红胜, 张东升, 李树刚, 等. 矿井合理生产能力的决策与应用[J]. 西安科技大学学报, 2009, 29(6): 666-671.
- [9] 卢宏建, 高永涛, 吴顺川, 等. 石人沟铁矿露天转地下开采生产规模优化[J]. 北京科技大学学报, 2008, 30(9): 967-971.
- [10] 刘浪, 陈建宏, 郑海力. 模糊预测型线性规划在矿山产能分配中的应用[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2012, 43(2): 611-619.
- [11] 郭嗣琮. 模糊分析中的结构元方法(I)[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2002, 21(5): 670-673.
- [12] 郭嗣琮. 模糊分析中的结构元方法(II)[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2002, 21(6): 808-810.
- [13] 刘海涛, 郭嗣琮. 基于结构元方法的变量模糊的线性规划[J]. 系统工程理论与实践, 2008(6): 94-100.
- [14] 曾庆宁. 含等式约束的全系数模糊线性规划[J]. 系统工程理论与实践, 2000(9): 105-109.
- [15] 赵海坤. 模糊线性规划理论的模糊结构元解法研究[D]. 辽宁葫芦岛: 辽宁工程技术大学, 2009: 28-40.
- [16] 张增科. 模糊数学在自动化技术中的应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [17] 李荣钧. 模糊多准则决策理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

(上接 231 页)