

文章编号:1001-4500(2014)05-0021-08

# 基于流函数理论的波浪非线性及洋流作用下 动力特性研究

邵钰清, 许成顺

(北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124)

**摘 要:** 为了更好地模拟实际波浪的非线性和洋流的影响, 该文介绍了一种适用范围广, 边界条件拟合好, 可考虑洋流作用的非线性波浪理论——流函数波浪理论。将流函数波浪理论计算得到的部分结果与线性波浪理论计算得到的相关结果进行比较, 结果表明流函数波浪理论能够很好地考虑波浪的非线性; 初步探讨了流函数波浪理论在考虑洋流作用方面的优势; 最后推导了流函数波浪理论在海底的随时空分布的波压力公式, 比较了非线性波浪荷载与线性波浪荷载。

**关键词:** 流函数理论; 洋流; 波压力公式; 非线性波浪荷载; 线性波浪荷载

**中图分类号:** TV312

**文献标识码:** A

## Study on Wave Nonlinearity and Dynamic Characteristics under Currents on Stream Function Theory

SHAO Yu-qing, XU Cheng-shun

(The Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering, Beijing University  
of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** To simulation nonlinearity and the impact of ocean currents of actual wave, stream function wave theory which is a wide scope, good boundary conditions, considering currents nonlinear wave theory is introduced. Part of the results with related results calculated by linear wave theory obtained were compared, the results show that the stream function wave theory can consider nonlinearity of wave well; the advantages of the stream function wave theory in considering the role of ocean currents is explored; wave pressure formula for the distribution of time and space on the seabed is derived in the last, nonlinear wave load with linear wave load is compared.

**Key words:** stream function theory; current; wave pressure formula; nonlinear wave load; linear wave load

## 0 引言

在海洋工程中, 浅层海浪和深层洋流是常态情况。海洋表面传播的波浪在海床表面产生了往复的波压力, 在这种循环波压力作用下, 海洋地基或海床土体内的有效应力场和超静孔隙水压力场都随着时间和空间

收稿日期: 2014-05-12

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目资助(2011CB013600)。

作者简介: 邵钰清(1988-), 男, 硕士研究生。

位置而变化。洋流是海洋中的海水沿一定路径大规模流动形成的,其大小与方向的分布也影响着海洋工程结构物的受力与稳定安全。海上建筑物在寿命期内的绝大部分时间中都在承受着连续不断的小风浪和洋流作用,海浪和洋流的存在会造成海洋结构的疲劳破坏以及海床地基的失稳,严重者会造成巨大的生命和财产损失。在以往的研究中,模拟波浪最常用的是线性波理论和斯托克斯理论,不能很好地体现波浪的非线性和洋流的作用。为了海洋结构物及海床地基的稳定性,必须对实际波浪有更好的模拟。

目前研究波浪作用一般有两个研究方向。一个方向是从流体力学的角度研究液体内部各质点的运动状态,其中又分线性波浪理论和非线性波浪理论;另一个方向是将海面的波动看做是一个随机过程,通过研究其随机性来揭示海浪内部的波动能量的分布特性。当然,后一个方向的研究,也需要应用流体力学理论对处于理想波动状态下的液体内部各质点的运动规律进行描述<sup>[1]</sup>。

线性波浪理论在应用中通常采用 Airy 线性波理论,非线性波浪理论常用的有斯托克斯高阶波浪理论、椭圆余弦波理论、孤立波理论,这些波浪理论有各自的适用范围和边界拟合条件,图 1 给出了不同波浪理论的适用范围。

由图 1 可见,各种波浪理论适用范围都很窄,学者们一直以来都在探索一种适用范围更广、精确度更高的波浪理论。自 20 世纪 60 年代 Dean 发展了基于流函数的波浪理论<sup>[2-4]</sup>以来,一定程度上很好地解决了这个问题。非线性流函数波浪理论具有使用范围广、可扩展到任意阶数、拟合条件好、能够考虑洋流作用等优点,但是流函数解的待定系数的确定十分复杂,限制了它的应用和推广。此后又有不少研究者如 Dalrymple<sup>[5]</sup>、Huang 等<sup>[6]</sup>对该理论进行了发展和完善,从而使它能够更好地模拟实际波浪,也更方便地为工程人员所应用。

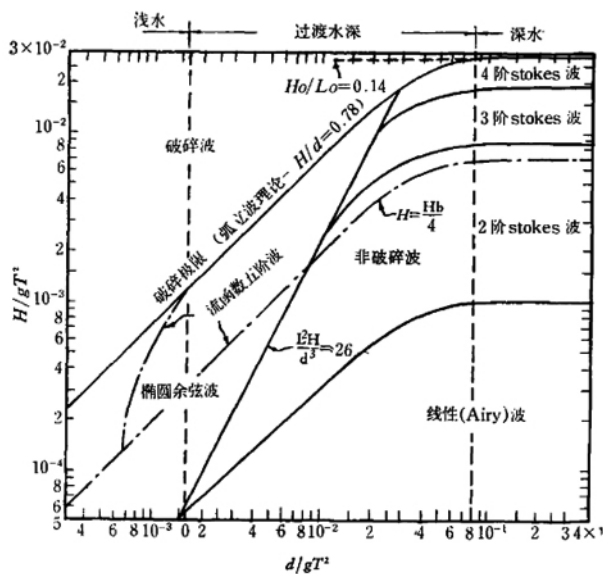


图 1 不同波浪理论应用范围

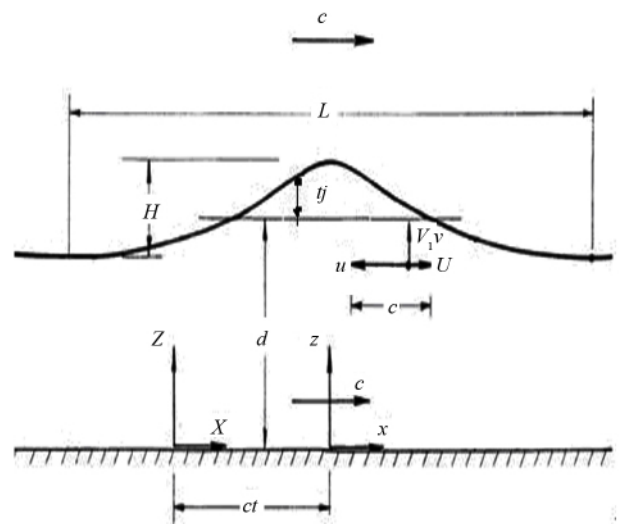


图 2 波浪传播示意

## 1 流函数波浪理论基本方程

### 1.1 基本方程

假设流体为无旋且不可压缩的流体,海浪传播示意图如图 2 所示。

流体内部连续方程(Laplace 方程)为:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{流函数} \quad \Psi(X, Z, t) = \sum_{n=1}^N X(n) \sinh[nk(d+Z)] \cos(nkX - n\omega t) \quad (2)$$

速度势  $\phi$  与流函数  $\psi$  是共轭调和函数,满足柯西黎曼方程,可得速度势函数:

$$\phi(X, Z, t) = \sum_{n=1}^N X(n) \cosh[nk(d+Z)] \sin(nkX - n\omega t) \quad (3)$$

取行进波的速度  $C = L/T$  下的运动坐标系,这样会带来很大方便。因为在一个随波形做平移运动的坐标系内观察规则波及其引起的流动,面对的即是一个相对静止的自由水面轮廓和各物理量都不随时间变化的定常流场,情况会得到简化。

$$\text{坐标变换} \quad x = X - Ct \quad (4)$$

$$z = Z \quad (5)$$

流函数方程变换为:

$$\Psi(x, z) = \frac{L}{T}z + \sum_{n=1}^N X(n) \sinh[nk(d+z)] \cos(nkx) \quad (6)$$

## 1.2 边界方程

海底边界条件 ( $y = 0$ ), 通常假设为无渗透水平边界:

$$v = 0 \quad (7)$$

波浪自由面 ( $y = \eta(x)$ ) 处需满足运动自由面方程和动力自由面边界:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] + g\eta = Q_B \quad (9)$$

同时波浪在时间和空间上具有周期特性,因此流函数还应满足下列边界条件:

$$\phi(x, z, t) = \phi(x + L, z, t) \quad (10)$$

$$\phi(x, z, t) = \phi(x, z, t + T) \quad (11)$$

波面方程为:

$$\eta = \frac{\phi_\eta}{(L/T)} - \frac{1}{(L/T)} \sum_{n=1}^N X(n) \sinh\{nk(d+z)\} \cos nkx \quad (12)$$

水平速度:

$$u - C = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{L}{T} - \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^N nX(n) \cosh\left[\frac{2\pi n}{L}(d+z)\right] \cos\left[\frac{2\pi n}{L}x\right] \quad (13)$$

竖向速度:

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^N nX(n) \sinh\left[\frac{2\pi n}{L}(d+z)\right] \sin\left[\frac{2\pi n}{L}x\right] \quad (14)$$

不难验证,流函数自动满足 Laplace 方程、底面边界条件、周期性条件和运动自由面边界条件,唯一非自动满足的是动力自由面方程。至此问题便归结为在给定波浪参数(波高  $H$ , 波浪周期  $T$  和水深  $d$ ) 情况下,流函数能最好的满足动力自由面方程的  $X(n)$  的求解。Dean 和 Dalrymple<sup>[7]</sup> 采用最小方差准则确定待定系数,刘书攻等<sup>[8]</sup> 应用摄动法进行了求解。

## 2 非线性波浪特性计算

流函数波浪理论可以很好地考虑非线性对波浪的影响,并且对浅水至深水范围内的波浪都有较好的模拟。通过编制 Fortran 程序,下面扼要地叙述用流函数波浪理论计算法得到的一些波浪运动特性,并与 Airy 线性波浪理论所得到的计算结果进行比较,结果都采用无量纲化,以便于比较。

### 2.1 波长与波速

当已知波浪要素波高  $H$ , 波浪周期  $T$  和水深  $d$  时,由流函数波浪理论计算所得的相对波长  $\frac{L}{d}$  及无因次

波速  $\frac{c}{\sqrt{gd}}$  与  $\frac{H}{d}$  及  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  的关系如图3、图4所示。

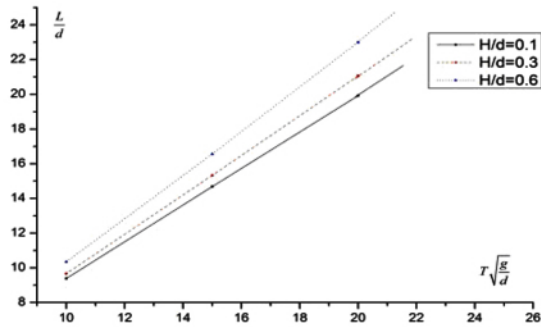


图3 波长参数分析

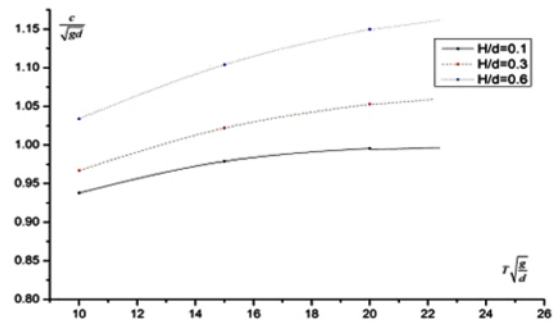


图4 波速参数分析

表1 流函数波浪理论与线性波浪理论波长波速参数比较

$\frac{H}{d}$	$T\sqrt{\frac{g}{d}}$	$L/d$		$L_s/L_A$	$\delta = \frac{L_s - L_A}{L_s}$
		流函数波浪理论	线性波		
0.1	10	9.385	9.335	1.005	0.5%
	20	19.93	19.662	1.014	1.4%
0.3	10	9.668	9.334	1.036	3.5%
	20	21.064	19.661	1.071	6.6%
0.6	10	10.3484	9.339	1.108	9.7%
	20	23.0044	19.670	1.170	14.5%

表1中列出了用流函数波浪理论计算所得的相对波长  $\left(\frac{L}{d}\right)_s$  与 Airy 线性波理论  $\left(\frac{L}{d}\right)_A$  的比较。从表1中可见,在浅水地区,对于相对波高较大的长波,流函数波浪理论计算的相对波长大于线性波理论。但是对于  $\frac{H}{d} \leq 0.3$ ,  $T\sqrt{\frac{g}{d}} \leq 20$  的波浪范围,由线性波理论所得的相对波长与流函数波浪理论计算结果差别较小,但相对波高增大时,两者的差别就比较明显了。

## 2.2 波剖面形状

不同条件下,波浪剖面图如图5所示。

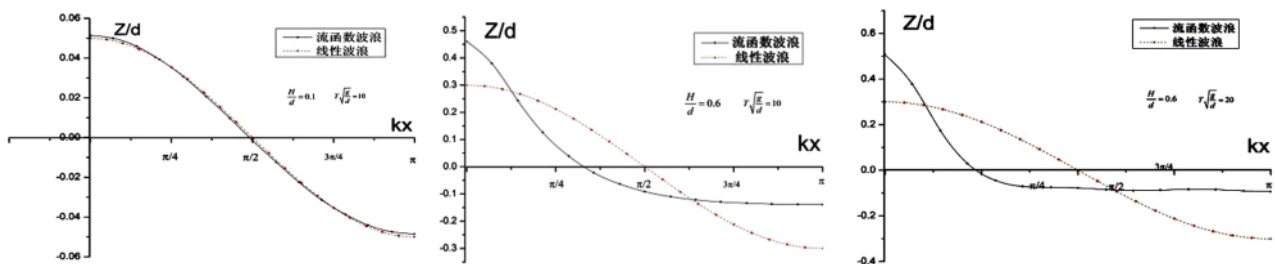


图5 波浪剖面图

对于相对波高  $\frac{H}{d}$  较小,  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  也较小的情况下,流函数波浪与线性波浪差别不大,基本重合。当  $\frac{H}{d}$  增

大,  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  增大时, 流函数波浪波峰变陡。由流函数波浪理论计算所得的波剖面波峰部分较陡, 波谷部分平坦, 此时与线性波浪理论有很大差别, 这是由于波浪的非线性所引起的。

波峰顶在静水面以上的相对高度  $\frac{\eta_c}{H}$ , 在线性波理论中, 它始终等于 0.5, 与  $\frac{H}{d}$  及  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  无关, 而流函数波浪理论计算结果的趋势则是, 随着  $\frac{H}{d}$  及  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  的增大而增大, 即波浪的非线性影响越大, 波峰顶高出静水面的值就越大。

### 2.3 自由水面及水底的流速分布

由流函数波浪理论所得的表面水平流速  $u_s/\sqrt{gd}$  及表面竖向流速  $v_s/\sqrt{gd}$  的分布规律如图 6、图 7 所示。

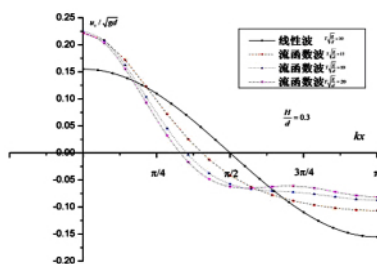


图 6 自由面水平流速分布

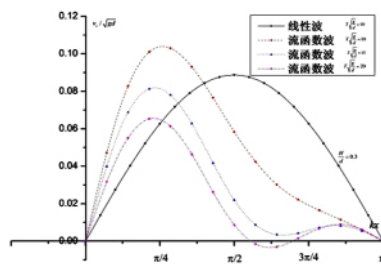


图 7 自由面竖向流速分布

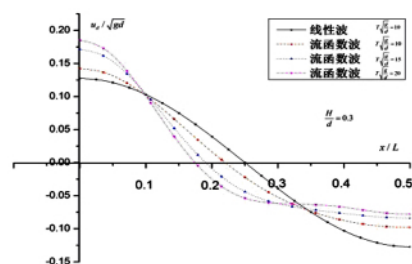


图 8 海底水平流速分布

由图 8 可见, 表面水平流速的分布与波剖面形状相似, 其最大水平流速  $u_{s\max}$  出现在波峰顶处, 而最小水平流速  $u_{s\min}$  则出现在波谷底处, 这与线性波理论是相同的, 但  $|u_{s\max}/u_{s\min}|$  之值则较线性波理论大很多。对于线性波理论, 此比值不随  $\frac{H}{d}$  及  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  值而异, 均为 1.0, 而流函数波浪理论计算结果则随  $\frac{H}{d}$  及  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  的增大而增大, 例如对于  $\frac{H}{d}=0.3$  的情况, 当  $T\sqrt{\frac{g}{d}}=10$  时,  $|u_{s\max}/u_{s\min}|=2.084$ , 而当  $T\sqrt{\frac{g}{d}}=20$  时, 此比值增至 2.724。此外, 对于表面水平流速, 除了比值的变化外,  $u_{s\max}$  总是大于线性波理论的结果, 且随  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  的增大而不断增大, 而  $|u_{s\min}|$  则总是小于线性波理论的结果, 且随  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  的增大而不断减小。

对于表面竖向流速的分布, 则数值计算结果与线性波理论的差异很大, 对于线性波理论,  $V_{s\max}$  总是出现在  $kx = \frac{\pi}{2}$ , 但对于流函数波浪理论计算的结果, 则  $V_{s\max}$  出现的位置向波峰顶靠近, 且随  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  的增大而向波峰顶靠拢。

由流函数波浪理论计算所得的海底水平流速  $u_d/\sqrt{gd}$  沿波长的分布如图 8 所示。由图 8 可知, 它的变化规律与自由水面的水平流速的变化规律是一致的。流函数波浪理论所得的  $|u_{d\max}/u_{d\min}|$  的比值也都是大于 1, 且随  $\frac{H}{d}$  及  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  的增大而增大, 例如对于  $T\sqrt{\frac{g}{d}}=10$ , 当  $\frac{H}{d}=0.1$ , 流函数波浪理论计算所得的比值  $|u_{d\max}/u_{d\min}|=1.198$ , 而当  $\frac{H}{d}=0.3$  时, 此比值增至 1.453, 如果把  $T\sqrt{\frac{g}{d}}$  增至 20, 此时比值将再增至 2.374。至于  $u_{d\max}$  也总是大于线性波理论的结果, 而  $|u_{d\min}|$  也总是小于线性波理论的结果。

### 2.4 最大水平流速

对于最大表面水平流速, 流函数波浪理论计算的结果  $(u_{d\max})_s$  较线性波理论大。例如当  $\frac{H}{d}=0.3$ ,  $\frac{L}{d}=$

9.6 时,  $|(u_{s\max})_s/(u_{s\min})_A| = 1.12$ 。当  $\frac{H}{d}$  较大时,  $\frac{L}{d}$  值对  $u_{s\max}$  的影响较小。

对于最大底流速  $u_{d\max}$ , 流函数波浪理论计算结果一般均较线性波理论大, 只有对大波高, 短周期的波浪, 有时流函数波浪理论计算所得的最大底流速反而比线性波理论为小。

### 3 波、流共同作用下波浪运动的特性

在实际海洋环境中, 波浪和洋流的相互作用将引起波浪运动和流场的变化。对于波、流场, 顺流时将使波高减小而波长增长, 逆流时将使波高增大而波长缩短。有时, 即使是一些微小的变化幅度对于工程计算也是不容忽视的, 当然这也将带来水质点运动速度和加速度的变化进而影响对海床和工程建筑物的作用力。

流函数波浪理论可以方便地考虑洋流的作用<sup>[2]</sup>, 一般在流函数波浪理论里将洋流考虑成常剪切流或线性剪切流(如图9所示), 此时流函数形式如下:

$$\Psi(x, z) = -\left(u_c - \frac{L}{T}\right)z + \sum_{n=1}^N X(n) \sinh[nk(d+z)] \cos(nkx) \quad (15)$$



图9 两种剪切流的考虑形式

#### 3.1 流对波长与波速的影响

当已知流中波高  $H$ , 波周期  $T$ , 水深  $d$  及洋流流速  $u_c$  时, 由计算结果可知, 顺流使波速增大, 波长增长, 即波陡变小, 逆流使波速减小, 波长缩短, 即波陡增大。部分计算结果见表2, 表中  $L_c$  为流中波长,  $L_0$  为无流时的波长,  $C_c$  为流中波速,  $C_0$  为无流时的波速。

表2  $\frac{L_c}{L_0}$  (或  $\frac{C_c}{C_0}$ ) 比值表

$\frac{H}{d} =$	0.1		0.3	
$T\sqrt{\frac{g}{d}} =$	10	20	10	20
$u_c / \sqrt{gd} =$	-0.3	0.582	0.675	0.599
	-0.2	0.740	0.785	0.747
	-0.1	0.875	0.892	0.878
	0.1	1.119	1.101	1.121
	0.2	1.235	1.202	1.236
	0.3	1.349	1.299	1.349

从表2中可见, 随着正、反向水流的增大, 洋流对波长与波速的变化也开始变大。相对波高大、周期短的情况比相对波高小、周期短的情况, 流对波长及波速的影响要大。相对波高大、周期长的情况比相对波高小、

周期长的情况,流对波长及波速的影响要小。对于  $\frac{H}{d} = 0.3$ ,  $T\sqrt{\frac{g}{d}} = 10$  的情况,计算结果表明,即使在水流速  $u_c/\sqrt{gd} = 0.1$  的条件下,  $\frac{L_c}{L_0}$  也可达到 1.121,即波长与波速将比无流时增大 12.1%,如果  $u_c/\sqrt{gd} = 0.3$  时,  $\frac{L_c}{L_0}$  将达到 1.349,即波长与波速将增大 34.9%。因此在有流存在的水域,波浪越接近岸边,波速和波长将发生显著的变化。

至于流对不同周期的波的影响,则短周期波的波长与波速的变化要比长周期波的变化大,因为长周期波本身的波速较大,而水流速度一般不会变化太大,这样一个较小的水流速度将不致引起较大的波速有很大的变化。

### 3.2 波、流场内的波剖面

当水深变得很浅时,由于海底摩擦及渗透等作用而使波剖面产生扭曲翻卷,波浪运动更为复杂。对于仍属对称的波剖面,流函数波浪理论计算结果表明,顺流将使波形的波峰部分的剖面曲线变得更陡,波峰顶离静水面的高度将增大,而波谷底离静水面的深度则减小,逆流将使波形的波峰部分的曲线变得平坦一些,波峰顶高度减小一些,而波谷底深度则增大一些。图 10 为  $\frac{H}{d} = 0.3$ ,  $T\sqrt{\frac{g}{d}} = 15$  时,  $u_c/\sqrt{gd} = 0$  的  $\pm 0.1$  波剖面形状的比较。

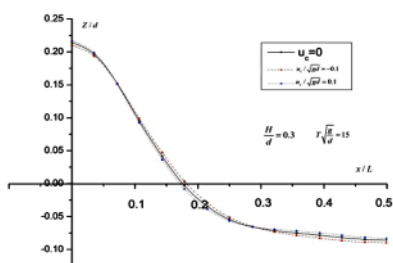


图 10 流对波剖面形状的影响

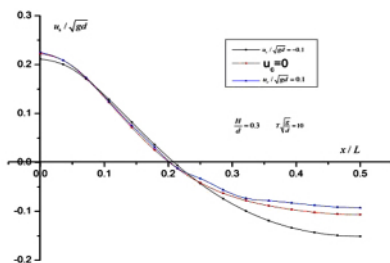


图 11 流对自由水面水平流速的影响

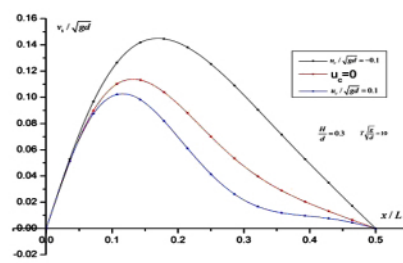


图 12 流对自由水面竖向流速的影响

### 3.3 波、流场中水质点的运动速度

由流函数波浪理论计算所得的水流对自由水面水平流速分布的影响是顺流使表面的同波向的流速增大,使逆波向的流速减小;逆流则使同波向的流速减小,使逆波向的流速加大;对于表面的竖向流速,则在靠近波峰顶处,顺流使之增大,逆流使之减小,而在靠近波谷处则反之。

## 4 非线性波浪荷载

对于二维问题,任一点水压力(包括动水压强和静水压强)可由伯努利方程求得,方程如下:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

忽略静水压强项,则流函数波浪理论动水压强表达式:

$$\frac{p}{\rho g} = -\frac{1}{2g}(u^2 + v^2) + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (17)$$

对于海底,  $v = 0$ 。

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^N nX(n) \cosh[nk(d+z)] \cos[nkx - n\omega t] \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T} \sum_{n=1}^N nX(n) \cosh[nk(d+z)] \cos[nkx - n\omega t] \quad (19)$$

对于规则波,波形在传播过程中保持不变,因此

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial x} \quad (20)$$

至此,得到流函数波浪理论下,时空分布下海床上动水压强表达式:

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{cu}{g} - \frac{u^2}{2g} \quad (21)$$

下面给出线性波理论与流函数波浪理论计算得到的海底动水压力时程的比较。波浪参数:  $H = 4.57 \text{ m}$ ,  $T = 9.0 \text{ s}$ ,  $d = 10.06 \text{ m}$ , 表面洋流速度  $u_{cx} = 1 \text{ m/s}$ , 底面洋流速度  $u_{cb} = 0.1 \text{ m/s}$ 。

图14中流函数计算出来的最大波压力要比图13中线性波浪理论算得的最大波压力小22.5%,图15中考虑洋流(顺流)的流函数波浪要比图14中不考虑洋流(此时默认洋流速度为0)的流函数波浪算得的最大波压力大3.5%。

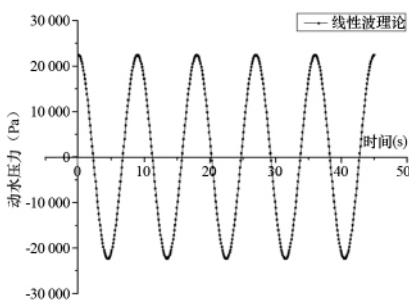


图13 线性波海底动水压力

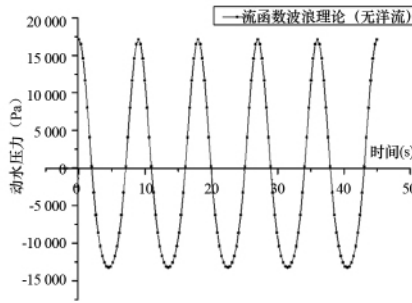


图14 流函数波(无洋流)海底动水压力图

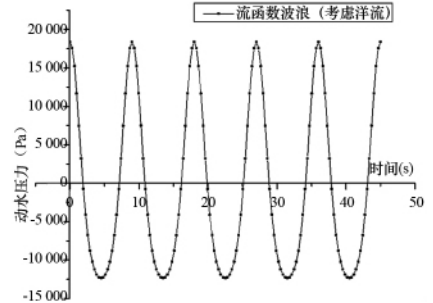


图15 流函数波(有洋流)海底动水压力

## 5 结论

(1) 该文介绍了流函数波浪理论并计算了一系列的波浪动力参数,将非线性流函数波浪理论计算得到的结果与线性波理论计算得到的相关结果进行比较。结果表明,波浪的非线性对波浪的波长、波速、水质点速度、波剖面形状等均有影响,尤其是在浅水范围内,线性波理论已不适用,必须考虑波浪的非线性。

(2) 探讨了流函数波浪理论在考虑洋流作用方面的优势,计算结果表明,流的存在对波浪的波长、波速、水质点速度、波剖面形状等均有影响,在实际工程计算中应予以注意。

(3) 一般流函数计算出来的最大波压力要比线性波浪理论算得的最大波压力小,不考虑洋流(此时默认洋流速度为0)的流函数波浪要比考虑洋流(顺流)的流函数波浪最大波压力小。

## 参考文献

- [1] 邱大洪. 波浪理论及其在工程上的应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985.
- [2] Dean R G. Stream function representation of nonlinear ocean waves[J]. J Geophysical Research, 1965, 70: 4561-4572.
- [3] Dean R G. Evaluation & development of water wave theories for engineering application[A]. In: US Army, Coastal Engineering Research Center, eds. Special Report Vol 1[C]. Virginia: Fort Belvoir, 1974.
- [4] Dean R G. Stream function wave theory and application[J]. Handbook of Coastal and Ocean Engineering, 1990, (1): 63-94.
- [5] Dalrymple R A. A finite amplitude water wave on a linear shear current[J]. Geophysical Research, 1990, 79: 4498-4504.
- [6] Huang Min-chih, Chen Jia-yuan. Stream function wave theory with profile constraints[J]. J Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 1993, 119(1): 106-113.
- [7] Dean R G, Dalrymple R A. Water wave mechanics for engineers and scientists[M]. Singapore: World Scientific, 1991.
- [8] 刘书攻, 李彦彬, 韩洁芬. 非线性流函数波浪理论的求解[J]. 海洋和湖沼, 1984, 15(2): 146-156.